Veremos a seguir que a integração corresponderá à operação inversa da derivação. Mas primeiro, vamos entender o conceito de primitiva de uma função.

Considere uma função $f(t)$. Diremos que a função $F(t)$ é uma primitiva de f se:

$$F'(t) = f(t), \forall t \in D_f \qquad (1)$$

Vejamos alguns exemplos.

Determine uma primitiva para cada função dada a seguir:

1) $f(t) = t$

Nesse caso, $F(t) = \frac{t^2}{2} + K, K \in \mathbb{R}$.

Veja que a primitiva de uma função não é única! De fato, se $F(t)$ é uma primitiva de $f(t)$, então $F(t) + K$ também será primitiva de $f(t)$, para qualquer valor $K \in \mathbb{R}$. Por esta razão, nos referimos à(s) primitiva(s) de uma dada função como sendo uma "família de funções" que satisfazem à equação (1) acima.

Obs.: É possível demonstrar que qualquer primitiva de

$f(t) = t$ apenas poderá ter o formato $F(t) = \frac{t^2}{2} + K, K \in \mathbb{R}$, e nenhum outro diferente.

2) $f(t) \equiv 5$
Nesse caso, $F(t) = 5t + K, K \in \mathbb{R}$.

3) $f(t) = 5t^3$
Nesse caso, $F(t) = \frac{5}{4}t^4 + K, K \in \mathbb{R}$.

4) $f(t) = t^n, n \neq -1$
Nesse caso, $F(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} + K, K \in \mathbb{R}, \forall \mathrm{n} \neq -1$.

5) $f(t) = t^{-9}$
Nesse caso, $F(t) = -\frac{t^{-8}}{8} + K, K \in \mathbb{R}$.

6) $f(t) = t^n, n = -1$
Nesse caso, $F(t) = \ln|t| + K, K \in \mathbb{R}$.

7) $f(t) = 5t^6 + 3t^2$
Nesse caso, $F(t) = \frac{5}{7}t^7 + t^3 + K, K \in \mathbb{R}$.

8) $f(t) = e^t$
Nesse caso, $F(t) = e^t + K, K \in \mathbb{R}$.

9) $f(t) = a^t, 0 < a \neq 1$ (Lembrete: $f'(t) = \ln a \cdot a^t$)
Nesse caso, $F(t) = \frac{a^t}{\ln a} + K, K \in \mathbb{R}$.

10) $f(t) = \ln t$

Nesse caso, $F(t) = t \cdot \ln t - t + K, K \in \mathbb{R}$.

11) $f(t) = \cos t$
Nesse caso, $F(t) = \sin t + K, K \in \mathbb{R}$.

12) $f(t) = \sin t$
Nesse caso, $F(t) = -\cos t + K, K \in \mathbb{R}$.

13) $f(t) = \tan t$
Nesse caso, $F(t) = \ln|\sec t| + K, K \in \mathbb{R}$.

14) $f(t) = t \cdot e^t$
Nesse caso, $F(t) = t \cdot e^t - e^t + K, K \in \mathbb{R}$.

Dada uma função $f(t)$, chamamos de integral indefinida de f à família de funções que são primitivas de f.

Notação:

$$\int f(t)dt = F(t) + K, K \in \mathbb{R}$$

Exemplo:

$\int \sin t \, dt = -\cos t + K, K \in \mathbb{R}$.
Além disso, $F(t) = 2 - \cos t$ é uma primitiva de $f(t)$.

Algumas propriedades da integral indefinida

Considere funções $f(t)$ e $g(t)$, e uma constante $C \in \mathbb{R}$. Então:

1)

$$\int f(t) + g(t)dt = \int f(t)dt + \int g(t)dt$$

2)

$$\int C \cdot f(t)dt = C \cdot \int f(t)dt$$

3) Mudança de variáveis na integral

Considere funções $f(t)$ e $g(t)$ (Suporemos que g é derivável). Vamos determinar a seguir uma expressão para a integral:

$$\int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)dt$$

Considere a mudança de variáveis $u = g(t)$. Então:

$$\int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)dt = \int f(u)du$$