Geometria Analítica – MAT A01 | 2023.1
Março de 2023 | UFBA
Professor Andreas | ♯LoveAndPeace

**Primeira lista de exercícios**

"*Na Europa está circulando um fantasma - o fantasma do comunismo.*"[1]
*(Karl Marx, filósofo alemão, 1818 - 1883)*

1. Sejam $A$, $B$, $C$, $D$ e $E$, pontos. Prove que:

   (a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

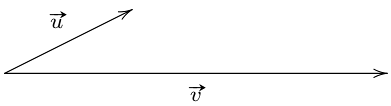
   (b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}$

2. Prove, usando as propriedades da soma entre vetores, que, para todos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ no espaço, as seguintes propriedades são verdadeiras:

   (a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} + \vec{v} \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} = \vec{w}$,

   (b) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$.

3. Dados representantes de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ conforme a figura:

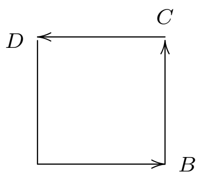
   
   

   Ache um representante de $\vec{x}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} = \vec{0}$.

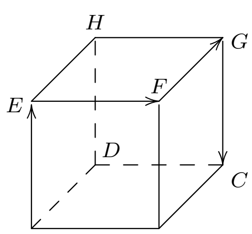
4. Justifique a seguinte regra. Para calcular $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ tome um representante $(A, B)$ de $\vec{u}$, um representante $(B, C)$ de $\vec{v}$, um representante $(C, D)$ de $\vec{w}$. Então $\vec{x}$ tem como representante $(A, D)$.

5. Ache a soma dos vetores indicados na figura nos casos:

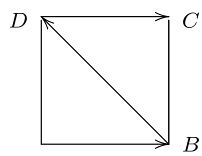
   (a) Quadrado:

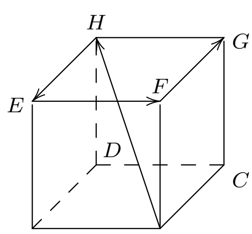
   (b) Cubo:

   (c) Quadrado:

   (d) Cubo:

[1] Original: *Ein Gespenst geht um in Europa - das Gespenst des Kommunismus*, em Manifest der Kommunistischen Partei, 1872, Karl Marx e Friedrich Engels.

6. Prove que, para todos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço e para todo escalar $k, m \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades são verdadeiras:

   (a) $-(\vec{u}+\vec{v}) = -\vec{u} - \vec{v}$,
   (b) $k(\vec{u}-\vec{v}) = k\vec{u} - k\vec{v}$,
   (c) $(k-m)\vec{u} = k\vec{u} - m\vec{u}$,
   (d) $k\vec{v} = \vec{0} \implies k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$,
   (e) $k\vec{u} = k\vec{v}$ e $k \neq 0 \implies \vec{u} = \vec{v}$,
   (f) $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$,
   (g) $2\vec{v} = \vec{v} + \vec{v}$,

7. Resolva a equação na incognita $\vec{x}$:

$$2\vec{x} - 3\vec{u} = 10(\vec{x} + \vec{v})$$

8. Sejam $A$ e $B$ pontos, e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores. Prove que, se $A + \vec{u} = B + \vec{v}$, então $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \vec{v}$.

9. Determine $\overrightarrow{AB}$ em função de $\vec{u}$, sabendo que $A + (-\vec{u}) = B + \vec{u}$.

10. Determine a relação entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que, para um dado ponto $A$, $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A$.

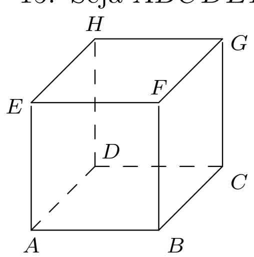
11. Dados os pontos $A$, $B$ e $C$, determine $X$, sabendo que $(A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{CX} = C + \overrightarrow{CB}$.

12. Prove que, se $B = A + \overrightarrow{DC}$, então $B = C + \overrightarrow{DA}$.

13. Prove que $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$.

14. Prove que, se $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$, então $A = B$.

15. Seja $ABCDEFGH$ o cubo:




Determine:

   (a) $A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
   (b) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}$
   (c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{BF}$
   (d) $\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BH}$

16. (a) Seja $ABC$ um triângulo e $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{XB}$. Exprima $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ e $\lambda$.
(b) Seja $ABC$ um triângulo e $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{XB}$, $\overrightarrow{BY} = \mu\overrightarrow{YC}$ e $\overrightarrow{CZ} = \rho\overrightarrow{ZA}$. Exprima $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{AY}$ e $\overrightarrow{BZ}$ em função de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$.

17. Sejam $M$, $N$ e $P$ os pontos médios respetivamente dos lados $AB$, $BC$ e $AC$ de um triângulo $ABC$. Mostre que
$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$$

18. Seja $OABC$ um tetraedro e $X$ o ponto da reta $BC$ definido por $\overrightarrow{BX} = m\overrightarrow{BC}$ por um $m \in \mathbb{R}$. Exprima $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{AX}$ em função de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

19. Seja $ABC$ um triângulo, $X$ um ponto na reta $AB$ tal que $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{XB}$ e $Y$ um ponto na reta $BC$ tal que $\overrightarrow{BY} = 3\overrightarrow{YC}$. Prove que as retas $CX$ e $AY$ se cortam num ponto.

20. Sejam $A$, $B$, $C$ e $D$ pontos quaisquer no espaço, $M$ o ponto médio de $AC$ e $N$ o de $BD$. Exprima $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ em função de $\overrightarrow{MN}$.

21. Seja $ABCD$ um quadrilátero e $O$ um ponto qualquer no espaço. Seja $P$ o ponto médio do segmento que une os pontos médios das diagonais $AC$ e $BD$. Prove que
$$P = O + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$$

22. Sejam $A$, $B$ e $C$ e $D$ três pontos quaisquer com $A \neq B$. Prove que:
$$X \text{ é um ponto do segmento } AB \iff \begin{array}{l} \overrightarrow{CX} = a\overrightarrow{C}A + b\overrightarrow{C}B \\ \text{com } a \geq 0,\ b \geq 0,\ \text{ e } a+b=1. \end{array}$$

23. Prove que, o conjunto $\{\vec{v}\}$ é LD, se e somente se a equação $x\vec{v} = \vec{0}$ admite solução não trivial.

24. Prove que, se o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI, então os conjuntos $\{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, 3\vec{v}\}$ e $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}\}$ também são LI.

25. Seja $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ um conjunto LI. Dado um vetor $\vec{t}$ qualquer, sabemos que existem escalares $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$. Prove que:
$$\{\vec{u} + \vec{t}, \vec{v} + \vec{t}, \vec{w} + \vec{t}\} \text{ é LD} \iff a + b + c + 1 = 0$$

26. Prove que, se o conjunto $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ é LI, então o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI.