Geometria Analítica - Semana 7
Retas e Planos

Professor: Victor M. Cunha

Instituto de Matemática
e Estatística (IME) - UFBA

Maio 2022

Sumário

- Dados três pontos não-colineares $A, B, C \in \mathbb{R}^3$, vamos considerar o plano π que passa por estes pontos.
- Temos que um ponto $P \in \mathbb{R}^3$ pertence à este plano se e somente se ele for coplanar com A, B e C. Ou seja, se $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ forem linearmente dependentes.
- Deste modo, associamos a cada ponto $P \in \pi$ um par $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$$
$$P = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

onde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ são linearmente independentes e chamados vetores diretores do plano.
- Uma forma de interpretar a equação vetorial do plano é que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ determinam a direção do plano, e A sua posição no espaço.
- Note que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ fossem linearmente dependentes (colineares), não teríamos um plano, mas sim uma reta.

- Deste modo, dados um ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e dois vetores *L.I.* $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, a equação vetorial do plano que passa por A é paralelo à $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é

$$P = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$
$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a_1, b_1, c_1) + \mu(a_2, b_2, c_2)$$

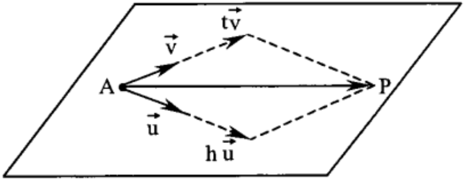
- Note que, assim como na reta, a representação vetorial do plano não é única. Poderíamos ter tomado qualquer outro ponto $A' \in \pi$ do plano, ou qualquer outro par de vetores *L.I.* $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelos à π.
- Fazendo a igualdade termo-a-termo da equação vetorial, temos as chamadas equações paramétricas do plano:

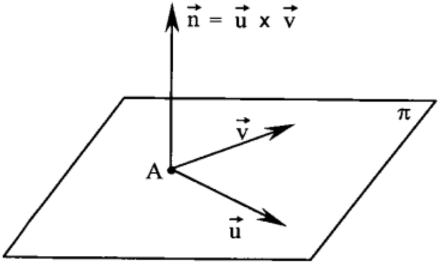
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu a_2 \\ y = y_0 + \lambda b_1 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda c_1 + \mu c_2 \end{cases}$$

- Note que agora, nas equações vetoriais e paramétricas, temos dois graus de liberdade (λ e μ), associados às duas dimensões dos planos.

UFBA

- Uma forma alternativa de dizer que $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares é igualar o determinante destes vetores à zero:
$$det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AP}) = 0$$
esta igualdade é portanto análoga à equação vetorial do plano.
- A partir da definição do produto vetorial, temos $det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AP}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AP}$. Deste modo, sendo $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (A, B, C)$, temos:
$$\begin{aligned} det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AP}) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \\ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{aligned}$$
onde $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.
- Esta é a chamada equação geral do plano. O vetor $\vec{n} = (A, B, C)$ define a direção perpendicular ao plano, e a equação geral nos diz que a projeção de $\overline{OP}$ na direção de $\vec{n}$ é a mesma para todos os pontos do plano.


tv
v
A
P
u
h u


n = u x v
π
v
A
u

- A partir da equação geral, se $C \neq 0$ (o plano não é paralelo ao eixo z), podemos isolar a coordenada z, obtendo a equação reduzida do plano nas variáveis x, y:

$$z = m_1 x + n_1 y + \ell_1$$

  deste modo, podemos interpretar o plano π como o gráfico de uma função afim $f(x, y) = m_1 x + n_1 y + \ell_1$ em duas variáveis.
- De modo análogo, se $B \neq 0$ ou $A \neq 0$, podemos isolar as coordenadas y e x, respectivamente, obtendo as equações reduzidas nas variáveis x, z ou y, z:

$$y = m_3 x + n_3 z + \ell_3 \qquad x = m_2 y + n_2 z + \ell_2$$

- Finalmente, caso $D \neq 0$, podemos reescrever a equação geral da seguinte forma, denominada segmentária:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

  esta forma é útil para visualizar espacialmente e esboçar o plano, uma vez que $(p, 0, 0)$, $(0, q, 0)$ e $(0, 0, r)$ são os pontos de interseção do plano com os eixos coordenados.

