Uso das derivadas para esboçar gráficos de funções

Retas assíntotas:

Dizemos que uma curva γ é assintótica a uma reta r se (em um certo sentido) a distância entre ambas convergir para zero.

Exemplo: $f(t) = e^{-t}$, $y = 0$

$$\underbrace{\lim_{t \to +\infty} e^{-t} - 0}_{\text{distância entre o gráfico de } f \text{ e a reta } y=0.} = \lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$$

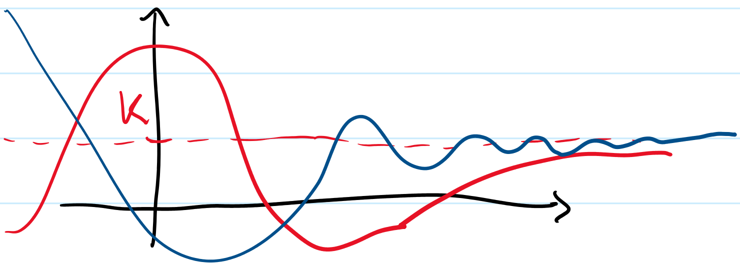
Como detectar assíntotas horizontais (para gráfico de funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$):

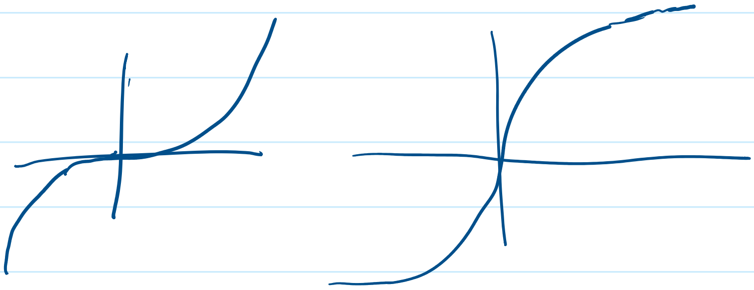
Para isto basta existir $K \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = K$$

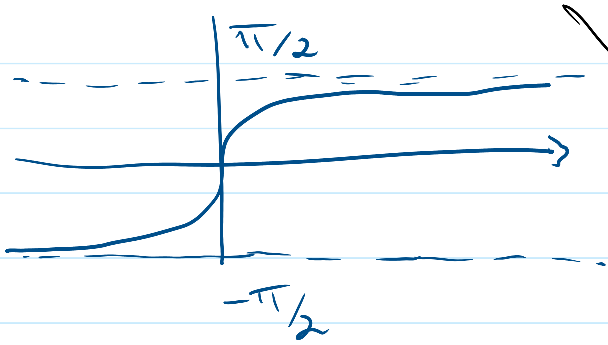
ou

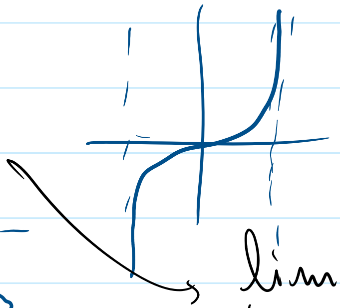
$$\lim_{t \to -\infty} f(t) = K.$$





$f(t) = \text{arctg}(t)$





$\lim_{t \to +\infty} \text{arctg}(t) = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{t \to -\infty} \text{arctg}(t) = -\frac{\pi}{2}$

Obs.: Pode have retas assíntotas horizontais diferentes pela direita e pela esquerda. Pode haver, inclusive, reta assíntota horizontal em apenas um dos lados.

Como detectar retas assíntotas verticais:

a) Encontrar "pontos de bordo" do domínio.

Ex.: 1) $f(t) = \sqrt{t} \Rightarrow D(f) = [0, +\infty)$

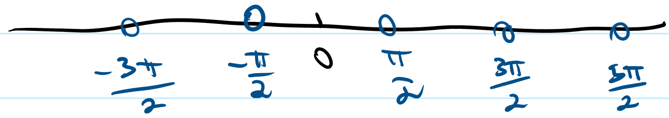
$\Rightarrow t = 0$ é ponto de bordo do domínio.

2) $f(t) = \ln t \Rightarrow D(f) = (0, +\infty)$

$\Rightarrow$ $t = 0$ é ponto de bordo do domínio.

