70. Demonstre ou negue cada uma das proposições abaixo sobre funções chão e teto.

a) $\lfloor\lceil x\rceil\rfloor = \lceil x\rceil$ para todo número real x.

b) $\lfloor x + y\rfloor = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$ para todo número real x e y.

c) $\lceil\lceil x/2\rceil/2\rceil = \lceil x/4\rceil$ para todo número real x.

d) $\lfloor\sqrt{\lceil x\rceil}\rfloor = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$ para todo número real positivo x.

e) $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor x + y\rfloor \le \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor$ para todo número real x e y.

71. Demonstre que se x é um número real positivo, então

a) $\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\rfloor = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$.

b) $\lceil\sqrt{\lceil x\rceil}\rceil = \lceil\sqrt{x}\rceil$.

72. Considere x como um número real. Mostre que $\lfloor 3x\rfloor = \lfloor x\rfloor + \lfloor x + \frac{1}{3}\rfloor + \lfloor x + \frac{2}{3}\rfloor$.

Um programa escrito para avaliar uma função pode não produzir o valor correto da função para todos os elementos do domínio dessa função. Por exemplo, um programa pode não produzir um valor correto, porque o cálculo desse valor pode levar a um laço infinito ou a um overflow. Da mesma forma, em matemática abstrata, queremos freqüentemente discutir funções que estão definidas apenas para um subconjunto de números reais, como $1/x$, $\sqrt{x}$, e arcsen(x). Podemos também querer usar tais noções como na função "da criança mais nova", que é indefinida para um casal que não tem filhos, ou o "instante do nascer do sol", que é indefinido para alguns dias no Círculo Ártico.

Para estudar tais situações, usamos o conceito de uma função parcial. Uma **função parcial** f de um conjunto A para um conjunto B é uma projeção de cada elemento a no subconjunto de A, chamado de **domínio de definição** de f, de um único elemento b em B. Os conjuntos A e B são chamados de **domínio** e **contradomínio** de f, respectivamente. Dizemos que f é **indefinida** para os elementos de A que não estão no domínio de definição de f. Escrevemos $f : A \to B$ para indicar que f é uma função parcial de A para B. (Esta é a mesma notação usada para funções. O contexto no qual a notação é usada determina se f é uma função parcial ou uma função total.) Quando o domínio de definição de f é igual a A, dizemos que f é uma **função completa.**

73. Para cada uma das funções parciais a seguir, determine seu domínio, contradomínio, domínio de definição e o conjunto de valores para os quais é indefinida. Determine também se é uma função completa.

a) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}, f(n) = 1/n$

b) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(n) = \lceil n/2\rceil$

c) $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}, f(m, n) = m/n$

d) $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(m, n) = mn$

e) $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(m, n) = m - n$ se $m > n$

74. a) Mostre que uma função parcial de A para B pode ser vista como uma função f^* de A para $B \cup \{u\}$, em que u não é um elemento de B e

$$f^*(a) = \begin{cases} f(a) & \text{se } a \text{ pertence ao domínio} \\ & \text{de definição de } f \\ u & \text{se } f \text{ é indefinida em } a. \end{cases}$$

b) Usando a construção em (a), encontre a função f^* correspondente a cada função parcial no Exercício 73.

☞**75. a)** Mostre que se um conjunto S tem cardinalidade m, em que m é um número inteiro positivo, então há uma bijeção entre S e o conjunto $\{1, 2, \ldots, m\}$.

b) Mostre que se S e T são dois conjuntos, cada um com m elementos, em que m é um número inteiro positivo, então há uma bijeção entre S e T.

***76.** Mostre que um conjunto S é infinito se e somente se houver um subconjunto estrito A de S tal que haja uma bijeção entre A e S.

***77.** Mostre que a função polinomial $f : \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}^+$ com $f(m, n) = (m + n - 2)(m + n - 1)/2 + m$ é injetora e sobrejetiva.

***78.** Mostre que quando você substitui $(3n + 1)^2$ por ocorrência de n e $(3m + 1)^2$ por ocorrência de m do lado direito da fórmula para a função $f(m, n)$ do Exercício 77, você obtém uma função injetora e polinomial $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$. É uma questão aberta sempre que houver uma função injetora e polinomial $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$.

2.4 Seqüências e Somatórios

Introdução

Seqüências são listas ordenadas de elementos. As seqüências são usadas em matemática discreta de várias maneiras. Elas podem ser usadas para representar soluções de certos problemas de contagem, como veremos no Capítulo 7. Elas são também uma estrutura de dados importante em ciência da computação. Esta seção contém uma revisão da notação usada para representar seqüências e somas de termos das seqüências.

