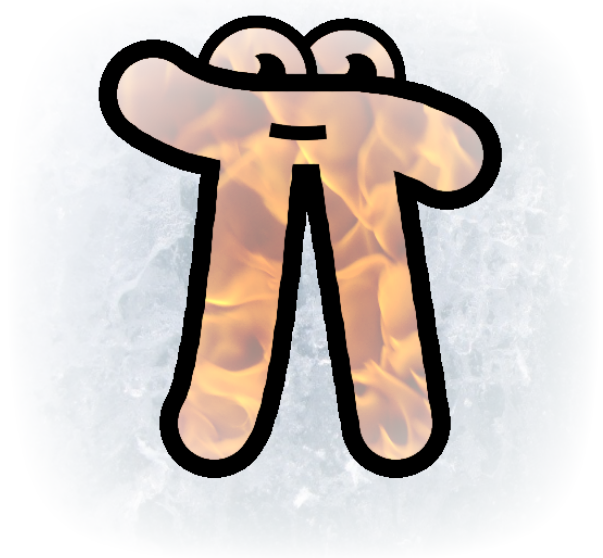


Année académique 21/22
Rapport de projet 2

Équation de la chaleur : deux méthodes numériques



| | |
|--------------------------|------------------------------------|
| Option | 2MAU3MAY |
| Étudiant | Jean HEIBIG |
| Enseignants responsables | Robert EYMARD et Jacques PRINTEMPS |
| Date | 25 novembre 2021 |

| | |
|---|---|
| I. Équation de la chaleur - énoncé du problème | 2 |
| II. Approximation des solutions par des transformées de Fourier | 4 |
| III. Simulation des solutions par l'algorithme de Feynman-Kac | 5 |

I. Équation de la chaleur - énoncé du problème

Nous cherchons à résoudre des équations aux dérivées partielles du second ordre du type *équation de la chaleur*. Nous comparons une méthode déterministe (*cf.* Fourier) et une méthode stochastique (*cf.* Feynman-Kac). Nous nous intéressons aux équations différentielles partielles linéaires de la forme

$$\partial_t v + \alpha \partial_{xx} v = 0$$

avec condition au bord

$$v_T = h$$

Plus précisément, soit

- $T \in \mathbb{R}_+^*$ le temps total de l'évolution de l'équation,
- $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ le coefficient de diffusion thermique,
- $d \in \mathbb{N}^*$ la dimension de l'espace (nous prendrons souvent $d = 2$),
- $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ une condition au bord (initiale ou finale)
- et v solution de l'équation parabolique suivante¹

$$\begin{cases} \forall (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^d, & \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \alpha \nabla^2 v(t, x) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^d, & v(T, x) = h(x) \end{cases}$$

Une solution explicite de cette équation de la chaleur est donnée par [Pha14] :

$$v(t, x) = \int h(y) K(T - t, x, y) dy$$

où K désigne le noyau de la chaleur :

$$K(t, x, y) = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4\alpha t}\right)$$

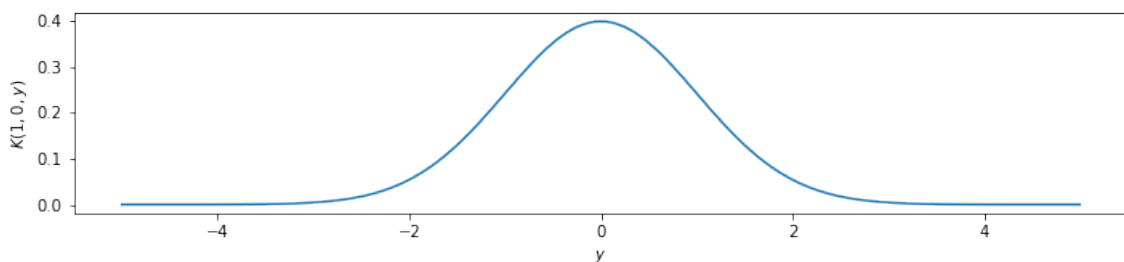


FIGURE 1 – Noyau de la chaleur en dimension $d = 1$ avec $\alpha = 1/2$

1. *cf.* Définition vue en cours, *Simulation de processus et application à l'approximation de quelques problèmes aux dérivées partielles*

Démonstration. Nous avons $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$v(T, x) = \lim_{t \rightarrow T^-} v(t, x) = \int h(y) \lim_{t \rightarrow 0^+} K(t, x, y) dy = \int h(y) \delta_x(y) dy = h(x)$$

