Mudança de variáveis na integral

Considere funções $f(t)$ e $g(t)$ (Suporemos que g é derivável). Vamos determinar a seguir uma expressão para a integral:

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

Considere a mudança de variáveis $u = g(t)$. Então:

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int f(u)du$$

Exemplo:

1) $\int 2 \cdot \sin 2t \, dt = \int \sin u \, du = -\cos u + L, L \in \mathbb{R} = -\cos 2t + L, L \in \mathbb{R}$

Façamos: $u = 2t$

2) $\int t \cdot \cos t^2 \, dt = \int \frac{2}{2} \cdot t \cdot \cos t^2 \, dt = \frac{1}{2} \int 2t \cdot \cos t^2 dt$

Façamos: $u = t^2$. Dessa forma, a integral acima pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{2}\int \cos u \, du = \frac{1}{2}\sin u + C = \frac{1}{2}\sin t^2 + C, C \in \mathbb{R}$$

3) $\int 5t \cdot e^{t^2} dt = 5\int t \cdot e^{t^2} dt = ?$

Façamos $u = t^2$. Logo, $\frac{du}{dt} = 2t$

Logo:

$$5\int t \cdot e^{t^2} dt = 5\int \frac{2}{2} \cdot t \cdot e^{t^2} dt = \frac{5}{2}\int 2t \cdot e^{t^2}\, dt = \frac{5}{2}\int e^u du$$
$$= \frac{5}{2}e^u + K = \frac{5}{2}e^{t^2} + K, K \in \mathbb{R}$$

4) $\int 2 \cdot e^{t^2} dt = \int 2 \cdot \frac{t}{t} \cdot e^{t^2} dt \neq \frac{1}{t}\int 2t \cdot e^{t^2} dt$

Nesse caso em específico, o método de mudança de variáveis não será eficaz para determinar a solução do problema.

5) Translações na variável independente: Trocar $f(t)$ por $f(t+m), m \in \mathbb{R}$

Nesse caso, é possível verificar que basta transladarmos a expressão para a integral de f:

$$\int \sin t \, dt = -\cos t + K, K \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin(t + 50)\, dt = ?$$

Façamos: $u = t + 50$. Logo: $\frac{du}{dt} = 1$. Portanto:

$$\int \sin(t + 50)dt = \int \sin u\, du = -\cos u + M = -\cos(t + 50) + M, M \in \mathbb{R}$$