Exercício sobre continuidade

Exercício:

Determine os valores de k, c e L para que a função

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2 - k}{t-2}, & t < 2 \\ c, & t = 2 \\ \dfrac{L(\sqrt{t} - \sqrt{2})}{t-2}, & t > 2 \end{cases}$$

seja contínua.

Obs: Se f e g são contínuas em um ponto p, então:

i) $f \underset{\times}{+} g$ é contínua em p

ii) $\dfrac{f}{g}$ é contínua em p desde que $g(p) \neq 0$.

Solução do exercício:

Veja que para $t < 2$ temos $f(t) = t^2 - k$

Veja que para $t < 2$ temos $f(t) = \dfrac{t^2 - k}{t-2}$.

Pela Obs. anterior, essa expressão é contínua $\forall t < 2$ (já que se trata do quociente de polinômios - contínuos - e que o denominador não se anula neste intervalo).

O mesmo argumento acima permite concluir que $f(t)$ é contínua $\forall t > 2$, pois a expressão

$$\frac{L \cdot (\sqrt{t} - \sqrt{2})}{t-2}$$

é contínua no intervalo citado.

Resta checarmos o que ocorre para $t = 2$:

i) $2 \in D(f)$ pois $f(2) = C$.

ii) $\lim\limits_{t \to 2^-} f(t) = \lim\limits_{t \to 2^-} \dfrac{t^2 - k}{t-2}$ $\quad$ "$\frac{0}{0}$" $\quad$ "$\frac{M}{0}$", $M \neq 0$

Temos 2 casos possíveis para o limite anterior:

"$\frac{0}{0}$" ou "$\frac{M}{0}$", $M \neq 0$.

Se ocorresse o segundo caso, a função nunca poderia ser contínua em $t=2$, pois nesse caso teríamos $\lim\limits_{t \to 2^-} \dfrac{t^2 - k}{t-2} \Rightarrow \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases}$

teríamos $\lim\limits_{t \to 2^-} \dfrac{t^2 - k}{t-2} \Rightarrow \begin{cases} -\infty \\ +\infty \\ \text{Não existe} \end{cases}$

(Isso será melhor explicado posteriormente).

Logo forçaremos o caso "$\frac{0}{0}$", escolhendo $K=4$.

Nesse caso, teremos:

$$\lim_{t \to 2^-} f(t) = \lim_{t \to 2^-} \frac{t^2-4}{t-2} = \lim_{t \to 2^-} \frac{\cancel{(t-2)}\cdot(t+2)}{\cancel{t-2}}$$

$$= \lim_{t \to 2^-} t+2 = 4.$$

Para que f seja contínua em $t=2$,

deveremos ter $\lim\limits_{t \to 2^-} f(t) = \lim\limits_{t \to 2^+} f(t) = 4$.

Logo, como $\lim\limits_{t \to 2^+} f(t) = \lim\limits_{t \to 2^+} L \cdot \dfrac{(\sqrt{t} - \sqrt{2})}{t-2}$

$$= L \cdot \lim_{t \to 2^+} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{2}}{t-2} \cdot \frac{(\sqrt{t} + \sqrt{2})}{(\sqrt{t} + \sqrt{2})}$$

$$= L \cdot \lim_{t \to 2^+} \frac{\cancel{t-2}}{\cancel{t-2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{2}}$$

$$= L \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{L}{2\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow L = 8\sqrt{2}.$$

Dessa forma, vemos que $\exists \lim_{t \to 2} f(t) = 4$.

iii) Para que f seja contínua, devemos ter:

$$\lim_{t \to 2} f(t) = f(2)$$

Logo, deveremos ter $f(2) = c = 4$.

Solução: $\boxed{K = 4,\ c = 4,\ L = 8\sqrt{2}.}$