Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Departamento de Matemática

MATA42 - Matemática Discreta I
Princípio da Lógica Matemática

Proposições Simples e Compostas, Conectivos Lógicos

Professora: Isamara

A Lógica Formal repousa sobre três princípios(axiomas) fundamentais que permitem todo seu desenvolvimento posterior, e que dão validade a todos os atos do pensamento e do raciocínio.

1. **Princípio da Identidade:** "O que é, é."
   Todo objeto é idêntico a si próprio.
2. **Princípio da Não Contradição:**
   "Um objeto não pode, simultaneamente, ser e não ser."
   Não é possível afirmar e negar o mesmo predicado para o mesmo objeto ao mesmo tempo; ou ainda, de duas afirmações contraditórias, uma é necessariamente falsa.
3. **Princípio do Terceiro Excluído:** "Todo objeto é ou não é."
   Uma dada afirmação é necessariamente verdadeira ou falsa, não existindo uma terceira opção.

DEFINIÇÃO:

Chama-se PROPOSIÇÃO uma setença declarativa que exprime um pensamento de sentido completo, e que pode ser classificada como VERDADEIRA ou FALSA.

Exemplos de Proposições:

- *O morcego é um mamífero.*
- *Salvador é a capital do Rio de Janeiro.*
- *Há* 63 *alunos na turma*$-$01 *e 53 na turma*$-$04 *de MATA42 no semestre* 2023.01 *da UFBa.*
- $1 + 1 = 3$.

Não são Proposições:

- Frases interrogativas: *Qual é a sua idade?*
- Frases imperativas: *Estude mais para as provas.*
- Frases exclamativas: *Lógico!*
- Não é verdadeiro nem falso: $x + 1 = 3$.

DEFINIÇÃO:

Diz-se que o "Valor Lógico" (**VL**) de uma proposição é VERDADE(V) se e somente se a proposição for verdadeira; e FALSIDADE(F) se e somente se a proposição é FALSA.

EXEMPLOS:

1. *Salvador é a capital da Bahia.* $\textbf{VL}(p) = V$
2. *Salvador é a capital do Rio de Janeiro.* $\textbf{VL}(q) = F$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

1. Toda proposição é necessariamente verdadeira ou falsa, não existindo outra possibilidade.
2. Nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa simultaneamente.
3. Toda proposição verdadeira é sempre verdadeira, não podendo ser ora verdadeira ora falsa.

George Boole (1815 - 1864)

- Nasceu em 1815 na Inglaterra;
- Filho de Sapateiro, estudava e trabalhava para ajudar no sustento da família;
- Seguiu a profissão de professor e abriu sua própria escola;
- Matemático, insatisfeito com os livros da sua época, foi influenciado, principalmente, pelos trabalhos dos Matemáticos franceses, Lagrange e Laplace;
- Em 1848 publicou o livro " **The Mathematical Analysis of Logic** "que deu início à sua contribuição à Lógica Simbólica; livro elogiado, principalmente, pelo matemático e lógico Augustus De Morgan;
- Em 1849, ele foi convidado para ser professor na *Universidade de Queen*, Irlanda;
- Em 1854, publicou seu mais famoso trabalho " **The Laws of Thought** ". Neste livro, ele introduziu a Álgebra Booleana;
- Em 1864, Boole morreu de pneumonia após manter-se lendo, mesmo encharcado depois de uma tempestade.

LÓGICA SIMBÓLICA:

Em LÓGICA SIMBÓLICA, a ação de combinar proposições para obter-se novas proposições é denominada OPERAÇÃO, e os conectivos são chamados de OPERADORES representados por SÍMBOLOS.

OPERAÇÃO	SÍMBOLO	PROPOSIÇÃO	LÊ-SE
NEGAÇÃO	$\neg$ ou $\sim$	$\sim p$ ou $\neg p$ ou $\overline{p}$	não p
CONJUNÇÃO	$\wedge$	$p \wedge q$	p e q
DISJUNÇÃO	$\vee$	$p \vee q$	p ou q
CONDICIONAL	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$	se p então q
BICONDICIONAL	$\leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$	p se e somente se q

DEFINIÇÃO:

Chama-se PROPOSIÇÃO SIMPLES(ou PROPOSIÇÃO ATÔMICA ou ÁTOMO) aquela que não contém outra proposição como parte integrante de si mesma.
NOTAÇÃO: $p, q, r, s, t, \cdots$

Exemplos: (Proposições Simples)

- p**:** *O morcego é um inseto.*
- q**:***Brasília é a capital do Brasil.*
- r**:***João foi ao cinema.*
- s**:***Maria será aprovada.*
- t**:***O número 3 divide 9.*

Definição:

Chama-se Proposição Composta(ou Proposição Molecular ou Molécula) aquela formada pela combinação de Proposições Simples através dos Conectivos Lógicos.
Notação: $P, Q, R, S, T, \cdots$

Nota: O operador de negação, apesar de ser um operador unário, constrói novas proposições a partir de proposições preexistentes.
Exemplos: (Proposições Compostas)

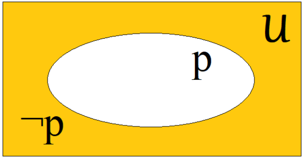
- P**:** *O morcego não é um inseto.*
  p**:** *O morcego é um inseto.* P**:** $\sim p$

Exemplos: (Proposições Compostas)

- *Q*: *Brasília é a capital do Brasil e Salvador é a capital da Bahia.*
  p: *Brasília é a capital do Brasil.* *q*: *Salvador é a capital da Bahia.*
  Q: $p \wedge q$
- *R*: *João foi ao cinema ou Maria ficou em casa.*
  p: *João foi ao cinema.* *q*: *Maria ficou em casa.*
  R: $p \vee q$
- *S*: *Se Maria estudar então será aprovada.*
  p: *Maria estuda.* *q*: *Maria será aprovada.*
  S: $p \rightarrow q$
- *T*: *Maria será aprovada se e somente se estudar.*
  p: *Maria estuda.* *q*: *Maria será aprovada.*
  T: $p \leftrightarrow q$

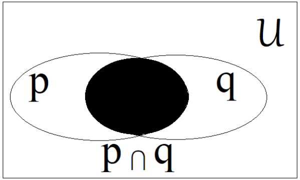
- **Negação**
  Seja p uma proposição. A negação de p, denotada $\neg p$, é verdadeira quando p for falso, e falsidade caso contrário.

p	$\neg p$
V	F
F	V



- **Conjunção**
  Sejam p e q proposições. A conjunção p e q denotada por $p \wedge q$ é verdadeira quando ambos forem verdadeiros e falsidade caso contrário.

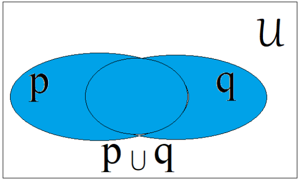
p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F



- **DISJUNÇÃO**

  Sejam p e q proposições. A disjunção entre p e q denotada por $p \vee q$ é verdadeira quando pelo menos um for verdadeiro e falsidade quando ambos forem falsos.

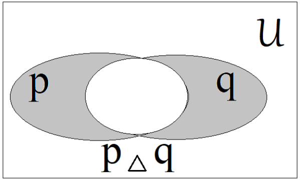
p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F



Observação: Notamos que na disjunção definida acima, podemos ter as duas proposições verdadeiras, ou seja, temos uma disjunção INCLUSIVA.
Por exemplo: "Hoje é segunda-feira ou está chovendo hoje."
Neste caso, hoje pode ser segunda-feira e também pode estar chovendo.

Observação: Podemos ter uma disjunção EXCLUSIVA, denotada por $p \oplus q$, ou $p \underline{\vee} q$.
lê-se: "OU p OU q" ; ou, " p OU q, MAS NÃO AMBOS" .
Portanto, a notação $\oplus$ ou $p \underline{\vee} q$, é verdadeira quando **exatamente uma** das proposições é verdade; e falsidade caso contrário.
Por exemplo: "Hoje é segunda-feira ou hoje é terça-feira."
Neste caso, hoje não pode ser segunda-feira e terça-feira ao mesmo tempo.

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F



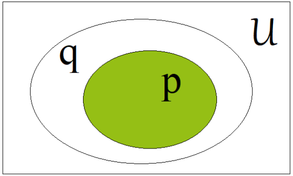
- **Condicional**

  Sejam p e q proposições. A condicional $p \rightarrow q$ é falsidade quando p é verdadeira e q é falsidade, e é verdadeira caso contrário.

  Podemos ler a condicional "*Se p então q*" ou "*p é suficiente para q*" ou "*q é necessário para p*" ou "*q, se p*" ou "*p somente se q*" ou "*q segue de p*" ou "*q sempre que p*" ou "*p apenas se q*" ou "*q a menos que* $\neg p$".

  Na condicional temos que p é denominada a HIPÓTESE ou ANTECEDENTE ou PREMISSA; e q é denominada CONCLUSÃO ou CONSEQUÊNCIA.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

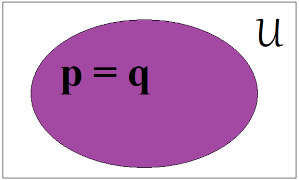


$p \subset q$

- **Condicional**
  Por exemplo: "Se Isa é graduada em Ciência da Computação então Isa terá um bom emprego."; ou "Isa terá um bom emprego quando ela for graduada em Ciência da Computação."; ou "Para Isa obter um bom emprego, é suficiente que ela seja graduada em Ciência da Computação."; ou "Isa terá um bom emprego a menos que ela não se gradue em Ciência da Computação. "
  Observação: Na condicional do exemplo acima temos uma sentença como na línguagem natural; porém, na linguagem matemática podemos ter proposições formando uma condicional sem uma relação entre a hipótese e a conclusão: "Se Isa é graduada em Ciência da Computação então $2+2=5$". Neste caso, a sentença é verdadeira, exceto se Isa for graduada em Ciência da Computação que a sentença será falsa.
  O conceito matemático de uma CONDICIONAL é independente de uma *causa e efeito* entre a hipótese e a conclusão; ele é baseado nos seus valores verdade e não na linguagem natural usada.

- **BICONDICIONAL**
  Sejam p e q proposições. A bicondicional $p \leftrightarrow q$ é a proposição "p se e somente se q".
  A bicondicional é verdadeira quando p e q tiverem o mesmo valor, e é falsidade caso contrário.
  Podemos ler a bicondicional "*p se e somente se q*" ou "*p sse q*" ou "*p é condição necessária e suficiente para q*" ou "*q é condição necessária e suficiente para p*" "*p unicamente se q*" ou "*¬p exceto se q*" ou "*¬p a menos que q*".

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V



Observação: A bicondicional é uma dupla-condicional, ou seja, o valor verdade da condicional $p \leftrightarrow q$ é o mesmo que $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

HIERARQUIA (ou ordem de precedência) de operações dos conectivos lógicos:

1. NEGAÇÃO $\neg$
2. CONJUNÇÃO $\wedge$
3. DISJUNÇÃO $\vee$
4. CONDICIONAL $\rightarrow$
5. BICONDICIONAL $\leftrightarrow$

Exemplo.1: $p \wedge \neg q \rightarrow r \vee s$

p	q	r	s	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$r \vee s$	$p \wedge \neg q \rightarrow r \vee s$
F	V	F	V	F	F	V	V

Observao: **Se for necessário alterar a ordem das operações, devemos utilizar "PARÊNTESES", ().**

Exemplo.2: Sejam as proposições simples

1. **p:** Mário foi ao cinema.
2. **q:** João foi ao teatro.
3. **r:** Marcelo ficou em casa.

- **Considerando a expressão proposicional:** $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}$

lê-se:. “SE Mário foi ao cinema E João foi ao teatro, ENTÃO Marcelo ficou em casa”.

- **Agora, utilizando os parênteses na expressão:** $\mathbf{p} \wedge (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r})$

lê-se:. “Mário foi ao cinema, E, SE João foi ao teatro, ENTÃO Marcelo ficou em casa”.

Questão.1: Coloque as expressões abaixo na forma simbólica.

(a) "A criança vai cair se subir na cadeira."
(b) "O aluno será aprovado no ENEM unicamente se estudar."
(c) "Se o aluno de Ciências da Computação faltar às aulas e não estudar, então ele terá um baixo aproveitamento ou será reprovado na disciplina."
(d) "Mara ficou em casa, quando Isa foi ao cinema mas Bia foi ao teatro."
(e) "Guido pode ter acesso ao laboratório de matemática somente se ele for professor ou não for um estudante de outro departamento."
(f) "O aluno de MATA42 não será aprovado se o aluno faltar às aulas a menos que o aluno" estude.

Questão.2: Considere as proposições abaixo
p : Está frio.
q : Está chovendo.
e traduza para a linguagem corrente as seguintes proposições em linguagem simbólica:

(a) $p \vee \neg q$
(b) $p \rightarrow q$
(c) $\neg p \wedge \neg q$
(d) $p \leftrightarrow \neg q$
(e) $(p \vee \neg q) \leftrightarrow (q \wedge \neg p)$

Questão.3: Sejam as proposições p : C^{++} é uma linguagem de programação orientada a objetos; e q : C^{++} é uma linguagem utilizada para o desenvolvimento de games. Traduza para a linguagem simbólica as afirmações abaixo:

(a) "Não é verdade que: C^{++} é uma linguagem de programação orientada a objetos ou seja utilizada para o desenvolvimento de games."

(b) " Se C^{++} é uma linguagem de programação orientada a objetos isto significa que ela é utilizada para o desenvolvimento de games."

(c) "É falso que, C^{++} é uma linguagem de programação orientada a objetos ou que não é utilizada para o desenvolvimento de games."

(d) "C^{++} não é uma linguagem de programação orientada a objetos exceto se ela é uma linguagem utilizada para o desenvolvimento de games."

Questão.1:(Respostas) Coloque as expressões abaixo na forma simbólica.

(a) "A criança vai cair se subir na cadeira."
p : a criança cai;
q : a criança sobe na cadeira;
$q \rightarrow p$

(b) "O aluno será aprovado no ENEM unicamente se estudar."
p : o aluno é aprovado;
q : o aluno estuda;
$p \leftrightarrow q$

(d) "Mara ficou em casa, quando Isa foi ao cinema mas Bia foi ao teatro."
p : Isa foi ao cinema;
q : Bia foi ao teatro;
r : Mara ficou em casa;
$p \wedge q \rightarrow r$

Questão.1:(Respostas) Coloque as expressões abaixo na forma simbólica.

(c) "Se o aluno de Ciências da Computação faltar às aulas e não estudar, então ele terá um baixo aproveitamento ou será reprovado nas disciplinas."
p : o aluno de Ciências da Computação falta às aulas;
q : o aluno de Ciências da Computação estuda;
r : o aluno de Ciências da Computação tem um baixo aproveitamento;
s : o aluno de Ciências da Computação é reprovado nas disciplinas;
$p \wedge \neg q \rightarrow r \vee s$

Questão.1:(Respostas) Coloque as expressões abaixo na forma simbólica.

(e) "Guido pode ter acesso ao laboratório de matemática se e somente se ele for professor ou não for um estudante de outro departamento."
p : Guido tem acesso ao laboratório de informática;
q : Guido é um professor;
r : Guido é um estudante de outro departamento;
$p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$

(f) O aluno de MATA42 não será aprovado se o aluno faltar às aulas a menos que o aluno estude.
p : o aluno de MATA42 é aprovado;
q : o aluno de MATA42 falta às aulas;
r : o aluno de MATA42 estuda;
$q \wedge \neg r \rightarrow \neg p$

Questão.2:(Respostas) Considere as proposições abaixo

p : Está frio.

q : Está chovendo.

e traduza para a linguagem corrente as seguintes proposições em linguagem simbólica:

(a) $p \vee \neg q$ "Está frio ou não está chovendo."

(b) $p \to q$ "Se está frio então está chovendo."

(c) $\neg p \wedge \neg q$ "Não está frio e não está chovendo."

Questão.2:(Respostas) Considere as proposições abaixo

p : Está frio.

q : Está chovendo.

e traduza para a linguagem corrente as seguintes proposições em linguagem simbólica:

(d) $p \leftrightarrow \neg q$ "Está frio se e somente se não está chovendo."

(e) $(p \vee \neg q) \leftrightarrow (q \wedge \neg p)$

"Está frio ou não está chovendo se e somente se está chovendo e não está frio."

Questão.3:(Respostas) Sejam as proposições p : C^{++} é uma linguagem de programação orientada a objetos; e q : C^{++} é uma linguagem utilizada para o desenvolvimento de games. Traduza para a linguagem simbólica as afirmações abaixo:

(a) "Não é verdade que: C^{++} é uma linguagem de programação orientada a objetos ou seja utilizada para o desenvolvimento de games."
$\neg(p \vee q)$

(b) " Se C^{++} é uma linguagem de programação orientada a objetos isto significa que ela é utilizada para o desenvolvimento de games."
$p \rightarrow q$

Questão.3:(Respostas) Sejam as proposições p : C^{++} é uma linguagem de programação orientada a objetos; e q : C^{++} é uma linguagem utilizada para o desenvolvimento de games. Traduza para a linguagem simbólica as afirmações abaixo:

(c) "É falso que, C^{++} é uma linguagem de programação orientada a objetos ou que não é utilizada para o desenvolvimento de games."
$\neg(p \vee \neg q)$

(d) "C^{++} não é uma linguagem de programação orientada a objetos exceto se ela é uma linguagem utilizada para o desenvolvimento de games."
$p \leftrightarrow q$

Definição: (Tabela Verdade)

Uma TABELA na qual são apresentados todos os valores lógicos possíveis de uma proposição composta, para cada combinação dos valores lógicos das **n,** $n \in \mathbb{N}$, proposições componentes, é denominada "TABELA VERDADE".

