Resumão GA

Vetor

- magnitude, direção e sentido

- Segmento orientado?

Dado A e B podemos definir o segmento orientado $\overline{AB}$ que tem como A origem e B extremidade

Obs

Um segmento orientado (A,A) é dito segmento nulo

Segmentos colineares:

paralelos: Se (A, B) e (C,D) são segmentos orientados não nulos, eles são de mesma direção se os segmentos geométricos $\underline{AB}$ e $\underline{CD}$ são paralelos

- (A, B) e (C,D) são colineares sse existe uma única reta m tal que pontos A,B,C,D ∈ m.

Como saber se tem mesma direção

- Seja (A,B) e (C,D) segmentos orientados não nulos, logo com mesma direção sse $m_{AB} \parallel m_{CD}$

- Sentido?

Seja (A,B) e (C,D) segmentos orientados

(A,B) e (C,D) tem mesmo sentido se

i) AC e BD não se interceptam

ii) se semi-reta com origem A, passando por B, S_{AB} está contido em S_{CD}

Equipolência

Os segmentos orientados (A, B) e (C,D) são equipolentes se tem mesmo módulo, são paralelos, e tem mesmo sentido. ($\overline{AB} \sim \overline{CD}$). Ou se ambos forem nulos

Relação de equipolência possui equivalência

i) $(A,B) \sim (A,B) \rightarrow$ reflexiva

ii) $(A,B) \sim (C,D) \Rightarrow (C,D) \sim (A,B) \rightarrow$ simetria

iii) $(A,B) \sim (C,D)$ & $(C,D) \sim (E,F) \Rightarrow (A,B) \sim (E,F)$

Vetor

É uma classe de equipolência de segmentos orientados: Se (A,B) é um segmento orientado, um vetor que tem (A,B) como representante será indicado por $\vec{AB}$.

$\vec{v} = \vec{AB}$ representa família de segmentos orientados equipolentes à $\overline{AB}$

Dado um vetor $\vec{u}$ qualquer. Escolhido arbitrariamente um ponto P, existe um segmento orientado, representante de $\vec{u}$ com origem em P, isto é, existe um ponto B tal que $\vec{u} = \vec{PB}$

$\vec{PA} = \vec{PB} \Rightarrow A = B$

Vetor nulo:

Tem como representante um segmento orientado nulo ou seja (A,A) → $\vec{0}$

Vetor oposto

Se (A,B) é representante de um vetor $\vec{u}$, o vetor oposto de $\vec{u}$, indicado $-\vec{u}$ é o vetor que tem (B,A) ou qualquer segmento orientado equipolente

$$-\vec{AB} = \vec{BA} = -\vec{u}$$

Obs.

$\vec{u} // -\vec{u}$, mas possuem sentidos opostos!

Representação Algébrica do vetor

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

O vetor representado pelo segmento orientado $\vec{OV}$, onde O origem, $V(v_x, v_y, v_z)$

Representação gráfica vetor origem A, extremidade B

$$\vec{v} := (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

Norma ou módulo: é o comprimento de qualquer um dos seus representantes. A norma de $\vec{u}$ é $\|\vec{u}\|$. Um vetor é unitário se sua norma for 1

Propriedades Multiplicação Vetor por escalar ③ i

Proposição

a) $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$

b) $(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v}) = \mu(\lambda\vec{v})$

(c) $(\lambda+\mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$

(d) $1\vec{v} = \vec{v}$

Ainda temos também

(a): $(-\lambda)\vec{v} = -(\lambda\vec{v})$

(b): $\lambda(-\vec{v}) = -(\lambda\vec{v})$

(c): $(-\lambda)(-\vec{v}) = \lambda\vec{v}$

"Soma vetor com ponto"

Dados um ponto A, um vetor $\vec{v}$, definimos a soma $A+\vec{v}$ como o ponto B tal que $\vec{v} = \vec{AB}$

$$\boxed{A+\vec{v} = B \text{ sse } \vec{v} = \vec{AB}}$$

Se colocarmos a origem de $\vec{v}$ em A, a extremidade será B

A partir dessa definição a representação $\vec{v} = \vec{AB} = B - A$ como diferença dos pontos faz sentido

