com um número ímpar de 0s e um número ímpar de 1s, respectivamente.

a) Mostre que $d_n = 4^n - a_n - b_n - c_n$. Use isso para mostrar que $a_{n+1} = 2a_n + b_n + c_n$, $b_{n+1} = b_n - c_n + 4^n$ e $c_{n+1} = c_n - b_n + 4^n$.

b) Quais são a_1, b_1, c_1 e d_1?

c) Use os itens (a) e (b) para encontrar a_3, b_3, c_3 e d_3.

d) Use as relações de recorrência do item (a), juntamente com as condições iniciais do item (b), para organizar três equações relacionadas com as funções generalizadas $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ para as seqüências $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$, respectivamente.

e) Resolva o sistema de equações do item (d) para encontrar fórmulas explícitas para $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ e utilize-as para encontrar as fórmulas explícitas para a_n, b_n, c_n e d_n.

Funções generalizadas são úteis no estudo do número de diferentes tipos de partições de um número inteiro n. Uma **partição** de um número inteiro positivo é uma forma de escrever este inteiro como a soma de números inteiros positivos com repetição e a ordem não sendo relevante. Por exemplo, as partições de 5 (sem restrições) são $1+1+1+1+1$, $1+1+1+2$, $1+1+3$, $1+2+2$, $1+4$, $2+3$ e 5. Os exercícios 51 a 56 ilustram alguns desses usos.

51. Mostre que o coeficiente $p(n)$ de x^n na expansão de série de potência formal de $1/((1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots)$ é igual ao número de partições de n.

52. Mostre que o coeficiente $p_o(n)$ de x^n na expansão de série de potência formal de $1/((1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots)$ é igual ao número de partições de n em número inteiros ímpares, ou seja, o número de maneiras de escrever n como a soma de números inteiros ímpares, em que a ordem não é relevante e podem ocorrer repetições.

53. Mostre que o coeficiente $p_d(n)$ de x^n na expansão de série de potência formal de $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$ é igual ao número de partições de n em partes distintas, ou seja, o número de maneiras de escrever n como a soma de números inteiros positivos, em que a ordem não é relevante, mas não podem ocorrer repetições.

54. Encontre $p_o(n)$, o número de partições de n em partes ímpares com repetições, e $p_d(n)$, o número de partições de n em partes distintas, para $1 \le n \le 8$, escrevendo cada partição de cada número inteiro.

55. Mostre que, se n for um número inteiro positivo, então o número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares com repetições; ou seja, $p_o(n) = p_d(n)$. [*Dica:* Mostre que as funções generalizadas para $p_o(n)$ e $p_d(n)$ são iguais.]

****56.** (*Requer cálculo*) Utilize a função generalizada de $p(n)$ para mostrar que $p(n) \le e^{C\sqrt{n}}$ para qualquer constante C. [Hardy e Ramanujan mostraram que $p(n) \sim e^{\pi\sqrt{2/3}\sqrt{n}}/(4\sqrt{3}n)$, que significa que a razão de $p(n)$ e o lado direito tendem a 1, assim como n tende ao infinito.]

Suponha que X seja uma variável aleatória no espaço amostral S, tal que $X(s)$ seja um número inteiro não negativo para todo $s \in S$. A **função de probabilidade generalizada** para X é

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p(X(s) = k)x^k.$$

57. (*Requer cálculo*) Mostre que, se G_X for a função de probabilidade generalizada para uma variável aleatória X, tal que $X(s)$ é um número inteiro não negativo para todo $s \in S$, então

a) $G_X(1) = 1$.

b) $E(X) = G'_X(1)$.

c) $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

58. Considere X como a variável aleatória cujo valor é n se o primeiro sucesso ocorrer no n-ésimo teste, quando testes independentes de Bernoulli forem realizados, cada um com probabilidade de sucesso p.

a) Encontre uma fórmula fechada para a função de probabilidade generalizada G_X.

b) Encontre o valor esperado e a variância de X usando o Exercício 57 e a forma fechada encontrada no item (a).

59. Considere m como um número inteiro positivo. Considere X_m como a variável aleatória cujo valor é n se o m-ésimo sucesso ocorrer no $(n+m)$-ésimo teste quando testes independentes de Bernoulli forem realizados, cada um com probabilidade de sucesso p.

a) Usando o Exercício 28 dos Exercícios Complementares do Capítulo 6, mostre que a função de probabilidade generalizada G_{X_m} é dada por $G_{X_m}(x) = p^m/(1-qx)^m$, em que $q = 1-p$.

b) Encontre o valor esperado e a variância de X_m usando o Exercício 57 e a forma fechada do item (a).

60. Mostre que se X e Y forem variáveis independentes aleatórias no espaço amostral S, tal que $X(s)$ e $Y(s)$ sejam números inteiros não negativos para todo $s \in S$, então $G_{X+Y}(x) = G_X(x)G_Y(x)$.

7.5 Inclusão–Exclusão

Introdução

Uma classe de matemática discreta contém 30 mulheres e 50 veteranos. Quantos estudantes na sala são ou mulheres ou veteranos? Esta questão não pode ser respondida a menos que sejam fornecidas mais informações. Adicionando o número de mulheres na sala e o número de veteranos provavelmente não nos dá a resposta correta, porque as mulheres veteranas são contadas duas vezes. Essa observação mostra que o número de estudantes na sala que são ou veteranos ou mulheres é a soma do número de mulheres com o número de veteranos na sala menos o número de mulheres veteranas. Uma técnica para resolver esses problemas de contagem foi introduzida na Seção 5.1. Nesta seção, vamos generalizar as idéias introduzidas naquela seção para resolver os problemas que necessitam que contemos o número de elementos na união de mais de dois conjuntos.

