edgard de alencar filho

TEORIA ELEMENTAR DOS CONJUNTOS

CONJUNTOS

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Centro de Catalogação-na-fonte,
Câmara Brasileira do Livro, SP

Alencar Filho, Edgard de, 1913-

A353t Teoria Elementar dos Conjuntos. São Paulo, Nobel,

328p. ilust.

Bibliografia.

1. Teoria dos Conjuntos I. Título.

17. CDD-512.817

74-0022 18. -511.3

Índices para o catálogo sistemático:

1. Conjuntos: Matemática 512.817 (17.) 511.3 (18.)
2. Teoria dos conjuntos: Matemática 512.817 (17.) 511.3 (18.)

EDGARD DE ALENCAR FILHO

TEORIA ELEMENTAR DOS CONJUNTOS

19ª Edição

1980

LIVRARIA NOBEL S.A.
EDITORA — DISTRIBUIDORA
MATRIZ: RUA MARIA ANTONIA, 108 — PBX 257-2144
FILIAL: RUA DA CONSOLAÇÃO, 49 — FONE: 259-3237
CAIXA POSTAL, 2373 — 01.222 — SÃO PAULO

Copyright © by Livraria Nobel S.A.

Todos os direitos reservados de acordo com a lei

Impresso no Brasil/Printed in Brazil

ÍNDICE

PARTE I — CONJUNTOS: NOÇÕES FUNDAMENTAIS

CAPÍTULO 1 — *CONJUNTOS E ELEMENTOS* 15

1. Noção de conjunto 15
2. Notação dos conjuntos 16
3. Relação de pertinência 16
4. Família de conjuntos 17
5. Diagramas de VENN 17
6. Conjunto-universo 18
7. Conjuntos numéricos 19
8. Fatorial de um número natural 20
9. Valor absoluto de um número real 20

CAPÍTULO 2 — *DETERMINAÇÃO DE UM CONJUNTO* 23

1. Dar ou definir um conjunto 23
2. Maneiras de definir um conjunto 23
3. Conjunto unitário 24
4. Conjunto vazio 25
5. Conjuntos finitos e conjuntos infinitos 26
6. Notações de alguns conjuntos numéricos 27
7. Representação geométrica dos números reais 27
8. Intervalos limitados em **R** 28
9. Intervalos ilimitados em **R** 29

CAPÍTULO 3 — *IGUALDADE DE CONJUNTOS. RELAÇÃO DE INCLUSÃO* 35

1. Igualdade de dois conjuntos 35
2. Propriedades da igualdade de conjuntos 36
3. Relação de inclusão 36
4. Propriedades da relação de inclusão 37
5. Conjuntos comparáveis 39
6. Diagramas lineares 39

CAPÍTULO 4 — *SUBCONJUNTOS. CONJUNTO DAS PARTES DE UM CONJUNTO. COMPLEMENTAR DE UM SUBCONJUNTO* 44

1. Subconjunto 44
2. Subconjuntos de um conjunto finito 44
3. Conjunto das partes de um conjunto 45

4. Complementar de um subconjunto 46
5. Propriedades do complementar 47

PARTE II — OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

CAPÍTULO 5 — *INTERSEÇÃO DE CONJUNTOS* 53

1. Interseção de dois conjuntos 53
2. Conjuntos disjuntos 54
3. Propriedades da inclusão e da interseção 55
4. Propriedades da interseção 56
5. Interseção de vários conjuntos 57
6. Interseção de uma coleção de partes de um conjunto 58

CAPÍTULO 6 — *REUNIÃO DE CONJUNTOS* 62

1. Reunião de dois conjuntos 62
2. Propriedades da inclusão e da reunião 63
3. Propriedades da reunião 64
4. Propriedades da interseção e da reunião 65
5. Reunião de vários conjuntos 67
6. Reunião de uma coleção de partes de um conjunto 68
7. Princípio de dualidade 68
8. Simplificação de expressões 69

CAPÍTULO 7 — *DIFERENÇA DE CONJUNTOS* 75

1. Diferença de dois conjuntos 75
2. Propriedades da diferença 76
3. Diferença simétrica 78
4. Propriedades da diferença simétrica 79

CAPÍTULO 8 — *PRODUTO CARTESIANO* 85

1. Definição de par ordenado 85
2. Pares ordenados iguais 85
3. Diagrama sagital de um par ordenado 86
4. Pares ordenados consecutivos 86
5. Par ordenado composto 87
6. Produto cartesiano de dois conjuntos 87
7. Quadrado cartesiano de um conjunto 89
8. Representações gráficas do produto cartesiano 90
9. Propriedades do produto cartesiano 92
10. Seqüência 95
11. Produto cartesiano de vários conjuntos 95

PARTE III — RELAÇÕES BINÁRIAS

CAPÍTULO 9 — *GRAFOS* 105

1. Definição de grafo 105
2. Projeções de um grafo 105
3. Operações com grafos 107
4. Grafo recíproco 107
5. Imagem de um conjunto por um grafo 108
6. Imagem recíproca de um conjunto por um grafo 109
7. Composição de grafos 109
8. Propriedades da composição de grafos 109

CAPÍTULO 10 — *RELAÇÕES BINÁRIAS* 115

1. Definição de relação binária 115
2. Representações gráficas de uma relação 116
3. Operações com relações 118
4. Domínio e imagem de uma relação 119
5. Relação recíproca 120
6. Propriedades da relação recíproca 121
7. Relação identidade 122
8. Imagem de um conjunto por uma relação 122
9. Imagem recíproca de um conjunto por uma relação 124
10. Número de relações entre dois conjuntos finitos 124
11. Composição de relações 125
12. Relação recíproca de uma relação composta 127
13. Composição de uma relação com a identidade 128
14. Associatividade da composição de relações 129

CAPÍTULO 11 — *PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES EM UM CONJUNTO* 139

2. Propriedades reflexiva 139
3. Propriedades das relações reflexivas 140
4. Propriedade irreflexiva 142
5. Propriedade simétrica 143
6. Propriedades das relações simétricas 144
7. Propriedade assimétrica 146
8. Propriedade anti-simétrica 147
9. Propriedades das relações anti-simétricas 148
10. Propriedade transitiva 149
11. Propriedades das relações transitivas 150
12. Propriedade intransitiva 151

CAPÍTULO 12 – *RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA* 157

2. Definição de relação de equivalência 157
3. Notação 157
4. Exemplos de relações de equivalência 158
5. Classes de equivalência. Conjunto-quociente 160
6. Exemplos de classes de equivalência 161
7. Propriedades das classes de equivalência 163
8. Partição de um conjunto 164
9. Relações de equivalência e partições. 165
10. Congruências em **Z** 167

CAPÍTULO 13 – *RELAÇÕES DE ORDEM* 173

1. Definição de relação de ordem 173
2. Elementos comparáveis 174
3. Ordem parcial e ordem total 175
4. Ordem oposta 176
5. Ordem estrita 176
6. Ordem estrita total 177
7. Subconjuntos de um conjunto ordenado 177
8. Notações 178
9. Diagrama de HASSE de uma relação de ordem 179
10. Ordens lexicográfica e antilexicográfica 181
11. Intervalos de um conjunto ordenado 182

CAPÍTULO 14 – *ELEMENTOS NOTÁVEIS DE UM CONJUNTO ORDENADO* 187

1. Elemento mínimo e elemento máximo 187
2. Elementos minimais e elementos maximais 189
3. Minorantes e majorantes 190
4. Extremo inferior e extremo superior 192
5. Reticulados 195
6. Propriedades elementares de um reticulado 195
7. Conjunto bem ordenado 196
8. Elementos consecutivos de um conjunto ordenado 196

PARTE IV – FUNÇÕES

CAPÍTULO 15 – *NOÇÕES FUNDAMENTAIS* 203

1. Grafo funcional 203
2. Conceito de função 203
3. Exemplos de funções 204
4. Notações 205

5. Domínio, contradomínio e imagem de uma função 207
6. Determinação do domínio de uma função 210
7. Propriedades do gráfico cartesiano de uma função 211
8. Coincidência de duas funções 212
9. Igualdade de duas funções 212
10. Restrição de uma função 213
11. Prolongamento de uma função 214

CAPÍTULO 16 – *IMAGEM DIRETA E IMAGEM INVERSA DE UM CONJUNTO POR UMA FUNÇÃO* 223

1. Imagem direta de um conjunto por uma função 223
2. Propriedades da imagem direta 225
3. Imagem inversa de um conjunto por uma função 226
4. Propriedades da imagem inversa 228
5. Extensão de uma função ao conjunto das partes 230

CAPÍTULO 17 – *DIFERENTES TIPOS DE FUNÇÕES* 235

1. Função constante 235
2. Função idêntica 236
3. Função de inclusão 236
4. Função característica de uma parte de um conjunto 236
5. Família de elementos de um conjunto 238
6. Seqüência 238
7. Família de partes de um conjunto 239
8. Função de escolha 240
9. Operações com famílias de partes de um conjunto 241
10. Funções monótonas 243

CAPÍTULO 18 – *QUALIDADES DE UMA FUNÇÃO* 249

2. Função sobrejetora 249
3. Função injetora 251
4. Função bijetora 253
5. Função inversa de uma função bijetora 255
6. Permutação de um conjunto 257
7. Involução 257
8. Equações com uma incógnita 258
9. Isomorfismo de conjuntos ordenados 259

CAPÍTULO 19 – *COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES* 265

1. Função composta de duas funções 265
2. Propriedades da composição de funções 269

CAPÍTULO 20 – *ÁLGEBRA DAS FUNÇÕES REAIS* 278
1. Operações sobre funções reais 278

CAPÍTULO 21 – *CONJUNTOS EQUIPOTENTES* 284
1. Conjuntos eqüipotentes 284
2. Conjuntos finitos e conjuntos infinitos 286
3. Conjuntos enumeráveis 286

PARTE V – OPERAÇÕES INTERNAS

CAPÍTULO 22 – *OPERAÇÕES INTERNAS - NOÇÕES FUNDAMENTAIS* 291
1. Operação interna num conjunto 291
2. Notações 291
3. Exemplos de operações 292
4. Tábua de uma operação 294
5. Parte fechada em relação a uma operação 295
6. Restrição de uma operação 296
7. Iteração de uma operação 296
8. Somas e produtos 298
9. Múltiplos e potências 298

CAPÍTULO 23 – *PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES* 300
1. Idempotência 300
2. Comutatividade 300
3. Associatividade 301
4. Associatividade generalizada 303
5. Distributividade 305

CAPÍTULO 24 – *ELEMENTOS NOTÁVEIS DE UM CONJUNTO MUNIDO DE UMA OPERAÇÃO* 308
1. Elementos idempotentes 308
2. Elemento absorvente 308
3. Elemento neutro 309
4. Elemento zero e elemento unidade 311
5. Elementos permutáveis 311
6. Elementos regulares 312
7. Elementos simetrizáveis 314
8. Propriedades dos elementos simetrizáveis para uma operação associativa 315

CAPÍTULO 25 — *HOMOMORFISMOS DE DUAS OPERAÇÕES* 319

1. Homomorfismo 319
2. Epimorfismo, monomorfismo e isomorfismo 319
3. Endomorfismo e automorfismo 321
4. Propriedades dos homomorfismos 321
5. Núcleo de um homomorfismo 323
6. Composição de homomorfismos 323
7. Isomorfismo recíproco de um isomorfismo 324

BIBLIOGRAFIA 325

1

CONJUNTOS:
NOÇÕES FUNDAMENTAIS

CAPÍTULO 1

CONJUNTOS E ELEMENTOS

1. NOÇÃO DE CONJUNTO

A noção de *conjunto,* fundamental na Matemática de nossos dias, não é suscetível de definição precisa a partir de noções mais simples, ou seja, é uma *noção primitiva,* introduzida de modo explícito no século passado pelo matemático russo GEORG CANTOR (1845-1918).

Intuitivamente, sob a designação de conjunto entenderemos toda coleção *bem definida* de objetos, não importa de que natureza, considerados globalmente.

Segundo N. BOURBAKI (Théorie des Ensembles): "Um *conjunto* é formado de *elementos* suscetíveis de possuírem certas *propriedades* e de terem entre si, ou com elementos de outros conjuntos, certas *relações*".

Segundo G. CANTOR: "Chama-se *conjunto* o grupamento num todo de objetos, bem definidos e discerníveis, de nossa percepção ou de nosso entendimento, chamados os *elementos* do conjunto".

Em Matemática definem-se e estudam-se conjuntos de números, de pontos, de retas, de curvas, de funções, etc.

São *exemplos* de conjuntos:

1) O conjunto dos livros de uma biblioteca,

2) O conjunto das letras da palavra "Matemática",

3) O conjunto das vogais do alfabeto português: a, e, i, o, u,

4) O conjunto dos pontos de um plano,

5) O conjunto dos triângulos isósceles,

6) O conjunto dos polinômios de grau ímpar.

2. NOTAÇÃO DOS CONJUNTOS

Um conjunto designa-se geralmente por uma letra latina maiúscula:

A, B, C, ..., X, Y, Z

Os objetos que constituem um conjunto denominam-se *elementos* do conjunto, e representam-se habitualmente pelas letras latinas minúsculas:

a, b, c, ..., x, y, z

O conjunto A cujos elementos são a, b, c, ... representa-se pela notação:

$$A = \{a, b, c, ...\}$$

que se lê: "A é o conjunto cujos elementos são a, b, c, ...". Observe-se que os elementos estão separados por vírgulas e incluídos entre chaves.

Exemplos:

1) Conjunto das vogais do alfabeto português: {a, e, i, o, u}

2) Conjunto dos nomes dos dias da semana que começam pela letra s:

{segunda, sexta, sábado}

3) Conjunto dos planetas do Sistema Solar:

{Vênus, Mercúrio, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urânio, Netuno, Plutão}

4) Conjunto dos nomes dos cinco continentes:

{Europa, Ásia, África, América, Oceania}

5) Conjunto dos nomes dos meses de 30 dias:

{Abril, Junho, Setembro, Novembro}

3. RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

Para indicar que um elemento x pertence ao conjunto A, escreve-se: $x \in A$, notação devida ao matemático italiano GIUSEPPE PEANO (1858 - 1932) e que se lê: "x pertence a A".

Com o mesmo significado de $x \in A$, escreve-se $A \ni x$, que se lê: "A contém x"

Para exprimir, ao invés, que um elemento x não pertence ao conjunto A, escreve-se: $x \notin A$, que se lê: "x não pertence a A".

Com o mesmo significado de $x \notin A$ escreve-se $A \not\ni x$, que se lê: "A não contém x".

Uma letra *a* que designa um elemento *bem determinado* de um conjunto A diz-se um *elemento particular* de A; ao contrário, uma letra *x* que designa um elemento arbitrário de A, isto é, um elemento do qual nada se supõe, salvo sua pertinência a A, chama-se um *elemento genérico* de A.

Exprime-se que a, b, c, ..., h são elementos de um conjunto A com a notação:

$$a, b, c, \ldots, h \in A$$

NOTA — Um traço oblíquo sobre um símbolo produz sempre novo símbolo cujo significado é a *negação* do primeiro. É o que acontece com o símbolo $\neq$ (*diferente de*) já bem conhecido e agora com os símbolos $\notin$ (*não pertence a*) e $\not\ni$ (*não contém*).

Exemplo: Seja $A = \{a, e, i, o, u\}$. Temos:

$$a \in A, \quad b \notin A, \quad e \in A, \quad f \notin A, \quad i, o, u \in A$$

4. FAMÍLIA DE CONJUNTOS

Definição — Um conjunto cujos elementos também são conjuntos diz-se uma *família de conjuntos* ou uma *coleção de conjuntos.*

Assim, p. ex., o conjunto $F = \{\{2, 3\}, \{2\}, \{5, 6\}\}$ é uma *família de conjuntos,* cujos elementos são $\{2, 3\}$, $\{2\}$ e $\{5, 6\}$.

Uma reta é um conjunto de pontos e, portanto, um conjunto de retas é uma *família de retas.*

Analogamente, uma circunferência é um conjunto de pontos e, portanto, um conjunto de circunferências é uma *família de circunferências.*

NOTA — Também se consideram conjuntos em que alguns elementos são conjuntos e outros não, como, p. ex., o conjunto:

$$E = \{2, \{1, 3\}, 4, \{2, 5\}\}$$

5. DIAGRAMAS DE VENN

A fim de facilitar o entendimento de certas definições e demonstrações da Teoria dos Conjuntos, é muito útil a representação de um conjunto por um recinto plano delimitado por uma linha fechada qualquer não entrelaçada. Uma tal representação recebe o nome de *diagrama de VENN.*

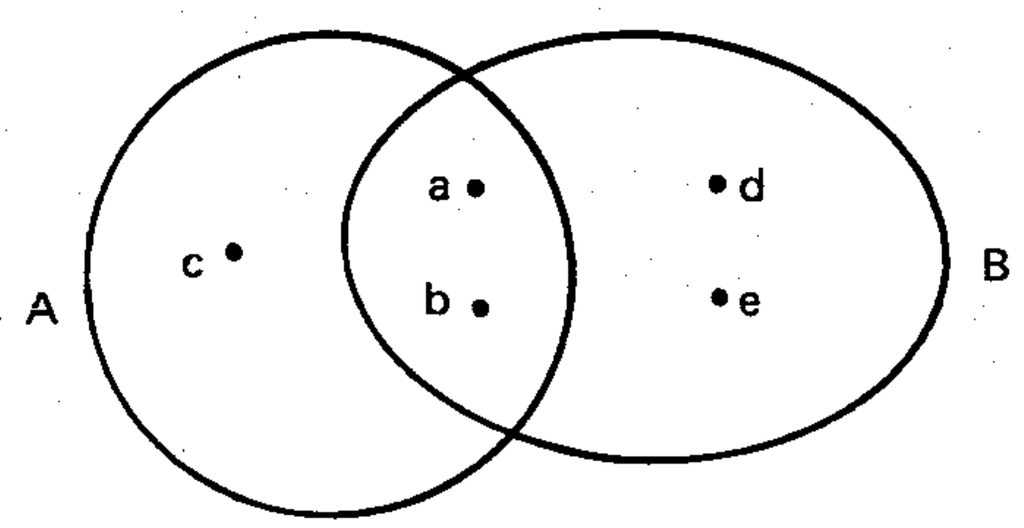
Num diagrama de VENN, os elementos do conjunto indicam-se por pontos *internos* ao recinto, e elementos que não pertencem ao conjunto são representados por pontos *externos* ao mesmo recinto. Nenhum elemento se representa por um ponto da linha fechada que delimita o recinto (fronteira do recinto).

Exemplo: A figura ao lado é o *diagrama de VENN* dos conjuntos:

$$A = \{a, b, c\}$$

e

$$B = \{a, b, d, e\}$$



6. CONJUNTO UNIVERSO

As palavras "elemento" e "conjunto" têm muitas vezes significado relativo, pois um mesmo ente pode ser elemento *em relação* a certos entes e conjunto *em relação* a outros entes. Assim, p. ex., uma *turma* de um colégio é um *elemento* do conjunto das turmas do colégio, mas também é um conjunto de alunos do colégio; analogamente, uma reta é um *elemento* do conjunto de todas as retas, mas também é um *conjunto* de pontos, etc.

Nestas condições, quando se deseja estudar um assunto qualquer com o rigor da Matemática, cumpre primeiro que tudo precisar quais são os entes considerados nesse assunto como *elementos.*

Definição — Chama-se *conjunto universo* ou apenas *universo* de uma teoria o conjunto de todos os entes que são sempre considerados como elementos nessa teoria.

Assim, p. ex., em Aritmética, o *universo* é o *conjunto de todos os números inteiros não negativos* $\{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$; e em Geometria o *universo* é o *conjunto de todos os pontos,* ou seja, o *espaço,* etc.

O *universo* também é por vezes chamado *conjunto fundamental* da teoria e representa-se sempre pela letra U.

Num diagrama de VENN, os elementos do universo U são geralmente representados por pontos internos a um quadrado (ou retângulo) e os demais conjuntos por círculos contidos no quadrado (ou retângulo).

Assim, p. ex., a figura ao lado é o diagrama de VENN do universo:

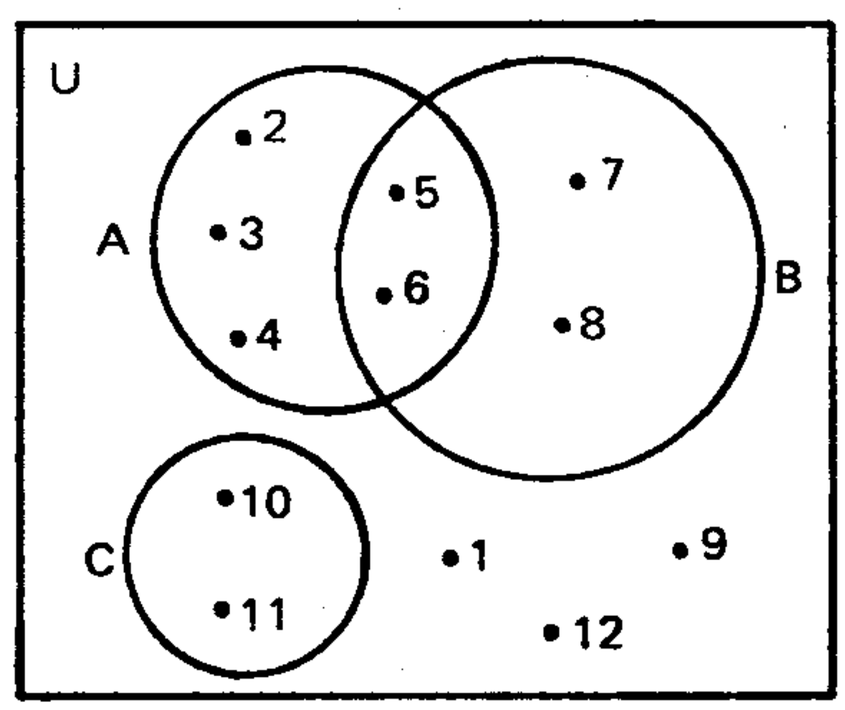
$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

e dos três conjuntos:

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{5, 6, 7, 8\}$$

$$C = \{10, 11\}$$



7. CONJUNTOS NUMÉRICOS

São particularmente importantes os seguintes *conjuntos numéricos:*

a) *Conjunto dos números naturais* — Designa-se sempre pela letra **N**:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

b) *Conjunto dos números inteiros* — Designa-se sempre pela letra **Z**:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

ou

$$\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$$

Observe-se que **N** é o conjunto dos *números inteiros positivos* e que a passagem de **N** para **Z** se faz pela introdução do *zero* (0) e dos *números inteiros negativos.*

c) *Conjunto dos números racionais* — Designa-se sempre pela letra **Q**, sendo seus *elementos* todos os números que podem ser postos na forma p/q, em que $p \in \mathbf{Z}$ e $q \neq 0 \in \mathbf{Z}$.

Todo número inteiro *a* também é um número racional, visto que $a = a/1$.

Os números racionais têm representação decimal limitada ou periódica.

d) *Conjunto dos números reais* — Designa-se sempre pela letra **R**, sendo seus *elementos* todos os números racionais e irracionais (não racionais).

e) *Conjunto dos números complexos* — Designa-se sempre pela letra **C**, sendo seus *elementos* todos os números da forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbf{R}$ e $i = \sqrt{-1}$.

Todo número real *a* também é um número complexo, visto que $a = a + 0.i$.

8. FATORIAL DE UM NÚMERO NATURAL

Definição — Chama-se *fatorial* de um número natural $n > 1$, o produto de todos os números naturais de 1 até n.

O fatorial de n representa-se pelo símbolo n!. Portanto, temos:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n \qquad (n > 1)$$

Em particular, convenciona-se: $0! = 1$ e $1! = 1$.

9. VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO REAL

O *valor absoluto* de um número real x ($x \in \mathbf{R}$), indicado por $|x|$, é definido pela fórmula:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Portanto, o valor absoluto de x é x se $x > 0$, $-x$ se $x < 0$ e 0 se $x = 0$, isto é, $|x| \geqslant 0$ (nunca negativo), qualquer que seja x.

Assim, p. ex.:

$$|2| = 2\,, \qquad |-5| = 5\,, \qquad |-3-4| = |-7| = 7$$

Cumpre notar:

$$|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a\,,\ (a > 0)$$

$$|x| \geqslant a \Longleftrightarrow x \leqslant -a \ \text{ ou } \ x \geqslant a\,,\ (a > 0)$$

Assim, p. ex.:

$$|x-2| \leqslant 4 \Longleftrightarrow -4 \leqslant x-2 \leqslant 4 \Longleftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 6\,;$$

$$|x-3| \geqslant 5 \Longleftrightarrow x-3 \leqslant -5 \ \text{ ou } \ x-3 \geqslant 5$$

$$\Longleftrightarrow x \leqslant -2 \ \text{ ou } \ x \geqslant 8$$

Para todo par de números reais x, y tem-se:

i) $|xy| = |x|\,|y|$

ii) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

iii) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$

E X E R C Í C I O S

1. Escrever, sob *forma simbólica,* os seguintes conjuntos:

   a) Conjunto dos números 2, 3, 5 e 7,

   b) Conjunto das raízes da equação $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$,

   c) Conjunto dos números 2, 4, 6, 8, ... ,

   d) Conjunto das letras da palavra "livraria",

   e) Conjunto dos nomes dos meses de 31 dias.

2. Sendo $A = \{1, 3, 5, 7, 11\}$, verificar quais das seguintes sentenças são *verdadeiras* ou *falsas:*

   a) $1 \in A$

   b) $2 \in A$

   c) $7 \in A$

   d) $11 \in A$

3. Verificar quais das seguintes sentenças são *verdadeiras* ou *falsas:*

   a) $3 \in \{0, -1, 3, \frac{1}{5}\}$

   b) $-3 \notin \{0, 1, -1, 3, -3\}$

   c) $5 \notin \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

   d) $\sqrt{2} \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}\}$

4. Seja Q o conjunto dos quadriláteros. Exprimir simbolicamente a *relação de pertinência* ao conjunto Q das seguintes figuras:

   a) quadrado q

   b) triângulo t

   c) trapézio tr

   d) hexágono h

   e) paralelogramo p

   f) losango l

   g) retângulo r

   h) decágono d

5. Construir o *diagrama de VENN* dos conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{c, d, e, f\}$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. a) $\{2, 3, 5, 7\}$;

   b) $\{0, 1, 2\}$;

   c) $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$;

   d) $\{l, i, v, r, a\}$;

   e) {Janeiro, Março, Maio, Julho, Agosto, Outubro, Dezembro}.

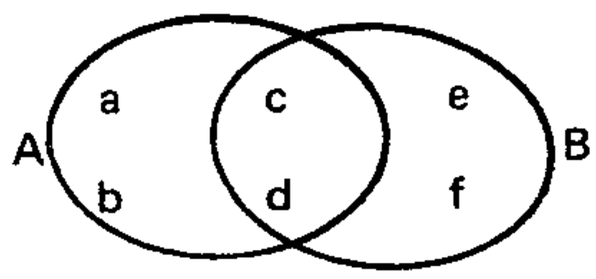
2. a) V b) F c) F d) V

3. a) V b) F c) F d) V

4. a) $q \in Q$ c) $tr \in Q$ e) $p \in Q$ g) $r \in Q$

   b) $t \notin Q$ d) $h \notin Q$ f) $l \in Q$ h) $d \notin Q$

5.



CAPÍTULO 2

DETERMINAÇÃO DE ÚM CONJUNTO

1. DAR OU DEFINIR UM CONJUNTO

Comecemos por um exemplo, considerando o conjunto A dos números naturais que são divisíveis por 3, e suponhamos que o *universo* é o conjunto **N** dos números naturais.

De conformidade com o conhecido critério de divisibilidade por 3 da Aritmética, dado um número natural n, *qualquer que ele seja*, poderemos sempre saber se n é ou não divisível por 3, isto é, se *pertence ou não ao conjunto A*. Exprime-se este fato, dizendo que o conjunto A está *definido* ou *dado*.

