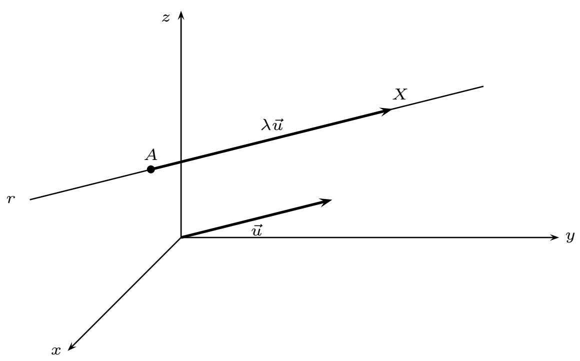
5 Estudo analítico de retas e planos

5.1 Equações de reta

Definição (Vetor diretor de uma reta): Qualquer vetor não-nulo paralelo a uma reta chama-se vetor diretor dessa reta.

5.1.1 Equação vetorial da reta

Sejam $\vec{u}$ um vetor diretor de uma reta r e A um ponto de r.



Um ponto X pertence a r se, e somente se, $\overrightarrow{AX}$ e $\vec{u}$ são paralelos, ou seja, se, e somente se, existe um número real λ tal que $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u}$. Isso equivale a

$$X = A + \lambda\vec{u}$$

Assim, a cada número real λ fica associado um ponto X de r e, reciprocamente, se X é um ponto de r, existe λ satisfazendo a equação. Esta equação se chama equação vetorial da reta r, ou equação vetorial da reta r na forma vetorial.

5.1.2 Equações paramétricas da reta

Suponhamos que $X = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{u} = (a, b, c)$. Escrevendo a equação vetorial em coordenadas, obtemos

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c)$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

Este sistema de equações é chamado sistema de equações paramétricas da reta r, ou sistema de equações da reta r na forma paramétrica.

5.1.3 Equações simétricas da reta

Se nenhuma das coordenadas do vetor diretor de r é nula, podemos isolar λ no primeiro membro de cada uma das equações do sistema de equações paramétricas.

$$\lambda = \frac{x - x_0}{a} \qquad \lambda = \frac{y - y_0}{b} \qquad \lambda = \frac{z - z_0}{c}$$

Portanto,

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

Este sistema de equações é chamado sistema de equações da reta r na forma simétrica.

5.1.4 Equações reduzidas da reta

Às equações simétricas da reta

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

pode-se dar outra forma, isolando duas variáveis e expressando-as em função da terceira.

Isolando y e z em função de x, temos:

$$\begin{cases} y = mx+n \\ z = px+q \end{cases}$$

que são chamadas equações reduzidas da reta r (na variável x). Podemos, ainda, dizer que esta é a equação de uma reta que passa por um ponto $A' = (0, n, p)$ e tem a direção do vetor $\vec{u}' = (1, m, p)$.

Isolando x e z em função de y, temos

$$\begin{cases} x = my+n \\ z = py+q \end{cases}$$

que são as equações reduzidas da reta r (na variável y). Podemos dizer que esta é a equação de uma reta que passa por um ponto $A' = (n, 0, p)$ e tem a direção do vetor $\vec{u}' = (m, 1, p)$.

Isolando x e y em função de z, temos

$$\begin{cases} x = mz+n \\ y = pz+q \end{cases}$$

que são as equações reduzidas da reta r (na variável z). Podemos dizer que esta é a equação de uma reta que passa por um ponto $A' = (n, p, 0)$ e tem a direção do vetor $\vec{u}' = (m, p, 1)$.

Exercício 5.1: Seja r a reta determinada pelos pontos $A = (1, 0, 1)$ e $B = (3, -2, 3)$.

a) Obtenha equações de r nas formas vetorial, paramétrica e simétrica.

b) Verifique se o ponto $P = (-9, 10, -9)$ pertence a r.

c) Obtenha dois vetores diretores de r e dois pontos de r, distintos de A e B.

Exercício 5.2: Mostre que as equações

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{1-y}{2} = z + 1$$

descrevem uma reta, escrevendo-as de modo que possam ser reconhecidas como equações na forma simétrica. Exiba um ponto e um vetor diretor da reta.

$\lambda = \frac{2x-1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{3\lambda}{2}$

$\lambda = \frac{1-y}{2} \Rightarrow y = 1 - 2\lambda$

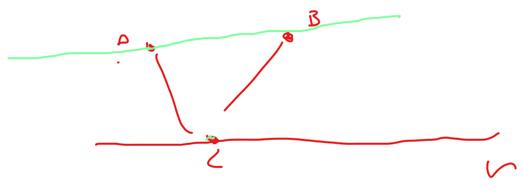
$\lambda = z+1 \Rightarrow z = -1 + \lambda$

$r: X = (\frac{1}{2}, 1, -1) + \lambda(\frac{3}{2}, -2, 2)$

ponto: $(\frac{1}{2}, 1, -1)$ diretor: $(\frac{3}{2}, -2, 2)$

Exercício 5.3: São dados os pontos $A = (0, 1, 8)$ e $B = (-3, 0, 9)$, e a reta $r : X = (1, 2, 0) + \lambda(1, 1, -3)$. Determine o ponto C de r tal que A, B e C sejam vértices de um triângulo retângulo.

