Aproximações lineares de uma função

$$t \ll 1 \implies \sin t \simeq t$$

$$|t| < \varepsilon$$

$$f(t) \xrightarrow{\text{Aproximação}} y = at + b$$

numa certa região do domínio de f.

Lembremos que:

$$f'(p) = \lim_{t \to p} \frac{f(t) - f(p)}{t - p}$$

Logo, para valores de t muito próximos de p, teremos:

$$f'(p) \approx \frac{f(t) - f(p)}{t - p}$$

$$\therefore \quad \underbrace{f(t)} \approx f'(p).(t-p) + f(p)$$

$$= \underbrace{f'(p)t - f'(p).p + f(p)}$$

$$= a.t + b$$

Exemplos:

1) $f(t) = \sin(t)$, $p = 0$

Aproximação: $f(t) \cong t.\cos(0) - 0.\cos(0) - \cos(0).\sin(0)$

$$= t$$

$$f''(t) = -\sin(t)$$

$$f^{(10)}(t) = -\sin(t)$$

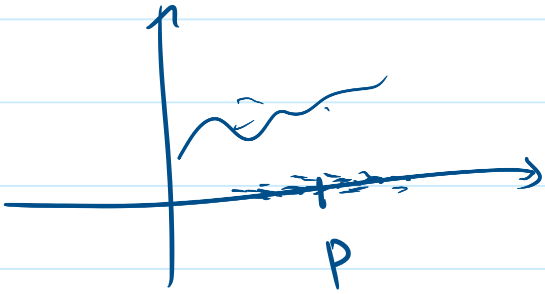
Polinômio de Taylor
ou série de Taylor.

$$f(t) = f(p) + f'(p).(t-p) + \frac{f''(p).(t-p)^2}{2}$$

$$+ \frac{f'''(p)}{6}.(t-p)^3 + \frac{f^{(4)}(p)}{24}.(t-p)^4$$

$$\frac{\ldots}{6}\cdot(t-p)^{\ldots} + \frac{f^{\ldots}(p)}{24}\cdot(t-p)^{\ldots}$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}\cdot(t-p)^n + \cdots$$



$$\sin(t) = \cancelto{0}{\sin(0)} + \cos(0)\cdot t - \frac{\cancelto{0}{\sin(0)}}{2}\cdot(t)^2$$

$$-\frac{\cos(0)}{6}\cdot t^3 + \frac{\cancelto{0}{\sin(0)}}{24}\cdot t^4 + \cdots$$

$$= t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{7.720} \cdots$$

2) Encontrar um valor aproximado para $\sqrt{1{,}05}$ via aproximação linear.

$$f(t) \cong f(p) + f'(p)\cdot(t-p)$$

$P = 1$

$$\sqrt{1{,}05} \cong \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot (1{,}05 - 1)$$

$$\therefore \sqrt{1{,}05} \cong 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}05 = 1{,}025$$

Obs: Derivadas de ordem mais alta:

$$f''(t) = \left(f'(t)\right)'$$

↳ Derivada de ordem 2

$$f^{(n)}(t) = \left(f^{(n-1)}(t)\right)' = \left(\left(f^{(n-2)}(t)\right)'\right)'$$

Ex.:

1) $f(t) = 2t^3 + 5$

$$f'''(t) = 12.$$

$$2t^3 + 5 \xrightarrow{f'} 6t^2 \xrightarrow{f'} 12t \xrightarrow{f'} 12$$

$$2t^3+5 \xrightarrow{\prime} 6t^2 \xrightarrow{\prime} 12t \xrightarrow{\prime} 12$$

2) $f(t) = \sin(t)$

$f'(t) = \cos t$, $f''(t) = -\sin(t)$

$f'''(t) = -\cos(t)$ $f^{(iv)}(t) = \sin(t)$.