Introdução a teoria da integração.

A integração corresponde a operação inversa da derivação. Para isso vamos entender o conceito de primitiva de uma função

Considere uma função $f(t)$. Dizemos que a função $F(t)$ é uma primitiva de $f(x)$:

$$\boxed{F'(t) = f(t), \forall t \in D_f}$$

ou

$$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) \quad \text{significa} \quad F'(x) = f(x)}$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Podemos escrever

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + c \quad \text{pois} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + c\right) = x^2$$

Portanto: A integral indefinida representa toda uma família de funções (uma primitiva para cada valor constante c).

integral indefinida $\int f(x)\, dx$ é uma função ou família de funções!

Tabela de primitivas

1) $f(t) = t \rightsquigarrow F(t) = \frac{t^2}{2} + K,\ K \in \mathbb{R}$

2) $f(t) = 5 \rightsquigarrow F(t) = 5t + K,\ K \in \mathbb{R}$

3) $f(t) = 5t^3 \rightsquigarrow F(t) = \frac{5}{4} t^4 + K,\ K \in \mathbb{R}$

↳ caso geral t^n, $n \neq -1$ função polinomial!

4) $f(t) = t^n \rightsquigarrow F(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} + K,\ K \in \mathbb{R}\ \forall\ n \neq -1$

5) $f(t) = t^{-9}$ ~ Aplicando caso geral $F(t) = \dfrac{t^{-9+1}}{-9+1} = -\dfrac{t^{-8}}{8} + K \in \mathbb{R}$

Agora caso $n = -1$!

6) $f(t) = t^n, n = -1$; $f(t) = t^{-1}$

$\hookrightarrow F(t) = \ln|t| + K, K \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

7) $5t^6 + 3t^2$ ~ $F(t) = \frac{5}{7}t^7 + t^3 + K \in \mathbb{R}$

8) $f(t) = e^t$ ~ $F(t) = e^t$

Caso funções exponenciais:

9) $f(t) = a^t, 0 < a \neq 1$ → lembre que $f'(t) = \ln a \cdot a^t$ ~ $\ln a$ é fixo!

$\hookrightarrow F(t) = \dfrac{a^t}{\ln a} + K, K \in \mathbb{R}$

10) $f(t) = \ln t$? ~ integração por partes

$F(t) = t \cdot \ln t - t + K, K \in \mathbb{R}$ → $1 \cdot \ln t + t \cdot \frac{1}{t} - 1$

$\ln t + 1 - 1 = \ln t$ ✓

11) $f(t) = \cos t$

$F(t) = \sin t + K, K \in \mathbb{R}$

12) $f(t) = \sin t$

$F(t) = -\cos t + K, K \in \mathbb{R}$

13) $f(t) = \tan t$

$F(t) = \ln|\sec t| + K, K \in \mathbb{R}$

14) $f(t) = t \cdot e^t$ ← achar por integração por partes!

$F(t) = t \cdot e^t - e^t + K, K \in \mathbb{R}$

Mudança de variável na integral

→ Considere funções $f(t)$ e $g(t)$ (suponha que $g(t)$ é derivável)

Vamos determinar a seguinte expressão para a integral

O parecido com a regra da cadeia!

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt$$

→ Considere a mudança de variáveis $u = g(t)$, então:

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int f(u)\, du$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = g(t)$, então:

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int f(u)\, du$$

Exemplo:

g'(t) derivada do de dentro

1) $\int 2 \cdot \sin 2t\, dt =$

Logo por exemplo, fosse $\boxed{\int \sin 2t}$

$f(t) = \sin t$ $\quad f(g(t)) = \sin 2t$

$g(t) = 2t$

Não está completa
fazer aparecer a derivada do de dentro na integral, ou seja

$$\int \frac{2}{2} \sin 2t = \frac{1}{2} \int 2 \sin 2$$

Só assim possível aplicar MDV!

