Geometria Analítica - Semana 1
Introdução à Geometria Analítica

Professor: Victor M. Cunha

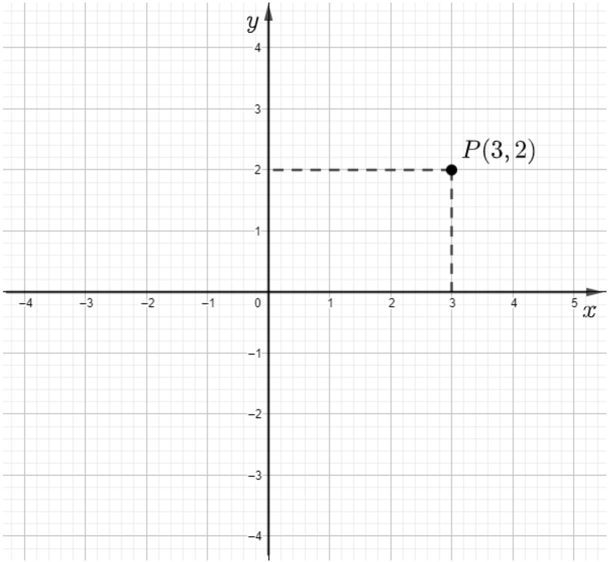
Instituto de Matemática
e Estatística (IME) - UFBA

Março 2022

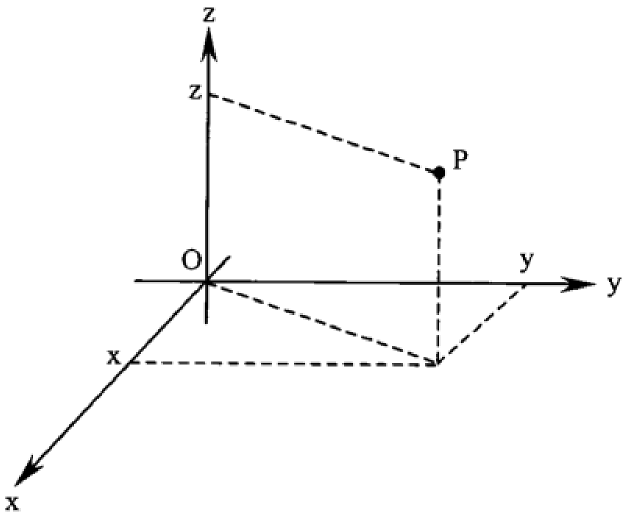
- A geometria analítica faz uma ponte entre geometria e álgebra por meio de coordenadas cartesianas.
- Esta primeira semana começaremos a falar de sistemas cartesianos e vetores.
- Referência bibliográfica principal: Paulo Winterle.
- Primeira unidade:
  - Apresentação do plano (e espaço) cartesianos.
  - Introdução à vetores.
  - Vetores no plano e espaço: Combinação linear, base e módulo.
  - Produtos vetoriais.

- Segunda unidade:
  - Equações da reta e do plano.
  - Posições relativas entre planos e retas.
  - Distâncias entre pontos, retas e planos.
  - Circunferências e esferas.
  - Superfície cônica e definição das cônicas.
  - Estudo das parábolas, elipses e hipérboles.
- Terceira unidade:
  - Mudança de coordenadas no plano: Rotação e translação.
  - Equação geral das cônicas.
  - Superfícies e curvas no espaço.
  - Cilindros e cones.
  - Superfícies de revolução.
  - Quádricas.

- Eixos coordenados e quadrantes.
- Pontos do plano e coordenadas (x, y).
- Pontos do eixo Ox apresentam $y = 0$ e pontos do eixo Oy apresentam $x = 0$.
- Retas horizontais e verticais.
- Projeções ortogonais aos eixos coordenados.


y
$P(3,2)$
x
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5

- Eixos coordenados e planos coordenados.
- Octantes.
- Pontos do espaço e coordenadas (x, y, z).
- Características dos pontos sobre os eixos ou planos coordenados.
- Planos e retas paralelos aos coordenados.
- Projeções ortogonais aos planos e eixos coordenados.


z
z
P
O
y
y
x
x

- Distância entre pontos do plano: Variações em x e y, Pitágoras:

