Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Departamento de Matemática

MAT A42 - Matemática Discreta I

Aula14 - Conjuntos Enumeráveis

Definição, Diagonalização de Cantor

Professora: Isamara

Conjuntos - Cardinalidade

Definição: (Cardinalidade)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Dizemos que a CARDINALIDADE do conjunto A é o *número de elementos deste conjunto*.

NOTAÇÃO: $|A|$ ou $\#A$

Exemplos:

- $A = \{0, 2, 4, 6, 8\} \Rightarrow \#A = 5$; isto é, A possui 5 elementos.
- $B = \{b \in \mathbb{N} \mid 1 \leq b < 21\} \Rightarrow \#B = 20$.

Cardinalidade - Conjuntos Equipotentes

DEFINIÇÃO: Conjuntos Equipotentes

Dizemos que dois conjuntos A e B possuem a mesma cardinalidade; ou seja, são EQUIPOTENTES se, e somente se, existe uma função bijetiva de A em B.

EXEMPLO: Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{Maria, João, José, Mara, Isa\}$ e uma função $f : A \rightarrow B$;
$f(1) = Maria, f(3) = João, f(5) = José, f(7) = Mara, f(9) = Isa$.
Observe que f é bijetiva pois,

- f é UM PARA UM
  $\forall x_1, x_2 \in A; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
- f é SOBRE B.
  $Im(f) = B$; ou seja, $\forall b \in B, \exists a \in A; b = f(a)$.

Portanto, "A e B são EQUIPOTENTES".

DEFINIÇÃO: Conjuntos Finitos e Infinitos

Dizemos que um conjunto A é FINITO se, e somente se, $A = \emptyset$ ou existe uma função bijetiva $f : I_n \rightarrow A$; tal que $I_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, para um determinado $n \in \mathbb{N}^*$.
Caso contrário, dizemos que A é um conjunto INFINITO.

EXEMPLO: Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, e $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$.
Note que podemos definir um, a função $f : I_5 \rightarrow A$; $I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tais que
$f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 6, f(4) = 8, f(5) = 10$.
Note que f é uma bijeção; logo, A é um conjunto FINITO.
Todavia, se definirmos uma função de $g : I_n \rightarrow B$;
$g(1) = 2, g(2) = 4, g(3) = 6, g(4) = 8, g(5) = 10, \ldots, g(n) = 2n$; $n \in \mathbb{N}^*$;
temos que para um *determinado* valor de n, a função g é injetiva mas não é sobrejetiva; logo, g não é bijetiva e B é um conjunto INFINITO.

Motivação: (HOTEL DE HILBERT)

Um hotel possui um conjunto infinito enumerável de quartos. Certo dia, um grupo de k pessoas em excursão, chega ao hotel e solicita quartos para todos do grupo. O gerente, desculpando-se, diz que todos os quartos já estão ocupados. O chefe do grupo, então, explica ao gerente que como o hotel tem INFINITOS QUARTOS, basta, por exemplo, que o ocupante do quarto número 1 vá para o quarto de número $k+1$, o ocupante do quarto número 2 vá para o quarto de número $k+2, \cdots$, e assim por diante, o ocupante do quarto $k-1$ vá para o quarto de número $2k-1$, o ocupante do quarto k vai para o quarto $2k$. Ficarão k quartos livres que podem ser, então, ocupados pelos k elementos do grupo.

$$\begin{array}{lccccccl}
\text{OCUPANTES} & 1 & 2 & \ldots & k-1 & k & & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \Rightarrow & 1\ 2\ 3\ \ldots\ k \\
\text{QUARTOS} & k+1 & k+2 & \ldots & 2k-1 & 2k & & \text{QUARTOS LIVRES}
\end{array}$$

Cardinalidade - Conjuntos Enumeráveis e Não-Enumeráveis

Definição: Conjuntos Enumeráveis

Dizemos que um conjunto A é ENUMERÁVEL se, e somente se, A é **finito** ou existe uma **função bijetiva**

$$f : \mathbb{N} \to A.$$

Caso contrário, dizemos que A é um conjunto NÃO-ENUMERÁVEL.

