Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Departamento de Matemática

MAT A42 - Matemática Discreta I
Princípios Básicos da Contagem, Princípio da Casa dos Pombos, Números Binomiais, Binômio de Newton e Números de Stirling

Professora: Isamara

Príncipios Básicos de Contagem

Princípio da Adição:

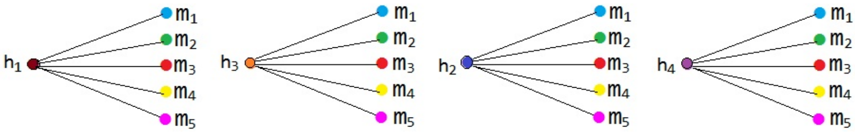
Sejam $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos dois a dois disjuntos, cada conjunto com $p_1, \ldots, p_n$ elementos, respectivamente.
Então, o conjunto $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ tem $\sum_{i=1}^{n} p_i$ elementos; pois

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| = p_1 + p_2 + \ldots + p_n.$$

Exemplo.1

Numa sala de aula há 4 *alunos e* 5 *alunas e queremos formar equipes com duas pessoas sendo um aluno com uma aluna*.
De quantos modos distintos podemos fazer isso?
Como utilizar o princípio aditivo?

SOLUÇÃO(EXEMPLO.1): Vamos denotar os conjuntos;
$H := \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ o conjunto dos alunos e
$M := \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ o conjunto das alunas.
Observe que temos a possibilidade de formar CINCO duplas para cada aluno, do seguinte modo:



Desta forma, teremos o total de $5+5+5+5 = 4(5) = 20$ duplas possíveis de alunos.
Generalizando o problema para uma sala de aula com m alunos e n alunas, teremos o total de

$$\underbrace{n+n+\cdots+n}_{m\text{parcelas}} = m(n)$$

Príncipios Básicos de Contagem

Princípio Multiplicativo (ou Princípio Fundamental da Contagem):

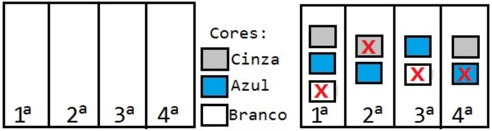
Sejam $A_1, \cdots, A_n$ conjuntos finitos, cada conjunto com $p_1, \cdots, p_n$ elementos, respectivamente. Então, o conjunto $\prod_{i=1}^{n} A_i$ tem $\prod_{i=1}^{n} p_i$ elementos.
Podemos reformular este princípio do seguinte modo:
"Se uma DECISÃO d_1 pode ser tomada de p_1 maneiras, uma vez tomada esta decisão, uma DECISÃO d_2 pode ser tomada de p_2 maneiras,
uma vez tomada estas decisões, uma DECISÃO d_3 pode ser tomada de p_3 maneiras, e;
uma vez tomada $n-1$ decisões, uma DECISÃO d_n pode ser tomada de p_n maneiras;
então, o número de maneiras de tomar as decisões $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_{n-1}, d_n$ é
$p_1.p_2.p_3.\cdots.p_{n-1}.p_n$.

Exemplo.1

Numa sala de aula há 4 alunos e 5 alunas e queremos formar equipes com duas pessoas sendo um aluno com uma aluna.
De quantos modos distintos podemos fazer isso? Como utilizar o princípio multiplicativo ?

Solução(Exemplo.1):
$H := \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ o conjunto dos alunos e
$M := \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ o conjunto das alunas.
Vamos denotar d_1 a decisão de escolher um dos 4 alunos e
d_2 a decisão de escolher uma das 5 alunas.
Observe que temos 4 maneiras de escolher um aluno: $p_1 = 4$, e;
para cada aluno escolhido, temos 5 maneiras de escolher uma aluna: $p_2 = 5$.
Logo, $p_1.p_2 = 4.5 = 20$ maneiras distintas de formar as duplas.
Generalizando o problema para uma sala de aula com n alunos e m alunas, teremos $p_1 = n$ e $p_2 = m$ o que resulta em $m.n$ maneiras distintas de formar as duplas.

Exemplo.2: As quatro listras de uma bandeira devem ser coloridas apenas com as cores cinza, azul e branco, e; as listras adjacentes devem ter cores distintas. De quantos modos podemos colorir esta bandeira?



Denotando d_i a decisão de escolher as cores para a i-ésima listra; com $i = 1, 2, 3, 4$, temos;
(i) 3 maneiras de escolher uma das 3 cores para a 1^a listra: $p_1 = 3$;
(ii) 2 maneiras de escolher uma das 2 cores restantes para a 2^a listra: $p_2 = 2$;
(iii) para a 3^a listra, após escolher a cor da 2^a listra e incluir de volta a cor da 1^a listra(não-adjacente): $p_3 = 2$;
(iv) para a 4^a listra, após escolher a cor da 3^a listra e incluir de volta as cores das 1^a e 2^a listras(não-adjacentes):$p_4 = 2$.

EXEMPLO.2(Continuação)

SOLUÇÃO:

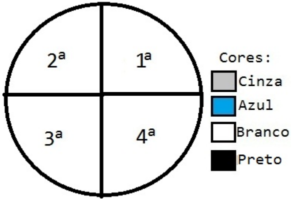
Logo, considerando ; $p_1 = 3; p_2 = p_3 = p_4 = 2$, e utilizando o princípio multiplicativo; temos $p_1.p_2.p_3.p_4 = 3.2.2.2 = 3.2^3 = 24$ maneiras distintas de pintar a bandeira.

Generalizando o problema para uma bandeira com n listras e m cores distintas disponíveis para pintar, teremos $p_1 = m, p_2 = m-1, p_3 = m-1, \cdots, p_n = m-1$;

o que resulta em $m.\underbrace{(m-1).(m-1).\cdots.(m-1)}_{(n-1)\text{vezes}} = m.(m-1)^{n-1}$ maneiras distintas de pintar as n listras da bandeira com m cores distintas.

Príncipios Básicos de Contagem

OBSERVAÇÃO: Se modificássemos o EXEMPLO.2 fechando a bandeira e acrescentássemos mais uma cor "preta".

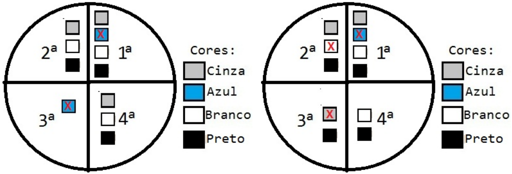


Agora, temos que pintar as quatro listras de uma bandeira com as extremidades unidas, com as cores cinza, azul, branco e preta, e; as listras adjacentes devem ter cores distintas.
De quantos modos podemos colorir esta bandeira?

Observação: Vamos denotar d_i a decisão de escolher as cores para a i-ésima listra; com $i = 1, 2, 3, 4$, e, vamos numerar estas listras como na figura acima. Assim, ficamos com dois casos distintos e disjuntos:

(1°) A cor escolhida da 3^a igual a da 1^a listra,

(2°) A cor escolhida da 3^a diferente da 1^a listra.



(1°) $p_1.p_2.p_3.p_4 = 4.3.1.3 = 36$ modos distintos de pintarmos a bandeira.

(2°) $p_1.p_2.p_3.p_4 = 4.3.2.2 = 48$ modos distintos de pintarmos a bandeira.

Agora, utilizando o **princípio aditivo**: $36 + 48 = 84$ modos distintos de pintarmos a bandeira.

EXEMPLO.3: Quantos números naturais de três algarismos distintos existem?

$$\underline{\ 1^a\ }\quad\underline{\ 2^a\ }\quad\underline{\ 3^a\ }$$

Considerando os algarismos: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, temos;
(i) d_1 é a decisão de escolher o algarismo da 1^a posição $\Rightarrow p_1 = 9$ possibilidades, pois o zero 0 não pode ocupar a primeira posição,
(ii) d_2 é a decisão de escolher o algarismo da 2^a posição $\Rightarrow p_2 = 9$ possibilidades, pois excluimos o algarismo da primeira posição e incluimos o zero 0,
(iii) d_3 é a decisão de escolher o algarismo da 3^a posição $\Rightarrow p_3 = 8$ pois, excluimos os dois algarismos utilizados nas 1^a e 2^a posições.
Assim, utilizando o princípio multiplicativo:

$$p_1.p_2.p_3 = 9.9.8 = 648$$

números naturais distintos de três algarismos.

Exemplo.4:
Quantos números naturais de quatro algarismos menores do que 5.000 e divisíveis por 5 podem ser formados usando apenas os algarismos $2, 3, 4, 5, 7$?

Solução: $\forall x = abcd \in \mathbb{N}$ tais que $a, b, c, d \in A = \{2, 3, 4, 5, 7\}$ e $x < 5.000$ e $5|x$.

$$\underline{a \in A \text{ e } a \leq 4} \quad \underline{\;b \in A\;} \quad \underline{\;c \in A\;} \quad \underline{\;d = 5\;}$$

1. o número deve ser divisível por 5; ou seja, tem que terminar em 0 ou 5. Temos apenas $5 \in A$ para ocupar a última posição 'd'; resultando numa única possibilidade para a decisão d_4: $p_4 = 1$.
2. para o penúltimo dígito 'c' do número podemos utilizar todos os algarismos disponíveis, isto é, para d_3: $p_3 = 5$.
3. para o antepenúltimo dígito 'b' do número podemos utilizar todos os algarismos disponíveis, isto é, para d_2: $p_2 = 5$.
4. no primeiro dígito 'a', para tomar a decisão d_1 temos que utilizar apenas os algarismos que são menores do que ou iguais ao 4: $p_1 = 3$.

Príncipios Básicos de Contagem

EXEMPLO.4

$$\underbrace{\underline{a \in A \ e \ a \leq 4}}_{p_1=3} \quad \underbrace{\underline{b \in A}}_{p_2=5} \quad \underbrace{\underline{c \in A}}_{p_3=5} \quad \underbrace{\underline{d = 5}}_{p_4=1}$$

Neste caso, utilizando agora o princípio multiplicativo, obtemos

$$p_1.p_2.p_3.p_4 = 3.5.5.1 = 75$$

75 números naturais menores do que 5.000 e múltiplos de 5 com quatro algarismos.

Exemplo.5

Quantos números naturais de quatro algarismos divisíveis por 5 podem ser formados usando apenas os algarismos $2, 3, 4, 5, 7$?

Considere os algarismos do conjunto $A = \{2, 3, 4, 5, 7\}$ para formarem os números.

$$\underline{\ a \in A\ }\quad \underline{\ b \in A\ }\quad \underline{\ c \in A\ }\quad \underline{\ d = 5\ }$$

Como no exemplo anterior, temos apenas disponível o algarismo 5 para ocupar a última posição resultando numa única possibilidade para a decisão d_4: $p_4 = 1$.

Para os demais dígitos do número podemos utilizar todos os algarismos disponíveis, isto é, $p_3 = p_2 = p_1 = 5$.

Agora, pelo princípio multiplicativo, temos

$$p_1.p_2.p_3.p_4 = 5.5.5.1 = 125$$

125 números naturais múltiplos de 5 com quatro algarismos.

Príncipios Básicos de Contagem

EXEMPLO.6

Quantos números naturais de quatro algarismos podem ser formados usando apenas os algarismos $2, 3, 4, 5, 7$?

Considere os algarismos do conjunto $A = \{2, 3, 4, 5, 7\}$ para formarem os números.

$$\underline{\ a \in A\ } \quad \underline{\ b \in A\ } \quad \underline{\ c \in A\ } \quad \underline{\ d \in A\ }$$

Neste exemplo, para todos os dígitos do número podemos utilizar quaisquer elemento do conjunto A, isto é, $p_4 = p_3 = p_2 = p_1 = 5$.

Logo, pelo princípio multiplicativo, temos

$p_1.p_2.p_3.p_4 = 5.5.5.5 = 625$

números naturais com quatro algarismos.

Permutações Simples

Proposição.1:

Sejam n objetos. Então, podemos ordená-los em $n!$ modos numa linha.

Demonstração:

Vamos denotar os n objetos por $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Vamos agora ordená-los em linha.
Então,

- a primeira posição tem n possibilidades, pois todos os objetos estão disponíveis: $p_1 = n$
- a segunda posição tem $n-1$ objetos: $p_2 = n-1$; e
- a terceira posição tem $(n-1)-1 = n-2$ objetos: $p_3 = n-2$.

Observe que em cada posição seguinte, temos que diminuir um objeto pois já o usamos na posição anterior: $\ldots; p_{n-1} = n-(n-2) = 2; p_n = 1$.
Seguindo o princípio multiplicativo:

$$p_1.p_2.p_3.\cdots.p_{n-1}.p_n = n.(n-1).(n-2).\cdots.2.1 = n!$$

Logo, temos $n!$ modos de ordenar n objetos numa linha.

Permutação Simples

EXEMPLO.7

Queremos saber quantos anagramas podemos formar da palavra PRATICO.

