Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Departamento de Matemática

MAT A42 - Matemática Discreta I
Relação de Recorrência e Fórmulas Fechadas

Professora: Isamara

Sequências

Definição:

Uma sequência (ou uma sucessão) é um conjunto ordenado de elementos (numéricos ou não) seguindo um padrão pré-definido.
notação: $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ $n \in \mathbb{N}$; onde a_n representa o n-ésimo termo da sequência.

Exemplos:

- $(1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots)$ "Sequência dos números naturais"
- $(1, 3, 5, 7, \cdots)$ "Sequência dos números naturais ímpares"
- $(2^1, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{n-1}, 2^n, \cdots)$ "Sequência das potências de base 2; $n \in \mathbb{N}$"
- $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots)$ "Sequência de Fibonacci"

Sequências Recursivas

DEFINIÇÃO: (Relação de Recorrência)

Seja uma sequência de números $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$.
Uma RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA é uma equação que relaciona o termo geral a_n a alguns dos seus predecessores na sequência, $\forall n \in \mathbb{N}$.

EXEMPLO.1:
Sejam as sequências: $(2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$ e $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$.
"Como obter o n-ésimo termo de cada sequência?"

(1º) Observamos o comportamento dos termos da sequência; e,

(2º) Determinamos uma LEI DE FORMAÇÃO, incluindo as CONDIÇÕES INICIAIS.

Sequências Recursivas

Exemplo.1

Vamos determinar o n-ésimo termo das sequências:

- $(2, 4, 6, 8, 10, \cdots)$ $\begin{cases} a_1 = 2 & \\ a_2 = 4 = & a_1 + 2 \\ a_3 = 6 = & a_2 + 2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-1} = & a_{n-2} + 2 \\ a_n = & a_{n-1} + 2 \end{cases}$

- $(1, 3, 5, 7, 9, \cdots)$ $\begin{cases} a_1 = 1 & \\ a_2 = 3 = & a_1 + 2 \\ a_3 = 5 = & a_2 + 2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-1} = & a_{n-2} + 2 \\ a_n = & a_{n-1} + 2 \end{cases}$

Sequências Recursivas

Exemplo.1

Lei de Formação das sequências:

- $(2, 4, 6, 8, 10, \cdots) \left\{ \quad a_n = \quad a_{n-1} + 2; \quad \text{para} \quad n \geq 2 \right.$
- $(1, 3, 5, 7, 9, \cdots) \left\{ \quad a_n = \quad a_{n-1} + 2; \quad \text{para} \quad n \geq 2 \right.$

Observação: Note nestas duas sequências a importância das condições iniciais para que uma sequência seja bem definida.

Sequências Recursivas

Exemplo.1

Lei de Formação das sequências:

- $(2, 4, 6, 8, 10, \cdots)$ $\begin{cases} a_1 = & 2 & \text{“ CONDIÇÃO INICIAL ”} \\ a_n = & a_{n-1} + 2; & \text{para } \; n \geq 2 \end{cases}$
- $(1, 3, 5, 7, 9, \cdots)$ $\begin{cases} a_1 = & 1 & \text{“ CONDIÇÃO INICIAL ”} \\ a_n = & a_{n-1} + 2; & \text{para } \; n \geq 2 \end{cases}$

"Sequência da SOMA dos n primeiros números naturais". $(S_1, S_2, S_3, \cdots, S_{n-1}, S_n)$

$$\begin{cases} S_1 = 1 & \\ S_2 = 1 + 2 & = S_1 + 2 \\ S_3 = 1 + 2 + 3 & = S_2 + 3 \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) & = S_{n-2} + (n-1) \\ S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n & = S_{n-1} + n \end{cases}$$

LEI DE FORMAÇÃO: $\begin{cases} S_1 = \quad 1 & \text{" CONDIÇÃO INICIAL "} \\ S_n = \quad S_{n-1} + n; & \text{para} \quad n \geq 2 \end{cases}$

Sequências Recursivas

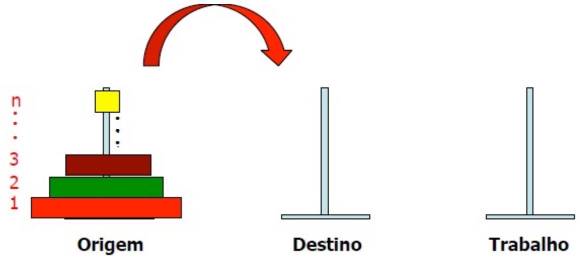
Exemplo.3

"Sequência da SOMA dos n primeiros números ímpares". $(S_1, S_2, S_3, \cdots, S_{n-1}, S_n)$

$$\begin{cases} S_1 = 1 & \\ S_2 = 1 + 3 & = S_1 + 3 \\ S_3 = 1 + 3 + 5 & = S_2 + 5 \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1} = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2(n-1) - 1) & = S_{n-2} + (2(n-1) - 1) \\ S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) & = S_{n-1} + (2n - 1) \end{cases}$$

Lei de Formação: $\begin{cases} S_1 = & 1 & \text{" condição inicial "} \\ S_n = & S_{n-1} + (2n-1); & \text{para } n \geq 2 \end{cases}$

"TORRE DE HANOI"



Determine o menor número de movimentos que são necessários para passar $n \in \mathbb{N}$ discos colocados em um eixo, em ordem crescente de tamanho (de cima para baixo), para um outro eixo, respeitando as seguintes regras:

- Só é permitido mover um disco do topo para outro eixo; e,
- Não é permitido colocar um disco maior em cima de um menor.

