Taxas relacionadas

$$y = f(u)$$

$u = u(t) \rightarrow u'(t)$

$y(t) = f(u(t)) \Rightarrow y'(t) = f'(u(t)) \cdot u'(t)$

Ideia: Calcular a taxa de variação de uma certa grandeza em termos da taxa de variação de outra grandeza relacionada (a qual pode ser mais medida facilmente)

Exemplos:

1) Suponha que bombeamos ar para um balão esférico, de modo que seu volume aumenta a uma taxa de 100 cm³/s. Quão rápido o raio do balão está aumentando quando o diâmetro for 50 cm?

Informações

Taxa de crescimento do ar: 100 cm³/s

$V_e = V(r) = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$ → fórmula volume!

$V = V(t) \rightarrow \frac{dv}{d(t)}(t) = 100 m^3/s$ → variação do volume pelo tempo!

composição pois r vai variar t

Qual variação do raio pelo tempo?

$$\frac{dr}{d(t)}(t) = ?$$

↳ $V(r) = V(r(t)) = \frac{4}{3} \cdot \pi \left[r(t)\right]^3$

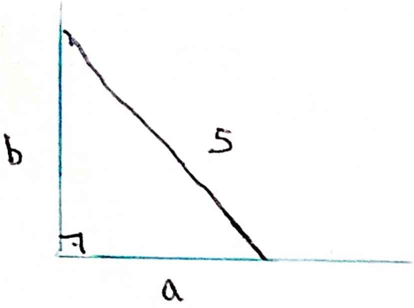
↳

$$\frac{dV}{dt}(t) = \frac{dV}{dt}(r(t)) = \frac{dv}{dr}(r(t)) \cdot \frac{dr}{dt}(t)$$

$\Leftrightarrow 4\pi(r(t))^2 \cdot \frac{dr(t)}{dt}$ → lembra que essa expressão = 100 cm³/s!

$\Leftrightarrow \frac{dr(t)}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2} \cdot 100 \Rightarrow \frac{1}{25\pi} \approx 0{,}0127$ cm/s → variação do raio!

2) Uma escada com 5m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada desliza, afastando-se da parede a uma taxa de 1m/s, quão rápido o topo da escada estará escorregando para baixo na parede, no momento em que a base da escada se encontra a 3m da parede?



$a = a(t) \rightarrow \quad a'(t) = 1\ m/s$

$a^2 + b^2 = 25 \therefore \quad b = b(a) = ?$

$(a(t))^2 + (b(t))^2 = 25$

Derivando com respeito a t:

$2\,a(t) \cdot a'(t) + 2 \cdot b(t) \cdot b'(t) = 0$

$\begin{cases} a = 3m \Rightarrow b = 4m \\ a'(t) = 1\ m/s \end{cases}$

$2 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4\ b'(t) = 0$

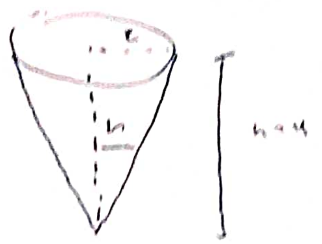
$\therefore \boxed{b'(t) = -\frac{3}{4}\ m/s}$

Taxas Relacionadas I

① Um tanque de água possui o formato de um cone circular invertido, com base de raio 2 m e altura igual a 4 m. Se a água está sendo bombeada para o tanque a uma taxa de 2 m³/min, encontre a taxa na qual o nível da água está aumentando quando a água estiver a 3 m de profundidade.

Dados

$$\frac{dV}{dt} = 2\,m^3/min \qquad \frac{dh}{dt}\ ? \text{ quando } h \text{ for igual a } 3\,m$$



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Para eliminar r, usamos semelhança de triângulos

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \qquad r = \frac{h}{2}$$

(ii) V em termos de h

$$V'(t) = 2\,m^3/min$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$$

Agora derivar cada lado em relação a t

$$\hookrightarrow V(h(t)) = \frac{\pi}{12}(h(t))^3$$

$$V'(t) = \frac{\pi}{4} h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$V(h(t))' = V'(h(t)) \cdot h'(t)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2} \cdot \frac{dV}{dt}$$

Substituindo $h = 3$, $\frac{dV}{dt} = 2\,m^3/min$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi 3^2} \cdot 2 = \frac{8}{9\pi}$$

4) O comprimento de um retângulo está aumentando a uma taxa de 8 cm/s e sua largura numa taxa de 3 cm/s. Quando o comprimento for 20 cm e a largura for 10 cm, quão rápido a área do triângulo está aumentando

$\frac{dc}{dt} = 8 \text{ cm/s}$ $\qquad$ $\frac{dl}{dt} = 3 \text{ cm/s}$

$a = l \times c$

$c'(t) = 8 \text{ cm/s}$ $\qquad$ $c(t) = 20 \text{ cm}$?

$l'(t) = 3 \text{ cm/s}$ $\qquad$ $l(t) = 10 \text{ cm}$

$a(t) = l(t) \times c(t)$

$a'(t) = l'(t)\, c(t) + l(t)\, c'(t)$

$a'(t) = 3.20 + 10.8$

$= 60 + 80$

$\boxed{a'(t) = 140 \text{ cm}^2/\text{s}}$

5) Um tanque cilíndrico com raio 5 m está sendo enchido com água a uma taxa de 3 m³/min. Quão rápido a altura da água está aumentando

$h'(t)$

$\to r = t'ro!$

$V'(t) = 3 \text{ m}^3/\text{min}$

$V = \pi r^2 . h$

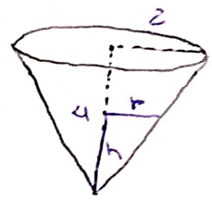
$V' = \pi r^2 .\ h'(t)$

$h'(t) = \frac{V'(t)}{25\pi}$

$h'(t) = \frac{3}{25\pi}$ m/min

3) Um tanque de água possui o formato de um cone circular invertido, com base de raio $r = 2m$, altura $h = 4m$. Suponha que estamos bombeando água para o tanque numa taxa de $2\ m^3/min$. Encontre a taxa na qual o nível da água está aumentando, quando a água estiver a 3m de profundidade.

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 . h}$$



$$\frac{h}{r} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\boxed{h = 2r} \Rightarrow \text{relação entre altura e raio.}$$

$$V = \frac{1}{3} . \pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 . h = \frac{1}{3} . \pi . \frac{h^3}{4}$$

$$\boxed{V = \frac{\pi}{12} h^3}$$

$$\frac{dV}{dt}(t) = 2\ m^3/min$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{d(t)}(h(t)) = \frac{dV}{dh}(h(t)) . \frac{dh}{dt}(t)$$

$$= \frac{\pi}{12} . 3 (h(t))^2 . \frac{dh}{dt}(t)$$

$$2 = \frac{\pi}{12} . 3 . 3^2 . \frac{dh}{dt}(t)$$

$$\therefore \frac{dh(t)}{dt} = \frac{24}{27\pi}\ m/min$$

$$= \frac{8}{9\pi}\ m/min$$

$$\boxed{\cong 0,28\ m/min}$$