→ Decorre da definição

$A + \vec{AB} = B$

Parte 2

Adição de vetores:

Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$, seja (A,B) um representante qualquer de $\vec{u}$ e (B,C) o representante de $\vec{v}$ que tem origem B. O vetor $\vec{u}+\vec{v}$ é o vetor que tem (A,C) por representante: $\vec{u}+\vec{v} = \vec{AC}$

def. $\rightarrow$ $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

Diferença

Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ a soma de $\vec{u}$ com o oposto de $\vec{v}$ é chamado diferença

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Propriedades

Associativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u} + (\vec{v}+\vec{w})$

Comutativa: $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$

Elemento neutro: $\vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$

Elemento oposto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Algébrica através das coordenadas!

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ podemos somar coordenada por coordenada

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1+v_1, u_2+v_2)$$

Multiplicação Escalar por vetor

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}$ um vetor

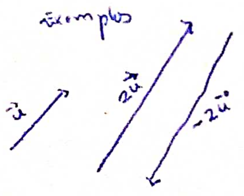
(a) Se $\lambda = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ então $\lambda\vec{v} = \vec{0}$

(b) Se $\lambda \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ o vetor $\lambda\vec{v}$ caracteriza-se

- $\lambda\vec{v} \parallel \vec{v}$
- $\lambda\vec{v}$ e $\vec{v}$ são de mesmo sentido se $\lambda > 0$ e de sentido contrário $\lambda < 0$
- $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \, \|\vec{v}\|$

$\boxed{\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \text{ é chamado versor de } \vec{v}}$

exemplos



continuação soma ponto com vetor

Isto ⇒ $A - \vec{v} = P + (-\vec{v})$

propriedades provadas

(a) = $A + \vec{0} = A$

(b) = $A + \vec{u} = A + \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$

(c) = $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$

(d) = $A + \vec{v} = B + \vec{v} \Rightarrow \underline{A = B}$

(e) $= (A + \vec{v}) - \vec{v} = A$

(f) : $A + \vec{v} = A$

(g) : $A - \vec{0} = A$

(h) $A = B - \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{AB}$

i) $B = A - \vec{v} \Rightarrow \vec{AB} + \vec{v} = \vec{BC}$

Quaisquer que sejam os pontos A e B, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ valem as propriedades

$P_1 : (A + \vec{v}) + \vec{u} = A + (\vec{v} + \vec{u})$

$P_2 : (A + \vec{v}) = A + \vec{u} \Rightarrow \vec{v} = \vec{u}$ ~ cancelamento do ponto

$P_3 : A + \vec{v} = B + \vec{v} \Rightarrow A = B$ ~ cancelamento do vetor

$P_4 : (A - \vec{u}) + \vec{u} = A$

Algumas aplicações

Sendo ABCD um paralelogramo, M ponto médio da diagonal $\overline{AC}$. Valem as igualdades $\vec{BC} = \vec{AD}$, $\vec{CM} = \vec{MA}$. Para concluir que M também é ponto médio da diagonal DB, basta mostrar que $\vec{BM} = \vec{MD}$.

$$\vec{BM} = \vec{BC} + \vec{CM} = \vec{AD} + \vec{MA} = \vec{MA} + \vec{AD} = \vec{MD}$$

Dependência Linear:

O conceito de dependência linear de uma sequência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ será definido caso a caso,

Seja $\vec{v}$ vetor, m uma reta, e π plano;

Dizemos que $\vec{v}$ é paralelo a m (a π) se existir (A,B), tal que $\vec{v} = \vec{AB}$, $\vec{AB} \subseteq m$ ou $\vec{AB} \subseteq \pi$

a) Uma sequência $(\vec{v})$ é linearmente dependente se $\vec{v} = \vec{0}$ é l.d.; Se $\vec{v} \neq \vec{0}$ é linearmente independente li

(b) Um par ordenado $(\vec{u}, \vec{v})$, é linearmente dependente se $\vec{u}, \vec{v}$ são paralelos. → um é combinação linear do outro

caso contrário $(\vec{u}, \vec{v})$ é li.

