Geometria Analítica - Semana 6

Retas e Planos

Professor: Victor M. Cunha

Instituto de Matemática
e Estatística (IME) - UFBA

Maio 2022

Sumário

Reta a partir de dois pontos

- Dados dois pontos $A, B \in \mathbb{R}^n$, vamos considerar a reta r que passa por estes pontos.
- Temos que um ponto $P \in \mathbb{R}^n$ pertence à esta reta se e somente se ele for colinear com A e B. Ou seja, se $\overrightarrow{AP}$ for paralelo à $\overrightarrow{AB}$.
- Deste modo, associamos a cada ponto $P \in r$ um $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$$
$$P = A + \lambda \vec{v}$$

  onde $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é chamado de vetor diretor da reta, e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro real.
- Esta é chamada a equação vetorial da reta r.
- Uma forma de interpretar a equação vetorial da reta é que $\vec{v}$ representa a direção da reta, enquanto A fixa sua posição no espaço.

- Deste modo, dados um ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e um vetor $\vec{v} = (a, b, c)$, a equação vetorial da reta que passa por A e tem a direção $\vec{v}$ é

$$P = A + \lambda\vec{v}$$
$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)$$

- Note que a representação vetorial de uma reta não é única. Poderíamos, por exemplo, ter tomado qualquer outro ponto $A' \in r$.
- Também poderíamos ter pego qualquer outro vetor não-nulo $\vec{w} \neq 0$ e paralelo à $\vec{v}$ para representar a direção da reta.
- Deste modo, uma mesma reta apresenta diversos vetores diretores.
- Podemos também interpretar o parâmetro como o tempo, e $s = s_0 + t\vec{v}$ como a posição de uma partícula em movimento uniforme com velocidade $\vec{v}$. A trajetória da partícula é então a reta.

- Dados os pontos $A(1,2,5)$ e $B(0,1,0)$, determine P sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $BP = 3AP$.
- Dada a reta $r\colon (1,0,0)+\lambda(1,1,1)$ e os pontos $A(1,1,1)$ e $B(0,0,1)$, encontrar o ponto da reta r equidistante de A e B.
- Dados $A(0,2,1)$ e $r\colon (0,2,-2)+\lambda(1,-1,2)$, encontre os pontos de r que distam $\sqrt{3}$ de A. A distância de A à r é maior, menor ou igual à $\sqrt{3}$?
- Dados $a, b, A, B.C \in \mathbb{R}$, encontre equações vetoriais para as retas $r\colon y = ax+b$ e $s\colon Ax+By+C=0$ do plano.
- Encontre, se existir, o ponto de interseção das retas r e s:
  - $r\colon (3,1,2)+\lambda(2,1,0)$ e $s\colon (0,0,1)+\mu(1,0,1)$.
  - $r\colon (1,1,0)+\lambda(2,1,-1)$ e $s\colon (3,1,2)+\mu(-4,-2,2)$.
  - $r\colon (1,1,0)+\lambda(1,0,0)$ e $s\colon (0,0,1)+\mu(0,2,1)$.

- A partir da equação vetorial da reta, podemos encontrar outras formas de representar uma reta.
- Primeiramente, fazendo a igualdade termo-a-termo da equação vetorial, temos as chamadas equações paramétricas da reta:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

- Se tivermos $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, podemos isolar λ em cada equação e obter:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

  que são as chamadas equações simétricas da reta.
- Note que as equações simétricas nos dizem que em uma reta as variações Δx, Δy e Δz são proporcionais entre si.

UFBA

- Se $a \neq 0$ na equação paramétrica, podemos isolar o parâmetro λ na primeira equação e substitui-lo nas outras, obtendo:

$$\begin{cases} y = m_1x + n_1 \\ z = p_1x + q_1 \end{cases}$$

  que são chamadas de equações reduzidas da reta na variável x.
- Neste caso, expressamos as coordenadas y e z como funções afim da variável x.
- No caso do plano, temos uma única equação reduzida $y = m_1x + n_1$, estudada no ensino médio, e gráfico de uma função afim $y = f(x)$.
- De modo análogo, caso $b \neq 0$ ou $c \neq 0$, podemos considerar equações reduzidas nas variáveis y ou z:

$$\begin{cases} x = m_2y + n_2 \\ z = p_2y + q_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = m_3z + n_3 \\ y = p_3z + q_3 \end{cases}$$

- Note que na equação reduzida $a \neq 0$, $b \neq 0$ ou $c \neq 0$, uma vez que $\vec{v} = (a, b, c) \neq \vec{0}$.
- Deste modo, sempre podemos encontrar equações reduzidas em ao menos uma das três variáveis x, y ou z.
- Portanto, de modo geral, sempre podemos expressar uma reta como um sistema de equações afim:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

  estas são chamadas de equações gerais da reta.
- Considerando os vetores $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ e $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, e a equação vetorial da reta $\vec{p} = (x, y, z) = \vec{p}_0 + \lambda\vec{v}$, note que $\vec{n}_1 \cdot \vec{p} = -D_1$ e $\vec{n}_2 \cdot \vec{p} = -D_2$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Deste modo:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{v} = \vec{n}_2 \cdot \vec{v} = 0$$

- E $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são dois vetores *L.I.* perpendiculares à reta.

