Geometria Analítica - Semana 8
Planos, retas e mudança de coordenadas

Professor: Victor M. Cunha

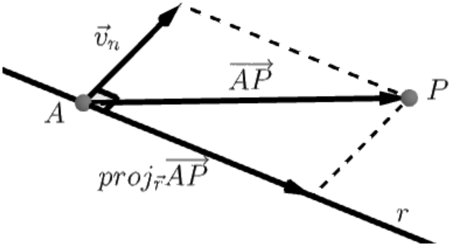
Instituto de Matemática
e Estatística (IME) - UFBA

Maio 2022

- Definimos a distância entre o ponto P e a reta $r: A + \lambda\vec{r}$ como a menor distância entre P e um ponto Q da reta.
- Geometricamente, esta será a distância entre P e sua projeção ortogonal sobre r.
- Deste modo, se decompormos $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$ em uma componente paralela à r e outra perpendicular, temos:

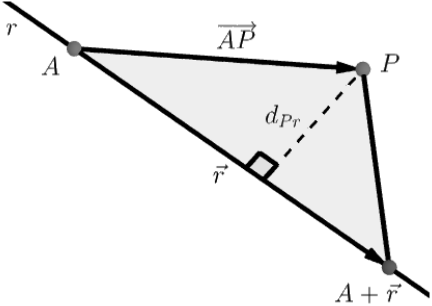
$$\vec{v} = proj_{\vec{r}}\vec{v} + \vec{v}_n$$

e a distância entre o ponto e a reta será dada por $d_{Pr} = \|\vec{v}_n\|$.



- Alternativamente, podemos considerar o triângulo formado pelos pontos A, $A + \vec{r}$ e P.
- Geometricamente, a área deste triângulo será dada por $S = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{1}{2}\,\|\vec{r}\| \cdot d_{Pr}$
- Por outro lado, a partir do produto vetorial temos $S = \dfrac{1}{2}\left\|\vec{r} \times \overrightarrow{AP}\right\|$. Deste modo:

$$d_{Pr} = \frac{\left\|\vec{r} \times \overrightarrow{AP}\right\|}{\|\vec{r}\|}$$

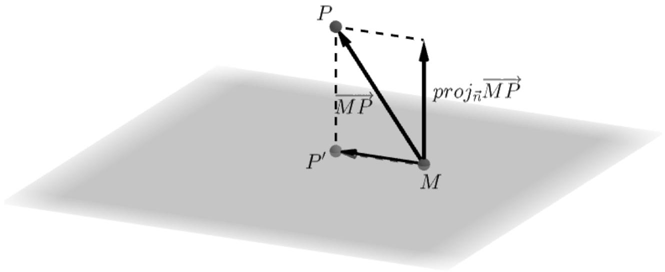


- Calcule a distância do ponto P à reta r:
  - $r\colon (1,0,1)+\lambda(2,1,-1)$ e $P(1,1,2)$.
  - $r\colon (-1,-2,1)+\lambda(1,1,-2)$ e $P(1,0,-3)$.
  - $r\colon \begin{cases} x-y=1 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ e $P(1,1,-1)$.
- Encontre os pontos da reta $r\colon \begin{cases} x+y=2 \\ x=y+z \end{cases}$ que distam $\sqrt{\dfrac{14}{3}}$ de $s\colon x=y=z+1$.
- Encontre os pontos de $r\colon x-1=2y=z$ que equidistam de $s\colon (2,0,0)+\lambda(0,1,0)$ e $t\colon \mu(0,0,1)$.
- Encontre o ponto do eixo x mais próximo da reta $r\colon (0,1,-1)+\lambda(1,2,-1)$.
- Um quadrado $ABCD$ tem a diagonal BD contida na reta $r\colon \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$. Sabendo que A é a origem, determine os outros vértices.
- Determine a equação da superfície cilíndrica de eixo z e raio $1u.c.$

- Definimos a distância entre o ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ e o plano $\pi:\ Ax + By + Cz + D = 0$ como a menor distância entre P e um ponto Q do plano.
- Geometricamente, esta será a distância entre P e sua projeção ortogonal P' sobre π.
- Dado $M \in \pi$ um ponto qualquer do plano, considere a decomposição de $\vec{v} = \overrightarrow{MP}$ em uma componente paralela à π e outra perpendicular:

$$\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_n$$

  e a distância entre o ponto e o plano é dada pelo módulo da componente perpendicular $d_{P\pi} = \|\vec{v}_n\|$.