O Princípio da Inclusão–Exclusão

Quantos elementos existem na união de dois conjuntos finitos? Na Seção 2.2, mostramos que o número de elementos na união de dois conjuntos A e B é a soma do número de elementos nos conjuntos menos o número de elementos de sua intersecção, ou seja,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Como mostramos na Seção 5.1, a fórmula para o número de elementos na união de dois conjuntos é útil em problemas de contagem. Os exemplos 1 a 3 fornecem ilustrações adicionais para o uso dessa fórmula.

EXEMPLO 1 Em uma classe de matemática discreta, todo estudante é graduando em ciência da computação ou matemática, ou em ambos. O número de estudantes que é graduando em ciência da computação (possivelmente com matemática) é 25; o número de estudantes que é graduando em matemática (possivelmente com ciência da computação) é 13 e o número de graduandos em ciência da computação e em matemática é 8. Quantos estudantes há na sala?

Solução: Considere A como o conjunto de estudantes graduandos em ciência da computação e B como o conjunto de estudantes graduandos em matemática. Então $A \cap B$ é o conjunto de estudantes na sala que são graduandos em matemática e em ciência da computação. Como todo estudante na sala é graduando ou em ciência da computação ou em matemática (ou em ambos), temos que o número de estudantes na sala é $|A \cup B|$. Assim,

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 25 + 13 - 8 \\ &= 30. \end{aligned}$$

Portanto, há 30 estudantes na sala. Essa computação está ilustrada na Figura 1. ◄

EXEMPLO 2 Quantos números inteiros positivos não excedentes a 1 000 são divisíveis por 7 ou 11?

Solução: Considere A como o conjunto de números inteiros positivos não excedentes a 1 000 que são divisíveis por 7, e B como o conjunto de números inteiros positivos não excedentes a 1 000 que são divisíveis por 11. Então, $A \cup B$ é o conjunto dos inteiros não excedentes a 1 000 que são divisíveis por 7 ou 11, e $A \cap B$ é o conjunto dos inteiros não excedentes a 1 000 que são divisíveis por 7 e 11. A partir do Exemplo 2 da Seção 3.4, sabemos que entre os números inteiros positivos não excedentes a 1 000 há $\lfloor 1\,000/7 \rfloor$ inteiros divisíveis por 7 e $\lfloor 1\,000/11 \rfloor$ divisíveis por 11. Como 7 e 11 são números primos entre si, os inteiros divisíveis por 7 e por 11 são aqueles divisíveis por $7 \cdot 11$. Conseqüentemente, há $\lfloor 1\,000/(11 \cdot 7) \rfloor$ números inteiros positivos não excedentes a 1 000 que são divisíveis por 7 e 11. Temos que há

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= \left\lfloor \frac{1\,000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1\,000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1\,000}{7 \cdot 11} \right\rfloor \\ &= 142 + 90 - 12 \\ &= 220 \end{aligned}$$

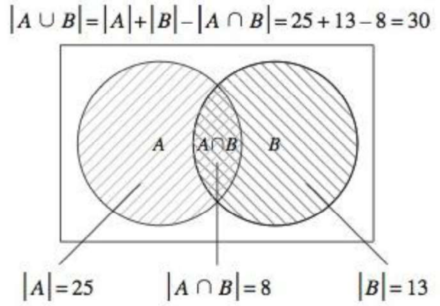


FIGURA 1 O Conjunto de Estudantes em uma Classe de Matemática Discreta.

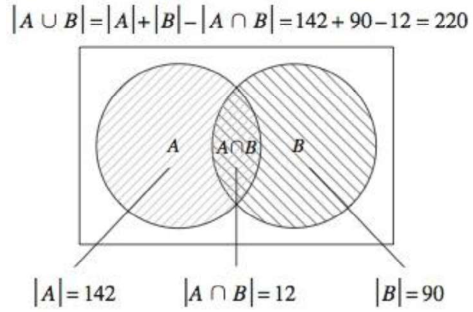


FIGURA 2 O Conjunto de Números Inteiros Positivos Não Excedentes a 1 000 Divisíveis por 7 ou 11.

números inteiros positivos não excedentes a 1 000 que são divisíveis por 7 ou por 11. Essa contagem está ilustrada na Figura 2. ◄

O Exemplo 3 mostra como encontrar o número de elementos em um conjunto universal finito que estão fora da união de dois conjuntos.

EXEMPLO 3 Suponha que existam 1 807 calouros em uma escola. Destes, 453 estão cursando ciência da computação, 567 cursam matemática e 299 estão cursando ambos, ciência da computação e matemática. Quantos calouros não estão cursando ciência da computação nem matemática?

