Definição formal de limites

Definição (Definição formal de limites):

Sejam $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$.

Dizemos que o limite de f quando t tende a p é L se:

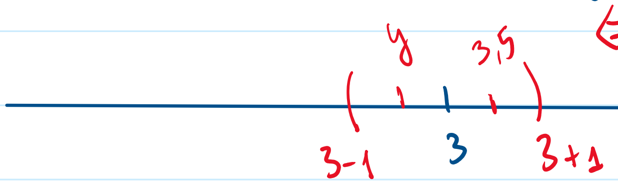
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que:

$$0 < |t - p| < \delta \implies |f(t) - L| < \varepsilon .$$

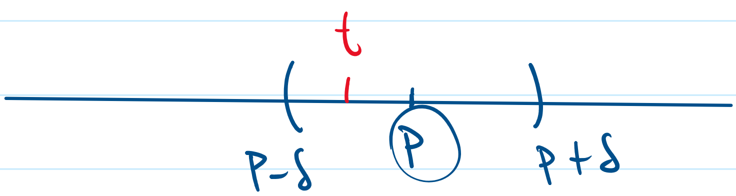
$$\delta_2 < t - p < \delta_1 \implies \varepsilon_2 < f(t) - L < \varepsilon_1$$

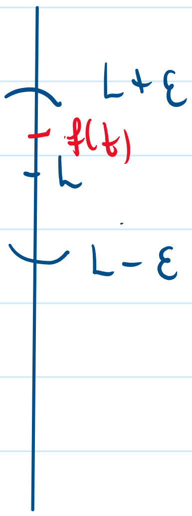
Notação: $\lim\limits_{t \to p} f(t) = L$.

$|y - 3| < 1$



$\iff y \in (3-1, 3+1)$





a^t

$y = at + b$

$\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$

t^2, t^3

t^n $\sqrt{t}$

$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$

$$g(t) = \frac{\cos(t^2+1) + e^{\sin t}}{\operatorname{tg}(t^3+5) \cdot \sqrt{t}}$$

Ex.:

$$f(t) = t$$

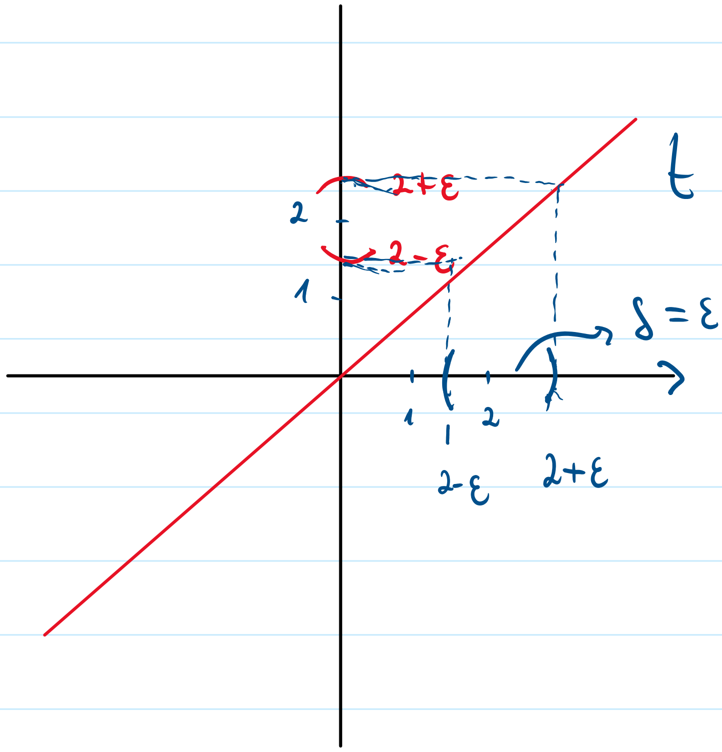
Demonstre que $\lim_{t \to 2} f(t) = 2$ usando a definição formal de limites:

Considere $\varepsilon > 0$ qualquer. Queremos encontrar $\delta > 0$ t.q.

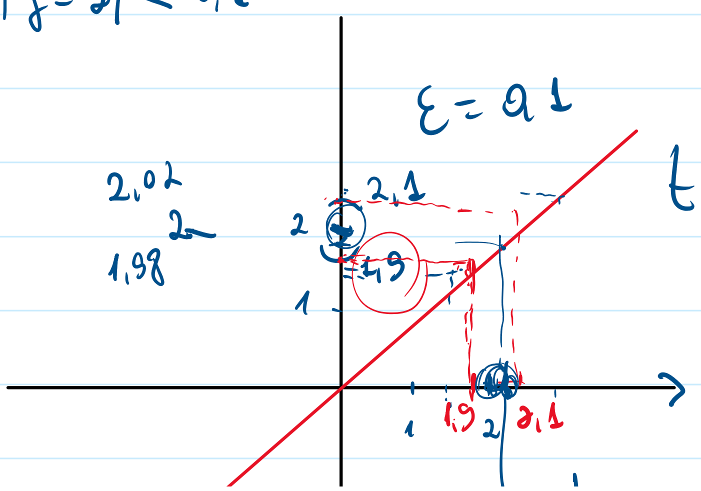
$$0 < |t-2| < \delta \implies |t-2| < \varepsilon$$

