CAPÍTULO

2 Estruturas Básicas: Conjuntos, Funções, Seqüências e Somatórios

Grande parte da matemática discreta é voltada para o estudo das estruturas discretas, usadas para representar objetos discretos. Muitas estruturas discretas importantes foram construídas usando conjuntos, que são coleções de objetos. Entre as estruturas discretas construídas com conjuntos temos a combinatória, coleção não ordenada de objetos extremamente utilizada em contagem; relações, conjuntos de pares ordenados que representam as relações entre objetos; gráficos, conjuntos de vértices e arcos que conectam esses vértices; e as máquinas de estado finito, usadas como modelo de máquinas computacionais. Esses são alguns dos tópicos que estudaremos em capítulos posteriores.

O conceito de função é extremamente importante em matemática discreta. Uma função determina, para cada elemento de um conjunto, exatamente um elemento de um conjunto. Funções desempenham importantes papéis na matemática discreta. Elas são usadas para representar a complexidade computacional de algoritmos, para estudar o tamanho dos conjuntos, para contar objetos e em muitos outros casos. Estruturas úteis como as seqüências e as cadeias são tipos especiais de funções. Neste capítulo, vamos introduzir a noção de seqüência, que representa uma lista ordenada de elementos. Introduziremos alguns tipos importantes de seqüências e direcionaremos o problema de identificação de um modelo para o termo geral de uma seqüência a partir de seu primeiro termo. Usando a noção de seqüência, definiremos o que se entende por um conjunto contável, ou seja, quando podemos listar todos os elementos do conjunto em uma seqüência.

Em nosso estudo sobre matemática discreta, geralmente vamos adicionar termos consecutivos de uma seqüência de nú139meros. Como somar termos de uma seqüência, assim como inserir outros conjuntos de números, é uma ocorrência comum; uma notação especial foi desenvolvida para a adição de tais termos. Nesta seção, introduziremos a notação usada para expressar somatórios. Desenvolveremos fórmulas para certos tipos de somatórios. Esses somatórios aparecem no estudo de matemática discreta como, por exemplo, quando analisamos o número de passos que um procedimento usa para classificar uma lista de números em ordem crescente.

2.1 Conjuntos

Introdução

Nesta seção, estudaremos a estrutura discreta fundamental sob a qual todas as outras estruturas discretas são construídas: o conjunto. Os conjuntos são usados para agrupar objetos. Geralmente, os objetos de um conjunto têm propriedades semelhantes. Por exemplo, todos os estudantes que são inscritos em uma faculdade formam um conjunto. Da mesma forma, todos os estudantes que assistem ao curso de matemática discreta em qualquer faculdade formam um conjunto. Além disso, aqueles estudantes inscritos em sua faculdade que estão cursando matemática discreta formam um conjunto que pode ser obtido a partir dos elementos comuns dos dois primeiros conjuntos. A linguagem dos conjuntos é uma maneira de estudar tais coleções em sua organização. Forneceremos agora uma definição de conjunto. Essa definição é uma definição intuitiva, que não faz parte da teoria formal dos conjuntos.

DEFINIÇÃO 1 Um *conjunto* é uma coleção não ordenada de objetos.

Links

Note que o termo *objeto* foi usado sem especificar o que é um objeto. Essa descrição de um conjunto como uma coleção de objetos, baseada em uma noção intuitiva, foi expressa pela primeira vez pelo matemático alemão Georg Cantor em 1895. A teoria que resulta dessa definição intuitiva

Auto-avaliação

de conjunto e o uso da noção intuitiva que para qualquer propriedade sempre há um conjunto que contém os objetos com essa propriedade, leva a um **paradoxo**, ou inconsistência lógica. Isto foi mostrado pelo filósofo inglês Bertrand Russell em 1902 (veja o Exercício 38 para uma descrição de um desses paradoxos). Essas inconsistências lógicas podem ser evitadas pela construção da teoria dos conjuntos, começando com axiomas. Usaremos a versão original de Cantor da teoria dos conjuntos, conhecida como **teoria ingênua dos conjuntos**, sem desenvolver uma versão axiomática da teoria dos conjuntos, porque todos os conjuntos considerados neste livro podem ser tratados consistentemente usando a teoria original de Cantor.

DEFINIÇÃO 2 Os objetos no conjunto são chamados de *elementos,* ou *membros,* do conjunto. Diz-se que os elementos *pertencem* ao conjunto.

Introduziremos agora a notação usada para descrever pertinência em conjuntos. Escrevemos $a \in A$ para indicar que a é um elemento do conjunto A. A notação $a \notin A$ indica que a não é um elemento do conjunto A. Note que as letras minúsculas são geralmente usadas para indicar elementos dos conjuntos e as maiúsculas para indicar os conjuntos.

Há muitas maneiras de descrever um conjunto. Uma maneira é listar todos os seus elementos, quando possível. A notação usada para indicar todos os membros do conjunto listados é por meio de chaves. Por exemplo, a notação $\{a, b, c, d\}$ representa o conjunto com seus quatro elementos a, b, c e d.

EXEMPLO 1 O conjunto V de todas as vogais do alfabeto da língua inglesa pode ser escrito como $V = \{a, e, i, o, u\}$. ◀

EXEMPLO 2 O conjunto O dos números inteiros positivos ímpares menores que 10 pode ser expresso por $O = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. ◀

EXEMPLO 3 Embora os conjuntos sejam normalmente usados para agrupar elementos com propriedades semelhantes, não há nada que impeça um conjunto de ter elementos que não contenham relação alguma. Por exemplo, $\{a$, 2, Carlos, São Paulo$\}$ é o conjunto que contém os quatro elementos a, 2, Carlos e São Paulo. ◀

Algumas vezes as chaves são usadas para descrever um conjunto sem listar todos os seus elementos. Alguns elementos do conjunto são listados e, então, os *três pontos* (. . .) são usados quando o modelo geral dos elementos é óbvio.

EXEMPLO 4 O conjunto de números inteiros positivos menores que 100 pode ser indicado por $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$. ◀

Exemplos Extras

Outra maneira de descrever um conjunto é usar a notação de **construção do conjunto**. Caracterizamos todos aqueles elementos do conjunto estabelecendo a propriedade, ou propriedades, que eles devem ter. Por exemplo, o conjunto O de todos os números inteiros positivos e ímpares menores que 10 pode ser escrito como

$$O = \{x \mid x \text{ é um número inteiro positivo e ímpar menor que } 10\},$$

ou, especificando o universo do conjunto, como

$$O = \{ x \in \mathbf{Z}^+ \mid x \text{ é impar e } x < 10\}.$$

Usamos geralmente esse tipo de notação para descrever conjuntos quando é impossível listar todos os seus elementos. Por exemplo, o conjunto $\mathbf{Q}^+$ de todos os números racionais positivos pode ser escrito como

$$\mathbf{Q}^+ = \{ x \in \mathbf{R} \mid x = p/q\}, \text{ para todos inteiros positivos } p \text{ e } q.$$

Os próximos conjuntos, cada um usando uma letra em negrito, têm um importante papel em matemática discreta:

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, o conjunto dos **números naturais**
$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, o conjunto dos **números inteiros**
$\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$, o conjunto dos **números inteiros positivos**
$\mathbf{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}, \text{e } q \neq 0\}$, o conjunto dos **números racionais**
$\mathbf{R}$, o conjunto dos **números reais**

(Note que algumas pessoas não consideram 0 como um número natural, então tenha o cuidado de checar como o termo *números naturais* é usado ao ler outros livros.)

Os conjuntos podem ter outros conjuntos como elementos, conforme o Exemplo 5 ilustra.

EXEMPLO 5 O conjunto $\{\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}\}$ é um conjunto que contém quatro elementos, sendo cada um deles um conjunto. Os quatro elementos desse conjunto são **N**, o conjunto dos números naturais; **Z**, o conjunto dos números inteiros; **Q**, o conjunto dos números racionais; e **R**, o conjunto dos números reais. ◀

Lembre-se: Note que o conceito de tipo de dado, ou tipo, em ciência da computação é construído com o conceito de conjunto. Em particular, um **tipo de dado** ou **tipo** é o nome de um conjunto, acrescido do conjunto de operações que podem ser formadas com os objetos desse conjunto. Por exemplo, *booleano* é o nome do conjunto $\{0, 1\}$ acrescido dos operadores para um ou mais elementos desse conjunto, como E, OU e NÃO.

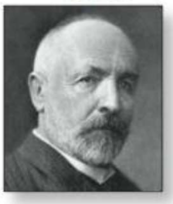
Como muitas proposições matemáticas afirmam que duas coleções especificamente diferentes são o mesmo conjunto, precisamos entender o que significa dois conjuntos serem iguais.

DEFINIÇÃO 3 Dois conjuntos são *iguais* se e somente se eles têm os mesmos elementos. Ou seja, se A e B são conjuntos, então A e B são iguais se e somente se $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$. Escrevemos $A = B$ se A e B forem conjuntos iguais.

EXEMPLO 6 Os conjuntos $\{1, 3, 5\}$ e $\{3, 5, 1\}$ são iguais, porque eles têm os mesmos elementos. Note que a ordem na qual os elementos de um conjunto são listados não é relevante. Note também que não é relevante se um elemento de um conjunto é listado mais de uma vez, então $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5\}$ é o mesmo que o conjunto $\{1, 3, 5\}$ porque eles apresentam os mesmos elementos. ◀

Os conjuntos podem ser representados graficamente usando diagramas de Venn, nomeado em homenagem ao matemático inglês John Venn, que introduziu seu uso em 1881. Nos diagramas de Venn, o **conjunto universo** U, que contém todos os objetos em consideração, é representado por um retângulo. (Note que o conjunto universo varia dependendo dos objetos de interesse.) Dentro desse retângulo, círculos ou outras figuras geométricas são usadas para representar os conjuntos. Algumas vezes, pontos são usados para representar elementos particulares do conjunto. Os diagramas de Venn são geralmente usados para indicar as relações entre conjuntos. Mostraremos como um diagrama de Venn pode ser usado no Exemplo 7.