- Encontre equações vetorial e geral para o plano π que passa pelos pontos $A(1,0,1)$, $B(2,1,-1)$ e $C(3,-1,1)$. Determine os pontos de interseção deste plano com os eixos coordenados.
- Encontre uma equação geral para o plano que passa por $A(9,-1,0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u}=(0,1,0)$ e $\vec{v}=(1,1,1)$.
- Encontre uma equação vetorial para o plano que passa por $A(1,1,2)$ e é perpendicular à $\vec{n}=(1,2,-1)$.
- Dados os pontos $A(1,0,0)$, $B(-1,1,0)$ e $C(0,-1,2)$, determine o ponto do plano $\pi\colon x+y+z=1$ equidistante de A, B e C.
- Determine uma equação vetorial da reta r dada pela interseção do plano $\pi\colon 2x-y+z+2=0$ com o plano xz.
- Dadas as retas $r\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=z$ e $s\colon \dfrac{x-3}{2}=-y=z-1$, verifique se elas determinam um plano. Em caso afirmativo, obtenha uma equação geral para este plano.

- Considerando dois planos no espaço, temos duas possibilidades para a sua posição relativa: Eles podem ser paralelos ou concorrentes.
- Novamente consideramos planos coincidentes como um caso particular de paralelismo.
- Dois planos $\alpha\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ e $\beta\colon A_2 + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ são paralelos se tiverem a mesma orientação, o que pode ser determinado a partir dos vetores normais $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ e $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.
- Deste modo, dois planos são paralelos se seus vetores normais são paralelos entre si:

$$\vec{n}_2 = k\vec{n}_1$$

ou seja, se os coeficientes associados às variáveis x, y e z de suas equações gerais forem proporcionais:

$$A_2 = kA_1 \qquad B_2 = kB_1 \qquad C_2 = kC_1$$

- Se dois planos forem paralelos, eles serão coincidentes caso tenham pontos em comum. Deste modo, dado $P(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$, temos $P \in \beta$, e:

$$\begin{aligned} A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 &= 0 \\ k(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0) + D_2 &= 0 \\ D_1 &= kD_2 \end{aligned}$$

- Portanto, dois planos são coincidentes se todos os coeficientes de suas equações gerais forem proporcionais. Note que neste caso as equações gerais são equivalentes.
- Caso dois planos não sejam paralelos, eles serão concorrentes. Sendo assim, os planos α e β são concorrentes se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ forem *L.I.*
- Note que neste caso a interseção destes planos $r = \alpha \cap \beta$ determina uma reta, de equação geral $r : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$.

- Considerando um plano e uma reta no espaço, eles também podem ser paralelos ou concorrentes.
- Um plano e uma reta são paralelos se a direção da reta fizer parte da orientação do plano.
- Especificamente, dadas as equações vetorias $\alpha\colon Q + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ e $r\colon P + t\vec{r}$, a reta r é paralela ao plano α se

$$\vec{r} = \alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

  ou seja, o vetor diretor da reta pode ser formado a partir dos vetores diretores do plano.
- Alternativamente, dada a equação geral do plano $\alpha\colon Ax + By + Cz + D = 0$, teremos $r//\alpha$ se e somente se:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = (A, B, C) \cdot \vec{r} = 0$$

  ou seja, a reta é paralela ao plano se a sua direção for perpendicular ao vetor normal do plano.

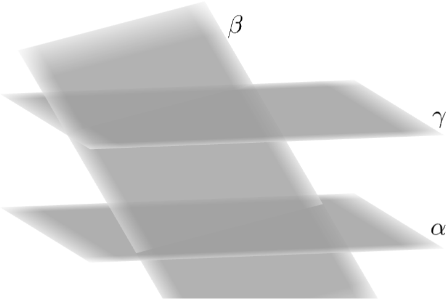
- Um caso particular de plano e reta paralelos ocorre quando a reta está contida no plano $r \subset \alpha$.
- Para que uma reta r paralela ao plano α esteja contida em α, basta que um ponto da reta pertença ao plano. Ou seja:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0, \qquad P \in \alpha$$

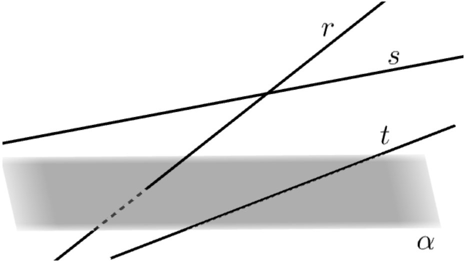
- Caso um plano e uma reta não sejam paralelos, eles serão concorrentes. Deste modo, o plano e a reta são concorrentes se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{r}$ são *L.I.*:

$$\begin{aligned} det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{r}) \neq 0 \\ (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{r} \neq 0 \end{aligned}$$

- A prova de que caso um plano e uma reta no espaço não sejam paralelos, eles serão concorrentes é deixada como exercício.



