Alguns teoremas importantes acerca das derivadas

O Teorema do Valor Médio Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.
2. f é derivável no intervalo aberto (a, b).

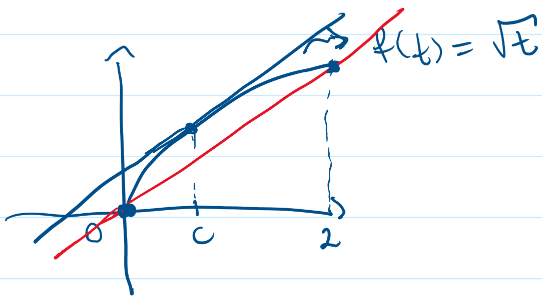
ou f é derivável em $[a,b]$

Então, existe um número c em (a, b) tal que

1 $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou, de maneira equivalente,

2 $$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



f é contínua em $[0,2]$ e derivável em $(0,2]$.

$a=0$, $b=2$

$$\underbrace{\frac{f(2) - f(0)}{2-0}}_{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{0}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}} \to \text{coef. ang da reta secante}$$

Qual o valor de $c \in (0,2)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ ?$$

$$f'(c) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \quad \therefore \boxed{c = 1/2}$$

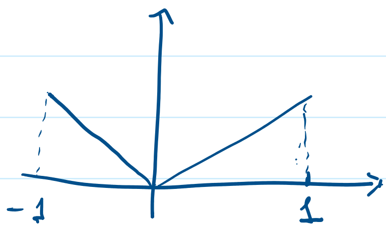
$\cancel{2}\sqrt{c}$ $\qquad$ $\cancel{2}$ $\qquad$ 2

$$(\sqrt{c})^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Obs.: As hipóteses 1 e 2 citadas acima são necessárias para a garantia da veracidade do teorema. De fato, se removermos uma das hipóteses, existirão exemplos onde o teorema do Valor Médio falha.

Por exemplo, suponhamos que deixaremos de exigir a hipótese 2 (f é derivável no intervalo (a, b)). Dessa forma, consideremos a função $f(t) = |t|$, avaliada no intervalo $I = [-1, 1]$.

$a = -1,\ b = 1$



Valor do coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f nos extremos do intervalo considerado, i.e. $[-1, 1]$:

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

Agora, qual seria o ponto $c \in (-1,1)$ tal que $f'(c) = 0$?

$$(t^n)' = n \cdot t^{n-1}$$

Obs.: $f(t) = \begin{cases} t, se\ t \geq 0 \\ -t, se\ t < 0 \end{cases}$

Logo, teremos que:

$f'(t) = \begin{cases} 1, se\ t > 0 \\ -1, se\ t < 0 \end{cases}$

Lembremos que, no caso da função considerada, $f'(0^-) \neq f'(0^+)$. Logo, $\nexists f'(0)$.

Em face dos cálculos acima, vemos que não existe nenhuma possibilidade de existir algum $c \in (-1, 1)$ de modo que $f'(c) = 0$.

Exercício: Encontre um exemplo de função que não satisfaz à hipótese 1 do Teorema do Valor Médio e que acaba por não satisfazer o resultado (tese) do Teorema. Justifique as suas afirmações. (Podem se basear no exemplo que acabamos de fazer acima!)

5 Teorema Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a, b), então f é constante em (a, b).

$(a_1, b_1) \subset (a, b) \Rightarrow \exists c \in (a_1, b_1); f'(c)$
$= \dfrac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1}$

Mas $f'(c) = 0$ por hipótese. Logo: $\frac{f(b_1)-f(a_1)}{b_1-a_1} = 0$, ou seja, $f(b_1) - f(a_1) = 0$, isto é, $f(b_1) = f(a_1), \forall b_1, a_1 \in (a, b)$. Isso significa que a função considerada deverá ser constante!

7 Corolário Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em um intervalo (a, b), então $f - g$ é constante em (a, b); isto é, $f(x) = g(x) + c$, em que c é uma constante.

Ou seja: Se duas funções f e g possuem derivadas iguais, isso não quer dizer que as próprias funções sejam iguais. Mas elas não poderão ser muito diferentes entre. A diferença entre elas será exatamente uma constante $K \in \mathbb{R}$.

Exercício: Use o Teorema 5 acima para concluir o resultado descrito no Corolário 7.

Teorema de Rolle Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.
2. f é derivável no intervalo aberto (a, b).
3. $f(a) = f(b)$

Então, existe um número c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Exercício: Utilize o T.V.M. (Teorema do Valor Médio) visto acima para demonstrar o Teorema de Rolle.

O Teorema de Rolle é interessante pois nos permite detectar facilmente regiões (intervalos) com presença de pontos críticos! ($f'(c) = 0$). Basta encontrarmos dois pontos a e b diferentes e que possuem imagens iguais.