



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA (UFBA)

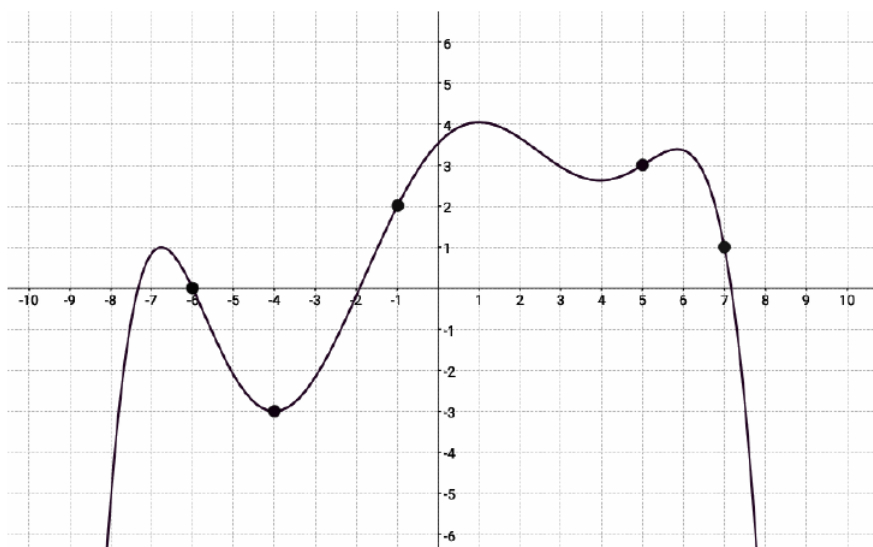
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DISCIPLINA: MATA02 - CÁLCULO A

UNIDADE II - LISTA DE EXERCÍCIOS

Derivadas: definição, interpretação geométrica e suas propriedades

- (1) Se $s(t)$ descreve a posição (em metros) de um objeto no tempo t (em segundos), calcule sua velocidade no instante t_0 dado, usando a fórmula $v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$:
- (a) $s(t) = t^2$ e $t_0 = 4$ (b) $s(t) = t^{-2}$ e $t_0 = 1$ (c) $s(t) = \cos t$ e $t_0 = 0$.
- (2) Se $s(t) = t^3$ descreve a posição de uma partícula no instante t , encontre a sua velocidade $v(t)$ em função de t . Qual a velocidade escalar da partícula no instante $t = 2$?
- (3) Calcule $f'(p)$, pela definição, sendo $f(x) = 2x^3 - x^2$ e $p = 1$.
- (4) Dado o gráfico abaixo, estime o valor da derivada em cada um dos pontos indicados, usando uma régua para traçar a reta tangente e medir o coeficiente angular:



- (5) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$, sendo dados:

(a) $f(x) = x^2$ e $p = 2$

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$ e $p = 2$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $p = 9$

(d) $f(x) = x^2 - x$ e $p = 1$.

- (6) Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 3x$ no ponto de abscissa 0.

(7) Encontre a reta que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ e paralela à reta $y = 4x + 2$.

(8) Mostre que $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x < 1 \\ -x + 4, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ não é derivável em $p = 1$. Esboce o gráfico de f e f' .

(9) Use a definição de derivada para provar as seguintes fórmulas:

(a) $c' = 0$, onde c é uma constante

(c) $(x^4)' = 4x^3$

(b) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

(d) $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(10) Considere a função $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{se } x < 1 \\ 2x + 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.

(a) Esboce o gráfico de g .

(b) Com base no gráfico de g , é possível dizer que g é derivável em $p = 1$?

(c) Mostre que g é derivável em $p = 1$ e calcule $g'(1)$.

(d) Mostre que g é derivável em \mathbb{R} e esboce o gráfico da função $g'(x)$.

(11) A função $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ é derivável em $p = 1$? Justifique!

(12) Estude a continuidade e a diferenciabilidade das funções abaixo no ponto $p = 1$:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

(13) Dado $a > 0$ e $a \neq 1$, mostre que a derivada de $f(x) = \log_a(x)$ é a função $f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$.

(14) Utilizando regras de derivação, calcule as seguintes derivadas:

(a) $\frac{d}{dx} \left(2x^5 - \frac{x^3}{6} + 4x - 7 \right)$

(f) $(x + 2x \cos x)'$

(k) $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^3 - 4x^2 + 2} \right)$

(b) $(e^{x+3})'$

(g) $(\sin^2(x))'$

(l) $\frac{d}{dx} (e^x \operatorname{tg} x)$

(c) $(x^5 \sin x)'$

(h) $(x^2 \cdot \ln x \cdot \sin(x))'$

(m) $(e^{-s})'$

(d) $(2\sqrt{t} \cos t)'$

(i) $\left(\frac{x^2 + 2}{x^3} \right)'$

(n) $\frac{d}{dx} \left(\frac{xe^x}{x+1} \right)$

(e) $(x \ln x - x)'$

(j) $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)$

(o) $\frac{d}{dx} (\cot g x)$.

