Geometria Analítica - Semana 4
Funcional Linear e Determinantes

Professor: Victor M. Cunha

Instituto de Matemática
e Estatística (IME) - UFBA

Abril 2022

Sumário

- Um funcional $\ell\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um funcional linear se tivermos:

$$\ell(\vec{u}+\vec{v}) = \ell(\vec{u}) + \ell(\vec{v}) \qquad \ell(\alpha\vec{u}) = \alpha\ell(\vec{u})$$

  ou seja, um funcional linear 'respeita' as operações de soma e produto por escalar do espaço vetorial.

- Exemplos:
  - Seja $\ell\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell(x\vec{i} + y\vec{j}) = 2x - y$. Mostre que ℓ é um funcional linear.
  - Seja $\ell\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um funcional linear, $\vec{u} = (-2, 1, 3)$ e $\vec{v} = (4, -2, -6)$. Dado $\ell(\vec{u}) = 2$, calcule $\ell(\vec{v})$.
  - Seja $\ell\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um funcional linear, $\vec{e}_1 = (-2, 1)$, $\vec{e}_2 = (0, -1)$ e $\vec{v} = (2, 1)$. Sabendo que $\ell(\vec{e}_1) = -1$ e $\ell(\vec{e}_2) = 2$, calcule $\ell(\vec{v})$.
  - Dado um funcional linear $\ell\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mostre que $\ell(\vec{0}) = 0$.
  - Dado um vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ qualquer. Mostre que $\ell\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\ell(\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v}$ é um funcional linear.

Funcionais Lineares e Bases

- Seja $\ell\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um funcional linear e $E = \{\vec{e}_1, \vec{2}_2\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$. Dado $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, podemos escrever $\vec{v}$ como uma combinação linear de $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$:

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$$

- A partir da linearidade do funcional, temos então:

$$\ell(\vec{v}) = \alpha_1\, \ell(\vec{e}_1) + \alpha_2\, \ell(\vec{e}_2)$$

  portanto, a partir dos valores de $\ell(\vec{e}_1)$ e $\ell(\vec{e}_2)$, podemos encontrar $\ell(\vec{v})$.
- De modo análogo, sendo $\ell\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um funcional linear e $E = \{\vec{e}_1, \vec{2}_2, \vec{e}_3\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, podemos encontrar $\ell(\vec{v})$ a partir de $\ell(\vec{e}_1)$, $\ell(\vec{e}_2)$ e $\ell(\vec{e}_3)$, para qualquer $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.
- Um funcional linear é completamente determinado pelos valores que ele assume nos vetores de uma base.

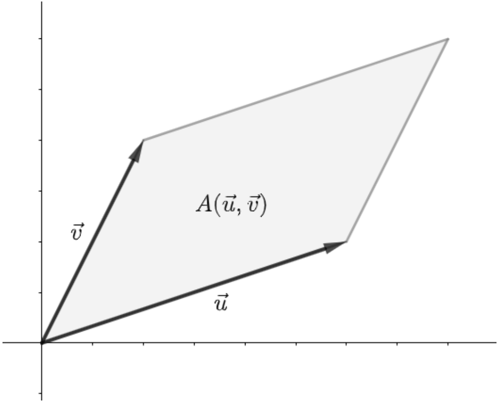
- A partir da bilinearidade do produto escalar, dado um vetor qualquer $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, temos $\ell\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ um funcional linear.
- Por outro lado, dado $\ell\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um funcional linear qualquer, com $\ell(\vec{i}) = u_1$ e $\ell(\vec{j}) = u_2$. Dado $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$, temos:

  $$\ell(\vec{v}) = v_1\,\ell(\vec{i}) + v_2\,\ell(\vec{j}) = u_1v_1 + u_2v_2 = \vec{u} \cdot \vec{v},$$

  onde $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.
- Logo, dado um funcional linear $\ell\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qualquer, existe um vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ associado ao funcional tal que $\ell(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Temos um resultado análogo para três dimensões, a partir de $\ell(\vec{i})$, $\ell(\vec{j})$ e $\ell(\vec{k})$.
- Dizemos que temos uma *dualidade* entre os funcionais lineares $\ell\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e os vetores $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, formada a partir do produto escalar.