⇒ fazendo $u = 2t$

$$\int \sin u\, du = -\cos u + k, \ k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\cos(2t) + k, \ k \in \mathbb{R}$$

2) $\int t \cdot \cos t^2\, dt = \int \frac{2}{2} \cdot t \cdot \cos t^2 = \frac{1}{2} \int 2t \cdot \cos t^2$

Fazendo $u = t^2$. Assim a integral pode ser reescrita como:

$\frac{du}{dt} = 2t$

$= \frac{1}{2} \int \cos u\, du = \frac{1}{2} \sin u + C, \ C \in \mathbb{R}$ → voltando à variável!

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin(t^2) + C, \ C \in \mathbb{R}$$

3) $\int 5t \cdot e^{t^2} dt = 5\int t e^{t^2} dt = ?$

Façamos $u = t^2$. logo $\frac{du}{dt} = 2t$ Assim

$= 5\int t \cdot e^{t^2} = 5\int \frac{2}{2} t \cdot e^{t^2} = \frac{5}{2}\int 2t e^{t^2}$ + Aplicar MDV

$= \frac{5}{2}\int e^u du = \frac{5}{2} \cdot e^u + K \overset{!}{=} \boxed{\frac{5}{2} \cdot e^{t^2} + K, \ K \in \mathbb{R}}$

4) $\int 2 \cdot e^{t^2} dt \neq \int 2 \cdot \frac{t}{t} \cdot e^{t^2} \neq \frac{1}{t} \cdot \int 2t \, e^{t^2}$

↳ não podemos jogar $\frac{1}{t}$ para fora da integral pois não é constante

↳ Situação não pode ser resolvida por meio de MDV

5) Translação na variável independente: trocar $f(t)$ por $f(t+m)$, $m \in \mathbb{R}$

Nesse caso, é possível verificar que basta transladarmos a expressão para a integral de f:

Se $\int \sin t \, dt = -\cos t + k, \ k \in \mathbb{R}$

$\int \sin(t+50) \, dt = ?$

Tomando $u = t+50$ $\frac{du}{dt} = 1$

$\int \sin(t+50) \, dt = \int \sin u \, du = -\cos u + M = -\cos(t+50) + M, \ M \in \mathbb{R}$!

Aula 28/06/2022!

Suponha que

$$\int f(t)\, dt = F(t) + K \quad , K \in \mathbb{R}$$

Então

Se $A, B \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$

$$\int f(At+B)\, dt = \frac{1}{A} \cdot F(At+B) + K \ , \ K \in \mathbb{R}$$

$\omega = At+B$

$$\frac{d\omega}{dt} = A$$

$$\int f(At+B)\, dt = \frac{1}{A} \boxed{\int f(\omega)\, d\omega} = \frac{1}{A} F(\omega) + K = \frac{1}{A} F(At+B) + K, \ K \in \mathbb{R}$$

Exemplos:

$$\int e^{2t+5}\, dt = \frac{1}{2}$$

$\hookrightarrow u = 2t+5$

$$\frac{du}{dt} = 2 \qquad \rightsquigarrow \int \frac{2}{2} e^{2t+5}\, dt = \frac{1}{2} \int 2 e^{2t+5}\, dt$$

Aplicar método de mudança de variáveis no integral!

Fica $u = g(t)$ $$\int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int f(u)\, du$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2} \int e^{u}\, du = \frac{1}{2} e^{u} + K = \frac{1}{2} \cdot e^{2t+5} + K \ , K \in \mathbb{R}$$

Integração de funções racionais

$\partial p(t) \rightarrow$ grau numerador

$\partial q(t) \rightarrow$ grau denominador

Caso 1: $\partial q(t) = 0$

Esse caso é trivial pois se reduz ao cálculo de integral de polinômios

Caso 2: $\partial q(t) = 1$ ~> caso em que o grau do polinômio ~~denominador~~ numerador é igual a 1

Caso 2.1: $\partial p(t) = 0$

→ já estudado ~> $\int \frac{1}{x+2}$? ~> MDV $\int \frac{1}{u} = \ln|u| + c = \ln|(x+2)| + c, c \in \mathbb{R}$