(15) Sejam $f(x) = \frac{3+x}{3-x}$ e $g(x) = \sqrt{2x-1}$. Calcule $f'(2)$ e $g'(5)$ pela definição.

(16) Se a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $|f(x) - f(t)| \leq |x - t|^2$, para todos $x, t \in \mathbb{R}$, calcule $f'(t)$.

(17) Seja f uma função derivável num ponto $p \in (0, +\infty[$. Calcule $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{\sqrt{x} - \sqrt{p}}$.

(18) Calcule, onde existir, a derivada das funções abaixo:

$$(a) f(x) = \frac{1-2x}{x-1}$$

$$(d) f(s) = \frac{\sqrt{s}}{s+2}$$

$$(g) f(x) = x^e + e^x$$

$$(b) y = (2x^3 + 1)(x + 2)^{-1}$$

$$(e) y = x \operatorname{sen} x \cos x$$

$$(h) z = \log_8 x + 8^{x+2}$$

$$(c) y = x^2 \sqrt{x} + \frac{3}{x^2}$$

$$(f) f(x) = \frac{5}{x^3} + \frac{2x+1}{x}$$

$$(i) g(r) = \frac{\sqrt[3]{r} + r}{\sqrt{r}}.$$

(19) Determine a equação da reta que é perpendicular à reta $2y + x = 3$ e tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$.

(20) Calcule β de modo que $y = \beta x - 2$ seja tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 - 4x$.

(21) Determine r , sabendo que r é uma reta que passa por $(1, -1)$ e é tangente à $f(x) = x^3 - x$.

(22) Calcule a derivada indicada em cada caso:

$$(a) y'', \text{ quando } y = \frac{x}{x-1}$$

$$(b) \frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right)$$

$$(c) \frac{d^{500}}{dx^{500}} (x^{131} - 3x^{79} + 4).$$

(23) Determine em quais pontos as funções f abaixo têm derivadas, e escreva a função f' :

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & \text{se } x \geq 1 \\ 5x - 1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} -x + 3, & \text{se } x \neq 1 \\ 3, & \text{se } x = 1 \end{cases}.$$

(24) Determine f' , f'' e f''' nos seguintes casos:

$$(a) f(x) = 2x^4 + 8x + \sqrt{7}$$

$$(c) f(x) = x|x|$$

$$(b) f(x) = 5x^2 - \frac{1}{x}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & \text{se } x \leq 1 \\ 5x - 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

(25) Determine a derivada de ordem n das seguintes funções:

$$(a) f(x) = e^x$$

$$(b) f(x) = \operatorname{sen} x$$

$$(c) f(x) = \cos x$$

$$(d) f(x) = \ln x.$$

(26) Seja P um polinômio de grau n . Verifique que uma raiz de P é dupla quando ela for raiz do polinômio e da sua derivada primeira, mas não for raiz da derivada segunda.

(27) Utilize o exercício anterior para encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que a equação $x^3 - 3x^2 - 9x + \lambda = 0$ tenha uma raiz dupla.

(28) Encontre um polinômio de segundo grau P tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ e $P''(2) = 2$.

(29) A equação $y'' + y' - 2y = x^2$ é chamada de *equação diferencial*, pois envolve uma função desconhecida y e suas derivadas. Encontre constantes a, b e c tais que a função $y = ax^2 + bx + c$ satisfaça essa equação.

(30) Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2019} - 1}{x - 1}$?

(31) Encontre os valores de m e b que tornam a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 2 \\ mx + b, & \text{se } x > 2 \end{cases} \text{ derivável.}$$

Regra da Cadeia

(1) Encontre $(f \circ g \circ h)(x)$, sendo $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ e $h(x) = x + 3$.

(2) Expresse a função $(2x + x^2)^6$ como uma composta $f \circ g$ e calcule $(f \circ g)'(x)$.

(3) Calcule a derivada da função

$$g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

em todos os pontos possíveis.

(4) Utilizando a regra da cadeia, calcule as seguintes derivadas:

(a) $\frac{d}{dx} [(x^2 + 4)^6]$

(e) $\frac{d}{da} (8a^2 + \cos(8a))$

(i) $((1 + \cos^2 x)^{\sin x})'$

(b) $\frac{d}{dx} ((1 + \cos^2 x)^{47})$

(f) $\frac{d}{dt} \left[\left(t - \frac{1}{t} \right)^{3/2} \right]$

(j) $(x^{x^x})'$

(c) $\frac{d}{dx} (\sin(x^2) + \sin^2 x)$

(g) $\frac{d}{dx} [(2x + 1)^x]$

(k) $[\sec(\sqrt{x^2 + 1})]'$

(d) $\left(\sqrt{x + \sqrt{x}} \right)'$

(h) $\frac{d}{dx} (\sqrt{x^2 + e^{\sqrt{x}}})$

(l) $[\ln(\ln x)]'$

(m) $(\sin(x - \sin x))'$.