Cardinalidade - Conjuntos Enumeráveis e Não-Enumeráveis

EXEMPLOS: Sejam os conjuntos:

1. $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; A é um conjunto FINITO; logo, é enumerável.
2. $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \cdots\} \subset \mathbb{N}$. A é um conjunto INFINITO e enumerável; pois podemos definir a seguinte função bijetiva:
   $f : \mathbb{N} \to A$; $f(n) = 2n$.

$$\begin{array}{lccccccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ A: & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & \cdots \end{array}$$

Cardinalidade - Conjuntos Enumeráveis e Não-Enumeráveis

EXEMPLOS:

3. $\mathbb{Z}$ é um conjunto INFINITO e enumerável; pois podemos definir a seguinte função bijetiva: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$;

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}; & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{n+1}{2}; & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$\begin{array}{lcccccccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ \mathbb{Z}: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & -5 & 5 & \cdots \end{array}$$

PROPOSIÇÃO.1:

Subconjuntos de conjuntos enumeráveis são enumeráveis.

Exemplo: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Conjuntos Enumeráveis

PROPOSIÇÃO.2:

Seja A um Conjunto infinito. Então, existe um subconjunto infinito enumerável próprio de A.

D] Seja A um conjunto infinito. Tomemos $x \in A$ arbitrário, e consideremos $B := A/\{x\}$.
Obviamente, B ainda é infinito. Caso contrário, B finito, implicaria que A seria finito. O que seria um absurdo!
Agora, iniciando o processo de escolher o subconjunto infinito próprio de A, tome $x_1 \in B$ e observe que $B/\{x_1\}$ é infinito. Generalizando, tomamos agora $x_n \in B/\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}; \forall n \geq 2$. Assim obtemos o subconjunto infinito $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ próprio de A cujos elementos são enumeráveis.
Exemplo: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

PROPOSIÇÃO.3:
Se $f : A \to B$ é uma função injetiva e B é enumerável, então A é enumerável.

D] Como B é enumerável existe uma função bijetiva $g : B \to \mathbb{N}$; e, considerando a função $f : A \to B$; temos,

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbb{N}$$

.
Podemos definir a função composta, $gof : A \to \mathbb{N}$ que será também injetiva porque f e g são injetivas.
Observe que, pela proposição.1, $Im(gof) \subset \mathbb{N}$ é finito ou infinito enumerável.
Logo, a função $gof : A \to Im(gof)$ é bijetiva e assim, A é enumerável.

PROPOSIÇÃO.4:

Se $f : A \to B$ é uma função sobrejetiva e A é enumerável, então B é enumerável.

D] Como A é enumerável existe uma função bijetiva $g : \mathbb{N} \to A$; $a_1 = g(n_1), a_2 = g(n_2), \cdots$;
e, considerando a função sobrejetiva $f : A \to B$; temos, $\mathbb{N} \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B$.
Podemos então definir a função composta: $f o g : \mathbb{N} \to B; f o g(n) = b$ que será também sobrejetiva porque f e g são sobrejetivas;
i.é, $\forall b \in B; \exists n \in \mathbb{N}; f(g(n)) = f(a) = b$.
Agora, $f o g$ pode "não ser injetiva", e assim podemos ter para $n_1 \neq n_2$; $f o g(n_1) = f o g(n_2) = b$; i.é, $b = f(g(n_1)) = f(a_1), b = f(g(n_2)) = f(a_2), \cdots$
Se $f : A \to B$ é uma função sobrejetiva então $\forall b \in B, \exists a \in A$ tal que; $b = f(a)$.
Porém, como f pode "não ser injetiva", podemos ter $a_1 \neq a_2$ tais que $f(a_1) = f(a_2) = b$.
Supondo que $f o g$ é também injetiva, vamos definir a função inversa
$(f o g)^{-1} : B \to \mathbb{N}; \forall b \in B; (f o g)^{-1}(b) = n \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(b)) = g^{-1}(a) = n$; e, por hipótese, A é enumerável $\Rightarrow g^{-1}$ é injetiva $\Rightarrow \forall a_1 \neq a_2 \in A \Rightarrow g^{-1}(a_1) = n_1 \neq g^{-1}(a_2) = n_2$
$\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(b_1)) = n_1 \neq g^{-1}(f^{-1}(b_2)) = n_2$. Logo, a função $(f o g)^{-1}$ é bijetiva $\Rightarrow f o g : \mathbb{N} \to B$ é também bijetiva $\Rightarrow B$ é enumerável.

