Regra da Cadeia

Sabemos derivar $f(t) = \sin(t)$ e $g(t) = t^2 + 1$. Mas não sabemos ainda derivar $h(t) = \sin(t^2 + 1)$.

Nesse caso, $h(t)$ é a composição de $f(t)$ com $g(t)$:

$$h(t) = f \circ g(t) = f(g(t))$$

$$h'(t) = (f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

Para o exemplo acima, teremos:

$h'(t) = \cos(t^2+1) \cdot 2t$

$h(t) = \sin(t^2+1) = f(g(t))$ $\to f(t) = \sin(t)$ $\to g(t) = t^2+1$

$\Rightarrow h'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = \cos(t^2+1) \cdot 2t$

Mais exemplos:

1) $h(t) = \sqrt{t^3+5t}$

$$h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^3+5t}} \cdot (3t^2+5) = \frac{3t^2+5}{2\sqrt{t^3+5t}}$$

2) $h(t) = e^{(\sin t + 1)}$

$$h'(t) = e^{(\sin t + 1)} \cdot \cos(t).$$

3) $h(t) = f \circ g \circ i(t) = f(\underbrace{g(i(t))}) = f(g \circ i(t))$

$$h'(t) = f'(g \circ i(t)) \cdot (g \circ i)'(t)$$

$$= f'(g(i(t))) \cdot g'(i(t)) \cdot i'(t)$$

4) $h(t) = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n(t)$

$$\therefore h'(t) = f_1'(f_2 \circ f_3 \circ \cdots \circ f_n(t)) \cdot f_2'(f_3 \circ f_4 \circ \cdots \circ f_n(t)) \cdot \cdots$$

$$\cdots \cdot f_{n-1}'(f_n(t)) \cdot f_n'(t).$$

5) $h(t) = e^{\sin(t^2+1)} = f(g(i(t)))$; sendo

$f(t) = e^t$, $g(t) = \sin(t)$, $i(t) = t^2+1$.

$$h'(t) = f'(g(i(t))) \cdot g'(i(t)) \cdot i'(t)$$

$$= e^{\sin(t^2+1)} \cdot \cos(t^2+1) \cdot 2t.$$

6) $h(t) = \frac{1}{\sin t} = f(g(t))$; sendo $f(t) = \frac{1}{t} = t^{-1}$

$\rightarrow \operatorname{cossec}(t)$

6) $h(t) = \dfrac{1}{\sin t} = f(g(t))$, sendo $f(t) = \dfrac{1}{t}$
$\hookrightarrow \operatorname{cossec}(t)$

e $g(t) = \sin(t)$.

$$h'(t) = -1 \cdot (\sin t)^{-2} \cdot \cos t = -\frac{\cos t}{(\sin t)^2} = -\operatorname{cossec}(t) \cdot \operatorname{cotg}(t)$$

$$\left(\frac{1}{t}\right)' = \left(t^{-1}\right)' = -t^{-2}$$

$$\left(\frac{1}{\sin(t)}\right)' = \left((\sin t)^{-1}\right)' = -1 \cdot (\sin t)^{-2} \cdot \cos t$$

7) $h(t) = \dfrac{1}{\cos(t)} = \sec(t)$

$$\Rightarrow h'(t) = -1 \cdot (\cos(t))^{-2} \cdot (-\sin(t)) = \frac{\sin(t)}{(\cos(t))^2} = \sec(t) \cdot \operatorname{tg}(t).$$

8) $h(t) = 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) = \sin(2t)$

$$h'(t) = 2\cos(2t)$$

$$= 2\cos t \cdot \cos t - 2\sin(t) \cdot \sin(t)$$

$$= 2 \cdot \left[(\cos(t))^2 - (\sin(t))^2\right]$$

$$= 2 \cdot \cos(2t)$$

Derivada da função inversa

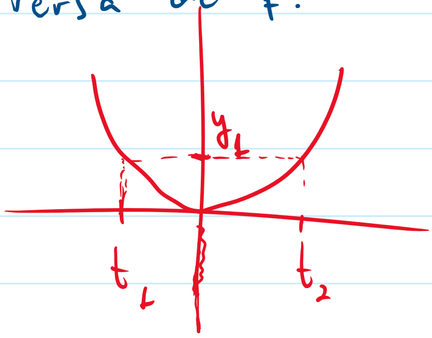
As funções $f: I \longrightarrow J$ é inversível se $\exists\, g: J \longrightarrow I$ tal que:

$$\boxed{g \circ f(t) = t, \ \forall t \in I}$$

ou

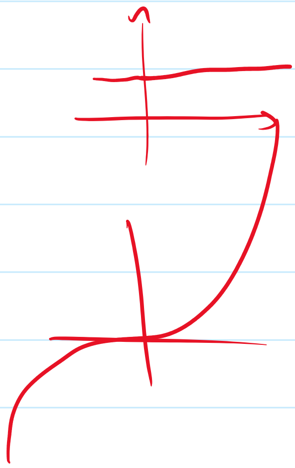
$$\boxed{f \circ g(y) = y, \ \forall y \in J}$$

Nesse caso, g é dita ser a inversa de f.



$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(t) = t^2$$

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$t \rightarrow f(t) = t^2$$



É inversível!!
(Pois é bijetora)

$y = t^2$

↳ $t = y^2 \Rightarrow \sqrt{t} = \sqrt{y^2} = |y| = y$

Afirmação:

$$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$t \longmapsto g(t) = \sqrt{t}$$

é inversa de $f(t) = t^2$, pois:

$$f \circ g(t) = (\sqrt{t})^2 = t, \ \forall t \in \mathbb{R}^+$$

ou

$$g \circ f(t) = \sqrt{t^2} = |t| = t, \ \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Obs.: Se g é inversa de f e sabemos que f é derivável em t, então:

$$g'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)}$$