Solução: Para encontrar o número de calouros que não cursam matemática ou ciência da computação, subtraia o número daqueles que estão nesses cursos do número total de calouros. Considere A como o conjunto de todos os calouros que estão cursando ciência da computação e B como o conjunto de todos os calouros que estão cursando matemática. Temos que $|A| = 453$, $|B| = 567$ e $|A \cap B| = 299$. O número de calouros que estão cursando ou ciência da computação ou matemática é

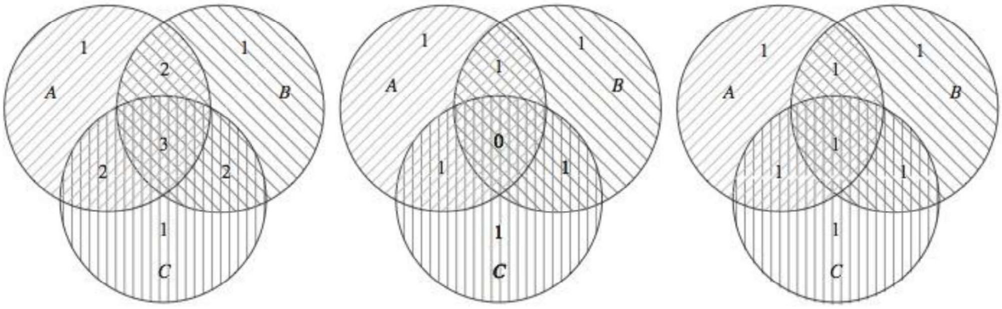
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 453 + 567 - 299 = 721.$$

Conseqüentemente, há $1\,807 - 721 = 1\,086$ calouros que não estão cursando ciência da computação ou matemática. ◄

Começaremos agora o desenvolvimento de uma fórmula para o número de elementos na união de um número finito de conjuntos. A fórmula que será desenvolvida é chamada de **princípio da inclusão–exclusão.** Concretamente, antes de considerarmos as uniões de n conjuntos, em que n é qualquer número inteiro positivo, vamos derivar uma fórmula para o número de elementos na união de três conjuntos A, B e C. Para construir essa fórmula, notamos que $|A| + |B| + |C|$ conta cada elemento que está exatamente em um dos conjuntos uma vez, elementos que estão em dois conjuntos são contados duas vezes e elementos que estão nos três conjuntos, três vezes. Isso está ilustrado no primeiro painel da Figura 3.

Para retirar essa supercontagem dos elementos que estão em mais de um conjunto, subtraímos o número de elementos na intersecção de todos os pares dos três conjuntos. Obtemos

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|.$$



(a) Contagem dos elementos por $|A|+|B|+|C|$

(b) Contagem dos elementos por $|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$

(c) Contagem dos elementos por $|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

FIGURA 3 Encontrando uma Fórmula para o Número de Elementos na União dos Três Conjuntos.

Essa expressão ainda conta os elementos que aparecem em um conjunto uma vez. Um elemento que ocorre em dois conjuntos também é contado uma vez, pois esse elemento aparecerá em uma das três intersecções dos conjuntos. Entretanto, aqueles elementos que aparecem nos três conjuntos não serão contados por essa expressão, porque eles aparecem nas três intersecções dos conjuntos. Isso está ilustrado no segundo painel da Figura 3.

Para remediar esta não-contagem, adicionamos os números de elementos na intersecção dos três conjuntos. Essa expressão final conta cada elemento uma vez, sempre que ele estiver em um, dois ou três conjuntos. Assim,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Essa fórmula está ilustrada no terceiro painel da Figura 3.

O Exemplo 4 ilustra como essa fórmula pode ser usada.

EXEMPLO 4 Um total de 1 232 alunos cursam espanhol, 879 cursam francês e 114 cursam russo. Além disso, 103 cursam espanhol e francês, 23 cursam espanhol e russo e 14 cursam francês e russo. Se 2 092 estudantes cursam, pelo menos, umas das três línguas, espanhol, francês e russo, quantos estudantes cursam as três línguas?

Solução: Considere S como o conjunto de estudantes que cursam espanhol, F como o conjunto de estudantes que cursam francês e R como o conjunto de estudantes que cursam russo. Então,

$$|S| = 1\,232, \qquad |F| = 879, \qquad |R| = 114,$$

$$|S \cap F| = 103, \qquad |S \cap R| = 23, \qquad |F \cap R| = 14,$$

e

$$|S \cup F \cup R| = 2\,092.$$

Quando inserimos essas quantidades na equação

$$|S \cup F \cup R| = |S| + |F| + |R| - |S \cap F| - |S \cap R| - |F \cap R| + |S \cap F \cap R|$$

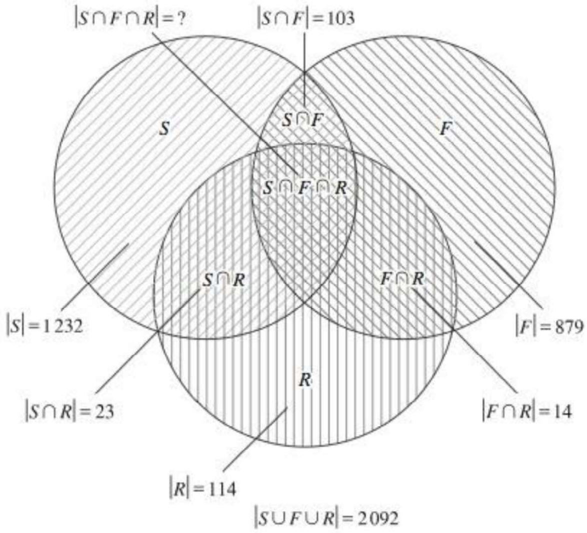


FIGURA 4 O Conjunto de Estudantes que Cursam Espanhol, Francês e Russo.

obtemos

$$2\,092 = 1\,232 + 879 + 114 - 103 - 23 - 14 + |S \cap F \cap R|.$$

Resolvemos agora em $|S \cap F \cap R|$. Encontramos que $|S \cap F \cap R| = 7$. Assim, há sete estudantes que cursam espanhol, francês e russo. Isso está ilustrado na Figura 4. ◀

Estabeleceremos e demonstraremos agora o princípio da inclusão–exclusão, que indica quantos elementos estão na união de um número finito de conjuntos finitos.