$u = x+2$

$\frac{du}{dx} = 1$

→ Relembrando: $\int \frac{5}{-4t+9}\,dt = \frac{5}{-4} \cdot \int \frac{-4}{-4t+9}\,dt = \frac{-5}{4} \cdot \ln|(-4t+9)| + k$

Caso 2.2: $\partial p(t) = 1$

~~Relembrando~~

Vamos analisar subcaso $\partial p(t) = 1$

$$\int \frac{t+1}{t-3}\,dt$$

Para solucionar essa situação devemos aplicar a divisão de polinômios

$$\begin{array}{r|l} t+1 & t-3 \\ \hline -t+3 & 1 \\ \hline 0\ 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \hline 1 & 3 \end{array}$$

~> Este é o algoritmo da divisão euclidiana, o qual nos diz que:

$$\boxed{D = d \cdot q + r, \quad 0 \leq r \leq d}$$

Usando o algoritmo da divisão euclidiana aplicado aos polinômios, concluímos que:

$$(t+1) = (t-3) \cdot 1 + 4$$

dividindo tudo por $t-3$ voltamos ao polinômio original!

$$\frac{(t+1)}{(t-3)} = 1 + \frac{4}{t-3}$$

$$\int \frac{t+1}{t-3}\,dt = \int 1 + \frac{4}{t-3}\,dt = \int 1 + \int 4 \cdot \frac{1}{t-3} = t + 4\int \frac{1}{t-3} = t + 4 \cdot \ln|t-3| + k, \ k \in \mathbb{R}$$

Vamos exercitar o conhecimento aprendido

$$\int \frac{t^2 - 5t + 6}{t-5}\, dt$$

$$\begin{array}{r|l} t^2 - 5t + 6 & t-5 \\ \hline -t^2 + 5t & t \\ 0 + 0 + 6 & \end{array}$$

Vejo que:

$t^2 - 5t + 6 = (t-5) + 6$ logo

$t^2 - 5t + 6 = (t-5)t + 6$

$$\int \frac{t^2 - 5t + 6}{t-5}\, dt = \int t + \frac{6}{t-5}\, dt$$

$$\frac{t^2 - 5t + 6}{t-5} = t + \frac{6}{t-5}$$

$$= \int t + \int \frac{6}{t-5} = \frac{t^2}{2} + 6 \int \frac{1}{t-5} \Rightarrow$$ resolver por MDV

$$= \frac{t^2}{2} + 6 \ln|t-5| + J,\ J \in \mathbb{R}$$

Com os exemplo acima, provamos que é possível lidar com o subcaso $\partial p(t) = n,\ n \in \mathbb{N}$ e $\partial q(t) = 1$, usando a mesma abordagem apresentada.

Caso 3:

Analisamos agora caso $\partial q(t) = 2$, $\partial p(t) = 0$

A estratégia algébrica para resolver neste caso irá depender fundamentalmente do sinal do discriminante Δ, conoveremos a seguir.

$$u^{-2} = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} = -u^{-1} = -\frac{1}{u}$$

Subcaso 3.1: $\Delta = 0$

Exemplo:

$$\int \frac{5}{t^2 + 6t + 9}\, dt = \int \frac{5}{(t+3)^2}\, dt$$

Fazemos mudança de variáveis:

$$u = t + 3 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 1$$

→ logo:

$$\int \frac{5}{(t+3)^2}\, dt = 5 \int \frac{1}{u^2} = \cancel{5 \ldots}$$

$$= -\frac{5}{u} + h = -\frac{5}{t+3} + h,\ h \in \mathbb{R}$$

Subcaso : $\Delta > 0$

↳ Método de frações parciais. Método se propõe a transformar um produto de frações numa soma de frações conservando os denominadores.

Exemplo:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{A}{2} + \frac{B}{3}$$

→ claramente vimos que uma escolha possível para A e B seria: $A = 1$, $B = -1$. Dessa forma

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{A}{2} + \frac{B}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

↳ Note que a escolha para os coeficientes acima não é única. Poderíamos, por exemplo, escolher $A = \frac{1}{3}$, $B = 0$. Assim, existindo infinitas possibilidades.