SOLUÇÃO:

Sabemos que cada anagrama da palavra é uma ordenação das suas letras.

Então, vamos resolver utilizando a proposição.1 a fim de ordenar as letras:

temos $n = 7$ letras distintas

$\Longrightarrow 7.6.5.4.3.2.1 = 7! = 5040.$

Logo, temos 5040 anagramas formados pelas 7 letras da palavra PRATICO.

Permutação Simples

EXEMPLO.8

Queremos saber agora quantos anagramas podemos formar da palavra PRATICO, as quais começam e terminam com uma consoante?

SOLUÇÃO:

A palavra PRATICO tem quatro consoantes P,R,T,C
e três vogais A,I,O.
Então, para a primeira posição temos 4 possibilidades e
para a última restam 3 consoantes;
as $5(= 7 - 2)$ letras restantes podem ser ordenadas em linha utilizando a proposição.1: $5!$.
Desta forma, temos : $4.5!.3 = 1440$ anagramas.

Permutação Simples

EXEMPLO.9: Queremos saber de quantos modos podemos dividir 8 pessoas em 2 mesas de 4 lugares cada.
SOLUÇÃO: Denotaremos as pessoas por : $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$.
Agora as colocamos numa fila e podemos fazer isso de 8! modos.
Observe que algumas permutações são contadas como distintas, por exemplo:
$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ e $P_2, P_1, P_3, P_4, P_8, P_6, P_7, P_5$.
Mas, as pessoas devem sentar em 2 mesas, a fila será dividida em 2:
$\underbrace{P_1, P_2, P_3, P_4}_{mesa1}, \underbrace{P_5, P_6, P_7, P_8}_{mesa2}$ e $\underbrace{P_2, P_1, P_3, P_4}_{mesa1}, \underbrace{P_8, P_6, P_7, P_5}_{mesa2}$;
e, estas duas permutações são iguais; ou seja, as permutações de quatro pessoas em cada mesa: 4!, resultam numa mesma possibilidade.
Retiramos então das 8! possibilidades, as permutações em cada mesa:

$$\frac{8!}{4!.4!}$$

Permutação Simples

Exemplo.9: Solução: (Continução)

Retiramos então das 8! possibilidades, as permutações em cada mesa: $\frac{8!}{4!.4!}$.

Além disso, contamos como duas possibilidades distintas, por exemplo :

$\underbrace{P_1, P_2, P_3, P_4}_{mesa1}, \underbrace{P_5, P_6, P_7, P_8}_{mesa2}$ e

$\underbrace{P_5, P_6, P_7, P_8}_{mesa1}, \underbrace{P_1, P_2, P_3, P_4}_{mesa2}$;

que na verdade, são iguais.

A fim de eliminar uma das duas, dividimos as 8! possibilidades por 2: $\frac{8!}{2}$.

Conclusão:

$$\frac{8!}{2.4!.4!}$$

modos de dividir 8 pessoas em 2 mesas de 4 lugares.

Combinações Simples

DEFINIÇÃO.1:

Sejam A um conjunto com n elementos e $k \leq n$ um natural.
Dizemos que um subconjunto de A com k elementos é uma COMBINAÇÃO SIMPLES DE CLASSE k.

DEFINIÇÃO.2:

Sejam A um conjunto com n elementos e $k \leq n$ um natural.
Definimos por

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

e, dizemos que $\binom{n}{k}$ é um COEFICIENTE BINOMIAL.

NOTAÇÃO: C_n^k

Combinações Simples

Proposição.2:

Sejam A um conjunto com n elementos e $k \leq n$ um natural.

O número de combinação simples de classe k do conjunto A é $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$.

Combinações Simples

Demonstração: Sejam $A := \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ um conjunto com n elementos e seja k um natural tal que $k \leq n$.
Queremos saber quantos subconjuntos de A com exatamente k elementos existem.
Portanto,
• A escolha do primeiro elemento deste subconjunto podemos fazer de n modos, pois em A existem n elementos disponíveis;
• A escolha do segundo elemento deste subconjunto podemos fazer de $n-1$ modos, pois em A existem agora $n-1$ elementos disponíveis;
• Continuando o processo de escolhas, para o k-ésimo elemento ainda restam $(n-k)+1$ elementos em A.

Combinações Simples

Demonstração (Continuação):
Então, pelo *princípio multiplicativo* temos: $n.(n-1).\cdots.(n-k+1)$ possibilidades para escolha.
Porém, note que estamos contando mais de uma vez alguns conjuntos com k elementos que são iguais, como por exemplo: $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k\}$; $\{x_3, x_2, x_k, \cdots, x_1\}$; $\{x_2, x_3, x_1, \cdots, x_k\}$; ou seja, contamos $k!$ possibilidades a mais.
Logo, o número de escolhas de um subconjunto de A com k elementos é

$$\frac{n.(n-1).\cdots.(n-k+1)}{k!}$$

Combinações Simples

DEMONSTRAÇÃO(Continuação):
Encontramos $\frac{n.(n-1).\cdots.(n-k+1)}{k!}$ maneiras possíveis.
Note que,
$\frac{n.(n-1).\cdots.(n-k+1)}{k!} = \frac{n.(n-1).\cdots.(n-k+1).(n-k).\cdots.2.1}{k!(n-k).\cdots.2.1} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$.
Conclusão:

$$C_n^k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

maneiras possíveis de determinarmos subconjuntos de A com k elementos.

Combinação Simples

EXEMPLO.10
Quantas saladas diferentes podemos elaborar adicionando 4 frutas, se tivermos 10 frutas à disposição?
SOLUÇÃO:
Neste exemplo temos que escolher 4 frutas em 10 e fazer a salada de frutas. A escolha pode ser feita utilizando a proposição.2,
isto é,

$$C_{10}^{4} = \left(\begin{array}{c} 10 \\ 4 \end{array} \right) = \frac{10!}{4!.(10-4)!} = 210$$

Logo, são 210 modos de fazer saladas de frutas, escolhendo 4 frutas em 10.

EXEMPLO.11
Quantos modos podemos dividir 8 pessoas em 2 mesas de 4 lugares cada.
SOLUÇÃO:
Pela proposição.2, escolhemos um subconjunto de 4 elementos em 8 pessoas :

$$C_8^4 = \left(\begin{array}{c} 8 \\ 4 \end{array} \right) = \frac{8!}{4!.(8-4)!} = 70$$

Lembrando que estamos contando as mesmas escolhas por duas vezes, por exemplo:
$\underbrace{P_1, P_2, P_3, P_4}_{mesa1}, \underbrace{P_5, P_6, P_7, P_8}_{mesa2}$ e $\underbrace{P_5, P_6, P_7, P_8}_{mesa1}, \underbrace{P_1, P_2, P_3, P_4}_{mesa2}$;
temos que dividir o resultado por 2:

$$\frac{C_8^4}{2} = \frac{1}{2}.\left(\begin{array}{c} 8 \\ 4 \end{array} \right) = \frac{1}{2}.\frac{8!}{4!.(8-4)!} = \frac{1}{2}.70 = 35$$

Logo, são 35 modos de dividir 8 pessoas em 2 mesas, com 4 lugares cada.

Combinação Simples

Exemplo.12

Queremos saber de quantos modos podemos escolher 5 pessoas, incluindo *pelo menos* 3 mulheres num grupo de 8 homens e 5 mulheres?

Solução:

Se queremos incluir *pelo menos* 3 mulheres num grupo de 8 homens e 5 mulheres, temos as possibilidades:

(i) 3 mulheres e 2 homens: $C_5^3.C_8^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 280;$

(ii) ou, 4 mulheres e 1 homem $C_5^4.C_8^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 40;$

(iii) ou, 5 mulheres e nenhum homem $C_5^5.C_8^0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$

Concluindo pelos três casos possíveis, (i), (ii) e (iii), e observando que eles são disjuntos (um acontecimento exclui os outros dois), podemos utilizar o *princípio aditivo*:

$C_5^3.C_8^2 + C_5^4.C_8^1 + C_5^5.C_8^0 = 280 + 40 + 1 = 321$

EXEMPLO.12

Queremos saber de quantos modos podemos escolher 5 pessoas, incluindo *pelo menos* 3 mulheres num grupo de 8 homens e 5 mulheres?

SOLUÇÃO:

Observe que podíamos ter resolvido o problema pensando de outro modo:
"Se queremos escolher um grupo de 5 pessoas de um total com 8 homens + 5 mulheres = 13 pessoas; com pelo menos 3 mulheres",
então excluimos do total de possibilidades os grupos com menos de 3 mulheres; ou seja,

$$C_{13}^{5} - (C_5^2 . C_8^3 + C_5^1 . C_8^4 + C_5^0 . C_8^5) = 321$$

Combinação Simples

Proposição.3:

Sejam n e $0 \leq k \leq n$ naturais. Então, $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} = C_n^{n-k}$

Demonstração:

Sabemos por definição que

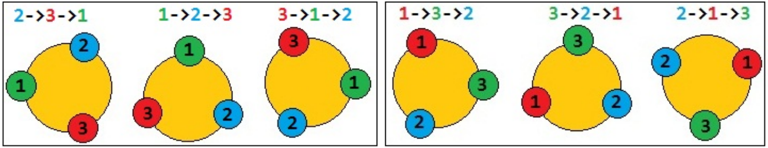
$C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$; e

$C_n^{n-k} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}.$

Permutações Circulares

"Temos n objetos distintos, e queremos colocá-los em torno de uma CIRCUNFERÊNCIA. De quantos modos isso é possível? "

EXEMPLO.13: Dados três objetos: $1, 2$ e 3 podemos colocá-los numa linha de $3! = 6$ maneiras distintas; ou seja, $1/2/3; 1/3/2; 3/2/1; 3/1/2; 2/3/1; 2/1/3$.
Todavia, para ordená-los numa CIRCUNFERÊNCIA,
observamos que algumas permutações são iguais numa circunferência:



Por isso, escolhermos um de cada grupo. Assim, temos apenas 2 modos de ordenar 3 objetos em torno de uma circunferência.
Observe que existem menos casos possíveis numa CIRCUNFERÊNCIA do que numa linha.

Permutações Circulares

PROPOSIÇÃO.4:

Sejam n objetos. Então, temos $(n-1)!$ modos de colocá-los CIRCULARMENTE.

DEMONSTRAÇÃO:

Pela proposição.1, podemos colocar n objetos de $n!$ modos distintos numa linha.
Considerando agora posições equivalentes, as quais podemos obter através de rotação, cada escolha tem n rotações iguais.
Assim, as possibilidades são de

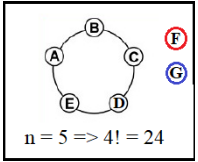
$$\frac{n!}{n} = \frac{n.(n-1)!}{n} = (n-1)!$$

modos de colocarmos os n objetos circularmente.

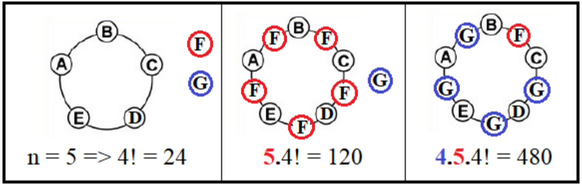
Permutações Circulares

Exemplo.14
Queremos saber de quantos modos podemos sentar 7 pessoas numa mesa redonda, tal que 2 pessoas determinadas não fiquem uma ao lado da outra?

Solução:
Pensando do seguinte modo:
temos 7 pessoas, retiramos as 2 que não podem sentar juntas e
ficamos com 5 pessoas para sentarmos à mesa redonda de 5 lugares. Utilizando a proposição.3: $(5-1)! = 4! = 24$.



Exemplo.14 Solução:(Continuação)
Agora, pegamos uma das duas pessoas retiradas do grupo e sentamos à mesa entre as outras 5; isto é possível de 5 maneiras.



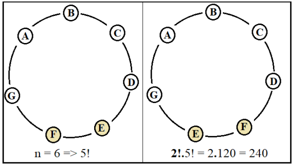
Resta ainda a outra pessoa das duas para sentar-se entre as 6 que já estão à mesa redonda. Porém, ela não pode sentar-se nem à esquerda e nem à direita da outra pessoa; então, das 6 possibilidades possíveis retiramos 2; e restam apenas 4 posições para ela sentar-se.
Pelo princípio multiplicativo, temos $4!.5.4 = 480$ modos de sentarmos 7 pessoas numa mesa redonda com a restrição dada.

Exemplo.15:
Queremos saber de quantos modos podemos sentar 7 pessoas numa mesa redonda, tal que 2 pessoas determinadas fiquem uma ao lado da outra?

Permutações Circulares

Exemplo.15

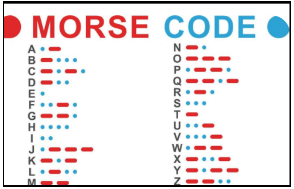
Solução: Temos 7 pessoas das quais 2 devem sentar-se juntas. Considerando as duas juntas como uma única pessoa, porque não podem separar-se; ficamos com 6 pessoas para sentarmos à mesa redonda de 6 lugares; e pela proposição.3: $(6-1)! = 5! = 120$.
Agora, vamos considerar as possibilidades das duas pessoas sentarem juntas; neste caso, são apenas 2 possibilidades: "*uma delas pode sentar-se à esquerda ou à direita da outra*".



Pelo princípio multiplicativo, temos $2!.5! = 2.120 = 240$ modos de sentarmos 7 pessoas numa mesa redonda com a restrição dada.

(1) Um restaurante possui um cardápio que apresenta escolhas de saladas(salada verde, salada russa, salpicão), sopas(caldo verde, canja, de legumes) e pratos principais (bife com fritas, peixe com purê, frango com legumes, lasanha). Quantos são os modos de escolher um prato deste cardápio? Quantos modos se pode escolher uma refeição completa(salada, sopa e prato principal) ?

(2) O Código Morse usa **palavras** contendo 1 a 4 **letras**. Onde as letras são **pontos** e **traços**. Quantas podem ser as palavras do código Morse?



(3) Quantos são os números pares de 3 algarismos distintos?

(4) Quantos modos distintos 6 pessoas podem ser colocadas em fila?

(5) Quantos modos podem-se escolher três dos jogadores de um time de futebol para representá-lo em uma cerimônia de premiação?

Respostas

(1) Temos 3 opções de saladas, 3 de sopas e 4 de pratos principais; então, pelo princípio aditivo: $3 + 3 + 4 = 10$ modos de escolher um prato do cardápio.
E, pelo princípio multiplicativo: $3.3.4 = 36$ possíveis refeições.

(2) Vamos formar as palavras no Código Morse de $1, 2, 3, 4$ letras, considerando que para cada palavra temos duas possibilidades de letras disponíveis(ponto e traço).
Assim, nossa estratégia é a de usar o princípio multiplicativo para contar separadamente estas palavras e, depois, somar estas quantidades:
(i) palavras de 1 letra: temos apenas $2 = 2^1$;
(ii) palavras de 2 letras: $2.2 = 2^2 = 4$;
(iii) palavras de 3 letras: $2.2.2 = 2^3 = 8$;
(iv) palavras de 4 letras: $2.2.2.2 = 2^4 = 16$.
Assim, o total de $2 + 4 + 8 + 16 = 30$ palavras.

Respostas

(3) Começamos pelo último algarismo: $p_3 = 5$ possibilidades, ou seja, pode assumir $0, 2, 4, 6, 8$. Em seguida, vamos para o primeiro: $p_1 =?$. Sabemos que o primeiro não pode ser igual a 0, mas pode ser qualquer outro valor; então chegamos em um impasse: "se o últimpo escolhido foi 0" temos $p_1 = 9$, caso contrário, temos $p_1 = 8$. Vamos então, primeiro, utilizar o princípio aditivo e o multiplicativo: (i) contando os números que terminam em 0: $p_3 = 1, p_1 = 9, p_2 = 8 \Rightarrow 9.8.1 = 72$; e (ii) os números que não terminam em 0: $p_3 = 4, p_1 = 8, p_2 = 8 \Rightarrow 8.8.4 = 256$; agora: (i)+(ii)$= 72 + 256 = 328$. Vamos agora resolver de outro modo, primeiro vamos incluir todos os casos, inclusive de o número começar por 0 e depois retiramos as possibilidades que não servem ao problema. (i) contando os números incluindo os que começam por 0: $p_3 = 5, p_1 = 9, p_2 = 8 \Rightarrow 9.8.5 = 360$; e (ii) contando os números que só podem começar por 0: $p_1 = 1, p_3 = 4, p_2 = 8 \Rightarrow 1.8.4 = 32$; agora: (i)-(ii)$= 360 - 32 = 328$.

Respostas

(4) Problema de permutação simples: $6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$

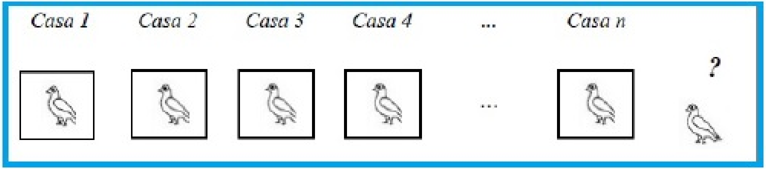
(5) Inicialmente, pensamos em resolver pelo princípio multiplicativo: $11.10.9 = 990$.

Porém, desta forma, estamos contando comissões iguais como distintas: ABC e BCA por exemplo.
Então, temos que dividir por 3!; $\frac{11.10.9}{3!} = \frac{990}{6} = 165$;
ou seja, nos reportamos a um problema de combinação simples:
$C_{11}^{3} = \frac{11!}{3!.8!} = \frac{990}{6} = 165$

Princípio da Casa dos Pombos

Teorema: Se tivermos $n + 1$ pombos para serem colocados em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter 2 ou mais pombos.

Demonstração: Se temos n casas para $n + 1$ pombos, na pior das hipóteses, se distribuirmos exatamente um pombo para cada casa, sobrará um pombo para ser colocado em qualquer casa.



Logo, uma das casas deverá conter pelo menos 2 pombos. ■

Observação: Esse teorema também é conhecido como PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET e pode ser enunciado da seguinte forma:

PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET

Temos n objetos para serem guardados em m gavetas. Se $n > m$, então pelo menos 1 gaveta deverá conter 2 ou mais objetos.

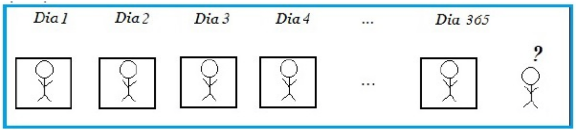
Princípio da Casa dos Pombos

Exemplo.1: Mostre que em um ano não-bissexto, em qualquer conjunto com 366 pessoas há pelo menos duas que farão aniversário no mesmo dia.

Demonstração: Podemos resolver esse problema utilizando o Princípio da Casa dos Pombos.

- 365 dias no ano não-bissexto equivale às casas dos pombos;
- 366 pessoas equivalem aos pombos;
- Cada pessoa está associada ao dia do seu aniversário, assim como os pombos estão associados às casas.

Se temos 365 dias do ano para $365 + 1 = 366$ pessoas, ao distribuirmos exatamente uma pessoa para cada dia do ano, sobrará uma pessoa para ser colocada em qualquer dia do ano. Logo, pelo menos 2 pessoas farão aniversário no mesmo dia. ■



Exercícios

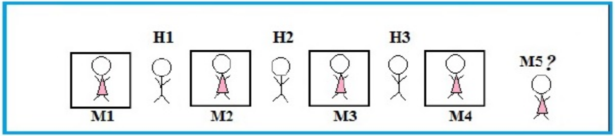
(1) Temos n pares distintos de sapatos num mesmo closet. Mostre que se escolhermos $n+1$ sapatos neste closet, então teremos pelo menos um par de sapatos escolhido.

Solução:

Se temos n pares distintos de sapatos e $n+1$ sapatos escolhidos, podemos associar às n casas de pombos e aos $n+1$ pombos, respectivamente. Portanto, deve existir ao menos uma casa de pombos com 2 sapatos; e assim, pelo menos um par de sapatos terá sido escolhido.

Exercícios

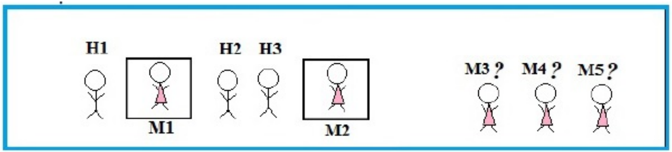
(2) Temos 3 homens e 5 mulheres numa festa. Mostre que se estas pessoas são arrumadas numa fila, ao menos 2 mulheres estarão próximas uma da outra.



Solução:

Vamos assumir, inicialmente, o caso no qual os homens são alocados na fila de tal modo que 2 homens não fiquem um ao lado do outro e nem fiquem no início ou no final da fila. Neste caso, os 3 homens geram 4 "lugares" (casa dos pombos) para alocarmos as mulheres. Como existem 5 mulheres (pombos) para alocarmos, pelo menos 2 delas ficarão uma ao lado da outra na fila.

(2) Solução:(Continuação)
Agora vamos assumir, o caso no qual os homens podem ser alocados na fila um ao lado do outro e também podem ficar no início ou no final da fila.
Por exemplo:



Neste caso, os 3 homens geram um número menor de "lugares"(casa dos pombos) para alocarmos as 5 mulheres (pombos). Assim, como no primeiro caso, teremos que pelo menos 2 delas ficarão uma ao lado da outra na fila.

Exercícios

(3) Uma caixa contém 3 tipos distintos de bolas (azuis, verdes, amarelas). Qual o número mínimo de bolas que devemos retirar da caixa para garantirmos que temos 2 bolas da mesma cor?

Solução:

Se temos 3 cores distintas de bolas e queremos ter 2 da mesma cor, então devemos retirar 4. Podemos associar as cores às casas dos pombos e as bolas retiradas aos pombos; assim teremos garantido que ao menos uma cor será retirada duas vezes.

(4) Em uma floresta existem 106 jaqueiras. É conhecido que cada uma dessas jaqueiras não produz anualmente mais do que 92 frutos. Prove que existem pelo menos 2 jaqueiras na floresta que têm a mesma quantidade de frutos.

Solução:

Neste caso, atribuimos às casas dos pombos a quantidade de frutos: $0, 1, 2, 3, \ldots, 92$; e aos pombos a quantidade total de jaqueiras: 106. Assim, a cada jaqueira associamos a quantidade de frutos que ela contém. Temos então 106 pombos e 93 casas; ou seja, a k-ésima casa conterá a jaqueira que contém exatamente k frutos; onde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 92$. Como existem 106 jaqueiras; $106 > 94 = 93 + 1$, pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos duas jaqueiras estarão na mesma casa-k, i.é., terão a mesma quantidade k de frutos.

Princípio Geral da Casa dos Pombos

Teorema: Seja $k \in \mathbb{N}$. Se tivermos $nk + 1$ pombos para serem colocados em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter, pelo menos, $k+1$ pombos.

Demonstração:

Temos n casas para $nk + 1$ pombos. Se distribuirmos no máximo k pombos para cada casa; então teríamos nk pombos distribuidos. Como temos $nk + 1$ pombos, então pelo menos uma casa conterá pelo menos $k + 1$ pombos. $\blacksquare$

Princípio da Casa dos Pombos

Exemplo.2: Numa festa de aniversário com 37 crianças, mostre que pelo menos 4 nasceram no mesmo mês.

Demonstração:

Podemos resolver esse problema utilizando o Princípio da Casa dos Pombos.

- 12 meses no ano equivale às casas dos pombos;
- 37 crianças equivalem aos pombos;
- Cada criança está associada ao mês de seu aniversário.

Se temos n casas para serem ocupadas por $nk + 1$ pombos, onde $n = 12$ e $nk + 1 = 37 \Rightarrow k = 3$. Logo, temos que pelo menos $k + 1 = 4$ crianças nasceram no mesmo mês. ■

Exemplo.5 : Calcular o número de soluções inteiras e positivas da seguinte equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

.

RESOLUÇÃO:
Cada uma de suas soluções é uma lista da forma (x_1, x_2, x_3, x_4), na qual as incógnitas x_1, x_2, x_3 e x_4 são números inteiros e positivos, $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, x_4 > 0$; cuja soma vale 7.
Vamos utilizar uma "estratégia" a fim de determinar o número de soluções inteiras e positivas dessa equação.
Vamos "parcelar" o número 7 em unidades, ou seja;

$$7 \; = \; 1 \; + \; 1 \; + \; 1 \; + \; 1 \; + \; 1 \; + \; 1 \; + \; 1$$

Note que há 6 espaços entre as 7 unidades e; estão ocupados pelos sinais de adição.

Soluções inteiras de uma Equação

Exemplo.5 (RESOLUÇÃO)

Agora, cada solução pode ser obtida separando as unidades com três vírgulas, porque temos 4 incógnitas.

Assim, devemos colocar as "vírgulas" em 3 dos 6 espaços. Por exemplo:

Posições das vírgulas	Soluções
1+1,1 ,1+1+1 ,1	(2, 1, 3, 1)
1 ,1+1+1+1 ,1 ,1	(1, 4, 1, 1)
1 ,1 ,1 ,1+1+1+1	(1, 1, 1, 4)
1+1 ,1+1 ,1+1 ,1	(2, 2, 2, 1)

- Visto os exemplos anteriores, para contar o número de soluções inteiras e positivas dessa equação, vamos então determinar de quantos modos distintos 3 posições podem ser escolhidas dentre as 6 disponíveis.

