Integração por partes

Vimos em aulas passadas que o método de Mudança de Variáveis na integral é bastante adequado para o cenário no qual desejamos integrar uma função que apresente algum tipo de composição em sua expressão algébrica.

O caso que veremos agora (integração por partes) costuma ser bastante adequado para o cenário no qual desejamos integrar um produto de [duas ou mais] funções:

$$\int f(t) \cdot g(t) dt = ?$$

Exemplos:

1)

$$\int t \cdot e^{t} dt = ?$$

2)

$$\int t \cdot \sin t \, dt = ?$$

3)

$$\int e^{t} \cdot \cos t \, dt = ?$$

O método de Integração por Partes que veremos a seguir se baseia numa construção inversa à da regra da derivação de um produto de funções. Vejamos a seguir:

Sabemos que, se $f(t)$ e $g(t)$ são deriváveis, então:

$$\big(f(t) \cdot g(t)\big)' = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$$

Logo:

$$f'(t) \cdot g(t) = \big(f(t) \cdot g(t)\big)' - f(t) \cdot g'(t)$$

Suponhamos que ambas as expressões acima possuem integral indefinida. Pela igualdade estabelecida, podemos afirmar:

$$\int f'(t)\cdot g(t)dt = \int\left(\left(f(t)\cdot g(t)\right)' - f(t)\cdot g'(t)\right)dt$$

$$= \int\left(f(t)\cdot g(t)\right)'dt - \int f(t)\cdot g'(t)dt$$

$$= f(t)\cdot g(t) - \int f(t)\cdot g'(t)dt$$

A ideia é que talvez a integral do lado esquerdo talvez seja mais elaborada, mas a integral do lado direito deverá ser mais simples. Vejamos os exemplos a seguir:

1)

$$\int t\cdot e^t dt = ?$$

Escolheremos: $\begin{cases} f'(t) = e^t \\ g(t) = t \end{cases}$. Dessa forma, teremos:

$$\begin{cases} f(t) = e^t \\ g'(t) = 1 \end{cases}$$

e assim:

$$\int t\cdot e^t dt = t\cdot e^t - \int e^t\cdot 1\,dt = t\cdot e^t - e^t + K$$
$$= e^t\cdot(t-1) + K, K \in \mathbb{R}$$

2)

$$\int t \cdot \sin t \, dt = ?$$

Exercício!!

$$\int t \cdot \sin t \, dt = \cdots = -t \cdot \cos t + \sin t + J, J \in \mathbb{R}$$

3)

$$\int t^2 \cdot e^t dt = ?$$

Exercício!! (Sugestão: Aplicar integração por partes 2 vezes.)

4)

$$\int e^t \cdot \cos t \, dt = ?$$

Escolhamos: $\begin{cases} f'(t) = \cos t \\ g(t) = e^t \end{cases}$. Logo: $\begin{cases} f(t) = \sin t \\ g'(t) = e^t \end{cases}$. Pelo método de integração por partes, teremos:

$$\int e^t \cdot \cos t \, dt = e^t \cdot \sin t - \int e^t \cdot \sin t \, dt = ?$$

Apliquemos integração por partes novamente:

Escolhamos: $\begin{cases} h'(t) = \sin t \\ i(t) = e^t \end{cases}$. Logo: $\begin{cases} h(t) = -\cos t \\ i'(t) = e^t \end{cases}$.

Pelo método de integração por partes, teremos:

$$\int e^t \cdot \sin t \, dt = -e^t \cdot \cos t + \int e^t \cdot \cos t \, dt$$

Portanto, a expressão original da integral ficará:

$$\int e^t \cdot \cos t \, dt = e^t \cdot \sin t - \int e^t \cdot \sin t \, dt =$$

$$= e^t \cdot \sin t + e^t \cdot \cos t - \int e^t \cdot \cos t \, dt$$

Logo:

$$\int e^t \cdot \cos t \, dt + \int e^t \cdot \cos t \, dt$$
$$= e^t \cdot \sin t + e^t \cdot \cos t + L$$

Ou seja:

$$\int e^t \cdot \cos t \, dt = \frac{e^t \cdot (\sin t + \cos t)}{2} + K, K \in \mathbb{R}$$

5)

$$\int \ln t \, dt = ?$$

$$\int \ln t \, dt = \int 1 \cdot \ln t \, dt$$

Escolhamos: $\begin{cases} f'(t) = 1 \\ g(t) = \ln t \end{cases}$. Logo: $\begin{cases} f(t) = t \\ g'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$. Pelo método de integração por partes, teremos:

$$\int 1 \cdot \ln t \, dt = t \cdot \ln t - \int t \cdot \frac{1}{t} dt = t \cdot \ln t - \int 1 dt$$

$$= t \cdot \ln t - t + K = t(\ln t - 1) + K, K \in \mathbb{R}$$