De modo geral, diz-se que um conjunto A é *dado* ou *definido* num universo, quando se conhece um *critério* que permita sempre, a respeito de qualquer elemento *a*, saber se *a* pertence a A ($a \in A$) ou se *a* não pertence a A ($a \notin A$), devendo verificar-se uma e uma só destas duas hipóteses.

2. MANEIRAS DE DEFINIR UM CONJUNTO

São *duas* as maneiras usuais de *dar* ou *definir* um conjunto num determinado universo, a saber:

(I) Enumerando individualmente todos os elementos que pertencem ao conjunto.

Exemplos:

1) $A = \{=, +, \%, \&, 1\}$

2) $B = \{-, \times, ?, \square, \Delta\}$

3) $C = \{\text{Terra, Sol, Lua}\}$

Diz-se, neste caso, que o conjunto está *definido* por *enumeração* ou *extensão* ou ainda *dado* na *forma analítica* ou *forma tabular*.

Num conjunto definido por enumeração, a ordem dos elementos é indiferente, mas, cada elemento deve figurar somente uma vez.

(II) Enunciando um critério de pertinência que é satisfeito por todos os elementos do conjunto e somente por esses elementos.

Este critério de pertinência diz-se a *norma de definição* do conjunto e, em geral, consiste em diversas *condições* (ou *propriedades*).

No universo U, o conjunto A dos elementos x que verificam a *condição* p(x) (ou possuem a *propriedade* p(x)), indica-se pela notação:

$$A = \{x \mid x \in U \text{ e } p(x)\}$$

ou

$$A = \{x \in U \mid p(x)\}$$

No mesmo universo U, o conjunto A dos elementos x que verificam as *condições* p(x) e q(x) (ou possuem as *propriedades* p(x) e q(x)), indica-se pela notação:

$$A = \{x \in U \mid p(x) \text{ e } q(x)\}$$

Suprime-se, por vezes, nestas notações, a indicação do universo U, e escreve-se mais simplesmente:

$$A = \{x \mid p(x)\}$$

$$A = \{x \mid p(x) \text{ e } q(x)\}$$

desde que nenhuma ambigüidade daí resulte quanto aos elementos que constituem o conjunto.

Exemplos:

1) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ é par}\}$

2) $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \text{ é divisível por } 5\}$

3) $C = \{y \in \mathbf{Z} \mid -3 < y \leqslant 3\}$

4) $D = \{y \in \mathbf{Z} \mid y^2 - 9 = 0 \text{ e } y > 0\}$

5) $E = \{y \in \mathbf{Z} \mid y \text{ é primo e } y < 8\}$

Diz-se, neste caso, que o conjunto está *definido* por *compreensão* ou *dado* na *forma sintética* ou *forma construtiva.*

3. CONJUNTO UNITÁRIO

Consideremos no universo **R** a equação $x^2 - 6x + 9 = 0$. É fácil ver que existe um número real x e um só que verifica esta equação: o numero 3. Somos assim levados a escrever:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 6x + 9 = 0\} = \{3\}$$

e a dizer que o conjunto das soluções da equação $x^2 - 6x + 9 = 0$ tem um *único* elemento ou que é um *conjunto unitário.*

Definição — Chama-se *conjunto unitário* todo o conjunto A constituído de um único elemento, a.

Escreve-se: $A = \{a\}$, e diz-se que A é o *conjunto unitário determinado pelo elemento* a.

Importa notar que uma coisa é um conjunto unitário e outra coisa é o elemento que o determina. Assim, temos:

$$3 \in \{3\} \text{ mas não } 3 = \{3\}$$

Exemplos: São *conjuntos unitários:*

1) $\{x \in \mathbf{N} \mid x^2 - 9 = 0\}$

2) $\{x \in \mathbf{N} \mid 3 < x < 5\}$

3) $\{y \in \mathbf{R} \mid y^3 - 8 = 0\}$

4. CONJUNTO VAZIO

Consideremos em **R** a condição $x + 1 = x$. Trata-se, como logo se reconhece, de uma *condição impossível,* pois não existe nenhum número real que a verifique, como também não existe nenhum número real que verifique a condição $x^2 < 0$. Pois bem, por comodidade de linguagem, convenciona-se dizer que o conjunto de elementos que verificam uma condição impossível é o *conjunto vazio* (ou o *conjunto sem elemento algum).* Trata-se, como se vê, de uma convenção matemática que amplia o significado usual da palavra "conjunto". Assim, p. ex., em vez de dizer que não há fósforos numa caixa, pode dizer-se que a caixa está *vazia* ou ainda que o *conjunto dos fósforos na caixa é vazio.*

O conjunto vazio em um determinado universo designa-se pelo símbolo ϕ. Assim, no universo **R**:

$$\{x \mid x + 1 = x\} = \phi$$

$$\{x \mid x^2 < 0\} = \phi$$

$$\{x \mid x \neq x\} = \phi$$

$$\{x \mid 0.x = 5\} = \phi$$

O papel do conjunto vazio na Teoria dos Conjuntos é análogo ao do número *zero* (0) na Aritmética.

Exemplos: Cada um dos seguintes conjuntos é vazio:

1) $\{x \in \mathbf{N} \mid x = 1 \text{ e } x = 2\}$

2) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$

3) $\{x \in \mathbf{Z} \mid 3x - 1 = 0\}$

4) $\{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 - 3 = 0\}$

5. CONJUNTOS FINITOS E CONJUNTOS INFINITOS

Uma correspondência entre os elementos de dois conjuntos A e B diz-se *unívoca* de A para B, se a todo elemento de A corresponder um só elemento de B; diz-se *biunívoca,* se for unívoca tanto de A para B como de B para A, isto é, se a todo elemento de A corresponde um só elemento de B, e se, reciprocamente, a todo elemento de B corresponde apenas um elemento de A.

Definição — Diz-se que um conjunto A é *finito* e contém *n* elementos quando existe um número natural *n* tal que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos dos dois conjuntos:

$$A \text{ e } \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

Um conjunto que não é finito diz-se *infinito.*

O conjunto vazio é considerado finito e com *zero* (0) elementos.

O número de elementos de um conjunto finito A designa-se pelo símbolo n(A).

Se A é vazio, tem-se $n(A) = 0$, e se A não é vazio, tem-se $n(A) \in \mathbf{N}$.

Para indicar por enumeração um conjunto finito com um número não determinado de elementos, usam-se pontos suspensivos intercalados, como, p. ex.:

$$\{a, b, c, \ldots, m\}$$

e para indicar que há *n* elementos (*n* número natural qualquer) escreve-se, p. ex.:

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Exemplos:

1) O conjunto A dos dias da semana é *finito* e contém 7 elementos.

2) O conjunto $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$ dos números naturais primos é *infinito,* porque, depois de um número natural primo, há sempre outro número natural primo (Teorema de EUCLIDES).

6. NOTAÇÕES DE ALGUNS CONJUNTOS NUMÉRICOS

a) *Conjuntos numéricos* $\mathbf{Z}^*$, $\mathbf{Q}^*$, e $\mathbf{R}^*$ — Os conjuntos numéricos **Z**, **Q** e **R** privados do elemento *zero* (0) representam-se respectivamente pelos símbolos $\mathbf{Z}^*$, $\mathbf{Q}^*$ e $\mathbf{R}^*$. Portanto, simbolicamente, temos:

$$\mathbf{Z}^* = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \neq 0\}$$

$$\mathbf{Q}^* = \{x \in \mathbf{Q} \mid x \neq 0\}$$

$$\mathbf{R}^* = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0\}$$

De modo geral, se A designa um conjunto numérico qualquer, este conjunto privado do elemento *zero* (0) indica-se por A^* (A estrela).

b) *Conjuntos numéricos* $\mathbf{Z}_+$, $\mathbf{Z}_-$, $\mathbf{Q}_+$, $\mathbf{Q}_-$, $\mathbf{R}_+$ e $\mathbf{R}_-$ — Os conjuntos formados pelos elementos *não negativos* ($\geqslant 0$) dos conjuntos numéricos **Z**, **Q** e **R** representam-se respectivamente pelos símbolos $\mathbf{Z}_+$, $\mathbf{Q}_+$ e $\mathbf{R}_+$, e os conjuntos formados pelos elementos *não positivos* ($\leqslant 0$) dos mesmos conjuntos numéricos representam-se respectivamente pelos símbolos $\mathbf{Z}_-$, $\mathbf{Q}_-$ e $\mathbf{R}_-$. Portanto, simbolicamente, temos:

$$\mathbf{Z}_+ = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \geqslant 0\}, \quad \mathbf{Z}_- = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \leqslant 0\}$$

$$\mathbf{Q}_+ = \{x \in \mathbf{Q} \mid x \geqslant 0\}, \quad \mathbf{Q}_- = \{x \in \mathbf{Q} \mid x \leqslant 0\}$$

$$\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 0\}, \quad \mathbf{R}_- = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 0\}$$

c) *Conjuntos numéricos* $\mathbf{Z}_+^*$, $\mathbf{Z}_-^*$, $\mathbf{Q}_+^*$, $\mathbf{Q}_-^*$, $\mathbf{R}_+^*$ e $\mathbf{R}_-^*$ — O *zero* (0) é elemento comum dos conjuntos numéricos $\mathbf{Z}_+$, $\mathbf{Z}_-$, $\mathbf{Q}_+$, $\mathbf{Q}_-$, $\mathbf{R}_+$ e $\mathbf{R}_-$. Excluindo o *zero* (0) de cada um destes conjuntos, teremos os conjuntos $\mathbf{Z}_+^*$, $\mathbf{Q}_+^*$ e $\mathbf{R}_+^*$ formados pelos elementos *positivos* (>0) dos conjuntos numéricos **Z**, **Q**, **R** e os conjuntos $\mathbf{Z}_-^*$, $\mathbf{Q}_-^*$, $\mathbf{R}_-^*$ formados pelos elementos *negativos* (<0) dos mesmos conjuntos numéricos, isto é, simbolicamente:

$$\mathbf{Z}_+^* = \{x \in \mathbf{Z} \mid x > 0\}, \quad \mathbf{Z}_-^* = \{x \in \mathbf{Z} \mid x < 0\}$$

$$\mathbf{Q}_+^* = \{x \in \mathbf{Q} \mid x > 0\}, \quad \mathbf{Q}_-^* = \{x \in \mathbf{Q} \mid x < 0\}$$

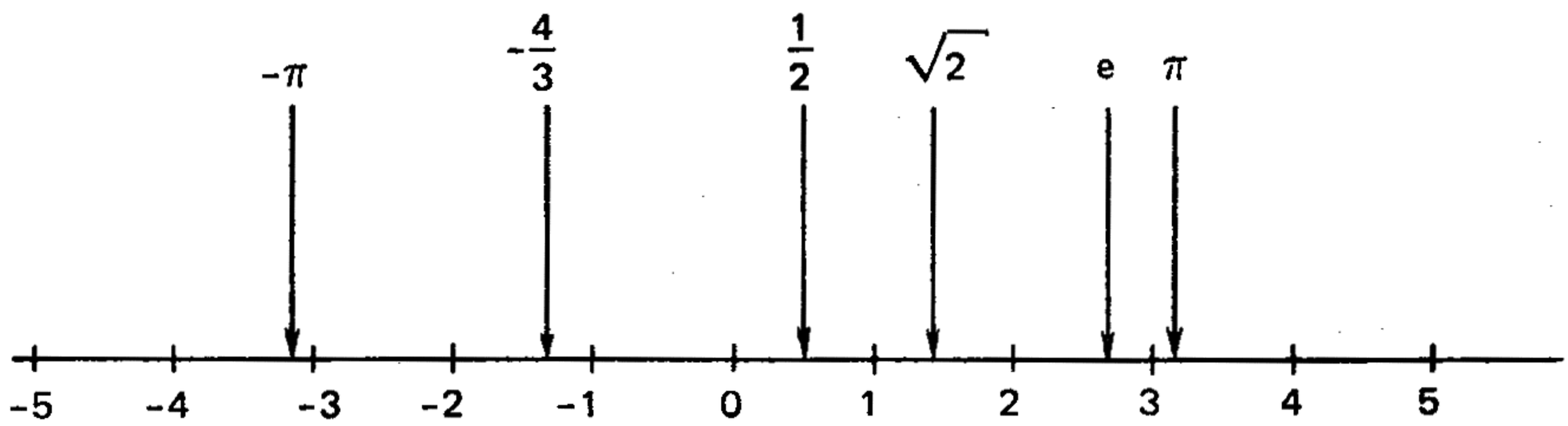
$$\mathbf{R}_+^* = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}, \quad \mathbf{R}_-^* = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 0\}$$

7. REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS REAIS

Os números reais podem ser representados geometricamente pelos pontos de uma reta, chamada *reta real*, no modo indicado pela figura da página seguinte.

Escolhido um ponto para representar o 0 (zero) e um outro para representar o 1 (um), *à direita* do primeiro, a todo ponto da reta real corresponde um número real, e somente um, e inversamente, a todo número real corresponde um ponto, e

um só, da reta real, isto é, existe uma *correspondência um-a-um* (1-1) ou *correspondência biunívoca* entre o *conjunto* **R** dos números reais e o conjunto dos pontos da *reta real.*



Os números reais *à direita do* 0, isto é, que estão do mesmo lado que o 1, formam o *conjunto* $\mathbf{R}_+^*$ *dos números reais positivos,* e os números reais *à esquerda do* 0 formam o *conjunto* $\mathbf{R}_-^*$ *dos números reais negativos.* O número 0 não é positivo nem negativo.

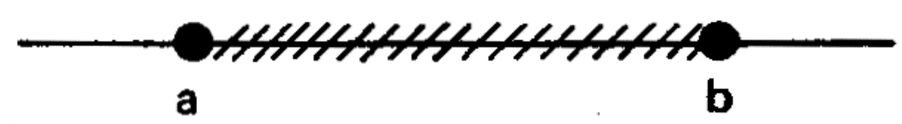
8. INTERVALOS LIMITADOS EM R

Sejam *a* e *b* dois números reais, com $a < b$ ($a, b \in \mathbf{R}, a < b$). São adotadas em Matemática as seguintes definições:

D_1) Chama-se *intervalo fechado* de *origem a* e de *extremidade b,* e indica-se por $[a, b]$, ao conjunto de todos os números reais x tais que $a \leqslant x \leqslant b$.

Simbolicamente, temos:

$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

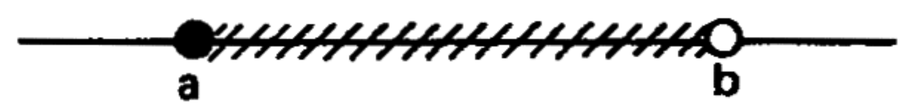


No caso particular em que $b = a$, temos o *intervalo fechado degenerado* $[a, a] = \{a\}$.

D_2) Chama-se intervalo *semi-aberto à direita* de *origem a* e de *extremidade b,* e indica-se por $[a, b[$, ao conjunto de todos os números reais x tais que $a \leqslant x < b$.

Simbolicamente, temos:

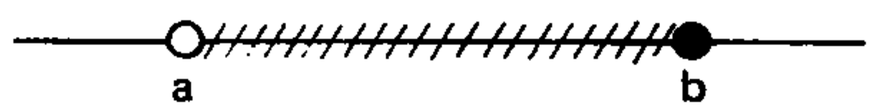
$[a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b\}$



D_3) Chama-se *intervalo semi-aberto à esquerda* de *origem a* e de *extremidade b,* e indica-se por $]a, b]$, ao conjunto de todos os números reais x tais que $a < x \leqslant b$.

Simbolicamente, temos:

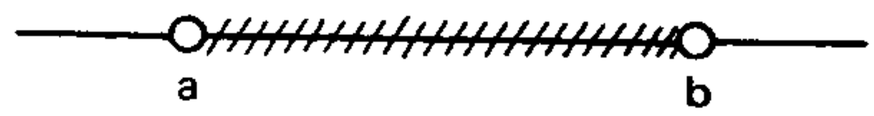
$]a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leqslant b\}$



D_4) Chama-se *intervalo aberto* de *origem a* e de *extremidade b,* e indica-se por $]a, b[$, ao conjunto de todos os números reais x tais que $a < x < b$.

Simbolicamente, temos:

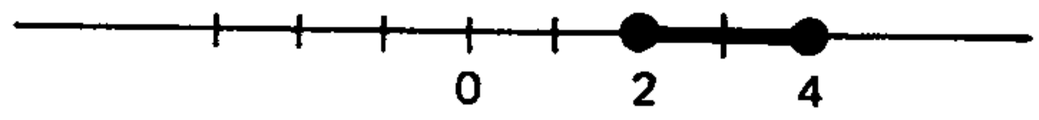
$]a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$



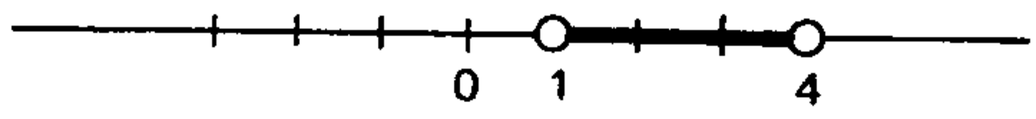
Observe-se que todos estes intervalos são *conjuntos infinitos,* pois cada um deles tem uma infinidade de elementos.

Exemplos:

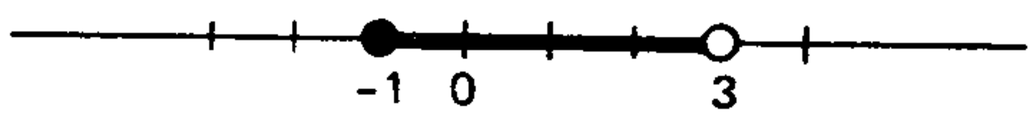
$[2, 4] = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 4\}$



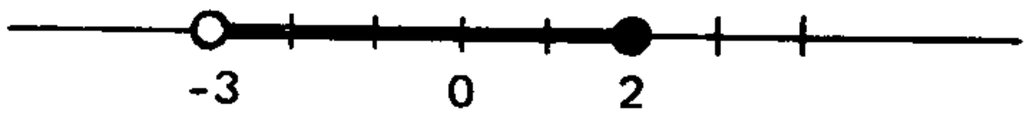
$]1, 4[= \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 4\}$



$[-1, 3[= \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leqslant x < 3\}$



$]-3, 2] = \{x \in \mathbf{R} \mid -3 < x \leqslant 2\}$



9. INTERVALOS ILIMITADOS EM R

Seja a um número real qualquer ($a \in \mathbf{R}$). São também adotadas em Matemática as seguintes definições:

D_1) Chama-se *intervalo fechado ilimitado à esquerda,* de *extremidade a,* e indica-se por $]\longleftarrow, a]$, ao conjunto de todos os números reais x tais que $x \leqslant a$.

Simbolicamente, temos:

$]\longleftarrow, a] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant a\}$

D_2) Chama-se *intervalo aberto ilimitado à esquerda,* de *extremidade a,* e indica-se por $]\longleftarrow, a[$, ao conjunto de todos os números reais tais que $x < a$.

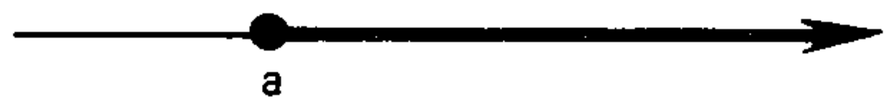
Simbolicamente, temos:

$]\longleftarrow, a[= \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}$

D_3) Chama-se *intervalo fechado ilimitado à direita* de *origem a,* e indica-se por $[a, \longrightarrow[$, ao conjunto de todos os números reais tais que $x \geqslant a$.

Simbolicamente, temos:

$[a, \longrightarrow[= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a\}$



D_4) Chama-se *intervalo aberto ilimitado à direita* de *origem a,* e indica-se por $]a, \longrightarrow[$, ao conjunto de todos os números reais x tais que $x > a$.

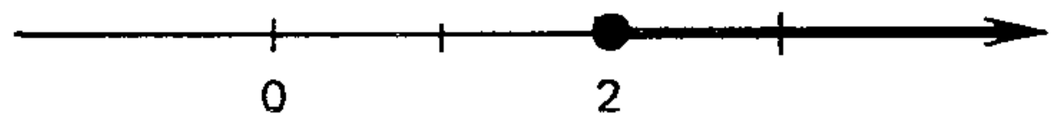
Simbolicamente, temos:

$]a, \longrightarrow[= \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$

Finalmente, é costume designar por $]\longleftarrow, \longrightarrow[$ o conjunto **R** dos números reais e chamar-lhe *intervalo aberto ilimitado à esquerda* e *à direita.* A sua representação geométrica é a reta real.

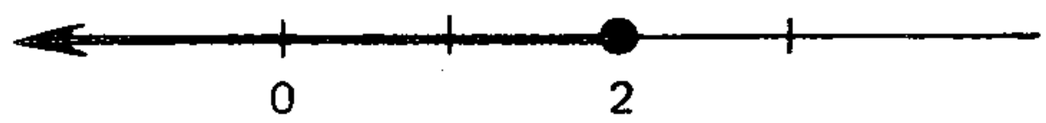
Exemplos:

$[2, \longrightarrow[= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 2\}$



$]1, \longrightarrow[= \{x \in \mathbf{R} \mid x > 1\}$

$]\longleftarrow, 2] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 2\}$



$]\longleftarrow, 3[= \{x \in \mathbf{R} \mid x < 3\}$

EXERCÍCIOS

1. Definir, pela *enumeração* dos seus elementos, cada um dos seguintes conjuntos:
   a) Conjunto das letras da palavra "granada",
   b) Conjunto dos nomes dos meses que começam pela letra j,
   c) Conjunto dos nomes dos poliedros regulares convexos,
   d) Conjunto de todos os números naturais que são divisores de 20,
   e) Conjunto de todos os números naturais menores que 27 e que são múltiplos de 5,
   f) Conjunto de todos os números naturais primos maiores que 15 e menores que 40.

2. Sendo $A = \{1, 4, 9, 10, 11\}$, representar sob a *forma tabular* os seguintes conjuntos:
   a) $\{x \in A \mid x^2 \neq 16\}$
   b) $\{x \in A \mid x + 5 = 9\}$
   c) $\{x \in A \mid (x + 1) \in A\}$
   d) $\{x \in A \mid x \text{ é par}\}$
   e) $\{x \in A \mid x \text{ é primo}\}$
   f) $\{x \in A \mid x^2 - 5x + 4 = 0\}$
   g) $\{x \in A \mid 3 < x < 11\}$
   h) $\{x \in A \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

3. Representar sob a *forma tabular* os seguintes conjuntos:
   a) $\{x \in \mathbf{N} \mid x < 3\}$
   b) $\{x \in \mathbf{N} \mid x^2 < 18\}$
   c) $\{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ é par}\}$
   d) $\{x \in \mathbf{N} \mid 2x - 5 < 6\}$
   e) $\{x \in \mathbf{N} \mid 4 < x < 9\}$
   f) $\{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 - 3x = 0\}$
   g) $\{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 = x\}$
   h) $\{x \in \mathbf{Z} \mid |x| < 3\}$
   i) $\{x \in \mathbf{Z} \mid |x - 6| \leqslant 2\}$
   j) $\{x \in \mathbf{Z}_+ \mid x! = 1\}$

4. Representar sob a *forma sintética* os seguintes conjuntos:

$$A = \{3\}$$
$$B = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$$
$$C = \{3, 6, 9, \ldots, 99\}$$
$$D = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$
$$E = \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$$
$$F = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

5. Verificar quais dos seguintes conjuntos são *vazios* ou *unitários:*

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x + 8 = 5\}$$
$$B = \{x \in \mathbf{Z} \mid -1 < x < 1\}$$
$$C = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| < 0\}$$
$$D = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 = 4 \text{ e } x \text{ é ímpar}\}$$
$$E = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 = 9 \text{ e } 2x = 6\}$$
$$F = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2x + 5 < 0\}$$

6. Representar na *reta real* os seguintes conjuntos:

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 3\}$
b) $\{x \in \mathbf{R} \mid 2x + 3 = 3x - 5\}$
c) $\{x \in \mathbf{R} \mid -5 < x \leqslant 3\}$
d) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \text{ é primo e } x < 10\}$
e) $\{x \in \mathbf{R} \mid 5x \neq 15\}$
f) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| > 3 \text{ e } |x| < 5\}$
g) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| \geqslant 3\}$
h) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 2| = 3\}$

7. Representar, com a *notação de conjunto,* os seguintes intervalos:

a) $[-3, 5[$
b) $]3, 8[$
c) $[0, 4]$
d) $]-7, -2]$
e) $]\longleftarrow, 2]$
f) $]-1, \longrightarrow[$
g) $]\longleftarrow, -3[$

8. Representar, com a *notação de intervalo,* os seguintes conjuntos:

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid -3 \leqslant x < 1\}$
b) $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$
c) $\{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x \leqslant 3\}$
d) $\{x \in \mathbf{R} \mid -4 < x < 2\}$
e) $\{x \in \mathbf{R} \mid x < 3\}$
f) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 2\}$
g) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 1\}$
h) $\{x \in \mathbf{R} \mid x > -1\}$

9. Representar, na *reta real,* os seguintes intervalos:

a) $]-1, 2]$
b) $[-2, 2[$
c) $]0, 1[$
d) $[1, 3]$

10. Representar, com a *notação de intervalo,* os seguintes conjuntos:

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid 3x < 9\}$

b) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 1| < 3\}$

c) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| > -2\}$

d) $\{x \in \mathbf{R} \mid 5x - 7 \geqslant 8\}$

e) $\{x \in \mathbf{R} \mid \frac{x-2}{x+3} < 0\}$

f) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4x + 3 \leqslant 0\}$

11. Verificar as igualdades:

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \in [0, \longrightarrow[\text{ e } x \in]\longleftarrow, 0[\} = \phi$

b) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4x + 3 \geqslant 0\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \notin]1, 3[\}$

c) $\{x \in \mathbf{R} \mid 2x^2 - 5x - 3 > 0\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \notin [-\frac{1}{2}, 3]\}$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. a) $\{g, r, a, n, d\}$

b) $\{$ Janeiro, Junho, Julho $\}$

c) $\{$ Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro, Icosaedro $\}$

d) $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

e) $\{5, 10, 15, 20, 25\}$

f) $\{17, 19, 23, 29, 31, 37\}$

2. a) $\{1, 9, 10, 11\}$

b) $\{4\}$

c) $\{9, 10\}$

d) $\{4, 10\}$

e) $\{11\}$

f) $\{1, 4\}$

g) $\{4, 9, 10\}$

h) $\{1\}$

3. a) $\{1, 2\}$

b) $\{1, 2, 3, 4\}$

c) $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

d) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

e) $\{5, 6, 7, 8\}$

f) $\{0, 3\}$

g) $\{0, 1\}$

h) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

i) $\{4, 5, 6, 7, 8\}$

j) $\{0\}$

4. $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 < x < 4\}$

$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leqslant 9\}$

$C = \{3n \mid n \in \mathbf{N} \text{ e } 1 \leqslant n \leqslant 33\}$

$D = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$

$E = \{5n \mid n \in \mathbf{N}\}$

$F = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 < 10\}$

5. A, C, D e F são vazios; B e E são unitários.

7. a) $\{x \in \mathbf{R} \mid -3 \leqslant x < 5\}$

b) $\{x \in \mathbf{R} \mid 3 < x < 8\}$

c) $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 4\}$

d) $\{x \in \mathbf{R} \mid -7 < x \leqslant -2\}$

e) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 2\}$

f) $\{x \in \mathbf{R} \mid x > -1\}$

g) $\{x \in \mathbf{R} \mid x < -3\}$

8. a) $[-3, 1[$

b) $[1, 2]$

c) $]-1, 3]$

d) $]-4, 2[$

e) $]\longleftarrow, 3[$

f) $[2, \longrightarrow[$

g) $]\longleftarrow, 1]$

h) $]-1, \longrightarrow[$

10. a) $]\longleftarrow, 3[$

b) $]-2, 4[$

c) $]\longleftarrow, \longrightarrow[$

d) $[3, \longrightarrow[$

e) $]-3, 2[$

f) $[1, 3]$

CAPÍTULO 3

IGUALDADE DE CONJUNTOS. RELAÇÃO DE INCLUSÃO

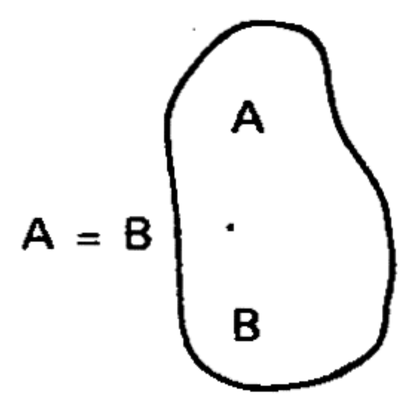
1. IGUALDADE DE DOIS CONJUNTOS

Definição — Dois conjuntos A e B dizem-se *iguais* se e somente se todo elemento que pertence a um deles também pertence ao outro.