TEOREMA 1 **O PRINCÍPIO DA INCLUSÃO–EXCLUSÃO** Considere $A_1, A_2, \ldots, A_n$ como conjuntos finitos. Então,

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$
$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Demonstração: Vamos demonstrar a fórmula verificando que um elemento na união é contado exatamente uma vez pelo lado direito da equação. Suponha que a seja um membro de r dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, em que $1 \le r \le n$. Este elemento é contado $C(r, 1)$ vezes por $\Sigma|A_i|$. É contado $C(r, 2)$ vezes por $\Sigma|A_i \cap A_j|$. Em geral, é contado $C(r, m)$ vezes pela somatória envolvendo m dos conjuntos A_i. Então, este elemento é contado exatamente

$$C(r, 1) - C(r, 2) + C(r, 3) - \cdots + (-1)^{r+1} C(r, r)$$

vezes pela expressão do lado direito dessa equação. Nosso objeto é avaliar essa quantidade. A partir do Corolário 2 da Seção 5.4, temos

$$C(r, 0) - C(r, 1) + C(r, 2) - \cdots + (-1)^r C(r, r) = 0.$$

Assim,

$$1 = C(r, 0) = C(r, 1) - C(r, 2) + \cdots + (-1)^{r+1} C(r, r).$$

Assim, cada elemento na união é contado exatamente uma vez pela expressão do lado direito da equação. Isso demonstra o princípio da inclusão–exclusão. ◁

O princípio da inclusão–exclusão fornece uma fórmula para o número de elementos na união de n conjuntos para cada número inteiro positivo n. Há termos nessa fórmula para o número de elementos na intersecção de todo subconjunto não vazio da coleção de n conjuntos. Assim, há $2^n - 1$ termos nessa fórmula.

EXEMPLO 5 Dê uma fórmula para o número de elementos na união de quatro conjuntos.

Exemplos Extras

Solução: O princípio da inclusão–exclusão mostra que

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| \\ & - |A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| \\ & + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.\end{aligned}$$

Note que essa fórmula contém 15 termos diferentes, um para cada subconjunto não vazio de $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. ◀

Exercícios

1. Quantos elementos estão em $A_1 \cup A_2$ se houver 12 elementos em A_1, 18 elementos em A_2 e
a) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$?
b) $|A_1 \cap A_2| = 1$?
c) $|A_1 \cap A_2| = 6$?
d) $A_1 \subseteq A_2$?

2. Existem 345 estudantes em uma faculdade que cursam cálculo, 212 que cursam matemática discreta e 188 que cursam cálculo e matemática discreta. Quantos estudantes cursam ou cálculo ou matemática discreta?

3. Uma pesquisa em residências nos Estados Unidos revela que 96% têm, pelo menos, um aparelho de TV, 98% têm serviço de telefonia e 95% têm serviço de telefonia e, pelo menos, um aparelho de TV. Qual a porcentagem de residências nos Estados Unidos que não tem serviço de telefonia nem aparelho de TV?

4. Um relatório de marketing sobre computadores particulares afirma que 650.000 proprietários comprarão um modem para suas máquinas no próximo ano e 1.250.000 comprarão, pelo menos, um software. Se o relatório afirmar que 1.450.000 proprietários comprarão ou um modem ou, pelo menos, um software, quantos comprarão um modem e, pelo menos, um software?

5. Encontre o número de elementos em $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ se houver 100 elementos em cada conjunto e se
a) os conjuntos forem disjuntos dois a dois.
b) houver 50 elementos comuns em cada par de conjuntos e não houver elementos nos três conjuntos simultaneamente.
c) houver 50 elementos comuns em cada par de conjuntos e 25 elementos nos três conjuntos.
d) os conjuntos forem iguais.

6. Encontre o número de elementos em $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ se houver 100 elementos em A_1, 1.000 em A_2 e 10.000 em A_3, se
a) $A_1 \subseteq A_2$ e $A_2 \subseteq A_3$.
b) os conjuntos forem disjuntos dois a dois.
c) houver dois elementos comuns em cada par de conjuntos e um elemento estiver nos três conjuntos.

7. Há 2 504 estudantes de ciência da computação em uma escola. Destes, 1 876 têm um curso sobre Pascal, 999 sobre Fortran e 345 sobre C. Além disso, 876 cursam as disciplinas sobre Pascal e Fortran, 231 sobre Fortran e C e 290 sobre Pascal e C. Se 189 desses estudantes cursam as disciplinas sobre Fortran, Pascal e C, quantos desses 2 504 estudantes não cursam nenhuma dessas três linguagens computacionais?

8. Em uma pesquisa com 270 universitários, encontrou-se que 64 gostam de couve-de-bruxelas, 94 de brócolis, 58 de couve-flor, 26 de couve-de-bruxelas e de brócolis, 28 de couve-de-bruxelas e de couve-flor, 22 de brócolis e de couve-flor e 14 dos três vegetais. Quantos destes 270 estudantes não gostam de nenhum desses vegetais?

9. Quantos estudantes estão matriculados em um curso de cálculo, matemática discreta, estruturas de dados ou linguagens de programação em uma faculdade, se há 507, 292, 312 e 344 estudantes nesses cursos, respectivamente; 14 fazem cálculo e estruturas de dados; 213, cálculo e linguagens de programação; 211, matemática discreta e estruturas de dados; 43, matemática discreta e linguagens de programação; e nenhum estudante faz cálculo e matemática discreta ou estruturas de dados e linguagens de programação concomitantemente?