Links



GEORG CANTOR (1845–1918) Georg Cantor nasceu em St. Petersburgo, na Rússia, onde seu pai foi um comerciante bem-sucedido. Cantor desenvolveu seu interesse em matemática na juventude. Iniciou seus estudou universitários em Zurique, em 1862, mas quando seu pai morreu, ele deixou a cidade. Continuou seus estudos universitários na Universidade de Berlim, em 1863, onde estudou com os eminentes matemáticos Weierstrass, Kummer e Kronecker. Ele recebeu seu título de doutor em 1867, depois de escrever uma dissertação sobre a teoria dos números. Cantor assumiu um cargo na Universidade de Halle em 1869, onde continuou trabalhando até sua morte.

Cantor é considerado o fundador da teoria dos conjuntos. Suas contribuições nessa área incluem a descoberta de que o conjunto dos números reais é não numerável, ou seja, incontável. Ele também é lembrado por suas importantes contribuições em análise. Cantor também se interessava por filosofia e escreveu muitos artigos relacionando sua teoria dos conjuntos à metafísica.

Cantor casou-se em 1874 e teve cinco filhos. Seu temperamento melancólico foi equilibrado pela disposição e felicidade de sua mulher. Embora tenha recebido uma grande herança de seu pai, ele era mal pago como professor. Para suavizar isso, ele tentou obter um cargo com melhor remuneração na Universidade de Berlim. Sua indicação foi barrada por Kronecker, que não concordava com os pensamentos de Cantor sobre a teoria dos conjuntos. Cantor sofreu de uma doença mental nos últimos anos de sua vida. Ele morreu em 1918, em uma clínica psiquiátrica.

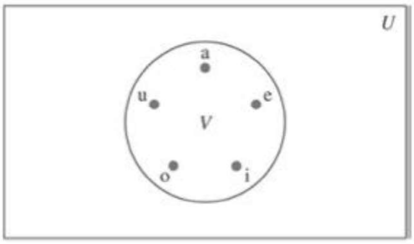


FIGURA 1 **Diagrama de Venn para o Conjunto de Vogais.**

EXEMPLO 7 Desenhe um diagrama de Venn que represente V, o conjunto de vogais do alfabeto da língua inglesa.

Solução: Desenhamos um retângulo para indicar o conjunto universo U, que é o conjunto das 26 letras do alfabeto da língua inglesa. Dentro desse retângulo, desenhamos um círculo para representar V. Dentro desse círculo, indicamos os elementos de V com pontos (veja a Figura 1). ◀

Há um conjunto especial que não tem elementos. Esse conjunto é chamado de **conjunto vazio,** ou **conjunto nulo**, e indicado por $\emptyset$. O conjunto vazio também pode ser indicado por { } (ou seja, representamos o conjunto vazio com um par de chaves que demarcam todos os elementos desse conjunto). Muitas vezes, um conjunto de elementos com certas propriedades revela-se o conjunto nulo. Por exemplo, o conjunto de todos os números inteiros positivos que são maiores que os seus quadrados é um conjunto nulo. Um conjunto com um único elemento é chamado de **conjunto unitário.**

Um erro comum é confundir o conjunto vazio $\emptyset$ com o conjunto $\{\emptyset\}$, que é um conjunto unitário. O único elemento do conjunto $\{\emptyset\}$ é o conjunto vazio por si próprio! Uma analogia útil para lembrar dessa diferença é pensar em pastas do sistema de arquivos de um computador. O conjunto vazio pode ser entendido como uma pasta vazia e o conjunto que contém apenas o conjunto vazio pode ser pensado como uma pasta com exatamente uma pasta dentro, neste caso, a pasta vazia.

DEFINIÇÃO 4 O conjunto A é um *subconjunto* de B se e somente se todo elemento de A for também um elemento de B. Usamos a notação $A \subseteq B$ para indicar que A é um subconjunto do conjunto B.

Vemos que $A \subseteq B$ se e somente se a quantificação

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

for verdadeira.

Links

BERTRAND RUSSELL (1872–1970) Bertrand Russell nasceu em uma proeminente família inglesa ativa no movimento progressivo que tinha um grande comprometimento com a liberdade. Ele tornou-se órfão jovem e ficou sob os cuidados dos seus avós paternos, que o educaram em casa. Entrou para a Trinity College, em Cambridge, em 1890, onde se tornou excelente em matemática e ciências morais. Ele ganhou uma bolsa de estudos com base em seu trabalho sobre os fundamentos de geometria. Em 1910, a Trinity College nomeou-o professor em lógica e filosofia da matemática. Russell batalhou pelas causas progressivas ao longo de sua vida. Ele mantinha grandes visões pacifistas e seus protestos contra a Segunda Guerra foram causa de sua demissão da Trinity College. Ele ficou preso por 6 meses em 1918, por causa de um artigo que escreveu e que foi taxado de aliciante. Russell lutou pelo direito do voto feminino na Grã-Bretanha. Em 1961, com 89 anos, ele foi preso pela segunda vez pelos protestos a favor do desarmamento nuclear.

O maior trabalho de Russell foi o desenvolvimento dos princípios que poderiam ser usados como fundamentos de toda a matemática. Seu trabalho mais famoso é o *Principia Mathematica,* escrito com Alfred North Whitehead, que tentou deduzir toda a matemática usando um conjunto de axiomas primitivos. Ele escreveu muitos livros sobre filosofia, física e idéias políticas. Russell ganhou o Prêmio Nobel de Literatura em 1950.

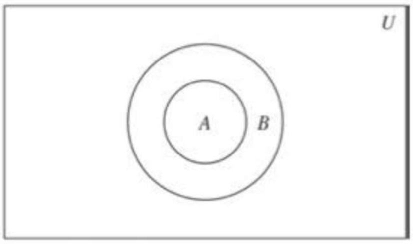


FIGURA 2 Diagrama de Venn que mostra que *A* é um Subconjunto de *B*.

EXEMPLO 8 O conjunto de todos os números inteiros positivos ímpares menores que 10 é um subconjunto do conjunto de todos os números inteiros positivos menores que 10, o conjunto de números racionais é um subconjunto do conjunto de números reais, o conjunto de todos os graduandos de ciência da computação em sua escola é um subconjunto do conjunto de todos os estudantes de sua escola e o conjunto de todas as pessoas da China é um subconjunto do conjunto de todas as pessoas da China (ou seja, é um subconjunto de si próprio). ◀

O Teorema 1 mostra que todo conjunto não vazio S tem, pelo menos, dois subconjuntos, o conjunto vazio e o próprio conjunto S, ou seja, $\emptyset \subseteq S$ e $S \subseteq S$.

TEOREMA 1 Para todo conjunto S,
(*i*) $\emptyset \subseteq S$ e (*ii*) $S \subseteq S$.

Demonstração: Demonstraremos (*i*) e deixaremos a demonstração de (*ii*) como um exercício.

Considere S como um conjunto. Para mostrar que $\emptyset \subseteq S$, devemos mostrar que $\forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in S)$ é verdadeira. Como o conjunto vazio não contém elementos, temos que $x \in \emptyset$ é sempre falsa. Temos que a proposição condicional $x \in \emptyset \rightarrow x \in S$ é sempre verdadeira, pois sua hipótese é sempre falsa e uma proposição condicional com uma hipótese falsa é verdadeira. Ou seja, $\forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in S)$ é verdadeira. Isto completa a demonstração de (*i*). Note que isto é um exemplo de demonstração por vacuidade. ◁

Quando desejamos enfatizar que o conjunto A é um subconjunto do conjunto B, mas que $A \neq B$, escrevemos $A \subset B$ e dizemos que A é um **subconjunto estrito** de B. Para $A \subset B$ ser verdadeira, deve ser o caso de $A \subseteq B$ e deve existir um elemento x de B que não é um elemento de A. Ou seja, A é um subconjunto estrito de B se

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \land \exists x(x \in B \land x \notin A)$$

for verdadeira. Os diagramas de Venn podem ser usados para ilustrar que um conjunto A é um subconjunto de um conjunto B. Desenhamos o conjunto universo U como um retângulo. Dentro desse retângulo, desenhamos um círculo para B. Como A é um subconjunto de B, desenhamos um círculo para A dentro do círculo para B. Essa relação é mostrada na Figura 2.

Links

JOHN VENN (1834–1923) John Venn nasceu em uma família do subúrbio de Londres conhecida por sua filantropia. Ele freqüentou escolas londrinas e conquistou seu diploma em matemática na Caius College, em Cambridge, em 1857. Foi eleito membro de sua faculdade e manteve esse cargo até sua morte. Ele freqüentou o seminário em 1859 e, depois de uma breve carreira religiosa, retornou a Cambridge, onde desenvolveu trabalhos na área de ciência moral. Além de seu trabalho em matemática, Venn tinha interesse em história, e escreveu intensamente sobre sua faculdade e sua família.

O livro de Venn, *Lógica Simbólica*, torna claras algumas idéias apresentadas originalmente por Boole. Nesse livro, Venn apresenta um desenvolvimento sistemático de um método que usa figuras geométricas, conhecido agora como *diagrama de Venn*. Hoje, esses diagramas são usados principalmente para analisar argumentos lógicos e ilustrar relações entre conjuntos. Além disso, com seus trabalhos em lógica simbólica, Venn fez contribuições para a teoria da probabilidade, descritas em seu livro teórico largamente usado nesta área.

Uma maneira de mostrar que dois conjuntos têm os mesmos elementos é mostrar que cada conjunto é um subconjunto do outro. Em outras palavras, podemos mostrar que se A e B são conjuntos com $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$. Isto se torna uma maneira útil de mostrar que dois conjuntos são iguais. Ou seja, $A = B$, em que A e B são conjuntos, se e somente se $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ e $\forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$, ou de modo análogo, se e somente se $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Os conjuntos podem ter outros conjuntos como elementos. Por exemplo, temos os conjuntos

$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \text{ e } B = \{x \mid x \text{ é um subconjunto do conjunto } \{a, b\}\}.$$

Note que esses dois conjuntos são iguais, ou seja, $A = B$. Note também que $\{a\} \in A$, mas $a \notin A$.