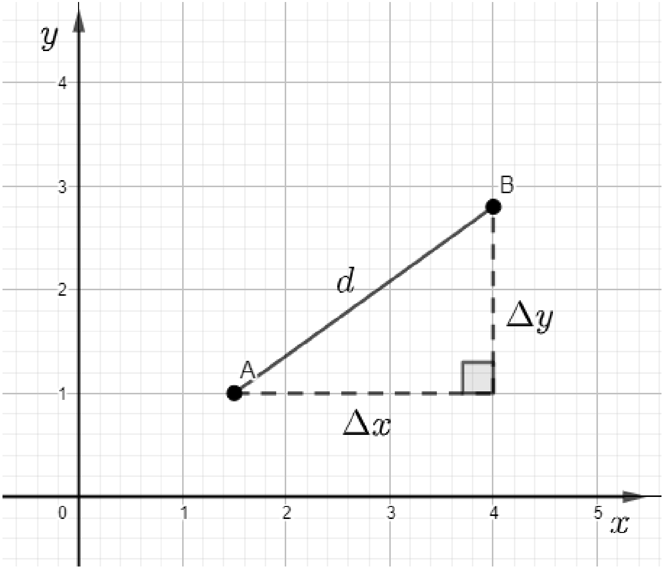
$$D_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_b - y_A)^2}$$

  Podemos ver como a diagonal de um retângulo.

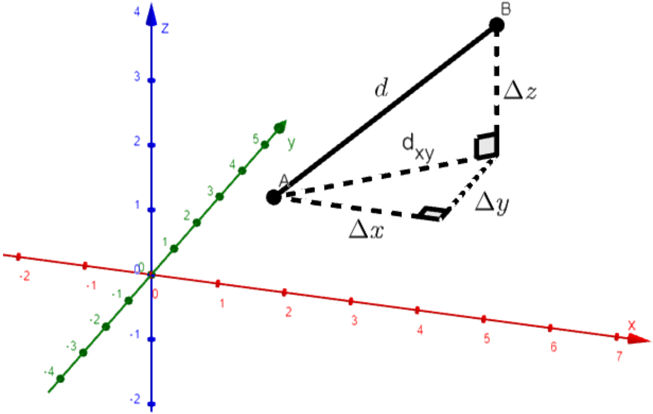
- Distância entre pontos do espaço: Variações em x, y e z, aplicar Pitágoras duas vezes:

$$D_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_b - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

  Podemos ver como a diagonal de um paralelepípedo.



y
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
x
A
B
d
Δy
Δx

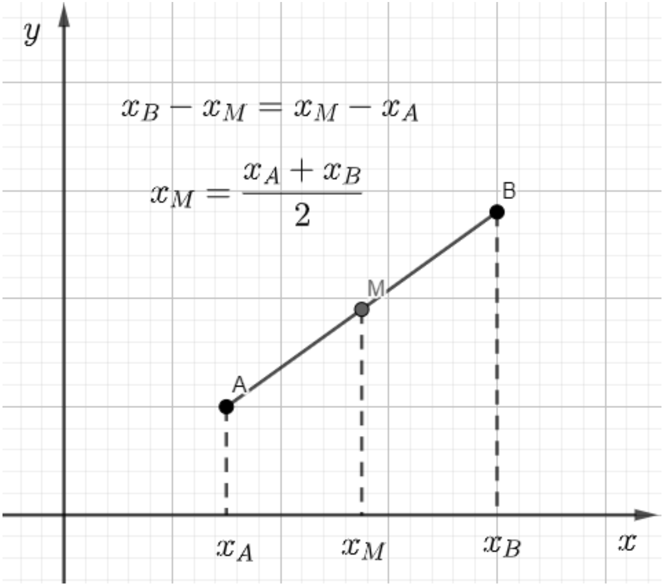

B
A
d
Δz
d_{xy}
Δy
Δx
x
y
z

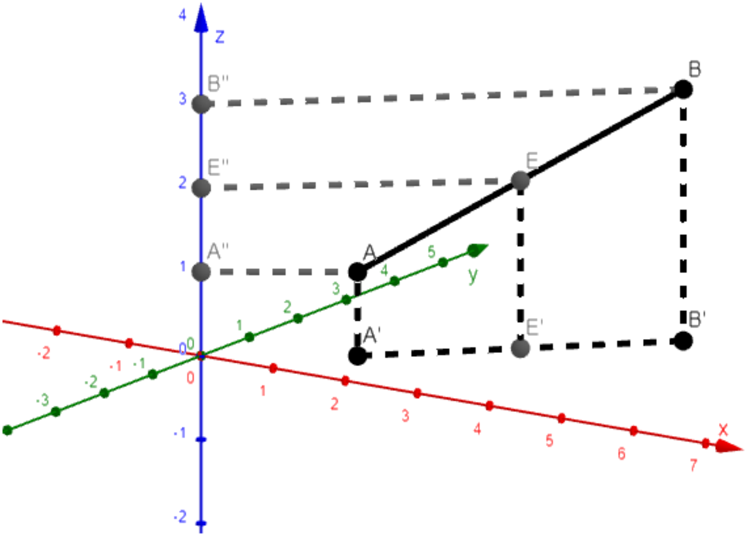
- O ponto médio de um seguimento $\overline{AB}$ no plano cartesiano é dado pela média das coordenadas:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