10. Encontre o número de inteiros positivos não excedentes a 100 que não são divisíveis por 5 ou por 7.

11. Encontre o número de inteiros positivos não excedentes a 100 que são ou ímpares ou quadrados de um inteiro.

12. Encontre o número de inteiros positivos não excedentes a 1.000 que são ou quadrados ou cubos de um inteiro.

13. Quantas cadeias de bits de extensão oito não contêm seis 0s consecutivos?

***14.** Quantas permutações de 26 letras do alfabeto inglês não contêm qualquer uma das seqüências *fish, rat* ou *bird*?

15. Quantas permutações de 10 dígitos ou começam com os 3 dígitos 987, ou contêm os dígitos 45 na quinta e na sexta posições ou terminam com os 3 dígitos 123?

16. Quantos elementos fazem parte da união de quatro conjuntos se cada um dos conjuntos tiver 100 elementos, cada par desses conjuntos compartilharem 50 elementos, cada três desses conjuntos compartilharem 25 elementos e 5 elementos fizerem parte dos quatro conjuntos?

17. Quantos elementos fazem parte da união de quatro conjuntos se os conjuntos tiverem 50, 60, 70 e 80 elementos, respectivamente, cada par de conjuntos tiver 5 elementos em comum, cada trio de conjuntos tiver 1 elemento em comum e não houver nenhum elemento em comum nos quatro conjuntos?

18. Quantos termos existem na fórmula para o número de elementos na união de 10 conjuntos dada pelo princípio da inclusão–exclusão?

19. Desenvolva a fórmula explícita dada pelo princípio da inclusão–exclusão para o número de elementos na união de cinco conjuntos.

20. Quantos elementos há na união de cinco conjuntos se os conjuntos contêm 10 000 elementos cada, cada par de conjuntos tem 1 000 elementos em comum, cada trio de conjuntos tem 100 elementos em comum, cada quatro dos cinco conjuntos têm 10 elementos em comum e há 1 elemento em todos os cinco conjuntos?

21. Desenvolva a fórmula explícita dada pelo princípio da inclusão–exclusão para o número de elementos na união de seis conjuntos quando se sabe que três desses conjuntos não têm intersecção.

***22.** Demonstre o princípio da inclusão–exclusão usando a indução matemática.

23. Considere E_1, E_2 e E_3 como eventos do espaço amostral S. Encontre uma fórmula para a probabilidade de $E_1 \cup E_2 \cup E_3$.

24. Encontre a probabilidade de uma moeda não viciada ser lançada cinco vezes e aparecer três vezes coroa, no primeiro e no último lançamentos sair coroa ou no segundo e quarto lançamentos sair cara.

25. Encontre a probabilidade de escolher quatro números aleatoriamente de 1 a 100, inclusive, sem repetições, ou todos serem ímpares, ou divisíveis por 3, ou divisíveis por 5.

26. Encontre uma fórmula para a probabilidade da união de quatro eventos em um espaço amostral se três deles não podem ocorrer ao mesmo tempo.

27. Encontre uma fórmula para a probabilidade da união de cinco eventos em um espaço amostral se quatro deles não podem ocorrer ao mesmo tempo.

28. Encontre uma fórmula para a probabilidade da união de n eventos em um espaço amostral quando dois desses eventos não podem ocorrer ao mesmo tempo.

29. Encontre uma fórmula para a probabilidade da união de n eventos em um espaço amostral.

7.6 Aplicações da Inclusão–Exclusão

Introdução

Muitos problemas de contagem podem ser resolvidos usando o princípio da inclusão–exclusão. Por exemplo, podemos usar esse princípio para encontrar o número de primos menores que um número inteiro positivo. Muitos problemas podem ser resolvidos pela contagem do número de funções sobrejetoras de um conjunto finito a outro. O princípio da inclusão–exclusão pode ser utilizado para encontrar o número dessas funções. O famoso problema do chapéu pode ser resolvido usando o princípio da inclusão–exclusão. Esse problema procura a probabilidade de nenhuma pessoa pegar o chapéu correto de volta quando o guardador de chapéus os devolve aleatoriamente.

Uma Forma Alternativa de Inclusão–Exclusão

Há uma forma alternativa do princípio de inclusão–exclusão que é útil em problemas de contagem. Em particular, essa forma pode ser usada para resolver problemas que pedem pelo número de elementos em um conjunto que não tem nenhuma das n propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Considere A_i como o subconjunto que contém os elementos que têm propriedade P_i. O número de elementos com todas as propriedades, $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}$ será indicado por $N(P_{i_1} P_{i_2} \cdots P_{i_k})$. Escrevendo essas quantidades em termos de conjuntos, temos

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = N(P_{i_1} P_{i_2} \cdots P_{i_k}).$$

Se o número de elementos com nenhuma das propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ for indicado por $N(P_1' P_2' \cdots P_n')$ e o número de elementos no conjunto for indicado por N, temos que

$$N(P_1' P_2' \cdots P_n') = N - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|.$$

A partir do princípio da inclusão–exclusão, vemos que

$$\begin{aligned} N(P'_1 P'_2 \cdots P'_n) = N &- \sum_{1 \le i \le n} N(P_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} N(P_i P_j) \\ &- \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(P_i P_j P_k) + \cdots + (-1)^n N(P_1 P_2 \cdots P_n). \end{aligned}$$

O Exemplo 1 mostra como o princípio da inclusão–exclusão pode determinar o número de soluções em números inteiros de uma equação com restrições.