↳ No caso que veremos a seguir, só teremos uma possibilidade para os coeficientes das frações parciais.

Ex.:

$$\frac{1}{t^2 - 5t + 6} = \frac{1}{(t-2)(t-3)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-3}$$

Para encontrar os coeficientes A e B, procederemos da seguinte forma:

$$1 = A \cdot (t-3) + B(t-2) = (A+B)t - 3A - 2B$$

$$0t + 1 = (A+B)t - 3A - 2B$$

deste lado não há variável t, isso significa que seu coeficiente é $\underline{0}$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -3A - 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = -B \Rightarrow 3B - 2B = 1 \Rightarrow \boxed{B = 1}, \boxed{A = -1}$$

Logo

$$\frac{1}{t^2 - 5t + 6} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-3} = \frac{-1}{t-2} + \frac{1}{t-3}$$

Concluímos, que é possível integrar a expressão acima facilmente:

$$\int \frac{1}{t^2-5t+6}\,dt = \int \frac{-1}{t-2} + \frac{1}{t-3}\,dt$$ ⇝ caso $\partial p(t) = 0$, $\partial q(t) = 1$

$$= -\ln(t-2) + \ln(t-3) + K, \; K \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \ln\left(\frac{t-3}{t-2}\right) + K,\; K \in \mathbb{R}$$

outro exemplo:

$$\int \frac{3}{t^2-7t+10}\,dt$$

⇝ duas raízes reais

$\Delta > 0$

$5 + 2 = 7$

$5 \cdot 2 = 10$

$$\frac{3}{(t-5)(t-2)} = \frac{A}{(t-5)} + \frac{B}{(t-2)}$$

$$3 = A(t-2) + B(t-5) = (A+B)t - 2A - 5B$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - 5B = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2A + 2B = 0 \\ + \; -2A - 5B = 3 \\ \hline -3B = 3 \end{array}$$

$\boxed{B = -1}$ $A = 1$

$$\int \frac{3}{t^2-7t+10}\,dt = \int \frac{1}{t-5} - \frac{1}{t-2} =$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{t-5} - \int \frac{1}{t-2}$$ ($t > 0$) ⇝ quando não uso módulo considera-se apenas o Domínio positivo!

$$\Rightarrow \ln(t-5) - \ln(t-2)$$?

$$\Rightarrow \ln(t-5) - \ln(t-2) + K,\; K \in \mathbb{R}$$

Obs: p/ o subcaso $\partial p(t) = 1$, $\partial q(t) = 2$, $\underline{\Delta > 0}$

é possível proceder do mesmo forma.

ii) $$\int \frac{2t - 1}{t^2 - 11t + 30}\, dt = ?$$

Veja que:

$$\frac{2t - 1}{t^2 - 11t + 30} = \frac{2t - 1}{(t-5)(t-6)} = \frac{A}{t-5} + \frac{B}{t-6}$$

Para encontrar os coeficientes A, B, fazemos

$$2t - 1 = A(t-6) + B(t-5) = (A+B).t - 6A - 5B$$

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -6A - 5B = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & 5A + \cancel{5B} = 10 \\ + & -6A - \cancel{5B} = -1 \\ \hline & -A = 9 \Rightarrow \underline{A = -9} \end{array} \qquad B = 11$$

Logo:

$$\int \frac{2t-1}{t^2 - 11t + 30}\, dt = \cancel{\frac{2t-1}{t-5}} \int \frac{9}{t-5} + \frac{11}{t-6}\, dt \Rightarrow \int \frac{-9}{t-5} + \int \frac{11}{t-6} =$$

$$= -9 \int \frac{1}{t-5} + 11 \int \frac{1}{t-6} = -9 \ln(t-5) + 11 \ln(t-6) + k, \underline{k \in \mathbb{R}}$$

Analisemos agora o subcaso

$\partial p(t) = n \,,\, n \geq 2 \,,\, \partial q(t) = 2 \quad \underline{\Delta > 0}$

↳ Estratégia para este cenário: Efetuar a divisão de polinómios envolvidos para recair nos casos anteriores!