Observação: Cada linha da Tabela Verdade corresponde a uma possível combinação dos valores lógicos das n **proposições correspondentes.**
Como existem 2 (dois) valores V ou F para n **proposições componentes, temos então,** 2^n **combinações possíveis, ou seja, "A Tabela Verdade de uma** EXPRESSÃO PROPOSICIONAL **tem** 2^n **linhas."**

Considerando as expressões do Exemplo.2:

- $\mathbf{p \wedge q \rightarrow r}$
- $\mathbf{p \wedge (q \rightarrow r)}$

temos a seguinte Tabela Verdade com $2^3 = 8$ linhas:

p	q	r	$p \wedge q$	$q \rightarrow r$	$p \wedge q \rightarrow r$	$p \wedge (q \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V	F

Questão.4: Construa a Tabela Verdade para cada uma das proposições da Questão.1.

(a) $q \rightarrow p$

(b) $p \leftrightarrow q$

(c) $p \wedge \neg q \rightarrow r \vee s$

(a) $q \rightarrow p$

p	q	$q \rightarrow p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

(b) $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

(c) $p \wedge \neg q \rightarrow r \vee s$

p	q	r	s	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$r \vee s$	$p \wedge \neg q \rightarrow r \vee s$
V	V	V	V	F	F	V	V
V	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	V	F	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	F	V

(d) $p \wedge q \rightarrow r$

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

(e) $p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$

p	q	r	$\neg r$	$q \vee \neg r$	$p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F

(f) $q \wedge \neg r \rightarrow \neg p$

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$q \wedge \neg r \rightarrow \neg p$
V	V	V	F	F	F	V
V	V	F	F	V	V	F
V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V

Definição: (TAUTOLOGIA)

Diz-se que uma expressão proposicional(PROPOSIÇÃO COMPOSTA) é uma "TAUTOLOGIA" (ou TAUTOLÓGICA ou LOGICAMENTE VERDADEIRA) se e somente se na **última coluna** da tabela verdade para esta expressão ocorre apenas o valor lógico **V**.

Exemplo:

$p \vee \neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

Definição: (Contradição)

Diz-se que uma expressão proposicional(Proposição Composta) é uma "Contradição" (ou Contraválida ou Logicamente Falsa) se e somente se na **última coluna** da tabela verdade para esta expressão ocorre apenas o valor lógico **F**.

Exemplo:

$p \wedge \neg p$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Contradição

Definição: (CONTINGÊNCIA)

Diz-se que uma expressão proposicional(PROPOSIÇÃO COMPOSTA) é uma "CONTINGÊNCIA" (ou INDETERMINADA ou CONTINGENTE) se e somente se na **última coluna** da tabela verdade para esta expressão ocorre pelo menos um valor lógico **V** e pelo menos um valor lógico **F**.

Exemplo:

$\neg p \vee q$

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Exemplo:

$(p \rightarrow q) \vee \neg((p \leftrightarrow r) \rightarrow \neg r)$

p	q	r	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow r$	$\neg r$	$(p \leftrightarrow r) \rightarrow \neg r$	$\neg((p \leftrightarrow r) \rightarrow \neg r)$	$(p \rightarrow q) \vee \neg((p \leftrightarrow r) \rightarrow \neg r)$
V	V	V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	V	V	V	F	V
F	F	V	V	F	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	F	V

Definição: (Fórmulas bem formadas - fbf)

Podemos encadear sentenças simples $(p, q, r, s, \cdots)$ ou compostas $(P, Q, R, S, \cdots)$ usando os conectivos lógicos unário $\neg$ e binários $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ obedecendo a hierarquia das operações, e; usando os parênteses () se necessário, a fim de obtermos as chamadas "FÓRMULAS BEM FORMADAS- fbf" ou wffs(*well-formed formulas*).

Exemplos:

1. $P \vee \neg P$

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
V	F	V
F	V	V

A fbf é uma TAUTOLOGIA

2. $P \wedge \neg P$

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
V	F	F
F	V	F

A fbf é uma CONTRADIÇÃO

3. $\neg P \vee Q$

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

A fbf é CONTINGÊNCIA

Definição: (Equivalência)

Diz-se que uma fórmula bem formada da BICONDICIONAL $P \leftrightarrow Q$ é uma Equivalência(ou EQUIVALÊNCIA LÓGICA) se e somente se é também uma TAUTOLOGIA.

Diz-se assim que as proposições P e Q são EQUIVALENTES.

NOTAÇÃO:

$$P \Leftrightarrow Q$$

.

Exemplo:

$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

A fbf bicondicional é uma TAUTOLOGIA logo, é uma EQUIVALÊNCIA :

$$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$$

Propriedades de Equivalência

1. REFLEXIVA: $P \Leftrightarrow P$
2. SIMÉTRICA: Se $P \Leftrightarrow Q$ então $Q \Leftrightarrow P$
3. TRANSITIVA: Se $P \Leftrightarrow Q$ e $Q \Leftrightarrow R$ então $P \Leftrightarrow R$

- Comutativa: $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
  $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
- Associativa: $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
  $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
- Distributiva: $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
  $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- Dupla Negação: $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$

- Idempotente: $P \wedge P \Leftrightarrow P$
  $P \vee P \Leftrightarrow P$
- Elemento Neutro: $P \wedge V \Leftrightarrow P$
  $P \vee F \Leftrightarrow P$
- Elemento Absorvente: $P \wedge F \Leftrightarrow F$
  $P \vee V \Leftrightarrow V$
- Absorção: $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$
  $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
- Complemento: $P \vee \neg P \Leftrightarrow V$
  $P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$

- Leis de De Morgan: $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
  $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
- Conjunção - Disjunção: $(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$
  $(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$
- Condicional: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- Contrapositiva: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
- Negação da Condicional: $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

- Dilema: $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow Q) \Leftrightarrow Q$
- Redução ao Absurdo: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \rightarrow F$
- Exportação - Importação: $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow P \wedge Q \rightarrow R$

Lógica Proposicional

Fbf Bicondicional - Principais Equivalências - Propriedades

- Bicondicional: $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
  $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
  $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$
- Negação da Bicondicional: $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$
  $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$

Exemplo:

Mostre a equivalência $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$

$P \leftrightarrow Q \overset{Bicondicional}{\Longleftrightarrow} (P \to Q) \land (Q \to P) \overset{Condicional}{\Longleftrightarrow} (\neg P \lor Q) \land (\neg Q \lor P) \overset{Distributiva}{\Longleftrightarrow}$
$(\neg P \land \neg Q) \lor (\neg P \land P) \lor (Q \land \neg Q) \lor (Q \land P) \overset{Complemento}{\Longleftrightarrow}$
$(\neg P \land \neg Q) \lor F \lor F \lor (Q \land P) \overset{Elemento\ \ Neutro}{\Longleftrightarrow} (\neg P \land \neg Q) \lor (P \land Q) \overset{Comutativa}{\Longleftrightarrow}$
$(P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$. $\blacksquare$

Aplicação: Linguagem de programação Pascal

if(notaprova2 $>$ notaprova1) **and not** ((notaprova2 $>$ notaprova1) **and** (media $<$ 5)) **then**
um procedimento (lista de parâmetros)
else
outro procedimento (lista de parâmetros).

Definindo as proposições:
P : notaprova2 $>$ notaprova1; e
Q : media $<$ 5;
a expressão condicional acima tem a seguinte **fbf**: $P \wedge \neg(P \wedge Q)$.
Esta **fbf** pode ser simplificada substituindo-se algumas subexpressões por suas expressões equivalentes:

$$P \wedge \neg(P \wedge Q) \overset{DeMorgan}{\Longleftrightarrow} P \wedge (\neg P \vee \neg Q) \overset{Distributiva}{\Longleftrightarrow} (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \overset{Complemento}{\Longleftrightarrow}$$
$$F \vee (P \wedge \neg Q) \overset{ElementoNeutro}{\Longleftrightarrow} (P \wedge \neg Q).$$

Aplicação: Linguagem de programação Pascal

Agora, considerando a equivalência:

$P \wedge \neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow (P \wedge \neg Q)$.

temos,

if(notaprova2 $>$ notaprova1) **and not** (media $<$ 5) **then**

um procedimento (lista de parâmetros)

else

outro procedimento (lista de parâmetros).

Exemplo:

Escrever a fbf $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow \neg P$ em termo de negação e disjunção:

$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow \neg P \overset{Condicional}{\Longleftrightarrow} \neg(P \leftrightarrow Q) \vee \neg P \overset{Bicondicional}{\Longleftrightarrow} \neg[(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)] \vee \neg P \overset{Conjunção}{\Longleftrightarrow}$
$\neg[\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)] \vee \neg P \overset{DuplaNegação}{\Longleftrightarrow} \neg[\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(P \vee Q)] \vee \neg P$.

DEFINIÇÃO: (INFERÊNCIA ou Implicação)

Diz-se que uma fórmula bem formulada(fbf) da forma condicional $P \rightarrow Q$ é uma INFERÊNCIA(IMPLICAÇÃO ou INFERÊNCIA LÓGICA ou REGRA DE INFERÊNCIA) se e somente se é também uma TAUTOLOGIA. Diz-se assim que a proposições P é o **antecedente** e Q é o **consequente**.

