Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Departamento de Matemática

MAT A42 - Matemática Discreta I

Axiomas de Giuseppe Peano

Princípio da Indução

Professora: Isamara

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ possui quatro propriedades fundamentais que possuem como *consequências lógicas*, todas as afirmações *verdadeiras* referentes a este conjunto. Assim, em linguagem corrente, podemos dizer que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é caracterizado pelas seguintes propriedades:

(i) Todo número natural possui um ÚNICO SUCESSOR que também é um número natural.

(ii) Números naturais DISTINTOS possuem SUCESSORES DISTINTOS.

(iii) Existe um ÚNICO número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo "1" e é chamado de "número um".

(iv) Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com $\mathbb{N}$; isto é, contém todos os naturais.

Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais.
Podemos escrever as quatro propriedades dos AXIOMAS DE PEANO em LINGUAGEM MATEMÁTICA do seguinte modo:

(i) Todo número natural possui um ÚNICO SUCESSOR que também é um número natural.
Ou seja, existe uma função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; n \rightarrow s(n)$.

(ii) Números naturais DISTINTOS possuem SUCESSORES DISTINTOS;
isto é, a função s é INJETORA: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}; n_1 \neq n_2 \Rightarrow s(n_1) \neq s(n_2)$

(iii) Existe um ÚNICO número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo “1” e é chamado de “número um”.
Deduzimos então que $1 \notin s(n); \forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) "Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com $\mathbb{N}$; isto é, contém todos os naturais".
Consequentemente, $X \subseteq \mathbb{N}$ tal que
$1 \in X \Rightarrow S(1) = 2 \in X$
$2 \in X \Rightarrow S(2) = 3 \in X$
$\vdots$
$n \in X \Rightarrow S(n) = n + 1 \in X$
$\vdots$
então, $X = \{1, 2, 3, \ldots, n, n + 1, \ldots\} = \mathbb{N}$
Assim, podemos representar o conjunto dos Naturais do seguinte modo;
$1 \xrightarrow{S(1)} 2 \xrightarrow{S(2)} 3 \xrightarrow{S(3)} \cdots n \xrightarrow{S(n)} n + 1 \xrightarrow{S(n+1)} \cdots$

$1 \xrightarrow{S(1)} 2 \xrightarrow{S(2)} 3 \xrightarrow{S(3)} \cdots n \xrightarrow{S(n)} n+1 \xrightarrow{S(n+1)} \cdots$ Desta forma, temos que os números naturais têm uma sequência começando pelo número 1;

$1 < 2 < 3 < \cdots < n < n+1 < \cdots;$

isto nos leva a pensar que todo número natural pode ser obtido a partir do número 1 através de **repetidas aplicações de tomar o sucessor**.

"Temos, na verdade, um PROCESSO INDUTIVO".

OBSERVAÇÃO: O papel fundamental do "**axioma da indução**" é que ele pode ser usado como método de demonstração denominado MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA ou PRINCÍPIO DA INDUÇÃO ou PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA (**finita** é a demonstração, não o número de objetos(cardinalidade do conjunto) sobre os quais se pode chegar a alguma conclusão.).

Assim, defini-se uma **propriedade** P para os números naturais sendo que um número natural pode ou não satisfazer.

Por exemplo, $P(n)$: "o número natural n é o sucessor de outro número natural".

Note que todos os outros naturais satisfazem, exceto o número 1.

Seja $P(n)$ uma propriedade referente aos números naturais.
Se 1 satisfaz $P(n)$ e, além disso, o fato de que o número natural k satisfaz $P(n)$ implicar que seu sucessor $k+1$ também satisfaz, então todos os números naturais satisfazem a mesma propriedade $P(n)$:

$$(P(1) \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1).$$

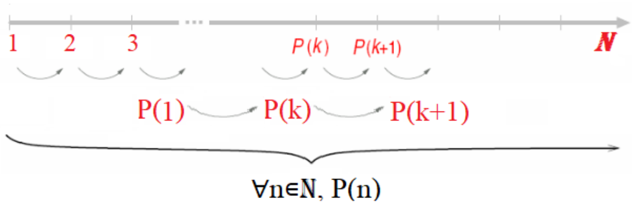
Assim, o método de indução consiste em dois passos:

- Passo BASE(Inicialização):
  Verificamos se $P(1)$ é verdadeira.
- Passo INDUTIVO:
  Mostramos que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para todos os naturais k.

$$(P(1) \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1)$$

.