Quando os elementos de um conjunto infinito podem ser listados, o conjunto é chamado de contável. Discutiremos nesta seção sobre os conjuntos contáveis e incontáveis. Demonstraremos que o conjunto dos números racionais é contável, mas o conjunto dos números reais não o é.

Seqüências

Uma seqüência é uma estrutura discreta usada para representar uma lista ordenada. Por exemplo, 1, 2, 3, 5, 8 é uma seqüência com cinco termos e 1, 3, 9, 27, 81, . . . , 30, . . . é uma seqüência infinita.

DEFINIÇÃO 1 Uma *seqüência* é uma função de um subconjunto do conjunto dos números inteiros (geralmente ou do conjunto $\{0, 1, 2, \ldots\}$ ou do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$) para um conjunto S. Usamos a notação a_n para indicar a imagem do número inteiro n. Chamamos a_n de *termo* da seqüência.

Usamos a notação $\{a_n\}$ para descrever a seqüência. (Note que a_n representa um único termo da seqüência $\{a_n\}$. Note também que a notação $\{a_n\}$ para a seqüência é a mesma para a notação de um conjunto. Entretanto, o contexto no qual usamos essa notação sempre deixará claro quando estamos trabalhando com conjuntos ou com seqüências. Note que, apesar de termos usado a letra a na notação para uma seqüência, outras letras ou expressões podem ser usadas, dependendo da seqüência que considerarmos. Ou seja, a escolha da letra a é arbitrária.)

Descrevemos as seqüências pela listagem de termos da seqüência em ordem crescente de subscritos.

EXEMPLO 1 Considere a seqüência $\{a_n\}$, em que

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

A lista de termos dessa seqüência, começando por a_1, ou seja,

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots,$$

começa com

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

DEFINIÇÃO 2 Uma *progressão geométrica* é uma seqüência na forma

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^n, \ldots$$

em que o *termo inicial* a e a *razão* r são números reais.

Lembre-se: Uma progressão geométrica é um análogo discreto de uma função exponencial $f(x) = ar^x$.

EXEMPLO 2 As seqüências $\{b_n\}$, com $b_n = (-1)^n$, $\{c_n\}$, com $c_n = 2 \cdot 5^n$ e $\{d_n\}$, com $d_n = 6 \cdot (1/3)^n$ são progressões geométricas com termo inicial e razão comum igual a 1 e -1; 2 e 5; e 6 e 1/3, respectivamente, se começarmos com $n = 0$. A lista de termos $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ começa com

$$1, -1, 1, -1, 1, \ldots;$$

a lista de termos $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$ começa com

$2, 10, 50, 250, 1250, \ldots;$

e a lista de termos $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots$ começa com

$$6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$$

◀

DEFINIÇÃO 3 Uma *progressão aritmética* é uma seqüência da forma

$$a, a + d, a + 2d, \ldots, a + nd, \ldots$$

em que o *termo inicial a* e a *diferença (ou razão) d* são números reais.

Lembre-se: Uma progressão aritmética é um análogo discreto da função linear $f(x) = dx + a$.

EXEMPLO 3 As seqüências $\{s_n\}$, com $s_n = -1 + 4n$ e $\{t_n\}$, com $t_n = 7 - 3n$ são progressões aritméticas com termos iniciais e diferenças comuns iguais a -1 e 4 e 7 e -3, respectivamente, se começarmos em $n = 0$. A lista de termos $s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots$ começa com

$-1, 3, 7, 11, \ldots,$

e a lista de termos $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$ começa com

$7, 4, 1, -2, \ldots.$ ◀

As seqüências na forma $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são geralmente usadas em ciência da computação. Essas seqüências finitas são também chamadas de **cadeias.** Esta cadeia é também indicada por $a_1a_2 \ldots a_n$. (Lembre-se que cadeias de bits, que são seqüências finitas de bits, foram introduzidas na Seção 1.1.) A **extensão** da cadeia S é o número de termos nessa cadeia. A **cadeia vazia,** indicada por λ, é a cadeia que não tem termos. A cadeia vazia tem extensão zero.

EXEMPLO 4 A cadeia *abcd* é uma cadeia de extensão quatro. ◀

Seqüências de Números Inteiros Especiais

Um problema comum em matemática discreta é encontrar uma fórmula ou uma regra para construir termos de uma seqüência. Às vezes, apenas poucos termos de uma seqüência que resolvem um problema são conhecidos; o objetivo é também identificar a seqüência. Mesmo que os termos iniciais de uma seqüência não determinem a seqüência inteira (afinal, há infinitas seqüências que começam com o mesmo conjunto finito de termos iniciais), conhecer os primeiros termos pode ajudar você a montar uma conjectura sobre sua seqüência. Uma vez feita essa conjectura, você pode tentar verificar se montou uma seqüência correta.