NOTAÇÃO: $P \Rightarrow Q$.

DEFINIÇÃO: (INFERÊNCIA ou Implicação)

Diz-se que uma fórmula bem formulada(fbf) da forma condicional $P \rightarrow Q$ é uma INFERÊNCIA(IMPLICAÇÃO ou INFERÊNCIA LÓGICA ou REGRA DE INFERÊNCIA) se e somente se é também uma TAUTOLOGIA. Diz-se assim que a proposições P é o **antecedente** e Q é o **consequente**.

NOTAÇÃO: $P \Rightarrow Q$.

EXEMPLO: a fbf: $(P \rightarrow Q) \wedge P \rightarrow Q$ é uma TAUTOLOGIA,

P	Q	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge P$	$(P \rightarrow Q) \wedge P \rightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

logo, é também uma INFERÊNCIA (ou IMPLICAÇÃO): $(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$.

Propriedades de INFERÊNCIA

1. REFLEXIVA: $P \Rightarrow P$
2. TRANSITIVA: Se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$ então $P \Rightarrow R$

Propriedades de INFERÊNCIA

1. REFLEXIVA: $P \Rightarrow P$
2. TRANSITIVA: Se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$ então $P \Rightarrow R$

OBSERVAÇÃO:

As REGRAS DE INFERÊNCIA têm um papel importante nas demonstrações matemáticas.
Há TEOREMAS em matemática que são da forma $P \Rightarrow Q$, ou seja, uma *condicional tautológica*, onde P é denominada HIPÓTESE e Q é a TESE.

Propriedades de INFERÊNCIA

1. REFLEXIVA: $P \Rightarrow P$
2. TRANSITIVA: Se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$ então $P \Rightarrow R$

OBSERVAÇÃO:

As REGRAS DE INFERÊNCIA têm um papel importante nas demonstrações matemáticas.
Há TEOREMAS em matemática que são da forma $P \Rightarrow Q$, ou seja, uma *condicional tautológica*, onde P é denominada HIPÓTESE e Q é a TESE.
Devido à Lei da Contraposição, temos a Equivalência: $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$;
logo, a **contrapositiva** do teorema $\neg Q \Rightarrow \neg P$ também é uma *condicional tautológica* e, consequentemente, é um teorema.

Definição: Argumentos

Sejam as proposições (fbfs) $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n, Q$; $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que toda a afirmação na qual um dado conjunto finito de proposições $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ **acarreta** uma proposição final Q é um Argumento.

Definição: Argumentos

Sejam as proposições (fbfs) $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n, Q; n \in \mathbb{N}$. Diz-se que toda a afirmação na qual um dado conjunto finito de proposições $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ **acarreta** uma proposição final Q é um Argumento.
As proposições $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ são denominadas "premissas" e a proposição Q é denominada "conclusão".

Notação: $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \vdash Q$

ou

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline \\ \therefore Q \end{array}$$

Notação: $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \vdash Q$

ou

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline \\ \therefore Q \end{array}$$

lê-se: " $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ **acarretam** Q ", ou " Q **decorre de** $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ ", ou " Q **se deduz de** $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ ", ou " Q **se infere de** $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ " .

Condicional associada a um Argumento

Dado um Argumento:

$$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n \vdash Q; n \in \mathbb{N}$$

corresponde uma condicional associada e vice-versa:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n) \rightarrow Q.$$

Na condicional associada tem-se a **conjunção das premissas** como antecedente(hipótese) e a **conclusão** é o consequente(tese).

Observação:

Denomina-se Silogismo um argumento com apenas **duas** premissas e uma conclusão.

$$P_1, P_2 \vdash Q$$

Observação:
Denomina-se Silogismo um argumento com apenas **duas** premissas e uma conclusão.

$$P_1, P_2 \vdash Q$$

Condicional associada:

$$P_1 \wedge P_2 \rightarrow Q$$

Observação:
Denomina-se Silogismo um argumento com apenas **duas** premissas e uma conclusão.

$$P_1, P_2 \vdash Q$$

Condicional associada:

$$P_1 \wedge P_2 \rightarrow Q$$

Exemplo:

$$\neg(P \wedge R) \wedge R \rightarrow \neg P$$

$P_1 : \neg(P \wedge R)$
$P_2 : R$
$Q : \neg P$

Definição: "Argumentos Válidos"

Seja um Argumento $(P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n) \vdash Q$; $n \in \mathbb{N}$.
Diz-se que um Argumento é válido (ou correto ou legítimo) se e somente se a **conclusão** Q é **verdadeira** sempre que as **premissas** $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ forem **verdadeiras**.
Ou seja, $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n) \Rightarrow Q$ é uma tautologia.

DEFINIÇÃO: "Argumentos Válidos"

Seja um ARGUMENTO $(P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n) \vdash Q; n \in \mathbb{N}$.
Diz-se que um ARGUMENTO é VÁLIDO (ou CORRETO ou legítimo) se e somente se a **conclusão** Q é **verdadeira** sempre que as **premissas** $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ forem **verdadeiras**.
Ou seja, $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n) \Rightarrow Q$ é uma tautologia.

DEFINIÇÃO: "Falácias"

Seja um ARGUMENTO $(P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n) \vdash Q; n \in \mathbb{N}$. Diz-se que um **Argumento** é um SOFISMA (ou FALÁCIA ou INCORRETO ou ILEGÍTIMO) se e somente se a **conclusão** Q não pode ser deduzida das **premissas** $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$.
Assim, $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$ não é uma tautologia.

Exemplos:

1. argumento válido: $(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow Q$; $P_1 : P \rightarrow R$; $P_2 : P$; $Q : R$

EXEMPLOS:

1. ARGUMENTO VÁLIDO: $(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow Q$; $P_1 : P \rightarrow R$; $P_2 : P$; $Q : R$

P	R	$P \rightarrow R$	$(P \rightarrow R) \wedge P$	$(P \rightarrow R) \wedge P \rightarrow R$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Exemplos:

1. argumento válido: $(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow Q$; $P_1 : P \rightarrow R$; $P_2 : P$; $Q : R$

P	R	$P \rightarrow R$	$(P \rightarrow R) \wedge P$	$(P \rightarrow R) \wedge P \rightarrow R$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

2. "Se Pedro é alto, então Pedro é magro. Pedro é magro. Então, Pedro é alto."

EXEMPLOS:

1. ARGUMENTO VÁLIDO: $(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow Q$; $P_1 : P \rightarrow R$; $P_2 : P$; $Q : R$

P	R	$P \rightarrow R$	$(P \rightarrow R) \wedge P$	$(P \rightarrow R) \wedge P \rightarrow R$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

2. "Se Pedro é alto, então Pedro é magro. Pedro é magro. Então, Pedro é alto."
Proposições simples **p:** *Pedro é alto;* **q:** *Pedro é magro* .

EXEMPLOS:

1. ARGUMENTO VÁLIDO: $(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow Q$; $P_1 : P \rightarrow R$; $P_2 : P$; $Q : R$

P	R	$P \rightarrow R$	$(P \rightarrow R) \wedge P$	$(P \rightarrow R) \wedge P \rightarrow R$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

2. "Se Pedro é alto, então Pedro é magro. Pedro é magro. Então, Pedro é alto."
Proposições simples **p:** *Pedro é alto;* **q:** *Pedro é magro* .
PREMISSAS $P_1 : p \rightarrow q$ e $P_2 : q$, CONCLUSÃO $Q : p$.

Exemplos:

1. argumento válido: $(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow Q$; $P_1 : P \rightarrow R$; $P_2 : P$; $Q : R$

P	R	$P \rightarrow R$	$(P \rightarrow R) \wedge P$	$(P \rightarrow R) \wedge P \rightarrow R$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

2. "Se Pedro é alto, então Pedro é magro. Pedro é magro. Então, Pedro é alto."
Proposições simples **p:** *Pedro é alto;* **q:** *Pedro é magro* .
premissas $P_1 : p \rightarrow q$ e $P_2 : q$, conclusão $Q : p$.

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

EXEMPLOS:

1. ARGUMENTO VÁLIDO: $(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow Q$; $P_1 : P \rightarrow R$; $P_2 : P$; $Q : R$

P	R	$P \rightarrow R$	$(P \rightarrow R) \wedge P$	$(P \rightarrow R) \wedge P \rightarrow R$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

2. "Se Pedro é alto, então Pedro é magro. Pedro é magro. Então, Pedro é alto."
Proposições simples **p:** *Pedro é alto;* **q:** *Pedro é magro* .
PREMISSAS $P_1 : p \rightarrow q$ e $P_2 : q$, CONCLUSÃO $Q : p$.

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

Note que $(P_1 \wedge P_2) \rightarrow Q$ não é uma TAUTOLOGIA.

Logo, o argumento é uma FALÁCIA.