- Encontre, caso existam, as equações vetorial, paramétrica, simétrica, reduzida e geral das seguintes retas:
  - A reta que passa pelos pontos $A(1,1,0)$ e $B(2,-1,1)$.
  - A reta paralela ao eixo x e que passa pelo ponto $A(1,2,1)$.
  - A reta $x = y = z$.
- Considere a reta dada pelas seguintes equações gerais:

$$\begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ 3x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

  encontre uma equação vetorial para esta reta.
- Considere a reta dada pelas equações reduzidas:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = -x + 2 \end{cases}$$

  encontre o ponto desta reta mais próximo da origem.
- Considere a equação geral de uma reta no plano $Ax + By + C = 0$. Interprete geometricamente o vetor $\vec{n} = (A, B)$.

- Considerando duas retas no plano, temos duas possibilidades para a sua posição relativa: Elas podem ser paralelas ou concorrentes.
- Por simplicidade, vamos considerar retas coincidentes como um caso particular de retas paralelas.
- Duas retas $r: A+\lambda\vec{r}$ e $s: B+\mu\vec{s}$ são paralelas se tiverem a mesma direção, ou seja $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são paralelos:

$$\vec{r}=\alpha\vec{s}$$

- Se duas retas forem paralelas, elas serão coincidentes caso tenham pontos em comum. Podemos então fazer $B\in r$, ou seja $\overrightarrow{AB}$ paralelo à $\vec{r}$ (e à $\vec{s}$).

$$\overrightarrow{AB} \,//\, \vec{r} \,//\, \vec{s}$$

- Duas retas coincidentes são essencialmente a mesma reta. Note, no entanto, que os pontos A e B e os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não precisam ser iguais. Isto porque a representação da reta pela equação vetorial não é única.

- No plano, se duas retas não são paralelas, elas serão concorrentes, ou seja terão exatamente um ponto de interseção.
- De fato, se $\vec{r}, \vec{s} \in \mathbb{R}^2$ não são paralelos, eles formam uma base do $\mathbb{R}^2$, e podemos expressar $\overrightarrow{AB}$ como uma combinação linear deles:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \alpha_1\vec{r} + \alpha_2\vec{s} \\ B - A &= \alpha_1\vec{r} + \alpha_2\vec{s} \\ B - \alpha_2\vec{s} &= A + \alpha_1\vec{r} \end{aligned}$$

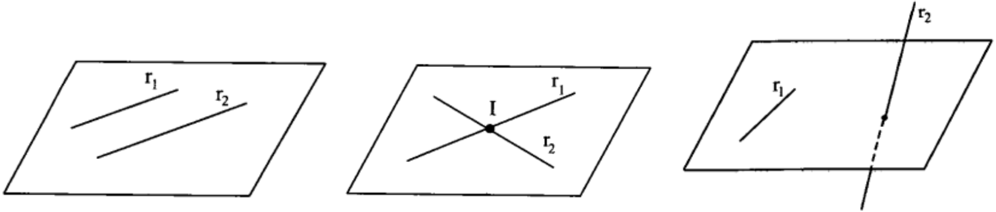
  ou seja, o ponto $C = A + \alpha_1\vec{r} = B - \alpha_2\vec{s}$ pertence à ambas as retas, sendo portanto a interseção de r e s.
- Este ponto é único, dado que a representação de $\overrightarrow{AB}$ como uma combinação linear de $\vec{r}$ e $\vec{s}$ é única.

- Considerando agora retas no espaço, elas não necessitam mais serem coplanares. Podemos agora ter retas paralelas, concorrentes ou reversas.
- Novamente, duas retas $r\colon\ A+\lambda\vec{r}$ e $s\colon\ B+\mu\vec{s}$ são paralelas caso seus vetores diretores sejam paralelos, ou seja $\vec{r}=\alpha\vec{s}$. Elas são coincidentes se, além de paralelas, tivermos também $\vec{AB}\ //\ \vec{r}\ //\ \vec{s}$.
- No espaço, no entanto, duas retas que não são paralelas podem também não ser concorrentes.
- Para que duas retas $r\colon\ A+\lambda\vec{r}$ e $s\colon\ B+\mu\vec{s}$ sejam concorrentes, $\vec{r}$ e $\vec{s}$ devem ser *L.I.* e $\overrightarrow{AB}$ deve pertencer ao plano formado por $\vec{r}$ e $\vec{s}$, ou seja:

$$\overrightarrow{AB}=\alpha_1\vec{r}+\alpha_2\vec{s} \qquad ou \qquad det(\vec{r},\vec{s},\overrightarrow{AB})=0$$

