

On the previous episodes...

O que fazer no subcaso $\partial p(t) = 1, \partial q(t) = 2, \Delta < 0$?

Exemplo:

$$\begin{aligned}\int \frac{3t+1}{t^2+2t+5} dt &= 3 \cdot \int \frac{t+\frac{1}{3}}{t^2+2t+5} dt \\&= \frac{3}{2} \cdot \int \frac{2t+2/3}{t^2+2t+5} dt = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{2t+2-2+2/3}{t^2+2t+5} dt \\&= \frac{3}{2} \cdot \int \frac{2t+2}{t^2+2t+5} dt + \frac{3}{2} \cdot \int \frac{-2+2/3}{t^2+2t+5} dt \\&= \frac{3}{2} \cdot \int \frac{2t+2}{t^2+2t+5} dt - 2 \cdot \int \frac{1}{t^2+2t+5} dt \\&= \frac{3}{2} \cdot \ln(t^2+2t+5) - \arctan\left(\frac{t+1}{2}\right) + L, L \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Vamos elevar o nível do jogo: Entenderemos a seguir como proceder com o caso $\partial p(t) = 0, \partial q(t) = 3$.

As possíveis configurações de raízes para polinômios de grau 3 são:

- 1) 3 raízes reais distintas
- 2) 3 raízes reais iguais
- 3) 1 raiz real e 2 raízes complexas
- 4) 2 raízes reais iguais e uma terceira raiz real diferente das anteriores

Exemplos:

1)

$$\int \frac{1}{(t-1) \cdot (t-2) \cdot (t-3)} dt = ?$$

Nesse caso, usaremos uma generalização do método de frações parciais:

$$\frac{1}{(t-1) \cdot (t-2) \cdot (t-3)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2} + \frac{C}{t-3}$$

Logo:

$$1 = A \cdot (t-2) \cdot (t-3) + B \cdot (t-1) \cdot (t-3) + C \cdot (t-1) \cdot (t-2)$$

$$= A \cdot (t^2 - 5t + 6) + B \cdot (t^2 - 4t + 3) + C \cdot (t^2 - 3t + 2)$$

$$= (A + B + C)t^2 - (5A + 4B + 3C)t + 6A + 3B + 2C$$

Teremos então a formação do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 5A + 4B + 3C = 0 \\ 6A + 3B + 2C = 1 \end{cases}$$

Deixaremos a solução deste sistema como exercício. Após isso, os estudantes poderão finalizar o exemplo atual e achar a expressão para a integral solicitada acima.

2)

$$\int \frac{1}{(t-3)^3} dt = ?$$

Nesse caso, basta realizar a mudança de variáveis: $u = t - 3 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 1$. Logo:

$$\int \frac{1}{(t-3)^3} dt = \int \frac{1}{u^3} dt = \frac{u^{-2}}{-2} + K = -\frac{1}{2(t-3)^2} + K, K \in \mathbb{R}$$

3)

$$\int \frac{1}{(t-1) \cdot (t^2 + 2t + 5)} dt = \int \frac{A}{t-1} + \frac{Bt + C}{t^2 + 2t + 5} dt = ?$$

Deixaremos este exemplo como exercício.

4)

$$\int \frac{1}{(t-2) \cdot (t-1)^2} dt = \int \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{(t-1)^2} dt$$