$r: X = \underbrace{(1,2,0)}^{X} + \lambda(1,1,-3)$



$\vec{AB} = (-3, 1, 1)$

$\vec{AX} = (1, 1, 8)$

$\vec{BX} = (4, 0; 9)$

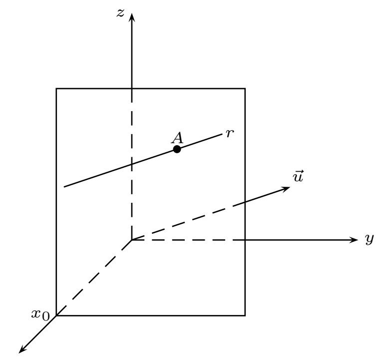
5.1.5 Retas paralelas aos planos e aos eixos coordenados

Se uma ou mais coordenadas do vetor $\vec{u}$ forem nulas, temos casos particulares de retas paralelas aos planos ou aos eixos coordenados:

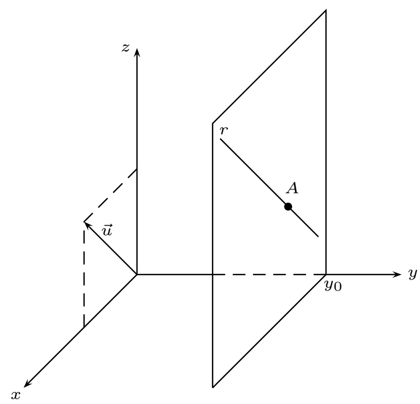
1º) Uma só das componentes de $\vec{u} = (a, b, c)$ *é nula*

Neste caso, o vetor $\vec{u}$ é ortogonal a um dos eixos coordenados e, portanto, a reta r é paralela ao plano dos outros eixos. Assim:

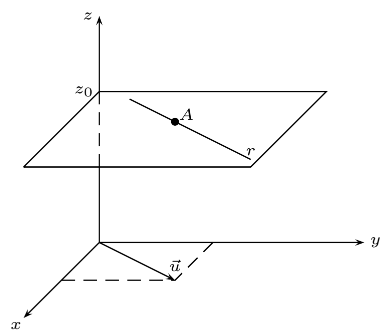
a) Se $a = 0$, $\vec{u} = (0, b, c) \perp Ox$, então $r \parallel yOz$



b) Se $b = 0$, $\vec{u} = (a, 0, c) \perp Oy$, então $r \parallel xOz$



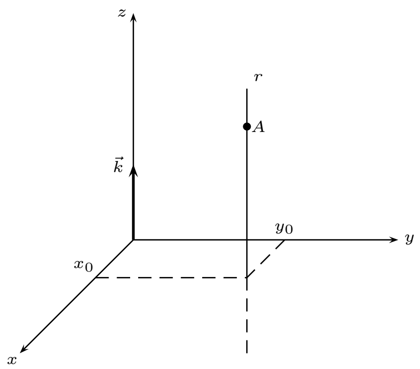
c) Se $c = 0$, $\vec{u} = (a, b, 0) \perp Oz$, então $r \parallel xOy$



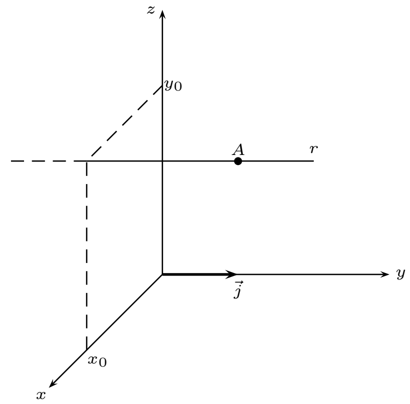
2º) Duas das componentes de $\vec{u} = (a, b, c)$ são nulas

Neste caso, o vetor $\vec{u}$ tem a direção de um dos vetores $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ou $\vec{k} = (0, 0, 1)$ e, portanto, a reta r é paralela ao eixo que tem a direção de $\vec{i}$ ou de $\vec{j}$ ou de $\vec{k}$. Assim:

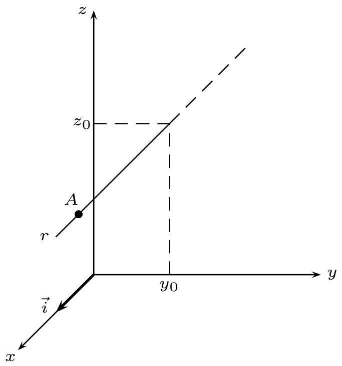
a) Se $a = b = 0$, $\vec{u} = (0, 0, c) \parallel \vec{k}$, então $r \parallel Oz$



b) Se $a = c = 0$, $\vec{u} = (0, b, 0) \parallel \vec{j}$, então $r \parallel Oy$



c) Se $b = c = 0$, $\vec{u} = (a, 0, 0) \parallel \vec{i}$, então $r \parallel Ox$



Observação: Os eixos Ox, Oy e Oz são retas particulares.

Eixo Ox : Reta que passa pela origem O e tem a direção do vetor $\vec{i}$.

Eixo Oy : Reta que passa pela origem O e tem a direção do vetor $\vec{j}$.

Eixo Oz : Reta que passa pela origem O e tem a direção do vetor $\vec{k}$.

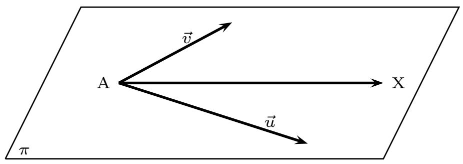
5.2 Equações de plano

Assim como um vetor não-nulo determina a direção de uma reta, um par de vetores não paralelos determina a direção de um plano. Estes vetores são chamados vetores diretores do plano.

Definição (Par de vetores diretores de um plano): Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não-nulos e não paralelos, e são paralelos a um plano π, o par $(\vec{u}, \vec{v})$ é chamado par de vetores diretores de π.

5.2.1 Equação vetorial do plano

Sejam A um ponto do plano π e $(\vec{u}, \vec{v})$ um par de vetores diretores de π.



Um ponto X pertence a π se, e somente se, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AX}$ são paralelos ao plano π, ou seja, existem números reais λ e μ tais que

$$\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

Isso equivale a

$$X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

Por meio desta igualdade fica associado, a cada par (λ, μ) de números reais, um ponto X do plano π. Reciprocamente, se X pertence a π, existem λ e μ satisfazendo a equação. Esta equação é chamada equação vetorial do plano π, ou equação do plano π na forma vetorial.

5.2.2 Equações paramétricas do plano

Suponhamos que $X = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (m, n, p)$. A equação vetorial do plano fica

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) + \mu(m, n, p)$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu m \\ y = y_0 + \lambda b + \mu n \\ z = z_0 + \lambda c + \mu p \end{cases}$$

Este sistema de equações é chamado sistema de equações paramétricas do plano π, ou sistema de equações do plano *pi* na forma paramétrica.