- Finalmente, duas retas $r: A + \lambda\vec{r}$ e $s: B + \mu\vec{s}$ no espaço são reversas caso elas não sejam coplanares.
- Para tal, $\overrightarrow{AB}$, $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não devem pertencer a um mesmo plano. Ou seja, eles são vetores *L.I.*:

$$det(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}) \neq 0$$



- Determine se as retas seguintes são paralelas, concorrentes ou reversas:
  - $r\colon (1,1,0)+\lambda(-2,1,-3)$ e $s\colon (2,0,1)+\mu(6,-3,9)$.
  - $r\colon (0,1,1)+\lambda(2,0,1)$ e $s\colon (-2,-1,0)+\mu(1,1,1)$.
  - $r\colon (-1,0,2)+\lambda(1,-2,1)$ e $s\colon (2,-2,1)+\mu(-1,0,1)$.
  - $r\colon (1,0,0)+\lambda(1,2,-1)$ e $s\colon (-1,-4,2)+\mu(2,4,-2)$.
- Encontre a reta que passa pelo ponto $A(-1,2,1)$ e é paralela à reta $r\colon (0,1,0)+\lambda(2,0,-1)$.
- Encontre a reta que passa pelo ponto $A(1,0,0)$ e é concorrente às retas $r\colon (-1,1,1)+\lambda(1,-1,1)$ e $s\colon (0,-1,0)+\mu(0,2,1)$.
- Determine se as retas seguintes são paralelas, concorrentes ou reversas:

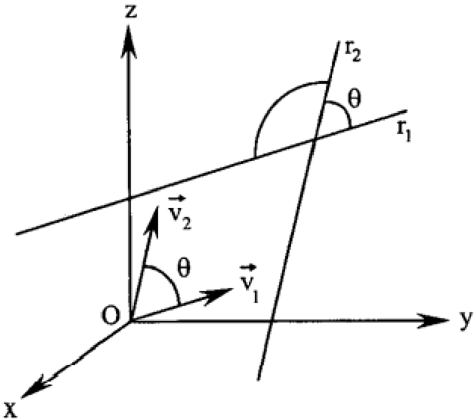
$$r\colon \begin{cases} 2x+3y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} y=2x-1 \\ z=x+1 \end{cases}$$

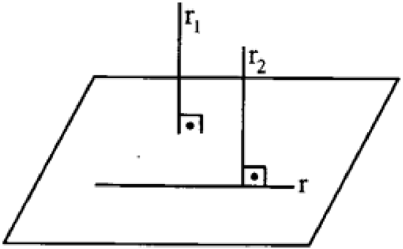
Sumário

- Definimos o ângulo formado entre as retas r e s como o menor ângulo formado entre um vetor diretor da reta r e um vetor diretor da reta s.
- Em particular, sendo $r\colon\ A + \lambda\vec{r}$ e $s\colon\ B + \mu\vec{s}$, temos:

$$cos\,\theta = \frac{|\vec{r}\cdot\vec{s}|}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{s}\|}$$

  note que temos sempre $0 \leq \theta \leq \pi/2$.
- Em particular, se $\theta = 0$ as retas são paralelas e se $\theta = \pi/2$ as retas são ortogonais.
- Note que as retas não precisam ser concorrentes para definirmos o ângulo formado por elas. Caso duas retas ortogonais sejam concorrentes, elas são ditas perpendiculares.
- As retas $r\colon\ A + \lambda\vec{r}$ e $s\colon\ B + \mu\vec{s}$ são ortogonais se e somente se $\vec{r}\cdot\vec{s} = 0$.


z
r_2
θ
r_1
$\vec{v}_2$
θ
$\vec{v}_1$
O
y
x


r_1
r_2
r

- Determine o ângulo formado entre as seguintes retas:
  - $r\colon (1,1,0)+\lambda(-2,1,-3)$ e $s\colon (2,0,1)+\mu(6,-3,9)$.
  - $r\colon (0,1,1)+\lambda(2,0,1)$ e $s\colon (-2,-1,0)+\mu(1,1,1)$.
  - $r\colon (-1,0,2)+\lambda(1,-2,1)$ e $s\colon (2,-2,1)+\mu(-1,0,1)$.
- Encontre a reta que passa pelo ponto $A(-1,2,1)$ e é perpendicular à reta $r\colon (0,1,0)+\lambda(2,0,-1)$.
- Encontre a reta que passa pelo ponto $A(1,0,1)$ e é ortogonal às retas $r\colon (-1,0,2)+\lambda(1,-2,1)$ e $s\colon (2,-2,1)+\mu(-1,0,1)$.
- Considere os pontos $A(2,0,1)$, $B(0,-1,1)$ e $C(2,1,0)$.
  - Determine a reta r formada pelos pontos equidistantes de A, B e C.
  - Mostre que r é ortogonal à $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.