Derivada da função inversa

$f : I \to J \quad , \quad g : J \to I$

são inversas uma da outra se

$$f(g(t)) = t \;, \quad \forall t \in J.$$

se g é derivável em t

então f é derivável em $g(t)$ e:

$$f'(g(t)) = \frac{1}{g'(t)}$$

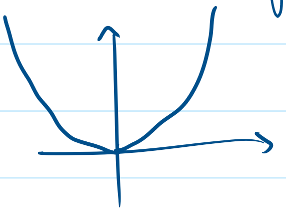
Exemplos:

1) $g(t) = t^2$ e $f(t) = \sqrt{t}$.

Vamos determinar a derivada de f por meio do método da derivada da função inversa. Para isso, estaremos assumindo que já conhecemos a derivada de g.

Obs.: Vamos restringir

de g.



↳ $g(t) = t^2$

Obs.: Vamos restringir o domínio e o contradomínio de f e g para que ambas se tornem bijetoras (e portanto, inversíveis).

↳ $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$f'(g(t)) = \frac{1}{g'(t)} = \frac{1}{2t}$$

Façamos a mudança de variáveis $y = g(t) = t^2$

Como $y = t^2$, temos que $\sqrt{t^2} = \sqrt{y}$

$$\therefore \ |t| = \sqrt{y} \quad \therefore \ t = \sqrt{y}$$

↳ pela Obs. acima!

$$\boxed{f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}} \qquad \to f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

2) Considere $f(t) = e^t$ e $g(t) = \ln t$.

Vamos determinar uma expressão para $g'(t)$, sabendo que $f'(t) = e^t$.

Para que f seja bijetora, façamos a restrição:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$
$$t \mapsto f(t) = e^t.$$

Sabemos que
$$g: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto g(t) = \ln t$$

Sabemos também que:

$$g'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{e^t}$$

Fazendo uma M.D.V. : $y = f(t) = e^t$,

teremos:

$$\boxed{g'(y) = \frac{1}{y}} \quad . \longrightarrow g'(t) = \frac{1}{t}$$

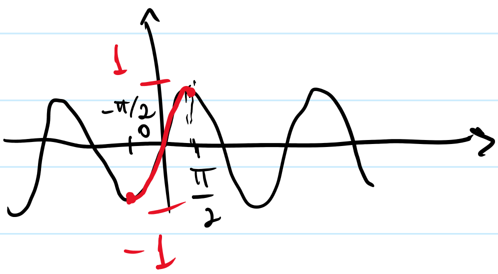
3) Considere $f(t) = \sin(t)$ e $g(t) = \arcsin(t)$.

Sabendo que $f'(t) = \cos(t)$, vamos determinar uma expressão para $g'(t)$.

Para tornar a função f bijetora, façamos a restrição:

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

$t \mapsto f(t) = \sin(t)$



Pela regra da derivada da inversa, teremos:

$$g'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{\cos(t)}$$

Fazendo a M.D.V. $y = f(t) = \sin(t)$,

teremos:

$$(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 = 1$$

$$\therefore (\cos t)^2 = 1 - (\sin(t))^2$$

$$g'(y) = \frac{1}{\cos(t)}$$

$$\therefore \cos t = \pm \sqrt{1-(\sin(t))^2}$$

$$= \sqrt{1-(\sin(t))^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(t))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Para $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\boxed{g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

$$\longrightarrow g'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\boxed{g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}} \longrightarrow g'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Exercício:

Determine uma expressão para $g'(t)$, sendo:

a) $g(t) = \arccos(t)$

b) $g(t) = \operatorname{arctg}(t)$ $\qquad (\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 = 1$

c) $g(t) = \operatorname{arccotg}(t)$ $\qquad 1 + (\operatorname{tg}(t))^2 = (\sec(t))^2$

d) $g(t) = \operatorname{arcsec}(t)$ $\qquad 1 + (\operatorname{cotg}(t))^2 = (\operatorname{cossec}(t))^2$

e) $g(t) = \operatorname{arccossec}(t)$