EXEMPLO 1 Quantas soluções existem para

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11,$$

em que x_1, x_2 e x_3 são números inteiros não negativos com $x_1 \le 3$, $x_2 \le 4$ e $x_3 \le 6$?

Solução: Para aplicar o princípio da inclusão–exclusão, considere uma solução que tenha a propriedade P_1 se $x_1 > 3$, a propriedade P_2 se $x_2 > 4$ e a propriedade P_3 se $x_3 > 6$. O número de soluções que satisfazem as inequações $x_1 \le 3$, $x_2 \le 4$ e $x_3 \le 6$ é

$$\begin{aligned} N(P_1' P_2' P_3') = N - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) + N(P_1 P_2) \\ + N(P_1 P_3) + N(P_2 P_3) - N(P_1 P_2 P_3). \end{aligned}$$

Usando as mesmas técnicas do Exemplo 5 da Seção 5.5, temos que

- N = número total de soluções $= C(3 + 11 - 1, 11) = 78$,
- $N(P_1)$ = (número de soluções com $x_1 \ge 4$) $= C(3 + 7 - 1, 7) = C(9, 7) = 36$,
- $N(P_2)$ = (número de soluções com $x_2 \ge 5$) $= C(3 + 6 - 1, 6) = C(8, 6) = 28$,
- $N(P_3)$ = (número de soluções com $x_3 \ge 7$) $= C(3 + 4 - 1, 4) = C(6, 4) = 15$,
- $N(P_1P_2)$ = (número de soluções com $x_1 \ge 4$ e $x_2 \ge 5$) $= C(3 + 2 - 1, 2) = C(4, 2) = 6$,
- $N(P_1P_3)$ = (número de soluções com $x_1 \ge 4$ e $x_3 \ge 7$) $= C(3 + 0 - 1, 0) = 1$,
- $N(P_2P_3)$ = (número de soluções com $x_2 \ge 5$ e $x_3 \ge 7$) $= 0$,
- $N(P_1P_2P_3)$ = (número de soluções com $x_1 \ge 4$, $x_2 \ge 5$ e $x_3 \ge 7$) $= 0$.

Inserindo essas quantidades na fórmula para $N(P_1'P_2'P_3')$, mostramos que o número de soluções com $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 4$ e $x_3 \leq 6$ é igual a

$$N(P_1'P_2'P_3') = 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 + 0 - 0 = 6. \qquad \blacktriangleleft$$

O Crivo de Eratóstenes

O princípio da inclusão–exclusão pode ser utilizado para encontrar o número de primos não excedentes a determinado número inteiro positivo. Lembre-se de que um número inteiro composto é divisível por um primo não excedente à sua raiz quadrada. Assim, para encontrar o número de primos não excedentes a 100, primeiro note que os inteiros compostos não excedentes a 100 devem ter um fator primo não excedente a 10. Como os únicos primos menores que 10 são 2, 3, 5 e 7, os primos não excedentes a 100 são estes quatro primos e os números inteiros positivos maiores que 1 e não excedentes a 100 que não são divisíveis por 2, 3, 5 ou 7. Para aplicar o princípio da inclusão–exclusão, considere P_1 como a propriedade de um inteiro ser divisível por 2, considere P_2 como a propriedade de um inteiro ser divisível por 3, considere P_3 como a propriedade de um inteiro ser divisível por 5 e considere P_4 como a propriedade de um inteiro ser divisível por 7. Assim, o número de primos não excedentes a 100 é

$$4 + N(P_1'P_2'P_3'P_4').$$

Como há 99 números inteiros positivos maiores que 1 e não excedentes a 100, o princípio da inclusão–exclusão mostra que

$$\begin{aligned} N(P_1'P_2'P_3'P_4') = 99 &- N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) - N(P_4) \\ &+ N(P_1P_2) + N(P_1P_3) + N(P_1P_4) + N(P_2P_3) + N(P_2P_4) + N(P_3P_4) \\ &- N(P_1P_2P_3) - N(P_1P_2P_4) - N(P_1P_3P_4) - N(P_2P_3P_4) \\ &+ N(P_1P_2P_3P_4). \end{aligned}$$

O número de inteiros não excedentes a 100 (e maiores que 1) que são divisíveis por todos os primos em um subconjunto de $\{2, 3, 5, 7\}$ é $\lfloor 100/N \rfloor$, em que N é o produto dos números primos nesse subconjunto. (Isto porque sempre dois desses primos não têm fator comum.) Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} N(P'_1P'_2P'_3P'_4) = 99 &- \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor \\ &+ \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5\cdot 7} \right\rfloor \\ &- \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor \\ &= 99 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 - 0 + 0 \\ &= 21. \end{aligned}$$

Assim, há $4 + 21 = 25$ números primos não excedentes a 100.