Et comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t}(t, x, y) &= \frac{1}{(4\pi\alpha)^{d/2}} \left[-\frac{d/2}{t^{d/2+1}} + \frac{1}{t^{d/2}} \frac{|x-y|^2}{4\alpha t^2} \right] \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4\alpha t}\right) \\ \nabla^2 K(t, x, y) &= \nabla \cdot \left[\frac{1}{(4\pi\alpha t)^{d/2}} \left(-\frac{x-y}{2\alpha t} \right) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4\alpha t}\right) \right] \\ &= \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{d/2}} \left(-\frac{d}{2\alpha t} + \frac{|x-y|^2}{4\alpha^2 t^2} \right) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4\alpha t}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial K}{\partial t}(t, x, y) \end{aligned}$$

Donc $\forall (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^d$,

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \alpha \nabla^2 v(t, x) = \int h(y) \left[-\frac{\partial K}{\partial t}(T-t, x, y) + \alpha \nabla^2 K(T-t, x, y) \right] dy = 0$$

Nous avons donc montré que v est solution de l'équation parabolique ci-dessus. \square

Nous chercherons désormais à résoudre l'équation dans le cas de la dimension $d = 2$ où la condition initiale est donnée par la mise en contact d'une Pi-créature² de température élevée avec l'arrière-plan froid ($h = 300^\circ\text{C}$ en rouge et $h = 0^\circ\text{C}$ en bleu).

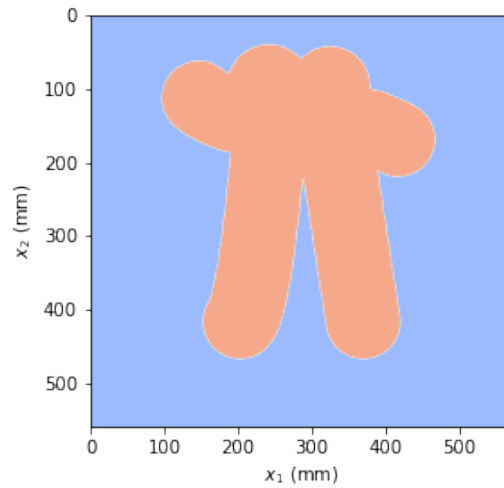


FIGURE 2 – Fonction h , la condition initiale de choc thermique

2. cf. Projet 1 - Fléchettes évolutives et prestige de Pi-créatures

II. Approximation des solutions par des transformées de Fourier

Nous remarquons par ailleurs que la solution est linéaire en h et nous pouvons donc envisager le cas lorsque h est une série de Fourier :

$$h(y) = \int \hat{h}(\xi) \exp(i2\pi y \cdot \xi) d\xi \quad \text{où} \quad \hat{h}(\xi) = \int h(y) \exp(-i2\pi y \cdot \xi) dy$$

Alors

$$\begin{aligned} v(T-t, x) &= \int h(y) K(t, x, y) dy \\ &= \int \int \hat{h}(\xi) \exp(i2\pi y \cdot \xi) \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4\alpha t}\right) d\xi dy \\ &= \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{d/2}} \int \hat{h}(\xi) \left[\int \exp\left(i2\pi y \cdot \xi - \frac{|x-y|^2}{4\alpha t}\right) dy \right] d\xi \\ &= \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{d/2}} \int \hat{h}(\xi) [(4\pi\alpha t)^{d/2} \exp(i2\pi x \cdot \xi - 4\pi^2\alpha t|\xi|^2)] d\xi \\ &= \int [\hat{h}(\xi) \exp(-4\pi^2\alpha t|\xi|^2)] \exp(i2\pi x \cdot \xi) d\xi \end{aligned}$$

Finalement,

$$v(t, x) = \int \hat{H}(\xi) \exp(i2\pi x \cdot \xi) d\xi$$

vaut la transformée de Fourier inverse de $\hat{H} : \xi \mapsto \hat{h}(\xi) \exp(-4\pi^2\alpha(T-t)|\xi|^2)$, ce qui nous fournit une façon pratique d'implémenter le calcul de la solution à l'aide d'une transformée de Fourier rapide (FFT, [Dai12]).