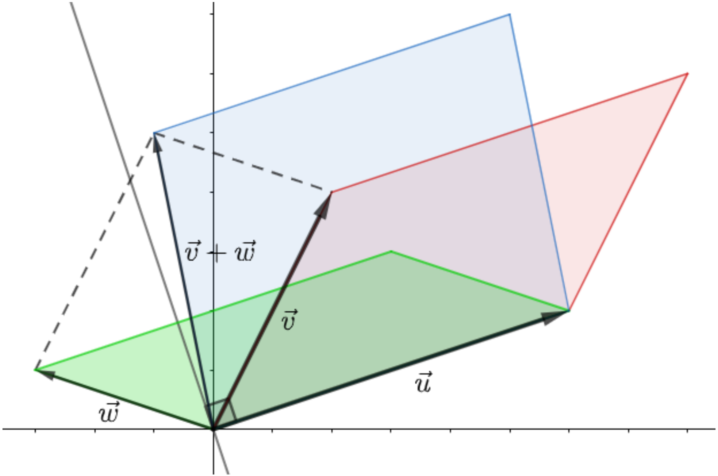
- Seja $\ell\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um funcional linear, $\vec{e}_1 = (1, -2)$, $\vec{e}_2 = (-1, -1)$. Sabendo que $\ell(\vec{e}_1) = -2$ e $\ell(\vec{e}_2) = 3$:
  - Encontre $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\ell(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.
  - Encontre $\vec{w} \neq \vec{0}$ tal que $\ell(\vec{w}) = 0$.
  - Encontre uma base ortonormal $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ tal que $\ell(\vec{f}_2) = 0$.
- Seja $\ell\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Sabendo que $\ell(\vec{i}) = -2$ e $\ell(\vec{i} - 2\vec{j}) = 3$ e $\ell(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = 1$:
  - Encontre $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\ell(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.
  - Encontre vetores não-paralelos $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\ell(\vec{w}_1) = \ell(\vec{w}_2) = 0$.
  - Encontre uma base ortonormal $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ tal que $\ell(\vec{f}_2) = \ell(\vec{f}_3) = 0$.

- Dados dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Considere $A(\vec{u}, \vec{v})$ a área do paralelogramo formado por eles.



- Se fixarmos $\vec{u} \neq \vec{0}$, note que $\ell(\vec{v}) = A(\vec{u}, \vec{v})$ não é um funcional linear. Em particular, temos $\ell(-\vec{v}) = \ell(\vec{v})$ e não $\ell(-\vec{v}) = -\ell(\vec{v})$.

- No entanto, se associarmos um *sinal* para esta área, considerando $A(\vec{u}, \vec{v})$ positiva/negativa quando a orientação de $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ for positiva/negativa, teremos agora $\ell(\vec{v}) = A(\vec{u}, \vec{v})$ um funcional linear.



- Note que, com a introdução deste sinal, a ordem dos vetores faz diferença. Em particular, temos $A(\vec{v},\vec{u}) = -A(\vec{u},\vec{v})$.
- Chamamos essa *área com sinal* do determinante da matriz formada pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, nesta ordem.

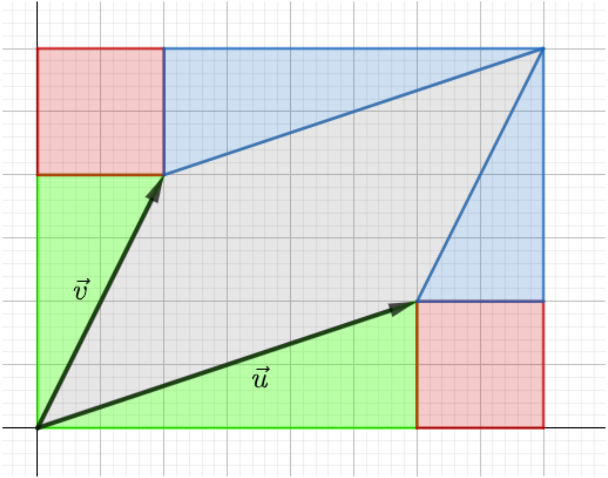
$$det(\vec{u},\vec{v}) = A(\vec{u},\vec{v})$$

- Dados $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, representamos este determinante como:

$$det(\vec{u},\vec{v}) = det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

- Note que se fixarmos agora $\vec{v}$, $\ell(\vec{u}) = det(\vec{u},\vec{v}) = -det(\vec{v},\vec{u})$ também é um funcional linear. O determinante é, portanto, bilinear.