Ao tentar deduzir uma fórmula possível ou regra para os termos de uma seqüência a partir dos termos iniciais, tente encontrar um padrão desses termos. Você pode também ver se é possível determinar como um termo pode ser produzido a partir de seu antecedente. Há muitas questões que você poderia fazer, mas algumas das mais úteis são:

- Existem séries com o mesmo valor? Ou seja, o mesmo valor ocorre várias vezes em uma fila?
- Existem termos obtidos a partir de termos antecedentes pela adição do mesmo valor ou de algum valor que depende da posição na seqüência?
- Existem termos obtidos a partir de termos antecedentes pela multiplicação de um determinado valor?

- Existem termos obtidos pela combinação, de certa maneira, de termos antecedentes?
- Existem ciclos entre os termos?

EXEMPLO 5 Encontre as fórmulas para as seqüências com os seguintes termos: (a) 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 (b) 1, 3, 5, 7, 9 (c) 1, -1, 1, -1, 1.

Exemplos Extras

Solução: (a) Identificamos os denominadores de potência 2. A seqüência com $a_n = 1/2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ é uma possibilidade. Essa seqüência proposta é uma progressão geométrica com $a = 1$ e $r = 1/2$.

(b) Notamos que cada termo é obtido pela adição de 2 ao termo anterior. A seqüência com $a_n = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ é uma possibilidade. Essa seqüência proposta é uma progressão aritmética com $a = 1$ e $d = 2$.

(c) Os termos alternam-se entre 1 e -1. A seqüência com $a_n = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2 \ldots$ é uma possibilidade. Essa seqüência proposta é uma progressão geométrica com $a = 1$ e $r = -1$. ◀

Os exemplos 6 e 7 mostram como podemos analisar seqüências para descobrir como os termos são construídos.

EXEMPLO 6 Como podemos construir os termos de uma seqüência se os primeiros 10 termos são 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4?

Solução: Note que o número inteiro 1 aparece uma vez, o número inteiro 2 aparece duas vezes, o número inteiro 3 aparece três vezes e o número inteiro 4 aparece quatro vezes. Um regra razoável para a construção dessa seqüência é que o número inteiro n aparece exatamente n vezes, então os próximos cinco termos da seqüência seriam 5, os seguintes seis termos seriam 6, e assim por diante. A seqüência construída dessa maneira é uma possibilidade. ◀

EXEMPLO 7 Como podemos construir os termos de uma seqüência se os primeiros 10 termos são 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59?

Solução: Note que cada um dos 10 primeiros termos dessa seqüência a partir do primeiro é obtido pela adição de 6 ao termo subseqüente. (Podemos ver isto conferindo que a diferença entre dois termos consecutivos é 6.) Conseqüentemente, o n-ésimo termo poderia ser construído começando com 5 e adicionando 6 a ele um total de $n - 1$ vezes; ou seja, é possível que o n-ésimo termo seja $5 + 6(n - 1) = 6n - 1$. (Essa é uma progressão aritmética com $a = 5$ e $d = 6$.) ◀

Outra técnica útil para encontrar uma regra para a construção de termos de uma seqüência é comparar os termos de uma seqüência de interesse com os termos de uma seqüência de números inteiros conhecida, ou seja, os termos de uma progressão aritmética, termos de uma progressão geométrica, quadrados perfeitos, cubos perfeitos e assim por diante. Os 10 primeiros termos de algumas seqüências que você deve querer guardar estão dispostos na Tabela 1.

EXEMPLO 8 Conjecture uma fórmula simples para a_n, se os 10 primeiros termos da seqüência $\{a_n\}$ são 1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047.

Solução: Para resolver este problema, começamos olhando para a diferença entre dois termos consecutivos, mas não vemos um padrão. Quando formamos uma razão de termos consecutivos para vermos se cada termo é um múltiplo do termo anterior, encontramos que essa razão, embora não uma constante, se aproxima de 3. Então, é razoável suspeitar que os termos dessa seqüência são construídos com uma fórmula que envolve 3^n. Comparando esses termos com os termos correspondentes da seqüência $\{3^n\}$, percebemos que o n-ésimo termo é 2 menos a potência de 3 correspondente. Vemos que $a_n = 3^n - 2$ para $1 \leq n \leq 10$ e conjeturamos que esta fórmula é mantida para todo n. ◀

TABELA 1	**Algumas Seqüências Usuais.**
n-ésimo termo	***Primeiros 10 termos***
n^2	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...
n^3	1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, ...
n^4	1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000, ...
2^n	2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...
3^n	3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049, ...
$n!$	1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, ...

