Integração por partes

Vimos em aulas passadas que o método de Mudança de Variáveis na integral é bastante adequado para o cenário no qual desejamos integrar uma função que apresente algum tipo de composição em sua expressão algébrica.

O caso que veremos agora (integração por partes) costuma ser bastante adequado para o cenário no qual desejamos integrar um produto de [duas ou mais] funções:

$$\int f(t) \cdot g(t)dt = ?$$

Exemplos:

1)

$$\int t \cdot e^t dt = ?$$

2)

$$\int t \cdot \sin t \, dt = ?$$

3)

$$\int e^t \cdot \cos t \, dt = ?$$

O método de Integração por Partes que veremos a seguir se baseia numa construção inversa à da regra da derivação de um produto de funções. Vejamos a seguir:

Sabemos que, se $f(t)$ e $g(t)$ são deriváveis, então:

$$\big(f(t) \cdot g(t)\big)' = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$$

Logo:

$$f'(t) \cdot g(t) = \big(f(t) \cdot g(t)\big)' - f(t) \cdot g'(t)$$

Suponhamos que ambas as expressões acima possuem integral indefinida. Pela igualdade estabelecida, podemos afirmar:

$$\int f'(t) \cdot g(t)dt = \int \left(f(t) \cdot g(t)\right)' - f(t) \cdot g'(t)dt$$

$$= \int \left(f(t) \cdot g(t)\right)' dt - \int f(t) \cdot g'(t)dt$$

$$= f(t) \cdot g(t) - \int f(t) \cdot g'(t)dt$$

A ideia é que talvez a integral do lado esquerdo talvez seja mais elaborada, mas a integral do lado direito deverá ser mais simples. Vejamos os exemplos a seguir:

1)

$$\int t \cdot e^t dt = ?$$

Escolheremos: $\begin{cases} f'(t) = e^t \\ g(t) = t \end{cases}$. Dessa forma, teremos:

$$\begin{cases} f(t) = e^t \\ g'(t) = 1 \end{cases}$$

e assim:

$$\int t \cdot e^t dt = t \cdot e^t - \int e^t \cdot 1\, dt = t \cdot e^t - e^t + K$$
$$= e^t \cdot (t - 1) + K, K \in \mathbb{R}$$

2)

$$\int t \cdot \sin t \, dt = ?$$

Exercício!!

$$\int t \cdot \sin t \, dt = \cdots = -t \cdot \cos t + \sin t + J, J \in \mathbb{R}$$

3)

$$\int t^2 \cdot e^t dt = ?$$

Exercício!!

4)

$$\int e^t \cdot \cos t \, dt = ?$$

5)

$$\int \ln t \, dt = ?$$