  Note que a ordem de escolha das vírgulas não importa.

Soluções inteiras de uma Equação

Exemplo.5 (Resolução)
Portanto, calculamos :

$$C_6^3 = \left(\begin{array}{c} 6 \\ 3 \end{array} \right) = 20.$$

Conclusão: Então, a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ tem 20 soluções inteiras e positivas.

Observação:

Podemos também resolver o problema anterior considerando, por exemplo, 4 gavetas distintas G_1, G_2, G_3, G_4 para guardar 7 objetos "iguais" a ■.
Assim, calculamos de quantos modos distintos é possível arrumar os objetos nessas gavetas, considerando que **cada gaveta deve ficar com pelo menos um objeto**.

Resolução:

Vamos então alinhar os objetos ■ e separá-los em 4 grupos que devem ser colocados respectivamente nas gavetas.
Notemos que entre os objetos há 6 espaços, sendo que escolhemos 3 desses espaços para colocar uma barra || de separação. Por exemplo:

Posições da barra ||	Soluções
■ ■ || ■ || ■ ■ ■ || ■	$G_1 : 2, G_2 : 1, G_3 : 3, G_4 : 1$
■ || ■ ■ ■ ■ || ■ || ■	$G_1 : 1, G_2 : 4, G_3 : 1, G_4 : 1$

Soluções inteiras de uma Equação

Generalizando:

Calcular o número de soluções inteiras e positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p; n \in \mathbb{N}^*; p \geq n$, corresponde a calcular o número de modos de arrumar "p objetos iguais"em "n gavetas distintas", de tal forma que cada gaveta contenha "pelo menos um objeto".
As p unidades (ou p objetos), organizados lado a lado, geram $p-1$ espaços. Para separar n grupos, colocam-se $n-1$ vírgulas (ou $n-1$ barras).
Portanto, o "número total de soluções"pode ser representado por

$$C_{p-1}^{n-1} = \left(\begin{array}{c} p-1 \\ n-1 \end{array} \right) = \frac{(p-1)!}{(n-1)!(p-n)!}.$$

Soluções inteiras e não negativas de uma Equação

Agora, iremos calcular o número de soluções **inteiras e não negativas** da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p; n \in \mathbb{N}^*; p \in \mathbb{N}; x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Considerando a equação do exemplo anterior:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Assim, podemos obter algumas soluções como: $(0,0,3,4), (1,0,0,6), (0,0,0,7), (1,2,1,3)$.
Faremos agora uma SUBSTITUIÇÃO DE VARIÁVEIS a fim de obtermos as incógnitas **inteiras positivas**; ou seja,
$x_i = (y_i - 1); y_i > 0; i = 1,2,3,4 \;\Rightarrow\; (y_1 - 1) + (y_2 - 1) + (y_3 - 1) + (y_4 - 1) = 7$
$\Rightarrow\; y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7 + 4 = 11; y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0, y_4 > 0.$
Observação: O número de soluções inteiras e não negativas da equação de incógnitas $x_i; x_i \geq 0$ é igual ao número de soluções inteiras e positivas da equação de incógnitas $y_i; y_i > 0$.
Logo, $\begin{pmatrix} 11\text{-}1 \\ 4\text{-}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{(10)!}{(3)!(7)!} = \frac{(10\times9\times8\times7!)}{(3\times2\times1)7!} = 120$ soluções.

Soluções inteiras de uma Equação

Podemos também resolver este último problema considerando, por exemplo, 4 gavetas distintas G_1, G_2, G_3, G_4 para guardar 7 objetos "iguais" a $\blacksquare$.
Assim, calculamos de quantos modos distintos é possível arrumar os objetos nessas gavetas, considerando que **cada gaveta pode ficar sem objetos ou no máximo com** 7 **objetos**.
Podemos então obter a seguinte solução: $G_1 : 3, G2 : 0, G3 : 1, G4 : 3$.
Imaginemos, agora um objeto colocado em cada uma das 4 **gavetas e distribuir mais** 7**; ou seja, arrumamos no total** 11 **objetos em** 4 **gavetas distintas sendo que cada gaveta contenha pelo menos um objeto.**
Assim, recairemos no caso anterior; i.é, temos
$\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = 120$ modos de arrumar as gavetas; ou seja, 120 soluções possíveis.

Soluções inteiras de uma Equação

Generalizando:

Calcular o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = p$; $n \in \mathbb{N}^*$; $p \in \mathbb{N}$, é igual ao número de soluções inteiras e positivas de $(y_1 - 1) + (y_2 - 1) + (y_3 - 1) + \ldots + (y_n - 1) = p$; $n \in \mathbb{N}^*$; $p \geq n$ ou de $y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n = p + n$.
Esse resultado corresponde ao número de modos de guardar p objetos iguais em n gavetas (cada uma delas pode conter até todos os objetos) e corresponde a calcular

$$\binom{n+p-1}{n-1} = \binom{n+p-1}{p}.$$

Exercícios

(1) Encontre o número de soluções em **inteiros positivos** da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9.$$

(2) Encontre o número de soluções em **inteiros não negativos** da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9.$$

(3) Encontre o número de soluções em **inteiros não negativos** da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12.$$

Soluções - Exercícios

(1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9; x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, x_4 > 0, x_5 > 0.$ Temos que $p = 9$ e $n = 5$; calculando $\begin{pmatrix} 9\text{-}1 \\ 5\text{-}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{(8)!}{(4)!(4)!} = 70.$

(2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$
Fazendo a mudança de variáveis $y_i = x_i + 1; y_i > 0; \forall i = 1, 2, 3, 4, 5.$
Assim, temos $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 9 + 5 = 14; y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0, y_4 > 0, y_5 > 0.$
Temos que $p = 14$ e $n = 5$; calculando $\begin{pmatrix} 14 - 1 \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{(13)!}{(4)!(9)!} = 715.$
ou

$$\begin{pmatrix} n + p - 1 \\ n - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 9 - 1 \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(3) Calculando : $\begin{pmatrix} 5 + 12 - 1 \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} = 1820.$

Note que esta mesma equação possui apenas $\begin{pmatrix} 12 - 1 \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = 330$ soluções em inteiros positivos.

1. Quantas soluções existem para a equação $x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$, sendo que cada x_i; $i = 1, 2, 3$, é um inteiro n ao negativo?
2. Quantas soluções existem para a equação $p + q + r + s + t = 50$; sendo p, q, r, s e t números inteiros ≥ 5.

(1) $x_i \geq 0; i = 1, 2, 3$ Este problema pode ser resolvido separadamente como:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 = 20 \end{array} \right\} n = 3; p = 0, 1, 2, \cdots, 20$$

ou, de modo equivalente; $y_1 + y_2 + y_3 \leq 23$, sendo que cada $x_i = y_i - 1; i = 1, 2, 3; y_i > 0$; então,

resolvendo separadamente: $\left\{ \begin{array}{l} y_1 + y_2 + y_3 = 3 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 4 \\ \vdots \\ y_1 + y_2 + y_3 = 23 \end{array} \right\} n = 3; p = 3, 4, 5, \cdots, 23$

$$\sum_{p=3}^{23} \binom{p-1}{n-1} = \sum_{p=3}^{23} \binom{p-1}{p-n} = \binom{2}{0} + \binom{3}{1} +$$

$$+ \binom{4}{2} + \binom{5}{3} + \ldots + \binom{22}{20} = \binom{23}{20} = 1771; \text{ pois,}$$

pela proposição.8: $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$

(1) OBSERVAÇÃO: Este problema também pode ser resolvido do seguinte modo: "Vamos transformar a desigualdade em uma igualdade inserindo mais uma variável x_4 ao problema; onde esta variável assume os possíveis valores das desigualdades".
Assim, é equivalente determinar o número de soluções da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20,$$

ou seja, $n = 4$ e $p = 20$.
Daí temos: $\begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20+4-1 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 20 \end{pmatrix} = 1771.$

(2) Quantas soluções existem para a equação $p+q+r+s+t=50$; onde p, q, r, s e t so números inteiros ≥ 5; ou seja, $p\geq 5, q\geq 5, r\geq 5, s\geq 5$ e $t\geq 5$. Assim, temos o problema equivalente:
$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=50-5(4)=30$, pois; $y_i>0; i=1,2,3,4,5$, onde;
$p=y_1+4, q=y_2+4, r=y_3+4, s=y_4+4, t=y_5+4$.
Logo; $\begin{pmatrix} 30-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 25 \end{pmatrix} = 23751$.
OBSERVAÇÃO: Podemos pensar também que cada varivel é uma gaveta que inicialmente tem 5 unidades. Devemos distribuir as outras 25 unidades restantes entre estas cinco gavetas.
O que é equivalente a resolver o seguinte problema: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=25$, onde ; $x_i\geq 0; i=1,2,3,4,5$.
$\begin{pmatrix} p+n-1 \\ n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25+5-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 25 \end{pmatrix} = 23751$.

Números Binomiais

Proposição.5: (Relação de Stifel)

Sejam n, k inteiros tais que e $n \geq k \geq 0$. Então,
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \Rightarrow C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{n-k}$$

Demonstração: (PROPOSIÇÃO.5:(Relação de Stifel))
Consideremos um conjunto com $n+1$ objetos, onde n são brancos e 1 é azul. Podemos selecionar $k+1$ objetos deste conjunto de $n+1$ elementos, de $\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$ maneiras distintas. Por outro lado, "estes subconjuntos são de tal maneira que o objeto azul pode ser escolhido, ou não": (i) Se o objeto azul foi escolhido, temos $1.\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ possibilidades, pois o restante dos objetos devem ser brancos (ii) Se o objeto azul não foi escolhido, temos $\begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$ possibilidades, pois neste caso todos os elementos devem ser brancos. Como os dois casos são disjuntos, temos pelo princípio da adição, $\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$; onde $0 \leq k \leq n$.

Números Binomiais

Demonstração: Podemos também demonstrar a *Relação de Stifel* como segue: desenvolvendo o coeficiente $C_{n+1}^{k+1} = C_{n+1}^{(n+1)-(k+1)} = C_{n+1}^{n-k}$; então,

$$\left(\begin{array}{c} n+1 \\ k+1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ n-k \end{array}\right) = \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{(n+1).n!}{(n-k).(n-k-1)!(k+1).k!} = \frac{n!}{(n-k-1)!.k!}\cdot\frac{(n+1)}{(n-k).(k+1)} =$$

$$\frac{n!}{(n-k-1)!.k!}\cdot\frac{(n-k)+(k+1)}{(n-k).(k+1)} = \frac{n!}{(n-k-1)!.k!}.\left(\frac{(n-k)}{(n-k).(k+1)} + \frac{(k+1)}{(n-k).(k+1)}\right) = \frac{n!}{(n-k-1)!.k!}.\left(\frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{(n-k)}\right) =$$

$$\frac{n!}{(n-k-1)!.(k+1)k!} + \frac{n!}{(n-k)(n-k-1)!.k!} = \frac{n!}{(n-k-1)!.(k+1)!}. + \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \left(\begin{array}{c} n \\ k+1 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) =$$

$C_n^{k+1} + C_n^k$; ou,

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} n \\ k+1 \end{array}\right) = \frac{n!}{(n-k)!.k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!.(k+1)!} =$$

$$\frac{n!}{(n-k)(n-k-1)!.k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!.(k+1)k!} = \frac{n!}{(n-k-1)!.k!}.\left(\frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{(k+1)}\right) =$$

$$\frac{n!}{(n-k-1)!.k!}.\left(\frac{(k+1)}{(n-k).(k+1) + \frac{(n-k)}{(n-k).(k+1)}}\right) = \frac{n!}{(n-k-1)!.k!}\cdot\frac{(n-k)+(k+1)}{(n-k).(k+1)} = \frac{n!}{(n-k-1)!.k!}\cdot\frac{(n+1)}{(n-k).(k+1)} =$$

$$\frac{(n+1).n!}{(n-k).(n-k-1)!(k+1).k!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ k+1 \end{array}\right) = C_{n+1}^{k+1}$$

Números Binomiais

Proposição.3:

Sejam n e $0 \leq k \leq n$ naturais. Então, $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} = C_n^{n-k}$

Proposição.5:(Relação de Stifel)

Sejam n, k naturais tais que e $0 \leq k \leq n$. Então,
$\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{n-k}$

Corolário:(Triângulo de Pascal)

A n-èsima linha deste triângulo consiste em todos os valores $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$; onde $0 \leq k \leq n$.