Exercício 5.4: Seja π o plano que contém o ponto $A = (3, 7, 1)$ e é paralelo a $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 0)$.

a) Obtenha duas equações vetoriais de π.

b) Obtenha equações paramétricas de π.

c) Verifique se o ponto $(1, 2, 2)$ pertence a π.

d) Verifique se o vetor $\vec{w} = (2, 2, 5)$ é paralelo a π.

Exercício 5.5:

a) Escreva uma equação vetorial do plano que tem equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 6 + \lambda + \mu \\ y = 1 + 7\lambda + 4\mu \\ z = 4 + 5\lambda + 5\mu \end{cases}$$

b) Obtenha três pontos não-colineares desse plano.

5.2.3 Equação geral do plano

Vamos apresentar agora uma forma de equação de plano que não depende de parâmetros: ela estabelece, diretamente, relações entre as coordenadas x, y e z dos pontos do plano, sem recorrer às variáveis auxiliares λ e μ.

Conhecendo um ponto e um par de vetores diretores do plano

Seja π o plano que contém o ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e tem vetores diretores $\vec{u} = (r, s, t)$ e $\vec{u} = (m, n, p)$. Sabemos que um ponto $X = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos a um mesmo plano, ou seja,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ r & s & t \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo este determinante pelos elementos da primeira linha, obtemos

$$\begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix} (x - x_0) - \begin{vmatrix} r & t \\ m & p \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix} (z - z_0)$$

e, introduzindo a notação

$$\begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix} = a \qquad -\begin{vmatrix} r & t \\ m & p \end{vmatrix} = b \qquad \begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix} = c \qquad -ax_0 - by_0 - cz_0 = d$$

podemos escrever aquela igualdade sob a forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

Um ponto X pertence a π se, e somente se, suas coordenadas satisfazem a esta equação, chamada equação geral do plano π, ou equação do plano π na forma geral.

Naturalmente, se $ax + by + cz + d = 0$ é equação geral de um plano, qualquer equação equivalente a ela também pode ser usada para descrever esse plano.

Exercício 5.6: Obtenha uma equação geral do plano π descrito em cada caso.

a) π contém o ponto $A = (9, -1, 10)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (0, 1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

b) π contém os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (2, 1, 2)$.

Exercício 5.7: Obtenha uma equação geral do plano que tem equações paramétricas

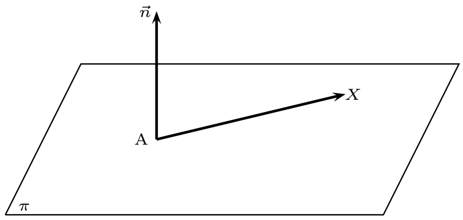
$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda - 3\mu \\ y = 1 + \lambda + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$$

Exercício 5.8: Obtenha equações paramétricas do plano $\pi : x + 2y - z - 1 = 0$.

Conhecendo um ponto e um vetor normal ao plano

Definição (Vetor normal a um plano): Dado um plano π, qualquer vetor não-nulo ortogonal a π é um vetor normal a π.

Seja $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertence a um plano π, e $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$ um vetor normal ao plano.



O ponto $X = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, $\overrightarrow{AX}$ é ortogonal a $\vec{n}$, isto é,

$$\begin{aligned}
\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} &= 0 \\
(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) &= 0 \\
a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\
ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 &= 0 \\
ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 &= 0
\end{aligned}$$

Se indicarmos por d a expressão $-ax_0 - by_0 - cz_0$, esta igualdade fica

$$ax + by + cz + d = 0$$

Esta é a equação geral do plano π.

Exercício 5.9: Obtenha uma equação geral do plano π que contém o ponto $A = (1, 0, 2)$, sabendo que $\vec{n} = (1, 1, 4$ é um vetor normal a π.

Exercício 5.10: Obtenha uma equação geral do plano π que contém o ponto $A = (9, -1, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (0, 1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

5.2.4 Planos Paralelos aos Eixos e aos Planos Coordenados

Quando uma ou duas componentes de $\vec{n}$ são nulas, ou quando $d = 0$, está-se em presença de casos particulares.

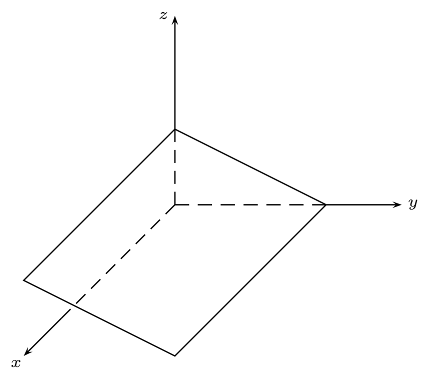
Planos que passam pela origem ($d = 0$)

$$ax + by + cz = 0$$

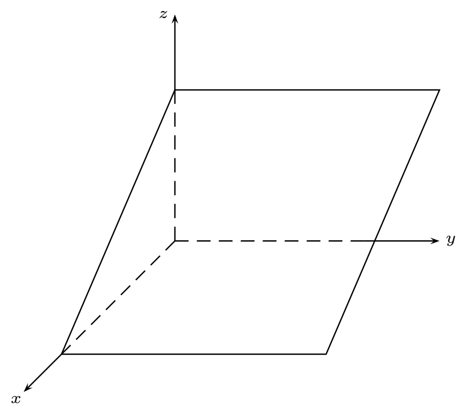
Planos paralelos aos eixos coordenados

Se apenas uma das componentes do vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é nula, o vetor é ortogonal a um dos eixos coordenados, e, portanto, o plano π é paralelo ao mesmo eixo:

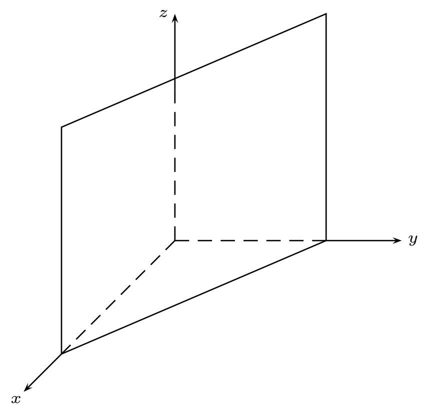
a) se $a = 0$, $\vec{n} = (0, b, c) \perp Ox \Rightarrow \pi \parallel Ox$



b) se $b = 0$, $\vec{n} = (a, 0, c) \perp Oy \Rightarrow \pi \parallel Oy$



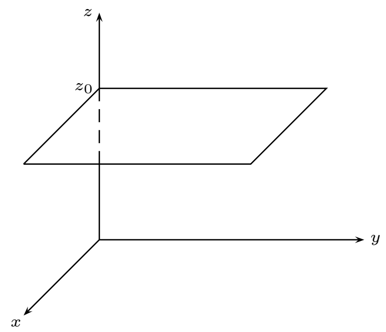
c) se $c = 0$, $\vec{n} = (a, b, 0) \perp Oz \Rightarrow \pi \parallel Oz$



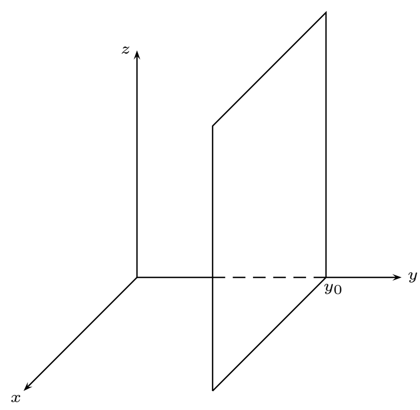
Planos paralelos aos planos coordenados

Se duas das componentes do vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é nula, $\vec{n}$ é paralelo a um dos vetores $\vec{i}$ ou $\vec{j}$ ou $\vec{k}$, e, portanto, o plano π é paralelo ao plano dos outros determinado pela origem e pelos outros dois vetores:

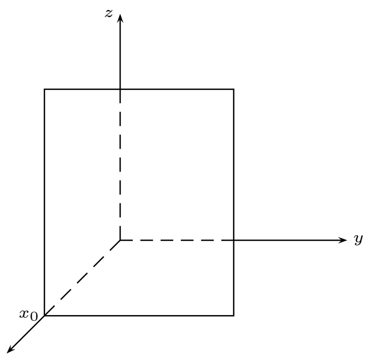
a) se $a = b = 0$, $\vec{n} = (0, 0, c) = c\vec{k} \Rightarrow \pi \parallel xOy$



b) se $a = c = 0$, $\vec{n} = (0, b, 0) = b\vec{j} \Rightarrow \pi \parallel xOz$



c) se $b = c = 0$, $\vec{n} = (a, 0, 0) = a\vec{i} \Rightarrow \pi \parallel yOz$



Observação: Os planos coordenados são planos particulares

Plano xOy : Plano que passa pela origem O e tem a direção dos vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ ($\vec{n} = \vec{k}$).

Plano xOz : Plano que passa pela origem O e tem a direção dos vetores $\vec{i}$ e $\vec{k}$ ($\vec{n} = \vec{j}$).

Plano yOz : Plano que passa pela origem O e tem a direção dos vetores $\vec{j}$ e $\vec{k}$ ($\vec{n} = \vec{i}$).

5.3 Interseção de retas e planos

5.3.1 Interseção de duas retas

Exercício 5.11: Dados os pontos $A = (1, 2, 1)$ e $B = (3, 0, -1)$, verifique se são concorrentes as retas AB e $r : X = (3, 0, -1) + \lambda(1, 1, 1)$. Se forem, obtenha o ponto de interseção.

Exercício 5.12: Verifique se as retas r e s são concorrentes e, se forem obtenha o ponto de interseção.

a) $r : \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ $\quad s : \begin{cases} x = 9 + 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$

b) $r : \begin{cases} x = -4\lambda \\ y = 1 + 8\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$ $\quad s : x - 1 = y - 4 = z$

c) $r : \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = z$ $\quad s : x = \frac{y}{3} = \frac{1+z}{2}$

d) $r: X = (3, -1, 2) + \lambda(-2, 3, 1)$ $\qquad s: X = (9, -10, -1) + \lambda(4, -6, -2)$

Exercício 5.13: Duas partículas realizam movimentos descritos pelas equações $X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 4)$ e $X = (1, 0, -2) + \lambda(-1, -1, -1)$, $t \in \mathbb{R}$. As trajetórias são concorrentes? Pode haver colisão das partículas em algum instante?

5.3.2 Interseção de reta e plano

Exercício 5.14: Obtenha a interseção da reta r com o plano π.

a) $r: X = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 3)$ $\qquad \pi: x + y + z = 20$

b) $r : X = (0, 1, 1) + \lambda(2, 1, -3) \qquad \pi : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 1)$

c) $r : \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{8} \qquad \pi : 2x + y - z - 6 = 0$

d) $r : X = (2, 3, 1) + \lambda(1, -1, 4) \qquad \pi : X = (-4, -6, 2) + \lambda(2, 1, 3) + \mu(3, 3, 2)$

5.3.3 Interseção de dois planos

Exercício 5.15: Determine a interseção dos planos π_1 e π_2:

a) $\pi_1 : x + 2y + 3z - 1 = 0 \qquad \pi_2 : x - y + 2z = 0$

b) $\pi_1 : x + y + z - 1 = 0 \qquad \pi_2 : x + y - z = 0$

c) $\pi_1 : x + y + z - 1 = 0 \qquad \pi_2 : 2x + 2y + 2z - 1 = 0$

d) $\pi_1 : x + y + z - 1 = 0 \qquad \pi_2 : 3x + 3y + 3z - 3 = 0$

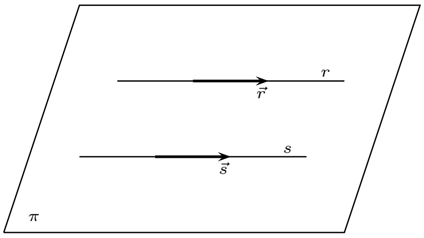
Exercício 5.16: Sendo $\pi_1 : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(-1, 0, 2)$ e $\pi_2 : X = (2, 0, -1) + \lambda(1, 2, 1) + \mu(0, 1, 1)$, mostre que $\pi_1 \cap \pi + 2$ é uma reta e obtenha uma equação vetorial para ela.

