Exemplo de exercício - Demonstração - Continuidade de função quadrática

Demonstre que

$$f(t) = t^2$$

é contínua.

Ou seja, vamos demonstrar que f é contínua em p $\forall p \in \mathbb{R}$

i) $p \in D(f)$? Sim, pois não há restrições algébricas na expressão $f(t) = t^2$

ii) + iii)

Vamos mostrar que $\lim_{t \to p} t^2 = p^2$

$$0 < |t - p| < \delta$$

$$\Downarrow$$

$$|t^2 - p^2| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < t^2 - p^2 < \varepsilon$$

$$p^2 - \varepsilon < t^2 < p^2 + \varepsilon$$

$$\sqrt{p^2-\varepsilon} < t < \sqrt{p^2+\varepsilon}$$

$$\underbrace{\sqrt{p^2-\varepsilon} - p} < t - p < \underbrace{\sqrt{p^2+\varepsilon} - p}$$

$$\delta = \min\left\{\sqrt{p^2+\varepsilon} - p,\ -\sqrt{p^2+\varepsilon} + p\right\}.$$

$f(t) = at + b,\ a \neq 0.$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$$

$$\lim_{t \to +\infty} t = +\infty$$

$\hookrightarrow\ \forall A > 0,\ \exists B > 0;$

$t > B \implies f(t) > A.$

Considere $A > 0$ qualquer.

Queremos mostrar que $\exists\, B > 0$ de modo que:

$$t > B \Rightarrow f(t) > A$$

Para que tenhamos $f(t) > A$, devemos obter: $t > A$, basta considerar $B = A$, dessa forma:

$$t > B \Rightarrow t > A.$$