Usamos conjuntos em muitos problemas de contagem e, para tais aplicações, precisamos discutir o tamanho dos conjuntos.

DEFINIÇÃO 5 Considere S como um conjunto. Se há exatamente n elementos distintos em S, em que n é um número inteiro não negativo, dizemos que S é um *conjunto finito* e que n é *cardinal* de S. O cardinal de S é indicado por $|S|$.

EXEMPLO 9 Considere A como o conjunto de números inteiros positivos ímpares menores que 10. Então, $|A| = 5$. ◄

EXEMPLO 10 Considere S como o conjunto de letras do alfabeto da língua inglesa. Então, $|S| = 26$. ◄

EXEMPLO 11 Como o conjunto nulo não tem elementos, temos que $|\emptyset| = 0$. ◄

Temos também interesse em conjuntos que não são finitos.

DEFINIÇÃO 6 Um conjunto é dito *infinito* se ele não é finito.

EXEMPLO 12 O conjunto de números inteiros positivos é infinito. ◄

Exemplos Extras

A cardinalidade dos conjuntos infinitos será discutida na Seção 2.4.

O Conjunto de Partes

Muitos problemas envolvem teste de todas as combinações de elementos de um conjunto para ver se eles satisfazem alguma propriedade. Para considerar todas as combinações de elementos de um conjunto S, construímos um novo conjunto que tem como elementos todos os subconjuntos de S.

DEFINIÇÃO 7 Dado um conjunto S, o *conjunto das partes* de S é o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto S. O conjunto de partes de S é indicado por $P(S)$.

EXEMPLO 13 Qual o conjunto das partes do conjunto $\{0, 1, 2\}$?

Exemplos Extras

Solução: O conjunto das partes $P(\{0, 1, 2\})$ é o conjunto de todos os subconjuntos de $\{0, 1, 2\}$. Portanto,

$$P(\{0, 1, 2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

Note que o conjunto vazio e o próprio conjunto são elementos desse conjunto de subconjuntos. ◄

EXEMPLO 14 Qual o conjunto das partes do conjunto vazio? Qual o conjunto das partes do conjunto $\{\emptyset\}$?

Solução: O conjunto vazio tem exatamente um subconjunto, ou seja, ele mesmo. Conseqüentemente,

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

O conjunto $\{\emptyset\}$ tem exatamente dois subconjuntos, ou seja, $\emptyset$ e o próprio conjunto $\{\emptyset\}$. Assim,

$$P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$ ◀

Se um conjunto tem n elementos, então o seu conjunto de partes tem 2^n elementos. Demonstraremos esse fato de várias maneiras em seções subseqüentes do texto.

Produto Cartesiano

Freqüentemente, a ordem dos elementos em uma coleção é importante. Como os conjuntos não são ordenados, é necessária uma estrutura diferente para representar coleções ordenadas. Isso é determinado pela ***n*-upla ordenada.**

DEFINIÇÃO 8 A *n-upla ordenada* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é a coleção ordenada que tem a_1 como seu primeiro elemento, a_2 como seu segundo elemento, ... e a_n como seu n-ésimo elemento.

Dizemos que duas n-uplas ordenadas são iguais se e somente se cada par correspondente de seus elementos é igual. Em outras palavras, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ se e somente se $a_i = b_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Em particular, 2-uplas são chamadas de **pares ordenados.** Os pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se e somente se $a = c$ e $b = d$. Note que (a, b) e (b, a) não são iguais, a menos que $a = b$.

Muitas das estruturas discretas que estudaremos nos próximos capítulos são baseadas na noção do *produto cartesiano* dos conjuntos (assim chamado depois de René Descartes). Primeiro definiremos o produto cartesiano de dois conjuntos.

Links

RENÉ DESCARTES (1596–1650) René Descartes nasceu em uma família nobre perto de Tours, na França, aproximadamente 200 milhas a sudoeste de Paris. Ele foi o terceiro filho da primeira esposa de seu pai; ela morreu alguns dias após seu nascimento. Por causa da frágil saúde de René, seu pai, um juiz provinciano, abdicou das lições formais de seu filho até os 8 anos, quando René entrou para um colégio jesuíta em La Flèche. Em conseqüência de seu estado de saúde, o reitor da escola permitia que ele permanecesse descansando até mais tarde. A partir daí, Descartes passava suas manhãs na cama; ele considerava esse tempo como as suas horas mais produtivas de pensamento.

Descartes deixou a escola em 1612, mudando-se para Paris, onde passou 2 anos estudando matemática. Ele obteve um diploma de direito em 1616, na Universidade de Poitiers. Aos 18 anos, Descartes desanimou com os estudos e decidiu conhecer o mundo. Mudou-se para Paris e tornou-se um apostador de sucesso. Entretanto, ele se cansou da vida rude e mudou-se para o subúrbio de Saint-Germain, onde devotou sua vida aos estudos matemáticos. Quando seus amigos apostadores o encontraram, decidiu sair da França e entrar para a carreira militar. Entretanto, ele nunca foi um combatente. Um dia, enquanto se protegia do frio em uma sala aquecida no acampamento militar, ele teve muitas alucinações, as quais revelaram sua carreira futura como um matemático e filósofo.

Depois de terminar sua carreira militar, ele viajou pela Europa. Em seguida, passou alguns anos em Paris, onde estudou matemática e filosofia e construiu instrumentos ópticos. Descartes decidiu se mudar para a Holanda, onde passou 20 anos percorrendo todo o país, desenvolvendo seu mais importante trabalho. Durante esse tempo, ele escreveu muitos livros, incluindo o *Discours,* que contém sua contribuição para a geometria analítica, área pela qual é mais conhecido. Fez também contribuições fundamentais para a filosofia.

Em 1649, Descartes foi convidado pela Rainha Christina para visitar sua corte na Suécia, como seu tutor em filosofia. Embora fosse relutante em viver no que ele chamava de "a terra de ursos entre rochas e gelo", ele finalmente aceitou seu convite e mudou-se para a Suécia. Infelizmente, o inverno de 1649–1650 foi extremamente intenso. Descartes pegou uma pneumonia e morreu em fevereiro.

DEFINIÇÃO 9 Considere A e B como conjuntos. O *produto cartesiano* de A e B, indicado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), em que $a \in A$ e $b \in B$. Assim,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

EXEMPLO 15 Considere A como o conjunto de todos os estudantes em uma universidade e B, como o conjunto de todos os cursos oferecidos por essa universidade. Qual o produto cartesiano de $A \times B$?

Exemplos Extras

Solução: O produto cartesiano de $A \times B$ consiste em todos os pares ordenados de forma (a, b), em que a é um estudante da universidade e b, um curso oferecido por essa universidade. O conjunto $A \times B$ pode ser usado para representar todas as possíveis matrículas em um curso da universidade. ◀

EXEMPLO 16 Qual o produto cartesiano de $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$?

Solução: O produto cartesiano de $A \times B$ é

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$ ◀

Um subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$ é chamado de **relação** do conjunto A com o conjunto B. Os elementos de R são pares ordenados, em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo, a B. Por exemplo, $R = \{(a, 0), (a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (c, 0), (c, 3)\}$ é uma relação do conjunto $\{a, b, c\}$ com o conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$. Estudaremos as relações mais a fundo no Capítulo 8.

Os produtos cartesianos $A \times B$ e $B \times A$ não são iguais, a menos que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ (de modo que $A \times B = \emptyset$) ou $A = B$ (veja os exercícios 26 e 30, no final desta seção). Isto é ilustrado no Exemplo 17.

EXEMPLO 17 Mostre que o produto cartesiano $B \times A$ não é igual ao produto cartesiano $A \times B$, em que A e B são os conjuntos do Exemplo 16.

Solução: O produto cartesiano $B \times A$ é

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

Isso não é igual a $A \times B$, que foi encontrado no Exemplo 16. ◀

O produto cartesiano de mais de dois conjuntos também pode ser definido.

DEFINIÇÃO 10 O *produto cartesiano* dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, indicado por $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, é o conjunto de n-uplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, em que a_i pertence a A_i para $i = 1, 2, \ldots, n$. Em outras palavras,

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

EXEMPLO 18 Qual é o produto cartesiano de $A \times B \times C$, em que $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$?

Solução: O produto cartesiano de $A \times B \times C$ consiste em todos os trios ordenados (a, b, c), em que $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$. Assim,

$$A \times B \times C = \{(0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 2, 0), (0, 2, 1), (0, 2, 2), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 0), (1, 2, 1), (1, 2, 2)\}.$$ ◀

Usando Notação de Conjuntos com Quantificadores

Às vezes, restringimos o domínio de uma sentença determinada explicitamente fazendo uso de uma notação específica. Por exemplo, $\forall x \in S(P(x))$ indica a quantificação universal de $P(x)$ de todos os elementos do conjunto S. Em outras palavras, $\forall x \in S(P(x))$ representa $\forall x(x \in S \to P(x))$. Semelhantemente, $\exists x \in S(P(x))$ indica a quantificação existencial de $P(x)$ sobre os elementos em S. Ou seja, $\exists x \in S(P(x))$ representa $\exists x(x \in S \wedge P(x))$.

EXEMPLO 19 Qual o significado das proposições $\forall x \in \mathbf{R}\ (x^2 \geq 0)$ e $\exists x \in \mathbf{Z}\ (x^2 = 1)$?

Solução: A proposição $\forall x \in \mathbf{R}(x^2 \geq 0)$ afirma que para todo número real x, $x^2 \geq 0$. Essa proposição pode ser expressa como "O quadrado de todo número real é não negativo." Essa é uma proposição verdadeira.

A proposição $\exists x \in \mathbf{Z}(x^2 = 1)$ afirma que existe um número inteiro x, tal que $x^2 = 1$. Essa proposição pode ser expressa como "Há um número inteiro cujo quadrado é 1". Isso também é verdadeiro, pois $x = 1$ é tal número inteiro (assim como -1). ◀

Conjuntos-Verdade de Quantificadores

Vamos agora combinar conceitos da teoria dos conjuntos com os de predicados lógicos. Dados um predicado P e um domínio D, definimos o **conjunto-verdade** de P como o conjunto de elementos x em D para que $P(x)$ seja verdadeira. O conjunto-verdade de $P(x)$ é indicado por $\{x \in D \mid P(x)\}$.

