Regras de L'Hospital

Regra de l'Hôspital Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou que $$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞.) Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for ∞ ou $-\infty$).

Obs.: Veja que se trata aqui do quociente das derivadas, e não da derivada do quociente.

Exemplos:

"$\frac{0}{0}$" L.H.

1 - $\lim_{t\to 1}\left(\frac{t^2-1}{t-1}\right) = \lim_{t\to 1}\left(\frac{2t}{1}\right) = \lim_{t\to 1} 2t = 2$

"$\frac{\infty}{\infty}$"

2 - $\lim_{t\to +\infty}\left(\frac{t^2-1}{t-1}\right) = \lim_{t\to +\infty}\left(\frac{2t}{1}\right) = \lim_{t\to +\infty} 2t = +\infty$

L.H.

3 - $\lim_{t\to +\infty}\frac{e^t}{t^2} = \lim_{t\to +\infty}\frac{e^t}{2t} = \lim_{t\to +\infty}\frac{e^t}{2} = +\infty$

L.H. L.H.

"$\frac{\infty}{\infty}$" "$\frac{\infty}{\infty}$"

4 - $\lim_{t\to +\infty}\frac{e^t}{t^5}$

usar L'Hospital 5 vezes.

5 - $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{1} = \lim_{t\to 0}\cos t = 1$

6 - $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{2t} = ?$

$\nexists$

Não é possível usar L.H.

Veja que é possível analisarmos outras variações de indeterminação no limite que não sejam apenas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

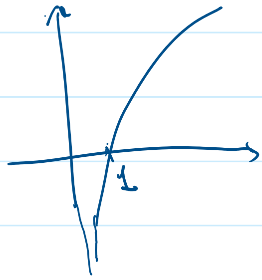
indeterminação no limite que não sejam apenas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplos:

$$\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

1 - $\lim_{t\to 0^+} t.\ln(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(t)}{1/t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} =$ L.H.

$\lim_{t\to 0^+} -t = 0$ "0 . ∞"



$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t}{1/\ln(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\frac{-1/t}{(\ln t)^2}} = \lim_{t\to 0^+} -t.(\ln t)^2$$

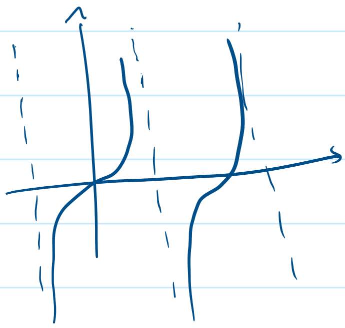
$$\left(\frac{1}{\ln t}\right)' = \frac{-1/t}{(\ln t)^2}$$

"∞ − ∞"

2 - $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+} \sec t - \operatorname{tg} t = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos t} - \frac{\sin t}{\cos t} =$

$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{1-\sin t}{\cos t} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{-\cos t}{-\sin t} = \frac{0}{1} = 0$

$\frac{0}{0}$ L.H.



Existe ainda o caso de indeterminações envolvendo expoentes. Esse caso será visto em próximas aulas.

$$f(t) = 10 + \frac{1}{4}\sin(10\,\pi t)$$

$$f'(t) = 0 + \frac{1}{4}\cos(10\pi t).10\pi = \frac{5\pi}{2}.\cos(10\pi t)$$