- A partir do vetor $\vec{n} = (A, B, C)$ normal ao plano, temos $\vec{v}_n = proj_{\vec{n}}\vec{v}$, e:

$$\begin{aligned} d_{P\pi} = \|proj_{\vec{n}}\vec{v}\| &= \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{MP}|}{\|\vec{n}\|} \\ &= \frac{|A(x_0 - x_M) + B(y_0 - y_M) + C(z_0 - z_M)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

Finalmente, como $M \in \pi$, temos $-Ax_M - By_M - Cz_M = D$ e:

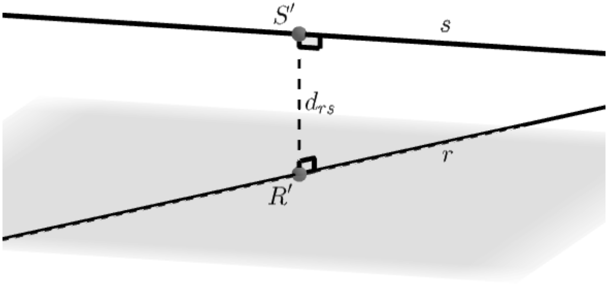
$$d_{P\pi} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

deste modo, obtemos uma fórmula para o cálculo da distância entre um ponto e um plano a partir da equação geral do plano.

- A distância entre o plano α e a reta r é definida como a menor distância entre um ponto $A \in \alpha$ do plano e um ponto $R \in r$ da reta.
- Analogamente, a distância entre dois planos α e β é definida como a menor distância entre um ponto $A \in \alpha$ e um ponto $B \in \beta$.
- Note que caso dois planos, ou um plano e uma reta, sejam concorrentes, a distância entre eles é nula, dado que eles têm um ponto em comum.
- Para calcular a distância entre dois planos paralelos, esta é igual à distância entre um ponto qualquer de um um dos planos e o outro.
- A distância entre uma reta e um plano paralelos é igual à distância entre um ponto qualquer da reta e o plano.
- Note que, no caso de um plano e uma reta, não poderíamos utilizar a distância entre um ponto qualquer do plano e a reta, dado que esta dependeria do ponto escolhido.

- Calcule a distância do ponto P ao plano π:
  - $\pi\colon 2x - y + z - 1 = 0$ e $P(-1, 0, 1)$.
  - $\pi\colon x + 2y - 3z + 1 = 0$ e $P(2, -3, -1)$.
  - $\pi\colon (1, 0, 2)\lambda(-1, 1, -1) + \mu(0, 2, 1)$ e $P(1, 1, 1)$.
- Encontre os pontos da reta $r\colon \begin{cases} x + y = 2 \\ x = y + z \end{cases}$ que distam $\sqrt{6}$ de $\pi\colon x - 2y - z = 1$.
- Determine uma equação para uma reta que dista $1u.c.$ dos planos $\alpha\colon x + y + z = 1$ e $\beta\colon x - z = 0$.
- Determine o ponto do plano $\pi\colon 2x + y - 2z = 3$ mais próximo da origem.
- Determine uma equação geral do plano π que contém a reta $r\colon (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, -1)$ e dista $\sqrt{2}$ do ponto $P(1, 1, -1)$.
- Prove que todo plano que passa pelo ponto médio de um segmento $\overline{PQ}$ é equidistante de P e Q.

- A distância entre as retas r e s é definida como a menor distância entre um ponto $R \in r$ e um ponto $S \in s$.
- Caso as retas sejam concorrentes, a distância entre elas será nula, dado que elas têm um ponto em comum. Caso elas sejam paralelas, ela será igual à distância entre um ponto qualquer de uma das retas e a outra.
- Para retas reversas, no entanto, os pontos $R' \in r$ e $S' \in s$ tais que $d_{rs} = d_{R'Q'}$ estão bem definidos.



- Dadas as retas $r: A + \lambda\vec{r}$ e $s: B + \mu\vec{s}$, considere a decomposição de $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ em componentes paralelas e perpendicular às retas r e s:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_s + \vec{v}_n$$

onde $\vec{v}_r // \vec{r}$, $\vec{v}_s // \vec{s}$ e $\vec{v}_n$ é perpendicular à $\vec{r}$ e $\vec{s}$.