OBSERVAÇÃO.3: Note que $(P(1) \wedge P(k))$ é a HIPÓTESE de indução. Por isso, precisamos verificar se $P(1)$ é verdadeira e supor que $P(k)$ é verdadeira a fim de provar a TESE $P(k+1)$.



Exercício.1: Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}; \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Passo Base(Inicialização):
  Verificando se $P(1)$ é verdadeira, então; $P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \Rightarrow (V)$.
- Passo Indutivo:
  Mostramos que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para todos os naturais k.
  Então; supondo que $P(k) : \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ é verdadeira, vamos verificar se $P(k+1) : \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1).(k+2)}{2}$ é verdadeira.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1).(k+2)}{2} (V).$$

Logo, $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercício.2: Mostre que a soma dos n primeiros números ímpares naturais é igual a n^2.

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = n^2.$$

- Passo BASE(Inicialização):
  Verificando se $P(1)$ é verdadeira, então; $P(1): 1 = 1^2 \Rightarrow (V)$.
- Passo INDUTIVO:
  Mostrar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para todos os naturais k.
  Então; supondo que $P(k): 1+3+5+7+\ldots+(2k-1) = k^2$ é verdadeira,
  vamos verificar a validade de $P(k+1)$:

$$1+3+5+7+\ldots+(2k-1)+(2(k+1)-1) = (k+1)^2$$

$$\underbrace{1+3+5+7+\ldots+(2k-1)}_{P(k)}+(2(k+1)-1) = k^2+(2k+2-1) = k^2+2k+1 =$$

$= (k+1)^2(V)$. Logo, $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

"Podemos também utilizar o Princípio da Indução para definirmos funções."

Adição dos Números Naturais "somar k"

Fixando um número $k \in \mathbb{N}$, vamos definir a função SOMA de dois naturais quaisquer k e n como segue;

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; n \to f(n) = k + n;$

onde,

(i) $s(k) = k + 1$; (por definição, $k + 1$ é o sucessor de k), e

(ii) $s(k+n) = k + s(n)($ por definição, $s(n) = n + 1 \Rightarrow k + s(n) =$
$= k + (n+1) = (k+n) + 1 = s(k+n)$)

"Podemos também utilizar o Princípio da Indução para definirmos funções."

Multiplicação dos Números Naturais

Fixando um número $k \in \mathbb{N}$, vamos definir a função MULTIPLICAÇÃO de dois naturais quaisquer k e n como segue; $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; n \to f(n) = n.k;$
onde,

(i) $1.k = k$; e

(ii) $k.s(n) = k.(n+1) = k.n + k$ (isto é, $2.k = k + k$; $3.k = k + k + k, \ldots$)

Propriedades Básicas: Sejam $k, n, p \in \mathbb{N}$ quaisquer, então;

(P_1) Associatividade:
$k + (n + p) = (k + n) + p$;
$k.(n.p) = (k.n).p$;

(P_2) Comutatividade:
$k + n = n + k$;
$k.n = n.k$;

(P_3) Lei do Corte:
$k + n = k + p \Rightarrow n = p$;
$k.n = k.p \Rightarrow n = p$;

(P_4) Distributividade:
$k.(n + p) = k.n + k.p$;

Observação.4: O Princípio da Indução pode ser utilizado para provar as propriedades básicas da adição e da multiplicação de números naturais.

Pela ADIÇÃO de naturais definida, podemos introduzir uma relação de ORDEM entre os naturais.

PROPRIEDADES:

$\forall m, n, p \in \mathbb{N}$

(P_1): Se $m < n$ então $m + p = n$ "m MENOR DO QUE n" e
Se $m \leq n$ então $m = n$ ou $m < n$ "m MENOR DO QUE OU IGUAL AO n"

(P_2): Se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$ "TRANSITIVIDADE"

(P_3): Qualquer uma das afirmações: $m < n$, $m = n$, $m > n$ exclui as outras. "TRICOTOMIA"
Notamos com esta propriedade que os números naturais são comparáveis.

(P_4): Se $m < n$ então $m + p < n + p$ e $m.p < n.p$. "MONOTONICIDADE"

Princípio da Boa Ordem:

"Todo subconjunto não-vazio $A \subseteq \mathbb{N}$ possui um menor elemento."