EXEMPLOS:

1. ARGUMENTO VÁLIDO: $(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow Q$; $P_1 : P \rightarrow R$; $P_2 : P$; $Q : R$

P	R	$P \rightarrow R$	$(P \rightarrow R) \wedge P$	$(P \rightarrow R) \wedge P \rightarrow R$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

2. "Se Pedro é alto, então Pedro é magro. Pedro é magro. Então, Pedro é alto."
Proposições simples **p:** *Pedro é alto;* **q:** *Pedro é magro* .
PREMISSAS $P_1 : p \rightarrow q$ e $P_2 : q$, CONCLUSÃO $Q : p$.

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

Note que $(P_1 \wedge P_2) \rightarrow Q$ não é uma TAUTOLOGIA.

Logo, o argumento é uma FALÁCIA.

- Regra da Adição: **(AD)** "Ampliação Disjuntiva"
  $P \Rightarrow P \vee Q$
- Regra da Simplificação Conjuntiva: **(SIMPC)**
  $P \wedge Q \Rightarrow P$ $\qquad$ $P \wedge Q \Rightarrow Q$
- Regra da Simplificação Disjuntiva: **(SIMPD)**
  $(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \Rightarrow P$
- Regra do Modus Ponens: **(MP)** **"método da afirmação"**
  $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$
- Regra do Modus Tollens: **(MT)** **"método da negação"**
  $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$

- Regra da Absorção: **(ABS)**
  $(P \rightarrow Q) \Rightarrow P \rightarrow (P \wedge Q)$
- Regra do Silogismo Hipotético: **(SH)**
  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$
- Regra do Silogismo Disjuntivo: **(SD)**
  $(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$ $\qquad$ $(P \vee Q) \wedge \neg Q \Rightarrow P$
- Regra do Silogismo Conjuntivo: **(SC)**
  $\neg(P \wedge Q) \wedge Q \Rightarrow \neg P$ $\qquad$ $\neg(P \wedge Q) \wedge P \Rightarrow \neg Q$
- Regra do Dilema Construtivo: **(DC)**
  $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R) \Rightarrow (Q \vee S)$
- Regra do Dilema Destrutivo: **(DD)**
  $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \Rightarrow (\neg P \vee \neg R)$

Exemplo.1:
Sejam as premissas $P_1 : (R \vee S)$ e $P_2 : ((R \vee S) \rightarrow U)$, conclua $Q : U$.

$P_1 :\ (R \vee S)$

$P_2 :\ ((R \vee S) \rightarrow U)$

$Q :\ U$

aplicando *Modus Ponens*:

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

em (P_1) e (P_2) concluimos que,

$$(R \vee S) \wedge ((R \vee S) \rightarrow U) \Rightarrow U.$$

Exemplo.2: Sejam as premissas P_1:R e P_2: $(R\rightarrow(\neg\neg T))$, conclua Q: T.

$$\begin{aligned} P_1 &: R \\ P_2 &: (R\rightarrow(\neg\neg T)) \\ Q &: T \end{aligned}$$

P_1 : R

P_2 : $(R\rightarrow(\neg\neg T))$

P_3 : $(R\rightarrow T)$ <u>*Dupla Negação*</u> em (P_2)

P_4 : T <u>*Modus Ponens*</u> em (P_1) e (P_3), ou seja, concluimos Q :T

OBSERVAÇÃO: As PREMISSAS podem ser listadas em qualquer ordem; e a REGRA DE INFERÊNCIA pode ser aplicada em passos não consecutivos para obter a CONCLUSÃO.

EXEMPLO.3:

P_1 : $\neg(P \wedge R)$

P_2 : R

P_3 : $\neg P \vee \neg R$ “ LEIS DE DE MORGAN em P_1”

P_4 : $P \rightarrow \neg R$ “ CONDICIONAL em P_3”

P_5 : $\neg P$ “ MODUS TOLLENS em P_4 e P_2”

Q : $\neg P$

Exemplo.4: "*Não está ensolarado e está mais frio que ontem. Se formos nadar, então (é porque) está ensolarado. Se não formos nadar, então vamos passear de canoa. Se formos passear de canoa, então voltaremos antes do pôr-do-sol.*"

Exemplo.4: "*Não está ensolarado e está mais frio que ontem. Se formos nadar, então (é porque) está ensolarado. Se não formos nadar, então vamos passear de canoa. Se formos passear de canoa, então voltaremos antes do pôr-do-sol.*"

Prove que estas hipóteses levam à conclusão:
"*voltaremos antes do pôr-do-sol*".

Exemplo.4: "*Não está ensolarado e está mais frio que ontem. Se formos nadar, então (é porque) está ensolarado. Se não formos nadar, então vamos passear de canoa. Se formos passear de canoa, então voltaremos antes do pôr-do-sol.*"

Prove que estas hipóteses levam à conclusão:
"*voltaremos antes do pôr-do-sol*".

PRIMEIRO PASSO: **definir as proposições**

p: *Está ensolarado;*
u: *Está mais frio que ontem;*
r: *Iremos nadar;*
s: *Iremos passear de canoa;*
t: *Voltaremos antes do pôr-do-sol.*

EXEMPLO.4: *"Não está ensolarado e está mais frio que ontem. Se formos nadar, então (é porque) está ensolarado. Se não formos nadar, então vamos passear de canoa. Se formos passear de canoa, então voltaremos antes do pôr-do-sol."*

Exemplo.4: "*Não está ensolarado e está mais frio que ontem. Se formos nadar, então (é porque) está ensolarado. Se não formos nadar, então vamos passear de canoa. Se formos passear de canoa, então voltaremos antes do pôr-do-sol.*"

Prove que estas hipóteses levam à conclusão:
"*voltaremos antes do pôr-do-sol*".

EXEMPLO.4: "*Não está ensolarado e está mais frio que ontem. Se formos nadar, então (é porque) está ensolarado. Se não formos nadar, então vamos passear de canoa. Se formos passear de canoa, então voltaremos antes do pôr-do-sol.*"

Prove que estas hipóteses levam à conclusão:
"*voltaremos antes do pôr-do-sol*".

SEGUNDO PASSO: **definir as proposições**

$P_1 : \neg p \wedge u$

$P_2 : r \rightarrow p$

$P_3 : \neg r \rightarrow s$

$P_4 : s \rightarrow t$

$Q : t$

Observações:

Temos que construir um argumento onde as premissas P_1, P_2, P_3, P_4 levem à conclusão Q:
$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \Rightarrow Q$:

OBSERVAÇÕES:

Temos que construir um ARGUMENTO onde as premissas P_1, P_2, P_3, P_4 levem à conclusão Q:
$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \Rightarrow Q$:

P_1 : $\neg p \wedge u$

P_2 : $r \rightarrow p$

P_3 : $\neg r \rightarrow s$

P_4 : $s \rightarrow t$

Observações:

Temos que construir um ARGUMENTO onde as premissas P_1, P_2, P_3, P_4 levem à conclusão Q: $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \Rightarrow Q$:

P_1 : $\neg p \wedge u$

P_2 : $r \rightarrow p$

P_3 : $\neg r \rightarrow s$

P_4 : $s \rightarrow t$

P_5 : $\neg p$ <u>Simplificação Conjuntiva</u> em (P_1)

Observações:

Temos que construir um ARGUMENTO onde as premissas P_1, P_2, P_3, P_4 levem à conclusão Q:
$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \Rightarrow Q$:

P_1 : $\neg p \wedge u$

P_2 : $r \rightarrow p$

P_3 : $\neg r \rightarrow s$

P_4 : $s \rightarrow t$

P_5 : $\neg p$ <u>Simplificação Conjuntiva</u> em (P_1)

P_6 : $\neg r$ <u>Modus Tollens</u> em (P_2) e (P_5)

Observações:

Temos que construir um argumento onde as premissas P_1, P_2, P_3, P_4 levem à conclusão Q: $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \Rightarrow Q$:

P_1 : $\neg p \wedge u$

P_2 : $r \rightarrow p$

P_3 : $\neg r \rightarrow s$

P_4 : $s \rightarrow t$

P_5 : $\neg p$ Simplificação Conjuntiva em (P_1)

P_6 : $\neg r$ Modus Tollens em (P_2) e (P_5)

P_7 : s Modus Ponens em (P_3) e (P_6)

OBSERVAÇÕES:

Temos que construir um ARGUMENTO onde as premissas P_1, P_2, P_3, P_4 levem à conclusão Q:
$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \Rightarrow Q$:

P_1 : $\neg p \wedge u$

P_2 : $r \rightarrow p$

P_3 : $\neg r \rightarrow s$

P_4 : $s \rightarrow t$

P_5 : $\neg p$ Simplificação Conjuntiva em (P_1)

P_6 : $\neg r$ Modus Tollens em (P_2) e (P_5)

P_7 : s Modus Ponens em (P_3) e (P_6)

P_8 : t Modus Ponens em (P_4) e (P_7)

Observações:

Temos que construir um argumento onde as premissas P_1, P_2, P_3, P_4 levem à conclusão Q:
$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \Rightarrow Q$:

P_1 : $\neg p \wedge u$

P_2 : $r \rightarrow p$

P_3 : $\neg r \rightarrow s$

P_4 : $s \rightarrow t$

P_5 : $\neg p$ Simplificação Conjuntiva em (P_1)

P_6 : $\neg r$ Modus Tollens em (P_2) e (P_5)

P_7 : s Modus Ponens em (P_3) e (P_6)

P_8 : t Modus Ponens em (P_4) e (P_7)

Assim, a partir das premissas(hipóteses) e aplicando as regras de inferência, deduzimos a **conclusão** Q: t *Voltaremos antes do pôr-do-sol.*

Consideremos as seguintes sentenças:

- “O aluno x gosta de estudar Matemática .”
- “A Linguagem de Programação x é de alto nível.”
- “$x + y > 10$.”