Veremos ao longo deste texto que as seqüências de números inteiros aparecem em uma grande variedade de contextos em matemática discreta. As seqüências que temos ou que serão encontradas incluem a seqüência de números primos (Capítulo 3), o número de maneiras de ordenar n objetos discretos (Capítulo 5), o número de movimentos necessários para resolver o famoso quebra-cabeça da Torre de Hanói com n discos (Capítulo 7) e o número de coelhos em uma ilha depois de n meses (Capítulo 7).

Links

As seqüências de números inteiros aparecem em uma grande variedade de áreas além da matemática discreta, incluindo biologia, engenharia, química e física, assim como em quebra-cabeças. Uma grande base de dados com mais de 100 000 seqüências de números inteiros diferentes pode ser encontrada na *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Esta base de dados foi criada por Neil Sloane na década de 1960. A última versão impressa dessa base foi publicada em 1995 ([SIPI95]); a enciclopédia atual ocuparia mais de 150 volumes do tamanho da edição de 1995. Novas seqüências foram adicionadas regularmente a essa base de dados. Há também um programa acessível via Internet que você pode usar para encontrar seqüências a partir da enciclopédia que coincidem com os termos iniciais que você possui.

Somatórios

Agora, introduziremos a **notação de somatória.** Começamos por descrever a notação usada para expressar a soma dos termos

$$a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$$

da seqüência $\{a_n\}$. Usamos a notação

$$\sum_{j=m}^{n} a_j, \qquad \textstyle\sum_{j=m}^{n} a_j, \qquad \text{ou} \qquad \textstyle\sum_{1 \le j \le n} a_j$$

para representar

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n.$$

Aqui, a variável j é chamada de **índice da somatória,** e a escolha da letra j como variável é arbitrária; ou seja, poderíamos usar qualquer outra letra, como i ou k. Ou, na notação,

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Aqui, o índice da somatória assume todos os números inteiros, começando com seu **menor limite** m e terminando com seu **maior limite** n. A letra maiúscula grega sigma, Σ, é usada para indicar somatória.

As leis usuais da aritmética são aplicadas à somatória. Por exemplo, quando a e b são números reais, temos $\sum_{j=1}^{n}(ax_j + by_j) = a\sum_{y=1}^{n} x_j + b\sum_{j=1}^{n} y_j$, em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são números reais. (Não apresentamos uma demonstração formal desta identidade aqui. Tal demonstração pode ser construída usando a indução matemática, um método de demonstração que introduziremos no Capítulo 4. A demonstração também usa as propriedades comutativas e associativas para adição e a propriedade distributiva de multiplicação sobre adição.)

Daremos alguns exemplos de notação de somatória.

EXEMPLO 9 Expresse a soma dos primeiros 100 termos da seqüência $\{a_n\}$, em que $a_n = 1/n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

Exemplos Extras

Solução: O menor limite para o índice da somatória é 1 e o maior limite é 100. Escrevemos a soma como

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}.$$

◀

EXEMPLO 10 Qual o valor de $\sum_{j=1}^{5} j^2$?

Solução: Temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{5} j^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2\\ &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25\\ &= 55.\end{aligned}$$

◀

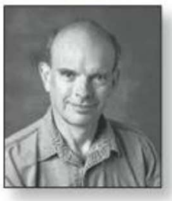
EXEMPLO 11 Qual o valor de $\sum_{k=4}^{8}(-1)^k$?

Solução: Temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{8}(-1)^k &= (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8\\ &= 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1\\ &= 1.\end{aligned}$$

◀

Links



NEIL SLOANE (Nascido em 1939) Neil Sloane estudou matemática e engenharia elétrica na Universidade de Melbourne, com uma bolsa de estudos da companhia de telefone do governo australiano. Ele teve muitos trabalhos relacionados com telefonia, como construção de postes telefônicos, em seus trabalhos de férias. Depois de se graduar, ele foi designado para cuidar das redes de transmissão de telefone de custo mínimo na Austrália. Em 1962, foi para os Estados Unidos e estudou engenharia elétrica na Cornell University. Sua tese de Ph.D. foi sobre o que chamamos agora de redes neurais.