- No espaço, podemos pensar nas projeções do seguimento $\overline{AB}$ nos planos coordenados, e estendemos o resultado:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \qquad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

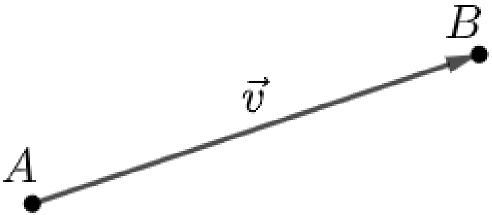

y
$x_B - x_M = x_M - x_A$
$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$
B
M
A
x_A
x_M
x_B
x


z
y
x
B
B''
E
E''
A
A''
A'
E'
B'
4
3
2
1
0
-1
-2
1
2
3
4
5
6
7
-1
-2
-3
5

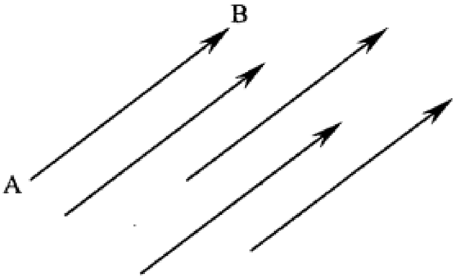
- Considere o triângulo de vértices $A(1,-1)$, $B(-2,3)$ e $C(3,3)$:
  - Mostre que este triângulo é isósceles.
  - Encontre a medida da mediana relativa ao lado $\overline{AB}$.
- Esboce a seguinte região no plano cartesiano: $\{(x,y)\colon x \geq 1,\ y \leq 2\}$.
- Qual o ponto A' simétrico a $A(2,1)$ em relação à $M(0,1)$?
- Qual o ponto do eixo y equidistante de $P(1,2)$ e $Q(3,4)$?
- Encontre a equação da circunferência de centro $C(2,1)$ e raio $r=3$.
- Quais as coordenadas do centro e o raio da circunferência: $x^2+y^2+4x-2y-11=0$?

- Dados os pontos $A(1,1,2)$ e $B(-3,5,-4)$, encontre:
  - Em quais octantes estão os pontos A e B?
  - A distância d_{AB}.
  - O ponto médio do seguimento $\overline{AB}$.
  - A distância entre as projeções de A e B no plano yz.
- Qual o ponto do plano xy equidistante de $A(1,1,1)$, $B(2,-1,-3)$ e $C(-1,2,2)$?
- Dentre os pontos $P(x,y,z)$ que satisfazem $2x+y-z=2$, qual o mais próximo da origem?
- Sejam $A(-1,1,2)$ e $B(3,-2,1)$ pontos extremos do diâmetro de uma dada esfera:
  - Determine as coordenadas do centro dessa esfera.
  - Calcule a medida do raio da esfera.

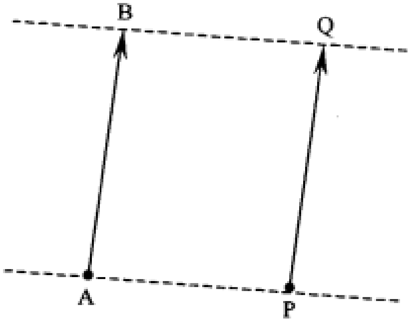
- Grandezas escalares e vetoriais.
- Grandezas vetoriais apresentam módulo, direção e sentido.
- Uma direção é definida por uma reta, e todas as retas paralelas à ela.
- Dada uma direção, temos dois sentidos possíveis.
- Dados os pontos A e B, podemos definir o seguimento orientado $\overline{AB}$ que tem A como origem e B como extremidade.



- Dois seguimentos orientados de mesmo tamanho (módulo), paralelos (mesma direção) e com o mesmo sentido são ditos equipolentes ($\overline{AB} \sim \overline{CD}$).
- Um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ representa a família de seguimentos orientados equipolentes à $\overline{AB}$. $\overline{AB}$ é um representante de $\vec{v}$, assim como qualquer outro $\overline{CD} \sim \overline{AB}$.
- Deste modo, a origem (o 'começo') de um vetor não tem importância. O vetor é livre para se mover pelo espaço, desde que seu módulo, direção e sentido se mantenham.



- Dado um segmento orientado $\overline{AB}$ e um ponto P, existe um único ponto Q tal que $\overline{PQ} \sim \overline{AB}$.
- Um vetor pode de fato ter sua origem em qualquer ponto do espaço.
- É comum, por padronização, considerar vetores com sua origem na própria origem do plano cartesiano.