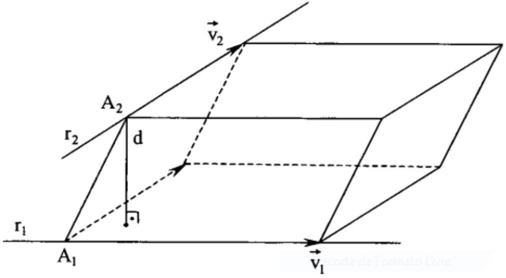
- A distância entre as retas é então dada pela norma da componente perpendicular $d_{rs} = \|\vec{v}_n\|$.
- Para uma forma direta de obter $\|\vec{v}_n\|$, considere o vetor $\vec{n} = \vec{r} \times \vec{s}$ perpendicular à ambas as retas. Temos então $\vec{v}_n = proj_{\vec{n}}\vec{v}$ e:

$$d_{rs} = \|proj_{\vec{n}}\vec{v}\| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}|}{\|\vec{n}\|}$$

- Finalmente, pela definição do produto vetorial, temos $|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}| = |det(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB})|$ e:

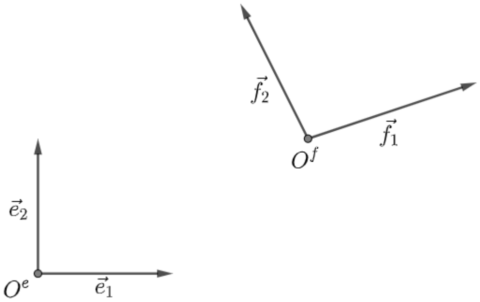
$$d_{rs} = \frac{|det(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB})|}{\|\vec{r} \times \vec{s}\|}$$

- Geometricamente, podemos interpretar esta fórmula a partir do volume $V = |det(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB})|$ do paralelepípedo formado por $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$, que é dado pela área da base ($A = \|\vec{r} \times \vec{s}\|$) vezes a altura ($h = d_{rs}$).

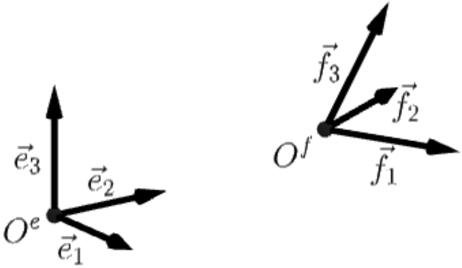


- Calcule a distância entre as retas r e s:
  - $r\colon (2,1,0)+\lambda(-1,1,-1)$ e $s\colon (0,-1,1)+\mu(1,2,-3)$
  - $r\colon \dfrac{1-x}{2}=2y=z$ e $s\colon (0,0,2)+\mu(4,-1,-2)$.
  - $r\colon \begin{cases} x=z-1 \\ y=3z-2 \end{cases}$ e $s\colon \begin{cases} 3x-2z+3=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$
  - $r\colon (1,1,0)+\lambda(0,2,1)$ e $s\colon (-2,4,0)+\mu(-3,1,-1)$
- Determine o ponto da reta $r\colon (1,2,0)+\lambda(1,-1,1)$ mais próximo da reta $s\colon (0,1,0)+\mu(2,1,0)$.
- Para as retas da questão anterior, determine a reta t perpendicular à r e s. O que podemos dizer quanto aos pontos de interseção de t com r e s?
- Determine uma equação geral para uma reta paralela à $r\colon x+1=y-2=z+3$ e que dista $1u.c.$ dos eixos x e y.

- A escolha de um sistema de coordenadas diferente do canônico $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ pode ser muito conveniente em problemas de geometria analítica.
- Podemos querer simplificar os cálculos ou explorar simetrias do problema a partir de outras coordenadas.
- Considere, por exemplo, o cilindro de raio r e eixo dado pela reta $2x + 1 = y - 2 = z$. A equação deste cilindro é complexa, mas se considerarmos um sistema de coordenadas ortonormal onde o eixo z coincide com esta reta, ela se reduz a $x^2 + y^2 = r^2$.
- Veremos então como relacionar as coordenadas em um sistema $E = \{O^e, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ com as coordenadas em outro sistema $F = \{O^f, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$.
- Em particular, dado o ponto $P = (u, v, w)_F$ representado no sistema F, queremos encontrar as coordenadas $(x, y, z)_E$ de P em E.