Note que inicialmente tem-se uma haste com os **n** discos e mais duas hastes vazias. Assim, para mover-se os n discos move-se $n-1$ discos para outra haste, em seguida move-se o disco restante (“maior disco que está na base) para a haste vazia, e; por fim, move-se novamente os $n-1$ discos para a haste onde foi colocada a base.

Denotando M_n o número mínimo de movimentos necessários para mover $n \in \mathbb{N}$ discos de um eixo para outro respeitando as regras do problema.

Observa-se que para os cinco primeiros números de discos obtém-se o número mínimo de movimentos do seguinte modo:

$$\begin{cases} M_1 & = 1 \\ M_2 & = 1 + 1 + 1 = 3 \\ M_3 & = 3 + 1 + 3 = 7 \\ M_4 & = 7 + 1 + 7 = 15 \\ M_5 & = 15 + 1 + 15 = 31 \\ \vdots & \vdots \\ M_n & = ? \end{cases}$$

Sequências Recursivas

Exemplo.4: torre de hanoi

Descobrimos uma recorrência:

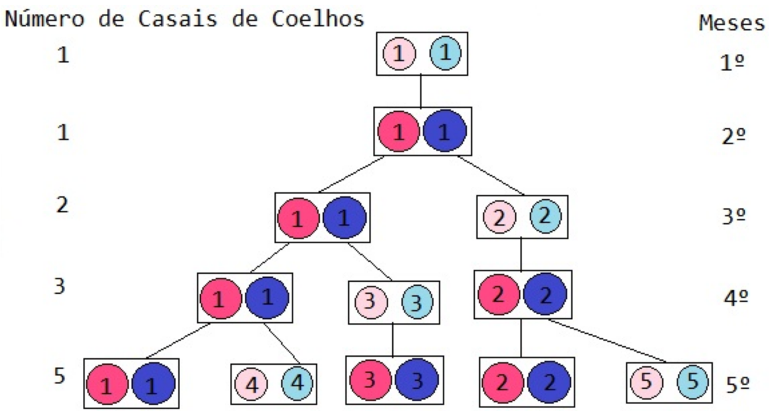
$$\begin{cases} M_1 & = 1 \\ M_2 & = M_1 + 1 + M_1 = 2M_1 + 1 = 3 \\ M_3 & = M_2 + 1 + M_2 = 2M_2 + 1 = 7 \\ \vdots & \vdots \\ M_{n-1} & = M_{n-2} + 1 + M_{n-2} = 2M_{n-2} + 1 \\ M_n & = M_{n-1} + 1 + M_{n-1} = 2M_{n-1} + 1 \end{cases}$$

Lei de Formação: $\begin{cases} M_1 = & 1 & \text{“ condição inicial ”} \\ M_n = & 2M_{n-1} + 1; & \text{para } n \geq 2 \end{cases}$

"Sequência de Fibonacci" (Problema proposto por Leonardo de Pisa)"
Determine o número de pares de coelhos ao final de doze meses sob as seguintes condições:

- Inicialmente, tem-se um único par(macho e fêmea) de coelhos recém-nascidos;
- Todo mês cada par com pelo menos dois meses produz um novo par(macho e fêmea) de coelhos; e,
- Nenhum coelho morre durante este processo.

Vamos denotar F_n o número de pares de coelhos no n-ésimo mês ($n \in \mathbb{N}$) respeitando as condições do problema.



Número de Casais de Coelhos
Meses
1
1
2
3
5
1º
2º
3º
4º
5º

Observando os cinco primeiros meses, notamos que;

1° tem apenas o par inicial de coelhos : $F_1 = 1$

2° tem apenas o par inicial de coelhos com 1 mês : $F_2 = 1$

3° tem o par inicial com 2 meses e sua cria : $F_3 = F_2 + F_1 = 2$

4° tem o novo par com 1 mês, o par inicial e sua nova cria : $F_4 = F_3 + F_2 = 3$

5° tem a nova cria com 1 mês, dois pares e suas novas crias : $F_5 = F_4 + F_3 = 5$

$\vdots \qquad \vdots$

Desta forma, descobrimos uma RECORRÊNCIA:

$$
\begin{aligned}
F_{n-1} &= F_{n-2} + F_{n-3} \\
F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}
\end{aligned}
$$

Sequências Recursivas

Exemplo.5: Sequência de Fibonacci

Recorrência:

$$\begin{cases} F_1 & = 1 \\ F_2 & = 1 \\ F_3 & = F_2 + F_1 \\ F_4 & = F_3 + F_2 \\ \vdots & \vdots \\ F_{n-1} & = F_{n-2} + F_{n-3} \\ F_n & = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

Lei de Formação:

$$\begin{cases} F_1 = & 1 & \text{“ condição inicial ”} \\ F_2 = & 1 & \text{“ condição inicial ”} \\ F_n = & F_{n-1} + F_{n-2} & \text{para} \quad n \geq 3 \end{cases}$$

LEI DE FORMAÇÃO:
$$\begin{cases} F_1 = & 1 & \text{" CONDIÇÃO INICIAL "} \\ F_2 = & 1 & \text{" CONDIÇÃO INICIAL "} \\ F_n = & F_{n-1} + F_{n-2} & \text{para} \quad n \geq 3 \end{cases}$$