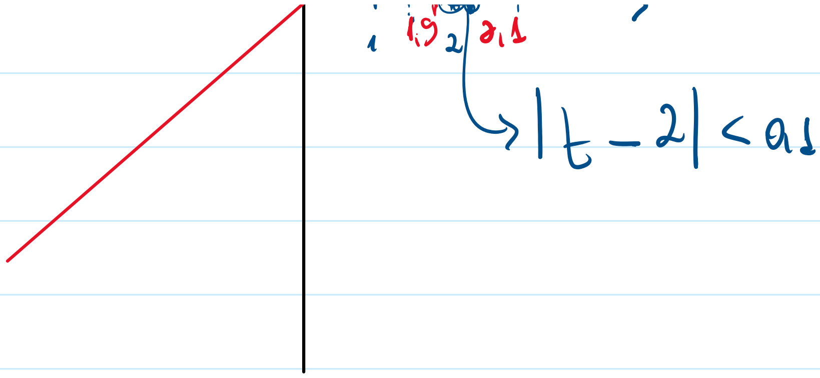
Neste caso, basta considerarmos $\delta = \varepsilon$

e a implicação acima será satisfeita.



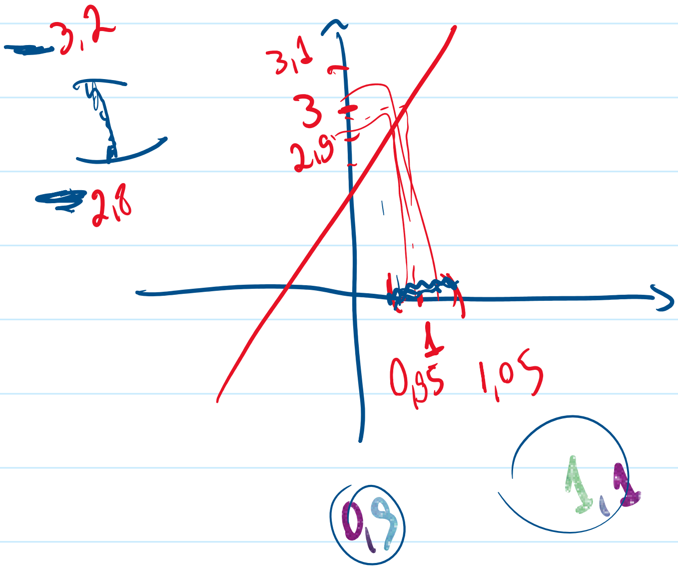
$|y - 2| < 0,1$





Ex.: $f(t) = 2t + 1$

Idem p/a $\lim_{t \to 1} f(t) = 3$



$2 \cdot 0{,}91 + 1$
$= 1{,}82 + 1$
$= 2{,}82$

Considere $\varepsilon > 0$. Vamos encontrar $\delta > 0$ de modo que tenhamos:

$0 < |t-1| < \delta \Rightarrow |f(t) - 3| < \varepsilon.$

Para que $|2t+1-3|<\varepsilon$, devemos ter:

$|2t-2|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<2t-2<\varepsilon$

$\Rightarrow -\varepsilon<2(t-1)<\varepsilon$

$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2}<t-1<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow |t-1|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Logo, escolhendo $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, a definição de limites estará satisfeita para este exemplo.

$0<|t-2|<0{,}2 \Rightarrow |f(t)-12|<1$

Exercício:

Idem para:

$f(t)=at+b$

p

$L=a.p+b$.

$\rightarrow f(t)=5t+2$, $p=2$, $L=12$

$\rightarrow f(t)=-2t+1$, $p=1$, $L=-1$

$\rightarrow f(t) = 5t + 2, \quad P = 2, \quad L = 12$ $\quad L = a.p + b.$

$\rightarrow f(t) = -2t + 1, \quad P = 1, \quad L = -1$

$\rightarrow f(t) = 3 \quad . \quad P = 2, \quad L = 3$

$\rightarrow f(t) = t^2, \quad P = 2, \quad L = 4$

$\hookrightarrow |t^2 - 4| < \varepsilon$ .... $\sqrt{\ldots} < t - 2 < \sqrt{\ }$

$\rightarrow$ .... $\varepsilon > 0$.

Queremos ... $\delta > 0$:

$0 < |t - 2| < \delta \Rightarrow |f(t) - 3| < \varepsilon$

Para que $|3 - 3| < \varepsilon$, ou seja $0 < \varepsilon$

não é necessário impor nenhuma restrição em $\delta > 0$. Ou seja, δ pode ser qualquer valor maior que 0 e assim a def. de limites estará satisfeita nesse exemplo.