Université Gustave Eiffel

Année académique 21/22

Rapport de projet 1

Fléchettes évolutives et prestige de Pi-créatures

Option	2MAU3MAY
Étudiant	Jean Heibig
Enseignants responsables	Robert Eymard et Jacques Printems
Date	8 octobre 2021

École Polytechnique IP Paris

École des Ponts ParisTech

I. Autour de π : estimateurs statistiques

Soit $\Omega \coloneqq [-1, 1]^2$. Définissons sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P})$ la variable aléatoire $J \sim \mathcal{U}(\Omega)$, qui correspond à un *jet* uniforme de fléchette sur la cible Ω. Nous simulons une suite de variables aléatoires indépendantes $(J_n)_{\mathbb{N}} \sim J$. Pour R réel positif, nous notons $\mathrm{B}(0, R)$ le disque centré en 0 et de rayon R. Soit $X_1^J \coloneqq \mathbb{1}_{J_1 \in \mathrm{B}(0,1)}$, alors

$$\mathbb{E}(X_1^J) = \int_\Omega \mathbb{1}_{J_1(\omega) \in \mathrm{B}(0,1)} \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad \sigma_1^2 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4}$$

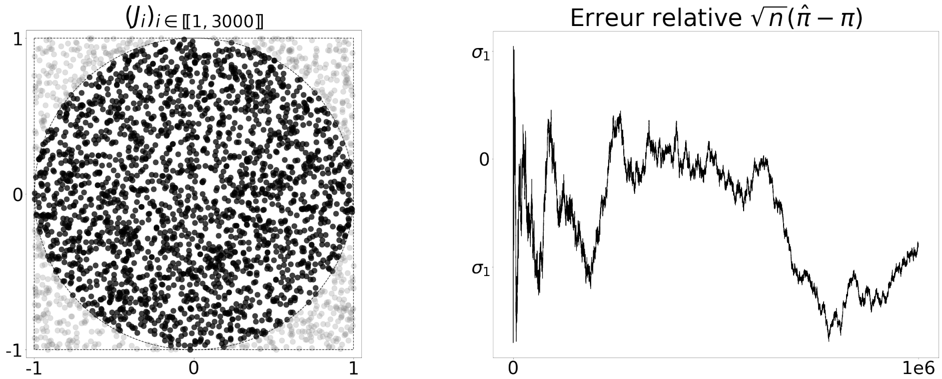

FIGURE 1 – Estimation $\hat{\pi} = 3,140$

Nous considérons la suite $(X_n^J)_{\mathbb{N}}$ de variables aléatoires mutuellement dépendantes où $X_n^J \coloneqq \mathbb{1}_{J_n \in \mathrm{B}(0,R_n)}$ telle que la suite des rayons respecte [1]

$$R_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, R_{n+1}^2 = \max(0, R_n^2 - \|J_n\|^2)$$

Si le jet J_n atteint le disque de rayon R_n, alors le nouveau rayon R_{n+1} correspond à la distance au cercle $\mathrm{C}(0, R_n)$ selon la corde tangente au jet. Sinon, les rayons suivants stationnent à zéro. Nous appelons $(X_n^J)_{\mathbb{N}}$ une *partie* selon la distribution J.

Nous notons $N^J \coloneqq \sum X_n^J$, le *niveau* d'une partie, alors [2]

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N^J) &= \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(N^J \geqslant n) \\
&= \sum_{n \geqslant 1} \frac{\text{Volume}(\text{Boule}^{2n}(0,1))}{\text{Volume}(\text{Carré}^{2n}(0,1))} \\
&= \sum_{n \geqslant 1} \frac{(\pi/4)^n}{n!} \\
&= e^{\pi/4} - 1
\end{aligned}$$

1. Idéee originale de NUMBERPHILE et 3BLUE1BROWN, *Fléchettes en grande dimension*
2. Nous avons vu en cours que le volume de la n-boule vaut $V_n(R) = \pi^{n/2} R^n / \Gamma(n/2 + 1)$

