Regras de L'Hospital - Parte II

Além das indeterminações já conhecidas, a saber: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$, etc., existem também indeterminações no contexto de funções com expoentes, a saber:
$0^0, 1^0, 0^1, 1^\infty, \infty^1, \infty^\infty$, etc.

Vejamos alguns exemplos:
1 - $\lim_{t \to +\infty} 2^t = +\infty$ (não é indeterminação!)
2 - $\lim_{t \to +\infty} 1^t = \lim_{t \to +\infty} 1 = 1$ (não é indeterminação!)
3 - $\lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$ (é indeterminação do tipo "1^∞")
4 - $\lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5t}\right)^t = \sqrt[5]{e}$ (é indeterminação do tipo "1^∞")
5 - $\lim_{t \to 0^+} (1 + \sin 4t)^{\cot t}$ (é indeterminação do tipo "1^∞")
6 - $\lim_{t \to 0^+} t^t$ (é indeterminação do tipo "0^0")

De forma geral, o contexto de indeterminações envolvendo expoentes está associado a uma expressão do tipo:

$$\lim_{t \to a} f(t)^{g(t)},$$

sendo que $f(t)$ e $g(t)$ convergem para $0, 1$ ou ∞, quando $t \to a$.

Como proceder com esse tipo de indeterminação?

Vamos utilizar o seguinte artifício algébrico:
$f(t)^{g(t)} = e^{\ln f(t)^{g(t)}} = e^{g(t) \cdot \ln f(t)}$

Dessa forma, percebemos, por exemplo, que uma indeterminação do tipo "1^∞" será transformada numa outra indeterminação do tipo "$0 \cdot \infty$". Daí, poderemos usar os conhecimentos já obtidos anteriormente para tratar esses exemplos via Regras de L'Hospital.

Exemplo:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \lim_{t\to+\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t} = \lim_{t\to+\infty} e^{t\cdot\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}.$$

Neste ponto, passaremos a analisar apenas o limite da expressão que ocorre no expoente:

$$\lim_{t\to+\infty} t\cdot\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{t}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{t}} = 1$$

Fazendo a mudança de variáveis: $u = t\cdot\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)$, vemos que o limite acima fica:

$$\lim_{t\to+\infty} e^{t\cdot\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)} = \lim_{u\to1} e^u = e$$