Observação.5: Dado o subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$,dizemos que o número natural a é o menor elemento (ou primeiro elemento) quando $a \in A$ e $a \leq x; \forall x \in A$.

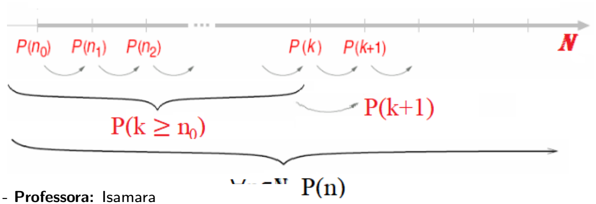
Exemplos:

1. $a = 1$ é o menor elemento do conjunto $\mathbb{N}$.
2. $a = 2$ é o menor elemento do conjunto $A = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\} \subset \mathbb{N}$.

Princípio "Forte" da Indução Matemática ou Indução Completa(Generalizada):

Seja $P(n)$ uma propriedade referente aos números naturais.
Se o menor elemento, $n_0 \in \mathbb{N}$, satisfaz $P(n)$ e, além disso, o fato de que o número natural $k \geq n_0$ satisfaz $P(n)$ implicar que seu sucessor $k+1$ também satisfaz, então todos os números naturais satisfazem a mesma propriedade $P(n)$; mais especificamente, considerando $n_0 = 1$:

$$(P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k-1) \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1).$$



Princípio "Forte" da Indução Matemática ou Indução Completa(Generalizada):

Assim;

- Passo Base(Inicialização): Verificamos se $P(n_0)$ é verdadeira.
- Passo Indutivo: Mostramos que $\forall k \geq n_0, P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Exemplo.3

Mostre, utilizando o princípio de indução, que todo natural n maior do que "1" pode ser escrito como o produto de números primos.

Consideremos a propriedade "$P(n)$: n pode ser escrito como o produto de números primos".

(i) Passo Básico: $n_0 = 2$; $P(2) : 2 = 2^1$ verdadeiro;

(ii) Hipótese de Indução: $P(k)$ é verdadeira $\forall k \geq 2$;
Passo indutivo: $(P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1)$.

(iii) Tese: Vamos verificar a validade de $P(k+1)$

Se $k+1$ for um número natural primo então satisfaz; mas,
Se $k+1$ for um número natural composto, então pode ser escrito pelo *produto de dois números naturais* a e m; tais que, $2 \leq a \leq m \leq k$.
Utilizando a Hipótese de Indução, temos que cada um desses números a e m pode ser escrito como o **produto de números primos**.
Assim, $k+1$ será o produto dos números primos de a com os de m.
Concluímos então que $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, $P(n)$ vale para todo natural maior do que 1: $n \geq 2$.

Sequências:

Vamos considerar agora, a propriedade P_1 no conjunto dos naturais que nos levará à relação de ordem neste conjunto seguindo uma sequência definida.

Estas sequências podem ser definidas de forma recursiva.

Exemplo.4:

Sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$

definida por:

$F(1) = F(2) = 1$; e

$F(n) = F(n-1) + F(n-2); n \geq 3$

Assim,

$$\begin{aligned}
F(1) &= F(2) = 1 \\
F(3) &= F(2) + F(1) = 2 \\
F(4) &= F(3) + F(2) = 3 \\
F(5) &= F(4) + F(3) = 5 \\
F(6) &= F(5) + F(4) = 8 \\
F(7) &= F(6) + F(5) = 13 \\
\ldots & \quad \ldots
\end{aligned}$$

Exemplo.4:
Considerando a "Sequência de Fibonacci"
$F(1) = F(2) = 1$ e $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$; $n \geq 3$
Mostre utilizando o princípio de indução: $F(n) < (\frac{7}{4})^n$.

