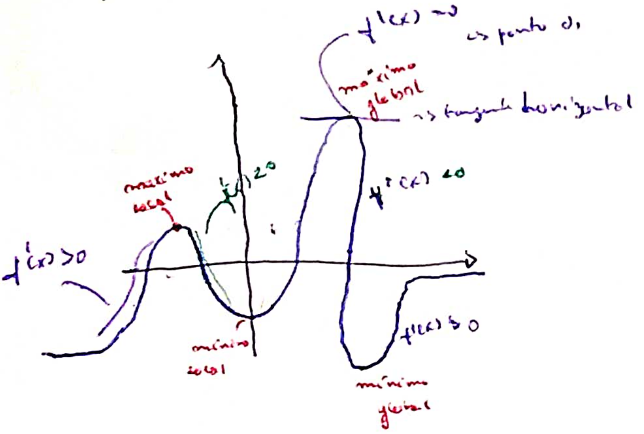
Máximos e mínimos de uma função!

Máximo:

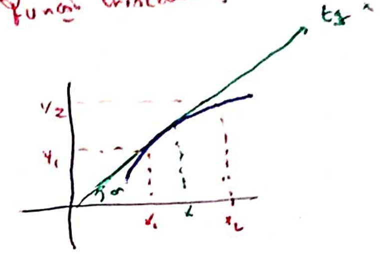
Df: Sejam f uma função, $A \subset D_f$ e $p \in A$. Dizemos que $f(p)$ é o valor máximo de f em A ou que p é o ponto de máximo se $f(x) \leq f(p)$ para todo x em A.

Mínimo:

Se $f(x) \geq f(p)$ para todo x em A, dizemos então que $f(p)$ é o valor mínimo de f em A ou que p é um ponto de mínimo de f em A



Função crescente?



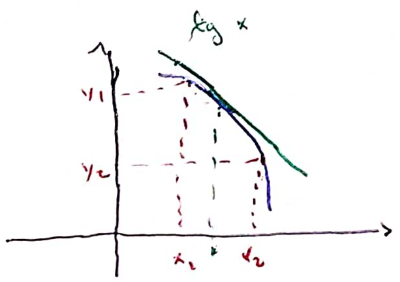
$f'(x) > 0$

Crescente

$x_2 > x_1$

$y_2 > y_1$

Função decrescente?



$f'(x) < 0$

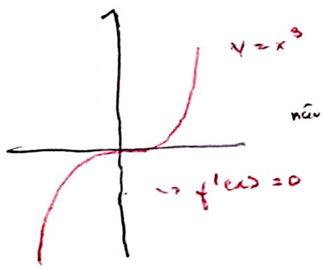
decrescente

$x_2 > x_1$

$y_2 < y_1$

Ponto crítico (candidatos a extremante)

$\boxed{\Leftrightarrow f'(c) = 0}$ ou $f'(c)$ não existe



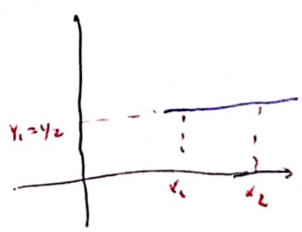
não há máximo, nem mínimo

→ moda!

Ponto de infle[xão]

→ concavidade do gráfico!

Constante



$\alpha = 0$

$tg\ \alpha = 0$

$f'(x) = 0$

$x_2 > x_1$

$y_2 = y_1$

Teorema: Considere $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivável

$p \in (a,b)$ é extremante $\Rightarrow$ p é crítico

$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \sim B \Rightarrow \sim A$

Logo: p não é crítico $\Rightarrow$ p não é extremante

Ponto extremante:

ponto extremante: notação para ponto de máximo e mínimo.

Seja $f:(a,b)$ ... derivável e $x_0 \in (a,b)$ ponto de máximo ou mínimo local da f. Então $f'(x_0)=0$.

Obs: relembre $x_0 \in (a,b)$ é o ponto máximo local se existe $\delta>0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$. Para todo $x \in I:(x_0-\delta, x_0+\delta)$

- $x_0 \in (a,b)$ é o ponto mínimo local se existe $\delta>0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in I:(x_0-\delta, x_0+\delta)$

TEOREMA: Suponha que $p \in (a,b)$ é ponto crítico para $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Suponha que f é duas vezes derivável em (a,b)

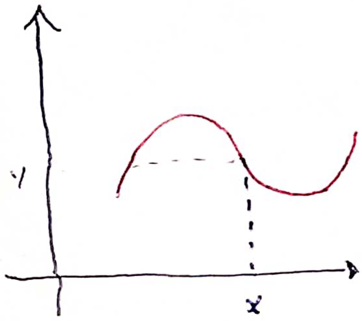
i) $f''(p)>0$ então p é ponto mínimo local para f.

