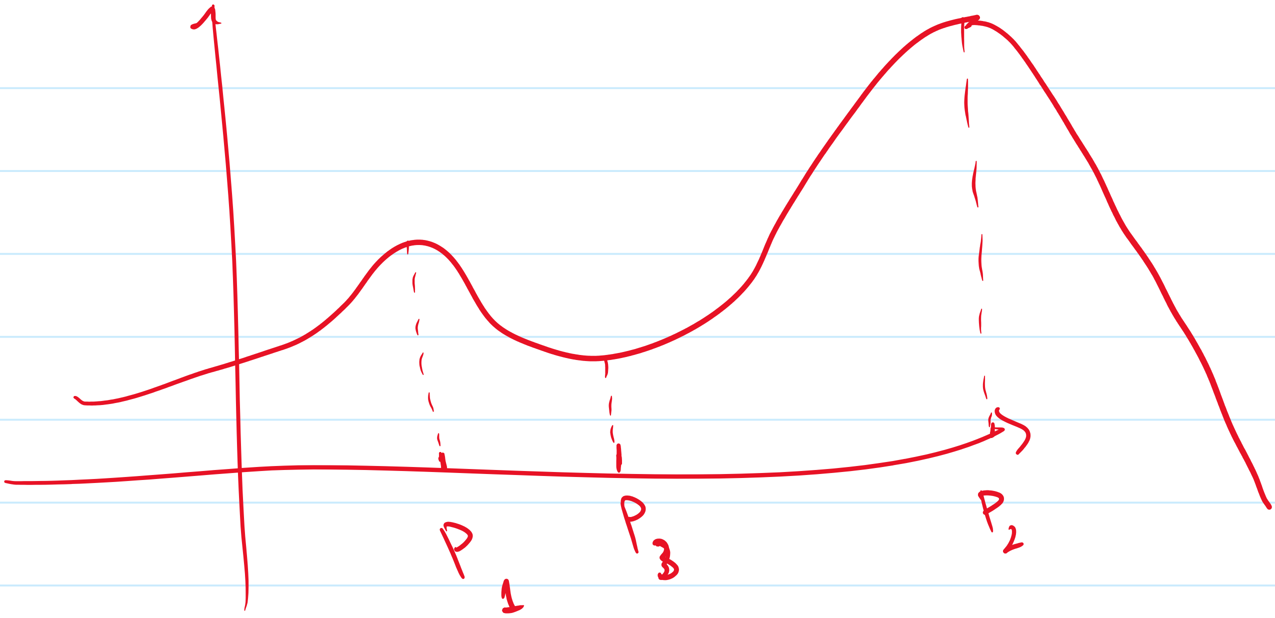
Máximos e mínimos de uma função



Considere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e $p \in I$.

Dizemos que $p \in I$ é:

1) Ponto de máximo local se:
(mínimo)

existe uma vizinhança $V \ni p$ tal que

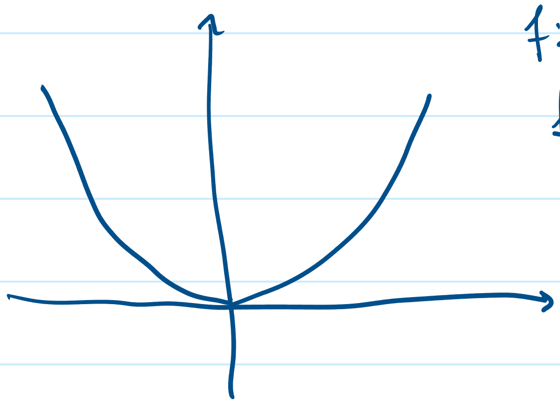
$f(t) \leq f(p) \quad \forall\, t \in V.$
$(\geq)$

2) Ponto de máximo global se
(mínimo)

$f(t) \leq f(p) \quad \forall\, t \in I.$

$$f(t) \underset{(\geq)}{\overset{(\text{mínimo})}{\leq}} f(p) \quad \forall\, t \in I.$$

Obs: Valor máximo (mínimo) (local ou global) é a imagem $f(P)$, em que p é ponto de máximo (mínimo) (local ou global).



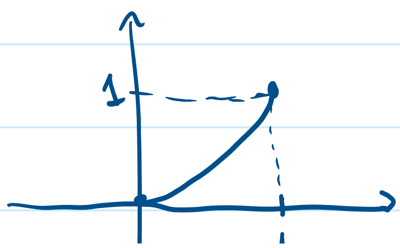
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$f(t) = t^2$

$p = 0$ é ponto de mínimo local e global.