$\vec{f}_2$
$\vec{f}_1$
O^f
$\vec{e}_2$
O^e
$\vec{e}_1$



$\vec{f}_3$
$\vec{f}_2$
O^f
$\vec{f}_1$
$\vec{e}_3$
$\vec{e}_2$
O^e
$\vec{e}_1$

- Quando dizemos que as coordenadas de P na base F são $(u, v, w)_F$, isto significa que:

$$\overrightarrow{O^f P} = u\vec{f_1} + v\vec{f_2} + w\vec{f_3}$$
$$P = O_F + u\vec{f_1} + v\vec{f_2} + w\vec{f_3}$$

- Deste modo, se as coordenadas de O^f, $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ e $\vec{f_3}$ na base E são $O^f = (h, k, m)_E$, $\vec{f_1} = (a_{11}, a_{21}, a_{31})_E$, $\vec{f_2} = (a_{12}, a_{22}, a_{32})_E$ e $\vec{f_3} = (a_{13}, a_{23}, a_{33})_E$, temos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \\ m \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = h + a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w \\ y = k + a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w \\ z = m + a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w \end{cases}$$

- Temos, portanto, equações que nos permitem converter as coordenadas do ponto P do sistema F para o sistema E.

- Podemos também expressar estas equações matricialmente. De fato, sendo $P_E = (x, y, z)$ e $P_F = (u, v, w)$ as coordenadas de P em E e F, respectivamente, e definindo a matriz M_{ef} como:

$$M_{ef} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

temos então:

$$P_E = O_E^f + M_{ef} P_F$$

- A matrix M_{ef} é a matriz de mudança das coordenadas F para E.
- De modo geral, as bases $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ não precisam ser ortonormais. Lembre, no entanto, que as fórmulas de produto escalar, determinante, produto vetorial e cálculo de distâncias apenas são válidas em bases ortonormais.

- Sendo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ bases do $\mathbb{R}^3$, a relação entre (x, y, z) e (u, v, w) é unívoca. A matriz M_{ef} é portanto inversível, e podemos representar P_F em função de P_E como:

$$P_F = -M_{ef}^{-1} O_E^f + M_{ef}^{-1} P_E$$
$$P_F = O_F^e + M_{fe} P_E$$

  onde $O_F^e = -M_{ef}^{-1} O_E^f$ são as coordenadas de O^e na base F e $M_{fe} = M_{ef}^{-1}$ é a matriz de mudança de coordenadas de E para F.
- Deste modo, podemos converter as coordenadas de um ponto de F para E ou vice-e-versa. Também podemos relacionar as equações para lugares geométricos (retas, planos, esferas...) entre uma base e outra, como veremos nos exercícios.
- Muitas vezes uma destas bases é a canônica. Note que isto, no entanto, não é necessário.

- Considere as bases $E = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $F = \{O^f, \vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$, onde $O^f(-1, 1, -1)$, $\vec{f_1} = (1, 1, 0)$, $\vec{f_2} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{f_3} = (0, 0, 2)$.
  - Determine as equações de mudança de base de F para E. Represente o ponto $(-3, 2, 2)_F$ em E.
  - Determine as equações de mudança de base de E para F. Represente o ponto $(1, 3, -1)_F$ em E.
  - Considere a reta $r\colon (1, -1, 0)_F + \lambda(2, 1, -1)_F$ e o plano $\alpha\colon 2u + v - 2w = 1$, representados no sistema F. Determinar suas equações nas coordenadas E.
- Mostre que mudanças de base levam retas em retas e planos em planos.
- Considere as bases $E = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ e $F = \{O^f, \vec{f_1}, \vec{f_2}\}$, onde $O^f(2, 1)$, $\vec{f_1} = (3, 0)$ e $\vec{f_2} = (2, 0)$.
  - Determine as equações de mudança de base de F para E. Interprete geometricamente.
  - Considere $\gamma\colon u^2 + v^2 = 1$ uma circunferência em F. Determine a equação de γ em E.
- Sejam E e F sistemas de coordenadas ortonormais. Mostre que M_{ef} é tal que $M_{ef}^{\intercal} M_{ef} = I$, onde I é a matriz identidade. Matrizes assim são ditas unitárias.

- Translações são mudanças de coordenadas onde apenas a origem é modificada. Ou seja, onde $M_{ef} = I$.
- Sendo $O_E^f = (h, k, m)$, temos que as coordenadas de P em E podem ser expressas a partir das coordenadas em F como:

$$P_E = O_E^f + P_F$$

$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v \\ z = m + w \end{cases}$$

- Note que a transformação inversa também é uma translação, dada por:

$$P_F = -O_E^f + P_E$$

ou seja, $u = x - h$, $v = y - k$ e $w = z - k$.