Ele conseguiu um emprego nos Laboratórios Bell em 1969, trabalhando em muitas áreas, incluindo criação de rede de transmissão e teoria de codificação. Atualmente trabalha para os Laboratórios AT&T, saindo dos Laboratórios Bell quando a AT&T se separou destes em 1996. Um dos seus problemas favoritos é o **kissing problem,** ou **problema do beijo** (nome que ele cunhou), que pergunta quantas esferas podem ser organizadas em n dimensões para que todas elas toquem uma esfera central de mesmo tamanho. (Em duas dimensões, a resposta é 6, pois 6 moedas podem ser colocadas de modo que elas toquem uma moeda central. Em três dimensões, 12 bolas de bilhar podem ser colocadas para que elas toquem uma bola de bilhar central. Duas bolas de bilhar que se tocam dão um "beijo", o que dá sentido à terminologia "kissing problem" e "kissing number", ou "números de beijos".) Sloane, junto com Andrew Odlyzko, mostrou que em 8 e 24 dimensões os números de beijos otimizados são, respectivamente, 240 e 196.560. Os kissing number são conhecidos nas dimensões 1, 2, 3, 8 e 24, mas não em outras dimensões. Os livros de Sloane incluem *Sphere Packings, Lattices and Groups,* 3. ed., com John Conway; *The Theory of Error-Correcting Codes*, com Jessie MacWilliams; *The Encyclopedia of Integer Sequences*, com Simon Plouffe; e *The Rock-Climbing Guide to New Jersey Crags*, com Paul Nick. Este último livro demonstra seu interesse em escalar montanhas rochosas, incluindo mais de 50 sites sobre escalada em New Jersey.

Às vezes é útil modificar o índice da somatória em uma soma. Isso geralmente é feito quando dois somatórios devem ser adicionados, mas seus índices da somatória não combinam. Ao avaliar um índice de soma, é importante fazer as mudanças apropriadas no somatório correspondente. Isso será ilustrado pelo Exemplo 12.

EXEMPLO 12 Suponha que tenhamos a soma

$$\sum_{j=1}^{5} j^2$$

Exemplos Extras

mas queremos o índice da somatória entre 0 e 4 em vez de 1 a 5. Para fazer isso, consideremos $k = j - 1$. Então, o novo índice de soma vai de 0 a 4 e o termo j^2 é dado por $(k+1)^2$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = \sum_{k=0}^{4} (k+1)^2.$$

É fácil verificar que ambas as somas são $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$. ◀

Somas de termos de progressões geométricas são normalmente crescentes (tais somas são chamadas de **séries geométricas**). O Teorema 1 nos dá uma fórmula para a soma dos termos de uma progressão geométrica.

TEOREMA 1 Se a e r são números reais e $r \neq 0$, então

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \begin{cases} \dfrac{ar^{n+1} - a}{r - 1} & \text{se } r \neq 1 \\ (n+1)a & \text{se } r = 1. \end{cases}$$

Demonstração: Considere

$$S = \sum_{j=0}^{n} ar^j.$$

Para calcular S, primeiro multiplicamos os dois lados da equação por r e então manipulamos a soma resultante da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
rS &= r\sum_{j=0}^{n} ar^j && \text{substituindo a fórmula da somatória por } S \\
&= \sum_{j=0}^{n} ar^{j+1} && \text{pela propriedade distributiva} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} ar^k && \text{alterando o índice da somatória, com } k = j + 1 \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} ar^k\right) + (ar^{n+1} - a) && \text{removendo o termo } k = n + 1 \text{ e adicionando o termo } k = 0 \\
&= S + (ar^{n+1} - a) && \text{substituindo } S \text{ pela fórmula da somatória}
\end{aligned}$$

A partir dessas equações, vemos que

$$rS = S + (ar^{n+1} - a).$$

Isolando S, mostramos que se $r \neq 1$, então

$$S = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Se $r = 1$, então a soma certamente é igual a $(n + 1)a$. ◁

EXEMPLO 13 Somatórias duplas aparecem em muitos contextos (como na análise de laços agrupados em programas de computador). Um exemplo de somatória dupla é

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij.$$

Para avaliar a dupla soma, primeiro expanda a somatória interna e então continue computando a somatória externa:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij &= \sum_{i=1}^{4}(i + 2i + 3i)\\ &= \sum_{i=1}^{4} 6i\\ &= 6 + 12 + 18 + 24 = 60.\end{aligned}$$

◀

Podemos também usar a notação de somatória para adicionar todos os valores de uma função, ou termos de um conjunto indexado, em que o índice da somatória é compatível com todos os valores do conjunto. Ou seja, escrevemos

$$\sum_{s \in S} f(s)$$

para representar a soma dos valores de $f(s)$, para todos os membros s de S.

EXEMPLO 14 Qual o valor de $\sum_{s \in \{0,2,4\}} s$?