Agora podemos calcular, por exemplo, para $n = 12$:

$F_{12} = F_{11} + F_{10} = (F_{10} + F_9) + F_{10} = 2F_{10} + F_9 = 2(F_9 + F_8) + F_9 = 3F_9 + 2F_8 =$
$3(F_8 + F_7) + 2F_8 = 5F_8 + 3F_7 = 5(F_7 + F_6) + 3F_7 = 8F_7 + 5F_6 = 8(F_6 + F_5) + 5F_6 =$
$13F_6 + 8F_5 = 13(8) + 8(5) = 104 + 40 = 144.$

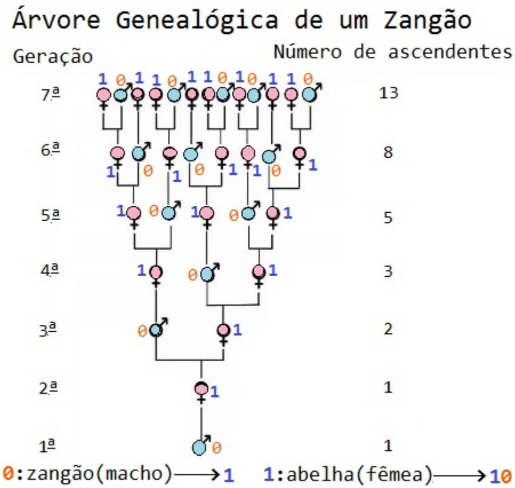
Paramos a recorrência em F_6 e F_5 porque já havíamos calculado.

Porém, poderíamos determinar F_{12} utilizando as condições iniciais: F_1 e F_2.

$F_{12} = 13F_6 + 8F_5 = 13(F_5 + F(4)) + 8F_5 = 13F_4 + 21F_5 = 13F_4 + 21(F_4 + F_3) =$
$34F_4 + 21F_3 = 34(F_3 + F_2) + 21F_3 = 55F_3 + 34F_2 = 55(F_2 + F_1) + 34F_2 = 89F_2 + 55F_1 = 144.$

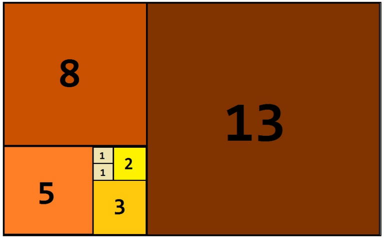
OBSERVAÇÃO:
Podemos encontrar a Sequência de Fibonacci por toda parte, por exemplo:

- Número de ouro(PROPORÇÃO ÁUREA): $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,6180339.....$
A razão entre os números de Fibonacci tende a este valor, observe:
$\frac{1}{1} = 1; \frac{2}{1} = 2; \frac{3}{2} = 1,5; \cdots ; \frac{233}{144} = 1,6180555; \cdots$
- Se assumirmos a codificação binária 0 e 1; tais que: $0 \to 1$ e $1 \to 10$; note como aparece a sequência de Fibonacci;
$\underbrace{1}_{1} \to \underbrace{10}_{1\ \ 1} \to \underbrace{101}_{2\ \ 1} \to \underbrace{10110}_{3\ \ 2} \to \underbrace{10110101}_{5\ \ 3} \to \underbrace{1011010110110}_{8\ \ 5} \to \cdots$



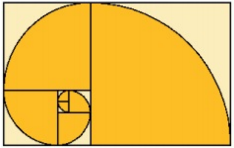
Árvore Genealógica de um Zangão
Geração
Número de ascendentes
7ª 13
6ª 8
5ª 5
4ª 3
3ª 2
2ª 1
1ª 1
0:zangão(macho) → 1
1:abelha(fêmea) → 10

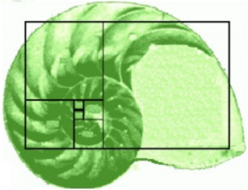
- O "Retângulo Áureo" :



Começamos anexando dois quadrados com lado=1 $\Rightarrow$ um retângulo 2x1, sendo o *lado maior igual à soma dos lados dos quadrados anteriores*. Anexamos agora outro quadrado com lado=2 (equivalente ao maior lado do retângulo 2x1) $\Rightarrow$ um retângulo 3x2. Se continuarmos a anexar quadrados com *lados iguais ao maior dos comprimentos dos retângulos obtidos*, obteremos a sequência dos lados dos quadrados igual à série de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$.

- O "Retângulo Áureo" e o "Nautilus":





Se traçarmos com um compasso um quarto de círculo nos quadrados acima, obtemos uma ESPIRAL como a do nautilus marinho;

e esta forma espiralada também aparece na natureza como: galáxias, marfins de elefantes, flores, onda no oceano, etc.

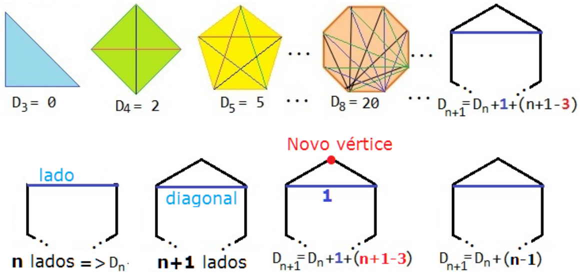
Recorrência Linear de 1ª ordem

$$\Delta_{n+1} T_{n+1} = \Delta_n T_n + f(n)$$

onde,

- os coeficientes são iguais: $\Delta_{n+1} = \Delta_n$;
- $f(n)$ é uma função em n podendo ser qualquer função linear ou não linear, ou até mesmo, ser uma função constante;
- "1ª ordem" porque a recorrência depende apenas de uma variável (T_{n+1} depende apenas de T_n); e,
- "Linear" porque a **equação é linear** em T_n e T_{n+1}.