Conjuntos Enumeráveis

PROPOSIÇÃO.5:

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

D] Vamos definir a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que; $(x, y) \to n = 2^x 3^y$. Pelo Teorema da Álgebra, sabemos que "todo número natural $n > 1$ se decompõe de maneira única como produto de fatores primos". Portanto, a função f é injetiva; e, utilizando o resultado da proposição.3 temos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

PROPOSIÇÃO.6:

Se A e B são conjuntos enumeráveis, então $A \times B$ é enumerável.

D] Se A e B são conjuntos enumeráveis, então existem funções bijetivas
$f : \mathbb{N} \to A; x \to f(x)$ e $g : \mathbb{N} \to B; y \to g(y)$.
Vamos agora definir uma função sobrejetiva:
$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$ tal que; $(x, y) \to h(x, y) = (f(x), g(y))$.
Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável; pela proposição.5, temos que $A \times B$ é enumerável.

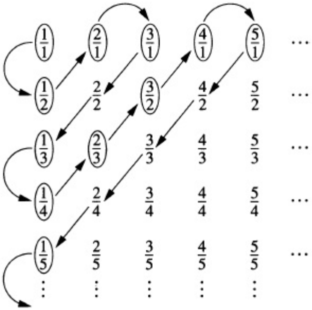
Conjuntos Enumeráveis

COROLÁRIO:

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável.

D] Vamos definir a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ tal que; $(x, y) \to \frac{x}{y}$.
Pela definição dos conjuntos dos racionais, temos que a função f definida é sobrejetiva. Como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável; pela proposição.4, $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável.
Vamos considerar o conjunto $\mathbb{Q}^+$ e enumerar os seus elementos do seguinte modo,

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$



vamos listar os elementos das diagonais cuja soma (numerador + denominador) são iguais, excluindo os termos iguais;

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\mathbb{N}: & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
\mathbb{Q}^+: & & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \cdots
\end{array}$$

Conjuntos Enumeráveis

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
\mathbb{Q}^+: & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \cdots
\end{array}
$$

Agora, podemos incluir "*intercalando*" na bijeção acima, os elementos de $\mathbb{Q}^- \cup \{0\}$; a fim de enumerar todos os elementos do conjunto $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
\mathbb{Q}: & 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 2 & -3 & 3 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots
\end{array}
$$

OBSERVAÇÃO: Notamos que os racionais negativos estão relacionados aos naturais ímpares; enquanto que os não-negativos estão relacionados aos naturais pares.

Proposição.7:

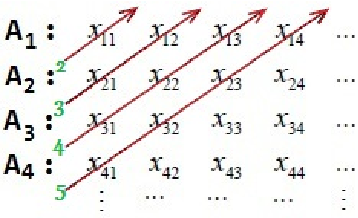
Sejam os conjuntos enumeráveis $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_m$; $m \in \mathbb{N}^*$. Então, a união destes conjuntos $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ é enumerável.

D] Considerando cada conjunto infinito enumerável $A_i; \forall i = 1, \cdots m$ com os elementos: $A_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \cdots\}$; podemos enumerar os elementos de cada conjunto A_i do seguinte modo,

$$\begin{array}{lcccccccccc}
A_1: & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} & \cdots \\
A_2: & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} & x_{28} & x_{29} & \cdots \\
A_3: & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37} & x_{38} & x_{39} & \cdots \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
A_m: & x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & x_{m4} & x_{m5} & x_{m6} & x_{m7} & x_{m8} & x_{m9} & \cdots
\end{array}$$

Conjuntos Enumeráveis

PROPOSIÇÃO.7: D]
Seja $A := \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Vamos enumerar os elementos x_{ij} de A considerando na tabela abaixo os elementos cuja soma $i+j$ são iguais;



$x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14}, \cdots$
Agora, definindo a função bijetiva: $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow A$ tal que; $(i,j) \rightarrow f((i,j)) = x_{ij}$.