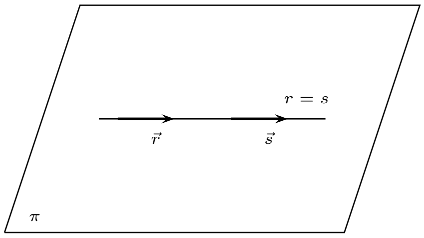
5.4 Posição relativa de retas e planos

5.4.1 Posição relativa de retas

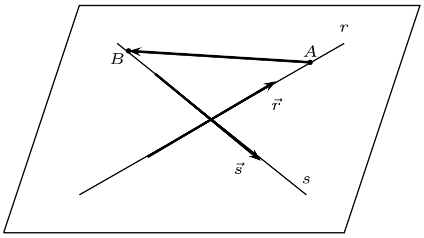
São quatro as possibilidades para duas retas r e s do espaço: serem reversas, concorrentes, paralelas distintas ou paralelas coincidentes. Sejam A um ponto e $\vec{r}$ um vetor diretor da reta r, e B um ponto e $\vec{s}$ um vetor diretor da reta s. As retas r e s podem ser:

- **Coplanares**: situadas no mesmo plano. Neste caso, podem ser:
  - **Paralelas** (distintas ou coincidentes): $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são paralelos.

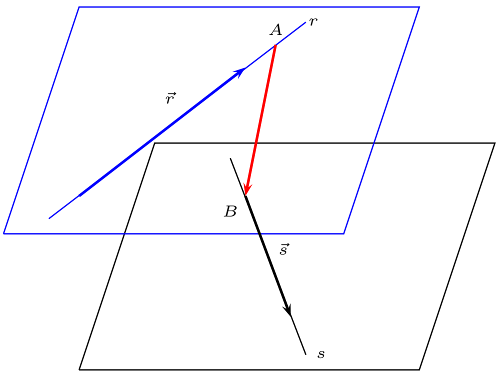




  - **Concorrentes**: $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$ são coplanares e $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são paralelos.



- **Reversas**: não situadas no mesmo plano. Nesse caso, $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$ não são coplanares.



Podemos estabelecer o seguinte roteiro para estudar a posição relativa de r e s.

- Se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são paralelos, r e s são paralelas. Para constatar se são distintas ou coincidentes, basta verificar se A pertence a s.

- Se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são paralelos, as retas não são paralelas, podendo ser concorrentes ou reversas. Se $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$ são coplanares, r e s são concorrentes; se $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$ não são coplanares, r e s são reversas.

Alternativamente, podemos basear-nos na interseção de r e s, que se obtém resolvendo o sistema formado pelas equações dessas retas. Se houver uma única solução, as retas são concorrentes. Se o sistema for indeterminado, então $r = s$. Se for incompatível, r e s paralelas distintas ou reversas, conforme os vetores diretores sejam paralelos ou não.

Exercício 5.17: Estude a posição relativa das retas $r : X = (1, 2, 3) + \lambda(0, 1, 3)$ e s, nos casos:

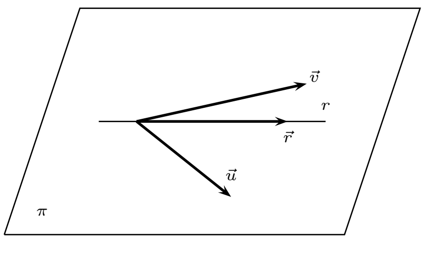
a) $s : X = (0, 1, 0) + \lambda(1, 1, 1)$

b) $x : X = (1, 3, 6) + \lambda(0, 2, 6)$

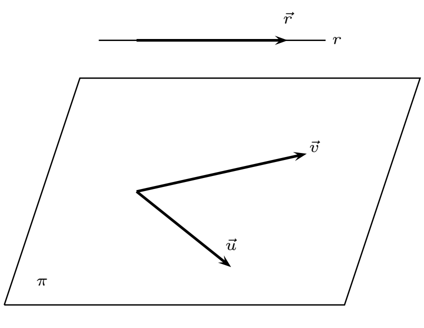
5.4.2 Posição relativa de reta e plano

Para uma reta r e um plano π, são três as possibilidades:

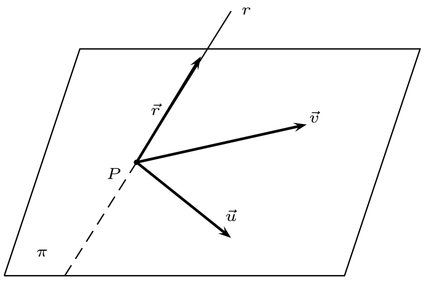
- **Reta contida no plano**: Para que r esteja contida em π é suficiente que dois de seus pontos, distintos, pertençam a π $(r \cap \pi = r)$.



- **Reta paralela ao plano**: Uma reta e um plano são paralelos quando não têm pontos comuns $(r \cap \pi = \emptyset)$.



- **Reta transversal ao plano**: A interseção de r e π reduz-se a um único ponto ($r \cap \pi = P$).



Para estudar a posição relativa de r e π, utilizaremos o seguinte fato básico: r é transversal a π se, e somente se, seu vetor diretor $\vec{r}$ não é paralelo a π. Equivalentemente, r é paralela a π (ou está contida em π) se, e somente se, $\vec{r}$ é paralelo a π.

Conhecendo os vetores diretores do plano

Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é um par de vetores diretores de π, podemos estudar a posição relativad de r e π seguindo o roteiro:

- Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{r}$ não são coplanares, r e π são transversais.
- Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{r}$ são coplanares, r e π não são transversais. Saberemos se r está contida em π ou se r e π são paralelos verificando se um ponto escolhido em r pertence ou não a π.

Conhecendo um vetor normal ao plano

Dados $\vec{r} = (m, n, p)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$ ($\vec{n} = (a, b, c)$) podemos adotar um roteiro alternativo:

- Se $\vec{r} \cdot \vec{n} \neq 0$, r e π são transversais.
- Se $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$, r e π não são transversais. Para esclarecer se r está contida em π ou é paralela a π, basta escolher um ponto de A de r e verificar se ele pertence a π.

Há também o método da interseção, que consiste em determinar $r \cap \pi$ e interpretar os resultados obtidos sob o ponto de vista da posição relativa.

Exercício 5.18: Estude a posição relativa de r e π:

a) $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \pi : x + y - z + 2 = 0$

b) $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(1, -1, 1) \qquad \pi : x + y - 2 = 0$

Exercício 5.19: Estude a posição relativa de r e π.

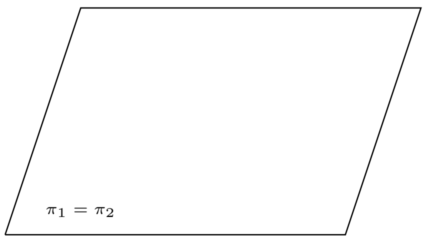
a) $r : X = (1, 1, 1) + \lambda(3, 2, 1) \qquad \pi : X = (1, 1, 3) + \lambda(1, -1, 1) + \mu(0, 1, 3)$

b) $r : X = (2, 2, 1) + \lambda(3, 3, 0) \qquad \pi : X = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(0, 0, 3)$

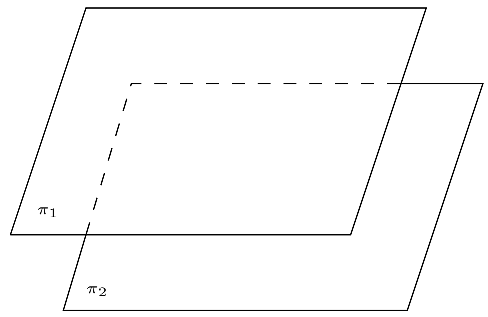
5.4.3 Posição relativa de planos

Sejam $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ dois planos quaisquer. Os vetores normais a π_1 e π_2 são, respectivamente, $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$. Os planos π_1 e π_2 podem ser:

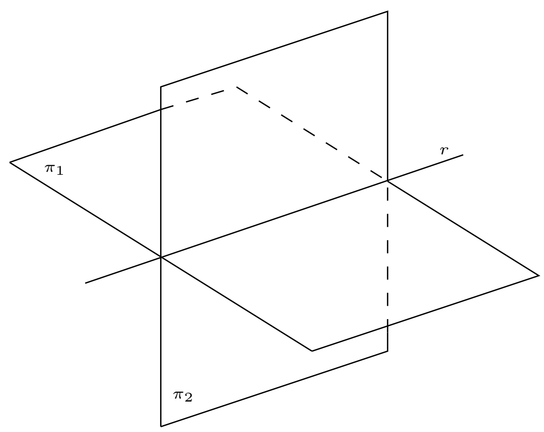
- **Paralelos:** π_1 e π_2 são paralelos se, e somente se, $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são paralelos. Nestas condições a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2 são proporcionais. Neste caso, π_1 e π_2 podem ser ainda:
  - **Paralelos Coincidentes**: Se d_1 e d_2 também seguem a mesma proporção. Neste caso, $\pi_1 = \pi_2$



- **Paralelos distintos:** Se d_1 e d_2 não seguem a mesma proporção. Neste caso, $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$.



- **Transversais:** Se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ não são paralelos. Neste caso, $\pi_1 \cap \pi_2 = r$.



Exercício 5.20: Estude a posição relativa dos planos π_1 e π_2:

a) $\pi_1 : 2x - y + z - 1 = 0 \qquad \pi_2 : 4x - 2y + 2z - 9 = 0$

b) $\pi_1 : x + 10y - z - 4 = 0 \qquad \pi_2 : 4x + 40y - 4z - 16 = 0$

Exercício 5.21: Estude a posição relativa dos planos

$$\pi_1 : X = (0,0,0) + \lambda(1,0,1) + \mu(-1,0,3) \qquad \pi_2 : X = (1,0,1) + \lambda(1,1,1) + \mu(0,1,0)$$

5.5 Perpendicularidade e ortogonalidade

5.5.1 Perpendicularidade e ortogonalidade entre retas

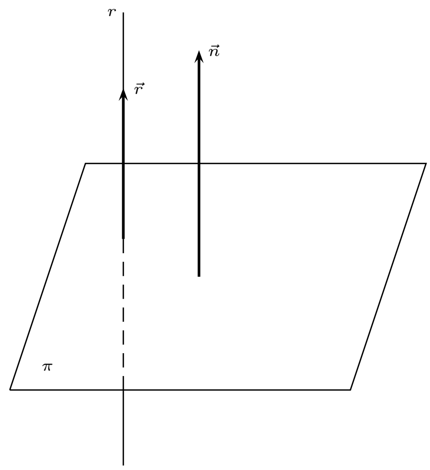
A diferença entre os termos retas ortogonais e retas perpendiculares é que duas retas ortogonais podem ser concorrentes ou reversas e duas retas perpendiculares são obrigatoriamente concorrentes. Assim, o segundo é um caso particular do primeiro. Naturalmente, duas retas são ortogonais se, se somente se, cada vetor diretor de uma é ortogonal a qualquer vetor de outra.

Exercício 5.22: Verifique se as retas $r : X = (1, 1, 1) + \lambda(2, 1, -3)$ e $s : X = (0, 1, 0) + \lambda(-1, 2, 0)$ são ortogonais. Caso sejam, verifique se são perpendiculares.

Exercício 5.23: Obtenha equações paramétricas da reta s que contém o ponto $P = (-1, 3, 1)$ e é perpendicular a $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z$.

5.5.2 Perpendicularidade entre reta e plano

Se $\vec{n}$ é um vetor normal ao plano π e $\vec{r}$ é um vetor diretor da reta r, então r e π são perpendiculares se, e somente se, $\vec{r}$ e $\vec{n}$ são paralelos.



Exercício 5.24: Verifique se a reta r e o plano π são perpendiculares.

$$r : X = (0,1,0) + \lambda(1,1,3) \qquad \pi : X = (3,4,5) + \lambda(6,7,8) + \mu(0,10,11)$$

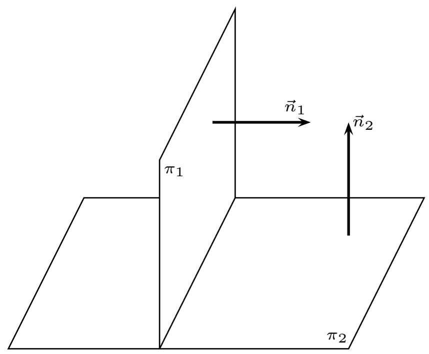
Exercício 5.25:

a) Obtenha equações na forma simétrica da reta r que contém o ponto $P = (-1,3,5)$ e é perpendicular ao plano $\pi : x - y + 2z - 1 = 0$.

b) Escreva uma equação geral do plano π que contém a origem e é perpendicular à reta $r : X = (1,1,0) + \lambda(2,3,7)$.

5.5.3 Perpendicularidade entre planos

Se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são vetores normais aos planos π_1 e π_2, então os planos são perpendiculares se, e somente se, $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são ortogonais, isto é, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.



Exercício 5.26: Verifique se $\pi_1 : X = (0,0,1) + \lambda(1,0,1) + \mu(-1,-1,1)$ e $\pi_2 : 2x - 7y + 16z - 40 = 0$ são perpendiculares.

5.6 Medida angular

5.6.1 Medida angular entre retas

Sejam r e s duas retas, $\vec{r}$ um vetor diretor de r e $\vec{s}$ um vetor diretor de s. A medida angular entre r e s é a medida angular entre os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$, se esta pertence ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, e é a medida angular entre $\vec{r}$ e $-\vec{s}$ se pertence a $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Indica-se por $\text{ang}(r, s)$.

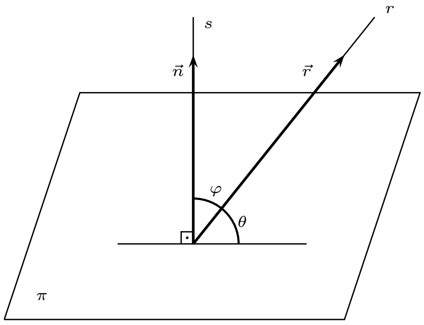
Pela definição, sendo θ a medida angular entre as retas r e s e sendo φ a medida angular entre os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$, temos

$$\cos\theta = |\cos\varphi| = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{s}\|}$$

Exercício 5.27: O lado BC de um triângulo equilátero está contido na reta $r : X = (0,0,0) + \lambda(0,1,-1)$, e seu vértice oposto é $A = (1,1,0)$. Determine B e C.

5.6.2 Medida angular entre reta e plano

Sejam r uma reta e π um plano. A medida angular entre r e π é $\frac{\pi}{2} - \text{ang}(r, s)$, sendo s uma reta qualquer, perpendicular a π. Indica-se pelo símbolo $\text{ang}(r, \pi)$.



Sejam $\vec{r}$ um vetor diretor de r, $\vec{n}$ um vetor normal a π, $\varphi = \text{ang}(r, s)$ e $\theta = \text{ang}(r, \pi)$. Lembrando que $\vec{n}$ é um vetor diretor de s, podemos escrever

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{r}|}{\|\vec{n}\| \, \|\vec{r}\|}$$

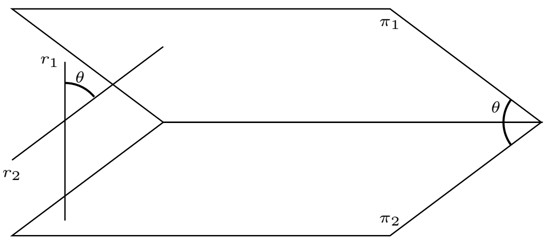
Pela definição, $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$; logo, $\cos\varphi = \text{sen}\,\theta$ e, portanto,

$$\text{sen}\,\theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{r}|}{\|\vec{n}\| \, \|\vec{r}\|}$$

Exercício 5.28: Obtenha a medida angular entre a reta $r : X = (0, 1, 0) + \lambda(-1, -1, 0)$ e o plano $\pi : y + z - 10 = 0$.

5.6.3 Medida angular entre planos

A medida angular entre os planos π_1 e π_2, indicada por $\text{ang}(\pi_1, \pi_2)$, é a medida angular θ entre duas retas quaisquer r_1 e r_2, respectivamente perpendiculares a π_1 e π_2.



Se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são, respectivamente, vetores normais a π_1 e π_2 respectivamente, então $\vec{n}_1$ é um vetor diretor de r_1 e $\vec{n}_2$ é um vetor diretor de r_2:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \, \|\vec{n}_2\|}$$

Exercício 5.29: Sendo $\pi_1 : x-y+z = 20$ e $\pi_2 : X = (1,1,-2)+\lambda(0,-1,1)+\mu(1,-3,2)$, calcule $\operatorname{ang}(\pi_1, \pi_2)$.

5.7 Distância

5.7.1 Distância entre pontos

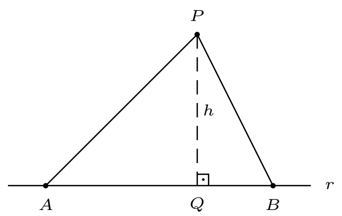
Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$. A distância $d(A, B)$ entre A e B é $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|$, ou seja,

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 +}$$

Exercício 5.30: Calcular a distância entre os pontos $P_1 = (7,3,4)$ e $P_2 = (1,0,6)$.

5.7.2 Distância de ponto a reta

Sejam A e B dois pontos quaisquer de r, distintos.