Exemplo.1: **Número de diagonais** do polígono convexo:



A partir de um polígono convexo com n **lados**, acrescenta-se mais um lado a fim de obter um polígono convexo com $n+1$ **lados** originando um novo vértice.
Portanto, além do número de diagonais D_n do polígono com n **lados**, o polígono com $n+1$ **lados** tem uma diagonal a mais e, ainda, $(n+1)-3$ diagonais partindo do novo vértice.

Note que subtrai-se 3 da quantidade total de vértice$(n+1)$ porque algumas ligações partindo do novo vértice não formam diagonais: próprio vértice (1) + vértices adjacentes (2).

EXEMPLO.1: Número de diagonais do polígono convexo:

$$
\begin{array}{lll}
D_3 = & 0 & \text{Triângulo não tem diagonais} \\
D_4 = & 2 & = 0 + 1 + (4-3) \text{ Quadrado tem 2 diagonais} \\
D_5 = & 5 & = 2 + 1 + (5-3) \text{ Pentágono tem 5 diagonais} \\
D_6 = & 9 & = 5 + 1 + (6-3) \text{ Hexágono tem 9 diagonais} \\
D_7 = & 14 & = 9 + 1 + (7-3) \text{ Heptágono tem 14 diagonais} \\
D_8 = & 20 & = 14 + 1 + (8-3) \text{ Octógono tem 20 diagonais} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
D_n = & & D_{n-1} + 1 + (n-3) = D_{n-1} + (n-2) \text{ Polígono com } n \text{ vértices}
\end{array}
$$

Assim, obtemos uma função de RECORRÊNCIA:

$$
\begin{cases}
D_3 = & 0 \\
D_n = & D_{n-1} + (n-2) \quad \text{para} \quad n > 3
\end{cases}
$$

Como determinar a " Fórmula Fechada da recorrência" do número de diagonais do polígono convexo?
Se somarmos estes elementos;

$$
\begin{array}{lll}
D_3 = & 0 & \\
D_4 = & D_3 + (3-1) & = 2 \\
D_5 = & D_4 + (4-1) & = 5 \\
D_6 = & D_5 + (5-1) & = 9 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
D_n = & D_{n-1} + (n-2) & =? \\
\hline
\end{array}
$$

$$D_3 + D_4 + \ldots + D_{n-1} + D_n = D_3 + D_4 + \ldots + D_{n-1} + 0 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-2)$$

note que podemos cancelar alguns elementos.

Recorrências e Fórmula Fechada

Exemplo.1

$$
\begin{array}{rlr}
\cancel{D_3} = & 0 & \\
\cancel{D_4} = & \cancel{D_3} + (3-1) & = 2 \\
\cancel{D_5} = & \cancel{D_4} + (4-1) & = 5 \\
\cancel{D_6} = & \cancel{D_5} + (5-1) & = 9 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
D_n = & \cancel{D_{n-1}} + (n-2) & =? \\
\hline
\end{array}
$$

$D_n = 0 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-2)$

Observação: Chegamos numa progressão aritmética com $n-3$ termos, visto que, $D_3 = 0$ não interfere na soma:

$2 + 3 + 4 + \cdots + (n-2)$; $a_1 = 2$ e $a_n = n-2$.

Logo, a Fórmula Fechada é

$$D_n = (n-3)\frac{(n-2)+2}{2} = \frac{n(n-3)}{2}; n \geq 3$$

A Fórmula Fechada é

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}; n \geq 3$$

Prova por indução: $2+3+4+\cdots+(n-2) = \frac{n(n-3)}{2}; n > 3$

(i) Passo Básico: $P(4) : \frac{4(4-3)}{2} = 2$; "verdadeiro";

(ii) Hipótese de Indução: $P(k) : \frac{k(k-3)}{2}; k > 3$
Passo indutivo: $P(4) \wedge \cdots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$.
Vamos verificar a validade de $P(k+1) : 2+3+4+\cdots+(k-2)+(k-1) = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$.
então, $P(k+1) : \underbrace{2+3+4+\cdots+(k-2)}_{\frac{k(k-3)}{2}} + (k-1) =$

$$\frac{k(k-3)}{2} + (k-1) = \frac{k(k-3)+2(k-1)}{2} = \frac{k^2-k-2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

Vale então para $P(k+1) \Rightarrow$ vale $\forall n > 3$

Seja a sequência :

$$\begin{cases} a_1 = & 1 \\ a_{n+1} = & a_n + 8n \quad \text{para} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Qual a FÓRMULA FECHADA da RECORRÊNCIA:

$$\begin{array}{lll} a_1 = & 1 & = 1 \\ a_2 = & a_1 + 8(1) & = 9 \\ a_3 = & a_2 + 8(2) & = 25 \\ a_4 = & a_3 + 8(3) & = 49 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n = & a_{n-1} + 8(n-1) & =? \end{array}$$