EXEMPLO 20 Quais são os conjuntos-verdade dos predicados $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$, em que o domínio é o conjunto dos números inteiros e $P(x)$ é "$|x| = 1$," $Q(x)$ é "$x^2 = 2$" e $R(x)$ é "$|x| = x$"?

Solução: O conjunto-verdade de P, $\{x \in \mathbf{Z} \mid |x| = 1\}$, é o conjunto dos números inteiros com $|x| = 1$. Como $|x| = 1$ quando $x = 1$ ou $x = -1$, e para nenhum outro número inteiro x, vemos que o conjunto-verdade de P é o conjunto $\{-1, 1\}$.

O conjunto-verdade de Q, $\{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 = 2\}$, é o conjunto dos números inteiros com $x^2 = 2$. Esse é um conjunto vazio, pois não há nenhum número inteiro x para que $x^2 = 2$.

O conjunto-verdade de R, $\{x \in \mathbf{Z} \mid |x| = x\}$, é o conjunto dos números inteiros com $|x| = x$. Como $|x| = x$ se e somente se $x \geq 0$, temos que o conjunto-verdade R é $\mathbf{N}$, o conjunto dos números inteiros não negativos. ◀

Note que $\forall x\, P(x)$ é verdadeira sobre o domínio U se e somente se o conjunto-verdade de P for o conjunto U. Da mesma forma, $\exists x\, P(x)$ é verdadeira sobre o domínio U se e somente se o conjunto-verdade de P não for vazio.

Exercícios

1. Liste todos os elementos dos conjuntos abaixo.

a) $\{x \mid x$ é um número real, tal que $x^2 = 1\}$

b) $\{x \mid x$ é um número inteiro positivo menor que $12\}$

c) $\{x \mid x$ é o quadrado de um número inteiro e $x < 100\}$

d) $\{x \mid x$ é um número inteiro, tal que $x^2 = 2\}$

2. Use a notação de construção de conjuntos para dar uma descrição de cada um dos conjuntos abaixo.

a) $\{0, 3, 6, 9, 12\}$

b) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

c) $\{m, n, o, p\}$

3. Determine se cada um dos pares dos conjuntos a seguir são iguais.

a) $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5\}$, $\{5, 3, 1\}$

b) $\{\{1\}\}$, $\{1, \{1\}\}$

c) $\emptyset$, $\{\emptyset\}$

4. Suponha que $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 6\}$, $C = \{4, 6\}$ e $D = \{4, 6, 8\}$. Determine quais desses conjuntos são subconjuntos de outro desses conjuntos.

5. Para cada um dos conjuntos abaixo, determine se 2 é um elemento do conjunto.

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x$ é um número inteiro maior que $1\}$

b) $\{x \in \mathbf{R} \mid x$ é o quadrado de um número inteiro$\}$

c) $\{2, \{2\}\}$

d) $\{\{2\}, \{\{2\}\}\}$

e) $\{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$

f) $\{\{\{2\}\}\}$

6. Para cada um dos conjuntos do Exercício 5, determine se $\{2\}$ é um elemento do conjunto.

7. Determine se cada uma das proposições abaixo é verdadeira ou falsa.

a) $0 \in \emptyset$ **b)** $\emptyset \in \{0\}$
c) $\{0\} \subset \emptyset$ **d)** $\emptyset \subset \{0\}$
e) $\{0\} \in \{0\}$ **f)** $\{0\} \subset \{0\}$
g) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$

8. Determine se cada uma das proposições abaixo é verdadeira ou falsa.

a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ **b)** $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
c) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$ **d)** $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
e) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ **f)** $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
g) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$

9. Determine se cada uma das proposições abaixo é verdadeira ou falsa.

a) $x \in \{x\}$ **b)** $\{x\} \subseteq \{x\}$ **c)** $\{x\} \in \{x\}$
d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$ **e)** $\emptyset \subseteq \{x\}$ **f)** $\emptyset \in \{x\}$

10. Use um diagrama de Venn para ilustrar o subconjunto dos números inteiros ímpares no conjunto de todos os números inteiros positivos não excedentes a 10.

11. Use um diagrama de Venn para ilustrar o conjunto de todos os meses do ano cujos nomes não contêm a letra R no conjunto de todos os meses do ano.

12. Use um diagrama de Venn para ilustrar a relação $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$.

13. Use um diagrama de Venn para ilustrar a relação $A \subset B$ e $B \subset C$.

14. Use um diagrama de Venn para ilustrar a relação $A \subset B$ e $A \subset C$.

15. Suponha que A, B e C sejam conjuntos, tal que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Mostre que $A \subseteq C$.

16. Encontre dois conjuntos A e B, tal que $A \in B$ e $A \subseteq B$.

17. Qual é a cardinalidade de cada um dos conjuntos abaixo?

a) $\{a\}$
b) $\{\{a\}\}$
c) $\{a, \{a\}\}$
d) $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$

18. Qual é a cardinalidade de cada um dos conjuntos abaixo?

a) $\emptyset$ **b)** $\{\emptyset\}$
c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ **d)** $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

19. Encontre o conjunto de partes para cada um dos conjuntos abaixo, em que a e b são elementos distintos.

a) $\{a\}$
b) $\{a, b\}$
c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

20. Você pode concluir que $A = B$ se A e B são dois conjuntos com o mesmo conjunto de partes?

21. Quantos elementos cada um dos conjuntos abaixo têm, se a e b são elementos distintos?

a) $P(\{a, b, \{a, b\}\})$
b) $P(\{\emptyset, a, \{a\}, \{\{a\}\}\})$
c) $P(P(\emptyset))$

22. Determine se cada um dos conjuntos abaixo é o conjunto de partes de um conjunto, em que a e b são elementos distintos.

a) $\emptyset$ **b)** $\{\emptyset, \{a\}\}$
c) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$ **d)** $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

23. Considere $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{y, z\}$. Encontre

a) $A \times B$ **b)** $B \times A$

24. Qual o produto cartesiano de $A \times B$, em que A é o conjunto de cursos oferecidos pelo departamento de matemática em uma universidade e B, o conjunto de professores de matemática nessa universidade?

25. Qual o produto cartesiano de $A \times B \times C$, em que A é o conjunto de todas as empresas aéreas e B e C são o conjunto de todas as cidades dos Estados Unidos?

26. Suponha que $A \times B = \emptyset$, em que A e B são conjuntos. O que você pode concluir?

27. Considere A como um conjunto. Mostre que $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$.

28. Considere $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$ e $C = \{0, 1\}$. Encontre

a) $A \times B \times C$ **b)** $C \times B \times A$
c) $C \times A \times B$ **d)** $B \times B \times B$

29. Quantos elementos diferentes $A \times B$ tem, se A tem m elementos e B, n elementos?

30. Mostre que $A \times B \neq B \times A$, em que A e B são conjuntos não vazios, a menos que $A = B$.

31. Explique por que $A \times B \times C$ e $(A \times B) \times C$ não são iguais.

32. Explique por que $(A \times B) \times (C \times D)$ e $A \times (B \times C) \times D$ não são iguais.

33. Transcreva cada uma das quantificações abaixo em português e determine seu valor-verdade.

a) $\forall x \in \mathbf{R}\, (x^2 \neq -1)$ **b)** $\exists x \in \mathbf{Z}\, (x^2 = 2)$
c) $\forall x \in \mathbf{Z}\, (x^2 > 0)$ **d)** $\exists x \in \mathbf{R}\, (x^2 = x)$

34. Transcreva cada uma das quantificações abaixo em português e determine seu valor-verdade.

a) $\exists x \in \mathbf{R}\, (x^3 = -1)$ **b)** $\exists x \in \mathbf{Z}\, (x + 1 > x)$
c) $\forall x \in \mathbf{Z}\, (x - 1 \in \mathbf{Z})$ **d)** $\forall x \in \mathbf{Z}\, (x^2 \in \mathbf{Z})$

35. Encontre o conjunto-verdade de cada um dos predicados abaixo, em que o domínio é o conjunto dos números inteiros.

a) $P(x)$: "$x^2 < 3$"
b) $Q(x)$: "$x^2 > x$"
c) $R(x)$: "$2x + 1 = 0$"

36. Encontre o conjunto-verdade de cada um dos predicados abaixo, em que o domínio é o conjunto dos números inteiros.

a) $P(x)$: "$x^3 \geq 1$"
b) $Q(x)$: "$x^2 = 2$"
c) $R(x)$: "$x < x^2$"

***37.** Para pares ordenados serem bem definidos, precisamos da propriedade de igualdade que diz que dois pares ordenados são iguais se e somente se os primeiros elementos dos pares forem iguais e os segundos elementos também. Surpreendentemente, em vez de o par ordenado ser tomado como um conceito primitivo, podemos construir pares ordenados usando noções básicas da teoria dos conjuntos. Mostre que se nós definirmos o par ordenado (a, b) como $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, então $(a, b) = (c, d)$ se e somente se $a = c$ e $b = d$. *[Dica:*

Primeiro mostre que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ se e somente se $a = c$ e $b = d$.]

***38.** Este exercício apresenta o **paradoxo de Russell**. Considere S como o conjunto que contém um conjunto x se o conjunto x não pertencer a ele mesmo, para que $S = \{x \mid x \notin x\}$.

a) Mostre a hipótese de que S é um elemento de S leva a uma contradição.

b) Mostre a hipótese de que S não é um elemento de S leva a uma contradição.

Pelos itens (a) e (b), temos que o conjunto S não pode ser definido como foi feito. Esse paradoxo pode ser evitado restringindo os tipos de elementos que os conjuntos podem ter.