Exprime-se que A *é igual a* B pela notação usual: A = B, que se lê: "A é igual a B".

Simbolicamente, temos:

$$A = B \Longleftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$$



Dois conjuntos *iguais* têm exatamente os mesmos elementos e por conseguinte um conjunto fica *determinado* ou *dado* pelos seus elementos.

Exprime-se que o conjunto A *não é igual* ao conjunto B pela notação usual: $A \neq B$, que se lê: "A é diferente de B".

É evidente que $A \neq B$ se existe ao menos um elemento de A que não pertence a B ou se existe ao menos um elemento de B que não pertence a A.

Simbolicamente, temos:

$$A \neq B \Longleftrightarrow (\ (\exists x)\ (x \in A \text{ e } x \notin B) \text{ ou } (\exists y)\ (y \in B \text{ e } y \notin A)\ )$$

Exemplos:

1) $\{5, 6, 7\} = \{7, 6, 5\} = \{5, 5, 6, 6, 7\}$

2) $\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\} = \{1, 2, 2, 1\}$

3) $\{x \in \mathbf{N} \mid 5 < x < 9,\ x \neq 7\} = \{x \in \mathbf{N} \mid 5 < x < 9,\ x \text{ é par}\}$

4) {Triângulos equiláteros} = {Triângulos eqüiângulos}

5) $\{1, 2\} \neq \{1, 2, 3, 4\}$; $\{0, 1, 2\} \neq \{0!, 1!, 2!\}$

2. PROPRIEDADES DA IGUALDADE DE CONJUNTOS

A igualdade de conjuntos possui as seguintes propriedades:

(P_1) *Reflexiva:* $A = A$

Dem.: — Com efeito, obviamente:

$$(\forall x)\ (x \in A \Longleftrightarrow x \in A), \text{ isto é, } A = A$$

(P_2) *Simétrica:* $A = B \Longrightarrow B = A$

Dem.: — Com efeito:

$$A = B \Longrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$$
$$\Longrightarrow (\forall x)\ (x \in B \Longleftrightarrow x \in A) \Longrightarrow B = A$$

(P_3) *Transitiva:* $A = B$ e $B = C \Longrightarrow A = C$

Dem.: — Com efeito:

$$A = B \text{ e } B = C \Longrightarrow \begin{cases} (\forall x)\ (x \in A \Longleftrightarrow x \in B) \\ \text{e} \\ (\forall x)\ (x \in B \Longleftrightarrow x \in C) \end{cases}$$
$$\Longrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Longleftrightarrow x \in C) \Longrightarrow A = C$$

3. RELAÇÃO DE INCLUSÃO

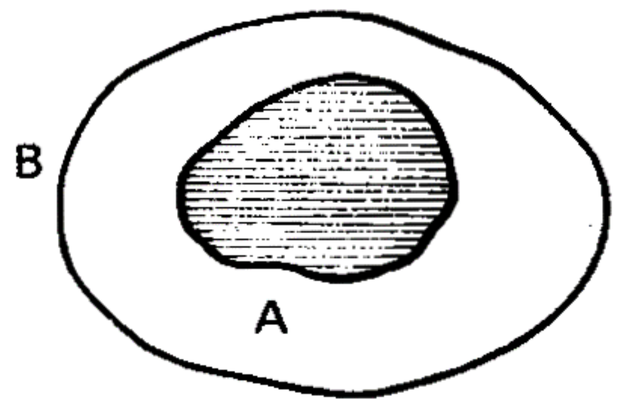
Dois conjuntos quaisquer podem ser comparados pela *relação de inclusão.*

Definição — Diz-se que um conjunto A está *contido* num conjunto B se e somente se todo elemento de A também é um elemento de B.

Indica-se que A está contido em B pela notação $A \subset B$, que se lê: "A está contido em B".

Simbolicamente, temos:

$$A \subset B \Longleftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Longrightarrow x \in B)$$



$A \subset B$

Quando A está contido em B também se diz que B *contém A,* o que se indica pela notação $B \supset A$, que se lê: "B contém A".

A *negação* de $A \subset B$ indica-se pela notação $A \not\subset B$, que se lê: "A não está contido em B".

É evidente que $A \not\subset B$ se e somente se existe ao menos um elemento de A que não é elemento de B, isto é, simbolicamente:

$$A \not\subset B \Longleftrightarrow (\exists x)\ (x \in A \ \text{ e } \ x \notin B)$$

Com o mesmo significado de $A \not\subset B$, escreve-se $B \not\supset A$, que se lê: "B não contém A".

Exemplos:

1) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 5\}$; $\{1, 5, 7\} \subset \{7, 1, 5\}$

2) O conjunto P dos números naturais pares está contido no conjunto **N** dos números naturais: $P \subset \mathbf{N}$.

3) O conjunto A dos números naturais terminados por 5 está contido no conjunto B dos números naturais divisíveis por 5: $A \subset B$.

4) Sejam os conjuntos: A dos quadrados, B dos retângulos e C dos paralelogramos. Temos: $A \subset B$, $A \subset C$ e $B \subset C$.

NOTA — Para demonstrar uma inclusão do tipo $A \subset B$, toma-se um elemento qualquer $x \in A$ e prova-se que x também pertence a B, pois, sendo x arbitrário, o mesmo sucede com todo elemento de A.

Seja, p. ex., demonstrar que $\mathbf{Z}_+^* \subset \mathbf{Z}_+$. Com efeito:

$x \in \mathbf{Z}_+^* \Longrightarrow x \in \{1, 2, 3, \ldots\} \Longrightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \Longrightarrow x \in \mathbf{Z}_+$

Portanto: $x \in \mathbf{Z}_+^* \Longrightarrow x \in \mathbf{Z}_+$ e isto significa que $\mathbf{Z}_+^* \subset \mathbf{Z}_+$

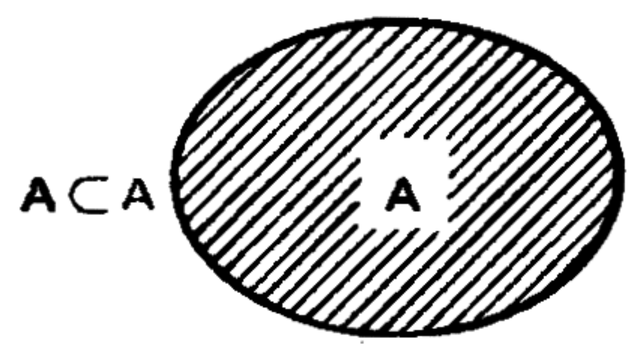
4. PROPRIEDADES DA RELAÇÃO DE INCLUSÃO

A relação de inclusão possui as seguintes propriedades:

(P_1) *Reflexiva:* $A \subset A$

Dem.: — Com efeito, obviamente:

$(\forall x)\ (x \in A \Longrightarrow x \in A)$, isto é, $A \subset A$

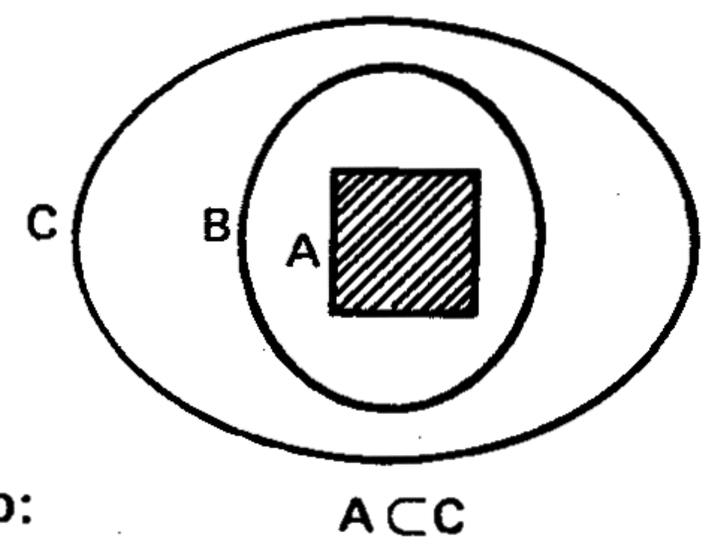


A inclusão não exclui, pois a igualdade. Se $A \subset B$ e $A \neq B$, diz-se que a *inclusão é estrita* e que A *está contido estritamente em* B.

(P_2) *Transitiva:* $A \subset B$ e $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$

Dem.: — Com efeito:

$$\left.\begin{array}{c} A \subset B \Longrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Longrightarrow x \in B) \\ \text{e} \\ B \subset C \Longrightarrow (\forall x)\ (x \in B \Longrightarrow x \in C) \end{array}\right\}$$



Logo, pela propriedade transitiva da implicação:

$$A \subset B \text{ e } B \subset C \Longrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Longrightarrow x \in C) \Longrightarrow A \subset C$$

(P_3) *Anti-simétrica:* $A \subset B$ e $B \subset A \Longrightarrow A = B$

Dem.: — Com efeito:

$$\left.\begin{array}{c} A \subset B \Longrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Longrightarrow x \in B) \\ \text{e} \\ B \subset A \Longrightarrow (\forall x)\ (x \in B \Longrightarrow x \in A) \end{array}\right\}$$

Portanto:

$$A \subset B \text{ e } B \subset A \Longrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Longleftrightarrow x \in B) \Longrightarrow A = B$$

Reciprocamente, é óbvio: $A = B \Longrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$.

(P_4) O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto A, isto é, $(\forall A)\ (\phi \subset A)$.

Dem.: — Com efeito, suponhamos que $\phi \not\subset A$. Então, existe x tal que $x \in \phi$ e $x \notin A$. Mas, qualquer que seja x, $x \notin \phi$. Assim sendo, temos a contradição: $x \in \phi$ e $x \notin \phi$. Logo, $\phi \subset A$.

(P_5) Qualquer que seja o conjunto A num universo U, A está contido em U, isto é, $(\forall A)\ (A \subset U)$.

Dem.: — Com efeito, obviamente:

$$(\forall x)\ (x \in A \Longrightarrow x \in U), \text{ isto é, } A \subset U$$

NOTAS:

I) A propriedade *anti-simétrica* da relação de inclusão fornece o método usual de demonstração da igualdade de dois conjuntos, denominado *método da dupla inclusão*. Para demonstrar que um conjunto A é *igual* a um conjunto B($A = B$), basta estabelecer sucessivamente que A está contido em B($A \subset B$) e que B está contido em A($B \subset A$), isto é, estabelecer que se verificam simultaneamente as inclusões $A \subset B$ e $B \subset A$.

II) Importa distinguir cuidadosamente a *relação de pertinência* ($\in$) da *relação de inclusão* ($\subset$). A pertinência é uma relação entre elemento e conjunto e a *inclusão* é uma relação entre conjuntos.

Assim, p. ex., as sentenças:

$$2 \in \{1, 2, 3\} \quad \text{e} \quad \{2\} \subset \{1, 2, 3\}$$

são *verdadeiras* (V), mas as sentenças:

$$2 \subset \{1, 2, 3\} \quad \text{e} \quad \{2\} \in \{1, 2, 3\}$$

são *falsas* (F).

5. CONJUNTOS COMPARÁVEIS

Definição — Dois conjuntos A e B dizem-se *comparáveis* se $A \subset B$ ou $B \subset A$, isto é, se um dos conjuntos está *contido* no outro.

Portanto, A e B *não são comparáveis* se $A \not\subset B$ e $B \not\subset A$. Neste caso, A contém ao menos um elemento que não pertence a B, e vice-versa, B contém ao menos um elemento que não pertence a A.

Exemplos:

1) Os conjuntos $A = \{a, b\}$ e $B = \{a, b, c\}$ são *comparáveis,* pois A está contido em B: $A \subset B$.

2) Os conjuntos $C = \{1, 2\}$ e $D = \{2, 3, 4\}$ *não são comparáveis,* pois $1 \in C$ e $1 \notin D$, $3 \in D$ e $3 \notin C$, isto é, $C \not\subset D$ e $D \not\subset C$.

3) Designando por M(3) o conjunto dos números naturais que são múltiplos de 3 e por M(5) o conjunto dos números naturais que são múltiplos de 5, temos:

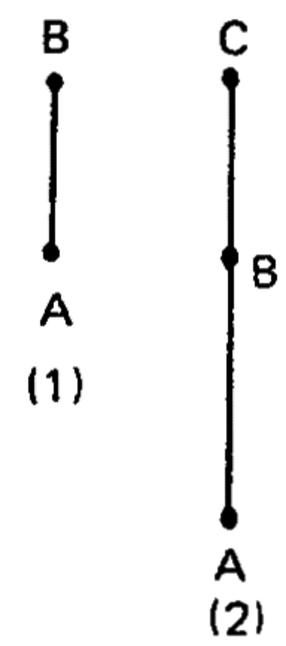
$$M(3) \not\subset M(5) \quad \text{e} \quad M(5) \not\subset M(3)$$

porque há múltiplos de 3 que não são múltiplos de 5 (p. ex., 6) e há múltiplos de 5 que não são múltiplos de 3 (p. ex., 10). Logo, os conjuntos M(3) e M(5) *não são comparáveis.*

6. DIAGRAMAS LINEARES

As relações de inclusão entre conjuntos podem ser facilmente ilustrados pelos chamados *diagramas lineares.* Assim, se A e B são conjuntos e $A \subset B$, obtém-se o

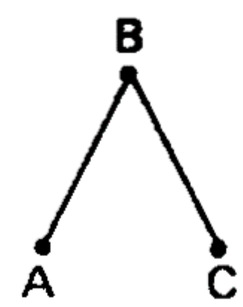
diagrama linear desses dois conjuntos escrevendo B em nível mais elevado que A e unindo A com B por um segmento de reta (Fig. 1).



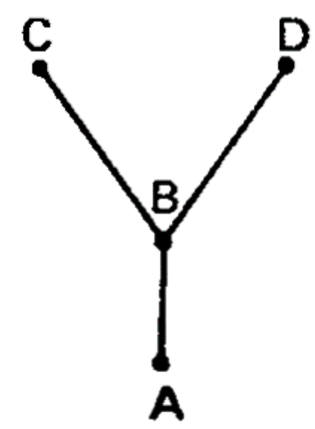
Se A, B, C são conjuntos tais que $A \subset B$ e $B \subset C$, então o diagrama linear desses três conjuntos é obviamente o da Fig. 2. Como $A \subset B$ e $B \subset C$ implica $A \subset C$, não há que traçar o segmento que une A com C.

Exemplos:

1) Sejam os conjuntos: $A = \{2\}$, $B = \{2, 3\}$ e $C = \{3\}$. Aqui, temos $A \subset B$ e $C \subset B$. Então o diagrama linear de A, B e C é o da Fig. ao lado.



2) Sejam os conjuntos: $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, b, c\}$ e $D = \{a, b, d\}$. Aqui, temos: $A \subset B \subset C$, $B \subset D$, C e D não são comparáveis. Então o diagrama linear de A, B, C e D é dado pela Fig. ao lado.

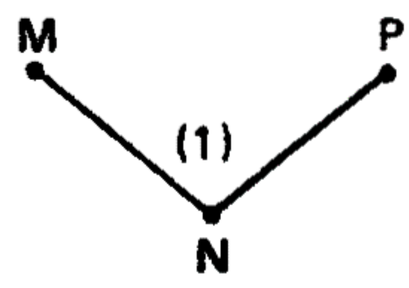


3) Sejam os conjuntos:

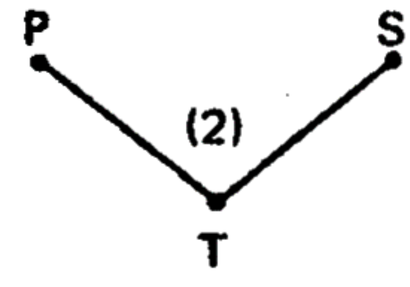
$M = \{a, b, c\}$, $N = \{a, b\}$, $P = \{a, b, d\}$

$S \doteq \{c, d\}$, $T = \{d\}$

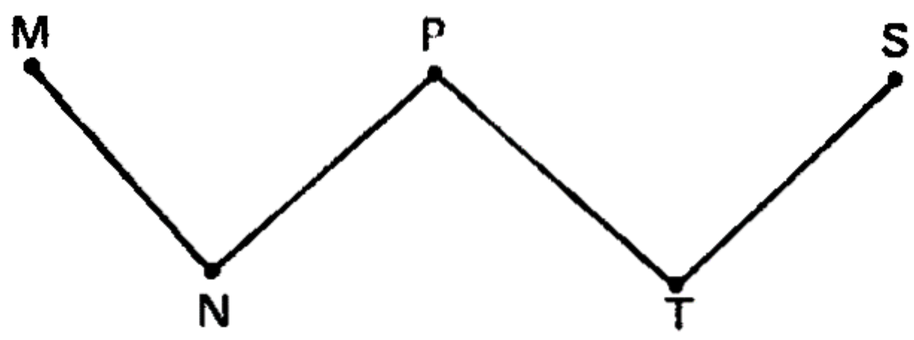
Como $N \subset M$ e $N \subset P$, o diagrama linear de M, N e P é dado pela Fig. 1.



Analogamente, como $T \subset P$ e $T \subset S$, o diagrama linear de P, S e T é dado pela Fig. 2.



Por conseqüência, o diagrama linear dos cinco conjuntos dados M, N, P, S e T é:



E X E R C Í C I O S

1. Verificar as seguintes igualdades:

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid (x+2)^2 - (x-2)^2 = 8\} = \{1\}$

b) $\{x \in \mathbf{N} \mid x < 5\} = \{x \in \mathbf{N} \mid (x+1)^2 < 28\}$

c) $\{x \in \mathbf{N} \mid x < 1\} = \{x \in \mathbf{Z} \mid 6x^2 + 5x - 4 = 0\}$

d) $\{x \in \mathbf{N} \mid 8 < x^2 < 20\} = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$

e) $\{x \in \mathbf{Z} \mid 2x^2 + x - 6 = 0\} = \{x \in \mathbf{Z} \mid 3x^2 + 7x + 2 = 0\}$

f) $\{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 - 4 = 0\} = \{\frac{2}{n} \mid n = 1, -1\} = \{2, -2\}$

2. Achar os pares de *conjuntos iguais* entre os *dez* seguintes conjuntos:

$A = \{2n \mid n = 1, 2, 3, 4\}$

$B = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 < x \leqslant 9\}$

$C = \{n^2 \mid n \in \mathbf{N}, 1 \leqslant n \leqslant 5\}$

$D = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 9\}$

$E = \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, 4, 5\}$

$F = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$

$G = \{2, 4, 6, 8\}$

$H = \{1, 4, 9, 16, 25\}$

$I = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\}$

$J = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

3. Dados os conjuntos:

$X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b\}$, $Z = \{a, b, d\}$, $V = \{d\}$, $W = \{c, d\}$

verificar quais das seguintes sentenças são *verdadeiras* ou *falsas:*

a) $Y \subset X$

b) $W \neq Z$

c) $V \not\subset Y$

d) $V \subset X$

e) $X = W$

f) $W \not\supset V$

g) $Z \supset V$

h) $Z \not\supset X$

i) $Y \not\subset Z$

j) $W \subset Y$

4. Dados os conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{2, 4, 5\}$

verificar quais das seguintes sentenças são *verdadeiras* ou *falsas:*

a) $A \subset B$ b) $A \subset C$ c) $B \subset A$ d) $B \subset C$

e) $C \subset A$ f) $C \subset B$ g) $C \subset C$ h) $\phi \subset B$

5. Dados os conjuntos:

$A = \{r, s, t, u, v, w\}$ $\quad$ $D = \{u, v\}$

$B = \{u, v, w, x, y, z\}$ $\quad$ $E = \{s, u\}$

$C = \{s, u, y, z\}$ $\quad$ $F = \{s\}$

determinar quais dos conjuntos dados pode substituir o conjunto X de modo que resultem *verdadeiras* as seguintes sentenças:

a) $X \subset A$ e $X \subset B$ $\quad$ c) $X \not\subset A$ e $X \not\subset C$

b) $X \not\subset B$ e $X \subset C$ $\quad$ d) $X \subset B$ e $X \not\subset C$

6. Dados os conjuntos:

$A = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$ $\quad$ $D = \{3, 4, 5\}$

$B = \{2, 4, 6, 8\}$ $\quad$ $E = \{3, 5\}$

$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

determinar quais dos conjuntos dados pode substituir o conjunto X de modo que resultem verdadeiras as seguintes sentenças:

a) $X \subset D$ e $X \not\subset B$ $\quad$ b) $X \subset C$ e $X \not\subset A$ $\quad$ c) $X \subset A$ e $X \not\subset C$

7. Mostrar:

a) $\{x \in \mathbf{N} \mid 3 \leqslant 5x + 2 \leqslant 20\} \subset \{x \in \mathbf{N} \mid 3 \leqslant x + 2 \leqslant 20\}$

b) $\{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leqslant x^3 \leqslant 100\} \subset \{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leqslant x^2 \leqslant 100\}$

8. Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, achar todos os conjuntos $X \neq A$ tais que $\{1\} \subset X$ e $X \subset A$.

9. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{b, d, e\}$, achar todos os conjuntos X tais que $X \subset A$ e $X \subset B$.

10. Dados os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, derterminar todos os conjuntos $X \neq B$ tais que $A \subset X \subset B$.

11. Se $A \subset \phi$, então $A = \phi$. Provar.

12. Construir o *diagrama linear* dos conjuntos:

a) $A = \{a, b, c\}$ $B = \{a, b\}$ $C = \{a, c\}$

b) $M = \{1, 2, 3\}$ $N = \{1, 2\}$ $P = \{2\}$

c) $X = \{m, n, p\}$ $Y = \{n\}$ $Z = \{n, p, q\}$

d) $A = \{2, 3, 4\}$

$B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 = 4 \text{ e } x > 0\}$

$C = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 - 6x + 8 = 0\}$

$D = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ é par}\}$

e) $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$

$B = \{2, 4, 6, 8\}$

$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$D = \{3, 4, 5\}$

$E = \{3, 5\}$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

2. A = G, B = J, C = H, D = F e E = I

3. Verdadeiras: (a), (b), (c), (g) e (h)

Falsas: (d), (e), (f), (i) e (j)

4. Verdadeiras: (c), (e), (g) e (h)

Falsas: (a), (b), (d) e (f)

5. a) D b) C, E e F c) B d) B e D

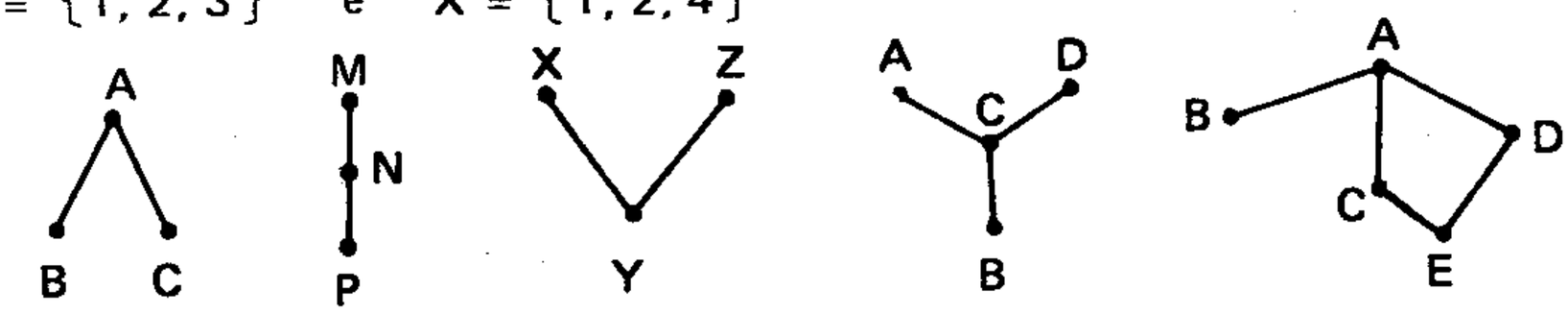
6. a) D e E b) Nenhum c) A, B e D

8. $X = \{1\}$ $X = \{1, 2\}$ $X = \{1, 3\}$

9. $X = \phi$ $X = \{b\}$ $X = \{d\}$ $X = \{b, d\}$

10. $X = \{1, 2, 3\}$ e $X = \{1, 2, 4\}$

12.



CAPÍTULO 4

SUBCONJUNTOS. CONJUNTO DAS PARTES DE UM CONJUNTO. COMPLEMENTAR DE UM SUBCONJUNTO

1. SUBCONJUNTO

Definição — Todo conjunto A que está *contido* num conjunto B ($A \subset B$), diz-se *subconjunto* ou *parte* de B.

Como B está contido em si mesmo ($B \subset B$), B é *parte* de B: é a *parte cheia* de B. O conjunto vazio ϕ também está contido em B ($\phi \subset B$), ou seja, ϕ é *parte* de B: é a *parte vazia* de B.

A *parte cheia* e a *parte vazia* de um conjunto dizem-se as *partes triviais* desse conjunto.

Se, em particular, $A \subset B$ e, além disso, A não é vazio e é diferente de B ($A \neq \phi$ e $A \neq B$), então diz-se que A é *subconjunto próprio* de B ou que A é *parte própria* de B. Neste caso, todo elemento de A é elemento de B e existe ao menos um elemento de B que não pertence a A.

Exemplos:

1) O conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ é *subconjunto próprio* do conjunto $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

2) Todo número natural que é múltiplo de 6 (p. ex., 6, 12, 18, . . .) também é múltiplo de 3, mas há números naturais múltiplos de 3 que não são múltiplos de 6 (p. ex., 3, 9, 15, . . .). Logo, o conjunto M(6) dos números naturais múltiplos de 6 é *subconjunto próprio* do conjunto M(3) dos números naturais múltiplos de 3.

2. SUBCONJUNTOS DE UM CONJUNTO FINITO

Dado um conjunto *finito* com *n* elementos, os seus subconjuntos são todos finitos e encerram, quando muito, *n* elementos. Para achar todos esses subconjuntos, quando *n* não é muito grande, pode-se, p. ex., começar pelo subconjunto vazio,

formar depois os subconjuntos com um só elemento (subconjuntos unitários), em seguida formar os subconjuntos com dois elementos, e assim por diante, até chegar ao subconjunto com o número máximo n de elementos.

Exemplo — Todos os subconjuntos do conjunto $\{1, 2, 3\}$ são:

$$\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

Observe-se que o conjunto $\{1, 2, 3\}$, com *três* (3) elementos, tem exatamente $8 = 2^3$ subconjuntos, dos quais $2^3 - 2 = 6$ são *subconjuntos próprios.*

Teorema — Todo conjunto finito com n elementos tem 2^n subconjuntos.

Dem.: — Com efeito, há: $1 = \binom{n}{0}$ subconjunto com *zero* (0) elementos (subconjunto vazio ϕ), $n = \binom{n}{1}$ subconjuntos com *um* (1) *elemento* (subconjuntos unitários), $\binom{n}{2}$ subconjuntos com *dois* (2) *elementos*, . . . , e finalmente $1 = \binom{n}{n}$ subconjunto com *n elementos.* Logo, o número total de subconjuntos é dado pela soma:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

conforme é sabido pela Análise Combinatória.

3. CONJUNTO DAS PARTES DE UM CONJUNTO

Definição — Chama-se *conjunto das partes de um conjunto* E o conjunto cujos elementos são todas as *partes* de E, inclusive a *parte cheia* E e a *parte vazia* ϕ (*partes triviais de* E).