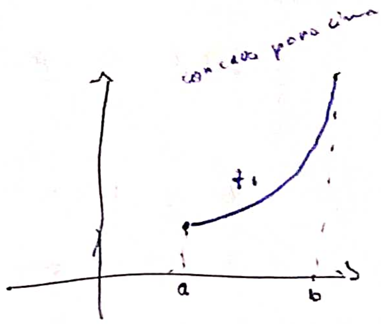
ii) Se $f''(p)<0$ então p é ponto de máximo local para f.

iii) Se $f''(p)=0$, nada podemos afirmar sobre o comportamento extremante de p para f.

Ponto de inflexão função polinomial!

ponto onde ocorre a inversão de concavidade.

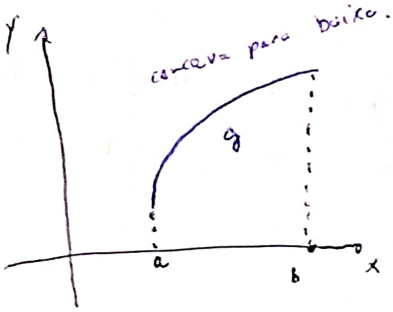




Para o estudo da concavidade utilizaremos $f''(x)$

→ $f''(x) = 0$ → ponto de inflexão

| para x em I



→ $f''(x) > 0$ → concavidade para cima

| para x em I

→ $f''(x) < 0$ → concavidade para baixo.

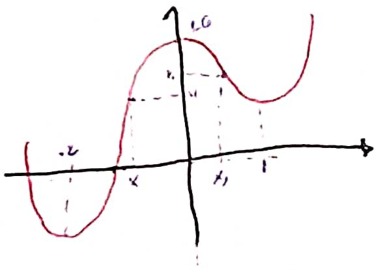
| para x em I

- note que f e g são crescentes porém possuem concavidades diferentes.

Ex.:

$f(t) = 3t^4 + 4t^3 - 12t^2 + 10$

Quais os pontos de inflexão dessa função?



$f'(t) = 12t^3 + 12t^2 - 24t$

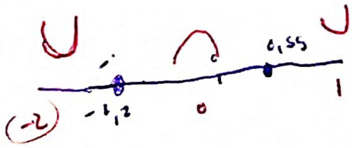
$f''(t) = 36t^2 + 24t - 24 \div 6$

$f''(t) = 6t^2 + 4t - 4 \div 2$

$f''(t) = 3t^2 + 2t - 2 \div 10$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $\frac{-2 + \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot -2}}{6} = \frac{-2 + \sqrt{28}}{6} = 0,55$

$= \frac{-2 - \sqrt{28}}{6} = -1,2$



$f''(-2) = 12 + (-4) - 2 = 6$

$f''(0) = -2$

$f''(1) = 3$

Aula

É válido ressaltar que a 2ª derivada também fornece informações interessantes sobre a geometria do gráfico de uma função.

Teorema: suponha que $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes derivável em I. Temos que:

1) Se $f''(t) > 0$ $\forall t \in (a,b)$, então f possui concavidade voltada para cima em (a,b)

2) Se $f''(t) < 0$ $\forall t \in (a,b)$, então f possui concavidade voltada para baixo em (a,b)

Ponto de inflexão

ocorre quando f'' muda de sinal ao passar por $p \in I$.

significado desse ponto para uma curva populacional, que tem um valor máximo.

Corolário

Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em intervalo (a,b), então $f - g$ é constante em (a,b), i.e. $f(x) = g(x) + c$, em que c é constante.

Se duas funções possuem derivadas iguais, não quer dizer que suas funções são iguais. Mas elas não poderiam ser muito diferentes. Essa diferença será exatamente uma constante $K \in \mathbb{R}$.

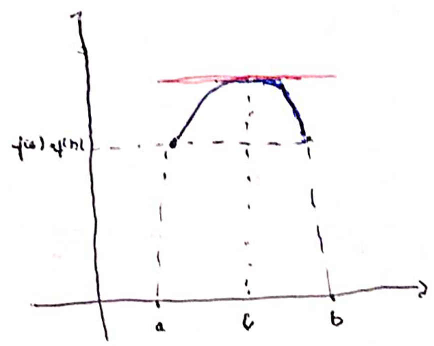
TEOREMA DE ROLLE

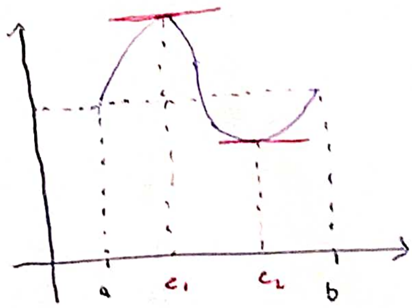
Seja f uma função satisfazendo hipóteses

1. f é contínua intervalo fechado $[a,b]$
2. f é derivável no intervalo aberto (a,b)
3. $f(a) = f(b)$