$d(g(x)) = d(g(x)) \cdot 1$

(5) Analise se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, provando suas afirmações:

(a) A derivada da função $f(x) = \pi^x$ é $f'(x) = x\pi^{x-1}$.

(b) A derivada da função $g(x) = x^\pi$ é $g'(x) = \pi x^{\pi-1}$.

(c) Se f é ímpar, então f' é par.

(6) Sejam f e g funções deriváveis em \mathbb{R} e tais que $f(g(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sabendo-se que $f'(3) = 2$ e $g(0) = 3$, calcule o valor de $g'(0)$.

(7) Considere f e g funções deriváveis em \mathbb{R} . Suponha que $f(g(x)) = x^2$, $g(1) = 2$ e $f'(2) = -2$. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $(1, 2)$.

(8) Dada $y = e^{\alpha x}$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma raiz da equação $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, com a , b e c constantes, verifique que

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0.$$

(9) Seja $y = f(x)$ uma função derivável num intervalo aberto I , com $1 \in I$. Suponha que $f(1) = 1$ e $f'(x) = x + [f(x)]^3$, $\forall x \in I$. Argumente por que $f''(x)$ existe para todo $x \in I$ e calcule $f''(1)$.

Derivadas de funções inversas e derivação implícita

- (1) Encontre a inversa das seguintes funções: $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = x^3 + 2$ e $h(x) = \frac{1 + 3x}{5 - 2x}$.
- (2) Use a fórmula para a derivada de funções inversas para provar que $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- (3) Esboce o gráfico das funções $\arccos x$ e $\operatorname{arctg} x$, e mostre que

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{e} \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

- (4) Calcule a derivada $\frac{dy}{dx}$:

(a) $y = x \operatorname{arctg}(x)$

(e) $y = x^2 e^{\operatorname{arctg}(2x)}$

(b) $y = \arcsen(3x)$

(f) $y = \frac{x \operatorname{arctg}(x)}{\cos(2x)}$

(c) $y = 3 \operatorname{arctg}(2x + 3)$

(g) $y = e^{-3x} + \ln(\operatorname{arctg}(x))$

(d) $y = \arcsen(e^x)$

(h) $y = \ln(\arccos(x^3 + 1))$.

- (5) Calcule $\frac{dy}{dx}$, sendo $y = f(x)$ uma função diferenciável dada implicitamente pelas equações abaixo:

(a) $x^2 - y^2 = 4$

(e) $5y + \cos(y) = xy$

(b) $y^3 + x^2y = x + 4$

(f) $2y + \sen(y) = x$

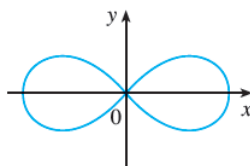
(c) $xe^y + xy = 3$

(g) $xy + 16 = 0$

(d) $y + \ln(x^2 + y^2) = 4$

(h) $x \operatorname{arctg}(x) + y^2 = 4$.

- (6) Encontre a equação da reta tangente à curva *lemniscata* $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$ no ponto $(3, 1)$.



- (7) Obtenha y'' por derivação implícita no caso em que $y = y(x)$ satisfaz $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.
- (8) Suponha que $y = y(x)$ seja uma função diferenciável dada implicitamente pela equação

$$y^6 - (x + y)^2 + 3x^2 = 0.$$

Encontre as equações das retas tangente e normal ao gráfico de f no ponto $(0, -1)$.

- (9) **Desafio:** Utilizando derivação implícita, calcule $y'(0)$, sendo $y(x) = \sqrt{5 + x^2} \sqrt{5 + x^2} \sqrt{\dots}$.

- (10) **Desafio:** Prove que $\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Aplicações da derivada: taxas de variação e regra de L'Hospital