(c) Uma tripla ordenada $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos a um mesmo plano. → ou seja, coplanares.

Caso contrário $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é Li

d) Se $n \geq 4$ é sempre sequência ld.

observação

Qualquer conjunto $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ $n \geq 1$ onde ocorre o vetor $\vec{0}$ é LD. □

Combinação linear:

Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n$ e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ $n \geq 1$ → coeficiente da combinação linear

$\vec{u} := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \Rightarrow \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n$, etc é

combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$

Um exemplo é o vetor nulo, que é gerado por quaisquer $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n$, uma vez que $\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2, \ldots 0.\vec{v}_n$. Esta expressão para vetor nulo é conhecida como trivial.

Exercícios resolvidos:

a) Sabe-se que $\vec{u} = 3\vec{v}$. Escreva três expressões diferentes do vetor nulo como combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}$

Primeira expressão $\vec{0} = 0\vec{u} + 0\vec{v}$.

De $\vec{u} = 3\vec{v}$ obtemos a segunda

$1\vec{u} + (-3)\vec{v} = \vec{0}$.

Multiplicando os dois membros desta igualdade por escalares arbitrários, obtemos outras expressões: $2\vec{u} - 6\vec{v} = \vec{0}$; $10\vec{u} - 30\vec{v} = \vec{0}$ etc.

b) Repita a parte (a), supondo agora que $(\vec{u}, \vec{v})$ seja LI.

Impossível, pois, de acordo com Proposição 3-10, só há uma expressão do vetor nulo como combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}$, que é trivial: $\vec{0} = 0\vec{u} + 0\vec{v}$

Para classificar uma tripla de vetores quanto à dependência linear. Em vez de verificar se existe um plano paralelo aos vetores dados, procuramos descobrir se algum deles é gerado pelos demais.

Proposição 1

Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI, então $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD sse, $\vec{w}$ é gerado por $\vec{u}, \vec{v}$

Proposição 2

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD sse um dos vetores é gerado pelos outros dois

Caderno 1 3º

No plano, sendo ($\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$) dois vetores não paralelos (LI), qualquer outro vetor $\vec{w}$ pode ser representado como a combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$

$$\boxed{\vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2}$$

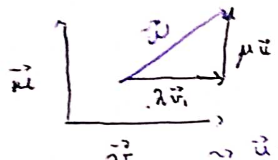
Obj: Prop. Geral!

$\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI e $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ LD

$\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$\exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

Esses vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ formam uma base no plano



→ $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ são LI porém $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD conforme proposição

→ $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam plano

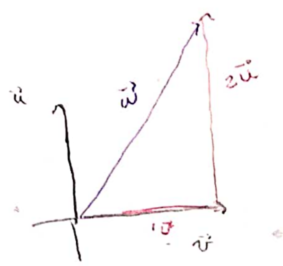
↳ base → a partir de $\mathbb{R}$ que é possível representar $\vec{w}$

Pela proposição → Se ($\vec{u}, \vec{v}$) LI, então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD se $\vec{w}$ é gerado por combinação linear $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Exemplo:

$\vec{w} \Rightarrow (1, 2)_B$ → coordenadas $\vec{w}$ na base B

$B = (\vec{v}, \vec{u})$ ↳ base →

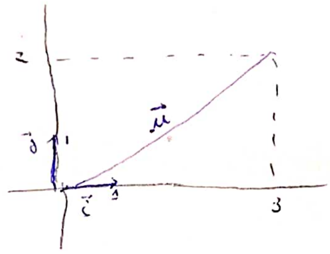


Como se fosse receita de como chegar no $\vec{w}$ a partir de $\vec{v}$ e $\vec{u}$