Solução: Como $\sum_{s \in \{0,2,4\}} s$ representa a soma de valores de s para todos os membros do conjunto $\{0, 2, 4\}$, temos que

$$\sum_{s \in \{0,2,4\}} s = 0 + 2 + 4 = 6.$$

◀

Certas somas aparecem repetidamente em matemática discreta. Ter um grupo de fórmulas para tais somas pode ser útil; a Tabela 2 fornece uma pequena relação das fórmulas para as somas mais freqüentes.

Demonstramos a primeira fórmula dessa tabela no Teorema 1. As próximas três fórmulas nos dão a soma dos primeiros n números inteiros positivos, a soma de seus quadrados e a soma de seus cubos. Essas três fórmulas podem ser obtidas de muitas maneiras diferentes (por exemplo, veja os exercícios 21 e 22 no final desta seção). Note também que cada uma dessas fórmulas, uma vez conhecidas, pode ser facilmente demonstrada usando a indução matemática, assunto da Seção 4.1. As últimas duas fórmulas da Tabela envolvem séries infinitas e serão discutidas brevemente.

O Exemplo 15 mostra como as fórmulas da Tabela 2 podem ser úteis.

TABELA 2 Algumas Fórmulas Para Somatórios Usuais.

Soma	*Fórmula Fechada*
$\sum_{k=0}^{n} ar^k \, (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}, r \neq 1$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty}, kx^{k-1}, \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

EXEMPLO 15 Encontre $\sum_{k=50}^{100} k^2$.

Solução: Primeiro note que como $\sum_{k=1}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{49} k^2 + \sum_{k=50}^{100} k^2$, temos que

$$\sum_{k=50}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2 - \sum_{k=1}^{49} k^2.$$

Usando a fórmula $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ da Tabela 2, vemos que

$$\sum_{k=50}^{100} k^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - \frac{49 \cdot 50 \cdot 99}{6} = 338350 - 40425 = 297925.$$ ◀

ALGUMAS SÉRIES INFINITAS Embora a maioria dos somatórios neste livro seja finita, as séries infinitas são importantes em algumas partes da matemática discreta. As séries infinitas são geralmente estudadas em um curso de cálculo e mesmo a definição dessas séries requer o uso de cálculo, mas algumas vezes elas aparecem em matemática discreta, pois esta trata de coleções infinitas de elementos discretos. Em particular, em nossos estudos futuros de matemática discreta, encontraremos fórmulas fechadas para as séries infinitas nos exemplos 16 e 17 que serão bastante usuais.

EXEMPLO 16 (*Requer cálculo*) Considere x como um número real com $|x| < 1$. Encontre $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Exemplos Extras

Solução: Pelo Teorema 1, com $a = 1$ e $r = x$, vemos que $\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$. Como $|x| < 1$, x^{k+1} tende a 0 quando k tende ao infinito. Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k \to \infty} \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} = \frac{-1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x}.$$ ◀

Podemos produzir novas fórmulas de somatória a partir de fórmulas conhecidas por diferenciação ou integração.