- (1) A equação do movimento de uma partícula é dada por $s(t) = \sqrt[3]{t+2}$, sendo s dada em metros e t em segundos. Determine:
- (a) o instante em que a velocidade é de $\frac{1}{12} m/s$.
 - (b) a aceleração da partícula quando $t = 2 s$.
- (2) Uma bola é atirada para cima do topo de um edifício. Depois de t segundos, sua altura é dada por $h = 30 + 5t - 5t^2$. Pergunta-se:
- (a) Qual a altura do edifício ?
 - (b) Qual a velocidade da bola no instante t ? Qual a sua velocidade inicial ?
 - (c) Qual a altura máxima que a bola atinge ? Quando é que ela atinge essa altura ?
 - (d) Quando é que a bola atinge o chão ? Com que velocidade ?
- (3) Um ponto P move-se ao longo do gráfico de $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ de tal modo que a sua abscissa x varia a uma velocidade constante de $5 m/s$. Qual a velocidade de y no instante em que $x = 10 m$?
- (4) Um ponto desloca-se sobre a hipérbole $xy = 4$ de tal modo que a velocidade de y é $\frac{dy}{dt} = \beta$, com β constante. Calcule a aceleração da abscissa x .
- (5) Uma mancha de óleo se alastra sempre circularmente. Ache a taxa de variação da área A da superfície da mancha em relação ao tempo t , sabendo que a taxa de variação do raio é $22 m/h$.
- (6) A medida do lado de um quadrado varia com o tempo. No instante em que o lado mede $0,5 cm$ a taxa de variação da área é de $4 cm^2/s$. Qual é a taxa de variação do lado em relação ao tempo neste instante ?
- (7) Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual a três vezes a altura. Quando a altura do monte é de $1,20 m$, a taxa de variação com que a areia é despejada é de $0,081 m^3/min$. Qual é a taxa de variação da altura do monte neste instante ?
- (8) **Desafio:** Ao meio-dia o barco A está a $64 km$ a oeste do barco B . O barco A navega para leste a $20 km/h$ e o barco B navega para o norte a $25 km/h$. Qual é a taxa de variação da distância entre os barcos às $13 : 12 h$?
- (9) Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^3 + x^2 + 3}{x^5 + 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3 - x} \right)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - x^2 + x - 1}{x^{10} - 1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$

(f) $\lim_{t \rightarrow 0} (t - \operatorname{tg} t) t^{-3}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos 3x)^{1/\operatorname{sen}(x)}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{tg}(x^2)}$

(j) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}$.

(10) Verifique se o seguinte cálculo está correto:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty.$$

(11) Um resultado bastante utilizado é que, para t grande o bastante, e^t é muito maior que t^n , $\forall n \in \mathbb{N}$ (o crescimento exponencial é muito mais rápido que o polinomial), e $\ln t$ é muito menor que $\sqrt[n]{t}$ (o crescimento logarítmico é muito mais lento que o de qualquer raiz). Prove isso, garantindo que:

$$(a) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^n} = +\infty \qquad (b) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{\sqrt[n]{t}} = 0.$$

(12) **Desafio:** A regra de L'Hospital foi publicada pela primeira vez em 1696, no livro *Analyse des Infiniment Petits*. Para mostrar a imponência do seu¹ método, o marquês de L'Hospital ilustra seu artigo calculando o seguinte limite:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}},$$

sendo a uma constante positiva. Mostre que esse limite é igual a $\frac{16a}{9}$.

Aplicações da derivada: teoremas de Rolle e do valor médio, e gráfico de funções

(1) Use os Teoremas de Rolle, do Valor Intermediário e/ou do Valor Médio para mostrar os seguintes itens:

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 12$ possui pelo menos uma raiz real.

(b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 12$ tem exatamente uma raiz real.

(c) $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

(d) $\ln x < x - 1$, para todo $x > 1$.

(e) Dois corredores iniciam uma corrida ao mesmo tempo e terminam empatados. Prove que em algum momento durante a corrida eles têm a mesma velocidade.

(f) Se um carro levou 2 h para percorrer uma estrada do quilômetro 50 ao 240, então houve pelo menos um instante no qual sua velocidade foi exatamente 95 km/h.

(2) Seja $f(x) = (x - 1)^{-2}$. Mostre que $f(0) = f(2)$, mas não existe um número $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

(3) Determine os intervalos de crescimento/decrescimento das funções seguintes:

(a) $f(t) = t^5 - 10t^3$

(b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 12$

(c) $h(x) = xe^{-x}$

(d) $g(x) = \frac{x^2}{1 - x}$

(e) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$.

¹Na verdade, quem descobriu tal método foi o matemático suíço John Bernoulli, em 1694. Como era muito pobre, Bernoulli vendeu suas descobertas ao matemático L'Hospital, que era um poderoso marquês francês.

(4) Estude a função dada com relação à concavidade e pontos de inflexão:

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

(d) $f(t) = t^2 + \frac{1}{t}$

(b) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 1$

(e) $f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

(c) $f(x) = xe^{-2x}$

(f) $f(t) = t \ln t$.

(5) Determine as assíntotas das funções abaixo, caso existam:

(a) $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1}$

(c) $f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2}$

(b) $f(x) = e^x$

(d) $f(x) = \ln x$.

(6) Determine as coordenadas do vértice da parábola $y = ax^2 + bx + c$.

(7) Ache os pontos sobre a curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 11$ nas quais a reta tangente é horizontal.

(8) Uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode admitir ponto de inflexão?