→ Em particular, note que $\vec{i}$ (1, 0) e $\vec{j} = (0, 1)$ formam base para o plano

e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ é dado por

$$\vec{u} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$$



base canônica → como é possível chegar $\vec{u}$ a partir do $\vec{i}$ e do $\vec{j}$

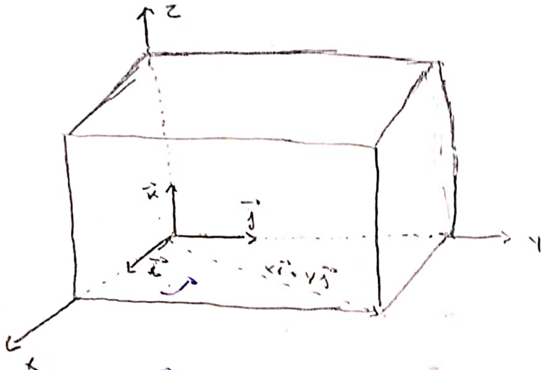
Essa base é dita ortonormal, porque seus vetores são unitários (norma = 1) e vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ são ortogonais entre si (90° graus entre si)

• Em particular, note que $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$ formam uma base do espaço, e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ é dado por

$$\boxed{\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}}$$

• $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ forma a base canônica do espaço.

→ Essa base é ortonormal, tem orientação positiva → Regra da mão direita.



indicador no i, girar pro j, dedão no k.

→ Assim como no plano, podemos definir $\vec{v} = (x, y, z)$ como combinação linear $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, e as coordenadas de um vetor podem ser interpretadas como seus coeficientes na base canônica.

bases diferentes

$\{v_1, v_2, v_3\} \neq \{v_2, v_1, v_3\}$

Logo, ordem da base importa

↳ $\{\lambda, \mu, s\} \neq \{\mu, \lambda, s\}$

Relembrando

Vetores são coplanares se 1 deles for combinação linear dos outros dois

Se por exemplo tivessemos

$\vec{v} = (v_1, v_2)_B$ ⇝ as coordenadas do $\vec{v}$ na Base B: v_1 e v_2

aí teria que informar a base

$B = \{(1,2), (-3,0)\}$

Se $\vec{u} = (u_1, u_2)$

Se ... base ...
$\{\vec{i}, \vec{j}\}$

Assim podemos definir

$\vec{v} = (x, y)$ como combinação linear $x\vec{i} + y\vec{j}$. Assim as coordenadas de um vetor são seus coeficientes na base canônica

Ex.

É possível representar os vetores $(6,5,8)$ como combinação linear de $(7,4,8)$, $(-1,1,0)$?

$$(6,5,8) = \lambda(7,4,8) + \mu(-1,1,0)$$

$$(6,5,8) = (7\lambda - \mu, 4\lambda + \mu, 8\lambda)$$

Montando sistema

$$\begin{cases} 6 = 7\lambda - \mu \\ 5 = 4\lambda + \mu \\ 8 = 8\lambda \end{cases} \rightsquigarrow \lambda = 1$$

⇝ $6 = 7 \cdot 1 - \mu$ ⇝ $\mu = 1$

$5 = 4 \cdot 1 + 1$

$5 = 5$ OK — é possível

Bases no espaço

Sendo $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ três vetores não coplanares, qualquer outro vetor $\vec{w}$ pode ser representado de modo único como combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

$$\vec{w} = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 + \xi\vec{v}_3$$

- Esses vetores formam uma base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ do espaço $\mathbb{R}^3$
- λ, μ, ξ são coordenadas de $\vec{w}$ na base B. $\vec{w} = (\lambda, \mu, \xi)_B$