O *conjunto das partes de* E representa-se por **P**(E) e, por definição, os seus elementos são todos os conjuntos X tais que $X \subset E$, isto é, simbolicamente:

$$\mathbf{P}(E) = \{X \mid X \subset E\}$$

Subsistem, pois, as propriedades:

$$X \subset E \Longleftrightarrow X \in \mathbf{P}(E)$$

$$a \in E \Longleftrightarrow \{a\} \subset \mathbf{P}(E)$$

e as relações:

$$\phi \in \mathbf{P}(E), \quad E \in \mathbf{P}(E)$$

Consoante o teorema anterior, se E é um conjunto finito com n elementos, então **P**(E) também é um conjunto finito com 2^n elementos.

Exemplos:

1) $\mathbf{P}(\{a\}) = \{\phi, \{a\}\}$

2) $\mathbf{P}(\{a, b\}) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

3) $\mathbf{P}(\phi) = \{\phi\}$; $\mathbf{P}(\{\phi\}) = \{\phi, \{\phi\}\}$

Teorema — Quaisquer que sejam os conjuntos E e F, tem-se:

$$E \subset F \Longleftrightarrow \mathbf{P}(E) \subset \mathbf{P}(F)$$

Dem.: — Suponhamos $E \subset F$. Então:

$$X \in \mathbf{P}(E) \Longrightarrow X \subset E \Longrightarrow X \subset F \Longrightarrow X \in \mathbf{P}(F)$$

Logo, $\mathbf{P}(E) \subset \mathbf{P}(F)$.

Suponhamos, agora, $\mathbf{P}(E) \subset \mathbf{P}(F)$. Como $E \in \mathbf{P}(E)$, segue-se que $E \in \mathbf{P}(F)$ e, portanto, $E \subset F$.

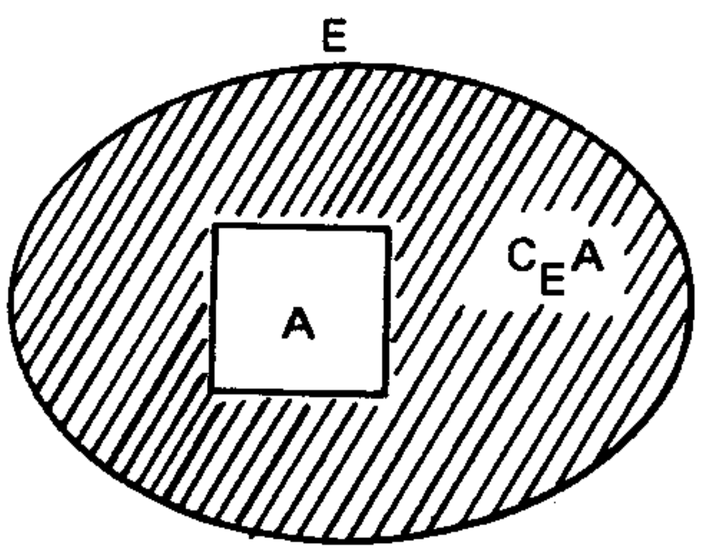
4. COMPLEMENTAR DE UM SUBCONJUNTO

Seja A uma *parte* de um conjunto $E (A \subset E)$.

Definição — Chama-se *complementar* de A em relação a E ou *complemento* de A em relação a E, o conjunto de todos os elementos de E que não pertencem a A.

O complementar de A em relação a E representa-se por $C_E A$. Portanto, simbolicamente:

$$C_E A = \{x \mid x \in E \text{ e } x \notin A\}$$



O complementar de A em relação a E é, pela sua definição, um subconjunto de $E (C_E A \subset E)$.

O conjunto E, em relação ao qual se determina o complementar, chama-se *conjunto de referência* ou *referencial*.

Dado um conjunto A, a passagem de A ao seu complementar é uma operação cujo resultado depende do referencial considerado, pois a mudança deste implica modificação no complementar de A.

Num dado universo U, pode-se falar simplesmente em complementar de um conjunto A, ficando subentendido que se trata do complementar em relação a U, e representá-lo pela notação usual $A' (A' = C_U A)$.

Exemplos:

1) Sejam os conjuntos:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $\quad$ $A = \{2, 4, 6, 8\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $\quad$ $C = \{2, 3, 5, 7\}$

Temos: $C_E A = B$; $C_E B = A$; $C_E C = \{1, 4, 6, 8, 9\}$.

2) Seja E o conjunto dos números naturais divisíveis por 5 e A o conjunto dos números naturais terminados por 5.

Temos:

$$C_E A = \{ x \in \mathbf{N} \mid x \text{ termina por } 0 \}$$

3) Os complementares respectivos do conjunto unitário $\{0\}$ em relação aos conjuntos **Z**, **Q** e **R** são os conjuntos $\mathbf{Z}^*$, $\mathbf{Q}^*$ e $\mathbf{R}^*$.

4) Seja E o conjunto de todas as retas de um plano π, r um elemento fixo de E, e A o conjunto de todas as retas do plano π que interceptam r. Então, o complementar de A em relação a E é o conjunto de todas as retas do plano π que são paralelas à reta r.

5) No universo dos quadriláteros, o complementar do conjunto Q dos *quadrados* é o conjunto dos quadriláteros que ou não são retângulos ou não são losangos ou nem uma coisa nem outra. E no universo das figuras geométricas, o complementar de Q é o conjunto de todas as figuras que não são quadrados.

5. PROPRIEDADES DO COMPLEMENTAR

Sejam A e B *partes* de um conjunto E ($A, B \subset E$).

(P_1) $C_E \phi = E$

Dem.: — Com efeito:

$$C_E \phi = \{ x \mid x \in E \text{ e } x \notin \phi \} = \{ x \mid x \in E \} = E$$

Conclusão: O complementar em relação a E *da parte vazia de* E *é a parte cheia de* E.

(P_2) $C_E E = \phi$

Dem.: — Com efeito:

$$C_E E = \{ x \mid x \in E \text{ e } x \notin E \} = \phi$$

Conclusão: O complementar em relação a E *da parte cheia de* E *é a parte vazia de* E.

(P_3) $C_E(C_E A) = A$

Dem.: — Com efeito:

$$C_E(C_E A) = \{ x \mid x \in E \text{ e } x \notin C_E A \} =$$
$$= \{ x \mid x \in E \text{ e } x \in A \} = \{ x \mid x \in A \} = A$$

(P_4) $A \subset B \Longleftrightarrow C_E A \supset C_E B$

Dem.:

i) Suponhamos $A \subset B$. Então:

$x \in C_E B \Longrightarrow x \in E$ e $x \notin B \Longrightarrow x \in E$ e $x \notin A \Longrightarrow x \in C_E A$

Portanto, $C_E B \subset C_E A$, isto é, $C_E A \supset C_E B$.

ii) Suponhamos, agora, $C_E A \supset C_E B$. Então:

$$x \in A \Longrightarrow x \notin C_E A \Longrightarrow x \notin C_E B \Longrightarrow x \in B$$

Portanto, $A \subset B$.

Conclusão: A complementação transforma a inclusão $\subset$ *na inclusão oposta* $\supset$, *isto é, muda o sentido da inclusão.*

NOTA — Para conjuntos quaisquer A e B num universo U, temos:

$\phi' = U$, $U' = \phi$, $(A')' = A$, $A \subset B \Longleftrightarrow A' \supset B'$

E X E R C Í C I O S

1. Achar todos os subconjuntos do conjunto $A = \{0, \{1, 2\}\}$

2. Quantos subconjuntos tem o conjunto $\{a, b, c, d, e, f\}$?

3. Mostrar que o conjunto $A = \{2, 3, 4, 5\}$ não é um subconjunto de $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ é par}\}$

4. Sendo $E = \{a\}$, determinar $\mathbf{P}(\mathbf{P}(E))$.

5. Determinar $\mathbf{P}(\mathbf{P}(\mathbf{P}(\phi)))$.

6. Dados os conjuntos:

   $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\quad A = \{1, 4, 5, 6\}$, $\quad B = \{1, 4, 6\}$

   calcular $C_E A$, $C_E B$ e $C_A B$.

7. Dados os conjuntos:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{1, 2, 3\}$$
$$C = \{4, 6, 8\}$$

   calcular A', B', e C'.

8. Demonstrar que $E = F$ se e somente se $P(E) = P(F)$.

9. Demonstrar: $E \subset F \Longleftrightarrow \mathbf{P}(E) \subset \mathbf{P}(F)$.

10. Seja $A = \{\{\phi\}, \phi\}$. Verificar quais das seguintes sentenças são verdadeiras ou falsas:

a) $\{\{\phi\}\} \in A$

b) $\phi \in A$

c) $\{\phi\} \in A$

d) $\{\{\phi\}\} \subset A$

e) $\phi \subset A$

f) $\{\phi\} \subset A$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. ϕ , $\{0\}$, $\{1, 2\}$, A

2. $2^6 = 64$

4. $\mathbf{P}(\mathbf{P}(E)) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{a\}\}, \{\phi, \{a\}\}\}$

5. $\mathbf{P}(\mathbf{P}(\mathbf{P}(\phi))) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

6. $C_E A = \{2, 3\}$ $\quad C_E B = \{2, 3, 5\}$ $\quad C_A B = \{5\}$

7. $A' = \{6, 7, 8\}$ $\quad B' = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ $\quad C' = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

10. a) F b) V c) V d) V e) V f) F

2

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

CAPÍTULO 5

INTERSEÇÃO DE CONJUNTOS

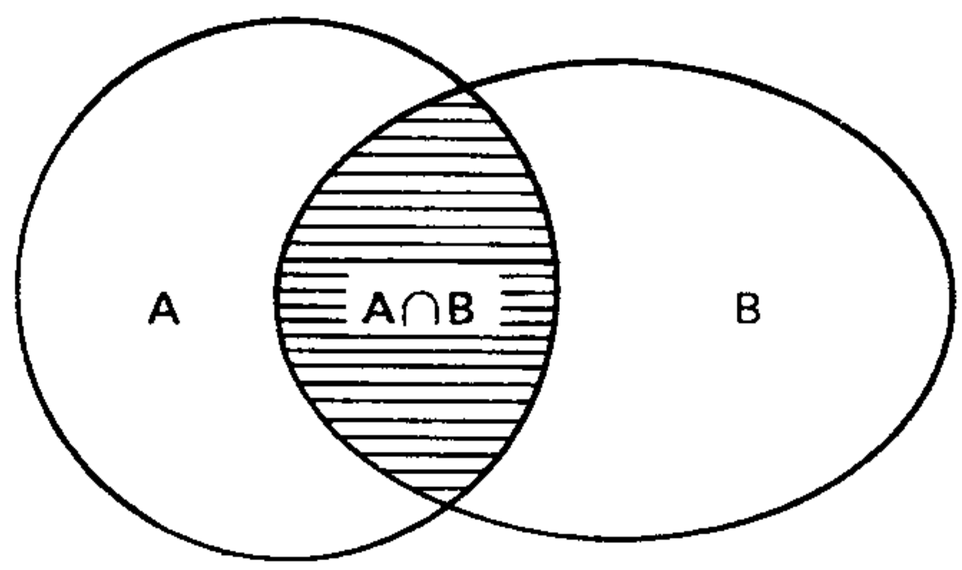
1. INTERSEÇÃO DE DOIS CONJUNTOS

Definição — Chama-se *interseção* de dois conjuntos A e B ao conjunto de todos os elementos que pertencem simultaneamente a A e a B.

Esse conjunto indica-se pela notação: $A \cap B$, que se lê: "A interseção B" ou, abreviadamente, "A inter B".

Simbolicamente, temos:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B \}$$



Portanto:

$$x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B$$

Também se chama *interseção* à própria operação binária que, aplicada aos conjuntos A e B, dá como resultado $A \cap B$.

Exemplos:

1) $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 4\}$

2) $\{3, 5, 7\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \phi$

3) $\mathbf{N} \cap \mathbf{Z} = \mathbf{N}$ $\qquad$ $\mathbf{Z} \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Z}$ $\qquad$ $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R} = \mathbf{Q}$

4) Sejam os conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$
$$D = \{2, 3, 5, 7\}$$

Temos:

$A \cap B = B \quad A \cap C = C \quad A \cap D = D \quad B \cap C = \phi \quad B \cap D = \{2\}$

$C \cap D = \{3, 5, 7\}$

5) Sejam os conjuntos:

$$A = \{ x \in \mathbf{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 2 \}$$

$$B = \{ x \in \mathbf{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 3 \}$$

Como um número natural é múltiplo simultaneamente de 2 e de 3 se e somente se este número é múltiplo de 6, temos:

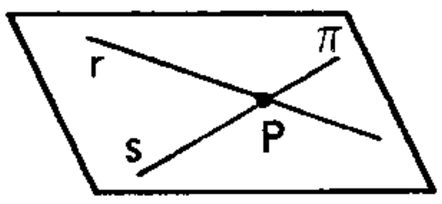
$$A \cap B = \{ x \in \mathbf{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 6 \} =$$
$$= \{ 6, 12, 18, 24, \ldots \}$$

6) $\{x \in \mathbf{N} \mid x < 5\} \cap \{4, 5, 6, 7\} = \{4\}$

7) $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 2\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 5\} = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 < x \leqslant 5\}$

8) Sejam r e s duas retas distintas e não paralelas de um plano π.
Como r e s são conjuntos de pontos, temos:

$$r \cap s = \{P\}$$



isto é, a interseção de r e s é o conjunto unitário $\{P\}$, determinado pelo *ponto de interseção* P de r e s.

Note-se que é errado escrever $r \cap s = P$, pois a interseção de dois conjuntos é um conjunto.

9) Sejam, respectivamente, R, L e Q o conjunto dos retângulos, o conjunto dos losangos e o conjunto dos quadrados.

É imediato que

$$Q = R \cap L$$

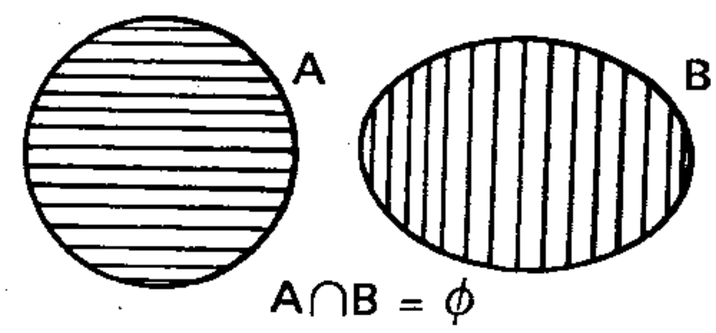
o que significa que *os quadrados são os retângulos que também são losangos.*

2. CONJUNTOS DISJUNTOS

Definição — Dois conjuntos A e B dizem-se *disjuntos* se e somente se não tem elementos comuns.

Portanto, A e B são *disjuntos* se e somente se a interseção de A e B é o conjunto vazio: $A \cap B = \phi$. Simbolicamente:

A e B disjuntos $\Longleftrightarrow A \cap B = \phi$



Se, ao invés, $A \cap B \neq \phi$, então diz-se que *os conjuntos* A *e* B *se cortam* ou que *os conjuntos* A *e* B *se interceptam,* o que se indica pela notação: $A \between B$, que se lê: "A corta B" ou "A intercepta B". Portanto, simbolicamente:

$$A \between B \Longleftrightarrow A \cap B \neq \phi$$

Exemplos:

1) Os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{5, 6\}$ são *disjuntos,* porque $A \cap B = \phi$.

2) Os conjuntos $A = \{1, 2, 5\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$ *se cortam* ou *se interceptam,* porque $A \cap B = \{5\}$.

3) O conjunto A dos triângulos retângulos e o conjunto B dos triângulos eqüiláteros são *disjuntos,* pois nenhum triângulo pode ser ao mesmo tempo retângulo e eqüilátero.

3. PROPRIEDADES DA INCLUSÃO E DA INTERSEÇÃO

(P_1) $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$

Dem.: — Com efeito:

$$x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \Longrightarrow x \in A \quad \therefore \quad A \cap B \subset A$$

$$x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \Longrightarrow x \in B \quad \therefore \quad A \cap B \subset B$$

Conclusão: A interseção de dois conjuntos está contida em cada um dos conjuntos.

(P_2) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$

Dem.: — Suponhamos $A \subset B$. Então:

$$x \in A \Longrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \Longleftrightarrow x \in A \cap B \quad \therefore \quad A \subset A \cap B$$

E como $A \cap B \subset A$ (propriedade P_1), segue-se que $A \cap B = A$.

Suponhamos, agora, $A \cap B = A$. Temos $A \cap B \subset B$ (propriedade P_1) e, portanto, $A \subset B$.

Conclusão: Um conjunto está contido num outro se e somente se a interseção de ambos coincide com o primeiro conjunto.

(P_3) $C \subset A$ e $C \subset B \Longleftrightarrow C \subset A \cap B$

Dem.: — Suponhamos $C \subset A$ e $C \subset B$. Então:

$$x \in C \Longrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \Longleftrightarrow x \in A \cap B \quad \therefore \quad C \subset A \cap B$$

Suponhamos, agora, $C \subset A \cap B$. Então, á vista da Propriedade P_1:

$$C \subset A \cap B \text{ e } A \cap B \subset A \Longrightarrow C \subset A$$

$$C \subset A \cap B \text{ e } A \cap B \subset B \Longrightarrow C \subset B$$

Conclusão: Um conjunto está contido em dois outros se e somente se está contido na interseção de ambos.

(P_4) $A \subset B \Longrightarrow A \cap C \subset B \cap C$

Dem.: — Com efeito:

$$x \in A \cap C \Longleftrightarrow x \in A \text{ e } x \in C \Longrightarrow x \in B$$

$$\text{e } x \in C \Longrightarrow x \in B \cap C$$

$$\therefore \quad A \cap C \subset B \cap C$$

Conclusão: Se um conjunto está contido num outro, então a interseção do primeiro com um terceiro conjunto está contida na interseção do segundo com o terceiro conjunto.

4. PROPRIEDADES DA INTERSEÇÃO

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer num universo U.

(P_1) *Interseção com o conjunto vazio:* $\phi \cap A = \phi$

Dem.: — Com efeito, $\phi \subset A$ e, portanto, $\phi \cap A = \phi$

(P_2) *Interseção com o universo:* $A \cap U = A$

Dem.: — Com efeito, $A \subset U$ e, portanto, $A \cap U = A$

(P_3) *Interseção com o complementar:* $A \cap A' = \phi$

Dem.: — Com efeito:

$$A \cap A' = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in A'\} = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin A\}$$

Como não existe elemento algum x tal que $x \in A$ e $x \notin A$, segue-se que $(\forall x)\ (x \notin A \cap A')$, isto é, $A \cap A' = \phi$.

(P_4) *Idempotente:* $A \cap A = A$

Dem.: — Com efeito, $A \subset A$ e, portanto, $A \cap A = A$.

(P_5) *Comutativa:* $A \cap B = B \cap A$

Dem.: — Com efeito:

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\} = \{x \mid x \in B \text{ e } x \in A\} = B \cap A$

(P_6) *Associativa:* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Dem.: — Com efeito:

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap C &= \{x \mid x \in A \cap B \text{ e } x \in C\} = \\ &= \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B \text{ e } x \in C\} = \\ &= \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B \cap C\} = A \cap (B \cap C)\end{aligned}$$

NOTA — Segundo a igualdade $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, as duas maneiras de colocar os parênteses na expressão $A \cap B \cap C$ conduzem ambas ao mesmo resultado, e daí a *convenção* de indicar-se o conjunto $(A \cap B) \cap C$ ou $A \cap (B \cap B)$ por $A \cap B \cap C$, sem os parênteses, isto é, escreve-se:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

5. INTERSEÇÃO DE VÁRIOS CONJUNTOS

A noção de interseção, definida para *dois* conjuntos, estende-se de maneira natural a qualquer número finito $n > 2$ de conjuntos.

Definição — Chama-se *interseção dos n conjuntos* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ao conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a todos esses *n* conjuntos.

Representa-se esse conjunto pelas notações:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \quad \text{ou} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Portanto, simbolicamente:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_1 \text{ e } x \in A_2 \text{ e } \ldots \text{ e } x \in A_n\}$$

ou seja:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid (\forall i)\ (i = 1, 2, \ldots, n)\ (x \in A_i)\}$$

De modo geral, a *interseção de vários conjuntos* é o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a todos os conjuntos considerados.

Exemplo — Sejam os n conjuntos:

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$
$$A_2 = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

Temos:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

6. INTERSEÇÃO DE UMA COLEÇÃO DE PARTES DE UM CONJUNTO

Consideremos um conjunto E e seja F uma *coleção de partes de* E, isto é, seja F uma *parte* de P(E).

Definição — Chama-se *interseção da coleção* F ou apenas *interseção de* F, ao conjunto de todos os elementos x de E que possuem a propriedade: $x \in X$ para todo $X \in F$.

Em outros termos, a interseção de F é o conjunto dos elementos x de E que pertencem a *todas* as partes que constituem a coleção F.

Representa-se esta interseção pelas seguintes notações:

$$\bigcap_{X \in F} X \quad \text{ou} \quad \cap \{X \mid X \in F\}$$

Portanto, simbolicamente:

$$\bigcap_{X \in F} X = \{x \in E \mid (\forall X)\ (X \in F \Longrightarrow x \in X\}$$

Exemplo: — Seja $E = \{a, b, c, d, e\}$ e $F = \{K, L, M\}$, sendo

$$K = \{a, b, d\}$$
$$L = \{a, c, d\}$$
$$M = \{d, e\}$$

Temos:

$$\bigcap_{X \in F} X = \{d\}.$$

EXERCÍCIOS

1. Calcular:

a) $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 5\}$

b) $\{1, 3\} \cap \{5, 7, 6\}$

c) $\{a, b, c\} \cap \{b, d, e\}$

d) $\mathbf{R}_+ \cap \mathbf{R}_-$

2. Dados os conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ $C = \{3, 4, 5, 6\}$

calcular:

a) $A \cap B$ $A \cap C$ $B \cap C$

b) $(A \cap B) \cap C$ e $A \cap (B \cap C)$

3. Dados os conjuntos:

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $A = \{1, 2, 4\}$ $B = \{2, 4, 5\}$

calcular: $A \cap B$, $A \cap B'$, $A' \cap B$, $(A \cap B)'$ e $A' \cap B'$

4. Dados os conjuntos:

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$Y = \{1, 2, 3\}$ $Z = \{4, 6, 8\}$

calcular:

a) $X \cap Y$, $X \cap Z$, $Y \cap Z$

b) $X' \cap Y'$, $X' \cap Z'$, $Y' \cap Z'$

c) $(X \cap Y)'$, $(X \cap Z)'$, $(Y \cap Z)'$

d) $X \cap (Y \cap Z)$ e $(X \cap Y) \cap (X \cap Z)$

5. Calcular:

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant -1\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid -3 < x < 2\}$

b) $\{x \in \mathbf{R} \mid -3 < x \leqslant 1\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x > 2\}$

c) $\{x \in \mathbf{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x < 3\}$

6. Calcular, dando o resultado com a notação de intervalo:

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \leqslant 4\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x \in [-1, 2]\}$

b) $\{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x \leqslant 3\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid -5 < x \leqslant 1\}$

c) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^3 > 1\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x^3 < 8\}$

7. Achar os pares de conjuntos disjuntos entre os seguintes conjuntos:

$A = \{1, 3, 4\}$, . $B = \{0, 1, 2, 3\}$, $C = \{4, 5, 6\}$,

$D = \{5, 6, 7\}$, $E = \{2, 4, 6, 8\}$

8. Construir os diagramas de VENN dos três conjuntos não vazios A, B e C tais que:

a) $A \subset B$, $C \subset B$, $A \cap C = \phi$

b) $A \subset B$, $C \not\subset B$, $A \cap C \neq \phi$

c) $A \subset C$, $A \neq C$, $B \cap C = \phi$

d) $A \subset (B \cap C)$, $B \subset C$, $C \neq B$, $A \neq C$

9. Determinar os elementos dos conjuntos A, B e E, sabendo que A e B são partes de E tais que:

$A \cap B = \{b, c\}$, $C_E A = \{d, e, f\}$, $C_E B = \{a, e, f\}$

10. Se $A \subset C$ e $B \subset C$, então $A \cap B \subset C$. Provar.

11. Demonstrar: $A \subset B$ e $C \subset D \Longrightarrow A \cap C \subset B \cap D$.

12. Demonstrar:

a) $A \cap B = \phi \Longrightarrow A \cap B' = A$

b) $A' \subset B' \Longleftrightarrow A \cap B = B$

13. Demonstrar que $E \cap F = \phi$ se e somente se $\mathbf{P}(E) \cap \mathbf{P}(F) = \{\phi\}$.

14. Demonstrar: $\mathbf{P}(E \cap F) = \mathbf{P}(E) \cap \mathbf{P}(F)$.

15. Sendo *a* e *b* dois números naturais quaisquer, determinar a interseção dos conjuntos:

$$M(a) = \{a, 2a, 3a, 4a, \ldots\} \quad e \quad M(b) = \{b, 2b, 3b, 4b, \ldots\}$$

16. Se $A \cap B = A$ e $A \cap C \neq \phi$, então $B \cap C \neq \phi$. Provar.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. a) $\{1\}$; b) ϕ ; c) $\{b\}$; d) $\{0\}$

2. a) $A \cap B = \{2, 4\}$; $A \cap C = \{3, 4\}$; $B \cap C = \{4, 6\}$
   b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = \{4\}$

3. $A \cap B = \{2, 4\}$; $A \cap B' = \{1\}$; $A' \cap B = \{5\}$; $(A \cap B)' = \{1, 3, 5\}$
   $A' \cap B' = \{3\}$

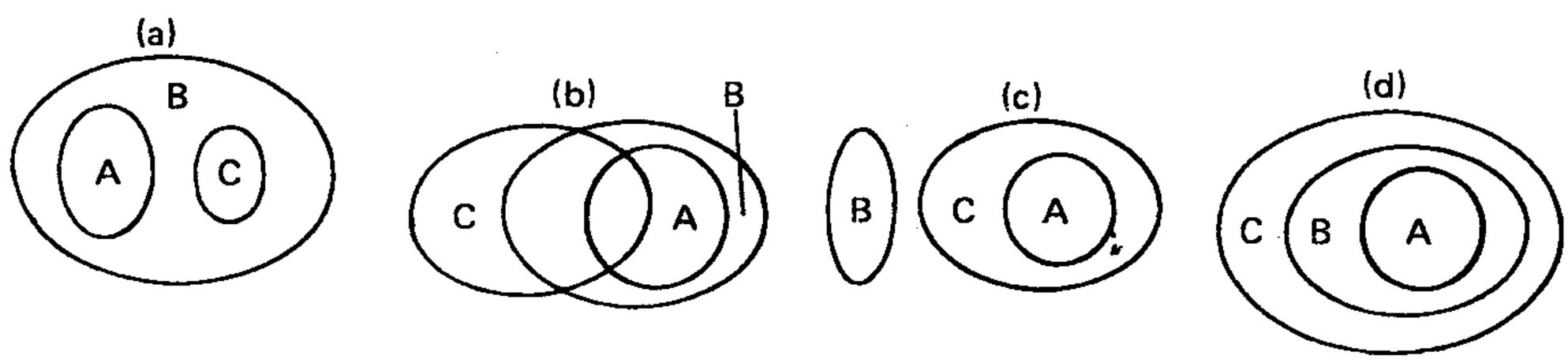
4. a) $X \cap Y = \{1, 2, 3\}$; $X \cap Z = \{4\}$; $Y \cap Z = \phi$
   b) $X' \cap Y' = \{6, 7, 8\}$; $X' \cap Z' = \{7\}$; $Y' \cap Z' = \{5, 7\}$
   c) $(X \cap Y)' = \{4, 5, 6, 7, 8\}$; $(X \cap Z)' = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$; $(Y \cap Z)' = U$
   d) $X \cap (Y \cap Z) = \phi$; $(X \cap Y) \cap (X \cap Z) = \phi$

5. a) $[-1, 2[$; b) ϕ ; c) $]-2, 0]$

6. a) $[-1, 2]$; b) $]-2, 1]$; c) $]1, 2[$

7. A e D , B e C , B e D

8.



9. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$, $E = \{a, b, c, d, e, f\}$

15. $M(a) \cap M(b) = \{m, 2m, 3m, 4m, \ldots\}$, sendo $m = mmc(a, b)$.

CAPÍTULO 6

REUNIÃO DE CONJUNTOS

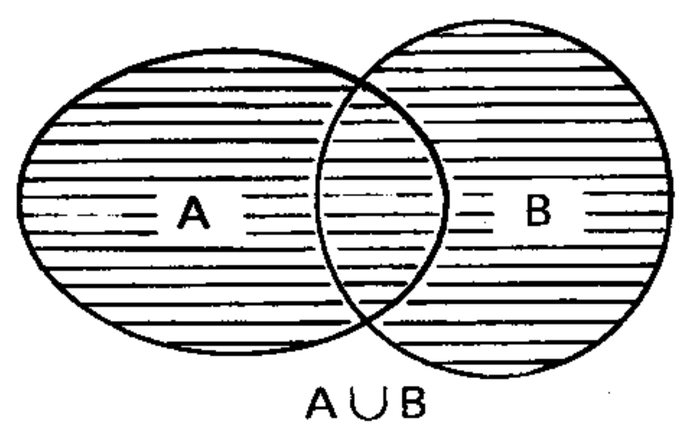
1. REUNIÃO DE DOIS CONJUNTOS

Definição — Chama-se *reunião* (ou *união*) de dois conjuntos A e B ao conjunto de todos os elementos que pertencem a A ou a B.

Esse conjunto indica-se pela notação: $A \cup B$, que se lê: "A reunião B" ou, abreviadamente, "A u B".

Simbolicamente, temos:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}$$



$A \cup B$

Portanto:

$$x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

isto é:

$$x \in A \cup B \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{seja } x \in A \text{ e } x \notin B \\ \text{seja } x \notin A \text{ e } x \in B \\ \text{seja } x \in A \text{ e } x \in B \end{cases}$$

Se os conjuntos A e B não forem disjuntos, os seus elementos comuns figuram uma só vez em $A \cup B$.

Também se chama *reunião* à própria operação binaria que, aplicada aos conjuntos A e B, dá como resultado $A \cup B$.

Exemplos:

1) $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2) $\mathbf{N} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$, $\quad \mathbf{Z} \cup \mathbf{Q} = \mathbf{Q}$, $\quad \mathbf{Q} \cup \mathbf{R} = \mathbf{R}$

3) $\mathbf{N} \cup \mathbf{Z}_- = \mathbf{Z}$, $\quad \mathbf{N} \cup \mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}^*$, $\quad \mathbf{Z}_- \cup \mathbf{Z}_+ = \mathbf{Z}$

4) $\{1, 2\} \cup \{\{1, 2\}\} = \{1, 2, \{1, 2\}\}$

5) Sejam os conjuntos:

$A = \{ x \in \mathbf{N} \mid x < 5 \}$, $\quad B = \{ y \in \mathbf{N} \mid 10 < y < 13 \}$

Temos:

$$A \cup B = \{ z \in \mathbf{N} \mid z < 5 \text{ ou } 10 < z < 13 \} =$$
$$= \{ 1, 2, 3, 4, 11, 12 \}$$

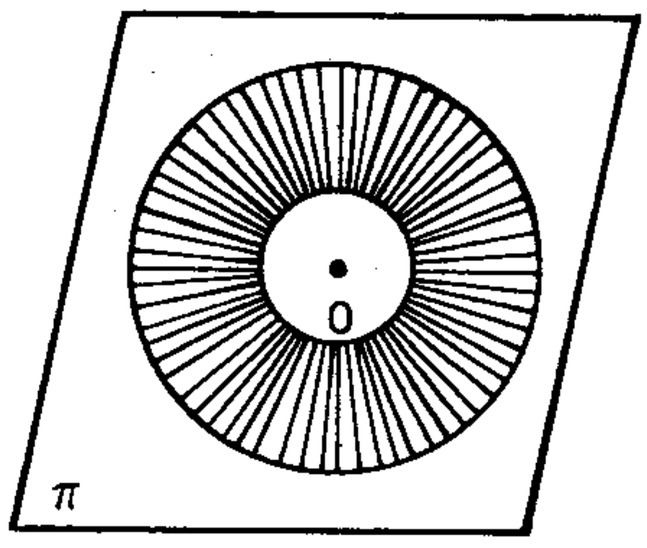
6) Sejam os conjuntos:

$$E = \{ x \in \mathbf{Z}_+ \mid x \text{ termina por } 0 \}$$
$$F = \{ x \in \mathbf{Z}_+ \mid x \text{ termina por } 5 \}$$

Temos:

$$E \cup F = \{ x \in \mathbf{Z}_+ \mid x \text{ termina por } 0 \text{ ou por } 5 \} =$$
$$= \{ x \in \mathbf{Z}_+ \mid x \text{ é divisível por } 5 \} =$$
$$= \{ 0, 5, 10, 15, 20, \ldots \}$$

7) Seja A conjunto dos pontos de um plano π cuja distância a um ponto fixo 0 deste plano é inferior ou igual a 5cm e seja B o conjunto dos pontos do plano π cuja distância ao mesmo ponto 0 é igual ou superior a 2cm. Então, $A \cup B$ é o plano π, enquanto que $A \cap B$ é a *coroa circular* delimitada pelas duas circunferências de centro 0 (concêntricas) e de raios 2cm e 5cm.



2. PROPRIEDADES DA INCLUSÃO E DA REUNIÃO

(P_1) $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$

Dem.: — Com efeito:

$$x \in A \Longrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \Longleftrightarrow x \in A \cup B \quad \therefore \quad A \subset A \cup B$$
$$x \in B \Longrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \Longleftrightarrow x \in A \cup B \quad \therefore \quad B \subset A \cup B$$

Conclusão: A reunião de dois conjuntos contém cada um dos conjuntos.

(P_2) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$

Dem.: — Suponhamos $A \subset B$. Então:

$$x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \Longrightarrow x \in B \quad \therefore \quad A \cup B \subset B$$

E como $B \subset A \cup B$ (Propriedade P_1), segue-se que $A \cup B = B$.

Suponhamos, agora, $A \cup B = B$. Temos $A \subset A \cup B$ (Propriedade P_1) e, portanto, $A \subset B$.

Conclusão: Um conjunto está contido num outro se e somente se a reunião de ambos coincide com o segundo conjunto.

(P_3) $A \subset C$ e $B \subset C \Longleftrightarrow A \cup B \subset C$

Dem.: — Suponhamos $A \subset C$ e $B \subset C$. Então:

$$x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \Longrightarrow x \in C \text{ ou}$$
$$x \in C \Longrightarrow x \in C \quad \therefore \quad A \cup B \subset C$$

Suponhamos, agora, $A \cup B \subset C$. Então, à vista da Propriedade P_1:

$$A \subset A \cup B \text{ e } A \cup B \subset C \Longrightarrow A \subset C$$
$$B \subset A \cup B \text{ e } A \cup B \subset C \Longrightarrow B \subset C$$

Conclusão: Dois conjuntos estão contidos num terceiro se e somente se a reunião dos dois primeiros está contida no terceiro.

(P_4) $A \subset B \Longrightarrow A \cup C \subset B \cup C$

Dem.: — Com efeito:

$$x \in A \cup C \Longleftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in C \Longrightarrow x \in B \text{ ou}$$
$$x \in C \Longrightarrow x \in B \cup C \quad \therefore \quad A \cup C \subset B \cup C$$

Conclusão: Se um conjunto está contido num outro, então a reunião do primeiro com um terceiro conjunto está contida na reunião do segundo com o terceiro conjunto.

3. PROPRIEDADES DA REUNIÃO

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer num universo U.

(P_1) *Reunião com o conjunto vazio:* $\phi \cup A = A$

Dem.: — Com efeito, $\phi \subset A$ e, portanto, $\phi \cup A = A$.

(P_2) *Reunião com o universo:* $A \cup U = U$

Dem.: — Com efeito, $A \subset U$ e, portanto, $A \cup U = U$.

(P_3) *Reunião com o complementar:* $A \cup A' = U$

Dem.: — Com efeito:

i) $x \in A \cup A' \Longrightarrow x \in U \quad \therefore \quad A \cup A' \subset U$

ii) $x \in U \Longrightarrow x \in A$ ou $x \in A' \Longrightarrow x \in A \cup A' \quad \therefore \quad U \subset A \cup A'$

Das inclusões (i) e (ii) resulta: $A \cup A' = U$.

(P_4) *Idempotente:* $A \cup A = A$.

Dem.: — Com efeito, $A \subset A$ e, portanto, $A \cup A = A$.

(P_5) *Comutativa:* $A \cup B = B \cup A$

Dem.: — Com efeito:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} = \{x \mid x \in B \text{ ou } x \in A\} = B \cup A$

(P_6) *Associativa:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Dem.: — Com efeito:

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= \{x \mid x \in A \cup B \text{ ou } x \in C\} = \\ &= \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \text{ ou } x \in C\} = \\ &= \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \cup C\} = A \cup (B \cup C)\end{aligned}$$

NOTA — Segundo a igualdade $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, as duas maneiras de colocar os parênteses na expressão $A \cup B \cup C$ conduzem ambas ao mesmo resultado, e daí a *convenção* de indicar-se o conjunto $(A \cup B) \cup C$ ou $A \cup (B \cup C)$ por $A \cup B \cup C$, sem os parênteses, isto é, escreve-se:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

4. PROPRIEDADES DA INTERSEÇÃO E DA REUNIÃO

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer num universo U.

(P_1) *Leis de absorção:* $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$

Dem.: — Com efeito:

$$A \subset A \cup B \quad \therefore \quad A \cap (A \cup B) = A \ ;$$

$$A \cap B \subset A \quad \therefore \quad A \cup (A \cap B) = A$$

Estas fórmulas são denominadas "leis de absorção" porque na passagem do 1º para o 2º membro há "desaparição" do conjunto B.

(P_2) *Distributividade da interseção em relação à reunião:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Dem.: — Com efeito:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B \cup C\} = \\ &= \{x \mid x \in A \text{ e } (x \in B \text{ ou } x \in C)\} = \\ &= \{x \mid (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } x \in C)\} = \\ &= \{x \mid x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C\} = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

(P_3) *Distributividade da reunião em relação à interseção:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Dem.: — Com efeito:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \cap C\} = \\ &= \{x \mid x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ e } x \in C)\} = \\ &= \{x \mid (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ e } (x \in A \text{ ou } x \in C)\} = \\ &= \{x \mid x \in A \cup B \text{ e } x \in A \cup C\} = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

(P_4) *Leis de DE MORGAN:* $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$$\begin{aligned} (A \cap B)' &= \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A \cap B\} = \{x \mid x \in U \text{ e } (x \notin A \text{ ou } x \notin B)\} = \\ &= \{x \mid (x \in U \text{ e } x \notin A) \text{ ou } (x \in U \text{ e } x \notin B)\} = \\ &= \{x \mid x \in A' \text{ ou } x \in B'\} = A' \cup B' ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \cup B)' &= \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A \cup B\} = \{x \mid x \in U \text{ e } (x \notin A \text{ e } x \notin B)\} = \\ &= \{x \mid (x \in U \text{ e } x \notin A) \text{ e } (x \in U \text{ e } x \notin B)\} = \\ &= \{x \mid x \in A' \text{ e } x \in B'\} = A' \cap B' \end{aligned}$$

As leis de DE MORGAN (1806-1871) ensinam: (i) O complementar da interseção é igual à reunião dos complementares; (ii) O complementar da reunião é igual à interseção dos complementares.

Em outros termos, a complementação transforma a interseção na reunião dos complementares e a reunião na interseção dos complementares.

5. REUNIÃO DE VÁRIOS CONJUNTOS

A noção de reunião, definida para *dois* conjuntos, estende-se de maneira natural a qualquer número finito $n > 2$ de conjuntos.

Definição — Chama-se *reunião dos n conjuntos* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ao conjunto dos elementos que pertencem a, pelo menos, um desses *n* conjuntos.

Representa-se esse conjunto pelas notações:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \quad \text{ou} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Portanto, simbolicamente:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_1 \text{ ou } x \in A_2 \text{ ou } \ldots \text{ ou } x \in A_n\}$$

ou seja:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid (\exists i)\ (i = 1, 2, \ldots, n)\ (x \in A_i)\}$$

De modo geral, a *reunião de vários conjuntos* é o conjunto dos elementos que pertencem a, pelo menos, um dos conjuntos considerados.

Exemplos:

1) Sejam os n conjuntos:

$$A_1 = \{1, 2\}, \quad A_2 = \{2, 3\}, \ldots, \quad A_n = \{n, n+1\}$$

Temos:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1\}$$

2) As retas são conjuntos de pontos. A *reunião* de todas as retas r que passam por um ponto P e são paralelas a um plano π é o plano que passa por P e é paralelo a π. A *interseção* das mesmas retas é $\{P\}$.

3) A *reunião* de todas as retas que são perpendiculares a um plano e o interceptam em pontos de uma circunferência é uma superfície cilíndrica de revolução. A *interseção* das mesmas retas é o conjunto vazio.

4) A *reunião* de todos os quadrados de um plano é o próprio plano. A *interseção* desses quadrados é o conjunto vazio.

6. REUNIÃO DE UMA COLEÇÃO DE PARTES DE UM CONJUNTO

Consideremos um conjunto E e seja F uma *coleção de partes de* E, isto é, seja F uma *parte* de **P**(E).

Definição — Chama-se *reunião da coleção* F ou apenas *reunião de* F ao conjunto de todos os elementos x de E que possuem a propriedade: existe $X \in F$ tal que $x \in X$.

Em outros termos, a *reunião de* F é o conjunto de todos os elementos x de E que pertencem a, pelo menos, uma das partes que constituem a coleção F.

Representa-se esta reunião pelas seguintes notações:

$$\bigcup_{X \in F} X \quad \text{ou} \quad \bigcup \{ X \mid X \in F \}$$

Portanto, simbolicamente:

$$\bigcup_{X \in F} X = \{ x \in E \mid (\exists X)\ (X \in F \ \text{ e } \ x \in X) \}$$

Exemplo — Seja $E = \{a, b, c, d, e\}$ e $F = \{K, L, M\}$, sendo

$$K = \{a, b, d\}, \qquad L = \{a, c, d\}, \qquad M = \{c, d\}$$

Temos:

$$\bigcup_{X \in F} X = \{a, b, c, d\}.$$

7. PRINCÍPIO DE DUALIDADE

As propriedades das operações de reunião, interseção e complementação e suas conseqüências constituem a chamada *Álgebra dos Conjuntos*. Pelos enunciados dessas propriedades imediatamente se reconhece a presença de uma *dualidade* que pode enunciar-se em termos gerais do seguinte modo:

De toda propriedade relativa a subconjuntos de um mesmo conjunto-universo U *em que intervenham, no todo ou em partes, as operações de reunião, interseção, complementação e as relações* = *(igualdade),* $\subset$ *ou* $\supset$ *(inclusão), resulta outra propriedade, conservando-se o sinal* = *e trocando-se entre si os símbolos* $\cup$ e $\cap$, $\subset$ e $\supset$, ϕ *e* U.

Duas propriedades que se podem obter uma da outra por este *princípio de dualidade* dizem-se *duais.*

Assim, p. ex., a *dual* de

$$(A \cup \phi) \cap (U \cup B) = A \qquad \text{é} \qquad (A \cap U) \cup (\phi \cap B) = A$$

8. SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSÕES

As propriedades das operações sobre conjuntos permitem *simplificar* expressões polinômias de conjuntos. Seja, exemplificando, simplificar as expressões:

1) $A \cap B \cap A' = (A \cap A') \cap B = \phi \cap B = \phi$

2) $A \cup (A' \cup \phi) = A \cup A' = U$

3) $(A \cup B) \cap B' = (A \cap B') \cup (B \cap B') = (A \cap B') \cup \phi = A \cap B'$

4) $(A \cap B) \cup (A' \cap B) = (A \cup A') \cap B = U \cap B = B$

5) $(A \cup B)' \cup (A' \cap B) = (A' \cap B') \cup (A' \cap B) = A' \cap (B' \cup B) = A' \cap U = A'$

6) $[(A \cap B) \cup (A \cap B')] \cap (A' \cup B) = [A \cap (B \cup B')] \cap (A' \cup B) =$
$= (A \cap U) \cap (A' \cup B) = A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) =$
$= \phi \cup (A \cap B) = A \cap B$

E X E R C Í C I O S

1. Calcular:

a) $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}$

b) $\{1, 3, 5\} \cup \{2, 4\}$

c) $\{a, b, c, d\} \cup \{b, c\}$

d) $\mathbf{R}_+^* \cup \mathbf{R}_-^*$

2. Dados os conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$

calcular:

a) $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$

b) $(A \cup B) \cup C$ e $A \cup (B \cup C)$

3. Dados os conjuntos:

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 4, 5\}$

calcular: $A \cup B$, $A \cup B'$, $A' \cup B$, $(A \cup B)'$, e $A' \cup B'$.

4. Calcular, dando o resultado com a notação de intervalo:

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x < 2\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 0\}$

b) $\{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x \leqslant 3\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x < 1\}$

c) $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 3\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$

5. Determinar os elementos dos conjuntos A, B e E, sabendo que A e B são partes de E tais que:

a) $A \cup B = \{1, 3, 8, 9\}$, $C_E A = \{4, 6, 9\}$, $C_E B = \{3, 4, 6\}$

b) $A \cup B = \{1, 5, 6, 9, 13, 14\}$, $C_E A = \{2, 5, 9, 13, 18, 20\}$

$C_E B = \{2, 6, 18, 20\}$

6. Determinar os elementos dos conjuntos X, Y e Z, sabendo:

$X \cap Y = \{2, 4\}$, $X \cup Y = \{2, 3, 4, 5\}$

$X \cap Z = \{2, 3\}$, $X \cup Z = \{1, 2, 3, 4\}$

7. Dados os conjuntos:

$A = \{1, 3, 5, 7\}, \quad B = \{5, 7, 9\}, \quad C = \{1, 3, 9\}$

determinar os elementos do conjunto X tal que:

$$A \cup X = A, \quad B \cup X = B, \quad C \cup X = A \cup B$$

8. Determinar os elementos dos conjuntos A, B e E, sabendo que A, B são partes de E tais que:

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad A \cap B = \{d, e\}, \quad C_E A = \{f, g, h, i\}$

9. Determinar os elementos dos conjuntos A, B, C e E, sabendo que A, B e C são partes de E tais que:

$C_E(A \cup B \cup C) = \{1, 8, 12\}, \quad B \cap C = \phi, \quad A \cap C = \{5\}, \quad A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\},$

$$A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 10, 11\}, \quad C_E B = \{1, 2, 5, 6, 8, 10, 11, 12\}$$

10. Verificar as igualdades:

a) $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

b) $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$

11. Simplificar as expressões:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup B')$

b) $(A \cap B) \cup (A \cap B')$

c) $(U \cup B) \cap (A \cup \phi)$

d) $(\phi \cap B) \cup (A \cap U)$

12. Verificar as igualdades:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B) = A \cap B$

b) $(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B') = A \cap B'$

c) $(A \cup B) \cap (A' \cup B) \cap (A' \cup B') = A' \cap B$

d) $(A \cup B') \cap (A' \cup B) \cap (A' \cup B') = A' \cap B'$

13. Simplificar as expressões:

a) $(A \cap (A' \cup B))' \cup B$

b) $(A' \cup B)' \cup (A' \cup B')'$

c) $A \cap ((A \cap B') \cup (A' \cap B))$

d) $(A \cup B) \cap (A' \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B')$

e) $(A \cap B) \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B')$

f) $(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup B' \cup C'$

14. Demonstrar as fórmulas:

a) $(A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (C \cup D)$

b) $(A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (C \cap D)$

15. Verificar as igualdades:

a) $(A \cap C) \cap (B \cup C) = A \cap C$

b) $(A \cap C) \cup (B \cup C) = B \cup C$

16. Verificar as igualdades:

a) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A' \cup B')' = A \cap (B \cup C)$

b) $(A \cup (A' \cap B)) \cup (C \cap (A' \cap B')) = A \cup B \cup C$

17. Simplificar as expressões:

a) $[(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B)] \cap B$

b) $[(A \cup B) \cap (A \cup B')] \cap (A \cup B)$

c) $[(A \cap B) \cup (A' \cup B)] \cup [(A \cap B) \cup (A \cup B')]$

d) $[(A' \cup B) \cap (A' \cup B')] \cup (A' \cap C)$

e) $(A \cup B) \cup [(C \cup D) \cap (A \cup B)]$

f) $[(A \cap B) \cap (C \cup D)] \cup (A \cap B) \cup B$

g) $[(A \cup B) \cap (C \cup D)] \cup (A \cup B) \cup A$

18. Simplificar as expressões:

a) $(A \cap B \cap C \cap D') \cup (A' \cap C) \cup (B' \cap C) \cup (C \cap D)$

b) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C') \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C')$

19. Se $A \subset B$ e $C \subset D$, então $A \cup C \subset B \cup D$. Provar.

20. Demonstrar: $A \subset B \subset C \Longleftrightarrow A \cup B = B \cap C$.

21. Demonstrar:

a) $A \cup B = U \Longrightarrow A' \subset B$

b) $A \cap B = \phi \Longrightarrow A \cup B' = B'$

c) $A' \subset B' \Longleftrightarrow A \cup B = A$

d) $A \cup B = \phi \Longleftrightarrow A = \phi$ e $B = \phi$

e) $A \cup B = A \cap B \Longleftrightarrow A = B$

22. Demonstrar: $\mathbf{P}(E) \cup \mathbf{P}(F) \subset \mathbf{P}(E \cup F)$.

23. Escrever a *dual* de cada uma das seguintes relações:

a) $(A \cap U) \cap (\phi \cup A') = \phi$

b) $(A \cup U) \cap (A \cap \phi) = \phi$

24. Os conjuntos A, B, C e D são tais que $\{A, B\} = \{C, D\}$. Demonstrar que $A \cap B = C \cap D$ e $A \cup B = C \cup D$.

25. Demonstrar: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;
   b) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;
   c) $\{a, b, c, d\}$;
   d) $\mathbf{R}^*$

2. a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$;
   $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
   $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$;
   b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

3. $A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$;
   $A \cup B' = \{1, 2, 3, 4\}$;
   $A' \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
   $(A \cup B)' = \{3\}$;
   $A' \cup B' = \{1, 3, 5\}$

4. a) $]\longleftarrow, \longrightarrow[$ b) $]\longleftarrow, 3]$ c) $[-1, 3]$

5. a) $A = \{1, 3, 8\}$, $B = \{1, 8, 9\}$, $E = \{1, 3, 4, 6, 8, 9\}$
   b) $A = \{1, 6, 14\}$, $B = \{1, 5, 9, 13, 14\}$,
   $E = \{1, 2, 5, 6, 9, 13, 14, 18, 20\}$

6. $X = \{2, 3, 4\}$, $Y = \{2, 4, 5\}$, $Z = \{1, 2, 3\}$

7. $X = \{5, 7\}$

8. $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, e, f\}$, $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

9. $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 7, 9\}$,
$C = \{5, 6, 10, 11\}$, $E = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$

11. a) A
b) A
c) A

13. a) U
b) A
c) $A \cap B'$
d) ϕ
e) U
f) U

17. a) B
b) A
c) U
d) A'
e) $A \cup B$
f) B
g) $A \cup B$

23. a) $(A \cup \phi) \cup (U \cap A') = U$
b) $(A \cap \phi) \cup (A \cup U) = U$

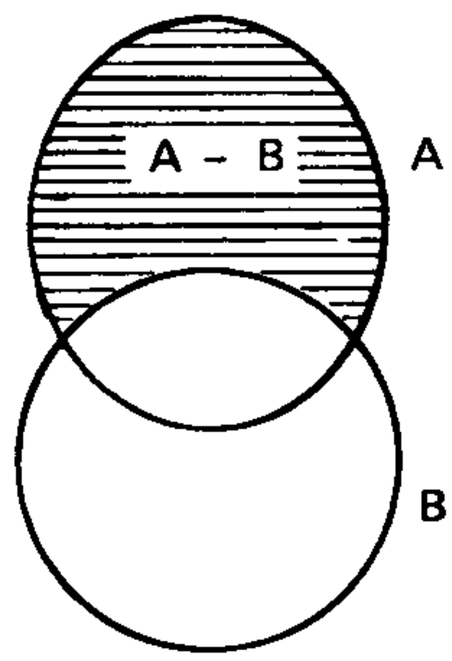
CAPÍTULO 7

DIFERENÇA DE CONJUNTOS

1. DIFERENÇA DE DOIS CONJUNTOS

Definição — Chama-se *diferença* entre os conjuntos A e B ao conjunto de todos os elementos de A que não pertencem a B.

Esse conjunto indica-se pela notação: A - B, que se lê: "A menos B" ou "diferença entre A e B".



Simbolicamente, temos:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Portanto:

$$x \in A - B \Longleftrightarrow x \in A \text{ e } x \notin B$$

Observe-se que $x \in A - B \Longrightarrow x \in A$ e isto significa que a diferença entre A e B é um subconjunto de A, isto é, $A - B \subset A$.

No caso particular em que B é um subconjunto de $A (B \subset A)$, temos $A - B = C_A B$, isto é, a diferença entre A e B coincide com o complementar de B em relação a A. Simbolicamente:

$$B \subset A \Longrightarrow A - B = C_A B$$

Importa ainda notar que, se A e B são duas *partes* quaisquer de um mesmo conjunto E, então a diferença A - B exprime-se por meio da interseção e da complementação, pois temos:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\} = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in C_E B\}$$

isto é:

$$A - B = A \cap C_E B$$

Em particular, se E = U, então: $A - B = A \cap B'$.

Também se chama *diferença* a própria operação binária que, aplicada aos conjuntos A e B, dá como resultado A - B.

Exemplos:

1) $\{1, 2, 3, 4, 5\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3\}$

2) $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} - \{0\}$, $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} - \{0\}$, $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$

3) Sejam os conjuntos:

$A = \{1, 3, 4, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 4, 5\}$, $C = \{3, 5, 8, 9\}$

Temos:

$$A - B = \{7\} , \quad B - A = \phi$$

$$B - C = \{1, 4\} , \quad C - B = \{8, 9\}$$

Observe-se que $A - B \neq B - A$, $B - C \neq C - B$, isto é, *a diferença de conjuntos não é comutativa.*

4) Sejam os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 5\}$$

$$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ é par}\}$$

Temos:

$$A - B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ termina por } 5\}$$

5) O conjunto dos triângulos menos o conjunto dos polígonos que têm pelo menos, um par de lados desiguais, é o conjunto dos triângulos eqüiláteros.

6) Sejam C e C' dois círculos concêntricos, o segundo contido no primeiro ($C' \subset C$). Então, a diferença $C - C'$ é uma *coroa circular* sem a circunferência interna.

2. PROPRIEDADES DA DIFERENÇA

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer num universo U.