Números Binomiais

Corolário:(Triângulo de Pascal)

$C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$; onde $0 \leq k \leq n$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & & \text{Linha-}n \\
 & & & & & C_0^0 & & & & & & & 0 \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & & & 1 \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & & & 2 \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & & & 3 \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & & & 4 \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 & & 5 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Números Binomiais - (Triângulo de Pascal)

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \text{Linha-}n \\
\underbrace{\binom{0}{0}}_{1} & & & & & & 0 \\
\underbrace{\binom{1}{0}}_{1} & \underbrace{\binom{1}{1}}_{1} & & & & & 1 \\
\underbrace{\binom{2}{0}}_{1} & \underbrace{\binom{2}{1}}_{2} & \underbrace{\binom{2}{2}}_{1} & & & & 2 \\
\underbrace{\binom{3}{0}}_{1} & \underbrace{\binom{3}{1}}_{3} & \underbrace{\binom{3}{2}}_{3} & \underbrace{\binom{3}{3}}_{1} & & & 3 \\
\underbrace{\binom{4}{0}}_{1} & \underbrace{\binom{4}{1}}_{4} & \underbrace{\binom{4}{2}}_{6} & \underbrace{\binom{4}{3}}_{4} & \underbrace{\binom{4}{4}}_{1} & & 4 \\
\underbrace{\binom{5}{0}}_{1} & \underbrace{\binom{5}{1}}_{5} & \underbrace{\binom{5}{2}}_{10} & \underbrace{\binom{5}{3}}_{10} & \underbrace{\binom{5}{4}}_{5} & \underbrace{\binom{5}{5}}_{1} & 5 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Números Binomiais

Corolário:(Triângulo de Pascal)

												Linha-n
					1							0
				1		1						1
			1		2		1					2
		1		3		3		1				3
	1		4		6		4		1			4
1		5		10		10		5		1		5
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

Proposição.3: $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} = C_n^{n-k}$; e,

Proposição.5: $C_{n+1}^{k+1} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{n-k}$

Combinação Simples

Observações

1. As arestas do triângulo de Pascal têm sempre o valor "1":
$C_n^0 = \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right) = 1 = \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right) = C_n^n;$
2. Proposição.3: Os elementos equidistantes possuem o mesmo valor,
$C_n^k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n-k \end{array} \right) = C_n^{n-k};$
3. "Relação de Stifel" (Identidade de Pascal): Qualquer elemento interior do triângulo pode ser obtido pela soma dos dois elementos diretamente acima (linha anterior), $C_{n+1}^{k+1} = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ k+1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n \\ k+1 \end{array} \right) = C_n^k + C_n^{k+1};$
4. A soma de todos os valores da n-ésima linha, $\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$, é igual ao número total de subconjuntos de um conjunto com n elementos.

Proposição.6:

Sejam n e $0 \leq k \leq n$ naturais. Então, $\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 2^n$.

Demonstração:

Sejam A um conjunto com n elementos e $0 \leq k \leq n$. Sabemos que o número de subconjuntos com k elementos de A é dado por $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$. Assim, temos que o número total de subconjuntos de A é dado por $\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$. Por outro lado, podemos formar um subconjunto de A do seguinte modo: $A := \{A_1, \cdots, A_n\}$. Então, para obter um subconjunto de A temos 2 possibilidades para cada elemento $A_i \in A$; $i = 1, \cdots, n$: "escolher" ou "não-escolher" este elemento. Pelo princípio multiplicativo, temos então $\underbrace{2.2.2. \cdots .2}_{n-vezes} = 2^n$ possibilidades de formar um subconjunto de A. Logo, $\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 2^n$.

Proposição.6:

Sejam n e $0 \leq k \leq n$ naturais. Então, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & & & & & & & & & \text{Linha-}n & \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \\
 & & & & & 1 & & & & & & 0 & 1 = 2^0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & 1 & 1+1 = 2^1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & 2 & 1+2+1 = 2^2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & 3 & 1+3+3+1 = 2^3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & 4 & 1+4+6+4+1 = 2^4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & 5 & 1+5+10+10+5+1 = 2^5 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Números Binomiais

Corolário:

Um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos, isto é, $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Exemplo:

Vamos calcular a soma $S := 1.\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \cdots + n.\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$; $n \geq 1$.

Observe que

$$S = \sum_{k=0}^{n} k.\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} k.\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} k.\frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} k.\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!((n-1)-(k-1))!} =$$

$$n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} = n\sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} = n.2^{n-1}.$$

Logo, $S = n.2^{n-1}$.

Números Binomiais

OBSERVAÇÃO: Note que se considerarmos uma sequência em cada linha-n do Triângulo de Pascal: $a_0 = C_n^0, a_1 = C_n^1, \cdots, a_{n-1} = C_n^{n-1}, a_n = C_n^n$
obtemos uma representação da potência 11^n no sistema decimal do seguinte modo:
$a_0 10^0 + a_1 10^1 + \ldots + a_{n-1}10^{n-1} + a_n 10^n = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k = 11^n$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & & & & & & & & & n & \sum_{k=0}^{n} C_n^k 10^k = 11^n \\
 & & & & & 1 & & & & & & 0 & 1.10^0 = 11^0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & 1 & 1.10^0 + 1.10^1 = 11^1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & 2 & 1.10^0 + 2.10^1 + 1.10^2 = 11^2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & 3 & 1.10^0 + 3.10^1 + 3.10^2 + 1.10^3 = 11^3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & 4 & 1.10^0 + 4.10^1 + 6.10^2 + 4.10^3 + 1.10^4 = 11^4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & 5 & 1.10^0 + 5.10^1 + 10.10^2 + 10.10^3 + 5.10^4 + 1.10^5 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

PROPOSIÇÃO.7:

Sejam $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$ naturais. Então,

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}.$$

Observando o **Triângulo de Pascal**: " Se SOMARMOS elementos de uma COLUNA qualquer do Triângulo de Pascal de **cima para baixo** obtemos como resultado o valor que está imediatamente à direita na linha abaixo da última parcela na soma".

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	Linha-n
1						0
1	1					1
1	2	1				2
1	3	3	1			3
1	4	6	4	1		4
1	5	10	10	5	1	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Números Binomiais

DEMONSTRAÇÃO: (PROPOSIÇÃO.7:) Sejam $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$ naturais. Então,

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}.$$

Vamos aplicar a Relação de Stiefel;

$$\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k}{k+1}; \binom{k+2}{k+1} = \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1}; \binom{k+3}{k+1} = \binom{k+2}{k} + \binom{k+2}{k+1};$$

$$\ldots; \binom{k+n}{k+1} = \binom{k+(n-1)}{k} + \binom{k+(n-1)}{k+1}; \binom{k+(n+1)}{k+1} = \binom{k+n}{k} + \binom{k+n}{k+1};$$ Agora, somando todas estas igualdades:

$$\binom{k+1}{k+1} + \binom{k+2}{k+1} + \binom{k+3}{k+1} + \cdots + \binom{k+n}{k+1} + \binom{k+(n+1)}{k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k}{k+1} + \binom{k+1}{k} +$$
$$\binom{k+1}{k+1} + \binom{k+2}{k} + \binom{k+2}{k+1} + \cdots + \binom{k+(n-1)}{k} + \binom{k+(n-1)}{k+1} + \binom{k+n}{k} + \binom{k+n}{k+1};$$

simplificando as parcelas que aparecem em membros opostos; e, assumindo que $\binom{k}{k+1} = 0$; então,

$$\cancel{\binom{k+1}{k+1}} + \cancel{\binom{k+2}{k+1}} + \cancel{\binom{k+3}{k+1}} + \cdots + \cancel{\binom{k+n}{k+1}} + \binom{k+(n+1)}{k+1} = \binom{k}{k} + \cancel{\binom{k}{k+1}} + \binom{k+1}{k} +$$
$$\cancel{\binom{k+1}{k+1}} + \binom{k+2}{k} + \cancel{\binom{k+2}{k+1}} + \cdots + \binom{k+(n-1)}{k} + \cancel{\binom{k+(n-1)}{k+1}} + \binom{k+n}{k} + \cancel{\binom{k+n}{k+1}};$$ obtemos;

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{k+(n-1)}{k} + \binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}.$$

PROPOSIÇÃO.8:

Sejam $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$ naturais. Então,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Observando o Triângulo de Pascal: " Se SOMARMOS elementos de uma DIAGONAL qualquer do Triângulo de Pascal da **esquerda para a direita** obtemos como resultado o valor que está imediatamente abaixo da última parcela na soma".

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	Linha-n
1						0
1	1					1
1	2	1				2
1	3	3	1			3
1	4	6	4	1		4
1	5	10	10	5	1	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

DEMONSTRAÇÃO: (PROPOSIÇÃO.8:) Sejam $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$ naturais. Então,
$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$
Vamos aplicar a proposição.3: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
$\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$; $\binom{n+1}{1} = \binom{n+1}{n}$; $\binom{n+2}{2} = \binom{n+2}{n}$; $\ldots$;
$\binom{n+k}{k} = \binom{n+k}{n}$; Agora, somando todas estas igualdades:
$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \underbrace{\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+k}{n}}_{\binom{n+k+1}{n+1}}$$
pela proposição.7;
mas, $\binom{n+k+1}{n+1} = \binom{n+k+1}{k}$ pela proposição.3.
Logo, $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$

Números Binomiais

PROPOSIÇÃO.9: (Identidade de VANDERMONDE)

Sejam $m, n, r, k \in \mathbb{N}$ com $r \leq m$, $r \leq n$; e $0 \leq k \leq r$ naturais. Então,

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} \cdot \binom{n}{k}.$$

Se tomarmos no Triângulo de Pascal para $m = 2; n = 3; r = 2 \Rightarrow$
$\binom{2+3}{2} = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{2-k} \binom{3}{k} =$
$\binom{2}{2}\binom{3}{0} + \binom{2}{1}\binom{3}{1} + \binom{2}{0}\binom{3}{2} = 1.1 + 2.3 + 1.3 = 10 = \binom{5}{2}.$

PROPOSIÇÃO.9: (Identidade de VANDERMONDE)

Sejam $m, n, r, k \in \mathbb{N}$ com $r \leq m$, $r \leq n$; e $0 \leq k \leq r$ naturais. Então,

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} \cdot \binom{n}{k}.$$

Observando o Triângulo de Pascal:

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	Linha-n
1						0
1	1					1
1	2	1				2
1	3	3	1			3
1	4	6	4	1		4
1	5	10	10	5	1	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

DEMONSTRAÇÃO: (PROPOSIÇÃO.9)
Supondo que existem m elementos no conjunto $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ e n elementos no conjunto $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$. Notamos que estes conjuntos são disjuntos e o número de elementos no conjunto união $A \cup B = \{a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ é igual a $m + n$. Então, o número total de possibilidades de escolhermos r elementos de $m + n$ é dado por $\left(\begin{array}{c} m+n \\ r \end{array} \right)$; o qual seria equivalente se escolhêssemos k elementos de n do conjunto B: $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$; e, $r - k$ elementos de m do conjunto A: $\left(\begin{array}{c} m \\ r-k \end{array} \right)$; e pelo P.F.C. temos $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) . \left(\begin{array}{c} m \\ r-k \end{array} \right)$ possibilidades para um determinado valor de k.

Mas $0 \leq k \leq r$, vamos considerar para todos os valores de k e utilizar o princípio da adição a fim de obter o número total de possibilidades de escolher r elementos de $m + n$:

$\sum_{k=0}^{r} \left(\begin{array}{c} m \\ r-k \end{array} \right) . \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$.

Corolário: (Relação de Lagrange)

Sejam $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 .$$

No Triângulo de Pascal se tomarmos

$n = 2 \Rightarrow \binom{2.2}{2} = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k}^2 = \binom{2}{0}^2 + \binom{2}{1}^2 + \binom{2}{2}^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$.

Corolário: (Relação de Lagrange)

Sejam $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

No Triângulo de Pascal:

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	Linha-n
1							0
1	1						1
1	2	1					2
1	3	3	1				3
1	4	6	4	1			4
1	5	10	10	5	1		5
1	6	15	20	15	6	1	6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

DEMONSTRAÇÃO: (RELAÇÃO DE LAGRANGE)
Pela Relação de Vandermonde; para $m, n, r, k \in \mathbb{N}$; $r \leq m$; $r \leq n$; $k \leq r$, temos que;

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} \cdot \binom{n}{k}.$$

Assumindo $m = r = n$ e substituindo na relação acima;

$$\binom{n+n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \cdot \binom{n}{k}$$

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \cdot \binom{n}{k}$$

mas pela proposição.3;

$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$; então, $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

TEOREMA:(Binômio de Newton)

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, temos que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k}y^k = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} x^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}y^1 + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} x^{n-2}y^2 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} x^1y^{n-1} + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} y^n; \forall k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

DEMONSTRAÇÃO: Observe que $(x+y)^n = \underbrace{(x+y) \cdot \ldots \cdot (x+y)}_{n}$.