(i) Base de Indução: $F(1) < (\frac{7}{4})^1 \Rightarrow 1 < \frac{7}{4}$ (V)

(ii) Hipótese de Indução: $F(k-1) < (\frac{7}{4})^{k-1}$ e $F(k) < (\frac{7}{4})^k$.
Passo de indução (tese): $F(k+1) < (\frac{7}{4})^{k+1}$
Pela definição da sequência:
$F(k+1) = F(k) + F(k-1)$
utilizando a Hipótese de Indução:
$F(k+1) < (\frac{7}{4})^k + (\frac{7}{4})^{k-1} = (\frac{7}{4})^{k-1}[(\frac{7}{4}) + 1] < (\frac{7}{4})^{k-1}.(\frac{7}{4})^2 = (\frac{7}{4})^{k+1}$

EXEMPLO.4:
Considerando a "SEQUÊNCIA DE FIBONACCI"
$F(1) = F(2) = 1$ e $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$; $n \geq 3$
Mostre utilizando o PRINCÍPIO DE INDUÇÃO: $F(n) < (\frac{7}{4})^n$.

(i) Base de Indução: $F(1) < (\frac{7}{4})^1 \Rightarrow 1 < \frac{7}{4}$ (V)

(ii) Hipótese de Indução: $F(k-1) < (\frac{7}{4})^{k-1}$ e $F(k) < (\frac{7}{4})^k$.
Passo de indução (TESE): $F(k+1) < (\frac{7}{4})^{k+1}$
Pela definição da sequência:
$F(k+1) = F(k) + F(k-1)$
utilizando a Hipótese de Indução:
$F(k+1) < (\frac{7}{4})^k + (\frac{7}{4})^{k-1} = (\frac{7}{4})^{k-1}[(\frac{7}{4}) + 1] < (\frac{7}{4})^{k-1}.(\frac{7}{4})^2 = (\frac{7}{4})^{k+1}$
Portanto, $F(k+1) < (\frac{7}{4})^{k+1}$ é verdadeira; validando $P(k+1)$.
Logo, a propriedade $P(n) : F(n) < (\frac{7}{4})^n$ vale para todos os naturais.

OBSERVAÇÃO.6:
Note que para provar a propriedade $P(n)$ nos EXEMPLOS.3 e 4 foi necessário utilizar o PRINCÍPIO "FORTE" DA INDUÇÃO MATEMÁTICA.
Em alguns casos, não será suficiente supor no Passo INDUTIVO: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$; teremos que supor no Passo INDUTIVO: $\forall k \geq n_0, P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
Por isso, costumamos distinguir denominando o primeiro:
PRINCÍPIO "FRACO" DA INDUÇÃO MATEMÁTICA.

PRINCÍPIO "FRACO" DA INDUÇÃO	PRINCÍPIO "FORTE" DA INDUÇÃO
$(P(1) \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1)$	$(P(n_0) \wedge P(n_1) \wedge \ldots \wedge P(k-1) \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1)$

Exercícios - Princípio de Indução Matemática

(1) Prove os itens abaixo utilizando o PRINCÍPIO DA INDUÇÃO,

(a) $2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2; n \geq 1.$

(b) $n < 2^n; n \geq 1$

(c) $2^n \geq n^2; n \geq 4$

(d) 2 divide $n^2 + n; n \geq 1$

(e) 5 divide $n^5 - n; n \geq 2$

(f) $n^2 > 3n; n \geq 4$

(g) $(1 + x)^n \geq 1 + x^n; x > 0, n \geq 1$

(h) $n! > 2^n; n \geq 4$

(i) $n^2 < 2^n; n \geq 5$

(j) $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1; n \geq 3$

(k) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; n \geq 1$

(l) $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}; r \neq 1, a \geq 1, n \geq 1$

(1) Prove os itens abaixo utilizando o PRINCÍPIO DA INDUÇÃO,

(a) $2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2; n \geq 1.$

(i) Passo Básico: $P(1) : 2 = 2^2 - 2 \Rightarrow 2 = 2$; "verdadeiro";

(ii) Hipótese de Indução: $2 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 2; k \geq 1;$

Passo indutivo: $P(k+1) : 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 2;$

$(2 + 2^2 + \cdots + 2^k) + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 2) + 2^{k+1} = 2^{k+1}(1+1) - 2 = 2^{k+2} - 2$ então,

vale para $P(k+1) \Rightarrow$ vale $\forall n \geq 1$

Exercícios - Princípio de Indução Matemática

Respostas

(b) $n < 2^n; n \geq 1$

(i) Passo Básico: $P(1) : 1 < 2^1 \Rightarrow 1 < 2$; "verdadeiro";

(ii) Hipótese de Indução: $P(k) : k < 2^k; k \geq 1$;