Considere $g: [0,1] \to [0,1]$

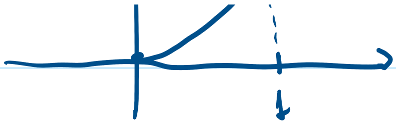
$$g(t) = t^2$$



$P = 0$ é ponto de mínimo (local e global)

$P = 1$ é ponto de

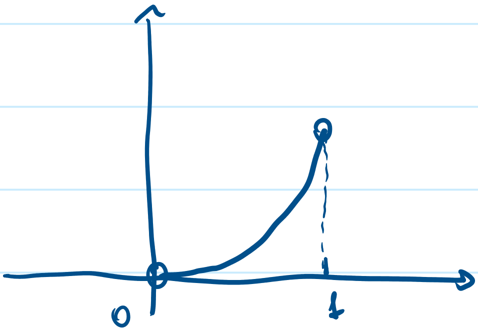
mínimo (local e global)



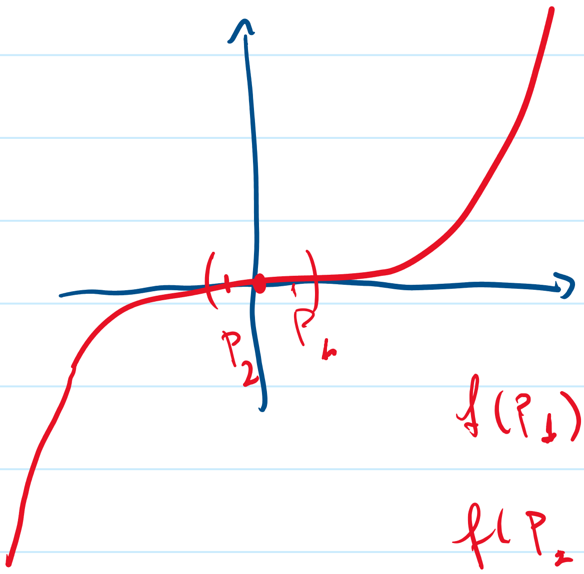
$p = 1$ é ponto de máximo (local e global)

$h : (0,1) \to (0,1)$

$h(t) = t^2$



$$\lim_{t \to 1^-} h(t) = 1$$



$f(t) = t^3$

$f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$

$f(P_1) > f(0)$

$f(P_2) < f(0)$

$\Rightarrow$ 0 não é ponto extremante (local ou global).

Mas $f'(0) = 0$

Teorema:

(Suponha que f é derivável em (a,b)).

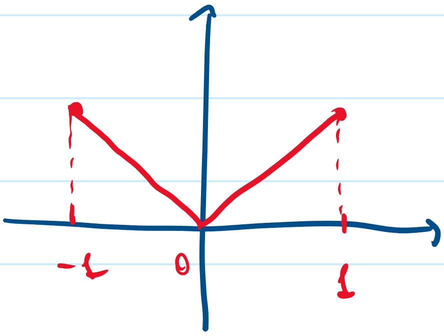
Se $p \in (a,b)$ é ponto extremante para $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, então:

$$f'(p) = 0.$$

Obs.: No exemplo:

$f:[-1,1] \to \mathbb{R}$

$f(t) = |t|$



O ponto $p=0$ é extremante global no interior do domínio, mas não seria detectado pelo critério acima, pois f não é derivável em $(-1,1)$.

Definição Dizemos que p é ponto crítico para f se: $f'(p) = 0$ ou $\nexists f'(p)$.

Com esta definição, o Teorema acima pode ser reescrito como:

Teorema: Considere $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivável.

$p \in (a,b)$ é extremante $\Rightarrow$ p é crítico.

$$A \Rightarrow B \iff \sim B \Rightarrow \sim A$$

Logo: p não é crítico $\Rightarrow$ p não é extremante.

Essa informação pode ser bastante útil para detectarmos os pontos extremantes de uma função.

Ex: Encontre os pontos candidatos a extremantes da função $f(t) = e^{-t^2}$

Tendo em vista o teorema acima, e considerando o domínio de f como sendo $\mathbb{R}$, basta procurarmos pelos pontos críticos:

$$f'(t) = e^{-t^2} \cdot (-2t) = -2t \cdot e^{-t^2} = 0.$$

Sabemos que $e^{-t^2} \neq 0 \ \forall t$. Logo,

$$f'(t) = 0 \Rightarrow -2t = 0 \Rightarrow t = 0.$$

$f'(t) = 0 \Rightarrow -2t = 0 \Rightarrow t = 0.$

Ou seja, $t = 0$ é o único ponto crítico para $f(t) = e^{-t^2}$.

__Teorema:__ Suponha que $p \in (a,b)$ é ponto crítico para $f: (a,b) \to \mathbb{R}$. Suponha que f é duas vezes derivável em (a,b).

i) Se $f''(p) > 0$ então p é ponto de mínimo local para f.

ii) Se $f''(p) < 0$ então p é ponto de máximo local para f.

iii) Se $f''(p) = 0$, nada podemos afirmar sobre o comportamento extremante de p para f.

No caso do exemplo acima:

$$f(t) = e^{-t^2}, \quad f'(t) = -2t \cdot e^{-t^2}$$

$$f''(t) = -2e^{-t^2} + 4t^2 \cdot e^{-t^2}$$

$$\therefore f''(0) = -2 < 0$$

$\therefore\ f''(0) = -2 < 0$

$\rightarrow$ $p = 0$ é ponto de máximo local para f.

) $f''(t) =$