OBSERVAÇÃO:

Georg Cantor denotou a cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais por $\aleph_0$:

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

PROPOSIÇÃO.8:

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não-enumerável.

D] Vamos supor que $\mathbb{R}$ seja um conjunto enumerável; pela proposição.1, se $\mathbb{R}$ é enumerável podemos tomar um subconjunto qualquer que também será enumerável:
Seja $(0,1) \subset \mathbb{R}$ e seja uma função bijetiva arbitrária; $f : \mathbb{N} \to (0,1)$, tal que; $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) = a_{ij}$; onde a_{ij} é a j-ésima casa decimal do i-ésimo número decimal:
$a_{ij} \in \{0,1,2,3,\cdots,9\}; \forall i,j \in \mathbb{N}$;

$$f(0) := 0, a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}\cdots$$
$$f(1) := 0, a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$$
$$f(2) := 0, a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$$
$$f(3) := 0, a_{30}a_{31}a_{32}a_{33}\cdots$$
$$\vdots$$
$$f(n) := 0, a_{n0}a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots$$

Conjuntos Não-Enumeráveis

D] (continuação)

$\forall n \in \mathbb{N}$; $a_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 9\}$; $\forall i, j \in \mathbb{N}$; $f(n) := 0, a_{n0} a_{n1} a_{n2} a_{n3} \cdots a_{nn} \cdots$

Agora, tomemos o número decimal $x := 0, b_0 b_1 b_2 \cdots \in (0, 1)$ definido como:

$$b_n := \begin{cases} 1, \text{ se} & a_{nn} = 2 \\ 2, \text{ se} & a_{nn} \neq 2 \end{cases}$$

por exemplo, vamos supor:

$f(0) = 0, 23794102\ldots$, $f(1) = 0, 44590138\ldots$, $f(2) = 0, 09218764\ldots$.

Então, $a_{00} = 2$; $a_{11} = 4$; $a_{22} = 2 \Rightarrow x = 0, b_0 b_1 b_2 \ldots = 0.121\ldots$.

Sabemos que cada número real tem uma representação *decimal única*, deduzimos que o número x não está na enumeração acima porque difere de todos os decimais definidos $(b_0 \neq a_{00}$; $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}, \ldots)$; ou seja, $x \in \mathbb{R}$; porém, $x \neq f(n)$; $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \notin Im(f)$.

Assim, não conseguimos enumerar todos os elementos do conjunto $(0, 1)$ o que nos leva a concluir que $\mathbb{R}$ é não-enumerável.

Conjuntos Não-Enumeráveis

Observação:

Na teoria dos conjuntos, a cardinalidade do conjunto $\mathbb{R}$ e dos conjuntos equivalentes é representada por $\mathbf{c}$:

$$|\mathbb{R}| = \mathbf{c} \Rightarrow |(0,1)| = \mathbf{c}.$$

Assim, a cardinalidade de qualquer intervalo aberto (a, b); $a, b \in \mathbb{R}$ é igual a $\mathbf{c}$ porque são equivalentes ao conjunto dos reais e, portanto, não são enumeráveis.
E ainda, $\mathbf{c} > \aleph_0$ logo,

$$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$$

$$|(a, b)| > |\mathbb{N}|$$

$$|\mathbb{I}| > |\mathbb{N}|$$

Exercícios - Conjuntos Enumeráveis e Não-enumeráveis

(1) Verifique se os conjuntos abaixo são enumeráveis ou não-enumeráveis. Em caso afirmativo, represente-os um para um em relação ao conjunto dos naturais, e, em caso negativo; justifique suas respostas.