II. Dynamiques de jeu simulées par Monte-Carlo

Nous remplaçons désormais la distribution uniforme J par des distributions paramétriques Π_K de *Pi-créatures*[3]. Pour tirer une fléchette selon Π_K, nous sélectionnons uniformément un point sur une courbe en forme de pi, puis ajoutons un bruit gaussien. L'ensemble K des paramètres contient notamment l'emplacement et la taille. Nous considérons S la variable aléatoire associée au *score* sur la cible de fléchettes[4]. Nous nous intéressons au score total T^{Π_K} d'une telle distribution :

$$T^{\Pi_K} := \sum (XS)_n^{\Pi_K}$$

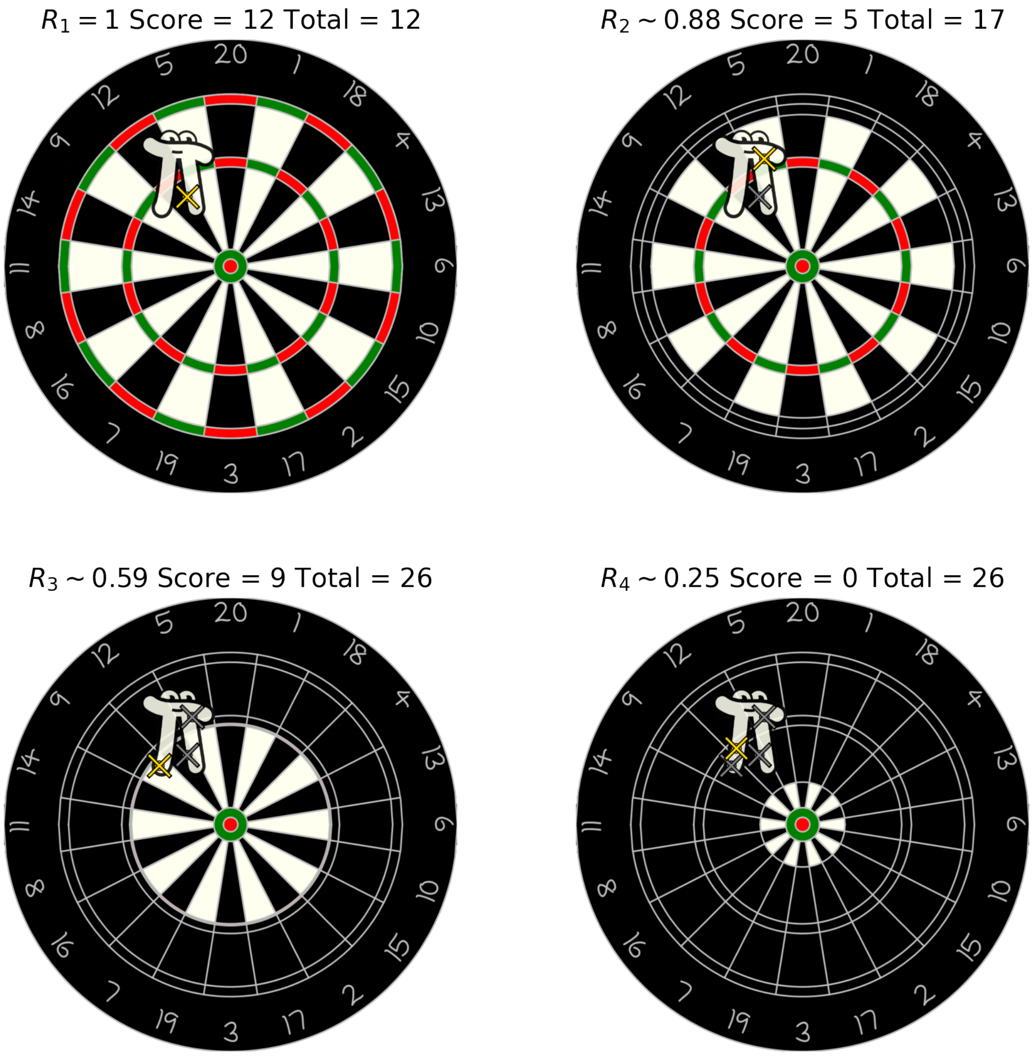

FIGURE 2 – Estimation Monte-Carlo du score total $\hat{T}^{\Pi_K} = 26$

3. Davantage de détails au sujet de K et de Π_K sont donnés sur GitHub - Fléchettes évolutives
4. Description du jeu et règles officielles