Vamos calcular o termo da direita: $(x+y) \cdot \ldots \cdot (x+y)$.
A fim de obter cada termo deste produto, escolhemos em cada parênteses a variável x ou y e; em seguida, pelo P.F.C. multiplicamos as possibilidades de cada decisão. Então, $\forall k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, se escolhemos em k parênteses a variável y, obrigatoriamente, devemos escolher em $(n-k)$ parênteses a variável x. O que resulta no termo $x^{n-k} \cdot y^k$. E ainda, se estamos escolhendo de um conjunto com n objetos, k objetos do tipo y; podemos fazer esta escolha de $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ maneiras. Logo, $(x+y)^n$ é a soma destes termos; $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k}y^k$.

Números Binomiais - Binômio de Newton

Corolário:(Binômio de Newton)

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

DEMONSTRAÇÃO: Observe que $2^n = (1+1)^n$; utilizando o teorema do Binômio de Newton:
$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

OBSERVAÇÃO: O teorema do Binômio de Newton também é válido para quando quisermos obter $(x-y)^n$.
Neste caso, temos que;
$(x-y)^n = (x+(-y))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}(-y)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k}y^k =$
$\binom{n}{0} x^n - \binom{n}{1} x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} y^n; \forall k \in \{0,1,2,\cdots,n\}$

Números Binomiais - Binômio de Newton

OBSERVAÇÃO: Como calcular os coeficientes do desenvolvimento do Binômio de Newton: $(x+y)^2 = ?$ Sabemos que $(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x^2 + 2xy + y^2$; utilizando o teorema do Binômio de Newton, obtemos estes coeficientes calculando os correspondentes coeficientes binomiais:

$$(x+y)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} x^{2-k} y^k = \binom{2}{0} x^2 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} y^2$$

e para calcular os coeficientes binomiais utilizamos o triângulo de Pascal, pois; "a n-ésima linha do triângulo de Pascal representa o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto com n elementos". Então, utilizamos a linha-2 do triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccc|c}
 & & & & & & & & & \text{Linha-}n \\
 & & & 1 & & & & & & 0 \\
 & & 1 & & 1 & & & & & 1 \\
 & \color{red}{1} & & \color{red}{2} & & \color{red}{1} & & & & \color{red}{2} \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & 3 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots
\end{array}$$

Assim, chegamos ao mesmo resultado: $(x+y)^2 = \color{red}{1}.x^2 + \color{red}{2}x.y + \color{red}{1}.y^2$.

Números Binomiais - Binômio de Newton

EXEMPLO.1: Como calcular os coeficientes do desenvolvimento do Binômio de Newton: $(x+y)^5 = ?$

Sabemos que $(x+y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^{5-k} y^k =$

$$\binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 y^1 + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x^1 y^4 + \binom{5}{5} y^5$$

Agora, utilizando a linha-5 do triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccccc|c}
 & & & & & & & & & & & \text{Linha-}n \\
 & & & & & 1 & & & & & & 0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & 1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & 2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & 3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & 4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & 5 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots
\end{array}$$

$(x+y)^5 = 1.x^5 + 5x^4.y^1 + 10x^3.y^2 + 10x^2.y^3 + 5x^1.y^4 + 1.y^5.$

EXEMPLO.2: Como calcular os coeficientes do desenvolvimento do Binômio de Newton: $(x+y)^7 = ?$
Como no EXEMPLO anterior, utilizamos a linha-7 do triângulo de Pascal:

								Linha-n
1								0
1	1							1
1	2	1						2
1	3	3	1					3
1	4	6	4	1				4
1	5	10	10	5	1			5
1	6	15	20	15	6	1		6
1	7	21	35	35	21	7	1	7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

e obtemos;
$(x+y)^7 = 1.x^7 + 7x^6.y^1 + 21x^5.y^2 + 35x^4.y^3 + 35x^3.y^4 + 21x^2.y^5 + 7x^1.y^6 + 1.y^7.$

1. Encontre a expansão de $(x+y)^9$ utilizando o teorema do Binômio de Newton.
2. Encontre a expansão de $(2x+3y)^3$ utilizando o teorema do Binômio de Newton.
3. Encontre o sexto termo da expansão de $(2x-3)^9$ utilizando o teorema do Binômio de Newton.
4. Encontre o terceiro termo da expansão de $(4x-2y)^5$ utilizando o teorema do Binômio de Newton.
5. Encontre o coeficiente de x^3y^4 na expansão de $(2x-y+5)^8$.
6. Determine o coeficiente do termo x^2 na expansão de $(x^3-x^{-2})^9$.
7. Mostre que $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k$

:

(1) $(x+y)^9 = \sum_{k=0}^{9} \begin{pmatrix} 9 \\ k \end{pmatrix} x^{9-k} y^k = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} x^9 + \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} x^8 y^1 + \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} x^7 y^2 + \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} x^6 y^3 +$
$\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} x^5 y^4 + \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} x^4 y^5 + \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} x^3 y^6 + \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} x^2 y^7 + \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix} x^1 y^8 + \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} y^9$
e pelo triângulo de Pascal:

										Linha-n
1										0
⋮	⋮									⋮
1	6	15	20	15	6	1				6
1	7	21	35	35	21	7	1			7
1	8	28	56	70	56	28	8	1		8
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$(x+y)^9 = 1.x^9 + 9x^8.y^1 + 36x^7.y^2 + 84x^6.y^3 + 126x^5.y^4 + 126x^4.y^5 + 84x^3.y^6 + 36x^2.y^7 + 9x^1.y^8 + 1y^9$

(2) $(2x+3y)^3=(a+b)^3$; para $a=2x, b=3y$;
então,
$(a+b)^3=1.a^3+3.a^2b^1+3.a^1b^2+1.b^3$
substituindo a e b;
$(2x+3y)^3=1.(2x)^3+3.(2x)^2(3y)^1+3.(2x)^1(3y)^2+1.(3y)^3=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

(3) Encontre o sexto termo da expansão de $(2x-3)^9$ utilizando o teorema do Binômio de Newton.
$(2x-3)^9 = \sum_{k=0}^{9} \left(\begin{array}{c} 9 \\ k \end{array} \right) (2x)^{9-k}(-3)^k.$
O sexto termo é obtido para o valor de $k=5$, então temos que calcular
$\left(\begin{array}{c} 9 \\ 5 \end{array} \right) (2x)^{9-5}(-3)^5 = -(126)2^4 3^5 x^4 == -489.888x^4.$

(4) Encontre o terceiro termo da expansão de $(4x-2y)^5$ utilizando o teorema do Binômio de Newton.
$(4x-2y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \left(\begin{array}{c} 5 \\ k \end{array} \right) (4x)^{5-k}(-2y)^k.$
O terceiro termo é obtido para o valor de $k=2$, então temos que calcular
$\left(\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right) (4x)^{5-2}(-2y)^2 = (10)4^3(-2)^2x^3y^2 = 2560x^3y^2.$

(5) Encontre o coeficiente de x^3y^4 na expansão de $(2x - y + 5)^8$.
Podemos desenvolver a expressão do seguinte modo:
$(2x - y + 5)^8 = \sum_{k=0}^{8} \begin{pmatrix} 8 \\ k \end{pmatrix} (2x - y)^{8-k}(5)^k$.
Note que para o termo com $x^3y^4 \Rightarrow k = 4$ e $n - k = 3 \Rightarrow n = 7$.
Então, na expansão de $(2x - y)^7 = \sum_{k=0}^{7} \begin{pmatrix} 7 \\ k \end{pmatrix} (2x)^{7-k}(-y)^k$.
para $k = 4$ obtemos o termo:
$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} (2x)^{7-4}(-y)^4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} (2x)^{7-4}(-y)^4 = (35)(2)^3(-1)^4x^3y^4 = 280x^3y^4$.
Substituindo na expressão inicial,
$\begin{pmatrix} 8 \\ k \end{pmatrix} (2x - y)^{8-k}(5)^k = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} (2x - y)^7(5)^1 = (8)(280x^3y^4)(5)^1 = 11.200x^3y^4$.

(6) Determine o coeficiente do termo x^2 na expansão de $(x^3 - x^{-2})^9$.

$(x^3 - x^{-2})^9 = \sum_{k=0}^{9} \left(\begin{array}{c} 9 \\ k \end{array} \right) (x^3)^{9-k}(-x^{-2})^k = \sum_{k=0}^{9} \left(\begin{array}{c} 9 \\ k \end{array} \right) x^{27-3k}(-1)^k x^{-2k} =$
$\sum_{k=0}^{9}(-1)^k \left(\begin{array}{c} 9 \\ k \end{array} \right) x^{27-5k}$

O coeficiente a ser determinado é do termo x^2 temos que identificar k; i.é., $27 - 5k = 2 \Rightarrow k = 5$. Então, para $k = 5$, obtemos o coeficiente de x^2;

$(-1)^5 \left(\begin{array}{c} 9 \\ 5 \end{array} \right) = -126.$

(7) Mostre que $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k$

$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) 1^{n-k} x^k \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k.$

A Sequência de Fibonacci : $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots\}$; definida pela recorrência:

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n;\ n \geq 0 \end{cases}$$

pode ser obtida pela "SOMA DAS DIAGONAIS INVERSAS" do Triângulo de Pascal.

													Linha-n
			1										0
		$\swarrow$	1	1									1
$F_0 =$	1	$\swarrow$	1	2	1								2
$F_1 =$	1	$\swarrow$	1	3	3	1							3
$F_2 =$	2	$\swarrow$	1	4	6	4	1						4
$F_3 =$	3	$\swarrow$	1	5	10	10	5	1					5
$F_4 =$	5	$\swarrow$	1	6	15	20	15	6	1				6
$F_5 =$	8	$\swarrow$	1	7	21	35	35	21	7	1			7
$F_6 =$	13	$\swarrow$	1	8	28	56	70	56	28	8	1		8
$F_7 =$	21		1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	9
			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \binom{0}{0} &&= 1\\
F_1 &= \binom{1}{0} &&= 1\\
F_2 &= \binom{2}{0} + \binom{1}{1} &&= 2\\
F_3 &= \binom{3}{0} + \binom{2}{1} &&= 3\\
F_4 &= \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} &&= 5\\
F_5 &= \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} &&= 8\\
F_6 &= \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} &&= 13\\
F_7 &= \binom{7}{0} + \binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3} &&= 21\\
\vdots & \quad \vdots && \vdots
\end{aligned}
$$

Generalizando, obtemos $F_n; \forall n \geq 0$ utilizando os números binomiais:

$$F_n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k} & ; \text{ se } n \text{ for par} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-k}{k} & ; \text{ se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Exemplo.1:

$$F_{12} = \sum_{k=0}^{\frac{12}{2}} \binom{12-k}{k} = \binom{12}{0} + \binom{11}{1} + \binom{10}{2} + \binom{9}{3} + \binom{8}{4} + \binom{7}{5} + \binom{6}{6} =$$

$(1) + (11) + (45) + (84) + (70) + (21) + (1) = 233$; pois, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \forall n \geq 0; \binom{n}{1} = n, \forall n \geq 1;$

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} + \binom{n}{k}$$

$$\binom{10}{2} = \sum_{k=0}^{2} \binom{5}{2-k} \binom{5}{k} = \binom{5}{2}\binom{5}{0} + \binom{5}{1}\binom{5}{1} + \binom{5}{0}\binom{5}{2} = (10).(1) + (5)(5) + (1)(10) = 45.$$

Números de Stirling - Segunda Ordem

James Stirling (1692-1770) (matemático escocês)

Definição (Números de Stirling de Segunda Ordem)

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. Definimos os Números de Stirling de Segunda Ordem por recursão:

$$\begin{cases} S_{n,k} := 0; se \quad n < k \\ S_{0,k} := 0; se \quad k > 0 \\ S_{n,0} := 0; se \quad n > 0 \\ S_{n,n} := 1; se \quad n \geq 0 \\ S_{n,k} := S_{n-1,k-1} + k.S_{n-1,k}; \quad 1 < k < n \end{cases}$$

Notação: $S_{n,k} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$

Observação: "O Número de Stirling de Segunda Ordem é o número de maneiras de distribuir n objetos distintos em k caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia"; ou seja, "existem quantas maneiras de partir um conjunto com n elementos em k subconjuntos disjuntos?"

Números de Stirling - Segunda Ordem

Proposição.10: (Números de Stirling de Segunda Ordem)

Sejam $n, k \in \mathbb{N}^*$; $k \leq n$ e A um conjunto com n elementos. Então, o Número de Stirling de Segunda Ordem $S_{n,k}$ é o número das k-partições de A.

