

Integral de frações parciais - Parte II

حل المسألة
المطلوب

Obs.: Para o subcaso $\partial p(t) = 1, \partial q(t) = 2, \Delta > 0$, é possível proceder da mesma forma (frações parciais).

$$\int \frac{2t - 1}{t^2 - 11t + 30} dt = ?$$

Veja que:

$$\frac{2t - 1}{t^2 - 11t + 30} = \frac{2t - 1}{(t - 5) \cdot (t - 6)} = \frac{A}{t - 5} + \frac{B}{t - 6}$$

Para encontrar os coeficientes A e B , façamos:

$$2t - 1 = A \cdot (t - 6) + B \cdot (t - 5) = (A + B) \cdot t - 6A - 5B$$

Daí, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -6A - 5B = -1, \end{cases}$$

de onde obtemos:

$$B = 2 - A \Rightarrow -6A - 10 + 5A = -1 \Rightarrow A = -9 \Rightarrow B = 11$$

Logo:

$$\int \frac{2t - 1}{t^2 - 11t + 30} dt = \int \frac{A}{t - 5} + \frac{B}{t - 6} dt = \int \frac{-9}{t - 5} + \frac{11}{t - 6} dt$$

$$= -9 \ln(t - 5) + 11 \ln(t - 6) + K, K \in \mathbb{R}$$

Analisemos agora o subcaso: $\partial p(t) = n, n \geq 2, \partial q(t) = 2, \Delta > 0$

Estratégia para este cenário: Efetuar a divisão dos polinômios envolvidos para recair em casos anteriores.

Exemplo:

$$\int \frac{t^2 + 2}{t^2 - 5t + 6} dt = ?$$

Façamos a divisão dos polinômios:

$$\begin{array}{r} t^2 + 2 \\ t^2 - 5t + 6 \overline{) 1} \\ \hline 0 + 5t - 4 \end{array}$$

Logo:

$$t^2 + 2 = 1 \cdot (t^2 - 5t + 6) + 5t - 4$$

$$\Rightarrow \frac{t^2 + 2}{t^2 - 5t + 6} = 1 + \frac{5t - 4}{t^2 - 5t + 6}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int \frac{t^2 + 2}{t^2 - 5t + 6} dt &= \int 1 + \frac{5t - 4}{t^2 - 5t + 6} dt \\ &= t + \int \frac{5t - 4}{t^2 - 5t + 6} dt\end{aligned}$$

Vamos deixar esta última parte como exercício.

Lidaremos a seguir com o subcaso: $\partial p(t) = 0$, $\partial q(t) = 2$, $\Delta < 0$

Para este subcaso, temos o exemplo mais representativo, a saber:

$$\int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \arctan t + K, K \in \mathbb{R}$$

O que fazer no seguinte exemplo:

$$\int \frac{1}{2t^2 + 1} dt = ?$$

$$\int \frac{1}{2t^2 + 1} dt = \int \frac{1}{(\sqrt{2} \cdot t)^2 + 1} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2} \cdot t)^2 + 1} dt$$

Fazendo a mudança de variáveis: $u = \sqrt{2} \cdot t$, teremos:

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2} \cdot t)^2 + 1} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int \frac{1}{u^2 + 1} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan u + L = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan(\sqrt{2} \cdot t) + L, L \in \mathbb{R}$$

Os exemplos a seguir serão deixados como exercício:

1)

$$\int \frac{2}{\frac{t^2}{5} + 1} dt = \dots = 2\sqrt{5} \cdot \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + K, K \in \mathbb{R}$$

2)

$$\int \frac{A}{Bt^2 + 1} dt = \dots = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \arctan(\sqrt{B} \cdot t) + J, J \in \mathbb{R}$$

3)

$$\int \frac{1}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\frac{t^2}{2} + 1} dt = \dots = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + L, L \in \mathbb{R}$$

4)

$$\int \frac{A}{Bt^2 + C} dt = \dots = \frac{A\sqrt{C}}{C\sqrt{B}} \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{B}{C}} \cdot t\right) + K, K \in \mathbb{R}$$

Veja que em todos os exemplos acima tivemos polinômios de grau 2 incompletos no denominador. O que fazer se tivermos um

polinômio completo?

Exemplos:

1)

$$\frac{1}{t^2 + 2t + 5} = \frac{1}{(t+1)^2 + 4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{(t+1)^2}{4} + 1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 + 1}$$

Logo, fazendo a mudança de variáveis $u = \frac{t+1}{2}$, teremos que $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}$, e assim:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t^2 + 2t + 5} dt &= \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \arctan u + H = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{t+1}{2} \right) + H, H \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2)

$$\int \frac{1}{t^2 + t + 1} dt = ?$$

$$\int \frac{1}{t^2 + t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1} dt = \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt = \dots = ?$$

O que fazer no subcaso $\partial p(t) = 1$, $\partial q(t) = 2$, $\Delta < 0$?

Exemplo:

$$\int \frac{3t + 1}{t^2 + 2t + 5} dt = ?$$

$$\int \frac{3t + 1}{t^2 + 2t + 5} dt = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{2t + 2 - 2 + \frac{2}{3}}{t^2 + 2t + 5} dt$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \int \frac{2t + 2}{t^2 + 2t + 5} dt + \frac{3}{2} \cdot \int \frac{-2 + 2/3}{t^2 + 2t + 5} dt$$

To be continued...