β
γ
α



r
s
t
α

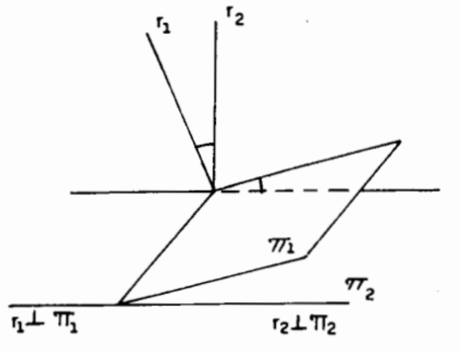
- Encontre o plano paralelo à $\alpha\colon 2x + y - 3z = 6$ e que passa pelo ponto $A(2, 1, -3)$.
- Mostre que os planos $\alpha\colon (1, 0, 0) + \lambda(1, 3, 1) + \mu(-2, -1, 1)$ e $\beta\colon (0, 2, 2) + \lambda(3, 4, 0) + \mu(0, 5, 3)$ são coincidentes.
- Encontre o plano paralelo às retas $r\colon (2, 0, -1) + \lambda(-1, 1, -1)$ e $s\colon (0, -1, 0) + \mu(1, 0, 0)$ e que passa pelo ponto $A(0, 1, 2)$.
- Considere as retas $r\colon (1, 0, 1) + \lambda(-1, 1, 0)$ e $s\colon (0, 2, 1) + \mu(1, 1, 2)$:
  - Encontre o plano α paralelo à s e que contém r.
  - Encontre o plano β paralelo à r e que contém s.
- Encontre as equações da família de planos que contém a reta $r\colon \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$.
- Sejam α e r um plano e uma reta não-paralelos. Mostre que a interseção $\alpha \cap r$ corresponde à um único ponto.

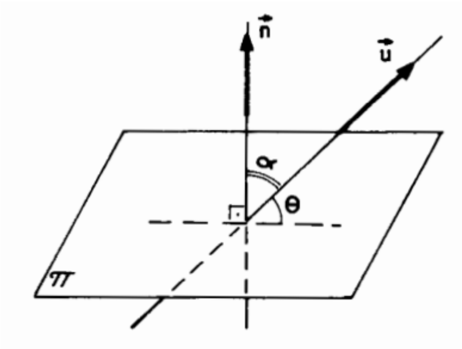
- Definimos o ângulo formado entre os planos α e β como o menor ângulo formado entre um vetor $\vec{n}_1$ normal à α e um vetor $\vec{n}_2$ normal à β. Deste modo, temos:

$$cos\,\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\,\|\vec{n}_2\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

- Em particular, se $\theta = 0$ os planos são paralelos ($\vec{n}_2 = k\vec{n}_1$) e se $\theta = \pi/2$ os planos são perpendiculares ($\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$).
- Considerando agora um plano α e uma reta r, o ângulo formado entre eles é definido como o menor ângulo formado entre um vetor diretor da reta e um vetor paralelo ao plano.
- Este ângulo pode ser calculado como o complementar do menor ângulo formado entre um vetor diretor da reta $\vec{r}$ e um vetor $\vec{n}$ normal à α:

$$sen\,\theta = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{n}\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$


r1
r2
π1
π2
r1 ⊥ π1
r2 ⊥ π2


n
u
α
θ
π

- Determine o plano perpendicular à reta $r\colon (2,1,-2)+\lambda(-1,0,2)$ e que passa pelo ponto $A(0,-1,1)$.
- Determine o plano perpendicular aos planos $\alpha\colon x-y-z-1=0$ e $\beta\colon (1,-2,1)+\lambda(2,-1,1)+\mu(-3,1,-1)$ e que passa pelo ponto $A(1,0,1)$.
- Determine a reta perpendicular ao plano $\alpha\colon x-3y+2z+2=0$ e que intersepta o eixo x em um ponto de abcissa -1.
- Considere o plano $\alpha\colon x+y-z=1$. Determine os ângulos que este plano forma com os planos coordenados.
- Considere a reta $r\colon (1,0,0)+\lambda(1,-1,2)$. Determine os ângulos que esta reta forma com os planos coordenados.
- Determine os planos bissetores dos diedros formados por $\alpha\colon x-2y+2z=0$ e $\beta\colon 3x-4z=0$.