Como representá-las utilizando a Lógica Proposicional?
Como determinar os valores lógico de cada uma delas utilizando o Cálculo Proposicional?

Observação.1: As sentenças não podem ser simbolizadas adequadamente através de símbolos proposicionais, parênteses e conectivos lógicos.
Assim, não conseguiremos utilizar Cálculo Proposicional para determinar o valor lógico.

Observação.2: As sentenças contêm novos elementos: **variáveis** e **predicados**.

Definição: VARIÁVEL

Uma **Variável** é o sujeito da sentença.
NOTAÇÃO: $x, y, z, \cdots$; ou seja, utilizamos as letras minúsculas.

EXEMPLO:
"O aluno x gosta de estudar Matemática ."
VARIÁVEL : "x"
OBSERVAÇÃO: As variáveis servem para estabelecer de forma *genérica* fatos a respeito de OBJETOS de um determinado contexto de discurso.

Definição: PREDICADO

Um **predicado** é a propriedade que o sujeito da sentença pode assumir.
NOTAÇÃO: $P(x)$ "predicado que a variável x pode assumir".
$P(x)$ é também denominada "FUNÇÃO PROPOSICIONAL em x".

EXEMPLO:
"O aluno x gosta de estudar Matemática ."
VARIÁVEL : "x"
PREDICADO : " gosta de estudar Matemática "
OBJETO : "*João*" ; $P(x) = P(João)$
OBSERVAÇÃO: Diz-se que os PREDICADOS UNÁRIOS são aqueles que envolvem propriedades de uma única variável $P(x)$, os PREDICADOS BINÁRIOS são aqueles que envolvem propriedades de duas variáveis $P(x, y)$ e, $\cdots$ os PREDICADOS n-ÁRIOS são aqueles que envolvem propriedades de n variáveis $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Nas sentenças abaixo, utilizando as devidas notações, temos:

- PREDICADOS UNÁRIOS
  "A Linguagem de Programação x é de alto nível."
  VARIÁVEL : "A Linguagem de Programação x"
  PREDICADO : "é de alto nível"
  OBJETO : "C^{++}"; $P(x) = P(C^{++})$
- PREDICADOS BINÁRIOS
  "O aluno x estudou mais para a prova de Matemática que o aluno y."
  VARIÁVEIS : "Alunos x e y"
  PREDICADO : "x estudou mais para a prova de Matemática que y".
  OBJETOS : "Paulo e Isa"; $P(x, y) = P(Paulo, Isa)$

Nas sentenças abaixo, utilizando as devidas notações, temos:

- PREDICADOS TERNÁRIOS
  "$x + y > 3z$."
  VARIÁVEIS : "x, y, z"
  PREDICADO : "$x + y > 3z$"
  OBJETOS : "$8, 5, 4$"; $P(x, y, z) = P(8, 5, 4)$.

Quantificador Universal: $\forall$

O QUANTIFICADOR UNIVERSAL estabelece um predicado para TODOS os objetos de um determinado conjunto, sem a necessidade de enumerá-los explicitamente.
NOTAÇÃO: $\forall$
lê-se: “para todo”, “para todos”, “para cada”, “para qualquer”, “qualquer que seja”, “dado qualquer” .

Exemplo.1: “Para todo x tal que x é maior que zero”.
Utilizando as respectivas notações, temos a seguinte expressão:
$(\forall x)P(x)$ ou $\forall x(P(x))$ ou $\forall x, P(x)$ ou $\forall x|P(x)$;
onde, $P(x)$: $x > 0$.
Exemplo.2:
“Todo calouro da UFBa matricula-se em MATA42”.
$(\forall x)P(x)$ onde, $P(x)$: Matricular-se em MATA42.

Lógica de Predicados

Quantificadores e Predicados

Conjunto

Exemplo.3: “Todos os Alunos de MATA42 fizeram a primeira avaliação.”
Observe que afirmamos “algo” a respeito de “todos os Alunos de MATA42”; ou seja, temos um conjunto bem definido: *os alunos de MATA42*, e um atributo bem definido para os elementos deste conjunto: *fizeram a primeira avaliação.*
“Isa é aluna de MATA42, logo ela fez a primeira avaliação.”
Neste caso, temos “Isa” um elemento do conjunto o que nos leva a concluir que “Isa” possui o atributo definido para o conjunto.

todos alunos de MATA42

Quantificador Existencial: $\exists$

O QUANTIFICADOR EXISTENCIAL estabelece um predicado para UM OU MAIS objetos de um determinado conjunto, sem a necessidade de identificá-lo(os) explicitamente.
Notação: $\exists$
lê-se: "existe um", "para pelo menos um", "para algum"

Exemplo.1: $(\exists x)(x > 0)$; (lê-se: "existe pelo menos um x tal que x é maior que zero".)

Exemplo.2: "Existem calouros da UFBa matriculados em MATA42".
$(\exists x)P(x)$ onde, $P(x)$: Matricular-se em MATA42.

OBSERVAÇÃO: O quantificador existencial pode restringir o predicado a um ÚNICO objeto.
Neste caso, utilizamos a notação $\exists!$;
(lê-se: "existe um único x", "para um único x")

Exemplo: "Existe UM ÚNICO calouro da UFBa matriculado em MATA42";

$$\exists! x : P(x).$$

DOMÍNIO DE INTERPRETAÇÃO E VALOR LÓGICO

O **Valor Lógico** da expressão quantificada depende do "DOMÍNIO DE INTERPRETAÇÃO" (ou "*Conjunto Universo*"); ou seja, depende do domínio dos objetos sob os quais estamos interpretando a expressão.

Exemplo.1: "Para todo x tal que x é maior que zero".

$$\forall x | P(x); \text{ onde, } P(x)\text{: } x > 0.$$

- Se o DOMÍNIO DE INTERPRETAÇÃO $= \mathbb{Z}_+^*$, "conjunto dos inteiros positivos", o valor lógico é **V** pois qualquer valor de x no domínio será $x > 0$.
- Se o DOMÍNIO DE INTERPRETAÇÃO $= \mathbb{Z}$, "conjunto dos números inteiros", o valor lógico seria **F** pois nem todo x no domínio será positivo.

Exemplo.2:
"Todo calouro da UFBa matricula-se em MATA42".
$(\forall x)P(x)$ onde, $P(x)$: Matricular-se em MATA42.

- Se o Domínio de Interpretação = "curso de Estatística da UFBa", o valor lógico é **V** pois qualquer calouro x no domínio matricula-se em MATA42.
- Se o Domínio de Interpretação = "curso de Ciência da Computação da UFBa", o valor lógico seria **F** pois nem todo calouro x no domínio matricula-se em MATA42.

Exemplo.3: $(\exists x)(x > 0)$;

- Se o Domínio de Interpretação $= \mathbb{Z}$, o valor lógico será **V** .
- Se o Domínio de Interpretação $= \mathbb{Z}_{-}$, o valor lógico será **F**.

Lógica de Predicados

Domínio de Interpretação

Exemplo.4: $(\exists! x)(x^2 - 1 = 0)$;

- Se o DOMÍNIO DE INTERPRETAÇÃO $= \mathbb{N}$, o valor lógico será **V** .
  "$(\exists! x)(x^2 - 1 = 0)$"
  VARIÁVEIS : "x"
  PREDICADO : "$x^2 - 1 = 0$"
  OBJETOS : "1"; $P(x) = P(1) = (1)^2 - 1 = 0$.
  E, para qualquer $x \in \mathbb{N}; x \neq 1$ temos que $P(x)$ é **F** .
- Se o DOMÍNIO DE INTERPRETAÇÃO $= \mathbb{Z}$, o valor lógico será **F**.
  "$(\exists! x)(x^2 - 1 = 0)$"
  VARIÁVEIS : "x"
  PREDICADO : "$x^2 - 1 = 0$"
  OBJETO : "1"; $P(x) = P(1) = (1)^2 - 1 = 0$.
  OBJETO : "-1"; $P(x) = P(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$.
  temos que , para as duas instanciações $(x = 1) \vee (x = -1)$ $P(x)$ é **V** .

Exemplo.5: $(\forall x)(\exists y)Q(x,y)$; onde a propriedade $Q(x,y) : x < y$;
(lê-se: "para qualquer x existe y tais que $x < y$".)

?

- DOMÍNIO DE INTERPRETAÇÃO $= \mathbb{Z}$, o valor lógico é **V** .

