

Integral de funções racionais

Relembrando:

$$\int \frac{5}{-4t+9} dt = \frac{5}{-4} \cdot \int \frac{-4}{-4t+9} dt = -\frac{5}{4} \cdot \ln(-4t+9) + K, K \in \mathbb{R}$$

Vamos agora analisar o subcaso: $\partial p(t) = 1$

$$\int \frac{t+1}{t-3} dt$$

Neste caso, deveremos efetuar a divisão dos polinômios:

$$\begin{array}{r} 10 \quad \underline{3} \\ 1 \quad 3 \end{array}$$

Este é o algoritmo da divisão euclidiana, o qual nos diz que:

$$D = d \cdot q + r, 0 \leq r < d$$

$$\begin{array}{r} t+1 \quad \underline{t-3} \\ - \quad t-3 \quad 1 \\ \hline 0+1-(-3) = 4 \end{array}$$

$$0 + 1 - (-3) = 4$$

Usando o algoritmo da divisão euclidiana aplicado a polinômios, concluímos que:

$$t+1 = (t-3) \cdot 1 + 4, \text{ ou seja:}$$

$$\frac{t+1}{t-3} = 1 + \frac{4}{t-3}$$

Logo:

passagem confusa!

$$\int \frac{t+1}{t-3} dt = \int 1 + \frac{4}{t-3} dt = t + 4 \int \frac{1}{t-3} dt \\ = t + 4 \cdot \ln(t-3) + L, L \in \mathbb{R}$$

Vamos exercitar o conhecimento aprendido acima por meio do seguinte exemplo:

$$\int \frac{t^2 - 5t + 6}{t-5} dt$$

Veja que:

$$t^2 - 5t + 6 = t(t-5) + 6. \text{ Logo:}$$

$$\int \frac{t^2 - 5t + 6}{t-5} dt = \int t + \frac{6}{t-5} dt = \frac{t^2}{2} + 6 \int \frac{1}{t-5} dt \\ = \frac{t^2}{2} + 6 \ln(t-5) + J, J \in \mathbb{R}$$

Com o exemplo acima, percebemos que é possível lidar com o subcaso $\partial p(t) = n, n \in \mathbb{N}, \partial q(t) = 1$, usando a mesma abordagem apresentada.

Analisemos agora o caso: $\partial q(t) = 2, \partial p(t) = 0$

Adiantaremos a seguinte informação: a estratégia algébrica para resolver integrais neste caso irá depender fundamentalmente do sinal do discriminante Δ , como veremos a seguir.

Subcaso: $\Delta = 0$

$\Delta = 0$ logo apenas uma raiz real ou seja $x^2 = x^2$

Exemplo:

$$\int \frac{5}{t^2 + 6t + 9} dt = \int \frac{5}{(t+3)^2} dt$$

estudar a derivada da função

Façamos a mudança de variáveis:

$$u = t + 3 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 1$$

Logo:

substituir esta variável

$$\int \frac{5}{(t+3)^2} dt = 5 \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{5}{u} + L = -\frac{5}{t+3} + L, L \in \mathbb{R}$$

Subcaso: $\Delta > 0$

Para esta situação, precisaremos recorrer ao chamado "Método das Frações Parciais". Esse método se propõe a transformar um produto de frações em uma soma de frações, conservando os mesmos denominadores. Vejamos um exemplo com frações numéricas:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{A}{2} + \frac{B}{3}$$

Claramente vemos que uma escolha possível para A e B seria: $A = 1, B = -1$. Dessa forma:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{A}{2} + \frac{B}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

Veja que a escolha para os coeficientes acima não é única. Poderíamos, por exemplo, escolher: $A = \frac{1}{3}, B = 0$. No fim, existirão infinitas possibilidades (no caso de frações numéricas).

No caso que veremos a seguir, só teremos uma possibilidade para os coeficientes das frações parciais:

$$\frac{1}{t^2 - 5t + 6} = \frac{1}{(t - 2) \cdot (t - 3)} = \frac{A}{t - 2} + \frac{B}{t - 3}$$

Para encontrar os coeficientes A e B , procederemos da seguinte forma:

$$1 = A \cdot (t - 3) + B \cdot (t - 2) = (A + B) \cdot t - 3A - 2B$$

Para que a igualdade acima seja possível, deveremos ter:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -3A - 2B = 1 \end{cases}$$

$$A = -B \Rightarrow 3B - 2B = 1 \Rightarrow B = 1 \Rightarrow A = -1$$

Logo:

$$\frac{1}{t^2 - 5t + 6} = \frac{A}{t - 2} + \frac{B}{t - 3} = \frac{-1}{t - 2} + \frac{1}{t - 3}$$

Concluimos então que é possível integrar a expressão acima facilmente:

$$\int \frac{1}{t^2 - 5t + 6} dt = \int \frac{-1}{t - 2} + \frac{1}{t - 3} dt$$

$$= -\ln(t - 2) + \ln(t - 3) + K, K \in \mathbb{R} = \ln\left(\frac{t - 3}{t - 2}\right) + K, K \in \mathbb{R}$$

Vejamos mais um exemplo:

$$\int \frac{3}{t^2 - 7t + 10} dt = \int -\frac{1}{t - 2} + \frac{1}{t - 5} dt$$

$$= -\ln(t - 2) + \ln(t - 5) + H, H \in \mathbb{R} = \ln\left(\frac{t - 5}{t - 2}\right) + H, H \in \mathbb{R}$$

Obs.: Para o subcaso $\partial p(t) = 1, \partial q(t) = 2, \Delta > 0$, é possível proceder da mesma forma (frações parciais).

To be continued...