Passo indutivo: $P(k+1) : k+1 < 2^{k+1}$

$2^{k+1} = 2.2^k$ por $P(k) : 2^k > k$; então, $2.2^k > 2.k = k + k > k + 1 \Rightarrow 2^{k+1} > k + 1$ então, vale para $P(k+1) \Rightarrow$ vale $\forall n \geq 1$

Exercícios - Princípio de Indução Matemática

Respostas

(c) $2^n \geq n^2; n \geq 4$

(i) <u>Passo Básico</u>: $P(4) : 2^4 \geq 4^2 \Rightarrow 16 = 16;$ "verdadeiro";

(ii) <u>Hipótese de Indução</u>: $P(k) : 2^k \geq k^2; k \geq 4;$

Passo indutivo: $P(k+1) : 2^{k+1} \geq (k+1)^2$

$2^{k+1} - (k+1)^2 = (2.2^k) - (k^2 + 2k + 1) = (2^k + 2^k) - (k^2 + 2k + 1) \geq (2^k + k^2) - (k^2 + 2k + 1)$

pois $P(k) : 2^k \geq k^2$; continuando;

$2^{k+1} - (k+1)^2 \geq (2^k + \cancel{k^2}) - (\cancel{k^2} + 2k + 1) = (2^k) - (2k + 1)$ como, $k \geq 4 \Rightarrow 2^k \geq 2k + 1$

então, $2^{k+1} - (k+1)^2 \geq 0 \Rightarrow 2^{k+1} \geq (k+1)^2$ então, vale para $P(k+1) \Rightarrow$ vale $\forall n \geq 4$

(d) 2 divide $n^2 + n; n \geq 1$

(i) Passo Básico: $P(1)$: 2 divide $1^2 + 1 \Rightarrow 2$ divide 2; "verdadeiro";

(ii) Hipótese de Indução: $P(k)$: 2 divide $k^2 + k; k \geq 1$;

Passo indutivo: $P(k+1)$: 2 divide $(k+1)^2 + (k+1)$

$(k+1)^2+(k+1) = (k^2+2k+1)+(k+1) = (k^2+k)+(2k+2) = (k^2+k)+2(k+1)$; por $P(k)$ temos que 2 divide (k^2+k) e por definição, temos que $2.a; \forall a \in \mathbb{N}$ é um múltiplo de 2; e por propriedade dos naturais, a soma de números divisíveis por 2 é também divisível por 2. Portanto, 2 divide $(k^2+k)+2(k+1)$. Assim, vale para $P(k+1) \Rightarrow$ vale $\forall n \geq 1$

(e) 5 divide $n^5 - n$; $n \geq 2$

(i) Passo Básico: $P(2)$: 5 divide $2^5 - 2 \Rightarrow 5$ divide 30; "verdadeiro"

(ii) Hipótese de Indução: $P(k)$: 5 divide $k^5 - k$; $k \geq 2$;

Passo indutivo: $P(k+1)$: 5 divide $(k+1)^5 - (k+1)$

$(k+1)^5 - (k+1) = (k+1)^2(k+1)^3 - (k+1) =$

$(k^2 + 2k + 1)(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) =$

$(k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + \cancel{1}) - (k + \cancel{1}) = (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$;

por $P(k)$ temos que 5 divide $(k^5 - k)$ e por definição, temos que $5.a; \forall a \in \mathbb{N}$ é um múltiplo de 5; e por propriedade dos naturais, a soma de números divisíveis por 5 é também divisível por 5. Portanto, 5 divide $(k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$. Assim, vale para $P(k+1) \Rightarrow$ vale $\forall n \geq 2$

(f) $n^2 > 3n; n \geq 4$

(i) Passo Básico: $P(4) : 4^2 > 3.4 \Rightarrow 16 > 12$; "verdadeiro";

(ii) Hipótese de Indução: $P(k) : k^2 > 3k; k \geq 4$;

Passo indutivo: $P(k+1) : (k+1)^2 > 3(k+1)$

$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ por $P(k)$ temos que $k^2 + (2k+1) > 3k + (2k+1)$; como $k \geq 4 \Rightarrow (2k+1) \geq 9$ então, $3k + (2k+1) \geq 3k + 9 > 3k + 3 = 3(k+1) \Rightarrow (k+1)^2 > 3(k+1)$ então, vale para $P(k+1) \Rightarrow$ vale $\forall n \geq 4$

