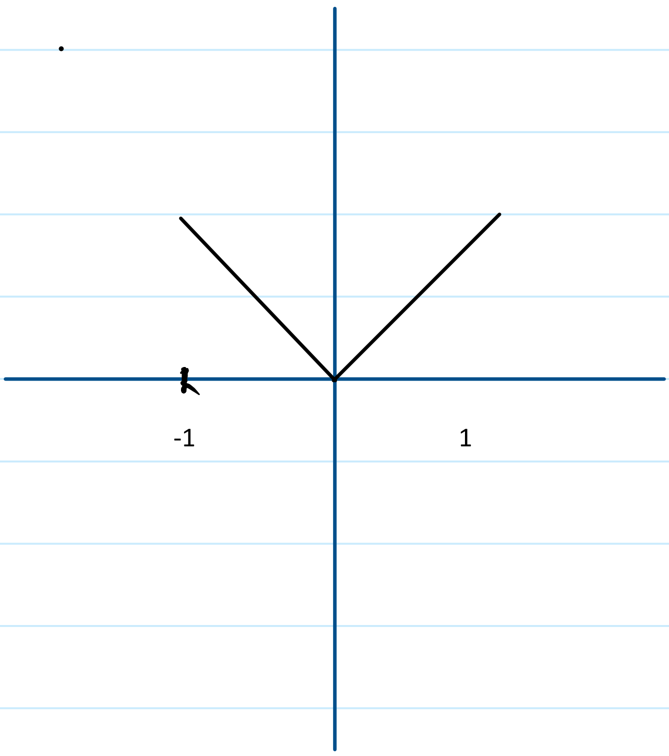
Problemas de otimização

Otimização - Estado ótimo de um sistema (valores máximos ou mínimos de funções que descrevem o sistema).

Relembrando:

Se p é ponto extremante de uma função f, contido no interior do domínio dessa função, e f é derivável em p, então p é ponto crítico. Uma vez detectados os pontos críticos da função, poderemos decidir se são pontos de máximo ou de mínimo (a nível local) usando a análise via segunda derivada.

Os casos inconclusivos provenientes da análise anterior deverão ser investigados individualmente.



$f: [-1,1] \to R$
$f(t) = |t|$

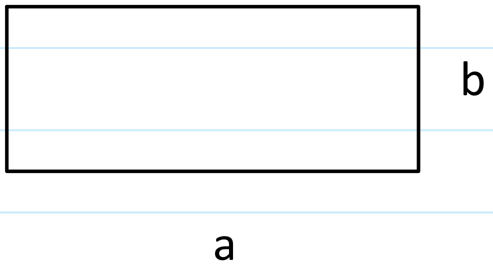
A função descrita acima possui 3 pontos extremantes, a saber: $t = -1, t = 0$ e $t = 1$. Mas nenhum deles poderá ser detectado pela análise via derivadas.

Veremos a seguir que o procedimento para lidar com problemas de otimização nesta disciplina seguirá um padrão que costuma se repetir com frequência. Basicamente, deveremos:

1. Identificar uma função que rege a situação descrita
2. Caso a função citada dependa de mais de uma variável (o que pode ocorrer em muitos casos), será necessário encontrar uma relação entre as variáveis apresentadas, de modo a termos uma função que dependa de apenas uma variável
3. Proceder com a detecção de pontos extremantes via análise das derivadas
4. Complementar, se necessário, com a análise de pontos que não foram detectados anteriormente (pontos de bordo do domínio ou pontos onde a função não é derivável)

Exemplos:

1) Determine as dimensões do retângulo com área máxima tal que o perímetro é fixado e vale $2p$.



Considerando um retângulo genérico como descrito acima, podemos afirmar que a função que descreve sua área é dada por:

$$A = A(a, b) = a \cdot b$$

Veja que podemos encontrar uma relação entre as duas variáveis acima por conta da restrição imposta no enunciado do problema:

$$2a + 2b = 2p$$
$$\Rightarrow a + b = p \Rightarrow a = p - b$$
$$\Rightarrow A(a, b) = A(b) = \left(p - b\right) \cdot b = pb - b^2$$

Façamos a análise dos extremantes via derivadas:
$A'(b) = 0 \Rightarrow p - 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{p}{2}$ (este é o único ponto crítico).
$A''\left(\frac{p}{2}\right) = -2$. Logo, concluímos que $b = \frac{p}{2}$ se trata de um ponto de máximo local.

Veja que para a função $A(b) = pb - b^2$ denotar a área de um retângulo, o domínio associado a ela deverá ser o intervalo $I = [0, p]$, pois fora desta região a função em questão se torna negativa. Isso ocasiona a existência de pontos de bordo do domínio para o problema considerado. Porém nesta situação isso não trará informações novas, já que uma simples inspeção permite concluir que os pontos de bordo são na verdade pontos de mínimo (global) para este problema.

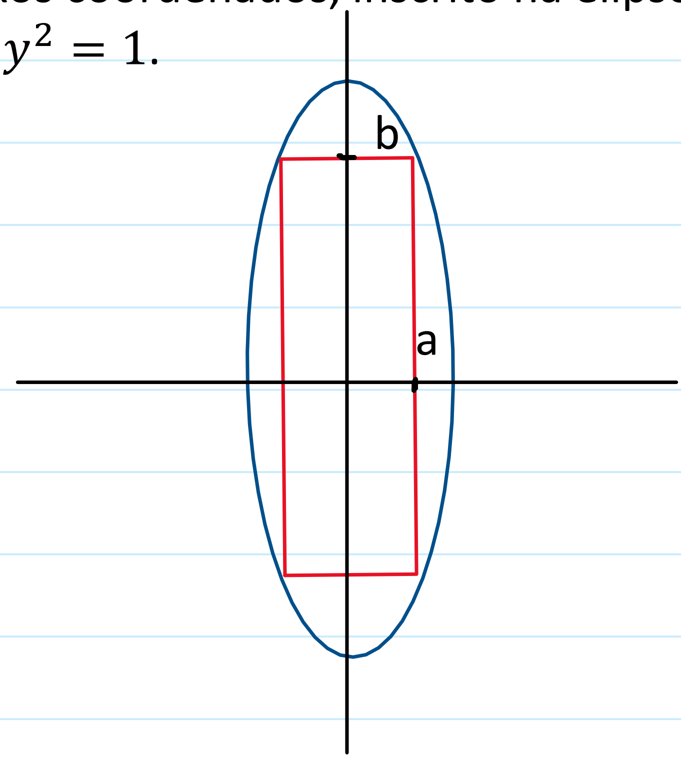
Conclusão

Para que o retângulo citado acima tenha a maior área possível, suas dimensões deverão ser:

$$b = \frac{p}{2}, a = p - b = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$$

Ou seja, o quadrado corresponde ao retângulo de maior área dentre os retângulos com um certo perímetro fixado.

2) Determine o retângulo de área máxima e lados paralelos aos eixos coordenados, inscrito na elipse de equação: $4t^2 + y^2 = 1$.



Veja que as coordenadas dos vértices do retângulo acima são: $(a, b), (a - b), (-a, -b)$ ou $(-a, b)$. Em qualquer desses casos, estamos tratando de pontos que também estão sobre a elipse. Portanto, teremos a seguinte relação entre a e b:

$$4a^2 + b^2 = 1$$

A área do retângulo em questão é dada por:
$$A(a, b) = 2a \cdot 2b = 4ab$$

Como $b = \pm\sqrt{1 - 4a^2}$, podemos escrever:
$$A(a, b) = A(a) = 4a \cdot \sqrt{1 - 4a^2}$$

Exercício: Finalizem este exemplo!