(a) O conjunto dos inteiros múltiplos de 5.
(b) O conjunto dos inteiros pares negativos.
(c) O conjunto dos inteiros maiores do que ou iguais 100.
(d) O conjunto dos reais entre 0 e 2.
(e) O conjunto dos inteiros divisíveis por 2 e 3.

Exercícios - Conjuntos Enumeráveis e Não-enumeráveis

(2) Prove que o conjunto dos inteiros positivos ímpares é enumerável.

(3) Prove que o conjunto dos números irracionais não é enumerável.

(4) Sejam os conjuntos A e B. Mostre que se $A \subseteq B$ e A é não-enumerável então B é não-enumerável.

(5) Sejam os conjuntos A, B, C, D. Mostre que se A e B têm a mesma cardinalidade e C e D têm a mesma cardinalidade, então $A \times C$ e $B \times D$ têm a mesma cardinalidade.

Exercícios - Conjuntos Enumeráveis e Não-enumeráveis

(6) Seja A o conjunto dos inteiros maiores do que 20 e divisíveis ao mesmo tempo por 3 e 5. Então podemos afirmar que

(1) $\exists f$ bijetora, tal que $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow A$.

(2) A é ENUMERÁVEL pois $\exists g$ bijetora; tal que $g : \mathbb{N} \rightarrow A$.

(3) Seja B o conjunto dos inteiros divisíveis por 5.
B é ENUMERÁVEL então A é ENUMERÁVEL.

(4) Se A é um conjunto ENUMERÁVEL então
qualquer conjunto que contenha A é ENUMERÁVEL.

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas as afirmações (1) e (2) são corretas.
(b) Apenas as afirmações (3) e (4) são corretas.
(c) Apenas as afirmações (1), (2) e (3) são corretas.
(d) Apenas as afirmações (2), (3) e (4) são corretas.
(e) Nenhuma das alternativas anteriores.

Exercícios - Enumeráveis e não Enumeráveis

(7) Assinale a alternativa correta.

(a) A cardinalidade dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são iguais.

(b) Seja $A \neq \emptyset$ e $A \times A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Então, $A \times A$ pode não ser um conjunto enumerável.

(c) Sejam A, B e C conjuntos infinitos tais que $A \subset C$ e $B \subset C$.
Se A é enumerável e B é não enumerável então C é não enumerável.

Exercícios - Enumeráveis e não Enumeráveis

(8) Considerando as afirmações abaixo

(1) Se A e B são conjuntos enumeráveis então $A \times B$ também será enumerável.

(2) Se A e B são conjuntos enumeráveis então o conjunto $A \cup B$ é enumerável.

(3) Sejam A um conjunto infinito enumerável e B um conjunto infinito não enumerável.
Se definirmos a cardinalidade do conjunto dos naturais: $|\mathbb{N}| = \aleph_0$
então podemos afirmar que $|A| = \aleph_0$ e $|B| > \aleph_0$.

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas as afirmações (1) e (2) são corretas.
(b) Apenas as afirmações (1) e (3) são corretas.
(c) Apenas as afirmações (2) e (3) são corretas.
(d) Todas as afirmações (1), (2) e (3) são corretas.
(e) Nenhuma das alternativas anteriores.

Exercícios - Enumeráveis e não Enumeráveis

(9) Seja $f : \mathbb{N} \to A$; tal que,

$$f(n) = \begin{cases} 5n \; ; & \text{se } n \text{ é par} \\ -5(n+1) \; ; & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e seja $g : \mathbb{N} \to B$; tal que,

$$g(n) = \begin{cases} 2.n \; ; & \text{se } n \text{ é par} \\ -2(n+1) \; ; & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(1) A e B são conjuntos enumeráveis então a função gof é invertível.

(2) $(fog)(n) = (gof)(n); \forall n \in \mathbb{N}$.

(3) $(fog)(100) = (gof)(100) = 1000$.

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas as afirmações (1) e (2) são corretas.

(b) Apenas as afirmações (1) e (3) são corretas.