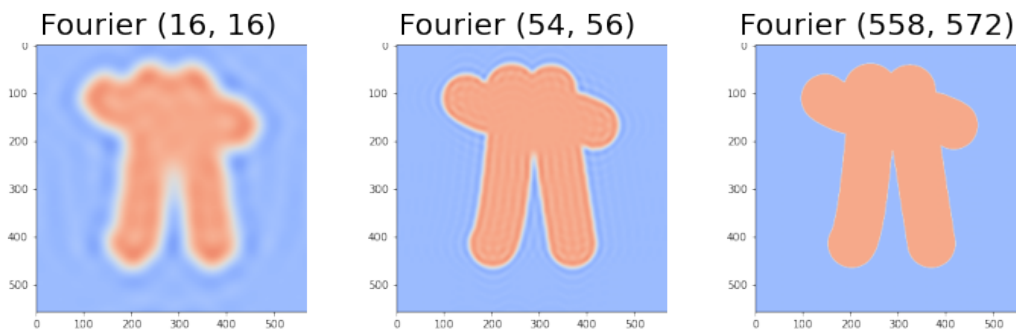


FIGURE 3 – Séries de Fourier \hat{h} pour différents niveaux de précision

III. Simulation des solutions par l'algorithme de Feynman-Kac

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et W un mouvement brownien standard de dimension d et \mathcal{F} -adapté. Soit $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^d$, posons $(X_s^{t,x})_{s \geq t}$ tel que

$$\begin{cases} \forall s \geq t, dX_s^{t,x} = \sqrt{2\alpha} dW_s \\ X_t^{t,x} = x \end{cases}$$

Montrons que

$$v(t, x) = \mathbb{E}[h(X_T^{t,x})]$$

est solution de l'équation parabolique ci-dessus.

Démonstration. Posons $Y_u = v(u, X_u^{t,x})$. Alors la formule d'Itô donne

$$\begin{aligned} dY_u &= \frac{\partial v}{\partial t}(u, X_u^{t,x})dt + \nabla v(u, X_u^{t,x})dX_u^{t,x} + \alpha \nabla^2 v(u, X_u^{t,x})dt \\ &= \nabla v(u, X_u^{t,x})dX_u^{t,x} \end{aligned}$$

Donc

$$Y_T - Y_t = \int \nabla v(u, X_u^{t,x})dX_u^{t,x} = 0$$

C'est-à-dire

$$v(t, X_t^{t,x}) = v(T, X_T^{t,x}) = h(X_T^{t,x})$$

Il vient

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \mathbb{E}[v(t, X_t^{t,x}) | X_t^{t,x} = x] \\ &= \mathbb{E}[h(X_T^{t,x}) | X_t^{t,x} = x] \\ &= \mathbb{E}[h(X_T^{t,x})] \end{aligned}$$

□

Nous réalisons N simulations du brownien $(\bar{X}_i)_{i < N}$ et nous notons

$$\bar{v}_N = \frac{1}{N} \sum_{i < N} h(\bar{X}_i) \rightarrow v$$

Alors, la loi des grands nombres montre que \bar{v}_N tend vers v à la vitesse $1/\sqrt{N}$ qui est indépendante de la dimension d . Cette formule nous permet d'estimer v par une méthode de Monte-Carlo.

Voici ci-dessous une figure illustrant v la solution estimée grâce à la méthode de Feynman-Kac expliquée auparavant, dont les détails d'implémentation sont disponibles sur GitHub.