***39.** Descreva um procedimento para listar todos os subconjuntos de um conjunto finito.

2.2 Operações com Conjuntos

Introdução

Dois conjuntos podem ser combinados de muitas maneiras diferentes. Por exemplo, começando com o conjunto dos graduandos em matemática e o conjunto dos graduandos em ciência da computação, ambos da sua faculdade, podemos formar o conjunto dos estudantes que são ou graduandos em matemática ou em ciência da computação, o conjunto dos estudantes que são da matemática e da ciência da computação, o conjunto de todos os estudantes que não são graduandos em matemática, e assim por diante.

Links

DEFINIÇÃO 1 Sejam A e B conjuntos. A *união* dos conjuntos A e B, indicada por $A \cup B$, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A ou em B, ou em ambos.

Um elemento x pertence à união dos conjuntos A e B se e somente se x pertencer a A ou x pertencer a B. Isto nos mostra que

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

O diagrama de Venn mostrado na Figura 1 representa a união de dois conjuntos A e B. A área que representa $A \cup B$ é a área sombreada dos círculos que representam ou A ou B.

Daremos alguns exemplos de união de conjuntos.

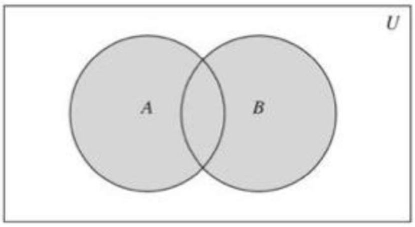
EXEMPLO 1 A união dos conjuntos $\{1, 3, 5\}$ e $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto $\{1, 2, 3, 5\}$; ou seja, $\{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 5\}$. ◀

EXEMPLO 2 A união do conjunto de todos os estudantes de ciência da computação com o conjunto de todos os estudantes de matemática da sua faculdade é o conjunto dos estudantes da sua faculdade que são graduandos ou em matemática ou em ciência da computação (ou em ambas). ◀

DEFINIÇÃO 2 Sejam A e B conjuntos. A *interseção* dos conjuntos A e B, indicada por $A \cap B$, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A e em B, simultaneamente.

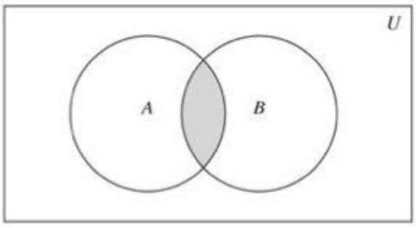
Um elemento x pertence à interseção dos conjuntos A e B se e somente se x pertencer a A e x pertencer a B. Isso nos mostra que

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$



$A \cup B$ está sombreado.

FIGURA 1 Diagrama de Venn que Representa a União de A e B.



$A \cap B$ está sombreado.

FIGURA 2 Diagrama de Venn que Representa a Intersecção de A e B.

O diagrama de Venn mostrado na Figura 2 representa a intersecção de dois conjuntos A e B. A área sombreada, que está entre os dois círculos que representam os conjuntos A e B, é a área que representa a intersecção de A e B.

Daremos alguns exemplos de intersecção de conjuntos.

EXEMPLO 3 A intersecção dos conjuntos $\{1, 3, 5\}$ e $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto $\{1, 3\}$; ou seja, $\{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\}$. ◀

EXEMPLO 4 A intersecção do conjunto de todos os estudantes de ciência da computação com o conjunto de todos os estudantes de matemática de sua faculdade é o conjunto de todos os estudantes que fazem tanto ciência da computação quanto matemática. ◀

DEFINIÇÃO 3 Dois conjuntos são chamados de *disjuntos* se sua intersecção é um conjunto vazio.

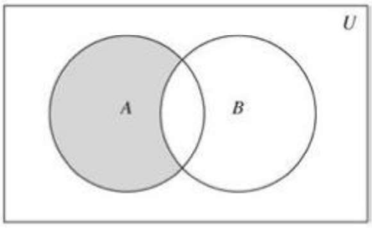
EXEMPLO 5 Considere $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Como $A \cap B = \emptyset$, A e B são disjuntos. ◀

Freqüentemente temos interesse em encontrar a cardinalidade de uma união de dois conjuntos finitos A e B. Note que $|A| + |B|$ faz a contagem de cada elemento que está somente em A e cada elemento que está somente em B, isso faz com que cada elemento que está em ambos, A e B, seja contado duas vezes. Então, se o número de elementos que está em ambos os conjuntos A e B é subtraído de $|A| + |B|$, os elementos em $A \cap B$ serão contados apenas uma vez. Assim,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

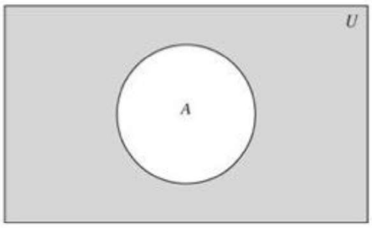
A generalização desse resultado de uniões de um número arbitrário de conjuntos é chamado de **princípio da inclusão-exclusão.** O princípio da inclusão-exclusão é uma técnica importante usada em enumeração. Discutiremos com detalhes esse princípio e outras técnicas de contagem nos capítulos 5 e 7.

Há outras maneiras importantes de combinar conjuntos.



$A - B$ está sombreado.

FIGURA 3 Diagrama de Venn para a Diferença entre A e B.



$\overline{A}$ está sombreado.

FIGURA 4 Diagrama de Venn para o Complemento do Conjunto A.

DEFINIÇÃO 4 Sejam A e B conjuntos. A *diferença* entre A e B, indicada por $A - B$, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A mas não estão em B. A diferença entre A e B é também chamada de *complemento de B em relação a A*.

Um elemento x pertence à diferença de A e B se e somente se $x \in A$ e $x \notin B$. Isso nos mostra que

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

O diagrama de Venn mostrado na Figura 3 representa a diferença entre os conjuntos A e B. A área sombreada dentro do círculo que representa A e fora do círculo que representa B é a área que representa $A - B$.

Daremos alguns exemplos de diferenças de conjuntos.

EXEMPLO 6 A diferença entre $\{1, 3, 5\}$ e $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto $\{5\}$; ou seja, $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$. Isso não é o mesmo que a diferença entre $\{1, 2, 3\}$ e $\{1, 3, 5\}$, que é o conjunto $\{2\}$. ◀

EXEMPLO 7 A diferença entre o conjunto dos estudantes de ciência da computação e o conjunto dos estudantes de matemática da sua faculdade é o conjunto de todos os estudantes de ciência da computação que não são estudantes de matemática. ◀

Uma vez que o conjunto universo U foi especificado, o **complemento** de um conjunto pode ser definido.

DEFINIÇÃO 5 Considere U como o conjunto universo. O *complemento* do conjunto A, indicado por $\overline{A}$, é o complemento de A em relação à U. Em outras palavras, o complemento do conjunto A é $U - A$.

Um elemento pertence a $\overline{A}$ se e somente se $x \notin A$. Isso nos mostra que

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}.$$

Na Figura 4, a área sombreada fora do círculo que representa A é a área que representa $\overline{A}$.

Daremos alguns exemplos do complemento de um conjunto.

TABELA 1 Identidades de Conjuntos.	
Identidade	***Nome***
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	Propriedades dos elementos neutros
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Propriedades de dominação
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Propriedades idempotentes
$\overline{(\overline{A})} = A$	Propriedades da complementação
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Propriedades comutativas
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Propriedades associativas
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Propriedades distributivas
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Leis de De Morgan
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Propriedades de absorção
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Propriedades dos complementares

EXEMPLO 8 Considere $A = \{a, e, i, o, u\}$ (em que o conjunto universo é o conjunto de letras do alfabeto da língua inglesa). Então, $\overline{A} = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$. ◄

EXEMPLO 9 Considere A como o conjunto dos números inteiros positivos maiores que 10 (com o conjunto universo, o conjunto de todos os números inteiros positivos). Então, $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. ◄

Identidades de Conjuntos

A Tabela 1 lista as mais importantes identidades de conjuntos. Demonstraremos muitas dessas identidades aqui, usando três métodos diferentes. Esses métodos são apresentados para ilustrar que geralmente há muitas maneiras diferentes para solucionar um problema. As demonstrações das identidades restantes serão deixadas como exercícios. O leitor deve notar a semelhança entre essas identidades e as equivalências lógicas discutidas na Seção 1.2. De fato, as identidades de conjuntos podem ser demonstradas diretamente a partir da correspondência de equivalências lógicas. Além disso, ambos são casos especiais de identidades firmadas pela álgebra booleana (discutida no Capítulo 11).

Uma maneira de mostrar que dois conjuntos são iguais é mostrar que cada um é um subconjunto do outro. Lembre-se de que mostrar que um conjunto é um subconjunto de um segundo conjunto é mostrar que se um elemento pertence ao primeiro conjunto, então ele deverá pertencer também ao segundo conjunto. Usamos geralmente uma demonstração direta para fazer isso. Ilustraremos esse tipo de demonstração para estabelecer a segunda lei de De Morgan.

EXEMPLO 10 Demonstre que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solução: Para demonstrar que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, mostraremos que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ e que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

Exemplos Extras

Primeiro, mostraremos que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Então, suponha que $x \in \overline{A \cap B}$. Pela definição de complemento, $x \notin A \cap B$. Pela definição de intersecção, $\neg((x \in A) \wedge (x \in B))$ é verdadeira. Aplicando a lei de De Morgan (da lógica), vemos que $\neg(x \in A)$ ou $\neg(x \in B)$. Assim, pela definição de negação, $x \notin A$ ou $x \notin B$. Pela definição de complemento, $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$. Temos que, pela definição de união, $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Isso mostra que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

Depois, mostraremos que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$. Suponha agora que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Pela definição de união, $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$. Usando a definição de complemento, temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$. Conseqüentemente, $\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$ é verdadeira. Pela lei de De Morgan (da lógica), concluímos que $\neg((x \in A) \wedge (x \in B))$ é verdadeira. Pela definição de intersecção, temos que $\neg(x \in A \cap B)$ mantém-se. Usamos a definição de complemento para concluir que $x \in \overline{A \cap B}$. Isso mostra que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$. Como mostramos que cada conjunto é um subconjunto do outro, os dois conjuntos são iguais e a identidade está demonstrada. ◀

Podemos expressar mais sucintamente a razão usada no Exemplo 10 usando a notação de construção do conjunto, como mostra o Exemplo 11.