(g) $(1+x)^n \geq 1+x^n; x>0, n \geq 1$

(i) Passo Básico: $P(1):(1+x)^1 \geq 1+x^1 \Rightarrow 1+x=1+x$; "verdadeiro";

(ii) Hipótese de Indução: $P(k):(1+x)^k \geq 1+x^k; k \geq 1$;

Passo indutivo: $P(n+1):(1+x)^{k+1} \geq 1+x^{k+1}$

$(1+x)^k(1+x) \geq (1+x^k)(1+x) =$

$1+x+x^k+x^{k+1} = (1+x^{k+1})+(x+x^k) \geq 1+x^{k+1}$; então, vale para $P(k+1) \Rightarrow$

vale $\forall n \geq 1$

Exercícios - Princípio de Indução Matemática

Respostas

(h) $n! > 2^n; n \geq 4$

(i) Passo Básico: $P(4) : 4! > 2^4 \Rightarrow 24 > 16$; "verdadeiro";

(ii) Hipótese de Indução: $P(k) : k! > 2^k; k \geq 4$;

Passo indutivo: $P(k+1) : (k+1)! > 2^{k+1}$

$(k+1)! = (k+1).k! > (k+1).2^k > 2.2^k = 2^{k+1}$; pois, $k \geq 4 \Rightarrow (k+1) > 2$; logo,

$(k+1)! > 2^{k+1}$ e, assim, vale para $P(k+1) \Rightarrow$ vale $\forall n \geq 4$

(i) $n^2 < 2^n; n \geq 5$ ver item(c)

(j) $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1; n \geq 3$

(i) Passo Básico: $P(3) : 2(3^3) > 3(3^2) + 3(3) + 1 \Rightarrow 54 > 37$; "verdadeiro";
(ii) Hipótese de Indução: $P(k) : 2k^3 > 3k^2 + 3k + 1; k \geq 3$;
Passo indutivo: $P(k+1) : 2(k+1)^3 > 3(k+1)^2 + 3(k+1) + 1$;
$2(k+1)^3 > 3(k+1)^2 + 3(k+1) + 1$;
pois, $k \geq 4 \Rightarrow (k+1) > 2$; logo, $(k+1)! > 2^{k+1}$ e, assim, vale para $P(k+1) \Rightarrow$ vale $\forall n \geq 3$

(k) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $n\geq 1$

(i) Passo Básico:

$P(1): a+ar=\frac{ar^2-a}{r-1}\Rightarrow a(1+r)=\frac{a(r^2-1)}{r-1}=\frac{a\cancel{(r-1)}(r+1)}{\cancel{r-1}}\Rightarrow a(1+r)=a(1+r)$; "verdadeiro"

(ii) Hipótese de Indução: $P(k): 1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$; $k\geq 1$;

Passo indutivo: $P(k+1): 1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$;

$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}=\frac{(k+1)[2k^2+k+6k+6]}{6}=\frac{(k+1)[2k^2+7k+6]}{6}=\frac{(k+1)[(2k+3)(k+2)]}{6}$;

logo, vale para $P(k+1)\Rightarrow$ vale $\forall n\geq 1$.

(I) $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$; $r \neq 1, a \geq 1, n \geq 1$

(i) Passo Básico:

$P(1) : a + ar = \frac{ar^2-a}{r-1} \Rightarrow a(1+r) = \frac{a(r^2-1)}{r-1} = \frac{a\cancel{(r-1)}(r+1)}{\cancel{r-1}} \Rightarrow a(1+r) = a(1+r)$;
"verdadeiro"

(ii) Hipótese de Indução: $P(k) : a + ar + ar^2 + \cdots + ar^k = \frac{ar^{k+1}-a}{k-1}$; $r \neq 1, a \geq 1, k \geq 1$;

Passo indutivo: $P(k+1) : a + ar + ar^2 + \cdots + ar^k + ar^{k+1} = \frac{ar^{k+2}-a}{r-1}$;

$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^k + ar^{k+1} = \frac{ar^{k+1}-a}{r-1} + ar^{k+1} = \frac{ar^{k+1}-a+ar^{k+1}(r-1)}{r-1} =$
$\frac{ar^{k+1}(\cancel{1}+r-\cancel{1})-a}{r-1} = \frac{ar^{k+1}(r)-a}{r-1} = \frac{ar^{k+2}-a}{r-1}$;

logo, vale para $P(k+1) \Rightarrow$ vale $\forall n \geq 1$.