Recorrências e Fórmula Fechada

Exemplo.2

$$\begin{cases} a_1 = & 1 \\ a_{n+1} = & a_n + 8n \quad \text{para} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Qual a Fórmula Fechada da recorrência:

$$\begin{array}{lll} \cancel{a}_1 = & 1 & = 1 \\ \cancel{a}_2 = & \cancel{a}_1 + 8(1) & = 9 \\ \cancel{a}_3 = & \cancel{a}_2 + 8(2) & = 25 \\ \cancel{a}_4 = & \cancel{a}_3 + 8(3) & = 49 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n = & \cancel{a}_{n-1} + 8(n-1) & =? \\ \hline \end{array}$$

$$a_n = 1 + 8 + 16 + 24 + \ldots + 8(n-1) = 1 + 8(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1))$$

$$a_n = 1 + 8((n-1)\frac{(n-1)+1}{2}) = 1 + 8((n-1)\frac{n}{2}) = 1 + 4n(n-1)$$

Logo, a Fórmula Fechada é

$$a_n = 1 + 4n(n-1); n \geq 1.$$

A Fórmula Fechada é $a_n = 1 + 4n(n-1); n \geq 1$

Prova por indução:

$1 + 8 + 16 + 24 + \cdots + 8(n-1) = 1 + 4n(n-1); n \geq 1$

$1 - 1 + 8 + 16 + 24 + \cdots + 8(n-1) = 1 - 1 + 4n(n-1); n \geq 1$

$8 + 16 + 24 + \cdots + 8(n-1) = 4n(n-1); n > 1$

(i) Passo Básico: $P(2) : 8 = 4.2(2-1) = 8$; "verdadeiro";

(ii) Hipótese de Indução: $P(k) : 4k(k-1); k > 1$
Passo indutivo: $P(2) \wedge \cdots \wedge P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
Vamos verificar a validade de $P(k+1) : \underbrace{8 + 16 + 24 + 32 + \cdots + 8(k-1)}_{4k(k-1)} + 8(k)$

$P(k+1) : 4k(k-1) + 8k = 4k^2 + 4k = 4k(k+1) = 4(k+1)k = 4(k+1)((k+1)-1)$.
Vale então para $P(k+1) \Rightarrow$ vale $\forall n > 1$

RECORRÊNCIA LINEAR DE 1^a ORDEM COM COEFICIENTES DISTINTOS

$$\Delta_{n+1} T_{n+1} = \Delta_n T_n + f(n)$$

onde,

- $\Delta_{n+1} \neq \Delta_n$;
- $f(n)$ é uma função em n podendo ser qualquer função linear ou não linear, ou até mesmo, ser uma função constante;
- "1^a ORDEM" porque a RECORRÊNCIA depende apenas de uma variável; e,
- " LINEAR " porque a **equação é linear** em T_n e T_{n+1}.

Exemplo.3: "Torre de Hanoi"

$$\begin{cases} x_1 = & 1 \\ x_{n+1} = & 2x_n + 1 \quad \text{para} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= & 1 & \quad = 1 \\
x_2 &= & 2x_1 + 1 & \quad = 3 \\
x_3 &= & 2x_2 + 1 & \quad = 7 \\
x_4 &= & 2x_3 + 1 & \quad = 15 \\
&\vdots & \vdots & \quad \vdots \\
x_{n-2} &= & 2x_{n-3} + 1 & \\
x_{n-1} &= & 2x_{n-2} + 1 & \\
x_n &= & 2x_{n-1} + 1 &
\end{aligned}$$

Observe que agora precisamos igualar os coeficientes a fim de simplificar os termos semelhantes. Começaremos igualando os coeficientes de baixo para cima do seguinte modo;

$$\begin{aligned}
2^{n-1}x_1 &= & 2^{n-1}1 & \quad = 1\\
2^{n-2}x_2 &= & 2^{n-2}2x_1 + 2^{n-2}1 & \quad = 3\\
2^{n-3}x_3 &= & 2^{n-3}2x_2 + 2^{n-3}1 & \quad = 7\\
2^{n-4}x_4 &= & 2^{n-4}2x_3 + 2^{n-4}1 & \quad = 15\\
&\vdots & \vdots & \quad \vdots\\
2^{2}x_{n-2} &= & 2^{2}2x_{n-3} + 2^{2}1 & \\
2x_{n-1} &= & 2.2x_{n-2} + 2.1 & \\
x_n &= & 2x_{n-1} + 1 &
\end{aligned}$$

Recorrências e Fórmula Fechada

Exemplo.3

$$
\begin{array}{rcrr}
\cancel{2^{n-1}x_1} & = & 2^{n-1}1 & = 1 \\
\cancel{2^{n-2}x_2} & = & \cancel{2^{n-1}x_1} + 2^{n-2}1 & = 3 \\
\cancel{2^{n-3}x_3} & = & \cancel{2^{n-2}x_2} + 2^{n-3}1 & = 7 \\
\cancel{2^{n-4}x_4} & = & \cancel{2^{n-3}x_3} + 2^{n-4}1 & = 15 \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
\cancel{2^2x_{n-2}} & = & \cancel{2^3x_{n-3}} + 2^21 & \\
\cancel{2x_{n-1}} & = & \cancel{2^2x_{n-2}} + 2.1 & \\
x_n & = & \cancel{2x_{n-1}} + 1 &
\end{array}
$$

$x_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1$

$x_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 2^0$

Obs:Soma P.G. de n termos: $a_1(\frac{q^n-1}{q-1})$; $q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{2^2}{2} = 2$, $a_1 = 2^0 = 1$