Demonstração: Seja A um conjunto com n elementos: $A = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$; e sejam os subconjuntos de A **não vazios** e **disjuntos**: A_i; $i = 1, 2, \cdots, k$ tais que; $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$; e $|A| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$;
Considerando um elemento fixo $x \in A$ temos duas possibilidades para a k-ésima partição de A: (i) Se $\{x\}$ for um bloco da partição para A então, os blocos restantes são formados a partir de $(k-1)$ partições do conjunto $A \backslash \{x\}$, isto é, x ficará sozinho num subconjunto. Assim, temos $S_{n-1,k-1}$ possibilidades. (ii) Se $\{x\}$ não for um bloco da partição para A então $A \backslash \{x\}$ é partido em k blocos; isto é, x não ficará sozinho num subconjunto; isto poderá ser feito de $S_{n-1,k}$ possibilidades. Ou seja, distribuímos os $k-1$ elementos em k subconjuntos e agora o elemento x precisa ser alocado em um dos k-subconjuntos em k modos distintos. Neste caso, obtemos então $k.S_{n-1,k}$ possibilidades. Logo; pelo princípio da adição, o número das k-partições do conjunto A de n elementos é dado por
$S_{n,k} := S_{n-1,k-1} + k.S_{n-1,k}$; ou seja, $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\} + k. \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}$.

Números de Stirling - Segunda Ordem

OBSERVAÇÃO : Dado um conjunto A com n elementos, os Números Binomiais calculam a quantidade de subconjuntos com k elementos.
Enquanto que os Números de Stirling de Segunda Ordem calculam a quantidade de partições que podemos obter com k elementos(subconjuntos).

EXEMPLO:

$A = \{a, b, c\} \Rightarrow n = 3$

	Números Binomiais	Números de Stirling de Segunda Ordem
$k = 0$	$\emptyset$	$\nexists\ \mathcal{P}$
$k = 1$	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$	$\mathcal{P} = \{\ \{a, b, c\}\ \}$
$k = 2$	$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$	$\mathcal{P} = \{\ \{a, b\}, \{c\}\ \}, \mathcal{P} = \{\ \{a, c\}, \{b\}\ \}, \mathcal{P} = \{\ \{a\}, \{b, c\}\ \}$
$k = 3$	$\{a, b, c\}$	$\mathcal{P} = \{\ \{a\}, \{b\}, \{c\}\ \}$
TOTAL	$\lvert\mathcal{P}\rvert = 2^3 = 8$	Número de partições possíveis $= 5$

n	k	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0		$\left\{ {0 \atop 0} \right\}$						$\cdots$
1		$\left\{ {1 \atop 0} \right\}$	$\left\{ {1 \atop 1} \right\}$					$\cdots$
2		$\left\{ {2 \atop 0} \right\}$	$\left\{ {2 \atop 1} \right\}$	$\left\{ {2 \atop 2} \right\}$				$\cdots$
3		$\left\{ {3 \atop 0} \right\}$	$\left\{ {3 \atop 1} \right\}$	$\left\{ {3 \atop 2} \right\}$	$\left\{ {3 \atop 3} \right\}$			$\cdots$
4		$\left\{ {4 \atop 0} \right\}$	$\left\{ {4 \atop 1} \right\}$	$\left\{ {4 \atop 2} \right\}$	$\left\{ {4 \atop 3} \right\}$	$\left\{ {4 \atop 4} \right\}$		$\cdots$
5		$\left\{ {5 \atop 0} \right\}$	$\left\{ {5 \atop 1} \right\}$	$\left\{ {5 \atop 2} \right\}$	$\left\{ {5 \atop 3} \right\}$	$\left\{ {5 \atop 4} \right\}$	$\left\{ {5 \atop 5} \right\}$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

n	k	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0		1						$\cdots$
1		0	1					$\cdots$
2		0	1	1				$\cdots$
3		0	1	3	1			$\cdots$
4		0	1	7	6	1		$\cdots$
5		0	1	15	25	10	1	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Observação:

(i) $S_{n,n} = \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} := 1, n \geq 0;\ S_{n,0} = \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} := 0, n > 0;\ S_{n,1} = \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1;$ *se* $n > 0$; e,

(ii) $S_{n,k} := \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k.\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\};$

por exemplo; $\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} + 3.\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 25 = 7 + 3.6.$

OBSERVAÇÃO:
O número de maneiras de distribuirmos n objetos distintos em k caixas idênticas, com nenhuma vazia é dado por;

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array} \right)(k-i)^n.$$

" Note que podemos calcular o número de Stirling de segunda ordem utilizando os coeficientes binomiais".

EXEMPLO.1: Calcular $\left\{ \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right\}$ utilizando os coeficientes binomiais.

$$\left\{ \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right\} = \frac{1}{3!}\sum_{i=0}^{3}(-1)^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ i \end{array} \right)(3-i)^5 =$$

$$= \frac{1}{3!}\left(\left(\begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \right)(3)^5 - \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right)(2)^5 + \left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right)(1)^5 - \left(\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right)(0)^5 \right) =$$

$$\frac{1}{6}\left(1.(3)^5 - 3.(2)^5 + 3.(1)^5 - 1.(0)^5\right) = \frac{1}{6}(243 - 96 + 3 - 0) = 25$$

Números de Stirling - Primeira Ordem

James Stirling (1692-1770)

DEFINIÇÃO(Números de Stirling de Primeira Ordem)

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. Definimos os NÚMEROS DE STIRLING DE PRIMEIRA ORDEM por recursão:

$$\begin{cases} P_{n,k} := 0;\ se \quad n < k \\ P_{n,0} := 0;\ se \quad n > 0 \\ P_{0,k} := 0;\ se \quad k > 0 \\ P_{n,1} := (n-1)! \\ P_{n,n} := 1;\ se \quad n \geq 0 \\ P_{n,k} := P_{n-1,k-1} + (n-1)P_{n-1,k}; \quad 1 < k < n \end{cases}$$

NOTAÇÃO: $P_{n,k} = \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]$

OBSERVAÇÃO: "O Número de Stirling de Primeira Ordem é o número de maneiras de distribuir n pessoas distintas em k mesas redondas idênticas, com nenhuma mesa vazia"; ou seja, "existem quantas maneiras de distribuir os n elementos de um conjunto em k círculos

Números de Stirling - Primeira Ordem

Proposição.11: (Números de Stirling de Primeira Ordem)

Sejam $n, k \in \mathbb{N}^*$; $k < n$ e A um conjunto com n elementos. Então, o Número de Stirling de Primeira Ordem $P_{n,k} = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right] + (n-1) \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right]$.

Demonstração: Seja A um conjunto com n elementos: $A = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$; para serem distribuídos em k círculos **não vazios**.

Considerando um elemento qualquer $x \in A$ temos duas possibilidades: (i) Se $\{x\}$ ficar em um círculo isolado, então os $(k-1)$ círculos restantes são formados por $(n-1)$ elementos de A. Assim, temos $P_{n-1,k-1} = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right]$ possibilidades de arranjarmos $(n-1)$ elementos nos $(k-1)$ círculos.

(ii) Caso contrário, $\{x\}$ ficará em um círculo com outros elementos de A. Então, distribuímos os $(n-1)$ elementos em k círculos; neste caso, note que em cada círculo temos $(n-1)$ posições para encaixar o elemento x. Assim, temos $P_{n-1,k} = (n-1).\left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right]$ possibilidades. Logo; pelo princípio da adição, $P_{n,k} := P_{n-1,k-1} + (n-1).P_{n-1,k} = \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right] + (n-1).\left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right]$.

Números de Stirling - Primeira Ordem

Representação

n	k	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0		$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$						$\cdots$
1		$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$					$\cdots$
2		$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$				$\cdots$
3		$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$			$\cdots$
4		$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$		$\cdots$
5		$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

n k	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						$\cdots$
1	0	1					$\cdots$
2	0	1	1				$\cdots$
3	0	2	3	1			$\cdots$
4	0	6	11	6	1		$\cdots$
5	0	24	50	35	10	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Observação:

(i) $P_{n,n} = \left[\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right] := 1, n \geq 0$; $P_{n,0} = \left[\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right] := 0, n > 0$; $P_{n,1} = \left[\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right] := (n-1)!, n > 0$; e,

(ii) $P_{n,k} := P_{n-1,k-1} + (n-1).P_{n-1,k} = \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right] + (n-1).\left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right]$;

por exemplo; $\left[\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right] + (5-1).\left[\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right] \Rightarrow 35 = 11 + 4.6$.

Números de Stirling - Primeira Ordem

Observação

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] = n!$$

n	k	0	1	2	3	4	5	$\cdots$	$n!$
0		1						$\cdots$	$0! = 1$
1		0	1					$\cdots$	$1! = 1$
2		0	1	1				$\cdots$	$2! = 2$
3		0	2	3	1			$\cdots$	$3! = 6$
4		0	6	11	6	1		$\cdots$	$4! = 24$
5		0	24	50	35	10	1	$\cdots$	$5! = 120$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\sum_{k=1}^{n} k \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} n+1 \\ 2 \end{array} \right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k} = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$n = 4 \Rightarrow \sum_{k=1}^{4} k \left[\begin{array}{c} 4 \\ k \end{array} \right] = 1.6 + 2.11 + 3.6 + 4.1 = 50 = \left[\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right] = 4!(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) = 24(\tfrac{50}{24})$$

$$\left[\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right); n \geq k \geq 1$$

Este resultado representa **quantas maneiras podemos posicionar n pessoas em $n-1$ mesas circulares idênticas** ?
Inicialmente, vamos distribuir $n-1$ pessoas em $n-1$ mesas sendo que cada pessoa será alocada em uma mesa distinta (Não pode ter mesa vazia).
Em seguida, vamos alocar em uma das mesas a pessoa que ainda está aguardando para sentar-se.
Portanto, alguma mesa ficará com duas pessoas.
Ou seja, escolhemos dentre as n pessoas as duas que sentam juntas na mesma mesa. Essa escolha pode ser realizada através de uma combinação das n pessoas tomadas duas a duas.
Exemplos:

$$\left[\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right) = 6$$

$$\left[\begin{array}{c} 5 \\ 4 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right) = 10$$

(1) Calcule os seguintes números de Stirling de Segunda Ordem:

- $\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2!} \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ i \end{array} \right) (2-i)^4 =$
$\frac{1}{2} \left(\left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right) (2)^4 - \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) (1)^4 + \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right) (0)^4 \right) = \frac{1}{2}(1.16 - 2.1 + 2.0) = \frac{1}{2}(14) = 7.$
- $\left\{ \begin{array}{c} 6 \\ 3 \end{array} \right\} =$

$$\left\{ \begin{array}{c} 6 \\ 3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right\} + (3).\left\{ \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} \right\} + (2).\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right\} + 3.\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right\} + 9.\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} \right\} + 5.\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right\} + 9.\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right\} + 27.\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} \right\} + 5.\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right\} + 10.\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right\} + 9.\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right\} +$$

$$27.\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} \right\} + 5.\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right\} + 19.\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right\} + 27.\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} \right\} + 5.\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right\} + 19.\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right\} + 38.\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right\} + 27.\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right\} = 1 + 5.1 + 19.1 + 38.1 + 27.1 = 90.$$

ou; $\left\{ \begin{array}{c} 6 \\ 3 \end{array} \right\} = \dfrac{1}{3!} \displaystyle\sum_{i=0}^{3} (-1)^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ i \end{array} \right) (3-i)^6 =$

$$\frac{1}{6}\left(\left(\begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \right)(3)^6 - \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right)(2)^6 + \left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right)(1)^6 - \left(\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right)(0)^6 \right) = \frac{1}{6}(1.3^6 - 3.2^6 + 3.1^6 - 1.0^6) =$$

$$\frac{1}{6}(540) = 90.$$

(2) Calcule por recursão os seguintes números de Stirling de Primeira Ordem:

- $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-1 \\ 2-1 \end{bmatrix} + (4-1).\begin{bmatrix} 4-1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (3).\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (2).\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow 2 + 3(1+2.1) = 11.$
- $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + (5).\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + (4).\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + 5.\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + 20.\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + 9.\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + 20.\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 60.\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + 9.\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 27.\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 20.\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 60.\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + 9.\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 47.\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 60.\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + 9.\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 47.\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 94.\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + 60.\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 6 + 9.2 + 47.1 + 94.1 + 60.1 = 225.$

(3) De quantas maneiras podemos distribuir 5 objetos, numerados de 1 a 5 em duas caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia?

(4) De quantas maneiras podemos distribuir 5 objetos, numerados de 1 a 5 em três caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia?

(5) Um anfitrião tem que distribuir 4 convidados em uma mesa redonda. Qual é o número de maneiras de fazer esta distribuição?

(6) Um anfitrião tem que distribuir 4 convidados em 2 mesas redondas idênticas. Qual é o número de maneiras de fazer esta distribuição?

(3) Seja $A = \{o1, o2, o3, o4, o5\}$ o conjunto dos cinco objetos. Vamos iniciar colocando o objeto $o1$ numa caixa qualquer visto que são idênticas. Agora, vamos alocar os outros, como são duas caixas, temos duas possibilidades para cada: 2^4. Todavia, temos que eliminar o caso no qual ficamos com todos os objetos na mesma caixa que $o1$, para que não fique uma caixa vazia. Então, ficamos com $2^4 - 1 = 15 = \left\{ \begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right\}$ possibilidades de distribuirmos 5 objetos em duas caixas idênticas com nenhuma vazia.