O **Crivo de Eratóstenes** é utilizado para encontrar todos os números primos não excedentes a determinado inteiro positivo. Por exemplo, o procedimento a seguir é utilizado para encontrar números primos não excedentes a 100. Primeiro, os números inteiros que são divisíveis por 2, diferentes de 2, são deletados. Como 3 é o primeiro número inteiro maior que 2, todos aqueles

21. 15 **23. a)** $x^4(1+x+x^2+x^3)^2/(1-x)$ **b)** 6 **25. a)** O coeficiente de x^r na expansão em série de potências de $1/[(1-x^3)(1-x^4)(1-x^{20})]$ **b)** $1/(1-x^3-x^4-x^{20})$ **c)** 7 **d)** 3224 **27. a)** 3 **b)** 29 **c)** 29 **d)** 242 **29. a)** 10 **b)** 49 **c)** 2 **d)** 4 **31. a)** $G(x)-a_0-a_1x-a_2x^2$ **b)** $G(x^2)$ **c)** $x^4G(x)$ **d)** $G(2x)$ **e)** $\int_0^x G(t)dt$ **f)** $G(x)/(1-x)$ **33.** $a_k=2\cdot 3^k-1$ **35.** $a_k=18\cdot 3^k-12\cdot 2^k$ **37.** $a_k=k^2+8k+20+(6k-18)2^k$ **39.** Seja $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_kx^k$. Depois de trocar o índice da somatória e somar as séries, vemos que $G(x)-xG(x)-x^2G(x)=f_0+(f_1-f_0)x+\sum_{k=2}^{\infty}(f_k-f_{k-1}-f_{k-2})x^k=0+x+\sum_{k=2}^{\infty}0x^k$. Portanto, $G(x)-xG(x)-x^2G(x)=x$. Isolando $G(x)$, obtemos $G(x)=x/(1-x-x^2)$. Pelo método das frações parciais, pode ser mostrado que $x/(1-x-x^2)=(1/\sqrt{5})[1/(1-\alpha x)-1/(1-\beta x)]$, em que $\alpha=(1+\sqrt{5})/2$ e $\beta=(1-\sqrt{5})/2$. Usando o fato de que $1/(1-\alpha x)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^kx^k$, segue que $G(x)=(1/\sqrt{5})\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha^k-\beta^k)x^k$. Portanto, $f_k=(1/\sqrt{5})\cdot(\alpha^k-\beta^k)$. **41. a)** Seja $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n$ a função geradora de $\{C_n\}$. Então, $G(x)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}C_kC_{n-k})x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n-1}C_kC_{n-1-k})x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}C_nx^{n-1}$. Logo, $xG(x)^2=\sum_{n=1}^{\infty}C_nx^n$, o que implica que $xG(x)^2-G(x)+1=0$. A aplicação da fórmula quadrática mostra que $G(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$. Escolhemos o sinal de menos nesta fórmula porque a escolha do sinal de mais leva a uma divisão por zero. **b)** Pelo Exercício 40, $(1-4x)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$. Integrar termo a termo (o que é válido por um teorema do cálculo), mostra que $\int_0^x(1-4t)^{-1/2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n\cdot\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$. Portanto, $\int_0^x(1-4t)^{-1/2}dt=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}=xG(x)$, ao igualarmos os coeficientes, obtemos $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. **43.** Aplicando o Teorema Binomial à igualdade $(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n$, obtemos $\sum_{r=0}^{m+n}C(m+n,r)x^r=\sum_{r=0}^{m}C(m,r)x^r\cdot\sum_{r=0}C(n,r)x^r=\sum_{r=0}^{m+n}\left[\sum_{k=0}^{r}C(m,r-k)\,C(n,k)\right]x^r$. A comparação dos coeficientes fornece a identidade desejada. **45. a)** $2e^x$ **b)** e^{-x} **c)** e^{3x} **d)** xe^x+e^x **e)** $(e^x-1)/x$ **47. a)** $a_n=(-1)^n$ **b)** $a_n=3\cdot 2^n$ **c)** $a_n=3^n-3\cdot 2^n$ **d)** $a_n=(-2)^n$ para $n\geq 2$, $a_1=-3$, $a_0=2$ **e)** $a_n=(-2)^n+n!$ **f)** $a_n=(-3)^n+n!\cdot 2^n$ para $n\geq 2$, $a_0=1$, $a_1=-2$ **g)** $a_n=0$ se n for ímpar e $a_n=n!/(n/2)!$ se n for par **49. a)** $a_n=6a_{n-1}+8^{n-1}$ para $n\geq 1$, $a_0=1$ **b)** A solução geral da relação de recorrência associada linear e homogênea é $a_n^{(h)}=\alpha 6^n$. Uma solução particular é $a_n^{(p)}=\frac{1}{2}\cdot 8^n$. Portanto, a solução geral é $a_n=\alpha 6^n+\frac{1}{2}\cdot 8^n$. Usando a condição inicial, segue que $\alpha=\frac{1}{2}$. Portanto, $a_n=(6^n+8^n)/2$. **c)** Seja $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$. Usando a relação de recorrência para $\{a_k\}$, pode ser mostrado que $G(x)-6xG(x)=(1-7x)/(1-8x)$. Portanto, $G(x)=(1-7x)/[(1-6x)(1-8x)]$. Usando frações parciais, segue que $G(x)=(1/2)/(1-6x)+(1/2)/(1-8x)$. Com a ajuda da Tabela 1, segue que $a_n=(6^n+8^n)/2$. **51.** $\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdots$ **53.** $(1+x)(1+x)^2(1+x)^3\cdots$ **55.** As funções geradoras obtidas nos exercícios 52 e 53 são iguais porque $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdots=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots$. **57. a)** $G_X(1)=\sum_{k=0}^{\infty}p(X=k)\cdot 1^k=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=1$ **b)** $G'_X(1)=\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}p(X=k)\cdot x^k|_{x=1}=\sum_{k=0}^{\infty}p(X=k)\cdot k\cdot x^{k-1}|_{x=1}=\sum_{k=0}^{\infty}p(X=k)\cdot k=E(X)$ **c)** $G''_X(1)=\frac{d^2}{dx^2}\sum_{k=0}^{\infty}p(X=k)\cdot x^k|_{x=1}=\sum_{k=0}^{\infty}p(X=k)\cdot k(k-1)\cdot x^{k-2}|_{x=1}=\sum_{k=0}^{\infty}p(X=k)\cdot(k^2-k)=V(X)+E(X)^2-E(X)$. Combinando isto com a parte (b), obtemos os resultados desejados. **59. a)** $G(x)=p^m/(1-qx)^m$ **b)** $V(x)=mq/p^2$