Exercícios - Princípio de Indução Matemática

(2) Prova por INDUÇÃO: $2+3+4+\cdots+(n-2)=\frac{n(n-3)}{2}; n>3$

(i) PASSO BÁSICO: $P(4):\frac{4(4-3)}{2}=2$; "verdadeiro";

(ii) HIPÓTESE DE INDUÇÃO: $P(k):\frac{k(k-3)}{2}; k>3$ é verdadeira;
PASSO INDUTIVO: $P(4)\wedge\cdots\wedge P(k)\rightarrow P(k+1)$.
Vamos verificar a validade de
$P(k+1): 2+3+4+\cdots+(k-2)+(k-1)=\frac{(k+1)(k-2)}{2}$.
então, $P(k+1):\underbrace{2+3+4+\cdots+(k-2)}_{\frac{k(k-3)}{2}}+(k-1)==\frac{k(k-3)}{2}+(k-1)=$
$\frac{k(k-3)+2(k-1)}{2}=\frac{k^2-k-2}{2}=\frac{(k+1)(k-2)}{2}$.
Vale então para $P(k+1)\Rightarrow$ vale $\forall n>3$

Exercícios - Princípio de Indução Matemática

(3) Prova por INDUÇÃO:
$1 + 8 + 16 + 24 + \cdots + 8(n-1) = 1 + 4n(n-1);\, n \geq 1$
$8 + 16 + 24 + \cdots + 8(n-1) = 4n(n-1);\, n > 1$

(i) Passo Básico: $P(2) : 8 = 4.2(2-1) = 8$; "verdadeiro";

(ii) Hipótese de Indução: $P(k) : 4k(k-1);\, k > 1$ é verdadeira;
Passo indutivo: $P(2) \wedge \cdots \wedge P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
Vamos verificar a validade de $P(k+1) : \underbrace{8 + 16 + 24 + 32 + \cdots + 8(k-1)}_{4k(k-1)} + 8(k)$

$P(k+1) : 4k(k-1) + 8k = 4k^2 + 4k = 4k(k+1) = 4(k+1)k = 4(k+1)((k+1)-1)$.
Vale então para $P(k+1) \Rightarrow$ vale $\forall n > 1$

Exercícios - Princípio de Indução Matemática

(4) Prova por INDUÇÃO:
$2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 = 2^n - 1; n \geq 1$

(i) Passo Básico: $P(1) : 1 = 1$; "verdadeiro";

(ii) Hipótese de Indução: $P(k) : 2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 = 2^k - 1; k \geq 1$ é verdadeira;

Passo indutivo:

$$P(k+1) : 2^k + \underbrace{2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1}_{2^k - 1} = 2^k + 2^k - 1 = 2^k(1+1) - 1 = 2^{k+1} - 1$$

logo, vale para $P(k+1) \Rightarrow$ vale $\forall n \geq 1$

Exercícios - Princípio de Indução Matemática

(5) Prova por INDUÇÃO:

$2.3^{n-1} + 5(3^{n-2} + \cdots + 3^2 + 3 + 1) = 2.3^{n-1} + 5(\frac{3^{n-1}-1}{2})$

$3^{n-2} + \cdots + 3^2 + 3 + 1 = \frac{3^{n-1}-1}{2}$; $n \geq 2$

(i) Passo Básico: $P(2) : 3^{2-2} = \frac{3^{2-1}-1}{2} \Rightarrow 1 = 1$; "verdadeiro";

(ii) Hipótese de Indução: $P(k) : 3^{k-2} + \cdots + 3^2 + 3 + 1 = \frac{3^{k-1}-1}{2}$ é verdadeira;

Passo indutivo: $P(k+1) : \underbrace{3^{k-2} + \cdots + 3^2 + 3 + 1}_{\frac{3^{k-1}-1}{2}} + 3^{k-1} = \frac{3^{k-1}-1}{2} + 3^{k-1} =$

$\frac{3^{k-1}-1+2.3^{k-1}}{2} = \frac{3^{k-1}(1+2)-1}{2} = \frac{3^{k-1}.3-1}{2} = \frac{3^{k}-1}{2} = \frac{3^{(k+1)-1}-1}{2}$;

então, vale para $P(k+1) \Rightarrow$ vale $\forall n \geq 2$