(P_1) $A - \phi = A$ e $\phi - A = \phi$

Dem.: — Com efeito:

$$A - \phi = A \cap \phi' = A \cap U = A$$

$$\phi - A = \phi \cap A' = \phi$$

(P_2) $A - U = \phi$ e $U - A = A'$

Dem.: — Com efeito:

$$A - U = A \cap U' = A \cap \phi = \phi$$

$$U - A = U \cap A' = A'$$

(P_3) $A - A = \phi$

Dem.: — Com efeito: $A - A = A \cap A' = \phi$

(P_4) $A - A' = A$

Dem.: — Com efeito: $A - A' = A \cap (A')' = A \cap A = A$

(P_5) $(A - B)' = A' \cup B$

Dem.: — Com efeito: $(A - B)' = (A \cap B')' = A' \cup (B')' = A' \cup B$

(P_6) $A - B = B' - A'$

Dem.: — Com efeito: $A - B = A \cap B' = B' \cap (A')' = B' - A'$

(P_7) i) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

ii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

Dem.: — Com efeito:

i) $(A - B) - C = (A \cap B') \cap C' = A \cap (B' \cap C') =$

$= A \cap (B \cup C)' = A - (B \cup C)$

ii) $A - (B - C) = A \cap (B \cap C')' = A \cap (B' \cup C) =$

$= (A \cap B') \cup (A \cap C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

(P_8) i) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$

ii) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

Dem.: — Com efeito:

i) $A \cup (B - C) = A \cup (B \cap C') = (A \cup B) \cap (A \cup C') =$

$= (A \cup B) \cap (C \cap A')' = (A \cup B) - (C \cap A') =$

$= (A \cup B) - (C - A)$

ii) $A \cap (B - C) = A \cap (B \cap C') = (A \cap B) \cap C' =$

$= [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C'] =$

$= (A \cap B) \cap (A' \cup C') = (A \cap B) \cap (A \cap C)' =$

$= (A \cap B) - (A \cap C)$

Observe-se que, segundo (ii), *a interseção é distributiva em relação à diferença.*

(P_9) i) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

ii) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Dem.: — Com efeito:

$$\text{i) } A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)' = A \cap (B' \cap C') =$$
$$= (A \cap B') \cap (A \cap C') =$$
$$= (A - B) \cap (A - C)$$

$$\text{ii) } A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C') =$$
$$= (A \cap B') \cup (A \cap C') =$$
$$= (A - B) \cup (A - C)$$

(P_{10}) i) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

ii) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

Dem.: — Com efeito:

$$\text{i) } (A \cup B) - C = (A \cup B) \cap C' = (A \cap C') \cup (B \cap C') =$$
$$= (A - C) \cup (B - C)$$

$$\text{ii) } (A \cap B) - C = (A \cap B) \cap C' = (A \cap C') \cap (B \cap C') =$$
$$= (A - C) \cap (B - C)$$

(P_{11}) $A - (A - B) = A \cap B$ e $(A - B) - B = A - B$

Dem.: — Com efeito:

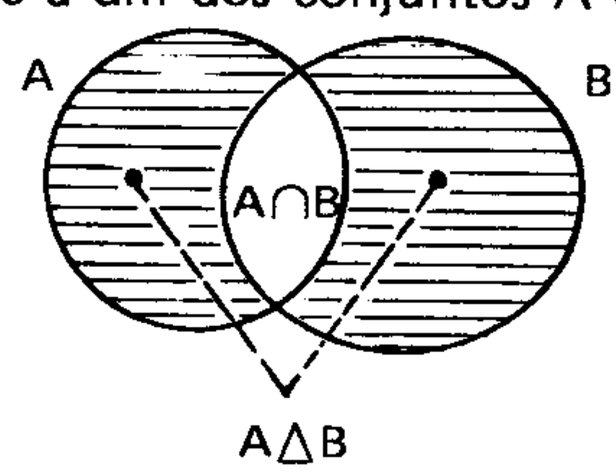
$$A - (A - B) = A \cap (A \cap B')' = A \cap (A' \cup B) =$$
$$= (A \cap A') \cup (A \cap B) =$$
$$= \phi \cup (A \cap B) = A \cap B$$

$$(A - B) - B = (A \cap B') \cap B' = A \cap (B' \cap B') = A \cap B' = A - B$$

3. DIFERENÇA SIMÉTRICA

Definição — Chama-se *diferença simétrica* dos conjuntos A e B ao conjunto de todos os elementos que pertencem a um e somente a um dos conjuntos A e B.

Esse conjunto indica-se pela notação: $A \triangle B$, que se lê: "diferença simétrica de A e B"



Simbolicamente, temos:

$$A \triangle B = \{x \mid (x \in A \text{ e } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ e } x \notin A)\}$$

Pela definição de diferença de dois conjuntos:

$$x \in A \quad e \quad x \notin B \Longrightarrow x \in A - B$$

$$x \in B \quad e \quad x \notin A \Longrightarrow x \in B - A$$

Por conseqüência:

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A - B \quad ou \quad x \in B - A\}$$

isto é:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

fórmula que exprime a diferença simétrica por meio da reunião e da diferença.

Obviamente, a diferença simétrica dos conjuntos A e B também é o conjunto de todos os elementos x que satisfazem às duas seguintes condições:

i) x pertence a A ou a B, isto é, $x \in A \cup B$;

ii) x não pertence simultaneamente a A e a B, isto é, $x \notin A \cap B$.

Portanto, simbolicamente:

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \cup B \quad e \quad x \notin A \cap B\}$$

isto é:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

fórmula que exprime a diferença simétrica por meio da reunião, interseção e diferença.

Exemplos:

1) $\{1, 2, 3, 4\} \Delta \{2, 4, 5, 7\} = \{1, 3, 5, 7\}$

2) $\{2, 4, 6\} \Delta \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{8, 10\}$

3) $\{a, b, c\} \Delta \{d, e, f\} = \{a, b, c, d, e, f\}$

4) $\mathbf{Z} \Delta \mathbf{N} = \mathbf{Z}_-$, $\mathbf{Z}_+ \Delta \mathbf{N} = \{0\}$, $\mathbf{Z}_+ \Delta \mathbf{Z}_- = \mathbf{Z}^*$

4. PROPRIEDADES DA DIFERENÇA SIMÉTRICA

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer num universo U.

(P_1) $A \Delta \phi = A$

Dem.: — Com efeito: $A \Delta \phi = (A \cup \phi) - (A \cap \phi) = A - \phi = A$

(P_2) $A \Delta U = A'$

Dem.: — Com efeito: $A \Delta U = (A \cup U) - (A \cap U) = U - A = A'$

(P_3) $A \Delta A' = U$

Dem.: — Com efeito: $A \Delta A' = (A \cup A') - (A \cap A') = U - \phi = U$

(P_4) $A \Delta A = \phi$

Dem.: — Com efeito: $A \Delta A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \phi$

(P_5) *Comutativa:* $A \Delta B = B \Delta A$

Dem.: — Com efeito: $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (B \cup A) - (B \cap A) = B \Delta A$

(P_6) $(A \Delta B)' = (A \cap B) \cup (A' \cap B')$

Dem.: — Com efeito:

$$\begin{aligned}(A \Delta B)' &= [(A - B) \cup (B - A)]' = (A - B)' \cap (B - A)' = \\ &= (A' \cup B) \cap (B' \cup A) = [(A' \cup B) \cap B'] \cup [(A' \cup B) \cap A] = \\ &= [(A' \cap B') \cup (B \cap B')] \cup [(A \cap A') \cup (A \cap B)] = \\ &= [(A' \cap B') \cup \phi] \cup [\phi \cup (A \cap B)] = (A \cap B) \cup (A' \cap B')\end{aligned}$$

(P_7) *Associativa:* $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

Dem.: — Com efeito, um elemento $x \in (A \Delta B) \Delta C$ somente nos dois seguintes casos:

I) $x \in A \Delta B$ e $x \notin C$

II) $x \notin A \Delta B$ e $x \in C$

ou seja, somente nos quatro seguintes casos:

i) $x \in A$ e $x \notin B$ e $x \notin C$

ii) $x \notin A$ e $x \in B$ e $x \notin C$

iii) $x \in A$ e $x \in B$ e $x \in C$

iv) $x \notin A$ e $x \notin B$ e $x \in C$

Assim sendo, $(A \Delta B) \Delta C$ é o conjunto de todos os elementos x para os quais são verdadeiras as três relações $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$ ou somente uma delas.

Analogamente, um elemento $x \in A \Delta (B \Delta C)$ somente nos dois seguintes casos:

I) $x \in A$ e $x \notin B \Delta C$

II) $x \notin A$ e $x \in B \Delta C$

ou seja, somente nos quatro seguintes casos:

i) $x \in A$ e $x \in B$ e $x \in C$

ii) $x \in A$ e $x \notin B$ e $x \notin C$

iii) $x \notin A$ e $x \in B$ e $x \notin C$

iv) $x \notin A$ e $x \notin B$ e $x \in C$

Assim sendo, $A \Delta (B \Delta C)$ também é o conjunto de todos os elementos x para os quais são verdadeiras as três relações $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$ ou somente uma delas.

Por conseqüência, subsiste a igualdade: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

(P_8) *Distributividade da interseção em relação à diferença simétrica:*

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

Dem.: — Com efeito:

$$\begin{aligned} A \cap (B \Delta C) &= A \cap [(B \cup C) - (B \cap C)] = \\ &= [A \cap (B \cup C)] - [A \cap (B \cap C)] = \\ &= [A \cap (B \cup C)] \cap [A' \cup (B' \cup C')] = \\ &= [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cap [(A' \cup B') \cup (A' \cup C')] = \\ &= [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cap [(A \cap B) \cap (A \cap C)]' = \\ &= [(A \cap B) \cup (A \cap C)] - [(A \cap B) \cap (A \cap C)] = \\ &= (A \cap B) \Delta (A \cap C) \end{aligned}$$

(P_9) $A \cup (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A' \cap B \cap C)$

Dem.: — Com efeito:

$$\begin{aligned} A \cup (B \Delta C) &= A \cup [(B \cup C) - (B \cap C)] = \\ &= [A \cup (B \cup C)] - [(B \cap C) - A] = \\ &= (A \cup B \cup C) - [(B \cap C) \cap A'] = \\ &= (A \cup B \cup C) - (A' \cap B \cap C) \end{aligned}$$

(P_{10}) i) $(A \Delta B) - C = (A \cap C') \Delta (B \cap C')$

ii) $A - (B \Delta C) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C')$

Dem.: — Com efeito:

i) $(A \Delta B) - C = (A \Delta B) \cap C' = (A \cap C') \Delta (B \cap C')$

ii) $A - (B \Delta C) = A \cap (B \Delta C)' = A \cap [(B \cap C) \cup (B' \cap C')] =$

$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C')$

E X E R C Í C I O S

1. Calcular:

a) $\{1, 2, 3\} - \{3, 4, 5\}$

b) $\{1, 3, 5\} - \{2, 4\}$

c) $\{a, b\} - \{a, b, c, d\}$

d) $\mathbf{R}_+ - \mathbf{R}_-$

2. Dados os conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8\}, \quad C = \{3, 4, 5, 6\}$$

calcular:

a) $A - B$, $A - C$ e $B - C$

b) $(A - B) - C$ e $A - (B - C)$

c) $(A \cup B) - C$ e $A - (B \cap C)$

3. Calcular, dando o resultado com a notação de intervalo:

a) $[-3, 1[- [-1, 2]$

b) $[-4, 2[-]\longleftarrow, 1]$

c) $[-4, 2[-]-1, 6[$

d) $]-1, 6[-]\longleftarrow, 1]$

4. Dados os conjuntos:

$$A = \{a, b, c, d\}, \quad B = \{c, d, e, f\}, \quad C = \{d, e, f, g\}$$

calcular:

a) $(A \cap B) - (B \cup C)$ e $(A \cup C) - (A \cup B)$

b) $A \cap (B - C)$ e $(A \cap B) - C$

c) $A - (B \cup C)$ e $(A - B) \cap (B - C)$

5. Demonstrar: $A - B \subset A$ e $A - B \subset A \cup B$.

6. Demonstrar:

a) $A = B \Longleftrightarrow A - B = B - A$

b) $A \subset B \Longleftrightarrow A - B = \phi$

c) $A \cap B = \phi \Longleftrightarrow A - B = A$

7. Se $A \subset B$ e $C = B - A$, então $A = B - C$. Provar.

8. Se $A \cap B = \phi$ e $A \cup B = C$, então $A = C - B$. Provar.

9. Demonstrar:

a) $(A - B) \cap B = \phi$

b) $(A - B) \cup B = A \cup B$

c) $(A \cup B) - B = A - B$

d) $(A \cap B) - B = \phi$

e) $A - (A \cap B) = A - B$

f) $A \cap (A - B) = A - B$

10. Demonstrar:

a) $(A \cap B) \cap (A - B) = (A - B) \cap (B - A) = \phi$

b) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

11. Demonstrar:

a) $(A - B) - C = (A - C) - B = (A - B) \cap (A - C) = (A - C) - (B - C)$

b) $A \cap (B - C) = (A - C) \cap B = (A \cap B) - (B \cap C) = (A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

12. Demonstrar: $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$.

13. Demonstrar: $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$.

14. Demonstrar: $P(A - B) \subset (P(A) - P(B)) \cup \{\phi\}$.

15. Dados os bonjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

calcular:

a) $A \Delta B$, $A \Delta C$, $B \Delta C$

b) $A \Delta (B \Delta C)$, $(A \cup B) \Delta (A \cup C)$, $(A \cap B) \Delta C$

16. Demonstrar:

a) $A \Delta B = A' \Delta B'$

b) $(A \Delta B)' = A \Delta B'$

c) $A - B = A \Delta (A \cap B)$

d) $(A \cap B) \cap (A \Delta B) = \phi$

e) $(A \Delta B) \Delta (A \cap B) = A \cup B$

f) $(A \cup C) \Delta (B \cup C) = (A \Delta B) - C$

17. Demonstrar: i) $A \Delta B \subset A \cup B$;

ii) $A - B \subset A \Delta B$.

18. Demonstrar: que $A \Delta B = \phi$ se e somente se $A = B$.

19. Se $A \Delta C = B \Delta C$, então $A = B$. Provar.

20. Demonstrar: $A \cup C = B \cup C$ se e somente se $A \Delta B \subset C$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. a) $\{1, 2\}$; b) $\{1, 3, 5\}$; c) ϕ ; d) $\mathbf{R}_+^*$

2. a) $A - B = \{1, 3\}$; $A - C = \{1, 2\}$; $B - C = \{2, 8\}$

   b) $(A - B) - C = \{1\}$; $A - (B - C) = \{1, 3, 4\}$

   c) $(A \cup B) - C = \{1, 2, 8\}$; $A - (B \cap C) = \{1, 2, 3\}$

3. a) $[-3, 1[$; b) $]1, 2[$; c) $[-4, -1]$; d) $]1, 6[$

4. a) $(A \cap B) - (B \cup C) = \phi$; $(A \cup C) - (A \cup B) = \{g\}$

   b) $A \cap (B - C) = \{c\}$; $(A \cap B) - C = \{c\}$

   c) $A - (B \cup C) = \{a, b\}$; $(A - B) \cap (B - C) = \phi$

15. a) $A \Delta B = \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 12\}$;
    $A \Delta C = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 12, 15\}$;
    $B \Delta C = \{2, 3, 4, 8, 9, 10, 15\}$

    b) $A \Delta (B \Delta C) = \{1, 5, 6, 7, 10, 15\}$;
    $(A \cup B) \Delta (A \cup C) = \{10, 15\}$;
    $(A \cap B) \Delta C = \{10, 12\}$

CAPÍTULO 8

PRODUTO CARTESIANO

1. DEFINIÇÃO DE PAR ORDENADO

Seja um conjunto $\{x, y\}$, cujos elementos x e y são distintos $(x \neq y)$. A este conjunto correspondem *dois pares ordenados:* (x, y) e (y, x).

Seja, agora, o conjunto $\{x, x\}$. A este conjunto corresponde *um par ordenado:* (x, x).

Definição — Dados dois elementos, x e y, chama-se *par ordenado* um terceiro elemento que se indica por (x, y), podendo ser y igual a x $(y = x)$.

O elemento x chama-se o *primeiro elemento,* ou a *primeira coordenada,* ou a *primeira projeção* do par ordenado (x, y); e o elemento y chama-se o *segundo elemento,* ou a *segunda coordenada,* ou a *segunda projeção* do par ordenado (x, y).

Representando por *u* o par ordenado (x, y) $(u = (x, y))$, escreve-se:

$$x = pr_1 u = pr_1 (x, y) \ , \quad y = pr_2 u = pr_2 (x, y)$$

Portanto:

$$x = pr_1 u \quad e \quad y = pr_2 u \Longleftrightarrow u = (x, y)$$

2. PARES ORDENADOS IGUAIS

Definição — Dois pares ordenados (x, y) e (x', y') dizem-se *iguais* se e somente se $x = x'$ e $y = y'$.

Simbolicamente, temos:

$$(x, y) = (x', y') \Longleftrightarrow x = x' \quad e \quad y = y'$$

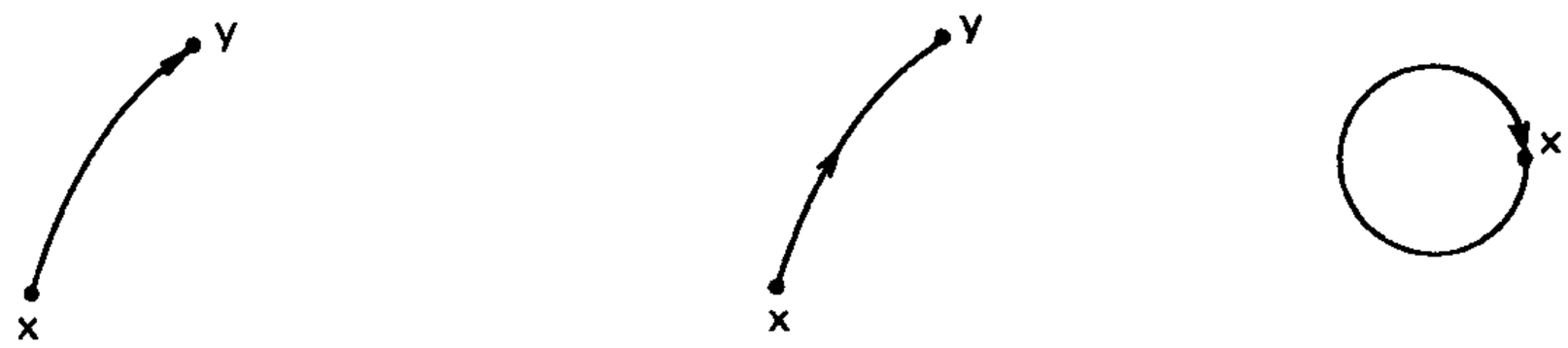
Em particular, $(x, y) = (y, x)$ se e somente se $x = y$.

Diz-se que (y, x) é o par ordenado *recíproco* do par ordenado (x, y).

Um par ordenado tal como (x, x) denomina-se par ordenado *idêntico.*

3. DIAGRAMA SAGITAL DE UM PAR ORDENADO

Um par ordenado (x, y) representa-se graficamente por uma flecha que tem por origem o primeiro elemento x e por extremidade o segundo elemento y. A figura cujos elementos são a origem e a extremidade da flecha e a própria flecha chama-se o *diagrama sagital* do par ordenado (x, y).



No caso particular de um par ordenado idêntico (x, x), o diagrama sagital é uma flecha de origem *x* e de extremidade também *x* (coincidentes), denominado *laço*.

4. PARES ORDENADOS CONSECUTIVOS

Um par ordenado *u* tem como *consecutivo* todo o par ordenado *v* cujo primeiro elemento também é o segundo elemento de *u*.

Exemplos:

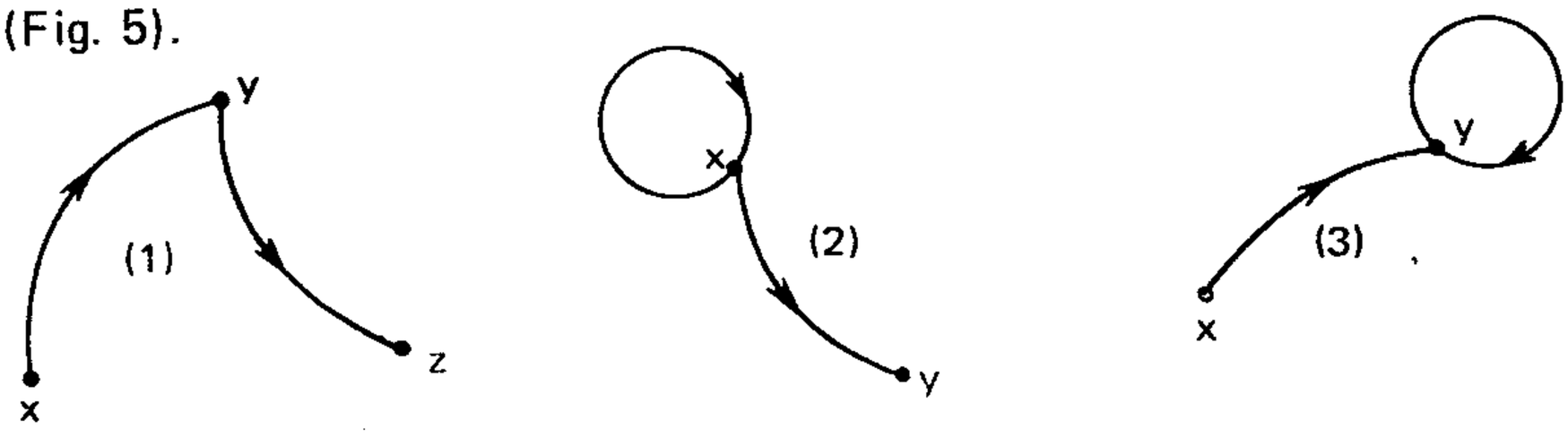
1) u = (x, y) tem por consecutivo v = (y, z) (Fig. 1).

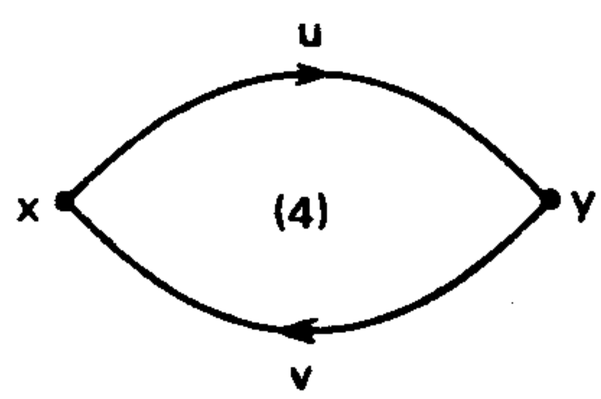
2) u = (x, x) tem por consecutivo v = (x, y) (Fig. 2).

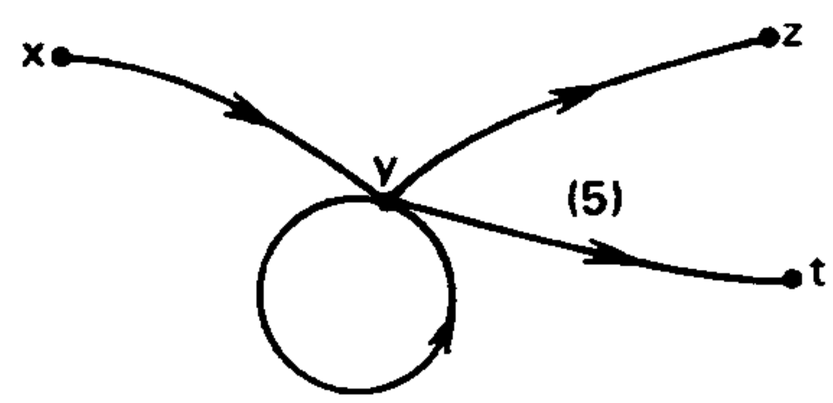
3) u = (x, y) tem por consecutivo v = (y, y) (Fig. 3).

4) u = (x, y) tem por consecutivo v = (y, x) (Fig. 4).

Observe-se que um mesmo par ordenado pode ter vários consecutivos. (Fig. 5).







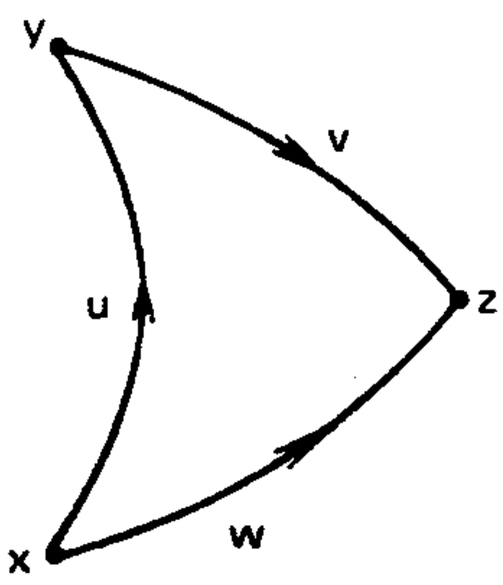
5. PAR ORDENADO COMPOSTO

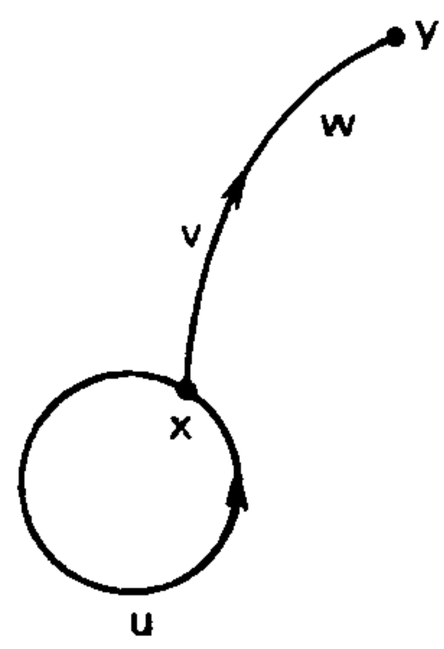
Dados dois pares ordenados consecutivos u = (x, y) e v = (y, z), diz-se que w = (x, z) é o *par ordenado composto de u e de v.*

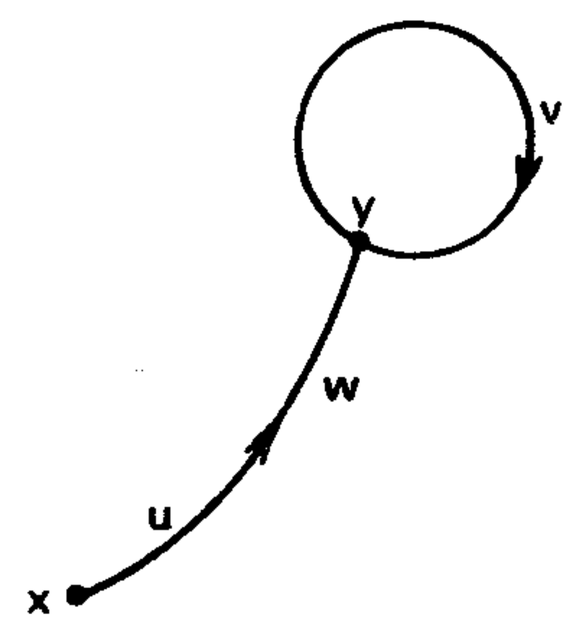
Exemplos:

1) O par ordenado composto de u = (x, x) e de v = (x, y) é w = (x, y).

2) O par ordenado composto de u = (x, y) e de v = (y, y) é w = (x, y).







6. PRODUTO CARTESIANO DE DOIS CONJUNTOS

Sejam A e B dois conjuntos não vazios.

Definição — Chama-se *produto cartesiano de* A *por* B ou apenas *produto de* A *por* B ao conjunto de todos os pares ordenados (x, y) tais que o primeiro elemento x pertence a A e o segundo elemento y pertence a B.

Este conjunto produto representa-se por A x B, que se lê: "A por B", "A vezes B" ou "A cartesiano B".

Os conjuntos A e B dizem-se *fatores* do produto cartesiano $A \times B$, sendo A o *primeiro fator* e B o *segundo fator.*

Simbolicamente, temos:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Se $B \neq A$, como

$$B \times A = \{(y, x) \mid y \in B \text{ e } x \in A\}$$

e $(x, y) \neq (y, x)$, segue-se que $A \times B \neq B \times A$, isto é, o produto cartesiano de dois conjuntos não goza da *propriedade comutativa.*

Importa notar que, se os conjuntos A e B são finitos e têm respectivamente *m* e *n* elementos, então o produto cartesiano $A \times B$ também é um conjunto finito e tem *mn* elementos, isto é, o número de elementos de $A \times B$ é igual ao produto do número de elementos de A pelo número de elementos de B:

$$n(A \times B) = n(A).n(B)$$

Exemplos:

1) Sejam os conjuntos: $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2\}$. Temos:

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$$

e

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$

Observe-se que $A \times B \neq B \times A$.