(9) Mostre que a cúbica $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tem um único ponto de inflexão.

(10) Determine os pontos críticos da função dada e classifique-os em ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de inflexão:

(a) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$

(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

(c) $f(x) = x^2 e^{-5x}$.

(11) Considere a função $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$:

(a) Determine a constante a de modo que f tenha um mínimo local em $x = 2$.

(b) Determine a constante a de modo que f tenha um mínimo local em $x = -3$.

(c) Mostre que f não terá máximo local para nenhum valor de a .

(12) Ache os valores de máximo e mínimo das funções abaixo, nos intervalos indicados:

(a) $f(x) = x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 16x^2$ no intervalo $[-3, 3]$.

(b) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$ no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

(c) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ no intervalo $[-3, 2]$.

(d) $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ no intervalo $[1, 5]$.

(e) $f(x) = \ln(x^3 - x)$ no intervalo $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right]$.

(13) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas:

(a) Se $f'(c) = 0$, então c é ponto de máximo ou mínimo local de f .

(b) Se $f''(c) = 0$, então c é um ponto de inflexão de f .

(14) Dadas as funções abaixo, explicita o domínio, localize suas raízes, determine os intervalos de crescimento e decrescimento, estude a concavidade, destaque os pontos de inflexão, determine as assíntotas (caso existam) e esboce o gráfico (calcule todos os limites necessários):

(a) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

(b) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$

(c) $f(x) = \frac{6x^2}{3x^2 + 1}$

(d) $f(x) = \frac{(x^2 + 3)(x + 1)}{x^2 - 1}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$

(f) $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^5}$

(g) $f(x) = x \ln x$

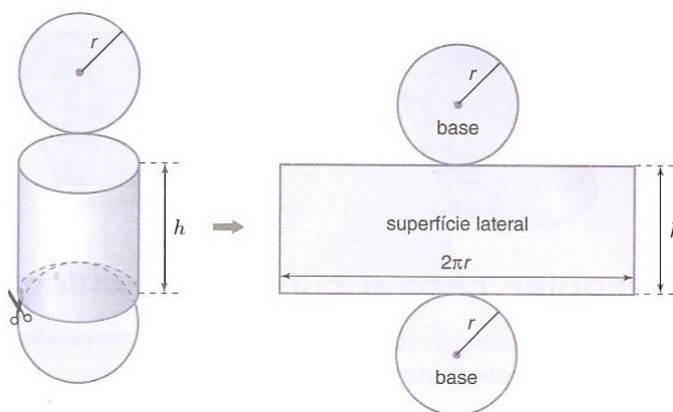
(h) $f(x) = \sin^4 x$

(i) $f(x) = e^{-1/(x+1)}$

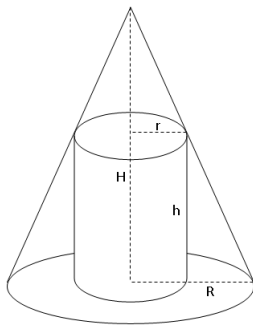
(j) **Desafio:** $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$.

Aplicações da derivada: problemas de otimização

- (1) A soma de 3 números positivos é 15. O dobro do primeiro mais três vezes o segundo e mais quatro vezes o terceiro é 45. Escolha esses números de modo que o produto dos 3 seja máximo.
- (2) Encontre o ponto do gráfico de $g(x) = \sqrt{x+1}$ que está mais próximo de $(0, 0)$.
- (3) Para que pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ a soma das distâncias a $(2, 0)$ e $(-2, 0)$ é mínima?
- (4) Determine as dimensões do retângulo de área máxima e cujo perímetro P é dado.
- (5) Determine o número real positivo cuja soma com o inverso do seu quadrado seja mínima.
- (6) Se uma lata fechada com volume $16\pi \text{ cm}^3$ deve ter a forma de um cilindro circular reto, ache a altura h e o raio r , se um mínimo de material deve ser usado em sua fabricação.



- (7) Ache o raio r e a altura h do cilindro circular reto de maior volume que possa ser inscrito em um cone circular reto com raio da base $R = 15 \text{ cm}$ e altura $H = 36 \text{ cm}$.