3) $f(t) = tg(t) \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$\Rightarrow$

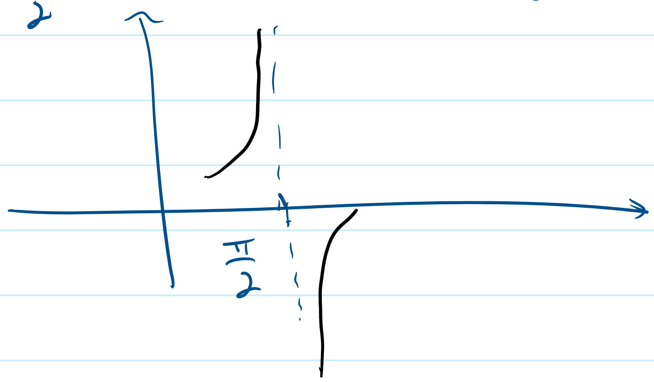


b) Sendo P um ponto de bordo para o domínio de f, basta calcularmos:

$$\lim_{t \to p^+} f(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t \to p^-} f(t).$$

Ex: $f(t) = tg(t)$, $p = \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^+} f(t) = -\infty, \quad \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} f(t) = +\infty$$



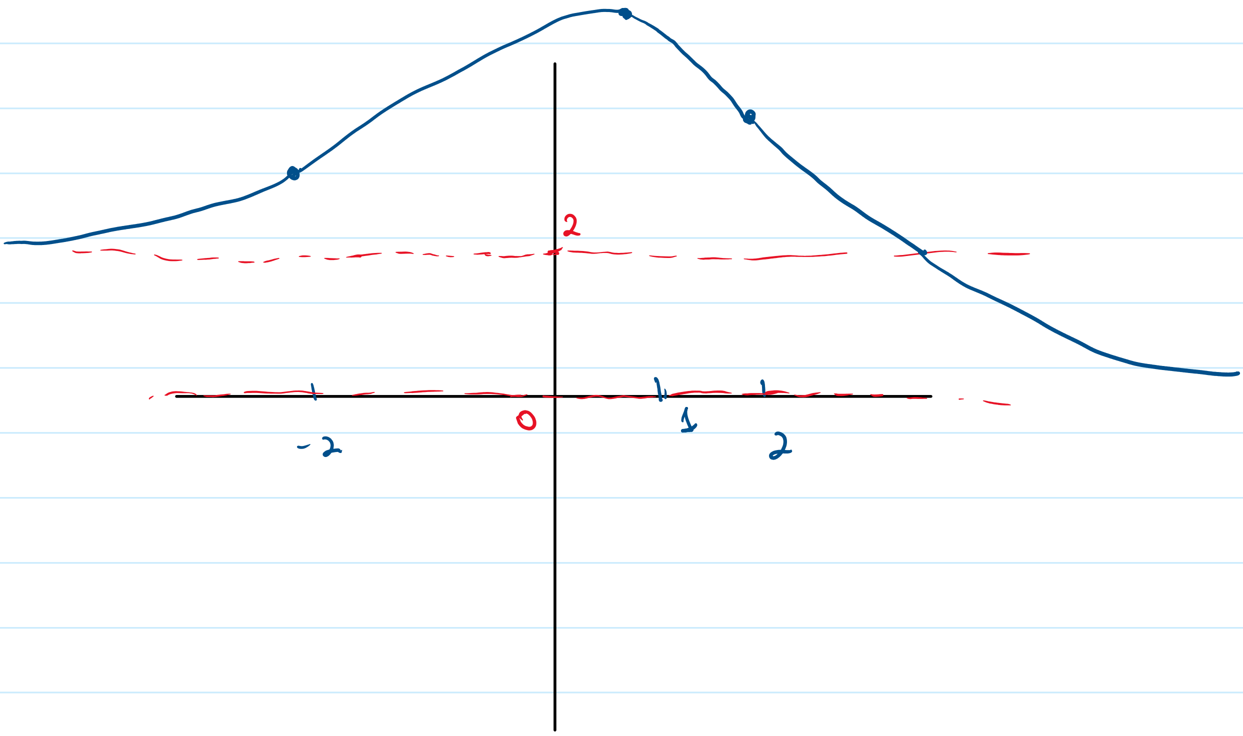
Exercício: Esboce um gráfico possível

Exercício: Esboce um gráfico possível de uma função f que satisfaça às seguintes condições:

(i) $f'(t) > 0$ em $(-\infty, 1)$, $f'(t) < 0$ em $(1, +\infty)$

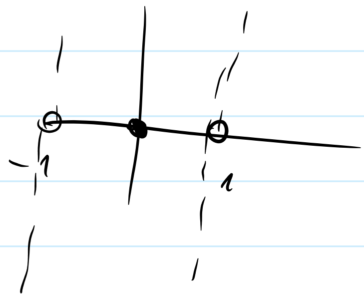
ii) $f''(t) > 0$ para $t \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ e $f''(t) < 0$ para $t \in (-2, 2)$.

iii) $\lim_{t \to -\infty} f(t) = 2$, $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.



Exercício: Esboce o gráfico de

$$f(t) = \frac{t^2}{t^2 - 1}$$



Resumo (Esboço de gráfico):

1) Determinar $D(f)$ e $Im(f)$.

2) Determinar interseções com os eixos coordenados:

Interseção com $O_y \Rightarrow t = 0$

→ Interseção com $O_t \Rightarrow y = 0$.

3) Determinar regiões de crescimento/decrescimento

4) Determinar pontos extremantes (globais e locais).

5) Determinar regiões com concavidade para cima / para baixo.

6) Determinar pontos de inflexão

7) Determinar retas assíntotas horizontais.

8) Determinar retas assíntotas verticais.