2) Sejam os conjuntos: $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{I, II\}$. Temos:

$$A \times B = \{(a, I), (a, II), (b, I), (b, II), (c, I), (c, II)\}$$

Observe-se que $n(A \times B) = 6 = 3.2 = n(A).n(B)$.

3) Sejam os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 3\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$$

Temos:

$$A \times B = \{(x, y) \mid 1 < x < 3 \text{ e } 2 \leqslant y \leqslant 5\} =$$
$$= \{(x, y) \mid x \in]1, 3[\text{ e } y \in [2, 5]\}$$

e

$$B \times A = \{(x, y) \mid 2 \leqslant x \leqslant 5 \text{ e } 1 < y < 3\} =$$
$$= \{(x, y) \mid x \in [2, 5] \text{ e } y \in]1, 3[\}$$

7. QUADRADO CARTESIANO DE UM CONJUNTO

No caso particular em que $B = A$, o produto $A \times B = B \times A = A \times A$ chama-se o *quadrado cartesiano do conjunto* A ou apenas o *quadrado do conjunto* A, e indica-se por A^2, que se lê: "A dois".

Os elementos de A^2 são, pois, todos os pares ordenados (x, y) tais que x e y pertencem a A, isto é, simbolicamente:

$$A^2 = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$$

O conjunto de todos os pares ordenados idênticos (x, x), com $x \in A$, que é uma parte de A^2, chama-se a *diagonal* do quadrado cartesiano A^2 de A e indica-se por D_A. Portanto, simbolicamente:

$$D_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$$

Se o conjunto A é finito e tem *m* elementos, o quadrado cartesiano A^2 de A também é um conjunto finito e tem m^2 elementos. Obviamente, a diagonal D_A de A também é um conjunto finito e tem *m* elementos.

Exemplos:

1) Seja o conjunto $A = \{1, 2\}$. Temos:

$$A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \quad \text{e} \quad D_A = \{(1, 1), (2, 2)\}$$

2) Seja o conjunto $A = \{a, b, c\}$. Temos:

$$A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

e

$$D_A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

Observe-se que o quadrado A^2 tem $3^2 = 9$ elementos e que a sua diagonal D_A tem 3 elementos.

NOTA — Dispondo os elementos de A^2 em forma de quadrado, temos:

$$\begin{array}{ccc} (a, a) & , (a, b) & , (a, c) \\ (b, a) & , (b, b) & , (b, c) \\ (c, a) & , (c, b) & , (c, c) \end{array}$$

Como se vê, os pares ordenados idênticos (a, a), (b, b), (c, c) estão dispostos segundo a *diagonal* do quadrado descendente da esquerda para a direita, o que justifica a denominação que se dá ao subconjunto $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ de A^2.

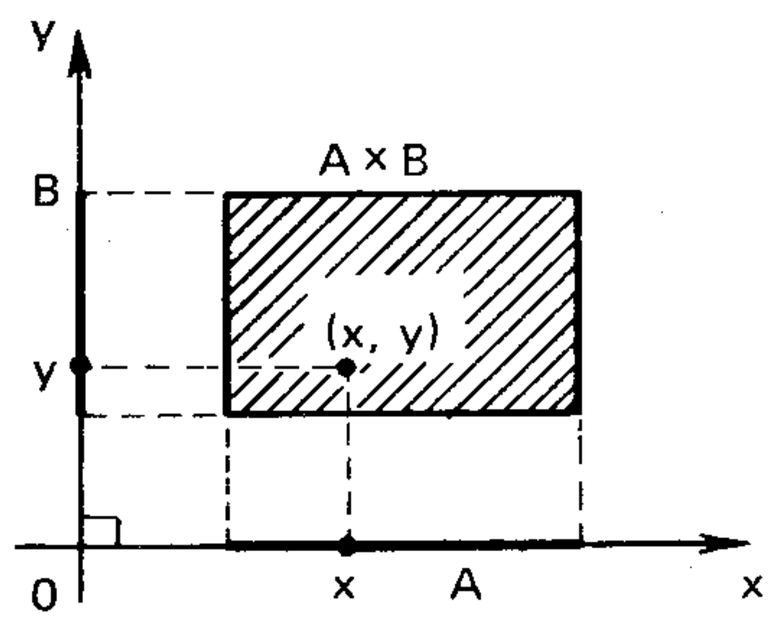
3) Seja o conjunto $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$. Temos:

$$A^2 = \{(x, y) \mid 2 \leqslant x \leqslant 5 \quad e \quad 2 \leqslant y \leqslant 5\} =$$
$$= \{(x, y) \mid x, y \in [2, 5]\}$$

8. REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DO PRODUTO CARTESIANO

O produto cartesiano A × B de dois conjuntos pode ser representado graficamente por um *diagrama cartesiano,* por uma *tabela de dupla entrada* ou por um *diagrama sagital.*

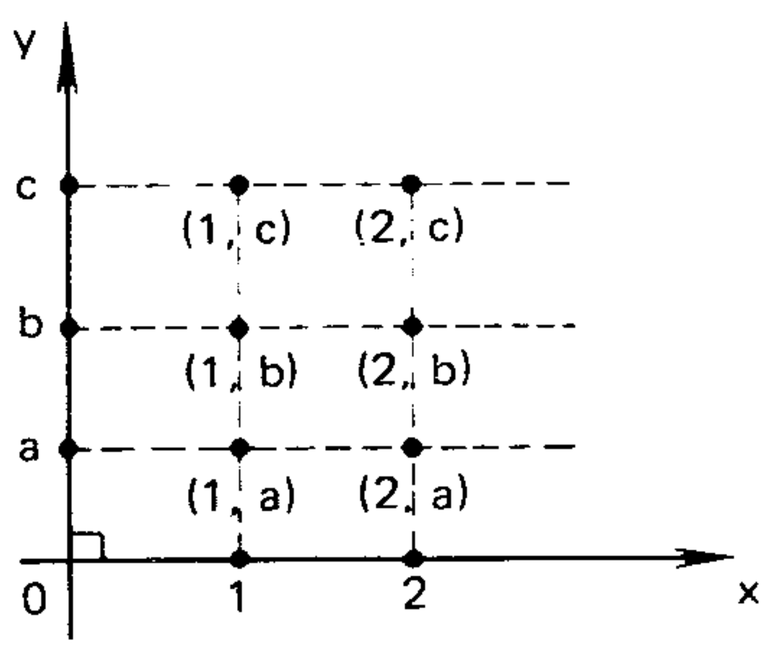
I) *Diagrama cartesiano* — Tomam-se dois eixos ortogonais, Ox e Oy, representa-se sobre o eixo horizontal Ox o conjunto A e sobre o eixo vertical Oy o conjunto B, e traçam-se depois paralelas a esses dois eixos pelos pontos que representam os elementos de A e de B. Os pontos de interseção dessas paralelas representam os pares ordenados (x, y), elementos de A × B.

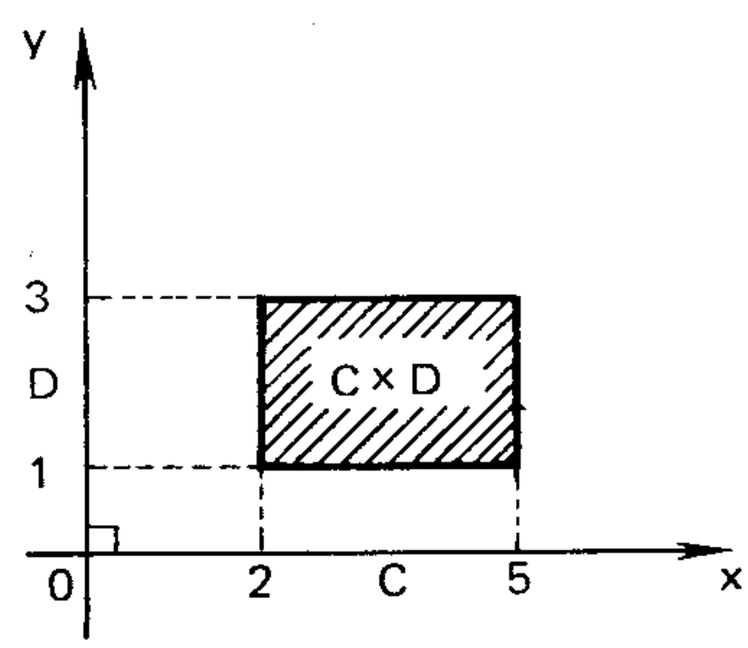


Exemplo — Sejam os dois pares de conjuntos:

$$A = \{1, 2\} \quad e \quad B = \{a, b, c\} \;;$$
$$C = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\} \quad e \quad D = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$$

Os diagramas cartesianos dos produtos A × B e C × D são:





II) *Tabela de dupla entrada* — Numa tabela de dupla entrada escrevem-se os elementos do conjunto A na 1ª coluna da esquerda e os elementos do conjunto B na 1ª linha. Na interseção da "linha x" com a "coluna y" se encontra o par ordenado $(x, y) \in A \times B$.

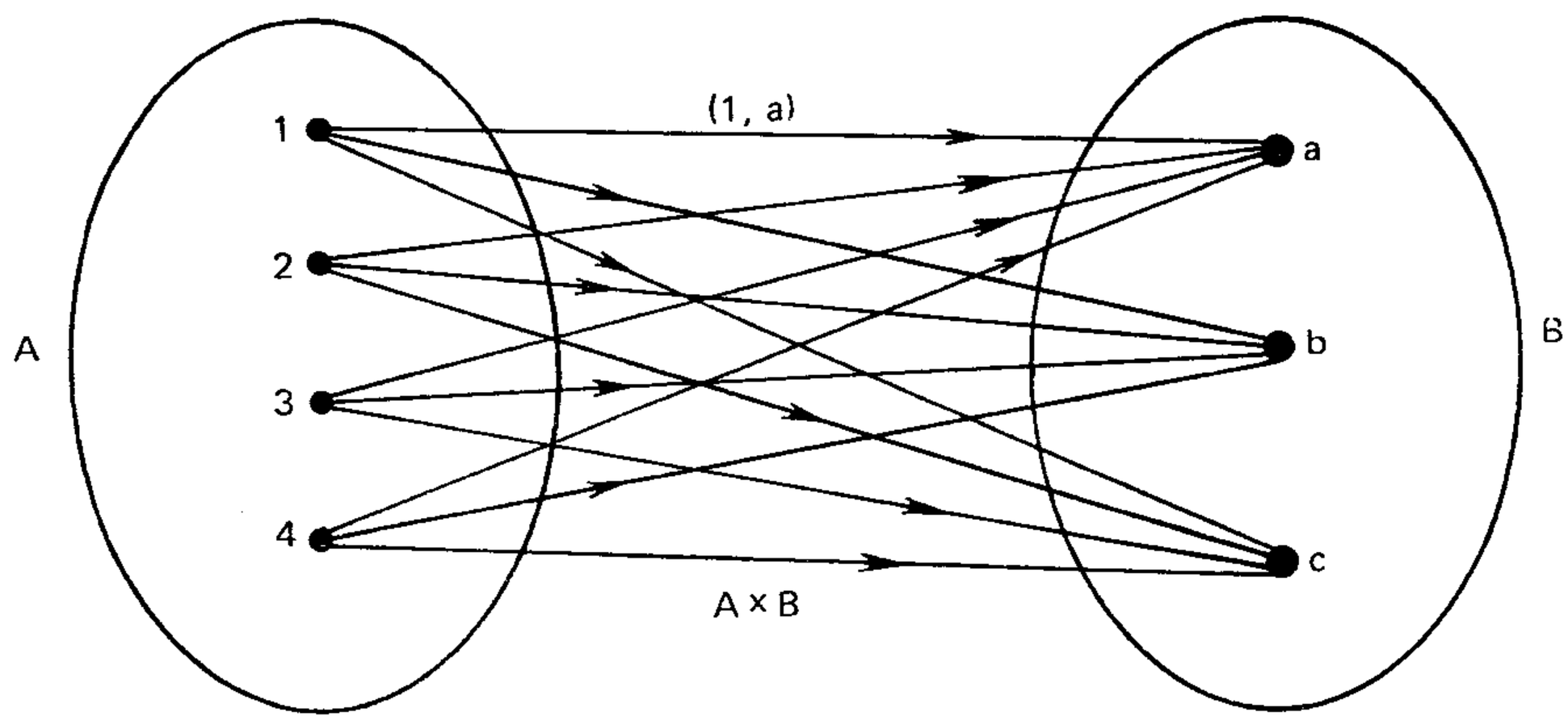
Exemplo — Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$.

A tabela de dupla entrada do produto $A \times B$ é a seguinte:

A \ B	a	b	c	d
1	(1, a)	(1, b)	(1, c)	(1, d)
2	(2, a)	(2, b)	(2, c)	(2, d)
3	(3, a)	(3, b)	(3, c)	(3, d)
4	(4, a)	(4, b)	(4, c)	(4, d)
5	(5, a)	(5, b)	(5, c)	(5, d)

III) *Diagrama sagital* — Constroem-se os diagramas de VENN dos conjuntos A e B, e cada um dos elementos de A é ligado por uma flecha a todos os elementos de B.

Exemplo — Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$ o *diagrama sagital* do produto $A \times B$ é o seguinte:



9. PROPRIEDADES DO PRODUTO CARTESIANO

(P_1) *A relação* $A \times B = \phi$ *é equivalente a* "$A = \phi$ ou $B = \phi$", *isto é:*

$$A \times B = \phi \Longleftrightarrow A = \phi \text{ ou } B = \phi$$

Dem.: — Suponhamos $A \times B = \phi$, $A \neq \phi$ e $B \neq \phi$. Então, pelas duas últimas condições: $(\exists x)(x \in A)$ e $(\exists y)(y \in B) \Longrightarrow (\exists (x, y))((x, y) \in A \times B) \Longrightarrow A \times B \neq \phi$.

o que contraria a hipótese $A \times B = \phi$. Logo, $A = \phi$ ou $B = \phi$.

Suponhamos agora $A \times B \neq \phi$, $A = \phi$ ou $B = \phi$. Então, pela primeira condição:

$$(\exists (x, y))((x, y) \in A \times B) \Longrightarrow x \in A \text{ e } y \in B \Longrightarrow A \neq \phi \text{ e } B \neq \phi$$

o que contraria a hipótese $A = \phi$ ou $B = \phi$. Logo, $A \times B = \phi$.

(P_2) *A relação* $A \times B = B \times A$ *é equivalente a* "$A = \phi$ ou $B = \phi$ ou $A = B$", *isto é:*

$$A \times B = B \times A \Longleftrightarrow (A = \phi \text{ ou } B = \phi \text{ ou } A = B)$$

Dem.: — Se $A = \phi$ ou $B = \phi$, então $A \times B = \phi = B \times A$ (Propriedade P_1).

E se $A = B$, então, obviamente $A \times B = B \times A$.

Suponhamos, agora, $A \neq \phi$, $B \neq \phi$ e $A \neq B$. A condição $A \neq B$ implica:

$$\text{i) } (\exists x)(x \in A \text{ e } x \notin B) \quad \text{ou} \quad \text{ii) } (\exists x)(x \notin A \text{ e } x \in B)$$

Se subsiste a alternativa (i), como $B \neq \phi$, existe $y \in B$, e, portanto $(x, y) \in A \times B$. Mas, $(x, y) \notin B \times A$, porque $x \notin B$. Logo, $A \times B \neq B \times A$.

A demonstração é análoga se subsiste a alternativa (ii).

(P_3) $A \subset B \Longrightarrow (A \times C \subset B \times C \text{ e } C \times A \subset C \times B)$

Dem.: — Com efeito:

$$(x, y) \in A \times C \Longrightarrow x \in A \text{ e } y \in C \Longrightarrow x \in B \text{ e } y \in C$$
$$\Longrightarrow (x, y) \in B \times C \quad \therefore \quad A \times C \subset B \times C$$

$$(x, y) \in C \times A \Longrightarrow x \in C \text{ e } y \in A \Longrightarrow x \in C \text{ e } y \in B$$
$$\Longrightarrow (x, y) \in C \times B \quad \therefore \quad C \times A \subset C \times B$$

(P_4) i) $A \neq \phi$ e $A \times B \subset A \times C \Longrightarrow B \subset C$

ii) $A \neq \phi$ e $B \times A \subset C \times A \Longrightarrow B \subset C$

Dem.: — Obviamente, a proposição (i) é verdadeira no caso particular em que $B = \phi$. Suponhamos, pois, $B \neq \phi$. Como também é $A \neq \phi$ (hipótese), segue-se

que, se $x \in A$ e $y \in B$, então:

$$(x, y) \in A \times B \Longrightarrow (x, y) \in A \times C \Longrightarrow y \in C$$

Portanto, $y \in B \Longrightarrow y \in C$, isto é: $B \subset C$.

De modo inteiramente análogo demonstra-se a proposição (ii).

(P_5) *Distributividade do produto cartesiano em relação à interseção:*

$$\text{i) } A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$\text{ii) } (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

Dem.: — Com efeito:

$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= \{(x, y) \mid x \in A \quad \text{e} \quad y \in B \cap C\} = \\ &= \{(x, y) \mid x \in A \quad \text{e} \quad (y \in B \quad \text{e} \quad y \in C)\} = \\ &= \{(x, y) \mid (x \in A \quad \text{e} \quad y \in B) \quad \text{e} \quad (x \in A \quad \text{e} \quad y \in C)\} = \\ &= \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B \quad \text{e} \quad (x, y) \in A \times C\} = \\ &= (A \times B) \cap (A \times C) \end{aligned}$$

De modo inteiramente análogo demonstra-se a (ii).

(P_6) *Distributividade do produto cartesiano em relação à reunião:*

$$\text{i) } A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$\text{ii) } (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

Dem.: — Com efeito:

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= \{(x, y) \mid x \in A \quad \text{e} \quad y \in B \cup C\} = \\ &= \{(x, y) \mid x \in A \quad \text{e} \quad (y \in B \quad \text{ou} \quad y \in C)\} = \\ &= \{(x, y) \mid (x \in A \quad \text{e} \quad y \in B) \quad \text{ou} \quad (x \in A \quad \text{e} \quad y \in C)\} = \\ &= \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B \quad \text{ou} \quad (x, y) \in A \times C\} = \\ &= (A \times B) \cup (A \times C) \end{aligned}$$

De modo inteiramente análogo demonstra-se a (ii).

(P_7) *Distributividade do produto cartesiano em relação à diferença:*

$$\text{i) } A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

$$\text{ii) } (A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$

Dem.: — Com efeito:

$$\begin{aligned} A \times (B - C) &= \{(x, y) \mid x \in A \quad e \quad y \in B - C\} = \\ &= \{(x, y) \mid x \in A \quad e \quad (y \in B \quad e \quad y \notin C)\} = \\ &= \{(x, y) \mid (x \in A \quad e \quad y \in B) \quad e \quad (x \in A \quad e \quad y \notin C)\} = \\ &= \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B \quad e \quad (x, y) \notin A \times C\} = \\ &= (A \times B) - (A \times C) \end{aligned}$$

De modo inteiramente análogo demonstra-se a (ii).

(P_8) *Distributividade do produto cartesiano em relação à diferença simétrica:*

$$\text{i) } A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$$

$$\text{ii) } (A \Delta B) \times C = (A \times C) \Delta (B \times C)$$

Dem.: — Com efeito:

$$\begin{aligned} A \times (B \Delta C) &= A \times [(B \cup C) - (B \cap C)] = \\ &= [A \times (B \cup C)] - [A \times (B \cap C)] = \\ &= [(A \times B) \cup (A \times C)] - [(A \times B) \cap (A \times C)] = \\ &= (A \times B) \Delta (A \times C) \end{aligned}$$

De modo inteiramente análogo demonstra-se a (ii).

(P_9) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

Dem.: — Com efeito:

$$\begin{aligned} (A \times B) \cap (C \times D) &= \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B \quad e \quad (x, y) \in C \times D\} = \\ &= \{(x, y) \mid (x \in A \quad e \quad y \in B) \quad e \quad (x \in C \quad e \quad y \in D)\} = \\ &= \{(x, y) \mid (x \in A \quad e \quad x \in C) \quad e \quad (y \in B \quad e \quad y \in D)\} = \\ &= \{(x, y) \mid x \in A \cap C \quad e \quad y \in B \cap D\} = \\ &= (A \cap C) \times (B \cap D) \end{aligned}$$

(P_{10}) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

Dem.: — Com efeito:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \times (C \cap D) &= \{(x, y) \mid x \in A \cap B \quad e \quad y \in C \cap D\} = \\ &= \{(x, y) \mid (x \in A \quad e \quad x \in B) \quad e \quad (y \in C \quad e \quad y \in D)\} = \\ &= \{(x, y) \mid (x \in A \quad e \quad y \in C) \quad e \quad (x \in B \quad e \quad y \in D)\} = \\ &= \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times C \quad e \quad (x, y) \in B \times D\} = \\ &= (A \times C) \cap (B \times D) \end{aligned}$$

10. SEQÜÊNCIA

Seja n um número natural qualquer ($n \in \mathbf{N}$). Todas as vezes que a cada um dos números 1, 2, 3, . . . , n se faz corresponder um determinado elemento de um conjunto qualquer A, fica *dada* ou *definida* uma *seqüência de n elementos de* A ou uma *n-upla de elementos de* A.

Se for x_1 o elemento que corresponde a 1, x_2 o elemento que corresponde a 2, . . . , x_n o elemento que corresponde a n, a seqüência assim definida designa-se pelas notações:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{ou} \quad (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

Neste caso, x_1 é o *1º elemento* da seqüência, x_2 o *2º elemento* da seqüência, . . . , x_n o *n-ésimo elemento* da seqüência ou o *último elemento* da seqüência.

Em particular, quando n = 2, 3, 4, . . . a seqüência chama-se, respectivamente, um *par ordenado,* um *terno ordenado,* um *quaterno ordenado,* etc. Mas, também pode ser n = 1; então, a seqüência reduz-se ao seu *primeiro* e *último* elemento, x_1.

Duas seqüências de n elementos, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, dizem-se *iguais* se e somente se $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, . . . , $x_n = y_n$, isto é:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow x_i = y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

11. PRODUTO CARTESIANO DE VÁRIOS CONJUNTOS

A noção de produto cartesiano, definida para *dois* conjuntos, estende-se de maneira natural a qualquer número finito $n > 2$ de conjuntos.

Definição — Chama-se *produto cartesiano* ou apenas *produto* dos n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, pela ordem em que estão escritos, ao conjunto de todas as n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tais que $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, . . . , $x_n \in A_n$.

Este conjunto produto representa-se por uma das notações:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \quad \text{ou} \quad \prod_{i=1}^{n} A_i$$

Os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dizem-se os *fatores* do produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, sendo A_1 o *1º fator,* A_2 o *2º fator,* . . . , A_n o *n-ésimo fator.*

Simbolicamente, temos:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1, \ x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n\}$$

No caso particular em que todos os fatores são iguais a um mesmo conjunto $A(A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A)$, o produto cartesiano $A \times A \times \ldots \times A$ (n vezes) recebe o nome de *potência cartesiana n-ésima de* A, sendo, então, representado por A^n.

Exemplo — Sejam os conjuntos:

$$A = \{2, 3\}, \quad B = \{1, 3, 5\}, \quad C = \{3, 4\}$$

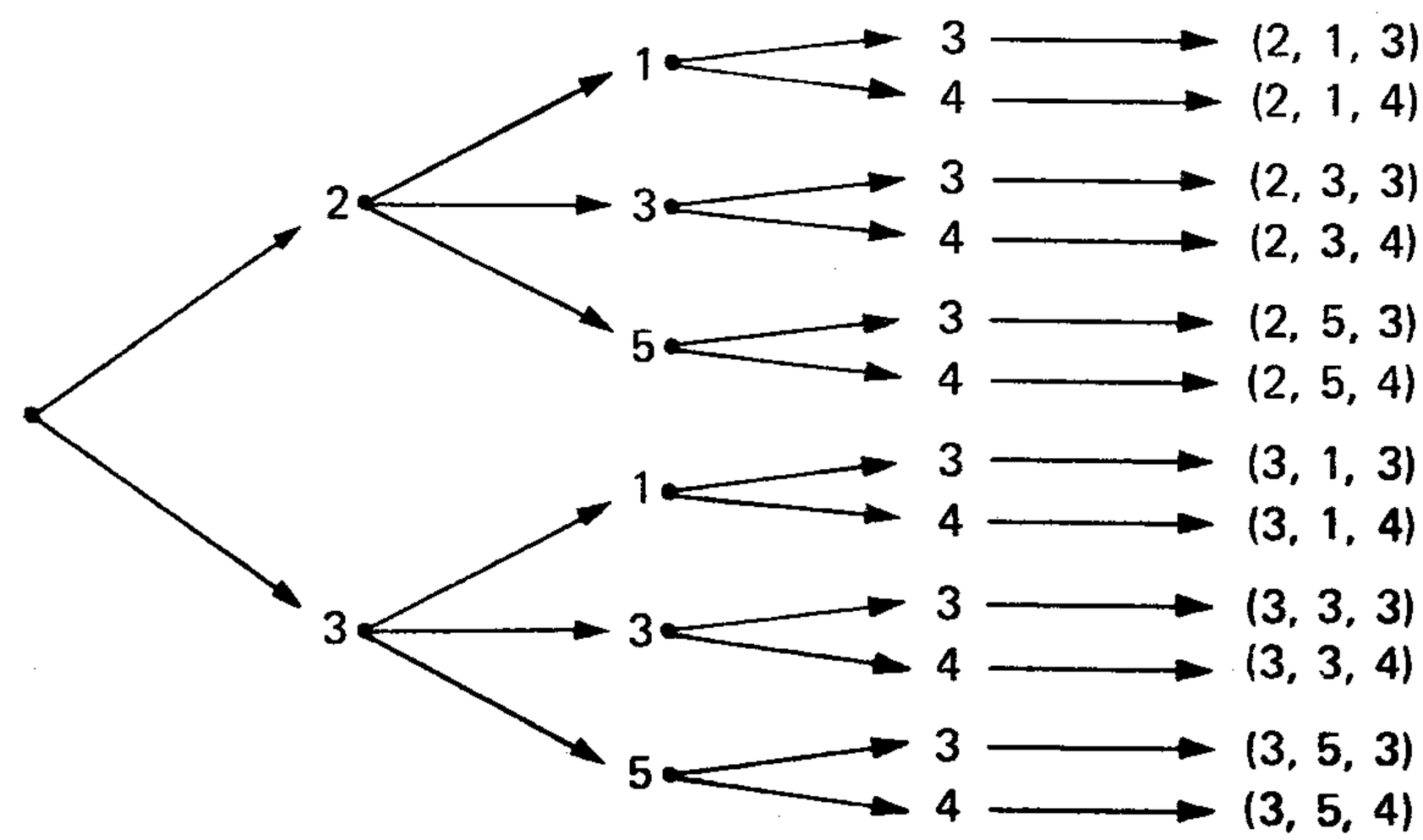
Temos:

$$A \times B \times C = \{(2, 1, 3), (2, 1, 4), (2, 3, 3,), (2, 3, 4), (2, 5, 3), (2, 5, 4), (3, 1, 3), (3, 1, 4), (3, 3, 3), (3, 3, 4), (3, 5, 3), (3, 5, 4)\}$$