Exemplos:

$$\int \frac{t^2+2}{t^2-5t+6}\, dt = ?$$

Façamos a divisão de polinómios

$$\begin{array}{l|l} t^2 + 2 & t^2-5t+6 \\ \hline -t^2+5t-6 & 1 \\ \hline +5t-4 & \end{array}$$

Logo:

$$t^2+2 = 1\,(t^2-5t+6) + 5t-4$$

$$\frac{t^2+2}{t^2-5t+6} = 1 + \frac{5t-4}{t^2-5t+6}$$

$$\int \frac{t^2+2}{t^2-5t+6}\, dt = \int 1 + \frac{5t-4}{t^2-5t+6}\, dt$$

$$\int 1 + \int \frac{5t-4}{t^2-5t+6}$$

$3 + 2 = 5$

$3 \times 2 = 6$

$$t - \int \frac{5t-4}{(t-3)(t-2)}$$

//

$$\frac{5t-4}{(t-3)(t-2)} = \frac{A}{(t-3)} + \frac{B}{(t-2)} =$$

$$5t-4 = (t-2)A + (t-3)B$$

$$5t-4 = (A+B)t - 2A - 3B$$

$$\begin{cases} A+B = 5 \\ -2A-3B = -4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2A + 2B = 10 \\ -\;\; -2A - 3B = -4 \\ \hline -B = 6 \end{array} \Rightarrow \boxed{B = -6}$$

$$A = 5 - B \Rightarrow \boxed{A = 11}$$

$$= t - \int \frac{11}{(t-3)} + \frac{-6}{(t-2)}$$

$$= t + 11\int \frac{1}{(t-3)} + -6\int \frac{1}{t-2}$$

$$= t + 11\ln(t-3) - 6\ln(t-2) + K,\ K \in \mathbb{R}\,!$$

Lidarmos com o subcaso

$$\partial p(t) = 0,\ \partial q(t) = 2 \quad , \underline{\Delta < 0}$$

$$\int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \arctan + k \quad , k \in \mathbb{R}$$

Para este sub caso o exemplo mais representativo a saber:

)

→ O que fazer no seguinte exemplo:

$u = \sqrt{2}\cdot t$

$\boxed{\frac{du}{dt} = \sqrt{2}}$

$$\int \frac{1}{2t^2+1}\, dt = ?$$

(R)

$$\int \frac{1}{2t^2+1}\, dt = \int \frac{1}{(\sqrt{2}\cdot t)^2+1}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}\cdot t)^2+1}\, dt$$

$u = \sqrt{2}\cdot t$

$\frac{du}{dt} = \sqrt{2}$

$$\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2}\cdot t)^2+1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{u^2+1}$$

Fazendo a mudança de variável: $u = \sqrt{2}\cdot t$, temos:

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}\cdot t)^2+1}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int \frac{1}{u^2+1}\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan u + k = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\cdot t) + k,\ k \in \mathbb{R}$$

Exemplo:

$u = \frac{t}{\sqrt{5}} \to \frac{du}{dt} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\int \frac{2}{\frac{t^2}{5}+1} = \int \frac{2}{\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2+1} = \sqrt{5} \cdot \int \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2+1} = \sqrt{5}\cdot 2 \int \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2+1}$$

$$= \sqrt{5}\cdot 2 \int \frac{1}{u^2+1} = 2\sqrt{5}\cdot \operatorname{arctg}(u) + k$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{5}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + k,\ k \in \mathbb{R}$$

(2) $\int \frac{A}{Bt^2+1} dt = \ldots = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \operatorname{arctg}(\sqrt{B} \cdot t)$

$\int \frac{A}{(\sqrt{B}t)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{B}} \int \frac{\sqrt{B}\, A}{(\sqrt{B}t)^2+1} dt = \frac{A}{\sqrt{B}} \int \frac{\sqrt{B}}{(\sqrt{B}t)^2+1} dt \Rightarrow \sqrt{B}t \Rightarrow u = \sqrt{B}t$ UDV

$\frac{du}{dt} = \sqrt{B}$

$\frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \operatorname{arctg}(u) = \frac{A}{\sqrt{B}} \operatorname{arctg}(\sqrt{B}t) + K,\ K \in \mathbb{R}$!