$x_n = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n - 1; n \geq 1$

A Fórmula Fechada é

$$x_n = 2^n - 1; n \geq 1$$

Prova por indução:

$2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 = 2^n - 1; n \geq 1$

(i) Passo Básico: $P(1) : 1 = 1$; "verdadeiro";

(ii) Hipótese de Indução: $P(k) : 2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 = 2^k - 1; k \geq 1$

Passo indutivo:

$P(k+1) : 2^k + \underbrace{2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1}_{2^k - 1} = 2^k + 2^k - 1 = 2^k(1+1) - 1 = 2^{k+1} - 1$

logo, vale para $P(k+1) \Rightarrow$ vale $\forall n \geq 1$

Recorrências e Fórmula Fechada

Exemplo.4

Dada a sequência :

$$\begin{cases} x_1 = & 2 \\ x_n = & 3x_{n-1} + 5 \quad \text{para} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Como obtemos a Fórmula Fechada?

$$\begin{aligned} x_1 &= & 2 & = 2 \\ x_2 &= & 3x_1 + 5 & = 11 \\ x_3 &= & 3x_2 + 5 & = 38 \\ x_4 &= & 3x_3 + 5 & = 119 \\ &\vdots & \vdots & \quad \vdots \\ x_n &= & 3x_{n-1} + 5 & =? \end{aligned}$$

"**Procederemos agora como no exemplo anterior: igualamos os coeficientes e cancelamos os termos semelhantes**".

$$
\begin{aligned}
3^{n-1}x_1 &= & 3^{n-1}2 & \quad = 2 \\
3^{n-2}x_2 &= & 3^{n-2}3x_1 + 3^{n-2}5 & \quad = 11 \\
3^{n-3}x_3 &= & 3^{n-3}3x_2 + 3^{n-3}5 & \quad = 38 \\
3^{n-4}x_4 &= & 3^{n-4}3x_3 + 3^{n-4}5 & \quad = 119 \\
&\vdots & \vdots & \quad \vdots \\
3^2x_{n-2} &= & 3^2 3x_{n-3} + 3^2 5 & \\
3x_{n-1} &= & 3.3x_{n-2} + 3.5 & \\
x_n &= & 3x_{n-1} + 5 &
\end{aligned}
$$

Recorrências e Fórmula Fechada

Exemplo.4

$$
\begin{aligned}
\cancel{3^{n-1}x_1} &= & 3^{n-1}2 & &= 2\\
\cancel{3^{n-2}x_2} &= & \cancel{3^{n-1}}x_1 + 3^{n-2}5 & &= 11\\
\cancel{3^{n-3}x_3} &= & \cancel{3^{n-2}}x_2 + 3^{n-3}5 & &= 38\\
\cancel{3^{n-4}x_4} &= & \cancel{3^{n-3}}x_3 + 3^{n-4}5 & &= 119\\
&\vdots & \vdots & & \vdots\\
\cancel{3^2x_{n-2}} &= & \cancel{3^3}x_{n-3} + 3^25 & &\\
\cancel{3x_{n-1}} &= & \cancel{3^2}x_{n-2} + 3.5 & &\\
x_n &= & \cancel{3x_{n-1}} + 5 & &
\end{aligned}
$$

$$x_n = 2.3^{n-1} + 5.3^{n-2} + \cdots + 5.3^2 + 5.3 + 5$$
$$x_n = 2.3^{n-1} + 5(3^{n-2} + \cdots + 3^2 + 3 + 1)$$
$$x_n = 2.3^{n-1} + 5(3^{n-2} + \cdots + 3^2 + 3 + 3^0)$$

Obs:Soma P.G. de $n-1$ termos: $a_1(\frac{q^{n-1}-1}{q-1})$; $q = \frac{a_3}{a_2} = 3$, $a_1 = 3^0 = 1$

$$x_n = 2.3^{n-1} + 5(\frac{3^{n-1}-1}{2}); n \geq 1$$

Recorrências e Fórmula Fechada

Exemplo.4

A Fórmula Fechada é $P(n): 2.3^{n-1} + 5(\frac{3^{n-1}-1}{2}); n \geq 1$

Prova por indução:

$2.3^{n-1} + 5(3^{n-2} + \cdots + 3^2 + 3 + 1) = 2.3^{n-1} + 5(\frac{3^{n-1}-1}{2})$

$\frac{1}{5}.(\cancel{2.3^{n-1}} + 5(3^{n-2} + \cdots + 3^2 + 3 + 1)) = \frac{1}{5}.(\cancel{2.3^{n-1}} + 5(\frac{3^{n-1}-1}{2}))$

$3^{n-2} + \cdots + 3^2 + 3 + 1 = \frac{3^{n-1}-1}{2}; n \geq 2$

(i) Passo Básico: $P(2): 3^{2-2} = \frac{3^{2-1}-1}{2} \Rightarrow 1 = 1$; "verdadeiro";

(ii) Hipótese de Indução: $P(k): 3^{k-2} + \cdots + 3^2 + 3 + 1 = \frac{3^{k-1}-1}{2}$