Exemplo.6: $(\exists y)(\forall x)Q(x,y)$; onde a propriedade $Q(x,y) : x < y$;
(lê-se: "existe y para qualquer x tais que $x < y$".)

- DOMÍNIO DE INTERPRETAÇÃO $= \mathbb{Z}$, o valor lógico é **F**.

Sentença	$\forall x P(x)$
Verdade	Verdade para qualquer x
Falsidade	Existe ao menos um x para o qual $P(x)$ é Falso

Exemplo:

A sentença: Toda criança gosta de brinquedos.

será uma Falsidade quando;

Existe pelo menos uma criança que não gosta de brinquedos.

Sentença	$\exists x P(x)$
Verdade	existe ao menos um x para o qual $P(x)$ é Verdade
Falsidade	$P(x)$ é Falso para qualquer x

Exemplo:

A sentença: Existe pelo menos uma criança que gosta de estudar.

será uma Falsidade quando;

Toda criança não gosta de estudar.

Leis de De Morgan	
Sentença	Negação
$\forall x P(x)$	$\neg(\forall x P(x)) \Longleftrightarrow \exists x(\neg P(x))$
$\exists x P(x)$	$\neg(\exists x P(x)) \Longleftrightarrow \forall x(\neg P(x))$

Exemplo:

Sejam as sentenças:

- Todo estudante gosta de fazer as avaliações.
- Existe pelo menos um estudante que gosta de fazer as avaliações.

Aplicando as Leis de De Morgan obtemos,

- $\neg$(Todo estudante gosta de fazer as avaliações.) $\Longleftrightarrow$ Existe pelo menos um estudante que não gosta de fazer as avaliações.
- $\neg$(Existe pelo menos um estudante que gosta de fazer as avaliações.) $\Longleftrightarrow$ Todo estudante não gosta de fazer as avaliações.

Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 - 1925)

- Nasceu em 1848 na Alemanha e estudou na Universidade de Jena e na Universidade de Gottingen;
- Foi um matemático, lógico e filósofo;
- Lecionou Matemática na Universidade de Jena até a sua morte;
- Em 1879 publicou Begriffsschrift (Ideografia (Ideography) ou Notação Conceitual), apresenta pela primeira vez, um sistema matemático lógico no sentido moderno;
- Em 1884, publicou Die Grundlagen der Arithmetik (Os Fundamentos da Aritmética), obra-prima filosófica criticada, principalmente por Georg Cantor ;
- Em 1903 publicou o segundo volume de Grundgesetze der Arithmetik (Leis básicas da Aritmética), em que expunha um sistema lógico;

Friedrich Ludwig Gottlob Frege **(1848 - 1925)**

- Apesar de ser criticado pelos seus comteporâneos (incluindo seu admirador Bertrand Russell), Frege forneceu para a lógica matemática a CRIAÇÃO DE UM SISTEMA DE REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA:
  - representação formal da estrutura dos enunciados lógicos e suas relações;
  - substituição da velha dicotomia sujeito-predicado, herdada da "tradição lógica Aristotélica, pela oposição "matemática função-argumento;
  - Frege buscava uma caracterização precisa do que é uma "demonstração matemática, ao contrário de Aristóteles e George Boole, que procuravam identificar as formas válidas de argumento
  - As expressões de quantificação "para todo o x, "existe um x, têm origem na obra de Frege;
  - Frege revolucionou a lógica com o desenvolvimento do CÁLCULO DE PREDICADOS (ou LÓGICA DE PREDICADOS);

Na Lógica de Predicados podemos utilizar os conectivos lógicos: unário($\neg$) e binários($\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$), para obtermos as FÓRMULAS BEM FORMADAS PREDICADAS seguindo as regras:

- Se $P(x)$ é uma fbf então $\neg P(x)$ também será.
- Se $P(x)$ e $Q(x)$ são fbfs então $P(x) \wedge Q(x)$ também será.
- Se $P(x)$ e $Q(x)$ são fbfs então $P(x) \vee Q(x)$ também será.
- Se $P(x)$ e $Q(x)$ são fbfs então $P(x) \rightarrow Q(x)$ também será.
- Se $P(x)$ e $Q(x)$ são fbfs então $P(x) \leftrightarrow Q(x)$ também será.
- Se $P(x)$ é uma fbf e x uma variável então $\forall x(P(x))$ também será.
- Se $P(x)$ é uma fbf e x uma variável então $\exists x(P(x))$ e $\exists! x(P(x))$também será.

"UMA FBF SERÁ VÁLIDA SE E SOMENTE SE ELA É VERDADEIRA PARA TODAS AS INTERPRETAÇÕES POSSÍVEIS".

Seja a fbf predicada: $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)$

tal que, $P(x)$ é a propriedade de x ser par;
e o DOMÍNIO DE INTERPRETAÇÃO $= \mathbb{Z}$.
lê-se: "Se (existe ao menos um inteiro par) então (todo inteiro é par)".
Neste caso, o Valor Lógico do antecedente da condicional é Verdadeiro(**V**);
e o Valor Lógico do consequente da condicional é Falso (**F**).
Logo, Diz-se que a **fbf predicada** não é **válida**, ou seja, o seu Valor Lógico é **F**.

Seja a fbf predicada: $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)P(x)$

$P(x)$ é a propriedade de x ser par;
e o DOMÍNIO DE INTERPRETAÇÃO $= \mathbb{Z}$.
lê-se: "Se (todo inteiro é par) então (existe pelo menos um inteiro que seja par)".
Neste caso, o Valor Lógico do antecedente da condicional é Falso(**F**); e
o Valor Lógico do consequente da condicional é Verdadeiro (**V**).
Assim, a **fbf predicada** é **válida**, ou seja, o seu Valor Lógico é **V** .

Enunciados Categóricos

- UNIVERSAL AFIRMATIVO: são enunciados da forma $\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))$.
  Em termos de conjuntos, um enunciado UNIVERSAL AFIRMATIVO estabelece que o conjunto P é um subconjunto do conjunto Q.
  Exemplo:
  " Todos os alunos são estudiosos " , considerando os predicados: $A(x)$: x é aluno; e, $E(x)$: x é estudioso; tem-se, $\forall x, (A(x) \Rightarrow E(x))$.

- UNIVERSAL NEGATIVO: são enunciados da forma $\forall x, (P(x) \Rightarrow \neg Q(x))$.
  Em termos de conjuntos, um enunciado UNIVERSAL NEGATIVO estabelece que os conjuntos P e Q não se cortam, são disjuntos.
  Exemplo:
  " Nenhum aluno é estudioso " (ou " Não existe aluno estudioso "), considerando os predicados: $A(x)$: x é aluno; e, $E(x)$: x é estudioso; tem-se, $\forall x, (A(x) \Rightarrow \neg E(x))$.
  Note que, se $x \in A$ então $x \notin E$.

Enunciados Categóricos

- Particular afirmativo: são enunciados da forma $\exists x, (P(x) \wedge Q(x))$.
  Em termos de conjuntos, um enunciado particular afirmativo estabelece que os conjuntos P e Q se cortam, isto é, não são disjuntos.
  Exemplo:
  " Alguns alunos são estudiosos " , considerando os predicados: $A(x)$: x é aluno; e, $E(x)$: x é estudioso; tem-se, $\exists x, (A(x) \wedge E(x))$.
  Note que, $\exists x; x \in A$ e $x \in E$.
- Particular negativo: são enunciados da forma $\exists x, (P(x) \wedge \neg Q(x))$.
  Em termos de conjuntos, um enunciado particular negativo estabelece que existem elementos no conjunto P que não estão em Q. Ou seja, os conjuntos podem se cortar ou não, mas garante que P não é subconjunto de Q.

Enunciados Categóricos

- PARTICULAR NEGATIVO: $\exists x, (P(x) \wedge \neg Q(x))$.
  Exemplos:
  1. " Alguns alunos não são estudiosos " (ou " Há alunos que não estudam " ou " Nem todo aluno é estudioso "), considerando os predicados:
     $A(x)$: x é aluno; e, $E(x)$: x é estudioso; tem-se, $\exists x, (A(x) \wedge \neg E(x))$.
     Note que $\exists x; x \in A$ e $x \notin E$.
  2. " Nem toda rosa vermelha é perfumada , considerando os predicados:
     $R(x)$: x é uma rosa; $V(x)$: x é vermelho; e, $F(x)$: x é perfumado; tem-se,
     $\neg \forall x, (R(x) \wedge V(x) \Rightarrow F(x)) \Leftrightarrow \exists x, (R(x) \wedge V(x) \wedge \neg F(x))$.
     Note que $\exists x; x \in R$ e $x \in V$ e $x \notin F$.

Exemplo: Quantificador universal $\forall$ e uma variável específica a

$(\forall x)(P(x)\rightarrow S(x)) \wedge P(a) \rightarrow S(a)$.