(c) Apenas as afirmações (2) e (3) são corretas.

(d) Todas as afirmações (1), (2) e (3) são corretas.

(e) Nenhuma das alternativas anteriores.

(1) (a) O conjunto dos inteiros múltiplos de 5. "ENUMERÁVEIS"

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5.k; \forall k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots \\ A: & 0 & -5 & 5 & -10 & 10 & -15 & 15 & -20 & 20 & \ldots \end{array}$$

Por definição, precisamos encontrar uma bijeção de $\mathbb{N}$ em A; assim,

$f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que,

$$f(n) = \begin{cases} 5.\frac{n}{2} \ ; & \text{se } n \text{ é par } (n = 2k; \forall k \in \mathbb{N}) \\ -5\frac{(n+1)}{2} \ ; & \text{se } n \text{ é ímpar } (n = 2k - 1; \forall k \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

(1) (b) O conjunto dos inteiros pares negativos. "ENUMERÁVEIS"

$A = \{x \in \mathbb{Z}^- \mid x = 2.k; \forall k \in \mathbb{Z}^-\}$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots \\ A: & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 & -12 & -14 & -16 & -18 & \ldots \end{array}$$

assim,

$f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que,

$f(n) = -2(n+1)$.

OBSERVAÇÃO: O conjunto é infinito, mas podemos identificar a imagem para um determinado valor de n, por exemplo,

$f(90) = -2(90+1) = -2(91) = -182$.

Exercícios - Enumeráveis e não Enumeráveis

(1) (c) O conjunto dos inteiros maiores do que ou iguais 100. "ENUMERÁVEIS"

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 100\}$

$$\begin{array}{cccccccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots \\ A: & 100 & 101 & 102 & 103 & 104 & 105 & 106 & 107 & 108 & \ldots \end{array}$$

assim,

$f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que,

$f(n) = n + 100.$

Exercícios - Enumeráveis e não Enumeráveis

(1)(d) O conjunto dos reais entre 0 e 2. "NÃO-ENUMERÁVEIS"

Vamos verificar se o conjunto $]0,2[\in \mathbb{R}$ é enumerável.
Começaremos utilizando o resultado da PROPOSIÇÃO.1:
"subconjuntos de conjuntos enumeráveis, são também enumeráveis".
Por esta proposição, se $]0,1[\in \mathbb{R}$ for enumerável então $]0,2[\in \mathbb{R}$ é enumerável.
Considerando que todos os números entre 0 e 1 podem ser representados do seguinte modo;
$f(n) := 0, a_{n0}a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots$
onde, $a_{ij} \in \{0,1,2,3,\cdots,9\}; \forall i,j \in \mathbb{N}$;
Agora, tomemos o número $x := 0, b_0b_1b_2\cdots \in]0,1[$ definido como:
$b_n := \begin{cases} 1, \text{ se } & a_{nn} = 2 \\ 2, \text{ se } & a_{nn} \neq 2 \end{cases}$ por exemplo, vamos supor:
$f(0) = 0,23794102\ldots$, $f(1) = 0,44590138\ldots$, $f(2) = 0,09218764\ldots$.
Então, $x = 0, b_0b_1b_2\ldots = 0.121\ldots$.
Considerando que cada número real tem uma representação *decimal única*, deduzimos que o número x não está na enumeração acima porque difere de todos os decimais definidos $(b_0 \neq a_{00}; b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, \ldots)$; ou seja, $x \in]0,1[$; porém, $x \neq f(n); \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \notin Im(f)$. Assim, não conseguimos enumerar os elementos do conjunto $]0,1[$. Logo, $]0,2[$ é não enumerável.