Dados os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ e

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ e o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) + (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k})$$ → as propriedades associativa e distributiva

$$= (u_1 + v_1)\vec{i} + (u_2 + v_2)\vec{j} + (u_3 + v_3)\vec{k}$$

$$= (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ u_3 + v_3)$$ → Soma cada coordenada separadamente

$$\lambda\vec{u} = \lambda(u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k})$$

$$= (\lambda u_1)\vec{i} + (\lambda u_2)\vec{j} + (\lambda u_3)\vec{k}$$

$$= (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$$

Considerando uma base qualquer $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ temos:

$$(u_1, u_2, u_3)_E + (v_1, v_2, v_3)_E = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ u_3 + v_3)_E$$

$$\lambda(u_1, u_2, u_3)_E = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)_E$$

Independência linear

Um conjunto de vetores $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n\}$ é dito linearmente independente, ou L.I se nenhum deles for combinação linear dos outros

- É possível pensar que cada vetor traz alguma informação "nova" ao conjunto, não temos "redundância"

- No plano, um par de vetores é L.I se eles não são colineares (um não é múltiplo do outro).
- Algebricamente sendo $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, eles são L.I. se a única solução para:

$$\begin{cases} v_1\lambda_1 + u_1\lambda_2 = 0 \\ v_2\lambda_1 + u_2\lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

- No espaço, um trio de vetores é L.I se eles não são coplanares.

Algebricamente, sendo $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$, eles são L.I se a única solução para:

$$\begin{cases} v_1 \lambda_1 + u_1 \lambda_2 + w_1 \lambda_3 = 0 \\ v_2 \lambda_1 + u_2 \lambda_2 + w_2 \lambda_3 = 0 \\ v_3 \lambda_1 + u_3 \lambda_2 + w_3 \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ~ solução trivial

Considere a base $\mathcal{E} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ onde $\vec{e_1} = (1,2)$, $\vec{e_2} = (2,-2)$

- Mostre que encontrar as coordenadas de $\vec{v} = (v_1, v_2)$ na base $\mathcal{E}$ equivale a solucionar $E\lambda = v$ onde

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \lambda \vec{e_1} + \mu \vec{e_2} \Rightarrow \lambda(1,2) + \mu(2,-2)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2) = (-\lambda + 2\mu, 2\lambda - 2\mu)$$

matriz é invertível ⇔

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} -\lambda + 2\mu = v_1 \\ 2\lambda - 2\mu = v_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \vec{e_1} & \vec{e_2} \end{matrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

$\vec{e_1} = (2,2)$

$\vec{e_2} = (-1,3)$

$\vec{v} = (2,-1)$

$$\Rightarrow \vec{v} = \alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2}$$

$$\vec{v} = (\alpha_1, \alpha_2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Considere os vetores $\vec{f}_1 = (2, -3)$ e $\vec{f}_2 = (-4, 6)$. Pode $\vec{v} = (v_1, v_2)$, mostre que representar $\vec{v}$ como uma combinação linear $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$ equivale a resolver uma equação da forma $F x = v$. O que podemos dizer da matriz F?

$$F = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$\det(F) = 2 \cdot 6 - (-4) \cdot (-3) = 12 - 12 = 0$ → não é inversível

$\det(F) = 0$

→ não consigo representar como $\vec{v}$ como combinação linear dos vetores $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$

$\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$ são colineares

$\vec{f}_2 = -2\vec{f}_1$ → logo não são L.I. são (LD)

matriz só possuirá inversa se $\underline{\det(M) \neq 0}$

Produto Escalar

Dados vetores $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ o produto escalar u e v é definido por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \in \mathbb{R}$$

o resultado desse produto é escalar

Exemplo:

Qual o produto escalar entre $\vec{u} = \vec{i} + 2j$, $\vec{v} = -3\vec{i} + 2j$?