Seção 7.5

1. a) 30 **b)** 29 **c)** 24 **d)** 18 **3.** 1% **5. a)** 300 **b)** 150 **c)** 175 **d)** 100 **7.** 492 **9.** 974 **11.** 55 **13.** 248 **15.** 50.138 **17.** 234 **19.** $|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5|=|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|+|A_5|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_1\cap A_4|-|A_1\cap A_5|-|A_2\cap A_3|-|A_2\cap A_4|-|A_2\cap A_5|-|A_3\cap A_4|-|A_3\cap A_5|-|A_4\cap A_5|+|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|+|A_1\cap A_2\cap A_5|+|A_1\cap A_3\cap A_4|+|A_1\cap A_3\cap A_5|+|A_1\cap A_4\cap A_5|+|A_2\cap A_3\cap A_4|+|A_2\cap A_3\cap A_5|+|A_2\cap A_4\cap A_5|+|A_3\cap A_4\cap A_5|-|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|-|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_5|-|A_1\cap A_2\cap A_4\cap A_5|-|A_1\cap A_3\cap A_4\cap A_5|-|A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5|+|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5|$ **21.** $|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6|=|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|+|A_5|+|A_6|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_1\cap A_4|-|A_1\cap A_5|-|A_1\cap A_6|-|A_2\cap A_3|-|A_2\cap A_4|-|A_2\cap A_5|-|A_2\cap A_6|-|A_3\cap A_4|-|A_3\cap A_5|-|A_3\cap A_6|-|A_4\cap A_5|-|A_4\cap A_6|-|A_5\cap A_6|$ **23.** $p(E_1\cup E_2\cup E_3)=p(E_1)+p(E_2)+p(E_3)-p(E_1\cap E_2)-p(E_1\cap E_3)-p(E_2\cap E_3)+p(E_1\cap E_2\cap E_3)$ **25.** 4972/71.295 **27.** $p(E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4\cup E_5)=p(E_1)+p(E_2)+p(E_3)+p(E_4)+p(E_5)-p(E_1\cap E_2)-p(E_1\cap E_3)-p(E_1\cap E_4)-p(E_1\cap E_5)-p(E_2\cap E_3)-p(E_2\cap E_4)-p(E_2\cap E_5)-p(E_3\cap E_4)-p(E_3\cap E_5)-p(E_4\cap E_5)+p(E_1\cap E_2\cap E_3)+p(E_1\cap E_2\cap E_4)+p(E_1\cap E_2\cap E_5)+p(E_1\cap E_3\cap E_4)+p(E_1\cap E_3\cap E_5)+p(E_1\cap E_4\cap E_5)+p(E_2\cap E_3\cap E_4)+P(E_2\cap E_3\cap E_5)+p(E_2\cap E_4\cap E_5)+p(E_3\cap E_4\cap E_5)$ **29.** $p(\bigcup_{i=1}^{n}E_i)=\sum_{1\leq i\leq n}p(E_i)-\sum_{1\leq i<j\leq n}p(E_i\cap E_j)+\sum_{1\leq i<j<k\leq n}p(E_i\cap E_j\cap E_k)-\cdots+(-1)^{n+1}p(\bigcap_{i=1}^{n}E_i)$

Seção 7.6

1. 75 **3.** 6 **5.** 46 **7.** 9875 **9.** 540 **11.** 2100 **13.** 1854 **15. a)** $D_{100}/100!$ **b)** $100D_{99}/100!$ **c)** $C(100,2)/100!$ **d)** 0 **e)** $1/100!$ **17.** 2.170.680 **19.** Pelo Exercício 18, temos $D_n-nD_{n-1}=-[D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}]$. Iterando, temos $D_n-nD_{n-1}=-[D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}]=-[-(D_{n-2}-(n-2)D_{n-3})]=D_{n-2}-(n-2)D_{n-3}=\cdots=(-1)^n(D_2-2D_1)=(-1)^n$, pois $D_2=1$ e $D_1=0$. **21.** Quando n é ímpar. **23.** $\phi(n)=n-\sum_{i=1}^{m}\frac{n}{p_i}+\sum_{1\leq i<j\leq m}\frac{n}{p_ip_j}-\cdots\pm\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}=n\prod_{i=1}^{m}(a-\frac{1}{p_i})$ **25.** 4 **27.** Existem n^m funções de um conjunto com m elementos em um conjunto com n elementos, $C(n,1)(n-1)^m$ funções de um conjunto com m elementos para um conjunto com n elementos que não atinja exatamente um elemento, $C(n,2)(n-2)^m$ funções de um conjunto com m elementos para um conjunto com n elementos que não atinja exatamente dois elementos, e assim por diante, com $C(n,n-1)\cdot 1^m$ funções de um conjunto com m elementos para um conjunto com n elementos que não atinja exatamente