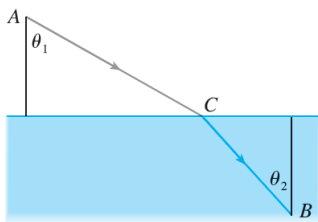
- (8) Mostre que a menor distância de um ponto (x_0, y_0) a uma reta $ax + by + c = 0$ é dada por

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

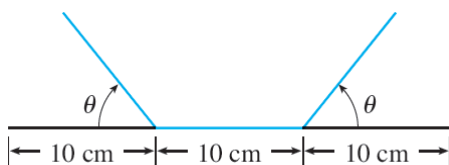
- (9) Uma tradicional fábrica de carros possui um lucro total mensal (em milhares de reais) estimado por $L(q) = -q^3 + 12q^2 + 60q - 4$, em que q representa a quantidade produzida de carros. Determine o lucro máximo e a produção que maximiza o lucro. Esboce o gráfico da função $L(q)$.
- (10) Dado o triângulo retângulo de catetos 3 e 4, determine o retângulo de maior área nele inscrito, de modo que um dos lados esteja contido na hipotenusa.
- (11) Determine o ponto da parábola $y = x^2$ que se encontra mais próximo da reta $y = x - 2$.
- (12) Seja v_1 a velocidade da luz no ar e v_2 a velocidade da luz na água. De acordo com o princípio físico de Fermat, um raio de luz viajará de um ponto A no ar para um ponto B na água por um caminho ACB que minimiza o tempo gasto. Mostre a *Lei de Snell*

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

onde θ_1 e θ_2 são os ângulos de incidência e refração, respectivamente.



- (13) Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30 cm dobrando-se para cima $1/3$ da folha de cada lado, fazendo-se um ângulo θ com a horizontal. Como deve ser escolhido θ de forma que a capacidade de carregar a água da calha seja máxima?



GABARITO

Derivadas: definição, interpretação geométrica e suas propriedades

- (1) (a) 8 m/s , (b) -2 m/s , (c) 0 ; (2) $v(t) = 3t^2$ e $v(2) = 12$; (3) 4 ;
- (5) (a) $y = 4x - 4$, (b) $x - 6y + 9 = 0$, (c) $4y = -x + 4$, (d) $y = x - 1$; (6) $y = -3x$ e $y = \frac{1}{3}x$;
- (7) $y = 4x - 4$; (10) (c) 2 ;
- (11) Não é derivável em $p = 1$; (12) (a) f é contínua em $p = 1$, porém não é derivável neste ponto;
- (b) f é derivável e contínua em $p = 1$; (13) Utilize mudança de base e regras de derivação;
- (14)
- | | |
|---|---|
| (a) $10x^4 - \frac{x^2}{2} + 4$ | (i) $-\frac{x^2 + 6}{x^4}$ |
| (b) e^{x+3} | (j) $\frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^2}$ |
| (c) $5x^4 \sin x + x^5 \cos x$ | (k) $\frac{8x - 3x^2}{(x^3 - 4x^2 + 2)^2}$ |
| (d) $\frac{1}{\sqrt{t}} \cos t - 2\sqrt{t} \sin t$ | (l) $e^x (\operatorname{tg} x + \sec^2 x)$ |
| (e) $\ln x$ | (m) $-e^{-s}$ |
| (f) $1 + 2 \cos x - 2x \sin x$ | (n) $\frac{e^x(x^2 + x + 1)}{(x + 1)^2}$ |
| (g) $2 \sin x \cos x$ | (o) $-\operatorname{cosec}^2 x$. |
| (h) $2x \sin x \ln x + x \sin x + x^2 \ln x \cos x$ | |
- (15) $f'(2) = 6$ e $g'(5) = \frac{1}{3}$;
- (16) 0 ; (17) $2\sqrt{p} f'(p)$;
- (18)
- | | | |
|--|---|--|
| (a) $\frac{1}{(x-1)^2}$ | (d) $\frac{s+2-2 s }{2\sqrt{s}(s+2)^2}$ | (g) $ex^{e-1} + e^x$ |
| (b) $\frac{4x^3 + 12x^2 - 1}{(x+2)^2}$ | (e) $\sin x \cos x + x \cos(2x)$ | (h) $\frac{1}{x \ln 8} + 8^{x+2} \ln 8$ |
| (c) $2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} - \frac{6}{x^3}$ | (f) $-\left(\frac{15+x^2}{x^4}\right)$ | (i) $\frac{1}{ r } \left[\frac{\sqrt{r}}{2} - \frac{1}{6} r^{-\frac{1}{6}} \right]$. |
- (19) $y = 2x - \frac{25}{4}$; (20) $\beta = -1$; (21) $y = -x$ ou $y = \frac{23}{4}x - \frac{27}{4}$;
- (22) (a) $\frac{2}{(x-1)^3}$, (b) $6x + \frac{12}{x^5}$, (c) 0 ; (23) (a) f é derivável em \mathbb{R} , (b) f é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;
- (25) (a) $f^{(n)}(x) = e^x$, (d) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)! x^{-n}$; (27) $\lambda \in \{-5, 27\}$; (28) $P(x) = x^2 - x + 3$;
- (30) 2019; (31) $m = 4$ e $b = -4$.