3. Quais são os termos a_0, a_1, a_2 e a_3 da seqüência $\{a_n\}$, em que a_n é igual a
   a) $2^n + 1$? b) $(n+1)^{n+1}$?
   c) $\lfloor n/2 \rfloor$? d) $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil$?
4. Quais são os termos a_0, a_1, a_2 e a_3 da seqüência $\{a_n\}$, em que a_n é igual a
   a) $(-2)^n$? b) 3?
   c) $7 + 4^n$? d) $2^n + (-2)^n$?
5. Liste os primeiros 10 termos de cada uma das seqüências abaixo.
   a) a seqüência que começa com 2 e na qual cada termo sucessivo é o termo anterior acrescido de 3 unidades
   b) a seqüência que lista cada número inteiro positivo três vezes, em ordem crescente
   c) a seqüência que apresenta os números inteiros positivos e ímpares em ordem crescente, listando cada número inteiro ímpar duas vezes
   d) a seqüência cujo n-ésimo termo é $n! - 2^n$
   e) a seqüência que começa com 3, na qual cada termo subseqüente é duas vezes o termo anterior
   f) a seqüência cujos dois primeiros termos são 1 e cada termo subseqüente é a soma dos dois termos anteriores (Esta é a famosa seqüência de Fibonacci, que estudaremos mais a frente no texto.)
   g) a seqüência cujo n-ésimo termo é o número de bits na expansão binária do número n (definida na Seção 3.6)
   h) a seqüência em que o n-ésimo termo é o número de letras da palavra em inglês para o índice n
6. Liste os primeiros 10 termos de cada uma das seqüências abaixo.
   a) a seqüência obtida começando com 10 e o termo subseqüente obtido pela subtração de 3 do termo anterior
   b) a seqüência cujo n-ésimo termo é a soma dos primeiros n números inteiros positivos
   c) a seqüência cujo n-ésimo termo é $3^n - 2^n$
   d) a seqüência cujo n-ésimo termo é $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$
   e) a seqüência cujos dois primeiros termos são 1 e 2 e cada termo subseqüente é a soma dos dois termos anteriores
   f) a seqüência cujo n-ésimo termo é o maior número inteiro com a expansão binária de n bits (definida na Seção 3.6) (Escreva sua resposta em notação decimal.)
   g) a seqüência cujos termos são construídos seqüencialmente por: comece com 1, então adicione 1, depois multiplique por 1, então adicione 2, depois multiplique por 2, e assim por diante
   h) a seqüência cujo n-ésimo termo é o maior número inteiro k, tal que $k! \le n$
7. Encontre pelo menos três seqüências diferentes começando com os termos 1, 2, 4, em que os termos são construídos a partir de um fórmula ou regra simples.
8. Encontre pelo menos três seqüências diferentes começando com os termos 3, 5, 7, em que os termos são construídos a partir de uma fórmula ou regra simples.
9. Para cada uma das listas de números inteiros, forneça uma fórmula ou regra simples para construir os termos de uma seqüência de inteiros que comece com a lista dada. Assumindo que sua fórmula ou regra esteja correta, determine os três próximos termos da seqüência.
   a) 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, ...
   b) 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, ...
   c) 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, ...
   d) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, ...
   e) 15, 8, 1, −6, −13, −20, −27, ...
   f) 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, ...
   g) 2, 16, 54, 128, 250, 432, 686, ...
   h) 2, 3, 7, 25, 121, 721, 5041, 40321, ...
10. Para cada uma das listas de números inteiros, forneça uma fórmula ou regra simples para construir os termos de uma seqüência de inteiros que comece com a lista dada. Assumindo que sua fórmula ou regra esteja correta, determine os três próximos termos da seqüência.
   a) 3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, 66, 83, 102, ...
   b) 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, ...
   c) 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001,1010, 1011, ...
   d) 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, ...
   e) 0, 2, 8, 26, 80, 242, 728, 2186, 6560, 19682, ...
   f) 1, 3, 15, 105, 945, 10395, 135135, 2027025, 34459425, ...
   g) 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, ...
   h) 2, 4, 16, 256, 65536, 4294967296, ...

**11. Mostre que se a_n indica o n-ésimo número inteiro positivo que não é um quadrado perfeito, então $a_n = n + \{\sqrt{n}\}$, em que $\{x\}$ indica o número inteiro mais próximo do número real x.

*12. Considere a_n como o n-ésimo termo da seqüência 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, ..., construída pela inclusão do número inteiro k exatamente k vezes. Mostre que $a_n = \lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \rfloor$.

13. Quais são os valores das somas abaixo?
   a) $\sum_{k=1}^{5}(k+1)$ b) $\sum_{j=0}^{4}(-2)^j$
   c) $\sum_{i=1}^{10} 3$ d) $\sum_{j=0}^{8}(2^{j+1} - 2^j)$
14. Quais são os valores das somas abaixo, em que $S = \{1, 3, 5, 7\}$?
   a) $\sum_{j \in S} j$ b) $\sum_{j \in S} j^2$
   c) $\sum_{j \in S} (1/j)$ d) $\sum_{j \in S} 1$
15. Qual é o valor para cada uma das somas abaixo dos termos de uma progressão geométrica?
   a) $\sum_{j=0}^{8} 3 \cdot 2^j$ b) $\sum_{j=1}^{8} 2^j$
   c) $\sum_{j=2}^{8} (-3)^j$ d) $\sum_{j=0}^{8} 2 \cdot (-3)^j$
16. Encontre o valor de cada uma das somas a seguir.
   a) $\sum_{j=0}^{8}(1 + (-1)^j)$ b) $\sum_{j=0}^{8}(3^j - 2^j)$

c) $\sum_{j=0}^{8}(2 \cdot 3^j + 3 \cdot 2^j)$ d) $\sum_{j=0}^{8}(2^{j+1} - 2^j)$

17. Compute cada uma das somas duplas abaixo.

a) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(i + j)$ b) $\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}(2i + 3j)$

c) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{2} i$ d) $\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{3} ij$