Passo indutivo: $P(k+1): \underbrace{3^{k-2} + \cdots + 3^2 + 3 + 1}_{\frac{3^{k-1}-1}{2}} + 3^{k-1} = \frac{3^{k-1}-1}{2} + 3^{k-1} =$

$$\frac{3^{k-1} - 1 + 2.3^{k-1}}{2} = \frac{3^{k-1}(1+2) - 1}{2} = \frac{3^{k-1}.3 - 1}{2} = \frac{3^k - 1}{2} = \frac{3^{(k+1)-1} - 1}{2};$$

então, vale para $P(k+1) \Rightarrow$ vale $\forall n \geq 2$

Exercícios

1. Encontre a Fórmula Fechada para a soma dos n primeiros números naturais.
2. Encontre a Fórmula Fechada para a seguinte soma telescópica:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n.(n+1)}$$

3. Encontre a Fórmula Fechada para a soma dos n primeiros números naturais pares.
4. Determine a fórmula fechada para a soma: $2+5+8+\ldots+(3n-1)), n\geq 1$.
5. Prove, utilizando o Princípio da Indução Matemática, a Fórmula Fechada **conjecturada** nos exercícios anteriores.

Exercícios - Formúla Fechada

Resposta

(1) Encontre a fórmula fechada para a soma dos n primeiros números naturais.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \ldots & a_n \end{array}$$

Observe que ; $\left\{\begin{array}{ll} a_1 = 1 & \\ a_2 = 2 = & a_1 + 1 \\ a_3 = 3 = & a_2 + 1 = a_1 + 2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-1} = & a_{n-2} + 1 = a_1 + (n-2) \\ a_n = & a_{n-1} + 1 = a_1 + (n-1) \end{array}\right.$ $\quad \left\{\begin{array}{ll} a_1 = & 1; \\ a_{n+1} = & a_1 + n.r; \quad \text{para} \quad n \geq 1; r = 1 \end{array}\right.$

Fazendo agora $2S_n = S_n + S_n$:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = S_n$$
$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 = S_n$$

$$(a_n + a_1) + (a_{n-1} + a_2) + (a_{n-2} + a_3) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = 2S_n$$
$$(a_n + a_1) + [(a_1 + (n-2)) + (a_1 + 1)] + [(a_1 + (n-3)) + (a_1 + 2)] + \ldots + [(a_1 + (n-3)) + (a_1 + 2)] + [(a_1 + (n-2)) + (a_1 + 1)] + (a_n + a_1) = 2S_n$$
$$(a_n + a_1) + [(a_1 + (n-\cancel{2})) + (a_1 + \cancel{1})] + [(a_1 + (n-\cancel{3})) + (a_1 + \cancel{2})] + \ldots + [(a_1 + (n-\cancel{3})) + (a_1 + \cancel{2})] + [(a_1 + (n-\cancel{2})) + (a_1 + \cancel{1})] + (a_n + a_1) = 2S_n$$
$$(a_n + a_1) + [(a_1 + (n-1)) + a_1] + [(a_1 + (n-1)) + a_1] + \ldots + [(a_1 + (n-1)) + a_1] + [(a_1 + (n-1)) + a_1] + (a_n + a_1) = 2S_n$$
$$(a_n + a_1) + (a_n + a_1) + (a_n + a_1) + \ldots + (a_n + a_1) + (a_n + a_1) + (a_n + a_1) = 2S_n$$
$$\underbrace{(a_n + a_1) + (a_n + a_1) + (a_n + a_1) + \ldots + (a_n + a_1) + (a_n + a_1) + (a_n + a_1)}_{n-termos} = 2S_n$$

$$n.(a_n + a_1) = 2S_n \Rightarrow S_n = \frac{n.(a_n + a_1)}{2}$$

Exercícios - Formúla Fechada

Resposta

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots & n \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \ldots & a_n
\end{array}
$$

Observe que ; $\begin{cases} S_1 = & 1; \\ S_{n+1} = & S_n + (n+1); \quad \text{para} \quad n \geq 1 \end{cases}$

$S_1 = 1$
$S_2 = 1 + 2$
$S_3 = 1 + 2 + 3$

$\vdots$

$S_{n-3} = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-3)$
$S_{n-2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2)$
$S_{n-1} = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1)$
$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n$

$$S_n = 1 + 2 + \underbrace{\underbrace{\underbrace{3 + \ldots + (n-3)}_{n-\,termos} + (n-2)}_{n-\,termos} + (n-1)}_{n-\,termos} + n$$

$$S_n = n.\frac{(n-1)}{2} + n \Rightarrow S_n = n.\frac{(n+1)}{2}$$

Exercícios - Formúla Fechada

Resposta

(2) Encontre a fórmula fechada para a seguinte soma telescópica:
$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)}$; $n \geq 1$.

$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

PARCELAS PARCIAIS: $\frac{1}{n.(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$; $A = 1$ e $B = -1$.

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$

$S_1 = \frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = S_1 + \frac{1}{2.3} = (1 - \cancel{\frac{1}{2}}) + (\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3}$

$\vdots$

$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)}$

$S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$

$S_n = (1 - \cancel{\frac{1}{2}}) + (\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}) + (\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}) + \cdots + (\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}}) + (\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1})$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow S_n = \frac{n}{n+1}$; $n \geq 1$

(3) Na Sequência, para naturais pares :

$S_{2n} = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2(n) = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$ temos $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$.
Assim,
$S_n = n.\frac{(a_1+a_n)}{2} \Rightarrow S_n = n.\frac{(1+n)}{2} = \frac{(n+n^2)}{2} \Rightarrow S_{2n} = 2S_n = n + n^2$.
FÓRMULA FECHADA de forma **recursiva**. Portanto, escrevendo cada termo na sequência:

$a_1 = 2 = 2$
$a_2 = 4 = a_1 + 2 = a_1 + 2.1$
$a_3 = 6 = a_2 + 2 = a_1 + 2.2$
$a_4 = 8 = a_3 + 2 = a_1 + 2.3$
$\vdots$
$a_{(n-1)} = a_{(n-2)} + 2 = a_1 + 2.(n-2)$
$a_n = a_{(n-1)} + 2 = a_1 + 2.(n-1)$

$- -$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S_{2n} = (a_1 + \ldots + a_1) + 2.(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1))$
$S_{2n} = n(a_1) + 2.((n-1)\frac{(1+(n-1))}{2}) = \frac{2n(a_1)+2(n-1)(n)}{2} = n(a_1) + (n-1)(n)$
$S_{2n} = n(a_1 + n - 1) \Rightarrow S_{2n} = n(2 + n - 1) = n(n+1) \Rightarrow S_{2n} = n^2 + n; n \geq 1.$

A Fórmula Fechada **conjecturada**:
$S_{2n}(n) = 2 + 4 + 6 + \ldots + (2n) = n^2 + n; n \geq 1$
1)Passo Básico: $S_{2n}(1) = 1^2 + 1 = 2 = a_1(V)$
2)Hipótese de Indução:
$S_{2n}(k) = 2 + 4 + 6 + \ldots + (2k) = k^2 + k; \forall k \geq 1$ Passo de Indução:
$S_{2n}(k+1) = 2 + 4 + 6 + \ldots + (2(k+1)) = (k+1)^2 + (k+1)$
$S_{2n}(k+1) = 2 + 4 + 6 + \ldots + (2k) + (2(k+1)) = (k+1)^2 + (k+1)$
por hipótese: $2+4+6+ \ldots + (2k) = k^2 + k$
$k^2 + k + (2(k+1)) = (k+1)^2 + (k+1) \Rightarrow (k^2 + 2k + 1) + (k+1) = (k+1)^2 + (k+1) \Rightarrow$
$(k+1)^2 + (k+1) = (k+1)^2 + (k+1) \quad (V)$;
logo, $\forall n \geq 1$, vale $S_{2n}(n)$.

Exercícios - Formúla Fechada

Resposta

(4)

Na Sequência:
$2, 5, 8, \ldots, (3n-1)$ temos
$a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 8, \ldots, a_n = (3n-1); n \geq 1$
numa P.A. de n termos cuja razão
$r = 3 \Rightarrow a_n = a_1 + r.(n-1) = 2 + 3(n-1).$
Sabemos que a Soma numa P.A. é dada por:

$$S_n = n.\frac{(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_n = n.\frac{(a_1 + (a_1 + 3(n-1)))}{2} = n.\frac{(2a_1 + 3n - 3)}{2} = n.\frac{(2.2 + 3n - 3)}{2}$$

$$S_n = n.\frac{(3n+1)}{2}.$$

(4)

Ou poderia também seguir o caminho:

$a_1 = 2 = a_1 + 3.0$

$a_2 = 5 = a_1 + 3.1$

$a_3 = 8 = a_2 + 3 = a_1 + 6 = a_1 + 3.2$

$a_4 = 11 = a_3 + 3 = a_1 + 9 = a_1 + 3.3$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1} + 3 = a_1 + 3(n-1)$

$- -$

$a_1 + a_2 + ... + a_n = S_n = (a_1 + ... + a_1) + 3(0 + 1 + 2 + 3 + ... + (n-1))$

$$S_n = n(a_1) + 3(\frac{n(0 + (n-1))}{2}) = \frac{2n(a_1) + 3n(n-1)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(2a_1) + 3n - 3)}{2} = \frac{n(2.2 + 3n - 3)}{2}$$

$$S_n = n.\frac{(3n+1)}{2}$$

Exercícios - Formúla Fechada

Resposta

A FÓRMULA FECHADA conjecturada :

$S_n = 2 + 5 + 8 + ... + (3n - 1) = \frac{n.(3n+1)}{2}; n \geq 1$

1)Passo Básico: $P(1) = \frac{1.(3.1+1)}{2} = 2 = a_1(V)$

2)Hipótese de Indução:

$P(k) = 2 + 5 + 8 + ... + (3k - 1) = \frac{k.(3k+1)}{2}; \forall k \geq 1$

Passo de Indução:

$P(k+1) = 2 + 5 + 8 + ... + (3k - 1) + (3(k+1) - 1) = \frac{(k+1)(3(k+1)+1)}{2}$

$P(k+1) = \frac{k.(3k+1)}{2} + (3(k+1) - 1) = \frac{(k+1)(3(k+1)+1)}{2}$

$\frac{k(3k+1)}{2} + \frac{(6(k+1)-2)}{2} = \frac{(k+1)(3k+3+1)}{2}$

$k(3k+1) + (6k+4) = (k+1)(3k+4)$

$k(3k+1) + ((3k+1) + (3k+3)) = (k+1)(3k+4)$

$k(3k+1) + (3k+1) + 3(k+1) = (k+1)(3k+4)$

$(k+1)(3k+1) + 3(k+1) = (k+1)(3k+4)$

$(k+1)(3k+1+3) = (k+1)(3k+4)$

$(k+1)(3k+4) = (k+1)(3k+4)(V)$;

logo, $\forall n \geq 1$, vale $P(n)$.