- Podemos encontrar 'na mão grande' uma expressão para o determinante $det(\vec{u}, \vec{v})$ a partir do cálculo das áreas abaixo.



- No entanto, podemos utilizar a bilinearidade do determinante ao nosso favor.
- Primeiro, note que temos, para os vetores da base canônica:

$$det(\vec{i},\vec{i}) = det(\vec{j},\vec{j}) = 0 \qquad det(\vec{i},\vec{j}) = -det(\vec{j},\vec{i}) = 1$$

- Deste modo, dados $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, temos:

$$\begin{aligned} det(\vec{u},\vec{v}) &= det(u_1\vec{i} + u_2\vec{j}, v_1\vec{i} + v_2\vec{j}) \\ &= u_1v_1\, det(\vec{i},\vec{i}) + u_1v_2\, det(\vec{i},\vec{j}) + u_2v_1\, det(\vec{j},\vec{i}) + u_2v_2\, det(\vec{j},\vec{j}) \\ &= u_1v_2 - u_2v_1 \end{aligned}$$

- Sendo assim, o determinante é dado por:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1$$

Anti-Comutatividade $det(\vec{u}, \vec{v}) = -det(\vec{v}, \vec{u})$.

Bilinearidade

$$det(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = det(\vec{u}, \vec{v}) + det(\vec{u}, \vec{w}), \qquad det(\vec{u}, \alpha\vec{v}) = \alpha\, det(\vec{u}, \vec{v})$$
$$det(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = det(\vec{u}, \vec{w}) + det(\vec{v}, \vec{w}) \qquad det(\alpha\vec{u}, \vec{v}) = \alpha\, det(\vec{u}, \vec{v})$$

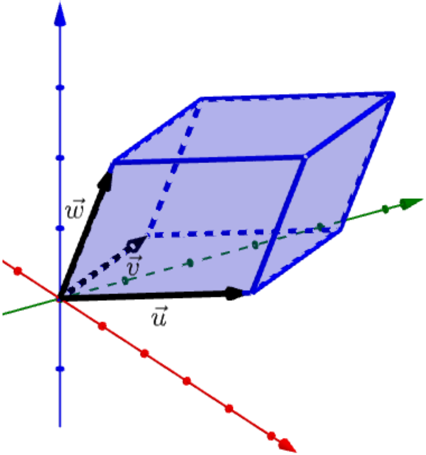
Módulo Para todos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, temos:

$$|det(\vec{u}, \vec{v})| = \|\vec{u}\|\, \|\vec{v}\|\, sen\, \theta$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

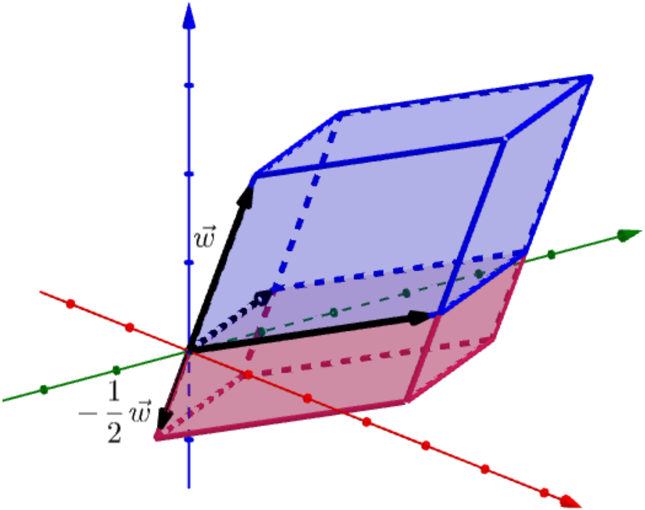
- Mostre que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, para todo $k \in \mathbb{R}$.
- Mostre que o sistema homogêneo $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{cases}$ admite apenas a solução trivial $x = y = 0$ se e somente se $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.
- Calcule a área do triângulo de vértices $A(1,-1)$, $B(2,3)$ e $C(-3,-3)$.
- Calcule a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ do triângulo acima.
- Dado $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, encontre $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ tal que $det(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{v}$, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