III. Perron-Frobenius ou le prestige des Pi-créatures

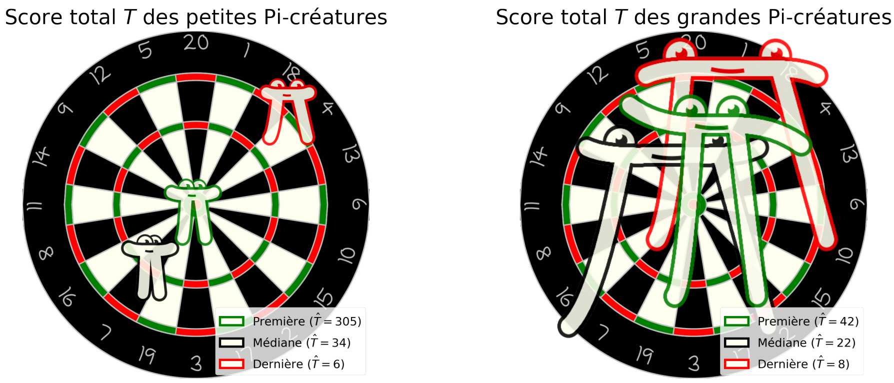

FIGURE 3 – Classement des Pi-créatures dans les deux catégories

Nous utilisons 500 individus dotés de 1000 parties en 20 fléchettes. Nous reprenons le travail vu en cours au sujet du tennis [5] afin de quantifier le prestige des Pi-créatures. Nous pouvons garantir l'irréductibilité de la matrice d'adjacence Q grâce aux règles d'évolution de notre expérience. Nous définissons alors le vecteur de prestige P par

$$P = QP$$

où P est l'unique vecteur propre positif de la matrice stochastique Q, dont l'existence et l'unicité découlent du théorème de Perron-Frobenius. Nous affichons ci-dessous le résultat d'une expérience, qui illustre correctement le fait que la mesure de prestige introduite est corrélée avec le score moyen d'une Pi-créature.

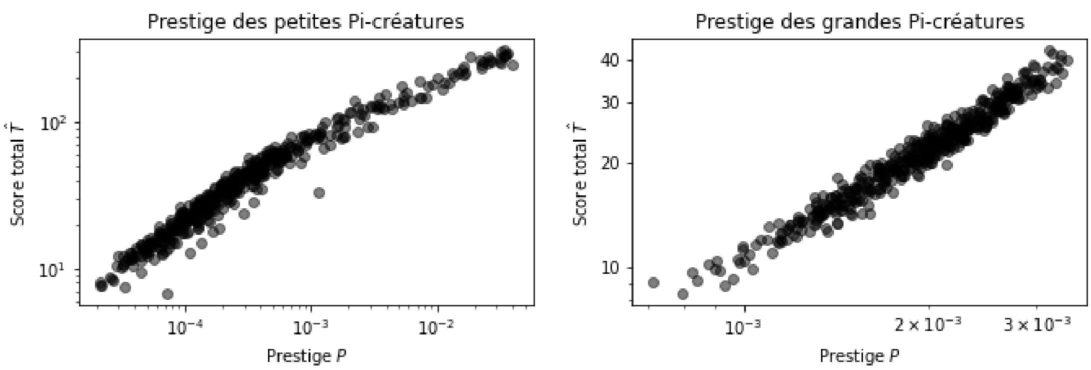

FIGURE 4 – Corrélation du prestige avec le score

5. Who Is the Best Player Ever? A Complex Network Analysis of the History of Professional Tennis