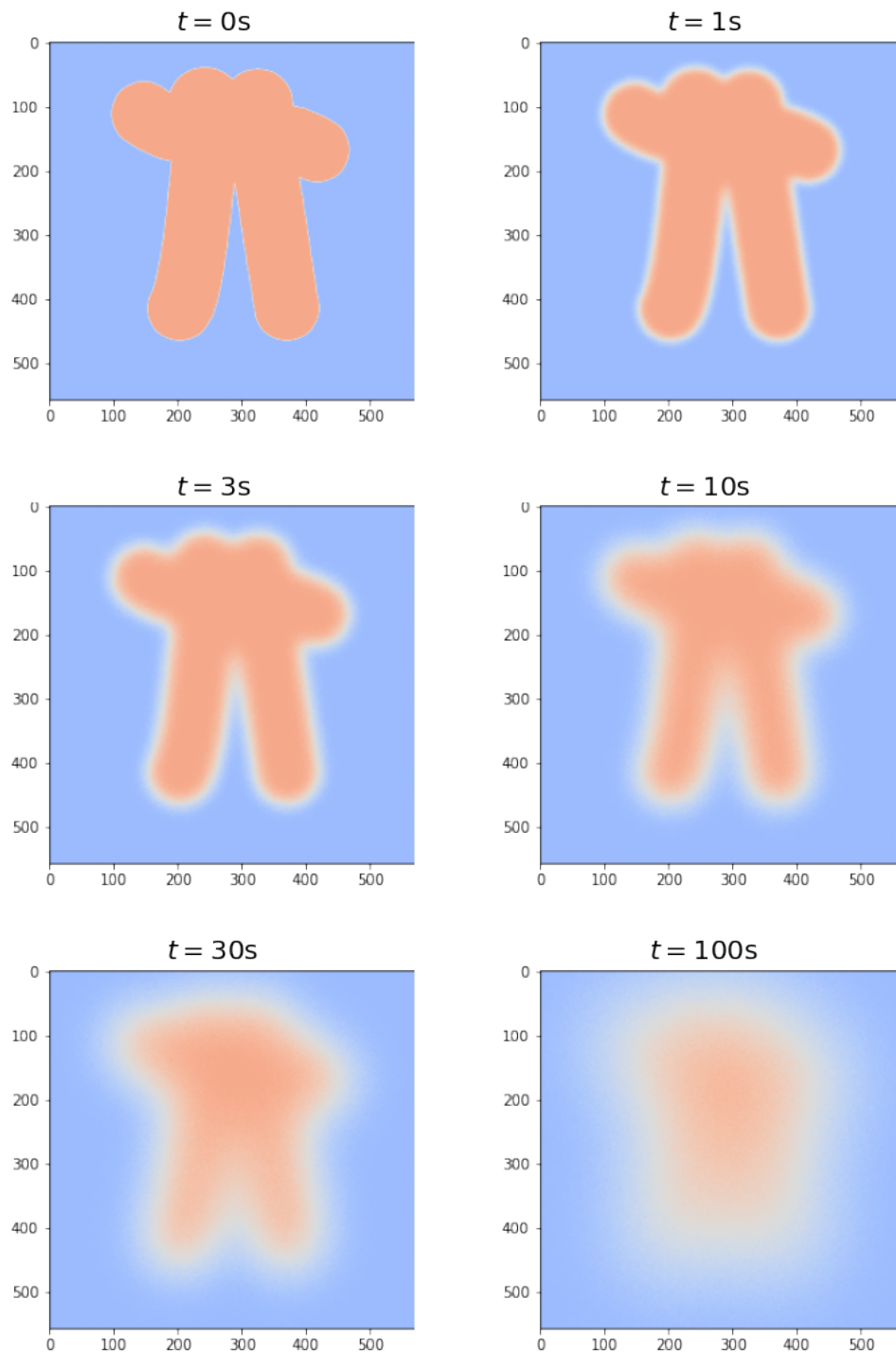


FIGURE 4 – Évolution temporelle par simulation stochastique

Conclusion

Nous avons énoncé l'équation de diffusion de la chaleur et étudié deux méthodes de résolution de cette équation

1. la transformée de Fourier
2. la méthode de Feynman-Kac

Chacune de ces méthodes possède ses avantages et ses inconvénients. Nous notons que la transformée de Fourier permet de résoudre analytiquement l'équation, et donc d'obtenir une formule fermée de la solution. *A contrario*, les simulations stochastiques reposent sur des calculs d'espérance et ne peuvent pas fournir de solution exacte, mais seulement des solutions convergentes.

En revanche, les simulations Monte-Carlo sont robustes face à la dimension de l'espace. Donc, elles offrent une façon d'obtenir une bonne approximation des solutions en grande dimension sans rajouter de temps de calcul. Ainsi, nous privilégierons la transformée de Fourier pour des dimensions d'espace physique (deux ou trois), tandis que nous travaillerons plus efficacement avec la méthode de Feynman-Kac pour analyser des processus de diffusion en grande dimension (par exemple pour le CAC40).

Nous notons aussi qu'il n'existe pas de solution générale pour tous les processus de diffusion, et qu'alors nous ne pourrions pas utiliser la transformée de Fourier pour obtenir des solutions, comme nous l'avons fait pour l'équation de la chaleur.

Références

- [Dai12] Ryan C. DAILED. *The two dimensional heat equation*. http://ramanujan.math.trinity.edu/rdaileda/teach/s12/m3357/lectures/lecture_3_6_short.pdf. 2012.
- [Pha14] Huyen PHAM. *Feynman-Kac representation of fully nonlinear PDEs and applications*. 2014. arXiv : 1409.0625 [math.PR].