Exercícios - Enumeráveis e não Enumeráveis

(1) (e) O conjunto dos inteiros divisíveis por 2 e 3. "ENUMERÁVEIS"

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 6.k; \forall k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\
A: & 0 & -6 & 6 & -12 & 12 & -18 & 18 & -24 & 24 & \dots
\end{array}$$

assim,

$f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que,

$$f(n) = \begin{cases} 6.\frac{n}{2} \; ; & \text{se} \quad n \quad \text{é} \quad \text{par} \\ -6\frac{(n+1)}{2} \; ; & \text{se} \quad n \quad \text{é} \quad \text{ímpar} \end{cases}$$

(2) Prove que o conjunto dos inteiros positivos ímpares é enumerável.

$A = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x = 2k+1; \forall k \in \mathbb{Z}^+\}$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\
A: & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & \dots
\end{array}$$

assim,

$f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que,

$f(n) = 2n + 1$

Exercícios - Enumeráveis e não Enumeráveis

(3) Prove que o conjunto dos números irracionais não é enumerável.
$\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$. Então, vamos verificar se o conjunto dos reais é enumerável; visto que, pela Proposição.1 temos que subconjuntos de conjuntos enumeráveis, são também enumeráveis.
Todavia, pela Proposição.8 o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não-enumerável. Agora, resta verificar se o conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável.
De acordo com a "Diagonalização de Cantor", conseguimos enumerar todos os elementos do conjunto dos racionais fazendo uma bijeção com o conjunto dos naturais.

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
\mathbb{Q}: & 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 2 & -3 & 3 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots
\end{array}$$

Logo, por definição, o conjunto dos racionais é também enumerável. Consequentemente, o conjunto dos reais é não-enumerável devido ao conjunto dos irracionais ser não-enumerável.

Exercícios - Enumeráveis e não Enumeráveis

(4) Sejam os conjuntos A e B. Mostre que se $A \subseteq B$ e A é não-enumerável então B é não-enumerável.

D] Seja A um conjunto infinito não enumerável e $A \subseteq B$.
Vamos supor que B é um conjunto infinito enumerável.
Então, podemos enumerar os elementos de B com a sequência: $x_1, x_2, \ldots$.
Como A é subconjunto de B, os elementos de A é uma subsequência da sequência formada pelos elementos de B.
Todavia, A é não enumerável, ou seja, é impossível enumerar os elementos de A.
Portanto, B não pode ser enumerável.

Exercícios - Enumeráveis e não Enumeráveis

(5) Sejam os conjuntos A, B, C, D. Mostre que se A e B têm a mesma cardinalidade e C e D têm a mesma cardinalidade, então $A \times C$ e $B \times D$ têm a mesma cardinalidade.

D] Se A e B têm a mesma cardinalidade, então existe uma bijeção entre A e B:
$f : A \rightarrow B$.
Então;
$\forall a_1, a_2 \in A \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$; pois f é injetiva.
E; $\forall b \in B, \exists a \in A; f(a) = b$; pois f é sobrejetiva.
Do mesmo modo, se C e D têm a mesma cardinalidade, então existe uma bijeção entre C e D: $g : C \rightarrow D$.
$\forall c_1, c_2 \in C \Rightarrow g(c_1) = g(c_2) \Rightarrow c_1 = c_2$; pois g é injetiva.
E; $\forall d \in D, \exists c \in C; f(c) = d$; pois g é sobrejetiva.

Exercícios - Enumeráveis e não Enumeráveis

(5) D] (continuação)
Vamos definir uma função h:
$h : A \times C \rightarrow B \times D$
$h(a, c) = (f(a), g(c))$
(i) h é injetiva.
$h(a_1, c_1) = h(a_2, c_2) \Rightarrow (f(a_1), g(c_1)) = (f(a_2), g(c_2)) \Rightarrow f(a_1) = f(a_2)$ e $g(c_1) = g(c_2)$ o que é verdade pois f e g são injetivas.
(ii) h é sobrejetiva.
$\forall (b, d) \in B \times D \Rightarrow (b, d) = (f(a), g(c)) = h(a, c)$; pois, g e f são sobrejetivas $\Rightarrow \exists (a, c) \in A \times C$.
Portanto, por (i) e (ii) h é uma bijeção; e assim, $A \times C$ e $B \times D$ têm a mesma cardinalidade.