(3)

$\int \frac{1}{t^2+2} dt = \int \frac{1}{2\left(\frac{t^2}{2}+1\right)} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\frac{t^2}{2}+1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dt$

$= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \int \frac{1/\sqrt{2}}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dt \rightsquigarrow u = \frac{t}{\sqrt{2}},\ \frac{du}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{arctg}(u) + K$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + K,\ K \in \mathbb{R}$

(4)

$\int \frac{A}{Bt^2+C} dt = \ldots = \frac{A\sqrt{C}}{C\sqrt{B}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{C}} \cdot t\right) + K,\ K \in \mathbb{R}$

Veja que em todos os exemplos acima tínhamos polinômios de grau 2 incompletos no denominador. O que fazer se tivermos um polinômio completo?

Ex.:

[illegible]

$$\frac{1}{t^2+2t+5} = \frac{1}{(t+1)^2+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{(t+1)^2}{4}+1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1}$$

Logo fazendo mudança de variáveis $u = \frac{t+1}{2}$, teremos que $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}$.

assim:

$$\int \frac{1}{t^2+2t+5}\,dt = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int\frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\,\operatorname{arctg} u + K = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t+1}{2}\right) + K,\ K\in\mathbb{R}$$

(2) $\int \frac{1}{t^2+t+1}\,dt$?

↳ produto notável $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

vem de $1 = 2\cdot 1\cdot b \to b = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{4}+1 = \frac{3}{4}$

$$\cancel{\int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)}} \to \int \frac{1}{\left(t^2+t+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+1} \Rightarrow \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dt = \dots ?$$

$$\frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}+1\right)} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1} \Rightarrow u = \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\cdot\int\frac{1}{\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1} = \frac{4}{3}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{1}{u^2+1}$$

↳ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+K$

O que fazer no trabalho $\partial p(t) = 1$ $\underline{\partial q(t) = 2}$, $\underline{\Delta < 0}$?

Exemplo

$$\int \frac{3t+1}{t^2+2t+5}\,dt = ?$$

$$\int \frac{3t+1}{t^2+2t+5}\,dt = \frac{3}{2}\int \frac{2t+2-2+\frac{2}{3}}{t^2+2t+5}\,dt$$

tentando forçar a derivada em cima da de baixo.

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2t+2}{t^2+2t+5}\,dt + \frac{3}{2}\int \frac{-2+\frac{2}{3}}{t^2+2t+5}\,dt = ?$$

$$\frac{3}{1/3}$$ cima, baixo

$$\int \frac{3t+1}{t^2+2t+5}\,dt = 3.\int \frac{t+\frac{1}{3}}{t^2+2t+5}\,dt$$

x2 cima, baixo!

$(t+1)(t+1) = t^2+2t+1$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2t+2/3}{t^2+2t+5}\,dt = \frac{3}{2}\int \frac{2t+2-2+2/3}{t^2+2t+5}\,dt$$

$B = a.1.x$

$\frac{-4}{3}$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2t+2}{t^2+2t+5} + \frac{3}{2}\int \frac{-2+2/3}{t^2+2t+5}$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{-2+2/3}{(t+1)^2+4} \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\int \frac{-2+2/3}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1} =$$

$-\frac{6+2}{3} = -\frac{4}{3}$

$\Delta < 0$ $\partial p(t) = 1$ $\partial q(2)$

$$= \frac{3}{2}.\ln(t^2+2t+5)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8}\cdot-\frac{4}{3} = -\frac{1}{2}$$