18. Compute cada uma das somas duplas abaixo.

a) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}(i - j)$ b) $\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{2}(3i + 2j)$

c) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{2} j$ d) $\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3} i^2 j^3$

19. Mostre que $\sum_{j=1}^{n}(a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$, em que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ é uma seqüência de números reais. Esse tipo de soma é chamada de **telescópica.**

20. Use a identidade $1/(k(k + 1)) = 1/k - 1/(k + 1)$ e o Exercício 19 para computar $\sum_{k=1}^{n} 1/(k(k + 1))$.

21. Some os dois lados da identidade $k^2 - (k - 1)^2 = 2k - 1$ de $k = 1$ a $k = n$ e use o Exercício 19 para encontrar

a) uma fórmula para $\sum_{k=1}^{n}(2k - 1)$ (a soma dos primeiros n números naturais ímpares).

b) uma fórmula para $\sum_{k=1}^{n} k$.

***22.** Use a técnica dada no Exercício 19, junto com o resultado do Exercício 21b, para derivar a fórmula para $\sum_{k=1}^{n} k^2$ dada na Tabela 2. (*Dica*: Considere $a_k = k^3$ na soma telescópica do Exercício 19.)

23. Encontre $\sum_{k=100}^{200} k$. (Use a Tabela 2.)

24. Encontre $\sum_{k=99}^{200} k^3$. (Use a Tabela 2.)

***25.** Encontre uma fórmula para $\sum_{k=0}^{m} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$, quando m é um número inteiro positivo.

***26.** Encontre uma fórmula para $\sum_{k=0}^{m} \lfloor \sqrt[3]{k} \rfloor$, quando m é um número inteiro positivo.

Há também uma notação especial para produtos. O produto de $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ é representado por

$$\prod_{j=m}^{n} a_j.$$

27. Quais são os valores dos produtos abaixo?

a) $\prod_{i=0}^{10} i$ b) $\prod_{i=5}^{8} i$

c) $\prod_{i=1}^{100}(-1)^i$ d) $\prod_{i=1}^{10} 2$

Lembre-se que o valor da função fatorial de um número inteiro positivo n, indicado por $n!$, é o produto dos números inteiros positivos de 1 a n. Lembramos também que $0! = 1$.

28. Expresse $n!$ usando a notação de produto.

29. Encontre $\sum_{j=0}^{4} j!$.

30. Encontre $\prod_{j=0}^{4} j!$.

31. Determine se cada um dos conjuntos abaixo é contável ou incontável. Para aqueles que forem contáveis, exiba uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto

a) dos números inteiros negativos.

b) dos números inteiros pares.

c) dos números reais entre 0 e $\frac{1}{2}$.

d) dos números inteiros que são múltiplos de 7.

32. Determine se cada um dos conjuntos abaixo é contável ou incontável. Para aqueles que forem contáveis, exiba uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto

a) dos números inteiros maiores que 10.

b) dos números inteiros negativos e ímpares.

c) dos números reais entre 0 e 2.

d) dos números inteiros que são múltiplos de 10.

33. Determine se cada um dos conjuntos abaixo é contável ou incontável. Para aqueles que forem contáveis, exiba uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto

a) de todas as cadeias de bits que não tenham o bit 0.

b) de todos os números racionais positivos que não podem ser escritos com denominadores menores que 4.

c) dos números reais que não tenha 0 em sua representação decimal.

d) dos números reais que tenha apenas um número finito de 1s em sua representação decimal.

34. Determine se cada um dos conjuntos abaixo é contável ou incontável. Para aqueles que forem contáveis, exiba uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto

a) dos números inteiros não divisíveis por 3.

b) dos números inteiros divisíveis por 5, mas não por 7.

c) dos números reais com representação decimal consistindo apenas de algarismos 1s

d) dos números reais com representação decimal em que todos os algarismos são 1s ou 9s.

35. Se A é um conjunto incontável e B é um conjunto contável, $A - B$ deverá ser incontável?

36. Mostre que um subconjunto de um conjunto contável é também contável.

37. Mostre que se A e B são conjuntos, A é incontável e $A \subseteq B$, então B é incontável.

38. Mostre que se A e B são conjuntos com a mesma cardinalidade, então o conjunto das partes de A e o conjunto das partes de B têm a mesma cardinalidade.

39. Mostre que se A e B são conjuntos com a mesma cardinalidade e C e D são conjuntos com a mesma cardinalidade, então $A \times C$ e $B \times D$ têm a mesma cardinalidade.

40. Mostre que a união de dois conjuntos contáveis é contável.

****41.** Mostre que a união de um número contável de conjuntos contáveis é contável.

42. Mostre que o conjunto $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ é contável.