A área do triângulo ABP é $\frac{\|\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{AB}\|}{2}$; logo, se h é a altura relativa ao vértice P, então $\frac{\|\overrightarrow{AB}\|h}{2} = \frac{\|\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{AB}\|}{2}$ e, como $h = d(P, r)$,

$$d(P,r) = \frac{\left\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$$

Indicando por $\vec{r}$ o vetor $\overrightarrow{AB}$, que é um vetor diretor de r, obtemos

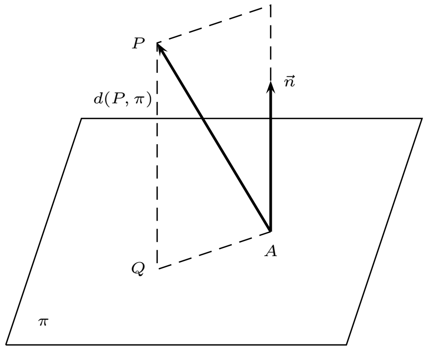
$$d(P,r) = \frac{\left\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{r}\right\|}{\|\vec{r}\|}$$

em que $\vec{r}$ é um vetor diretor e A é um ponto de r, ambos escolhidos arbitrariamente.

Exercício 5.31: Calcule a distância de $P = (1, 1, -1)$ à interseção de $\pi_1 : x - y = 1$ e $\pi_2 : x + y - z = 0$.

5.7.3 Distância de ponto a plano

Para calcular a distância $d(P, \pi)$ do ponto P ao plano π, basta escolher um ponto A de π e um vetor $\vec{n}$, normal a π, e calcular a norma da projeção ortogonal de $\overrightarrow{AP}$ sobre $\vec{n}$.



$$\left\|\mathrm{proj}_{\vec{n}}\, \overrightarrow{AP}\right\| = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$$

Logo,

$$d(P,\pi) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$$

Suponhamos que $P = (x_0, y_0, z_0)$, $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$. Então, $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal a π, e vale a relação $ax_1 + by_1 + cz_1 = -d$, pois A pertence a π. Portanto,

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} & = & a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) \\ \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} & = & ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + cz_1) \\ \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} & = & ax_0 + by_0 + cz_0 + d \end{array}$$

Desse modo, a distância do ponto P ao plano π fica

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exercício 5.32: Calcule a distância do ponto P ao plano π.

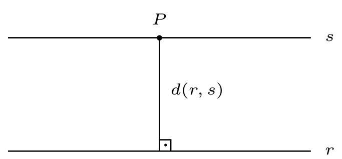
a) $P = (1, 2, -1)$ $\quad \pi : 3x - 4y - 5z + 1 = 0$

b) $P = (1, 3, 4)$ $\quad \pi : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(-1, 0, 3)$

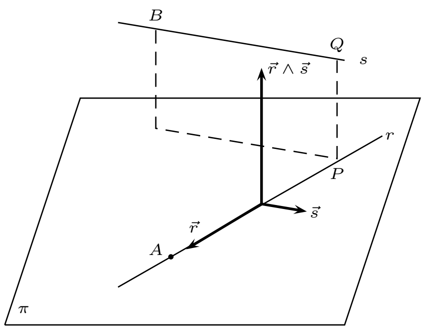
5.7.4 Distância entre retas

Para calcular a distância $d(r, s)$ entre as retas r e s, vamos considerar separadamente três casos:

- **Retas Paralelas**: Neste caso, escolhemos um ponto qualquer de uma das retas e calculamos a sua distância à outra reta.



- **Retas Concorrentes**: Neste caso, $d(r, s) = 0$, pois $r \cap s = \emptyset$. No entanto, vale para as retas concorrentes a fórmula para distância de retas reversas dada abaixo.
- **Retas Reversas**: Observe a figura:



Existe um único plano π que contém r e é paralelo a s; se B é um ponto qualquer de s, então $d(r, s) = d(B, \pi)$.

Um vetor normal a π é $\vec{r} \wedge \vec{s}$; escolhendo um ponto A qualquer de r e aplicando a fórmula da distância de ponto a plano para calcular $d(B, \pi)$, obtemos

$$d(r, s) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot r \wedge \vec{s}\right|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|}$$

Observação: Não é necessário estudar a posição relativa das retas r e s antes de calcular sua distância. Para aplicar a fórmula acima é necessário, de qualquer modo, calcular $\vec{r} \wedge \vec{s}$. Se $\vec{r} \wedge \vec{s} \neq \vec{0}$, podemos aplicar a fórmula acima; caso contrário, se $\vec{r} \wedge \vec{s} = \vec{0}$, as retas são paralelas, e então calculamos a distância de um ponto qualquer de uma delas à outra.

Exercício 5.33: Calcular a distância entre as retas

$$r : \begin{cases} y = -2x + 3 \\ z = 2x \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = -3 - 4\lambda \end{cases}$$

5.7.5 Distância entre reta e plano

Para calcular a distância entre uma reta r e um plano π, escolhemos um vetor diretor $\vec{r}$ da reta e um vetor normal $\vec{n}$ ao plano, calculamos $\vec{r} \cdot \vec{n}$, e então:

- Se $\vec{r} \cdot \vec{n} \neq 0$, r é transversal a π e, portanto, $r \cap \pi = \emptyset$. Neste caso, $d(r, \pi) = 0$.
- Se $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$, podemos ter
  - r está contida em π, e $d(r, \pi) = 0$.
  - r é paralela a π e $d(r, \pi)$ é a distância de um ponto qualquer de r ao plano.

5.7.6 Distância entre planos

Para calcular a distância entre dois planos π_1 e π_2, analisamos inicialmente o paralelismo entre seus vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$.

- Se $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ não são paralelos, então π_1 e π_2 são transversais e sua interseção é não-vazia. Logo, $d(\pi_1, \pi_2) = 0$.
- Se $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ são paralelos, então π_1 e π_2 são paralelos e $d(\pi_1, \pi_2)$ é a distância de um ponto qualquer de um deles ao outro.

Exercício 5.34: Calcular a distância entre os planos

$$\pi_1 : 2x - 2y + z - 5 = 0 \qquad \text{e} \qquad \pi_2 : 4x - 4y + 2z + 14 = 0$$

Referências

CAMARGO, I.; BOULOS, P. **Geometria Analítica**: um tratamento vetorial. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

STEINBRUCH, A; WINTERLE, P. **Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1987.