Máximos e mínimos - Parte II

Definição: Dizemos que uma função

monotonamente

$f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é crescente num interva-

(decrescente)

lo $(a,b) \subset I$ se:

$\forall\, t_1, t_2 \in (a,b)$ tem-se:

$$t_1 \leq t_2 \Rightarrow f(t_1) \leq f(t_2)$$

$$f(t_1) \geq f(t_2)$$

Obs.: f é estritamente crescente em (a,b) se:

$\forall\, t_1, t_2 \in (a,b)$:

$$t_1 < t_2 \Rightarrow f(t_1) < f(t_2).$$

$$f(t_1) > f(t_2)$$

Ex.: Mostre que $f(t) = \frac{1}{t}$ é estritamente decrescente em $\mathbb{R}_+^*$:

Considere $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+^*$ quaisquer, sendo $t_1 < t_2$.

sendo $t_1 < t_2$.

Logo: $1 < \dfrac{t_2}{t_1}$ e também $\dfrac{1}{t_2} < \dfrac{1}{t_1}$

Portanto: $f(t_2) < f(t_1)$.

Ou seja: $t_1 < t_2 \Rightarrow f(t_2) < f(t_1)$

$\Rightarrow$ f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}_+^*$.

Ex.: Demonstre que $f(t) = \ln t$ é crescente (estritamente):

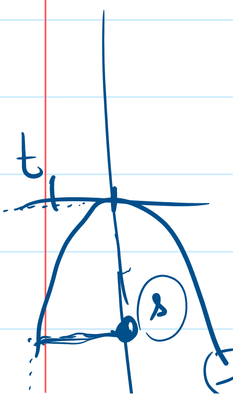
Considere $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+^*$ quaisquer, sendo $t_1 < t_2$.

Obs.: $t_1 < t_2 \xRightarrow{a > 1} \log_a t_1 < \log_a t_2$

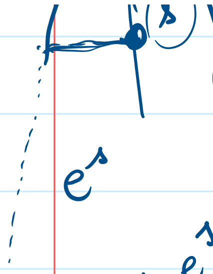
Como $\ln t = \log_e t$, $e > 1$,

concluímos que

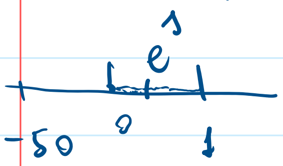
$t_1 < t_2 \Rightarrow \ln t_1 < \ln t_2$



Ex.: $f(t) = e^{-t^2}$ é crescente

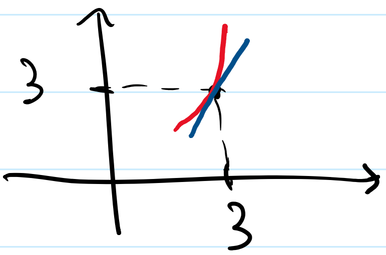


Ex: $f(t) = e^{-t^2}$ é crescente em qual intervalo?

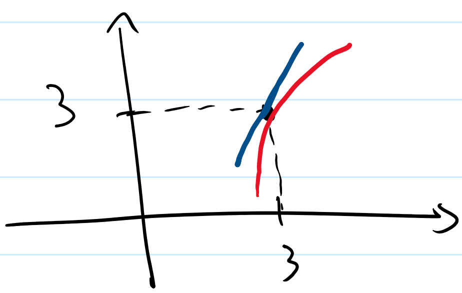


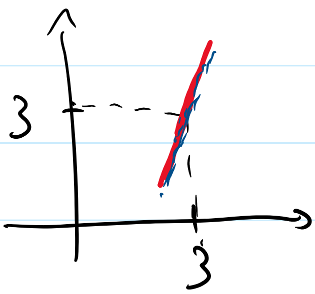
Ex: Qual a região de crescimento de $f(t) = \dfrac{e^{-\sin(t^2+1)}}{\ln(t^2+1) + \frac{tg(e^t)}{2}}$

LEMBRETE: O valor numérico de $f'(t_0)$ corresponde à inclinação (tangente do ângulo de inclinação) da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(t_0, f(t_0))$.



$f'(3) = 2$





Vemos que há uma relação entre o sinal da derivada de uma função e o comportamento de crescimento/decrescimento da mesma:

Teorema: Suponha que $f: I \to \mathbb{R}$ é derivável.

1) Se $f'(t) \geq 0, \forall t \in (a,b) \subset I$, então f é (monotonamente) crescente em (a,b).

2) Se $f'(t) \leq 0, \forall t \in (a,b) \subset I$, então f é (monotonamente) decrescente em (a,b).

Exemplos: Determine as regiões de crescimento / decrescimento para:

1) $f(t) = e^{-t^2}$.