PREMISSAS:
P_1 : $(\forall \mathbf{x})(\mathbf{P}(\mathbf{x})\rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{x}))$
P_2 : $P(a)$
CONCLUSÃO: $S(a)$
Prova:

1. $(\forall x)(P(x)\rightarrow S(x))$ **Hipótese**
2. $P(a)$ **Hipótese**
3. $P(a)\rightarrow S(a)$ **Instanciação(ou particularização) Universal de (1)**
4. $S(a)$ **(2) e (3) Modus Ponens**

Note que a **Instanciação(ou particularização) Universal efetuada na premissa** P_1 é possível porque o quantificador universal $(\forall x)$ generaliza a propriedade para qualquer que seja o x. Portanto, vale a propriedade para $x = a$.

Exemplo: Mostre a validade do argumento :

“ *Todos na turma de Cálculo II já cursaram Cálculo I* ” e “ *João é um estudante na turma de Cálculo II* ”. Portanto, “ *João já cursou Cálculo I* ”.

PREDICADOS(PROPOSIÇÕES):

$F(x)$: “ x está na turma de Cálculo II ” e $C(x)$: “ x já cursou Cálculo I ”

PREMISSAS e CONCLUSÃO:

P_1: $(\forall x)(F(x) \rightarrow C(x))$

P_2: $F(João)$

Q: $C(João)$

Prova:

1. $(\forall x)(F(x) \rightarrow C(x))$ **Hipótese**
2. $F(João)$ **Hipótese**
3. $F(João) \rightarrow C(João)$ **Instanciação universal de (1)**(Vale para todo x. Então, vale para $x =$ João)
4. $C(João)$ **(2) e (3) Modus Ponens**

Como verificar a " Validade de um Agumento " em Cálculo de Predicados ?

Exemplo.1: Verifique a validade do argumento abaixo.

$\forall x(P(x)) \wedge (\forall x(P(x)) \rightarrow \forall x(R(x))) \rightarrow \forall x(R(x))$

Sejam as premissas:

$\mathbf{P_1}$: $\forall x(P(x))$

$\mathbf{P_2}$: $\forall x(P(x)) \rightarrow \forall x(R(x))$

e a conclusão:

$\mathbf{Q}$: $\forall x(R(x))$

Podemos utilizar as Regras de Inferência e/ou as Leis de Equivalências da Lógica Proposicional quando aparecem as variáveis e os quantificadores ?

Como verificar a " Validade de um Agumento " em Cálculo de Predicados ?

Exemplo.1: Argumento:

$\mathbf{P_1}$: $\forall x(P(x))$

$\mathbf{P_2}$: $\forall x(P(x)) \to \forall x(R(x))$

$\mathbf{Q}$: $\forall x(R(x))$

Neste argumento aparecem apenas os quantificadores universais, ou seja, as afirmações valem para todo x. Então, podemos instanciar a variável $x = a$ e *retirando temporariamente* o quantificador:

$\mathbf{P_1}$: $P(a)$

$\mathbf{P_2}$: $P(a) \to R(a)$

$\mathbf{P_3}$: $R(a)$ "Modus Ponens" em P_1 e P_2

Como concluímos $R(a)$ que representa a propriedade em **qualquer** x, retomamos o quantificador universal:

$\mathbf{Q}$: $\forall x(R(x))$

Note que **particularizamos** para um a **arbitrário** e após **generalizamos** utilizando o quantificador universal.

Exemplo.2 :

"TODO microcomputador tem uma porta serial. ALGUNS microcomputadores têm porta paralela. Portanto, ALGUNS microcomputadores têm ambas as portas serial e paralela."

Sejam as proposições:

M(x): *" x é um microcomputador. "*

S(x): *" x tem porta serial. "*

P(x): *" x tem porta paralela. "*

PREMISSAS e CONCLUSÃO:

$P_1 : (\forall x)(M(x) \rightarrow S(x))$

$P_2 : (\exists x)(M(x) \wedge P(x))$

$Q : (\exists x)(M(x) \wedge S(x) \wedge P(x))$

"COMO VERIFICAR A VALIDADE DESTE ARGUMENTO UTILIZANDO AS REGRAS E/OU AS EQUIVALÊNCIAS CONSIDERANDO AS VARIÁVEIS E OS QUANTIFICADORES UNIVERSAL E EXISTENCIAL ?"

"Na Lógica de Predicados para provarmos os Argumentos ou verificar a sua Validade, temos quatro novas *Regras de Inferência* utilizadas para RETIRAR(particularizar) e INSERIR(generalizar) os quantificadores.

REGRA DE INFERÊNCIA	NOME	OBSERVAÇÃO
$\dfrac{\forall x P(x)}{\therefore P(a)}$	Instanciação Universal	a escolhido no domínio
$\dfrac{P(a) \text{ para um } a \text{ arbitrário}}{\therefore \forall x P(x)}$	Generalização Universal	a arbitrário no domínio
$\dfrac{\exists x P(x)}{\therefore P(a) \text{ para algum elemento } a}$	Instanciação Existencial	a não conhecido mas tem-se a certeza que existe
$\dfrac{P(a) \text{ para algum elemento } a}{\therefore \exists x P(x)}$	Generalização Existencial	a específico e conhecido

Exemplo.2: Prova

$(\forall x)(M(x)\rightarrow S(x)) \wedge (\exists x)(M(x)\wedge P(x)) \rightarrow (\exists x)(M(x)\wedge S(x)\wedge P(x))$.

1. $(\forall x)(M(x)\rightarrow S(x))$ **Hipótese**(Premissa)
2. $(\exists x)(M(x)\wedge P(x))$ **Hipótese**(Premissa)
3. $M(a)\wedge P(a)$ **Instanciação existencial em (2)** A particularização existencial é feita antes da universal porque trata de um objeto mais específico
4. $M(a)\rightarrow S(a)$ **Instanciação universal em (1)**
5. $M(a)$ **Simplificação Conjuntiva em (3)**
6. $S(a)$ **Modus Ponens em (4) e (5)**
7. $M(a)\wedge P(a)\wedge S(a)$ **Conjunção em (3) e (6)**
8. $M(a)\wedge S(a)\wedge P(a)$ **Leis da Comutatividade em (7)**
9. $(\exists x)(M(x)\wedge S(x)\wedge P(x))$ **Generalização existencial em (8)** Note que o a não é arbitrário, ele é específico. Por isso, a generalização existencial

1. Determine o valor lógico de cada uma das fbfs predicadas abaixo, cujo DOMÍNIO DE INTERPRETAÇÃO é $\mathbb{Z}$.
   - $\forall x[\exists y(x + y = 0)]$
   - $\exists y[\forall x(x + y = 0)]$
   - $\forall x[\exists! y(x + y = x)]$
   - $\exists! y[\forall x(x + y = x)]$
2. Use a lógica de predicado para provar o seguinte argumento: $[\exists x(T(x) \wedge \neg L(x)) \wedge \forall x(T(x) \rightarrow P(x))] \rightarrow \exists x(P(x) \wedge \neg L(x))$.
3. Use a lógica de predicado para provar o seguinte argumento: $\forall x[P(x) \vee Q(x)] \wedge \neg[\exists x(P(x))] \rightarrow \forall x(Q(x))$.

(1) DOMÍNIO DE INTERPRETAÇÃO é $\mathbb{Z}$.

- $\forall x[\exists y(x+y=0)]$ $\quad y=-x \quad$ (V)
- $\exists y[\forall x(x+y=0)]$ $\quad$ (F) $\quad y=-1, x=2$
- $\forall x[\exists! y(x+y=x)]$ $\quad y=0 \quad$ (V)
- $\exists! y[\forall x(x+y=x)]$ $\quad y=0 \quad$ (V)

(2) $[\exists x(T(x)\wedge\neg L(x))\wedge\forall x(T(x)\rightarrow P(x))]\rightarrow\exists x(P(x)\wedge\neg L(x))$.

$P_1 : \exists x(T(x)\wedge\neg L(x))$ "Hipótese"

$P_2 : \forall x(T(x)\rightarrow P(x))$ "Hipótese"

$P_3 : T(a)\wedge\neg L(a)$ "Instanciação Existencial de P_1"

$P_4 : T(a)$ "Simplificação de P_3"

$P_5 : T(a)\rightarrow P(a)$ "Instanciação Universal" de P_2

$P_6 : P(a)$ "Modus Ponens de P_4 e P_5"

$P_7 : \neg L(a)$ "Simplificação de P_3"

$P_8 : P(a)\wedge\neg L(a)$ "Conjunção de P_6 e P_7"

$P_9 : \exists x(P(x)\wedge\neg L(x))$ "Generalização Existencial de P_8"

(3) $\forall x[P(x) \vee Q(x)] \wedge \neg[\exists x(P(x))] \rightarrow \forall x(Q(x))$.

$P_1 : \forall x[P(x) \vee Q(x)]$ "Hipótese"
$P_2 : \neg[\exists x(P(x))]$ "Hipótese"
$P_3 : \forall x(\neg P(x))$ "Leis de De Morgan em P_2"
$P_4 : \neg P(a)$ "Instanciação Universal"
$P_5 : P(a) \vee Q(a)$ "Instanciação Universal"
$P_6 : Q(a)$ "Silogismo Disjuntivo de P_4 e P_5"
$P_7 : \forall x(Q(x))$ "Generalização Universal de P_6"