Regra da Cadeia

(1) $\frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}$;

(2) $f(x) = x^6$, $g(x) = 2x + x^2$ e $(f \circ g)'(x) = 12(x+1)(2x+x^2)^5$;

(3) $g'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$;

(4)

(b) $-94 \cos x \sin x (1 + \cos^2 x)^{46}$

(c) $2x \cos(x^2) + 2 \sin x \cos x$

(d) $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \left(\frac{1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \right)$

(e) $2a \cdot 8^{a^2} \ln(8) - 8 \sin(8a)$

(f) $\frac{3}{2} (t - t^{-1})^{1/2} (1 + t^{-2})$

(g) $(2x+1)^x \left[\ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1} \right]$

(j) $x^{x^x} x^x \left[(1 + \ln x) \ln x + \frac{1}{x} \right]$

(l) $\frac{1}{x \ln x}$

(m) $(1 - \cos x) \cos(x - \sin x)$.

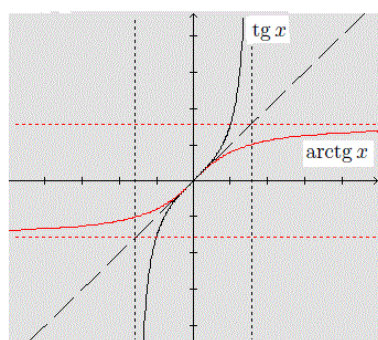
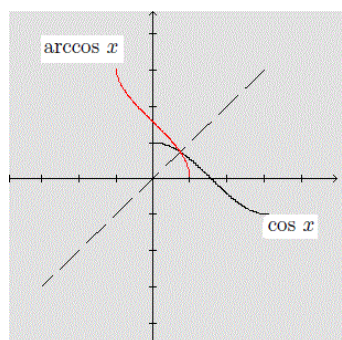
(5) (a) Falsa, (b) Verdadeira, (c) Verdadeira;

(6) $g'(0) = \frac{1}{2}$; (7) $y = -x + 3$; (9) 7.

Derivadas de funções inversas e derivação implícita

(1) $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$, $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$ e $h^{-1}(x) = \frac{5x-1}{2x+3}$;

(3)



(4)

(a) $\arctg(x) + \frac{x}{1+x^2}$

(b) $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$

(c) $\frac{6}{1+(2x+3)^2}$

(d) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(e) $2xe^{\arctg(2x)} \left[1 + \frac{x}{1+4x^2} \right]$

(h) $-\frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3+1)^2} \arccos(x^3+1)}$;

(5)

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0) & \text{(c)} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y + e^y}{xe^y + x} & \text{(e)} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{5 - \sin(y) - x} \\
 \text{(b)} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy - 1}{3y^2 + x^2} & \text{(d)} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{x^2 + y^2 + 2y} & \text{(f)} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 + \cos(y)};
 \end{array}$$

(6) $y = -\frac{9}{13}x + \frac{40}{13}$; (8) $y = \frac{x}{2} - 1$ e $y = -2x - 1$; (9) 0;

(10) Considere a função $f(x) = \arctg(x) + \arctg\left(\frac{1}{x}\right)$ e note que $f'(x) = 0$.

Aplicações da derivada: taxas de variação e regra de L'Hospital

(1) (a) 6 s; (b) $-\frac{1}{36\sqrt[3]{2}} \text{ m/s}^2$; (3) $-\frac{100}{(101)^2}$; (4) $\frac{\beta^2}{8}x^3$; (5) $44\pi r$; (6) 4 cm/s; (7) $(40\pi)^{-1} \text{ m/min}$;
 (8) -1 km/h ; (9) (a) 2, (b) 0, (c) $\frac{99}{10}$, (d) 0, (e) $+\infty$, (f) $-\frac{1}{3}$, (g) 0, (h) 1, (i) 1, (j) 0;

(10) Não está correto e o limite vale 0.

Aplicações da derivada: teoremas de Rolle e do valor médio, e gráfico de funções

(1) (e) Considere a função $f(t) = S_A(t) - S_B(t)$, onde $S_A(t)$ é a função deslocamento do atleta A;

(1) (f) Aplique o T.V.M à função posição $s(t)$ do carro;

(3)

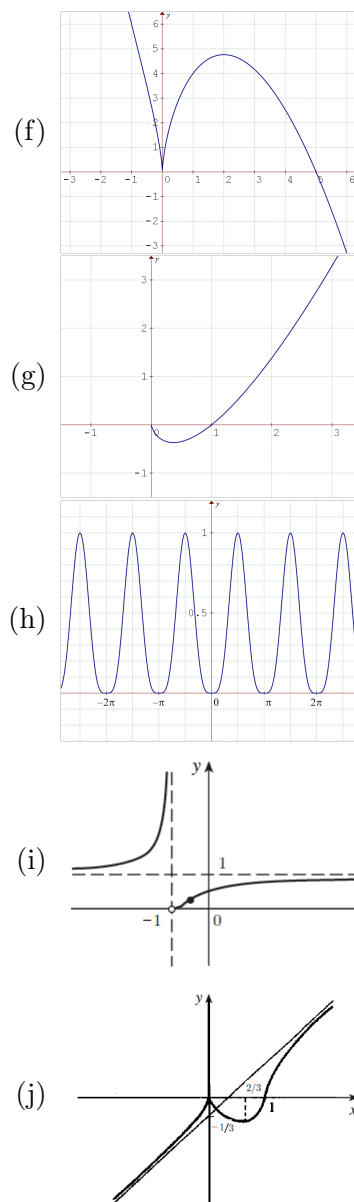
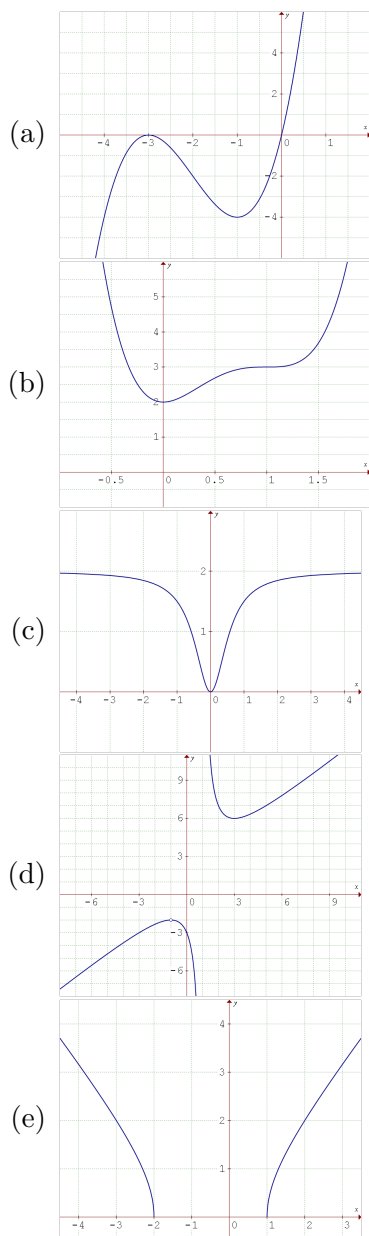
- (a) Crescente em $(-\infty, -\sqrt{6}]$ e em $[\sqrt{6}, \infty)$, e decrescente em $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$;
- (b) Crescente em $(-\infty, \infty)$;
- (c) Crescente em $(-\infty, 1]$ e decrescente em $[1, \infty)$;
- (d) Crescente em $[0, 1]$ e em $(1, 2]$, e decrescente em $(-\infty, 0]$ e em $[2, \infty)$;
- (e) Crescente em $[-1, \infty)$ e decrescente em $(-\infty, -1]$.

(4)

- (a) Conc. para cima em $(1, +\infty)$, conc. para baixo em $(-\infty, 1)$, ponto de inflexão $x = 1$;
- (b) Conc. para cima em $(1/6, +\infty)$, conc. para baixo em $(-\infty, 1/6)$, ponto de inflexão $x = 1/6$;
- (c) Conc. para cima em $(1, +\infty)$, conc. para baixo em $(-\infty, 1)$, ponto de inflexão $x = 1$;
- (d) Conc. para cima em $(-\infty, -1)$, conc. para baixo em $(-1, 0)$, ponto de inflexão $t = -1$;
- (e) Conc. para cima em $(\ln 4, +\infty)$, conc. para baixo em $(-\infty, \ln 4)$, ponto de inflexão $t = \ln 4$;
- (f) Conc. para cima em $(0, +\infty)$ e não existe ponto de inflexão.

(5) (a) $y = 2x + \frac{1}{4}$ e $y = -2x - \frac{1}{4}$, (c) $y = x$; (6) $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$; (8) Não; (10) (a) Pontos de mínimo local: $\{-1, 4\}$ e ponto de máximo local: 0, (b) Ponto de inflexão: 1, (c) Ponto de mínimo local: 0 e ponto de máximo local: $\frac{2}{5}$; (12) (a) $x = 0$ é máximo e $x = 2$ é mínimo;

(14)



Aplicações da derivada: problemas de otimização

(1) $a = b = c = 5$; (2) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; (3) $(0, 5)$ e $(0, -5)$; (4) É um quadrado; (5) $\sqrt[3]{2}$; (6) $r = 2 \text{ cm}$ e $h = 4 \text{ cm}$; (7) *Dica:* por semelhança de triângulos, mostre que $\frac{H-h}{r} = \frac{H}{R}$. *Resposta:* $r = 10 \text{ cm}$ e $h = 12 \text{ cm}$; (9) $q = 10$; (10) É o retângulo em que $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ é um dos vértices; (11) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Última atualização: 07/02/2019