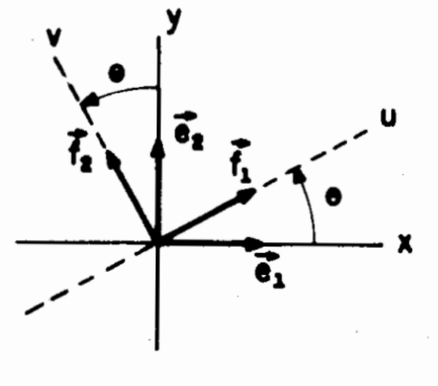
- Considere uma translação onde E é o sistema de coordenadas canônico do $\mathbb{R}^3$ e a origem de F é o ponto $(2, -1, 1)$.
  - Determine as equações desta translação.
  - Considere a esfera $\lambda \colon u^2 + v^2 + w^2 = 2$ em F. Determine a equação de λ em E
- Sejam r e r' duas retas paralelas. Mostre que r' pode ser obtida a partir de r através de uma translação.
- Sejam α e α' dois planos paralelos. Mostre que α' pode ser obtido a partir de α através de uma translação.
- Mostre que toda a equação da forma $y = ax^2 + bx + c$ pode ser obtida a partir de $v = au^2$ via translações.
- Mostre que toda a equação da forma $z = ax^2 + by^2 + cx + dy + e$ pode ser obtida a partir de $w = au^2 + bv^2$ via translações.
- Mostre que a composição de duas translações é uma translação.

- Rotações consistem em mudanças de coordenadas onde a origem não se altera e a nova base $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ pode ser obtida a partir da base antiga $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ através de uma rotação.
- Considerando no plano uma rotação de θ no sentido anti-horário, a nova base pode ser expressa a partir da antiga como:

$$\vec{f}_1 = cos\,\theta\vec{e}_1 + sen\,\theta\vec{e}_2$$
$$\vec{f}_2 = -sen\,\theta\vec{e}_1 + cos\,\theta\vec{e}_2$$

$$\begin{cases} x = (cos\,\theta)u - (sen\,\theta)v \\ y = (sen\,\theta)u + (cos\,\theta)v \end{cases}$$

$$M_{ef} = \begin{pmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix}$$



- Rotações no espaço são consideravelmente mais complexas do que no plano.
- Agora não podemos mais definir uma rotação apenas a partir de um ângulo. Precisamos também do eixo em torno do qual estamos rotacionando.
- Note, no entanto, que rotações são transformações rígidas. Ou seja, se a base original era ortonormal, a nova base também será. A matriz de rotação será portanto unitária.
- Além disto, rotações preservam a orientação. A partir destas duas propriedades, podemos definir rotações no espaço.
- De fato, dadas duas bases ortonormais de mesma orientação, sempre existe uma rotação que transforma uma delas na outra. Deste modo, definimos rotações como transformações onde a origem não se altera e a matriz M_{ef} satisfaz:

$$M_{ef}^{\intercal} M_{ef} = I \qquad det(M_{ef}) = 1$$

- Rotações em torno dos eixos coordenados são particularmente úteis. Note que ao rotacionarmos em torno do eixo z, o vetor $\vec{k}$ não se altera e temos uma rotação de θ no sentido anti-horário no plano xy.
- A matriz de transformação é então dada por:

$$R_\theta^z = \begin{pmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta & 0 \\ sen\,\theta & cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos definir de modo análogo rotações em torno dos eixos x e y:

$$R_\theta^y = \begin{pmatrix} sen\,\theta & 0 & cos\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ cos\,\theta & 0 & -sen\,\theta \end{pmatrix} \qquad R_\theta^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & -sen\,\theta \\ 0 & sen\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix}$$

- Determine no plano a transformação associada à uma rotação de $\pi/4$ no sentido anti-horário. Considere a parábola $\alpha\colon v = au^2$ nas novas coordenadas. Determine a equação desta parábola nas coordenadas antigas.
- Mostre que a composição de uma rotação de θ com uma rotação de φ no plano corresponde à uma rotação de $\theta + \varphi$.
- Seja $M_{ef} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ uma matriz de rotação no plano.
  - Mostre que $M_{ef}^{\intercal} M_{ef} = I$. Conclua que distâncias são invariantes em rotações.
  - Mostre que $det(M_{ef}) = 1$. Conclua que rotações preservam a orientação.
- Mostre que a composição de duas rotações é também uma rotação.
- Considere no espaço uma rotação de $\pi/4$ em torno do eixo z, seguida de uma rotação de $\pi/2$ em torno do eixo x. Determine a equação desta transformação.
- Considere o lugar geométrico de equação $x^2 + xy + y^2 = 1$. Encontre uma rotação que elimine o termo xy desta equação.