EXEMPLO 11 Use a notação de construção do conjunto e equivalências lógicas para estabelecer a segunda lei de De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solução: Podemos demonstrar essa identidade seguindo os seguintes passos.

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x \mid x \notin A \cap B\} && \text{pela definição de complemento} \\
&= \{x \mid \neg(x \in (A \cap B))\} && \text{pela definição do símbolo: não pertence} \\
&= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\} && \text{pela definição de intersecção} \\
&= \{x \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} && \text{pela primeira lei de De Morgan para equivalências lógicas} \\
&= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\} && \text{pela definição do símbolo: não pertence} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\} && \text{pela definição de complemento} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} && \text{pela definição de união} \\
&= \overline{A} \cup \overline{B} && \text{pelo significado da notação de construção do conjunto}
\end{aligned}
$$

Note que por trás das definições de complemento, união, relações de conjunto e notação de construção do conjunto, essa demonstração utiliza a primeira lei de De Morgan para equivalências lógicas. ◀

Demonstrar a identidade de conjuntos que envolvem mais de dois conjuntos pelo método que requer mostrar que cada lado da identidade é um subconjunto do outro, normalmente requer que consideremos caminhos com casos diferentes, como ilustrado pela demonstração do Exemplo 12, uma das propriedades distributivas para conjuntos.

EXEMPLO 12 Demonstre a primeira propriedade distributiva da Tabela 1, que afirma que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para todos os conjuntos A, B e C.

Solução: Demonstraremos essa identidade mostrando que cada lado é um subconjunto do outro lado.

Suponha que $x \in A \cap (B \cup C)$. Então, $x \in A$ e $x \in B \cup C$. Pela definição de união, temos que $x \in A$ e $x \in B$ ou $x \in C$ (ou ambos). Conseqüentemente, sabemos que $x \in A$ e $x \in B$ ou que $x \in A$ e $x \in C$. Pela definição de intersecção, temos que $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$. Usando a definição de união, concluímos que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Concluímos que $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

TABELA 2 Uma Tabela de Pertinência para a Propriedade Distributiva.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Agora suponha que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Então, pela definição de união, $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$. Pela definição de intersecção, temos que $x \in A$ e $x \in B$ ou que $x \in A$ e $x \in C$. A partir disso, vemos que $x \in A$ e $x \in B$ ou $x \in C$. Conseqüentemente, pela definição de união, vemos que $x \in A$ e $x \in B \cup C$. Além disso, pela definição de intersecção, temos que $x \in A \cap (B \cup C)$. Concluímos que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. Isto completa a demonstração de identidade. ◄

As identidades de conjunto podem também ser demonstradas usando **tabelas de pertinência.** Consideremos cada combinação de pertinência de elementos em conjuntos e verificamos se os elementos pertencem a ambos os conjuntos na identidade. Para indicar que um elemento está em um conjunto, um 1 é usado; para indicar que um elemento não está no conjunto, um 0 é usado. (O leitor deve notar a semelhança entre as tabelas de pertinência e as tabelas-verdade.)

EXEMPLO 13 Use uma tabela de pertinência para mostrar que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Solução: A tabela de pertinência para essas combinações de conjuntos é mostrada na Tabela 2. Essa tabela tem oito linhas. Pelas colunas de $A \cap (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ serem as mesmas, a identidade é válida. ◄

Identidades de conjuntos adicionais podem ser estabelecidas usando aquelas que já foram demonstradas. Considere o Exemplo 14.

EXEMPLO 14 Considere A, B e C como conjuntos. Mostre que

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}.$$

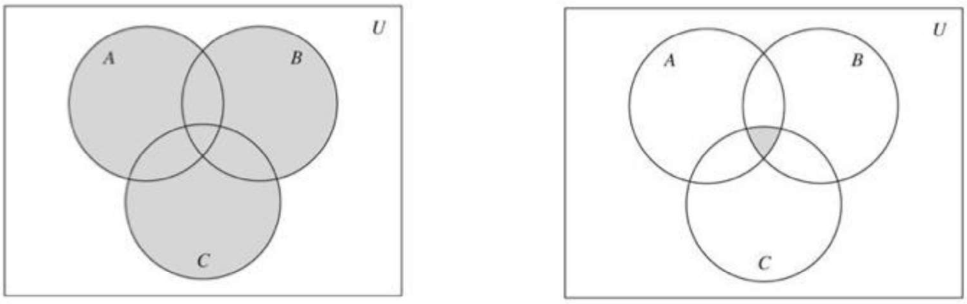
Solução: Temos,

$$\begin{aligned} \overline{A \cup (B \cap C)} &= \overline{A} \cap (\overline{B \cap C}) && \text{pela primeira lei de De Morgan} \\ &= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) && \text{pela segunda lei de De Morgan} \\ &= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A} && \text{pela propriedade comutativa para intersecções} \\ &= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A} && \text{pela propriedade comutativa para uniões.} \end{aligned}$$

◄

Uniões e Interseções Generalizadas

Como as uniões e interseções dos conjuntos satisfazem as propriedades associativas, os conjuntos $A \cup B \cup C$ e $A \cap B \cap C$ são bem definidos; ou seja, o significado dessa notação não é ambíguo quando A, B e C são conjuntos. Ou seja, não temos que usar parênteses para indicar



(a) $A \cup B \cup C$ está sombreado. (b) $A \cap B \cap C$ está sombreado.

FIGURA 5 A União e a Intersecção de A, B e C.

qual operação é realizada primeiro, pois $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. Note que $A \cup B \cup C$ contém aqueles elementos que estão em, pelo menos, um dos conjuntos A, B e C, e que $A \cap B \cap C$ contém aqueles elementos que estão em todos os conjuntos A, B e C. Essas combinações dos três conjuntos, A, B e C, são mostradas na Figura 5.

EXEMPLO 15 Considere $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{0, 3, 6, 9\}$. O que são $A \cup B \cup C$ e $A \cap B \cap C$?

Solução: O conjunto $A \cup B \cup C$ contém aqueles elementos que estão em, pelo menos, um dos conjuntos A, B e C. Assim,

$$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}.$$

O conjunto $A \cap B \cap C$ contém aqueles elementos que estão em todos os três conjuntos A, B e C. Então,

$$A \cap B \cap C = \{0\}.$$ ◀

Podemos também considerar uniões e interseções de um número arbitrário de conjuntos. Usamos as definições abaixo.

DEFINIÇÃO 6 A *união* de uma coleção de conjuntos é o conjunto que contém aqueles elementos que são membros de, pelo menos, um dos conjuntos da coleção.

Usamos a notação

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

para indicar a união dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

DEFINIÇÃO 7 A *interseção* de uma coleção de conjuntos é o conjunto que contém aqueles elementos que são membros de todos os conjuntos da coleção.

Usamos a notação

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

para indicar a interseção dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ilustramos as uniões e interseções generalizadas com o Exemplo 16.

EXEMPLO 16 Considere $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$. Então,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \ldots\} = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

e

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \ldots\} = \{n, n+1, n+2, \ldots\}.$$ ◄

Podemos estender a notação que introduzimos para uniões e interseções a outras famílias de conjuntos. Em particular, podemos usar a notação

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

para indicar a união dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Semelhantemente, a interseção desses conjuntos pode ser indicada por

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Mais usualmente, as notações $\bigcap_{i \in I} A_i$ e $\bigcup_{i \in I} A_i$ são usadas para indicar a interseção e união dos conjuntos A_i para $i \in I$, respectivamente. Note que temos $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I(x \in A_i)\}$ e $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I(x \in A_i)\}$.

EXEMPLO 17 Suponha que $A_i = \{1, 2, 3, \ldots, i\}$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$. Então,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{1, 2, 3, \ldots, i\} = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbf{Z}^+$$

e

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{1, 2, 3, \ldots, i\} = \{1\}.$$

Ao ver que a união desses conjuntos é o conjunto dos números inteiros positivos, note que todo número inteiro positivo está, em pelo menos, um desses conjuntos, porque o inteiro n pertence a $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ e todo elemento dos conjuntos na união é um número inteiro positivo. Ao ver a interseção desses conjuntos, note que o único elemento que pertence a todos os conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ é 1. Para ver isso, note que $A_1 = \{1\}$ e $1 \in A_i$ para $i = 1, 2, \ldots$. ◄

Representação Computacional de Conjuntos

Há várias maneiras de representar conjuntos usando um computador. Um método é juntar os elementos do conjunto de forma não ordenada. Entretanto, se isso for feito, as operações para computar a união, intersecção ou diferença de dois conjuntos podem demorar muito, pois cada uma dessas operações exigiria uma grande busca pelos elementos. Apresentaremos um método para armazenar elementos usando uma ordem arbitrária dos elementos do conjunto universo. Esse método de representar conjuntos torna mais fácil a combinação de conjuntos em computadores.

Suponha que o conjunto universo U seja finito (e de tamanho razoável para que o número de elementos de U não seja maior que a memória do computador a ser usado). Primeiro, especifique uma ordem arbitrária dos elementos de U, por exemplo, $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Represente um subconjunto A de U com a cadeia de bits de extensão n, em que o i-ésimo bit nessa cadeia é 1, se a_i pertencer a A, e 0, se a_i não pertencer a A. O Exemplo 18 irá mostrar essa técnica.

EXEMPLO 18 Considere $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, em que a ordem dos elementos de U é crescente, ou seja, $a_i = i$. Quais cadeias de bits representam o subconjunto de todos os números inteiros ímpares em U, o subconjunto de todos os números inteiros pares em U e o subconjunto dos números inteiros não excedentes a 5 em U?

Solução: A cadeia de bits que representa o conjunto dos números inteiros ímpares em U, ou seja, $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, tem um bit 1 na primeira, terceira, quinta, sétima e nona posições e um zero nas demais posições. Ou seja, é

10 1010 1010.

(Separamos esta cadeia de bits de extensão dez por sua dificuldade de leitura.) Semelhantemente, representamos o subconjunto de todos os números inteiros pares em U, ou seja, $\{2, 4, 6, 8, 10\}$, pela cadeia

01 0101 0101.