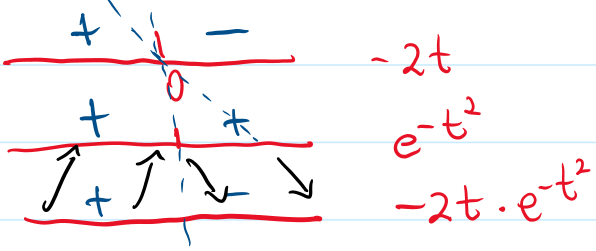
2) $f(t) = \dfrac{t^2}{t^2 - 3}$

Respostas:

1) $f'(t) = -2t \cdot e^{-t^2}$

Estudo do sinal:

Estudo do Sinal:

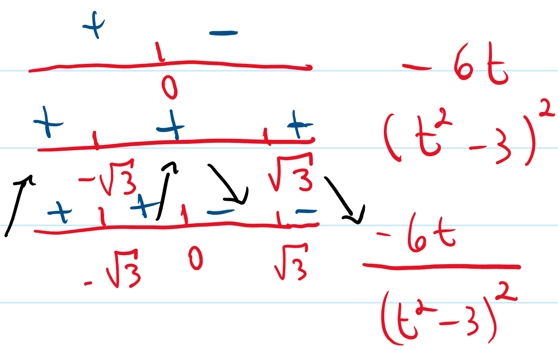


Região de crescimento: $(-\infty, 0]$

Região de decrescimento: $[0, +\infty)$

2) $$f'(t) = \frac{2t \cdot (t^2-3) - t^2 \cdot (2t)}{(t^2-3)^2}$$

$$= \frac{-6t}{(t^2-3)^2}$$



Conclusão:

Região de crescimento: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, 0]$

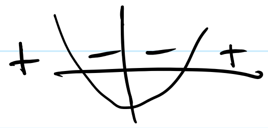
Região de decrescimento: $[0, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Obs.:

$(t^2-3)^5$ $\qquad$ $(t^2+3)^7 > 0$.

$(t^2-3)^5$

$= (t^2-3)^4 \cdot (t^2-3)$



$\underbrace{(t^2+3)}_{>0} > 0.$

É válido ressaltar que a 2ª derivada também fornece informações interessantes sobre a "geometria" do gráfico de uma função:

<u>Teorema</u>: Suponha que $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes derivável em I. Temos que:

1) Se $f''(t) > 0 \; \forall t \in (a,b)$, então f possui concavidade voltada para cima em (a,b).

2) Se $f''(t) < 0 \; \forall t \in (a,b)$, então f possui concavidade voltada para baixo em (a,b).

Obs.: Se f'' muda de sinal ao "passar por" $p \in I$, diremos que p é um ponto de inflexão.

por p ... , diremos que P é um ponto
de inflexão.

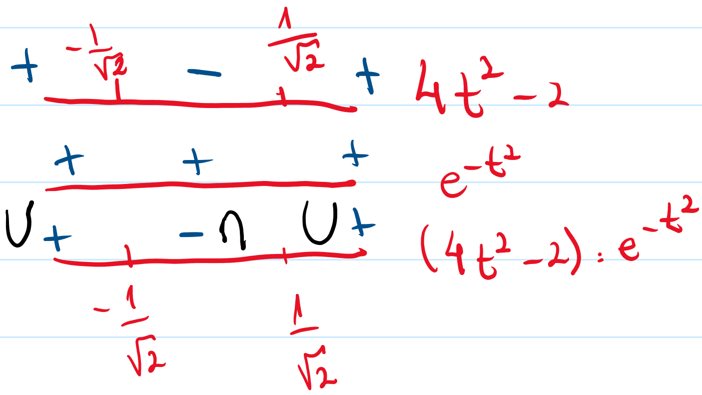
Exemplos: Determine as regiões de concavidade para cima / para baixo, e os pontos de inflexão para:

1) $f(t) = e^{-t^2}$.

2) $f(t) = \dfrac{t^2}{t^2-3}$

Respostas:

1) $f''(t) = (4t^2-2) \cdot e^{-t^2}$

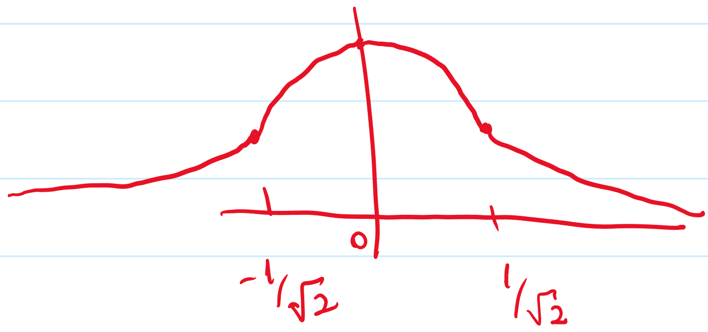


Conclusão:

Concavidade p/a cima: $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$

Concavidade p/a baixo: $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Pontos de inflexão: $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$


0
$-1/\sqrt{2}$
$1/\sqrt{2}$