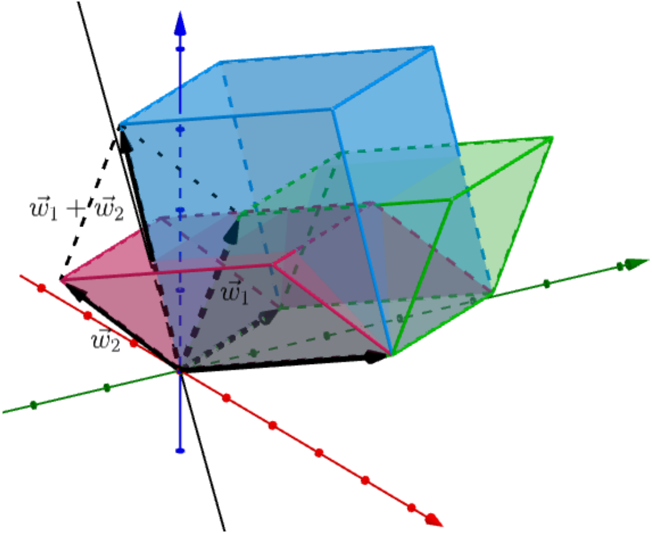
- Para estendermos o conceito de determinantes para o espaço, dados três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, considere $V(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ o volume do paralelepípedo formado por eles.



- Novamente, se fixarmos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $\ell(\vec{w}) = V(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ não é em geral um funcional linear.
- Podemos, no entanto, associar um *sinal* para este volume, considerando $V(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ positivo/negativo quando a orientação da base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ for positiva/negativa.
- Caso $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam coplanares, eles não formam uma base do $\mathbb{R}^3$, mas nesse caso $V(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ e o sinal não tem importância.
- Considerando este *volume com sinal*, temos agora $\ell(\vec{w}) = V(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ um funcional linear.
- Note que, com a introdução deste sinal, a ordem dos vetores faz diferença. Em particular, quando trocamos a ordem de dois dos vetores, temos uma troca de sinal:

$$
\begin{aligned}
V(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) &= V(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = V(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -V(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \\
V(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) &= V(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = V(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})
\end{aligned}
$$


$\vec{w}$
$-\frac{1}{2}\vec{w}$



$\vec{w}_1 + \vec{w}_2$
$\vec{w}_1$
$\vec{w}_2$

- Chamamos este *volume com sinal* do determinante da matriz formada pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, nesta ordem.

$$det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = V(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

- Dados $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, representamos este determinante como:

$$det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

- Note que, fixando $\vec{u}$ e $\vec{w}$, ou $\vec{v}$ e $\vec{w}$, $\ell(\vec{v}) = det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ e $\ell(\vec{u}) = det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ também são funcionais lineares. O determinante é, portanto, multilinear.

- Novamente, podemos utilizar os valores dos determinantes associados à base canônica e a multilinearidade para obter uma fórmula para o determinante.
- Temos, para os vetores da base canônica:

$$det(\vec{i},\vec{j},\vec{k}) = det(\vec{j},\vec{k},\vec{i}) = det(\vec{k},\vec{i},\vec{j}) = 1$$
$$det(\vec{i},\vec{k},\vec{j}) = det(\vec{k},\vec{j},\vec{i}) = det(\vec{j},\vec{i},\vec{k}) = -1$$