O conjunto de todos os números inteiros em U que não excedem 5, ou seja, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, é representado pela cadeia

11 1110 0000. ◄

Usar cadeia de bits para representar conjuntos é uma maneira que facilita o trabalho quando temos de encontrar os complementos, uniões, intersecções e diferenças de conjuntos. Para encontrar uma cadeia de bits para o complemento de um conjunto a partir da cadeia de bits desse conjunto, nós simplesmente trocamos todo 1 por 0 e todo 0 por 1, porque $x \in A$ se e somente se $x \notin \overline{A}$. Note que esta operação corresponde a assumir a negação de cada bit quando associamos um bit com um valor-verdade — com 1 representando verdadeiro e 0, falso.

EXEMPLO 19 Vimos que a cadeia de bits para o conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (com o conjunto universo $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$) é

10 1010 1010.

Qual é a cadeia de bits para o complemento desse conjunto?

Solução: A cadeia de bits para o complemento desse conjunto é obtida pela troca dos 0s por 1s e vice-versa. A partir disto, temos a cadeia

01 0101 0101,

que corresponde ao conjunto $\{2, 4, 6, 8, 10\}$. ◄

Para obter a cadeia de bits para a união e intersecção de dois conjuntos, aplicamos as operações booleanas de lógica binária nas cadeias de bits que representam os dois conjuntos. O bit na i-ésima posição da união é 1 se um dos bits na i-ésima posição nas duas cadeias for 1 (ou ambos) e é 0 quando ambos os bits forem 0. Assim, a cadeia de bits para a união é o operador *OR* da cadeia de bits para os dois conjuntos. O bit na i-ésima posição da cadeia de bits da intersecção é 1 quando os bits na posição correspondente nas duas cadeias forem 1, e 0, quando um dos dois bits for 0 (ou ambos). Assim, a cadeia de bits para a intersecção é o operador *AND* das cadeias de bits para esses dois conjuntos.

EXEMPLO 20 As cadeias de bits para os conjuntos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ são 11 1110 0000 e 10 1010 1010, respectivamente. Use as cadeias de bits para encontrar a união e a intersecção desses conjuntos.

Solução: A cadeia de bits para a união desses conjuntos é

$$11\ 1110\ 0000 \vee 10\ 1010\ 1010 = 11\ 1110\ 1010,$$

que corresponde ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$. A cadeia de bits para a intersecção desses conjuntos é

$$11\ 1110\ 0000 \wedge 10\ 1010\ 1010 = 10\ 1010\ 0000,$$

que corresponde ao conjunto $\{1, 3, 5\}$. ◄

Exercícios

1. Seja A o conjunto de estudantes que mora a um quilômetro de distância da faculdade e B, o conjunto dos estudantes que vão a pé para as aulas. Descreva quais são os estudantes em cada um dos conjuntos abaixo.

a) $A \cap B$ **b)** $A \cup B$
c) $A - B$ **d)** $B - A$

2. Suponha que A seja o conjunto dos veteranos de sua faculdade e B, o conjunto dos estudantes de matemática discreta de sua faculdade. Expresse cada um dos conjuntos abaixo em termos de A e B.

a) o conjunto dos veteranos que assistem às aulas de matemática discreta em sua faculdade
b) o conjunto dos veteranos que não assistem às aulas de matemática discreta em sua faculdade
c) o conjunto dos estudantes que são ou veteranos ou assistem às aulas de matemática discreta em sua faculdade
d) o conjunto dos estudantes que ou não são veteranos ou não assistem às aulas de matemática discreta em sua faculdade

3. Considere $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{0, 3, 6\}$. Encontre

a) $A \cup B$. **b)** $A \cap B$.
c) $A - B$. **d)** $B - A$.

4. Considere $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Encontre

a) $A \cup B$.
b) $A \cap B$.
c) $A - B$.
d) $B - A$.

Nos exercícios 5 a 10, suponha que A seja um subconjunto de algum conjunto universo U.

5. Demonstre a propriedade da complementação da Tabela 1 mostrando que $\overline{\overline{A}} = A$.

6. Demonstre as propriedades dos elementos neutros e da Tabela 1 mostrando que

a) $A \cup \emptyset = A$. **b)** $A \cap U = A$.

7. Demonstre as propriedades de dominação da Tabela 1 mostrando que

a) $A \cup U = U$.
b) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

8. Demonstre as propriedades idempotentes da Tabela 1 mostrando que

a) $A \cup A = A$.
b) $A \cap A = A$.

9. Demonstre as propriedades dos complementares da Tabela 1 mostrando que

a) $A \cup \overline{A} = U$.
b) $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

10. Mostre que

a) $A - \emptyset = A$.
b) $\emptyset - A = \emptyset$.

11. Considere A e B como conjuntos. Demonstre as propriedades comutativas da Tabela 1 mostrando que

a) $A \cup B = B \cup A$.
b) $A \cap B = B \cap A$.

12. Demonstre a primeira propriedade de absorção da Tabela 1 mostrando que se A e B forem conjuntos, então $A \cup (A \cap B) = A$.

13. Demonstre a segunda propriedade de absorção da Tabela 1 mostrando que se A e B forem conjuntos, então $A \cap (A \cup B) = A$.

14. Encontre os conjuntos A e B, se $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B - A = \{2, 10\}$ e $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

15. Demonstre a primeira lei de De Morgan da Tabela 1 mostrando que se A e B forem conjuntos, então $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

a) mostrando que cada lado é um subconjunto do outro lado.
b) usando uma tabela de pertinência.

16. Considere A e B como conjuntos. Mostre que

a) $(A \cap B) \subseteq A$.
b) $A \subseteq (A \cup B)$.
c) $A - B \subseteq A$.
d) $A \cap (B - A) = \emptyset$.
e) $A \cup (B - A) = A \cup B$.

17. Mostre que se A, B e C são conjuntos, então $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$,

a) mostrando que cada lado é um subconjunto do outro lado.
b) usando uma tabela de pertinência.

18. Considere A, B e C como conjuntos. Mostre que

a) $(A \cup B) \subseteq (A \cup B \cup C)$.
b) $(A \cap B \cap C) \subseteq (A \cap B)$.
c) $(A - B) - C \subseteq A - C$.
d) $(A - C) \cap (C - B) = \emptyset$.
e) $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$.

19. Mostre que se A e B são conjuntos, então $A - B = A \cap \overline{B}$.

20. Mostre que se A e B são conjuntos, então $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

21. Demonstre a primeira propriedade associativa da Tabela 1, mostrando que se A, B e C são conjuntos, então $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

22. Demonstre a segunda propriedade associativa da Tabela 1, mostrando que se A, B e C são conjuntos, então $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

23. Demonstre a segunda propriedade distributiva da Tabela 1, mostrando que se A, B e C são conjuntos, então $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

24. Considere A, B e C como conjuntos. Mostre que $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$.

25. Considere $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Encontre

a) $A \cap B \cap C$. **b)** $A \cup B \cup C$.
c) $(A \cup B) \cap C$. **d)** $(A \cap B) \cup C$.

26. Desenhe o diagrama de Venn para cada uma das combinações abaixo dos conjuntos A, B e C.

a) $A \cap (B \cup C)$ **b)** $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
c) $(A - B) \cup (A - C) \cup (B - C)$

27. Desenhe o diagrama de Venn para cada uma das combinações abaixo dos conjuntos A, B e C.

a) $A \cap (B - C)$ **b)** $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
c) $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C})$

28. Desenhe o diagrama de Venn para cada uma das combinações abaixo dos conjuntos A, B, C e D.

a) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$ **b)** $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{D}$
c) $A - (B \cap C \cap D)$

29. O que você pode dizer sobre os conjuntos A e B se sabemos que

a) $A \cup B = A$? **b)** $A \cap B = A$?
c) $A - B = A$? **d)** $A \cap B = B \cap A$?
e) $A - B = B - A$?

30. Você pode concluir que $A = B$ se A, B e C são conjuntos, tal que

a) $A \cup C = B \cup C$? **b)** $A \cap C = B \cap C$?
c) $A \cup B = B \cup C$ e $A \cap C = B \cap C$?

31. Considere A e B como subconjuntos de um conjunto universo U. Mostre que $A \subseteq B$ se e somente se $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

A **diferença simétrica** de A e B, indicada por $A \oplus B$, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A ou B, mas não em ambos.

32. Encontre a diferença simétrica de $\{1, 3, 5\}$ e $\{1, 2, 3\}$.

33. Encontre a diferença simétrica do conjunto de estudantes de ciência da computação e do conjunto de estudantes de matemática de sua faculdade.

34. Desenhe um diagrama de Venn para a diferença simétrica dos conjuntos A e B.

35. Mostre que $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

36. Mostre que $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$.

37. Mostre que A é um subconjunto de um conjunto universo U, então

a) $A \oplus A = \emptyset$. **b)** $A \oplus \emptyset = A$.
c) $A \oplus U = \overline{A}$. **d)** $A \oplus \overline{A} = U$.

38. Mostre que se A e B são conjuntos, então

a) $A \oplus B = B \oplus A$. **b)** $(A \oplus B) \oplus B = A$.

39. O que você pode dizer sobre os conjuntos A e B, se $A \oplus B = A$?

***40.** Determine se a diferença simétrica é associativa, ou seja, se A, B e C são conjuntos, temos que $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$?

***41.** Suponha que A, B e C sejam conjuntos, tal que $A \oplus C = B \oplus C$. É o caso de $A = B$?

42. Se A, B, C e D são conjuntos, temos que $(A \oplus B) \oplus (C \oplus D) = (A \oplus C) \oplus (B \oplus D)$?

43. Se A, B, C e D são conjuntos, temos que $(A \oplus B) \oplus (C \oplus D) = (A \oplus D) \oplus (B \oplus C)$?

***44.** Mostre que se A, B e C são conjuntos, então

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

(Este é um caso especial do princípio da inclusão-exclusão, que será estudado no Capítulo 7.)