Exercícios - Enumeráveis e não Enumeráveis

(6) Seja A o conjunto dos inteiros maiores do que 20 e divisíveis ao mesmo tempo por 3 e 5. Então podemos afirmar que (RESPOSTA (c))

(1.) $\exists f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow A$ bijetora. (V)
$\mathbb{Z}_+$ é enumervél e $A \subset \mathbb{Z}_+$; logo, A também será enumerável e existe uma bijeção de A em $\mathbb{Z}_+$:
$f(z) = 15z + 15$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}_+ : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ A : & 30 & 45 & 60 & 75 & 90 & \dots \end{array}$$

(2.) A é ENUMERÁVEL pois $\exists g : \mathbb{N} \rightarrow A$ bijetora.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N} : & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ A : & 30 & 45 & 60 & 75 & 90 & \dots \end{array}$$

(3.) Seja B o conjunto dos inteiros divisíveis por 5. Se B é ENUMERÁVEL então A é ENUMERÁVEL. Sim pois $A \subset B$ (**Proposição.1**).

(4.) Se A é um conjunto enumerável então qualquer conjunto que contenha A também será enumerável. Não, pois $A \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Exercícios - Enumeráveis e não Enumeráveis

(7) RESPOSTA (c)

(a) A cardinalidade dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são iguais. (F)
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são conjuntos enumeráveis e, assim, possuem a mesma cardinalidade. Porém, $\mathbb{R}$ é um conjunto não-enumerável. A cardinalidade de $\mathbb{R}$ é maior que a dos outros conjuntos.

(b) Seja $A \neq \emptyset$ e $A \times A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Então, $A \times A$ pode não ser um conjunto enumerável. (F)

(c) Sejam A, B e C conjuntos infinitos tais que $A \subset C$ e $B \subset C$.
Se A é enumerável e B é não enumerável então C é não enumerável. (V)

Exercícios - Enumeráveis e não Enumeráveis

(8) RESPOSTA (d) Considerando as afirmações abaixo

(1) Se A e B são conjuntos enumeráveis então $A \times B$ também será enumerável. (V)

(2) Se A e B são conjuntos enumeráveis então o conjunto $A \cup B$ é enumerável. (V)

(3) Sejam A um conjunto infinito enumerável e B um conjunto infinito não enumerável. Se definirmos a cardinalidade do conjunto dos naturais: $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ então podemos afirmar que $|A| = \aleph_0$ e $|B| > \aleph_0$. (V)

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas as afirmações (1) e (2) são corretas. (F)

(b) Apenas as afirmações (1) e (3) são corretas. (F)

(c) Apenas as afirmações (2) e (3) são corretas. (F)

(d) Todas as afirmações (1), (2) e (3) são corretas. (V)

(e) Nenhuma das alternativas anteriores. (F)

Exercícios - Enumeráveis e não Enumeráveis

(9) RESPOSTA (b)

Seja $f : \mathbb{N} \to A$; $f(n) = \begin{cases} 5n\ ; & \text{se } n \text{ é par} \\ -5(n+1)\ ; & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

e seja $g : \mathbb{N} \to B$; tal que,

$$g(n) = \begin{cases} 2.n\ ; & \text{se } n \text{ é par} \\ -2(n+1)\ ; & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(1) A e B são conjuntos enumeráveis então a função gof é invertível. (V)

(2) $(fog)(n) = (gof)(n); \forall n \in \mathbb{N}$ (F).
vale a igualdade apenas para os naturais pares:
$(fog)(n) = (gof)(n) = 10n$

(3) $(fog)(100) = (gof)(100) = 1000.$ (V)
vale a igualdade apenas para os naturais pares:
$(fog)(100) = (gof)(100) = 10(100) = 1000$

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas as afirmações (1) e (2) são corretas. (F)
(b) Apenas as afirmações (1) e (3) são corretas. (V)
(c) Apenas as afirmações (2) e (3) são corretas. (F)
(d) Todas as afirmações (1), (2) e (3) são corretas. (F)
(e) Nenhuma das alternativas anteriores. (F)