- Para todas as outras triplas ordenadas, temos determinantes nulos, dado que, como um dos vetores estará repetido, teremos vetores coplanares.
- Deste modo, dados $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, temos:

$$\begin{aligned} det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) &= det(u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}\,, v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k},\ w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}) \\ &= u_1v_2w_3\, det(\vec{i},\vec{j},\vec{k}) + u_1v_3w_2\, det(\vec{i},\vec{k},\vec{j}) + u_2v_3w_1\, det(\vec{j},\vec{k},\vec{i}) \\ &\quad + u_2v_1w_3\, det(\vec{j},\vec{i},\vec{k}) + u_3v_1w_2\, det(\vec{k},\vec{i},\vec{j}) + u_3v_2w_1\, det(\vec{k},\vec{j},\vec{i}) \\ &= (u_1v_2w_3 + v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3) - (w_1v_2u_3 + u_1w_2v_3 + v_1u_2w_3) \end{aligned}$$

- Sendo assim, o determinante é dado por:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = (u_1v_2w_3 + v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3) \\ - (w_1v_2u_3 + u_1w_2v_3 + v_1u_2w_3)$$

- Podemos também representar o determinante em três dimensões a partir de determinantes menores:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

Anti-Comutatividade

$$det(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = det(\vec{w},\vec{v},\vec{u}) = det(\vec{u},\vec{w},\vec{v}) = -det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$$
$$det(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = det(\vec{w},\vec{u},\vec{v}) = det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$$

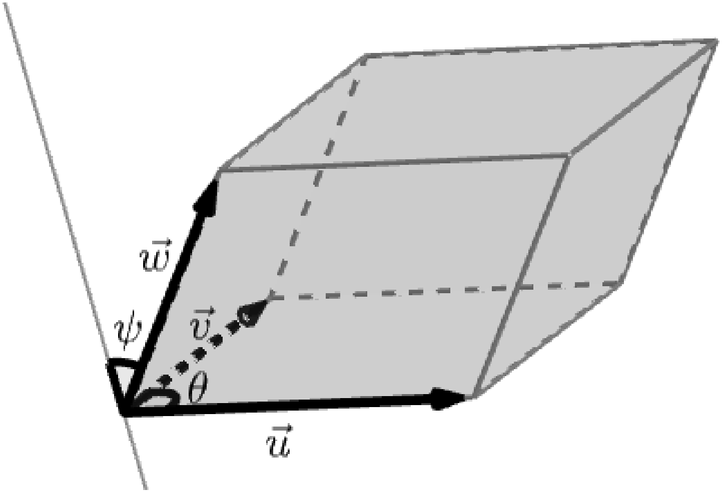
Multilinearidade

$$det(\vec{u},\vec{v},\alpha_1\vec{w}_1 + \alpha_2\vec{w}_2) = \alpha_1\, det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}_1) + \alpha_2\, det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}_2)$$
$$det(\vec{u},\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2,\vec{w}) = \alpha_1\, det(\vec{u},\vec{v}_1,\vec{w}) + \alpha_2\, det(\vec{u},\vec{v}_2,\vec{w})$$
$$det(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2,\vec{v},\vec{w}) = \alpha_1\, det(\vec{u}_1,\vec{v},\vec{w}) + \alpha_2\, det(\vec{u}_2,\vec{v},\vec{w})$$

Módulo Dados os vetores não-colineares $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, temos:

$$|det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\, sen\,\theta\, cos\,\psi$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ψ é o ângulo entre $\vec{w}$ e a direção perpendicular ao plano uv.



$\vec{w}$
ψ
$\vec{v}$
θ
$\vec{u}$

- Dados os vetores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (2, -1, 0)$ e $\vec{w} = (2, 2, 1)$, calcule $det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
- Verifique se os vetores a seguir são coplanares:
  - $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, -1, -1)$ e $\vec{w} = (0, 1, 1)$.
  - $\vec{u} = (2, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 2)$ e $\vec{w} = (3, -1, 0)$.
  - $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 3, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 2, -4)$.
- Calcule o volume do tetraedro de vértices $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 2, 3)$, $C(-2, -3, 2)$ e $D(0, 4, -2)$.
- Dados os pontos $A(1, 0, -1)$, $B(2, -1, 3)$ e $C(1, -2, 1)$, encontre o ponto do eixo z coplanar com A, B e C.
- Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1, 1)$ e $\vec{v} = (-3, 0, 2)$, encontre $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ tal que $det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{n} \cdot \vec{w}$, para todo $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$.