***45.** Considere $A_i = \{1, 2, 3, \ldots, i\}$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$. Encontre

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. **b)** $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

***46.** Considere $A_i = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots, i\}$. Encontre

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. **b)** $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

47. Considere A_i como o conjunto de todas as cadeias de bits não vazias (ou seja, cadeias de bits com, pelo menos, um de extensão) de extensão não excedente a i. Encontre

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. **b)** $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

48. Encontre $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ se para todo número inteiro positivo i,

a) $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$.
b) $A_i = \{0, i\}$.
c) $A_i = (0, i)$, ou seja, o conjunto dos números reais x com $0 < x < i$.
d) $A_i = (i, \infty)$, ou seja, o conjunto dos números reais x com $x > i$.

49. Encontre $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ se para todo número inteiro positivo i,

a) $A_i = \{-i, -i+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, i-1, i\}$.
b) $A_i = \{-i, i\}$.
c) $A_i = [-i, i]$, ou seja, o conjunto dos números reais x com $-i \leq x \leq i$.
d) $A_i = [i, \infty]$, ou seja, o conjunto dos números reais x com $x \geq i$.

50. Suponha que o conjunto universo seja $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Expresse cada um dos conjuntos abaixo com cadeias de bits, em que o i-ésimo bit na cadeia é 1, se i estiver no conjunto, e 0, se não estiver no conjunto.

a) $\{3, 4, 5\}$ **b)** $\{1, 3, 6, 10\}$
c) $\{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$

51. Use o mesmo conjunto universo do exercício anterior para encontrar o conjunto específico para cada uma das cadeias abaixo.

a) 11 1100 1111 **b)** 01 0111 1000
c) 10 0000 0001

52. Quais os subconjuntos de um conjunto universo finito que são representados pelas cadeias de bits abaixo?

a) a cadeia apenas com zeros
b) a cadeia apenas com uns

53. Qual é a cadeia de bits, correspondente à diferença de dois conjuntos?

54. Qual é a cadeia de bits, correspondente à diferença simétrica de dois conjuntos?

55. Mostre como os operadores binários nas cadeias de bits podem ser usados para encontrar as combinações de $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, c, d, g, p, t, v\}$, $C = \{c, e, i, o, u, x, y, z\}$ e $D = \{d, e, h, i, n, o, t, u, x, y\}$.

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$
c) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$ **d)** $A \cup B \cup C \cup D$

56. Como a união e a intersecção de n conjuntos, todos subconjuntos do conjunto universo U, podem ser encontradas usando cadeias de bits?

O **sucessor** do conjunto A é o conjunto $A \cup \{A\}$.

57. Encontre os sucessores dos conjuntos abaixo.

a) $\{1, 2, 3\}$ **b)** $\emptyset$
c) $\{\emptyset\}$ **d)** $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

58. Quantos elementos o sucessor de um conjunto com n elementos tem?

Às vezes o número de vezes que um elemento ocorre em uma coleção não ordenada é relevante. **Multiconjuntos** são coleções não ordenadas de elementos, em que cada elemento pode ocorrer mais de uma vez. A notação $\{m_1 \cdot a_1 \cdot m_2 \cdot a_2, \ldots m_r \cdot a_r\}$ indica o multiconjunto com o elemento a_1 aparecendo m_1 vezes, o elemento a_2 aparecendo m_2 vezes e assim por diante. Os números m_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ são chamados de **multiplicidades** dos elementos a_i, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Considere P e Q como dois multiconjuntos. A **união** dos multiconjuntos P e Q é o multiconjunto em que a multiplicidade de um elemento é o máximo de suas multiplicidades em P e Q. A **interseção** de P e Q é o multiconjunto em que a multiplicidade de um elemento é o mínimo das multiplicidades em P e Q. A **diferença** de P e Q é o multiconjunto em que a multiplicidade de um elemento é a multiplicidade do elemento em P menos a multiplicidade em Q, a menos que sua diferença seja negativa, em que a multiplicidade será 0. A **soma** de P e Q é o multiconjunto em que a multiplicidade de um elemento é a soma das multiplicidades em P e Q. A união, intersecção e diferença de P e Q são indicadas por $P \cup Q$, $P \cap Q$, e $P - Q$, respectivamente (em que essas operações não deverão ser confundidas com suas análogas operações para conjuntos). A soma de P e Q é indicada por $P + Q$.

59. Considere A e B como os multiconjuntos $\{3 \cdot a, 2 \cdot b, 1 \cdot c\}$ e $\{2 \cdot a, 3 \cdot b, 4 \cdot d\}$, respectivamente. Encontre

a) $A \cup B$.
b) $A \cap B$.
c) $A - B$.
d) $B - A$.
e) $A + B$.

60. Suponha que A seja o multiconjunto que tenha como seus elementos os tipos de equipamentos de computadores necessários para um departamento da universidade, em que as multiplicidades são os números de partes que cada tipo necessita e B é o multiconjunto análogo para um segundo departamento da universidade. Por exemplo, A poderia ser o multiconjunto $\{107 \cdot \text{computadores}, 44 \cdot \text{routers}, 6 \cdot \text{servidores}\}$ e B poderia ser o multiconjunto $\{14 \cdot \text{computadores}, 6 \cdot \text{routers}, 2 \cdot \text{computadores principais}\}$.

a) Qual combinação de A e B representa o equipamento que a universidade deveria comprar, assumindo que ambos os departamentos usam o mesmo equipamento?
b) Qual combinação de A e B representa o equipamento que será usado por ambos os departamentos se ambos usam o mesmo equipamento?
c) Qual combinação de A e B representa o equipamento que o segundo departamento usa, mas não o primeiro departamento, se ambos os departamentos usam o mesmo equipamento?
d) Qual combinação de A e B representa o equipamento que a universidade deverá comprar se os departamentos não dividem equipamento?

Conjuntos fuzzy são usados em inteligência artificial. Cada elemento no conjunto universo U tem um **grau de pertinência** em um conjunto fuzzy S, o qual é um número real entre 0 e 1 (incluindo 0 e 1). O conjunto fuzzy S é indicado pela lista de elementos com seus graus de pertinência (elementos com grau 0 de pertinência não são listados). Por exemplo, escrevemos $\{0{,}6$ Alice, 0,9 Brian, 0,4 Fred, 0,1 Oscar, 0,5 Rita$\}$ para o conjunto F (de pessoas famosas) para indicar que Alice tem um grau 0,6 de pertinência em F, Brian tem um grau 0,9 de pertinência em F, Fred tem um grau 0,4 de pertinência em F, Oscar tem um grau 0,1 de pertinência em F e Rita tem um grau 0,5 de pertinência em F (assim, Brian é o mais famoso e Oscar o menos famoso dessas pessoas). Suponha também que R seja o conjunto de pessoas ricas com $R = \{0{,}4\ \text{Alice}, 0{,}8\ \text{Brian}, 0{,}2\ \text{Fred}, 0{,}9\ \text{Oscar}, 0{,}7\ \text{Rita}\}$.

61. O **complemento** de um conjunto fuzzy S é o conjunto $\overline{S}$, com o grau de pertinência de um elemento em $\overline{S}$ igual a 1 menos o grau de pertinência desse elemento em S. Encontre $\overline{F}$ (o conjunto fuzzy das pessoas que não são famosas) e $\overline{R}$ (o conjunto fuzzy das pessoas que não são ricas).

62. A **união** de dois conjuntos fuzzy S e T é o conjunto fuzzy $S \cup T$, em que o grau de pertinência de um elemento em $S \cup T$ é o máximo dos graus de pertinência desse elemento em S e em T. Encontre o conjunto fuzzy $F \cup R$ das pessoas ricas ou famosas.

63. A **interseção** de dois conjuntos fuzzy S e T é o conjunto fuzzy $S \cap T$, em que o grau de pertinência de um elemento em $S \cap T$ é o mínimo dos graus de pertinência desse elemento em S e em T. Encontre o conjunto fuzzy $F \cap R$ de pessoas ricas e famosas.

2.3 Funções

Introdução

Em muitos momentos delimitamos, para cada elemento de um conjunto, um determinado elemento de um segundo conjunto (o qual pode ser o mesmo do primeiro). Por exemplo, suponha que para cada estudante na aula de matemática discreta é determinada uma nota que é uma letra do conjunto $\{A, B, C, D, F\}$. Suponha que a nota de cada aluno é: A para Adams, C para Chou, B para Goodfriend, A para Rodriguez e F para Stevens. Essa determinação das notas é ilustrada na Figura 1.

Essa determinação é um exemplo de função. O conceito de função é extremamente importante em matemática e em ciência da computação. Por exemplo, em matemática discreta as funções são usadas na definição de estruturas discretas, como seqüências e cadeias. As funções são também usadas para representar quanto tempo um computador leva para resolver problemas de um determinado tamanho. Muitos programas de computação e sub-rotinas são criados para calcular valores de funções. As funções recursivas, que são funções definidas em termos delas mesmas, são usadas pela ciência da computação; elas serão estudadas no Capítulo 4. Esta seção revê os conceitos básicos que envolvem funções necessárias para a matemática discreta.

DEFINIÇÃO 1 Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma *função f* de A para B é uma determinação de exatamente um elemento de B para cada elemento de A. Escrevemos $f(a) = b$ se b for o único elemento de B determinado pela função f para o elemento a de A. Se f é uma função de A para B, escrevemos $f: A \to B$.

Lembre-se: As funções são também chamadas de **mapeamentos** ou **transformações.**

Auto-avaliação

As funções são específicas em muitos casos. Às vezes, constatamos explicitamente as determinações, como na Figura 1. Normalmente damos uma fórmula, como $f(x) = x + 1$, para definir uma função. Outras vezes, usamos um programa de computação para especificar uma função.

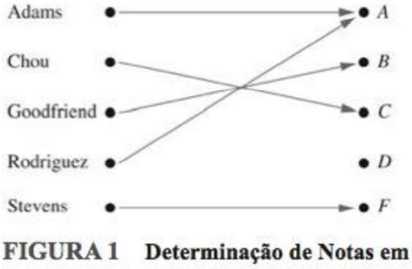


FIGURA 1 **Determinação de Notas em uma Sala de Matemática Discreta.**