Derivação função implícita!

Relembrando o conceito função explícita:

Uma função explícita é uma função cujo uma das variáveis está isolada em função da outra variável:

Ex:

$$Y = 2x^2 + 4x^3 + 4$$

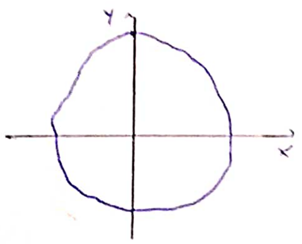
$$Y = \sin(x) + 4$$

$$y = 4x^4 - 5$$

Função dada implicitamente

Consideremos uma equação nas variáveis x e y. Dizemos que a função $y = f(x)$ dada implicitamente por equação se, para todo x no domínio de f, o ponto $(x, f(x))$ for solução da equação

Ex: $x^2 + y^2 = 1$



- Em certos casos é possível resolver tal equação isolando y como função explícita de x. No exemplo anterior é possível

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Nesse caso há duas equações explícitas $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Note que f e g são semicírculos superior e inferior do círculo $x^2 + y^2 = 1$

Método de derivação implícita → colocar y em função de x e usar regra da cadeia para derivar.

Não precisamos resolver uma equação para y em termos de x para encontrar a derivada de y, Basta derivar ambos os lados da equação em relação a x, então, na resolução isolar y'.

$\frac{d\,y}{d\,x}$ → o que se quer derivar
↳ variável fixa

$x^2 + y^2 = 1$

$(\ln t)' = \frac{1}{t}$

$x^2 + (f(x))^2 = 1$

$\frac{1}{\ln f(t)} \cdot f'(t)$

Derivar ambos lados!

$2x + 2f(x) \cdot f'(x) = 0$

$f'(x) = \frac{-x}{f(x)}$

(i) ponto $A = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$

Derivar implicitamente em relação a x

$y^2 + 2x^4 - 5y^3 = 7x$

$(f(x))^2 + 2x^4 - 5f(x)^3 = 7x$

$2f(x) \cdot f'(x) + 8x^3 - 15(f(x))^2 \cdot f'(x) = 7$

$f'(x)\,(2f(x) - 15f(x)^2) = 7 - 8x^3$

$f'(x) = \frac{7 - 8x^3}{2f(x) - 15(f(x))^2}$

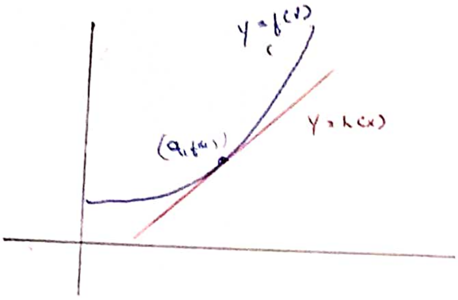
$y = ax + b$

Aproximações lineares!

Sabemos que uma curva fica muito perto da reta tangente nas proximidades do ponto de tangência. Se dermos um zoom em torno de um ponto sobre o gráfico de uma função derivável, notaremos que o gráfico da função se assemelha cada vez mais à reta tangente.

Equação da reta tangente

$$y = f'(p)\,(x-p) + f(p)$$



Assim usaremos a reta tangente em $(a, f(a))$ como uma aproximação para curva $y = f(x)$ quando x estiver próximo de a. Usando equação da reta tangente

$$y = f(p) + f'(p)(x-p)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \approx f'(p)(x-p) + f(p)$$

→ Aproximação linear ou aproximação pela reta tangente f em a. A função linear cujo gráfico é essa reta tangente!

Ex: Encontre a linearização da função $f(x) = \sqrt{x+3}$ no ponto $p=1$ para aproximar $\sqrt{3.98}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

$$f(x) \approx f'(p)\,(x-p) + f(p)$$

$$\approx \frac{1}{2\sqrt{1+3}}(x-1) + 2$$

$$\approx \frac{x-1}{4} + 2$$

$$\approx \frac{x-1+8}{4}$$

$$f(x) \approx \frac{x+7}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3{,}98} \approx \frac{0{,}98}{4} + \frac{7}{4}$$

$$\boxed{\sqrt{3{,}98} \approx 1{,}995}$$