- Representação algébrica de vetores no plano e espaço cartesianos:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

vetor representado pelo seguimento orientado $\overline{OV}$, onde O é a origem e $V(v_x, v_y, v_z)$.

- Representação algébrica do vetor com origem A e extremidade B:

$$\vec{v} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

essa representação explica a notação $\vec{v} = B - A$.

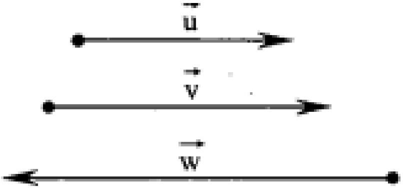
- Módulo de um vetor: Distância entre sua origem e extremidade. Algebricamente, temos:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

- Igualdade de vetores: Dois vetores são iguais se têm os mesmos módulo, direção e sentido. Do ponto de vista das coordenadas, temos:

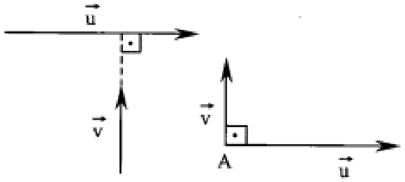
$$\vec{u} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad u_x = v_x,\ u_y = v_y,\ u_z = v_z$$

- Paralelismo: Dois vetores são paralelos se eles têm a mesma direção. Eles podem ou não ter o mesmo sentido. Representamos por $\vec{u} \,//\, \vec{v}$.



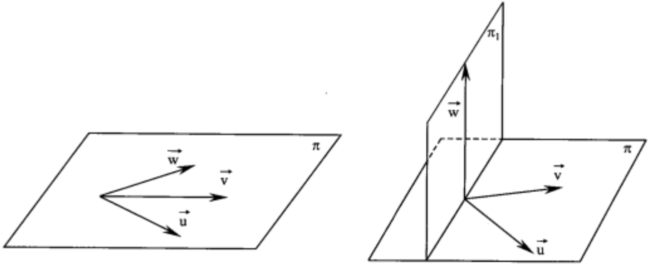
- O vetor nulo é um vetor onde a origem e a extremidade são um mesmo ponto A. Representamos ele por $\overrightarrow{AA}$ ou simplesmente $\vec{0}$.

- Vetores unitários são vetores $\vec{u}$ tais que $\|\vec{u}\| = 1$.
- Dado qualquer vetor não-nulo $\vec{v}$, existe um único vetor unitário com mesma direção e sentido de $\vec{v}$. Este é o versor de $\vec{v}$, representado por $\hat{v}$.
- Ortogonalidade: Dois vetores são ditos ortogonais se, ao representarmos ambos com mesma origem, eles formam um ângulo reto.

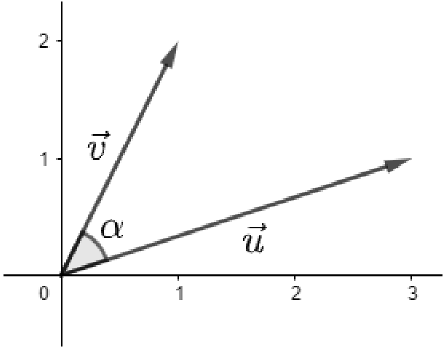


- O vetor nulo não tem direção ou sentido definidos. Sendo assim, consideramos que ele é paralelo e perpendicular a qualquer outro vetor.

- Um grupo de vetores é coplanar se , ao representarmos eles com a mesma origem, eles ficam em um mesmo plano.
- Dois vetores são sempre coplanares. Caso eles não sejam paralelos, eles determinam a 'direção' deste plano (um grupo de planos paralelos).



- O ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o menor ângulo formado quando representamos eles com a mesma origem.



- O ângulo entre dois vetores com a mesma direção e sentido é $0\,rad$.
- O ângulo formado entre dois vetores com a mesma direção e sentidos opostos é $\pi\,rad$.
- O ângulo formado por dois vetores ortogonais é $\frac{\pi}{2}\,rad$.

- Exercício 1 da Lista UFBA - Semana 2.
- Sejam $A(2,1)$ e $\vec{v}=(1,1)$. Encontre B tal que $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$.
- Sejam $A(1,-2,1)$, $B(-1,3,2)$ e $P(0,1,-1)$. Encontre Q tal que $\overline{PQ}\sim\overline{AB}$.
- Considere o paralelogramo $ABCD$, onde $A(2,-1)$, $B(0,1)$ e $C(-1,-2)$. Encontre as coordenadas de D.
- Esboce a região do plano cartesiano formada pelos vetores perpendiculares a $\vec{v}=(2,1)$.
- Qual o ângulo formado entre os vetores $\vec{u}=(1,2,1)$ e $\vec{v}=(0,1,0)$?