~~dados $\vec{u}$ (1, 1)~~

$\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (-3, 2)$ → Assim $\vec{u}$ O produto escalar

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = -3 + 4 = 1$

logo $\underline{\vec{u} \cdot \vec{v} = 1}$

- Dados $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (2, x)$, encontre x tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 1x = 0$

$\boxed{x = -2}$

Para vetores no espaço, a definição é análoga. Dados $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ o produto escalar entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definido por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Exemplos:

Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$, calcular:

$\Rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ $\Rightarrow$ $\vec{u} + \vec{v} = (3, 2, 0)$

$\Rightarrow 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2$ $\quad \vec{u} - \vec{v} = (-1, 2, 2)$

$\Rightarrow -3 + 4 = \underline{1}$

Propriedades Produto Escalar

Comutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Bilinearidade:

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, $\quad \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ $\quad (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$

Módulo Para todo $\vec{u} \neq \vec{0}$ temos

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 > 0,$$

A importante

coordenadas

$(\|\vec{u}\|)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$

$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Exercícios

Dados $\vec{u} = (3, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 1)$ calcular:

$\vec{u} \cdot \vec{u} = 3^2 + 4^2 = 25$

-- $\vec{u} \cdot \vec{u}$, $\vec{v} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$\vec{u} \cdot \vec{u} = 3^2 + 4^2 = 25$

$\|\vec{u}\| = 5$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 = -3 + 4 = \underline{1}$

$\vec{v} \cdot \vec{v} = -1^2 + 1^2 = 2$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$

Prove que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) \Leftrightarrow \|u\|^2 - \|v\|^2$

Vamos desenvolvendo

$$\underbrace{(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})}_{\text{distributiva}} = (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{u} - (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{v} =$$

$$= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$= \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

Dado o vetor $\vec{u}$, encontre um vetor unitário $\hat{v}$ tal que $\vec{u}\cdot\hat{v}=0$.

$\hat{v}=(v_1, v_2)$ $\qquad v_1^2+v_2^2=1 \rightarrow \sqrt{v_1^2+v_2^2}=1$ $\qquad \vec{u}\cdot\hat{v}=0$

$2v_1+v_2=0$

Como achar versor de um vetor qualquer?

$\vec{v} \rightarrow \hat{v}$ $\qquad \hat{v}=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ $\qquad$ Assim $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\frac{0}{\|\vec{v}\|}$

Logo

$\vec{u}\cdot\hat{v}=0$

Suponhamos

$v_1=1 \Rightarrow v_2=-2$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

$\hat{v}=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\frac{(1,-2)}{\sqrt{5}}$

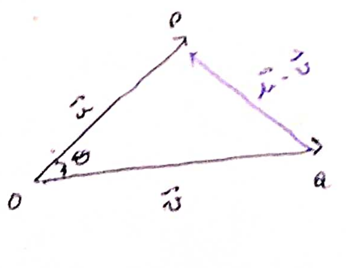
$\hat{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

Interpretação geométrica do produto escalar

Dados dois vetores $\vec{u}=\vec{OP}$ e $\vec{v}=\vec{OQ}$, temos pela lei dos cossenos no triângulo POQ

(1) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta$



Por outro lado, usando propriedades do produto escalar temos

$$② \ \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{v}$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$$

Comparando as duas equações temos

$$① = ②$$

-> produto escalar

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta$$

Logo o produto escalar também é dado pelo produto dos módulos dos vetores pelo cosseno do ângulo formado entre eles.

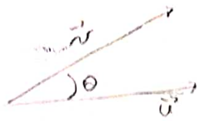
Na prática

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$$

Assim:

• Note que se o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo, temos:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \iff \underbrace{\vec{u}.\vec{v} > 0}_{\text{positivo}}$$



•• Caso θ seja obtuso, temos:

$$\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \iff \vec{u}.\vec{v} < 0$$

••• Caso os vetores sejam perpendiculares

$$\theta = \frac{\pi}{2} \iff \vec{u}.\vec{v} = 0$$

Ainda sim, $\vec{0}.\vec{u} = 0$ faz sentido considerar vetor nulo como perpendicular a qualquer outro vetor

-> Desigualdade de Schwarz dada por

$$|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$$

Pode ser provado geometricamente $|\cos\theta| \leq 1$ ou algebricamente $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$