(4) Seja $A = \{o1, o2, o3, o4, o5\}$ o conjunto dos cinco objetos. Vamos iniciar colocando o objeto $o1$ numa caixa qualquer visto que são idênticas; e consideremos dois casos: (i) $o1$ ficar sozinho numa caixa e os outros nas outras duas: $2^3 - 1 = 7 = \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right\}$; ou (ii) $o1$ não ficar sozinho numa caixa então os outros podem ser distribuídos nas 3 caixas. Temos que distribuir 4 objetos em 3 caixas idênticas: $\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right\}$ e; o objeto $o1$ numa das três caixas de 3 modos distintos: $3.\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right\}$.
Pelo princípio da adição, temos $(i) + (ii) = \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right\} + 3.\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right\} = 7 + 3.6 = 25$ maneiras de distribuir 5 objetos, numerados de 1 a 5 em três caixas idênticas.

(5) Um anfitrião tem que distribuir 4 convidados em uma mesa redonda. Qual é o número de maneiras de fazer esta distribuição?

$$\frac{4!}{4} = (4-1)! = 6 = \left[\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array}\right] + 3.\left[\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array}\right] = 0 + 3.2 = 6.$$

(6) Um anfitrião tem que distribuir 4 convidados em 2 mesas redondas idênticas. Qual é o número de maneiras de fazer esta distribuição?

Seja $A = \{c1, c2, c3, c4\}$ o conjunto dos convidados. Vamos iniciar acomodando $c1$, para tal, temos duas possibilidades: (i) $c1$ ficar sozinho numa mesa e os outros $c2, c3, c4$ na outra mesa: $1.(3-1)! = 1.2 = 2$; ou (ii) $c1$ não ficar sozinho numa mesa; e os outros $c2, c3, c4$ podem ser distribuídos nas 2 mesas: $[c1, c2]\&[c3, c4]$ ou $[c1, c3]\&[c2, c4]$ ou $[c1, c4]\&[c2, c3]$ ou $[c1, c2, c3]\&[c4]$ ou $[c1, c2, c4]\&[c3]$ ou $[c1, c3, c4]\&[c2]$ ou $[c1, c3, c2]\&[c4]$ ou $[c1, c4, c2]\&[c3]$ ou $[c1, c4, c3]\&[c2]$; pelo princípio da adição, temos

$$(i) + (ii) = 2 + 9 = 11 = \left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array}\right] + 3.\left[\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}\right] = 2 + 3.3 = 11$$

Exercício.1:

Joana vai a um Shopping Center que possui 2 portas de entrada para o andar térreo, 4 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 3 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes Joana, partindo de fora do Shopping Center pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?

Resposta: Na figura abaixo temos as opções do Shopping para Joana:

Cada extremidade desta árvore de decisão representa uma possibilidade de Joana, partindo de fora do Shopping, atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados, portanto temos: $2.4.3 = 24$ possibilidades distintas.

Note que aqui as decisões são dependentes das decisões anteriores.

Permutação Simples

Exercício.2:

De quantos modos distintos 6 pessoas podem formar uma fila indiana?
Resposta:
Este é um problema clássico de contagem, que é facilmente resolvido pelo Princípio Multiplicativo. De fato, basta escolhermos sucessivamente as pessoas colocadas em cada posição da fila.
Para escolher o primeiro da fila, temos 6 possibilidades; o segundo pode ser qualquer uma das 5 pessoas restantes, e assim por diante.
Logo, o número total de possibilidades é $6.5.4.3.2.1 = 720 = n!$.

Observação:

Uma fórmula muito importante quando se trata de fatoriais foi obtida por Stirling (1730):

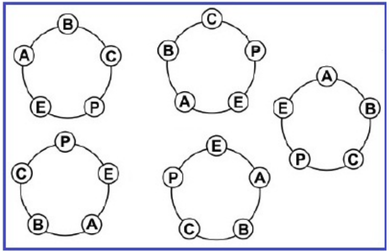
$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

, onde o símbolo $\sim$ indica que a razão entre os dois lados tende a 1 quando $n \to \infty$.

Exercício.3:

Uma reunião de presidentes de países da América do Sul será realizada em uma mesa redonda. Participarão dessa reunião os presidentes da Argentina (A), do Brasil (B), do Chile (C), do Paraguai (P) e do Equador (E). Uma preocupação do Itamarati é com a disposição dos presidentes em tomo da mesa. Em quantas ordens diferentes podem ser dispostos os presidentes em volta da mesa?

Resposta: Notemos pela figura abaixo, que as cinco permutações em linha: ABCPE, BCPEA, CPEAB, PEABC e EABCP correspondem a uma única permutação circular!



Permutação Circular

Exercício.3:

Assim, utilizamos também o princípio multiplicativo, porém precisamos retirar essas permutações iguais.
Se considerarmos que são $5.4.3.2.1 = 120$ permutações simples
e que cada grupo de 5 permutações em linha corresponde a uma única permutação circular, faremos: $\frac{5.4.3.2.1}{5} = 4.3.2.1 = 24$ permutações circulares.
Ou seja, para o número de permutações em linhas temos $n!$ enquanto que na circular $(n-1)!$ pois temos que retirar os n casos que se repetem para cada permutação.

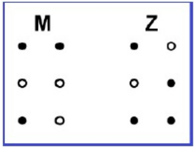
Permutação Circular

Exercício.4:

Numa comemoração entre 5 amigos queremos saber de quantos modos eles podem sentar-se numa mesa redonda sabendo que 2 deles estão brigados e não podem sentar juntos.
Resposta: Para sentarmos os 5 amigos numa mesa redonda temos $\frac{5.4.3.2.1}{5} = 4.3.2.1 = 24$ possibilidades.
Porém, temos 2 deles que estão brigados e não podem sentar juntos, então começamos por sentar apenas 4 pessoas na mesa:
$\frac{4.3.2.1}{4} = 3.2.1 = 6$ possibilidades. Agora, sentamos a pessoa que sobrou evitando não sentá-la nem à direita e nem à esquerda da pessoa com quem brigou. Assim, das 4 posições que teríamos na mesa subtraimos estas 2 posições o que resulta em 2 possibilidades apenas.
Logo, pelo princípio multiplicativo, temos: $6.2 = 12$ maneiras possíveis de sentarmos os 5 amigos numa mesa redonda considerando que 2 deles não podem sentar juntos.

Exercício.5:

A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos onde cada caractere é formado por uma matriz de 6 pontos dos quais pelo menos um se destaca em relação aos outros.
Assim por exemplo, representamos as letras M e Z da seguinte forma:



Qual o número máximo de caracteres distintos, usando três pontos em auto-relevo, que podem ser representados neste sistema de escrita?
Resposta:
O problema basicamente trata de dados 6 objetos (pontos) escolher 3 para ficar em alto-relevo.

Combinação Simples

Exercício.5:

Temos então 6 possibilidades de definir o primeiro ponto que ficará em alto relevo, uma vez escolhido o primeiro, temos 5 possibilidades de escolher o segundo ponto a ficar em autorelevo. Uma vez escolhido o segundo ponto, temos 4 possibilidades de escolha do terceiro ponto a ficar em auto-relevo.

Pelo P.F.C teríamos $6.5.4 = 120$ caracteres distintos usando três pontos em auto-relevo.

Agora, enumerando os pontos por $P1, P2, P3, P4, P5$ e $P6$ temos que dentre as 120 possibilidades há por exemplo:

$(P1; P2; P3), (P1; P3; P2), (P2; P1; P3), (P2; P3; P1), (P3; P1; P2)$ e $(P3; P2; P1)$

que representam o mesmo caractere no Braille; i.é., cada caractere está sendo contado $6 = 3!$ vezes.

Então, para corrigir o excesso, fazemos: $\frac{6.5.4}{6} = 20$ caracteres distintos com três pontos em auto-relevo.

Observação: Se quisermos saber o número total de caracteres que pode ser representado no sistema Braille, fazemos: $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$.

Permutação com repetição e Combinação Simples

Exercício.6:

Quantos são os anagramas da palavra BANANA?
Resposta: Para formar um anagrama de BANANA temos que arrumar as 3 letras A, as 2 letras N e 1 letra B em 6 lugares,

$\_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_$.
(i) Combinação: O número de modos de escolher os 3 lugares para as letras A, é C_6^3; para a letra N temos C_3^2 e, para colocar a letra B é C_1^1.
Assim, temos que existem, $C_6^3.C_3^2.C_1^1 = 20.3.1 = 60$.
(ii) Permutação: teríamos 6! se as letras fossem todas distintas; porém temos letras repetidas, então para a letra A existem 3! maneiras de arrumá-las e 2! para N.
Logo, no total temos $\frac{6!}{3!.2!} = \frac{720}{12} = 60$.

Permutação com repetição

Exercício.7:

Quantos são os anagramas da palavra SOLDADO ?

__ __ __ __ __ __ __;

temos que as letras D e O se repetem:

$$\frac{7!}{2!2!} = 1260$$

anagramas.

Permutação com repetição

Exercício.8:

Quantos são os anagramas da palavra SOLDADO

- Que começam com a letra L?
  L __ __ __ __ __ __;
  temos que as letras D e O se repetem: $\frac{6!}{2!2!} = 180$ anagramas.
- Que começam com a letra D?
  D __ __ __ __ __ __;
  temos apenas a letra O que repete: $\frac{6!}{2!} = 360$ anagramas.
- Que começam com a letra D e terminam com O?
  D __ __ __ __ __ O;
  temos agora que nenhuma repete: $5! = 120$ anagramas.
- Que terminam com as letras SOL e nesta ordem?
  __ __ __ __ SOL;
  temos a letra D que repete: $\frac{4!}{2!} = 12$ anagramas.

Permutação com repetição

Exercício.9:

Quantos são os anagramas da palavra TRANSPETRO em que as letras PETRO ficam juntas e nessa ordem ?
Temos dez letras : 10! ; porém, as letras T e R se repetem: $\frac{10!}{2!2!}$.
E ainda, as letras PETRO têm que estar juntas e nesta ordem. Então, ficamos com apenas seis letras e sem repetição:
T, R, A, N, S, PETRO .
Logo, calculamos $6! = 720$ anagramas.

Exercício.10:

Uma urna contém 10 bolas, sendo 3 bolas pretas iguais, 3 bolas brancas iguais, 2 bolas verdes iguais e 2 bolas azuis iguais. Quantas são as maneiras diferentes de se extrair, uma a uma, as 10 bolas da urna?

Resposta: Para formar uma extração das 10 bolas temos que arrumar as três bolas pretas, as três bolas brancas, as duas bolas verdes e duas bolas azuis em linha $\_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_.$

(i) Combinação: temos que existem, $C_{10}^3.C_7^3.C_4^2.C_2^2 = 120.35.6.1 = 25200.$

(ii) Permutação: teríamos 10! se as bolas fossem todas distintas; porém temos bolas de cores iguais, então para as pretas existem 3! maneiras de tirá-las da urna, 3! para as brancas, 2! para as verdes e 2! para as azuis.

Logo, no total temos $\frac{10!}{3!.3!2!2!} = 25200$ extrações distintas da urna.

Arranjo Simples

Exercício.11:

Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países, as tampinhas de Coca-Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1° lugar, Brasil; 2° lugar, Nigéria; 3° lugar, Holanda).
Se, em cada tampinha, os 3 países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?
Resposta: Usando o PFC podemos dividir o nosso problema em três etapas: Para escolhermos o nome do país que estará escrito no 1° lugar da tampinha temos 24 possibilidades, uma vez escrito o 1° lugar, para o 2° lugar restam 23 opções e finalmente, uma vez escrito o 1° e o 2° lugares da tampinha, para o 3° restam 22 possibilidades.
Assim pelo PFC temos: $24.23.22 = 12144$ tampinhas distintas.

Exercício.12:

A senha de um banco é composta por 4 dígitos escolhidos entre 10 algarismos (de 0 a 9) podendo haver repetição do mesmo algarismo na senha.
Quantas senhas distintas podem ser formadas?
Resposta: Usando o PFC podemos dividir o nosso problema em quatro decisões.
Note que o dígito 0(zero) pode ser utilizado tanto na unidade como na dezena, centena ou milhar, pois se trata de uma senha de banco. Para a casa da unidade temos 10 possibilidades, uma vez preenchida a unidade, para a dezena temos 10 possibilidades, uma vez preenchida a dezena, temos 10 possibilidades de preenchermos a centena e finalmente, uma vez preenchida a centena, temos 10 possibilidades de preenchermos a milhar.
Logo, pelo PFC temos $10.10.10.10 = 10^4 = 10000$ senhas distintas.