Derivada da função implícita

Considere uma equação de 2 variáveis $F(t,y)=0$. Dizemos que uma função $f(t)$ é dada implicitamente pela equação acima se:

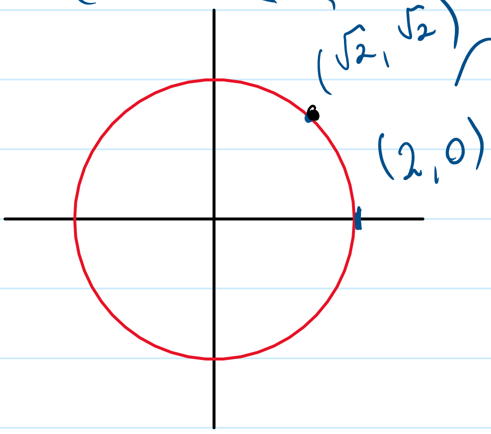
$$F(t, f(t)) = 0, \forall t \in D(f).$$

Exemplos:

$$t^2 + y^2 = 4$$

↳ Possui solução dada pelos pontos do plano que estão sobre a circunferência de raio $R=2$, centrada na origem.

$(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4$ ← $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ → $2^2 + 0^2 = 4$ ✓



Afirmação: A função $f(t) = \sqrt{4-t^2}$ é dada implicitamente pela eq. acima.

De fato:

$$t^2 + \left(\sqrt{4-t^2}\right)^2 = t^2 + 4 - t^2 = 4 \checkmark$$

Esta não é a única função implícita associada à equação $t^2 + y^2 = 4$:

$$y^2 = 4 - t^2 \quad \therefore \quad y = \pm\sqrt{4-t^2}$$

Vemos que $g(t) = -\sqrt{4-t^2}$ também é dada implicitamente pela eq. acima.

Outro exemplo:

$$y^2 - 5y + 6 = t^2$$

$$y^2 - 5y + 6 - t^2 = 0 \qquad \Delta = 25 - 4.(6-t^2)$$

$$= 1 + 4t^2$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{1+4t^2}}{2}$$

$$f(t) = \frac{5 + \sqrt{1+4t^2}}{2}$$

$$g(t) = \frac{5 - \sqrt{1+4t^2}}{2}$$

Outro exemplo:

$$\ln(t+y) + y \sin t + 2t^2 y + y^3 = 5$$

No que segue, nosso objetivo será buscar formas de derivar funções dadas implicitamente por uma equação de 2 variáveis, ainda que não tenhamos uma expressão explícita para a função.

Para isto usaremos a Regra da Cadeia.

1) $t^2 + y^2 = 4$

Seja $f(t)$ uma função dada implicitamente pela eq. acima:

$$t^2 + (f(t))^2 = 4.$$

Derivando dos dois lados, teremos:

$$2t + 2f(t) \cdot f'(t) = 0$$

$$\therefore \quad f'(t) = -\frac{t}{f(t)}.$$

Para o ponto $A = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, teremos:

$$f'(\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1.$$

Se formos pelo modo explícito, teremos:

$$f(t) = \sqrt{4 - t^2} \quad \therefore \quad f'(t) = \frac{-\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{4-t^2}}$$

$$\therefore \quad f'(t) = -\frac{t}{\sqrt{4-t^2}} = -\frac{t}{f(t)}$$

$$\ldots \sqrt{4-t^2} \qquad\qquad f(t)$$

$$\therefore f'(\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

2) $y^2 - 5y + 6 = t^2$

Seja $f(t)$ uma função dada implicitamente pela eq. acima. Logo:

$$[f(t)]^2 - 5f(t) + 6 = t^2$$

Derivando dos dois lados, teremos:

$$2f(t) \cdot f'(t) - 5 \cdot f'(t) + 0 = 2t$$

$$f'(t) = \frac{2t}{2f(t) - 5}$$

No ponto $(0,3)$, teremos:

$$f'(0) = \frac{2 \cdot 0}{2 \cdot 3 - 5} = \frac{0}{1} = 0.$$

3) $\ln(t+y) + y \cdot \sin t + 2yt^2 + y^3 = 5$

$f(t) \Rightarrow$ função implícita

$$\Rightarrow \ln(t + f(t)) + f(t) \cdot \sin(t) + 2 \cdot f(t) \cdot t^2 + (f(t))^3 = 5$$

$\rightarrow$ no ponto $(e^5, 0)$

Derivando:

$$\frac{1}{t+f(t)} + \frac{f'(t)}{t+f(t)}$$

$$\frac{1+f'(t)}{t+f(t)} + f'(t) \cdot \sin(t) + f(t) \cdot \cos(t)$$

$$+ 2f'(t) \cdot t^2 + 4f(t) \cdot t + 3 \cdot (f(t))^2 \cdot f'(t) = 0$$

$$\therefore \quad f'(t) \cdot \left(\frac{1}{t+f(t)} + \sin(t) + 2t^2 + 3(f(t))^2 \right)$$

$$+ \frac{1}{t+f(t)} + f(t) \cdot \cos(t) + 4f(t) \cdot t = 0$$

$$\therefore \quad f'(t) = - \frac{\frac{1}{t+f(t)} + f(t) \cdot \cos(t) + 4f(t) \cdot t}{\frac{1}{t+f(t)} + \sin(t) + 2t^2 + 3(f(t))^2}$$

Agora, basta substituir em $(e^5, 0)$

$$f'(e^5) = -\frac{\frac{1}{e^5}}{\frac{1}{e^5} + \sin(e^5) + 2 \cdot e^{10}}$$