Então, existe número c em (a,b) tal que $f'(c) = 0$

Ex.:





Teorema do valor médio

Seja f uma função

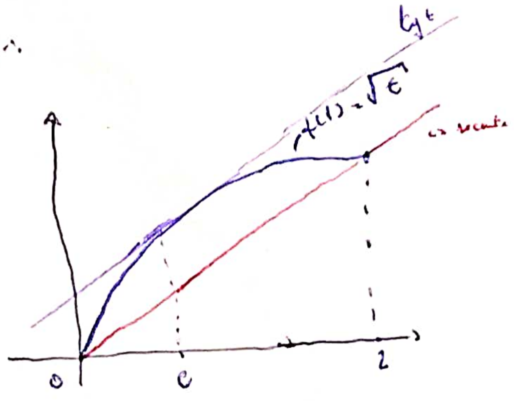
1. contínua no intervalo fechado $[a, b]$

2. f é derivável no intervalo aberto (a, b)

Então, existe número c em (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{ou} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Ex.



f é contínua em $[0, 2]$
é derivável em $(0, 2)$

$a = 0 \quad b = 2$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{0}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

1) Diga-me qual valor de $c \in (0, 2)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{2}}$$

Teorema:

Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a, b) então f é constante em (a, b)

$(a_1, b_1) \subset (a, b) \Rightarrow \exists\, c \in (a_1, b_1);\ f'(c)$

$$f'(c) = \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1}, \quad \text{Por hipótese } f'(c) = 0$$

logo: $f(b_1) - f(a_1) = 0 \Rightarrow f(b_1) = f(a_1) \Rightarrow \forall\, b_1, a_1 \in (a, b)$ .. logo f considerada é constante!

Assintotas:

Dizemos que uma curva γ é assíntota a uma reta r (em certo sentido) [se] a distância entre ambas convergir para zero.

Exemplo: $f(t) = e^{t}$, $y=0$

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0 \quad ; \quad \lim_{t \to +\infty} e^{t} = 0$$

Assíntotas horizontais

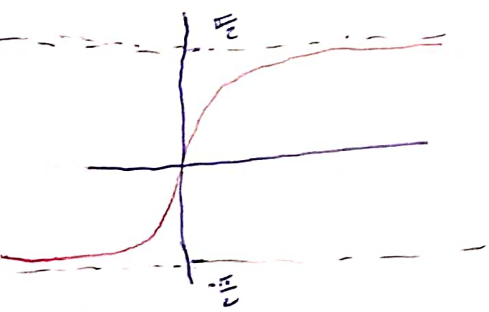
gráficos de funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Para isto basta existir $K \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = K \quad \text{ou} \quad \lim_{t \to -\infty} f(t) = K$$

Exemplo:

$f(t) = \operatorname{arctg}(t)$



$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{arctg}(t) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{t \to -\infty} \operatorname{arctg}(t) = -\frac{\pi}{2}$$

Obs: Pode haver retas assíntotas horizontais diferentes pela direita e pela esquerda. Pode haver inclusive assíntota horizontal em apenas um dos lados.

Assintotas verticais

Passos

a) encontrar "pontos de bordo" do domínio (restrições no domínio)

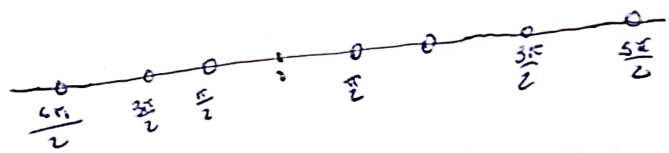
Ex. $f(t) = \sqrt{t}$ $\Rightarrow$ $D(f) = [0, +\infty)$

$t = 0$ é ponto de bordo do domínio

② $f(t) = \ln t$ $\Rightarrow$ $D(f) = (0, +\infty)$

$t = 0$ é ponto de bordo do domínio

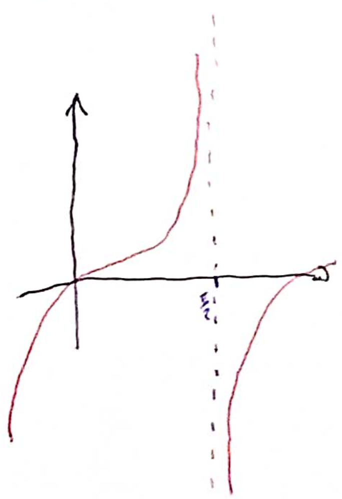
③ $f(t) = tg\, t$ $\Rightarrow$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{R} \}$



b) sendo p um ponto de bordo para o domínio f, basta calcular

$\lim\limits_{t \to p^+} f(t)$ e $\lim\limits_{t \to p^-} f(t)$

Ex: $f(t) = tg(t)$, $p = \frac{\pi}{2}$



$\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^+} f(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^-} f(t) = +\infty$