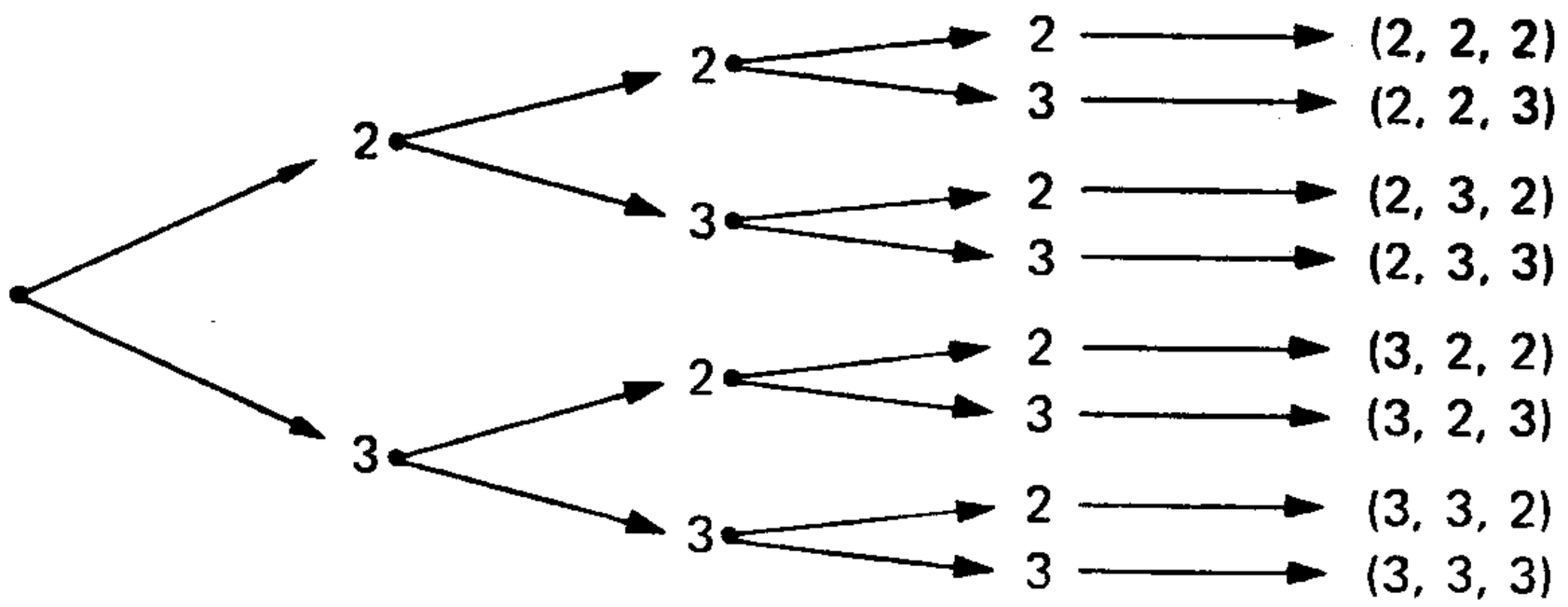
e

$$A^3 = \{(2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 2), (2, 3, 3), (3, 2, 2), (3, 2, 3), (3, 3, 2), (3, 3, 3)\}$$

Os ternos ordenados do produto cartesiano $A \times B \times C$ podem ser obtidos de maneira sistemática pelo chamado "diagrama da árvore", que a seguir indicamos:



Analogamente, os ternos ordenados do cubo cartesiano A^3 de A são dados pelo "diagrama da árvore" abaixo indicado:



E X E R C Í C I O S

1. Determinar x e y de modo que sejam *iguais* os pares ordenados:

   a) $(x + y, 1)$ e $(3, x - y)$

   b) $(y - 2, 2x + 1)$ e $(x - 1, y + 2)$

2. Calcular os seguintes *produtos cartesianos:*

   a) $\{1\} \times \{1, 2\}$

   b) $\{0, 1\} \times \{3, 4\}$

   c) $\{1, 2\} \times \{a, b, c\}$

   d) $\{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\}$

3. Calcular o *quadrado cartesiano* de cada um dos seguintes conjuntos:

   a) $\{0, 2\}$

   b) $\{I, II, III\}$

   c) $\{a, b, c, d\}$

4. Determinar a *diagonal* do quadrado cartesiano de cada um dos seguintes conjuntos:

   a) $\{a, b, c\}$

   b) $\{1, 2, 3, 4\}$

   c) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

5. Dados os conjuntos:

$$A = \{a, b\}, \quad B = \{2, 3\}, \quad C = \{3, 4\}$$

   calcular:

   a) $A \times (B \cup C)$

   b) $A \times (B \cap C)$

   c) $A \times (B - C)$

   d) $(A \times B) \cup (A \times C)$

   e) $(A \times B) \cap (A \times C)$

   f) $A \times (B \Delta C)$

6. Construir o *diagrama cartesiano* de cada um dos seguintes produtos:

   a) $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leqslant x < 4\} \times \{x \in \mathbf{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}$

   b) $\{x \in \mathbf{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 3\} \times \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$

   c) $]-2, 3] \times [-3, \longrightarrow[$

   d) $[-3, 1[\times]\longleftarrow, 2]$

7. Dado o conjunto $A = \{0, 1\}$, calcular os *valores numéricos* que assume o trinômio $2x + xy - 3y$ para todos os pares ordenados que pertencem ao produto $A \times A$.

8. Determinar os *elementos* do conjunto A, sabendo que o produto $A \times A$ tem 16 elementos e que $(0, 3)$ e $(5, 7)$ são dois desses elementos.

9. Calcular o *produto:* $\{1, 2\} \times \{2, 3\} \times \{4, 5\}$

10. Dados os conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 4\}, \quad C = \{3, 4, 5\}$$

construir o *"diagrama da árvore"* de $A \times B \times C$ e determinar esse produto.

11. Calcular o *cubo cartesiano* do conjunto $A = \{0, 1\}$.

12. Calcular os *produtos cartesianos:*

a) $\{x \in \mathbf{N} \mid (x - 1)(x - 3) = 0\} \times \{x \in \mathbf{N} \mid (x - 2)(x - 3) = 0\}$

b) $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\} \times \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$

c) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| \leqslant 2\} \times \{y \in \mathbf{R} \mid -1 < y \leqslant 3\}$

13. Mostrar: $(N \times Q) \cap (Q \times Z) = N \times Z$.

14. Dados os conjuntos $A = \{1\}$ e $B = \{2, 3\}$, determinar os *elementos* de $\mathbf{P}(A \times B)$ e de $A \times \mathbf{P}(A \times B)$.

15. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, d, e\}$, construir o *diagrama sagital* do produto $A \times B$.

16. Dado o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$, construir o *diagrama sagital* do produto $A \times A$.

17. Demonstrar que os conjuntos A e B são *disjuntos* se e somente se para todo conjunto não vazio C, $A \times C$ e $B \times C$ são disjuntos.

18. Se os conjuntos A e C não são vazios ($A \times C \neq \phi$), demonstrar que $A \subset B$ e $C \subset D$ se e somente se $A \times C \subset B \times D$.

19. Demonstrar: $(C \neq \phi \text{ e } A \times C = B \times C) \Longrightarrow A = B$.

20. Demonstrar: $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$.

21. Demonstrar:

a) $(A \times B) - (C \times C) = [(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$

b) $(A \times A) - (B \times C) = [(A - B) \times A] \cup [A \times (A - C)]$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 2$ e $y = 3$

2. a) $\{(1, 1), (1, 2)\}$

   b) $\{(0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 4)\}$

   c) $\{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

   d) $\{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

3. a) $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$

   b) $\{(I, I), (I, II), (I, III), (II, I), (II, II), (II, III), (III, I), (III, II), (III, III)\}$

   c) $\{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d),$
   $(d, a), (d, b), (d, c), (d, d)\}$

4. a) $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

   b) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

   c) $\{(2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (10, 10)\}$

5. a) $A \times (B \cup C) = \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$

   b) $A \times (B \cap C) = \{(a, 3), (b, 3)\}$

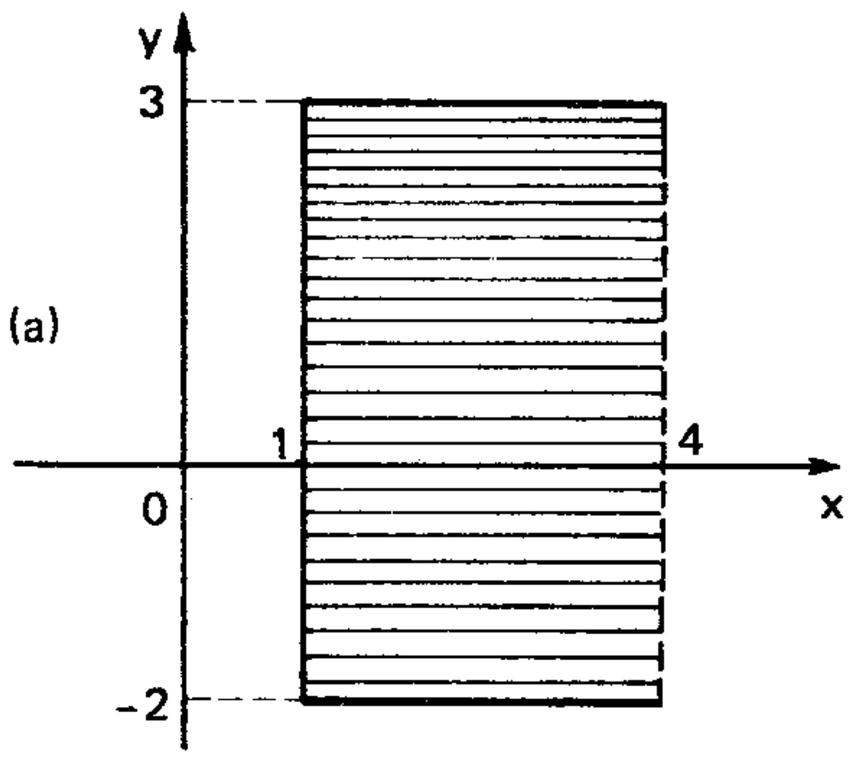
   c) $A \times (B - C) = \{(a, 2), (b, 2)\}$

   d) $(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$

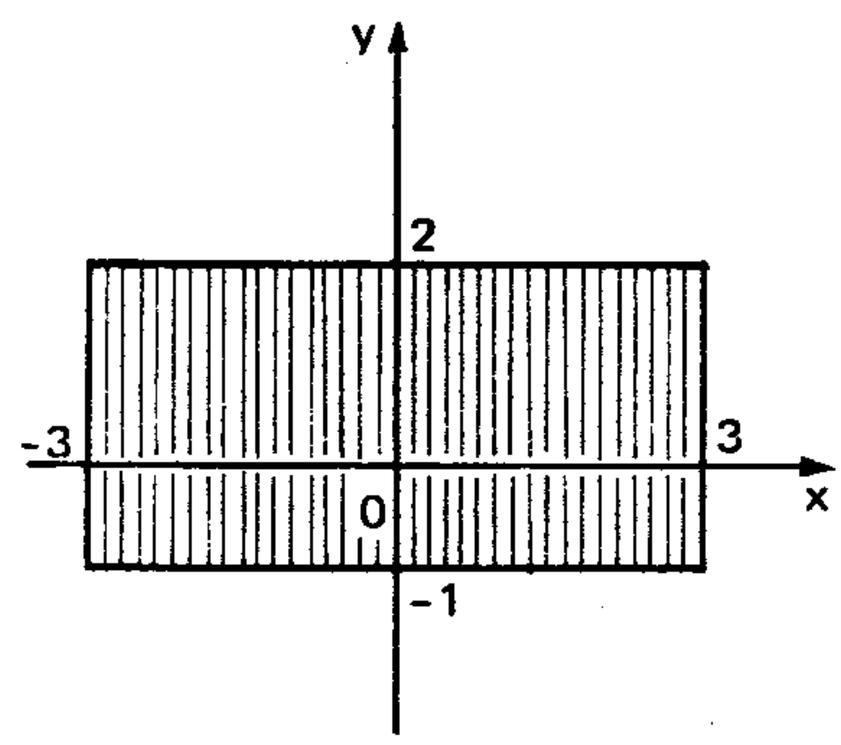
   e) $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(a, 3), (b, 3)\}$

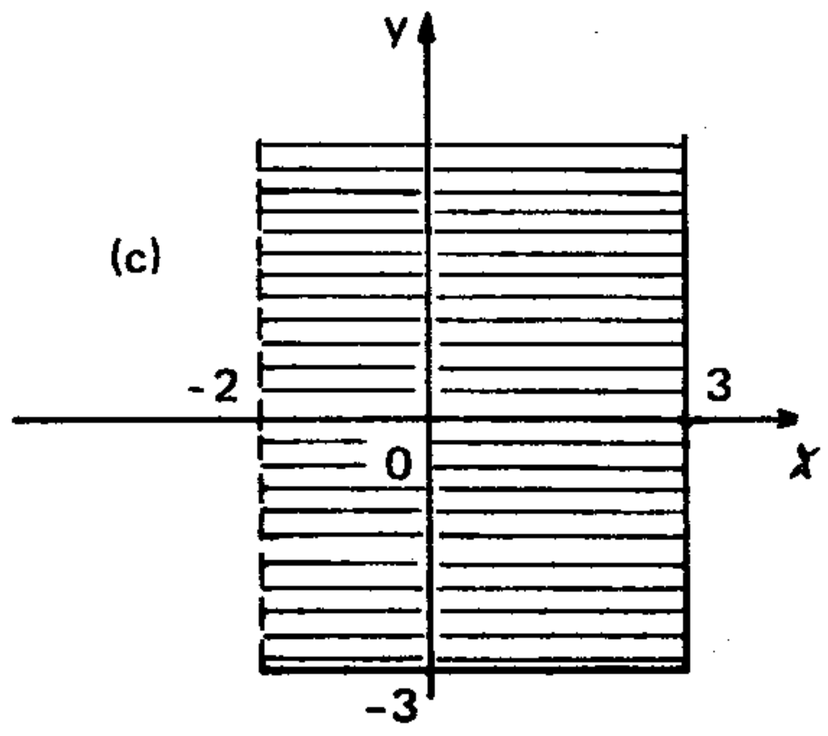
   f) $A \times (B \Delta C) = \{(a, 2), (a, 4), (b, 2), (b, 4)\}$

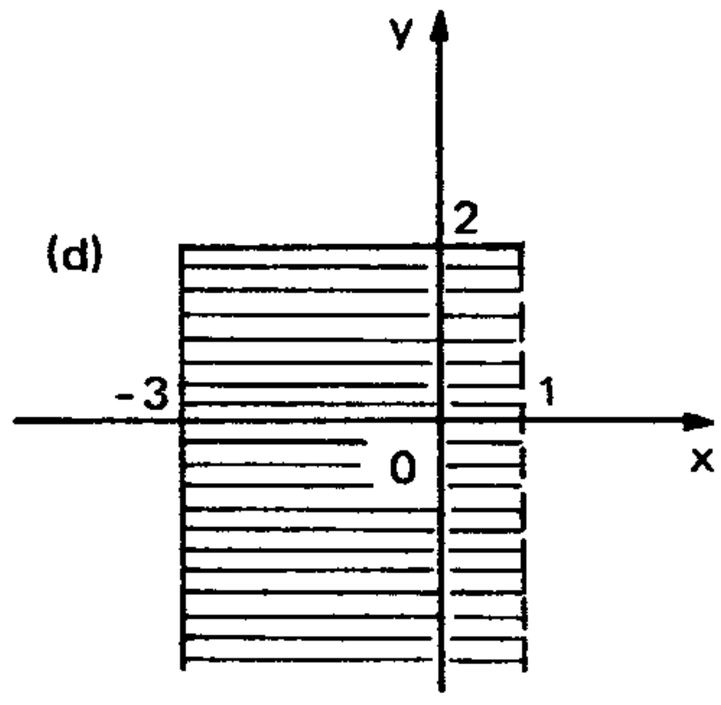
6. (a)



(b)





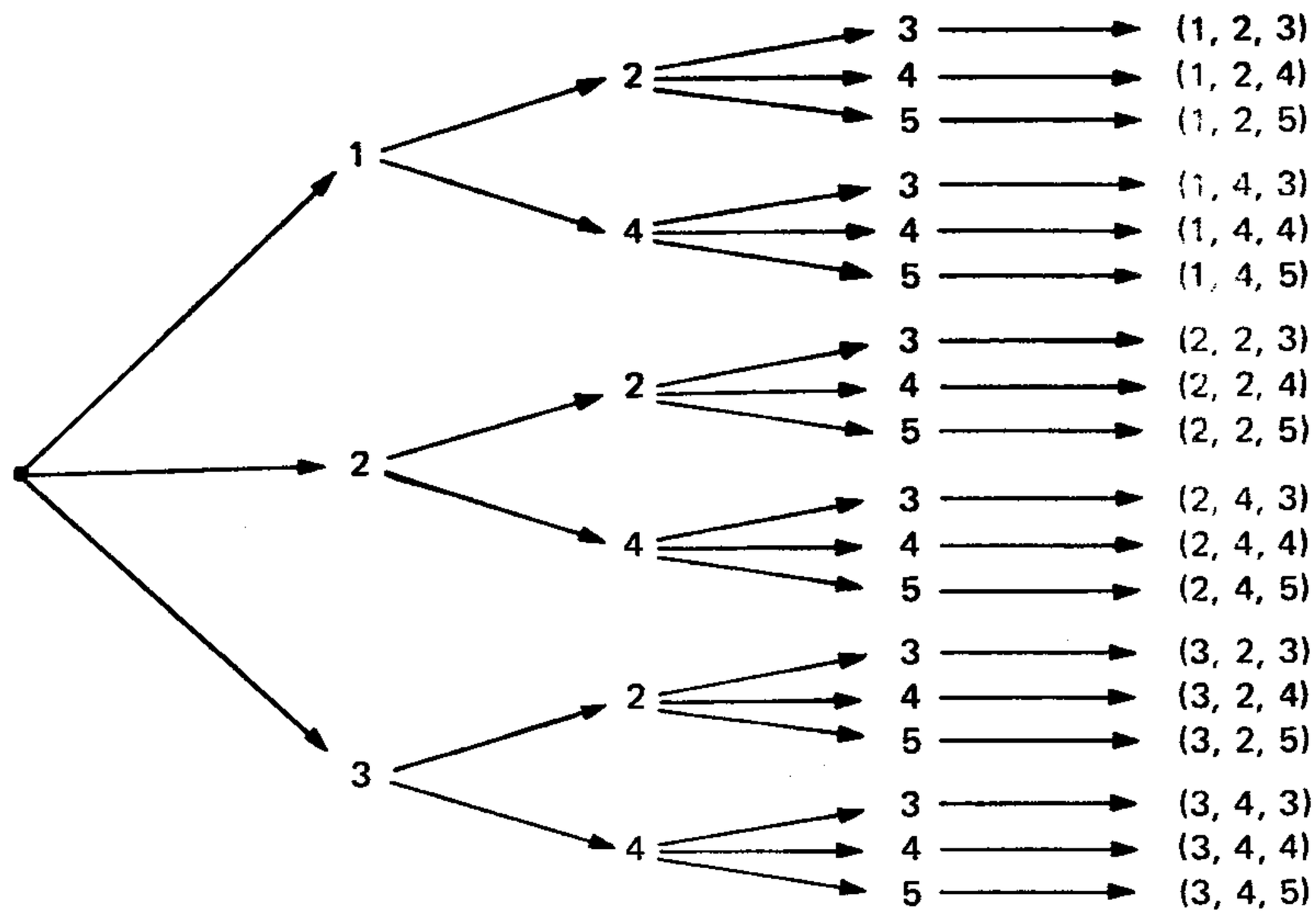


7. -3, 0 e 2

8. $A = \{0, 3, 5, 7\}$

9. $\{(1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (2, 2, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5)\}$

10.



11. $A^3 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$

12. a) $\{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

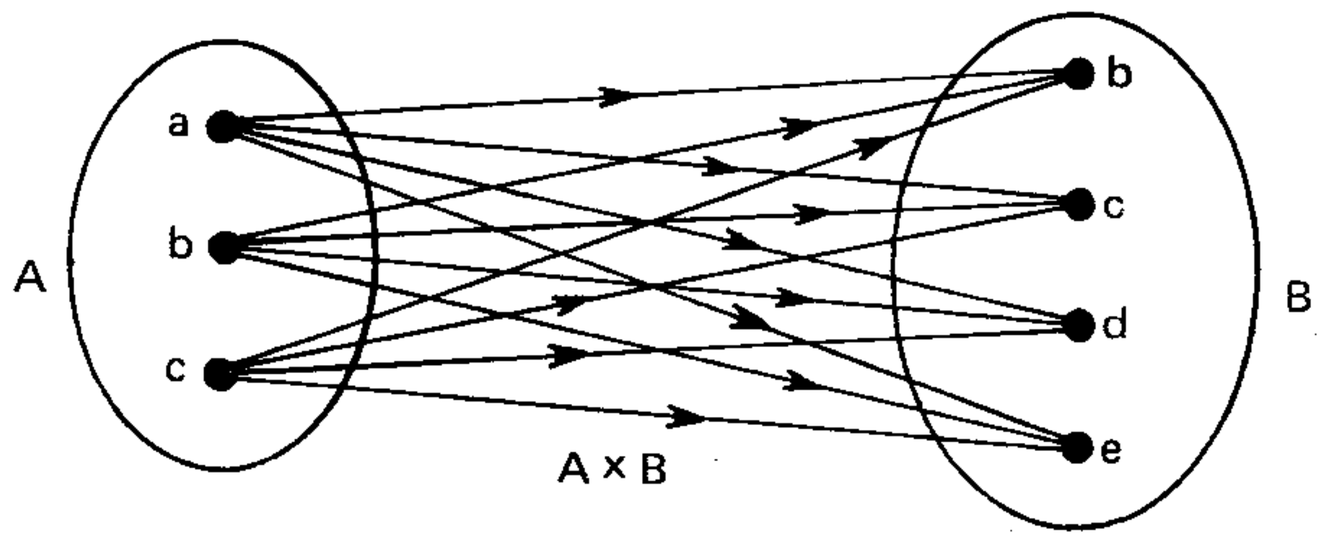
b) $\{(x, y) \mid x, y \in [0, 1]\}$

c) $\{(x, y) \mid |x| \leqslant 2 \text{ e } -1 < y \leqslant 3\}$

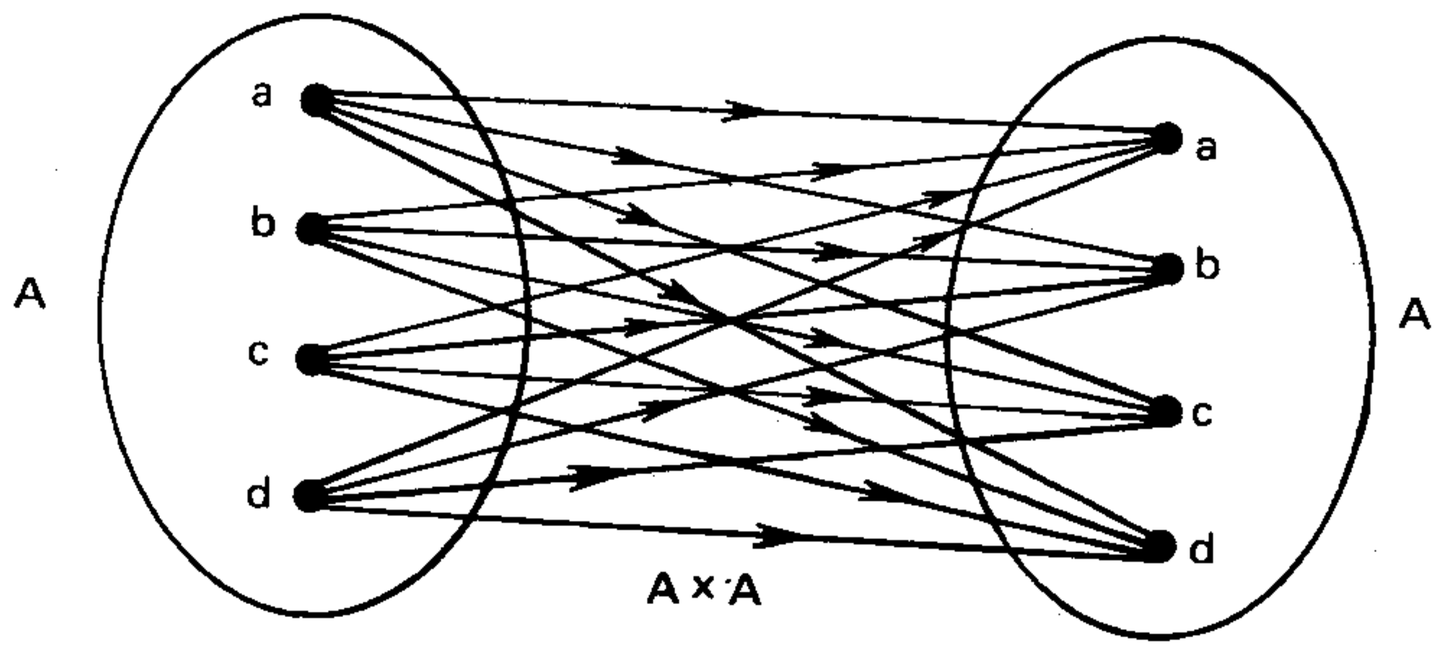
14. $\mathbf{P}(A \times B) = \{\phi, \{(1, 2)\}, \{(1, 3)\}, A \times B\}$

$A \times \mathbf{P}(A \times B) = \{(1, \phi), (1, \{(1, 2)\}), (1, \{(1, 3)\}), (1, A \times B)\}$

15.



16.



3

RELAÇÕES BINÁRIAS

CAPÍTULO 9

GRAFOS

1. DEFINIÇÃO DE GRAFO

Definição — Dá-se o nome de *grafo* a todo conjunto cujos elementos são pares ordenados.

Portanto, se G é um grafo e $z \in G$, então existe x e existe y tais que $z = (x, y)$, isto é, simbolicamente:

$$G \text{ é um grafo} \Longleftrightarrow (\forall z)\ (z \in G \Longrightarrow (\exists x)\ (\exists y)\ (z = (x, y)))$$

Se G é um grafo e o par ordenado $(x, y) \in G$, diz-se que "y é correspondente de x por G".

São exemplos de grafos os conjuntos:

$$G_1 = \{(a, 1), (3, (3, 4))\}$$
$$G_2 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 4)\}$$
$$G_3 = \{(a, (1, 2)), (b, (2, 3))\}$$

2. PROJEÇÕES DE UM GRAFO

Definição 1 — Chama-se *primeira projeção* de um grafo G o conjunto de todos os elementos x para os quais existe y tal que $(x, y) \in G$.

Este conjunto representa-se pela notação $pr_1 G$. Portanto, simbolicamente:

$$pr_1 G = \{x \mid (\exists y)\ ((x, y) \in G)\}$$

Em outros termos, a *primeira projeção* de um grafo G é o conjunto dos primeiros elementos de todos os pares ordenados que pertencem a G, isto é, simbolicamente:

$$pr_1 G = \{x \mid (x, y) \in G\}$$

Definição 2 — Chama-se *segunda projeção* de um grafo G o conjunto de todos os elementos y para os quais existe x tal que $(x, y) \in G$.

Este conjunto representa-se pela notação $pr_2 G$. Portanto, simbolicamente:

$$pr_2 G = \{y \mid (\exists x)\ ((x, y) \in G)\}$$

Em outros termos, a *segunda projeção* de um grafo G é o conjunto dos segundos elementos de todos os pares ordenados que pertencem a G, isto é, simbolicamente:

$$pr_2 G = \{ y \mid (x, y) \in G \}$$

A primeira projeção e a segunda projeção de um grafo G também se denominam, respectivamente, *"conjunto de definição de* G" e *"conjunto de valores de* G".

Teorema — Todo grafo G *é subconjunto do produto cartesiano das suas duas projeções.*

Dem.: — Com efeito:

$(x, y) \in G \Longrightarrow x \in pr_1 G$ e $y \in pr_2 G \Longrightarrow (x, y) \in pr_1 G \times pr_2 G$

e, portanto, temos: $G \subset pr_1 G \times pr_2 G$.

Corolário — Se uma das duas projeções de um grafo G é vazia, então o grafo G é vazio.

Dem.: — Com efeito:

$$pr_1 G = \phi \quad \text{ou} \quad pr_2 G = \phi \Longrightarrow pr_1 G \times pr_2 G = \phi$$
$$\Longrightarrow G \subset \phi \Longrightarrow G = \phi$$

Exemplos:

1) O produto cartesiano A × B de dois conjuntos A e B é um grafo tal que $pr_1 (A \times B) = A$ e $pr_2 (A \times B) = B$.

2) O conjunto $G = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (c, 2)\}$ é um grafo cujas projeções são:

$$pr_1 G = \{a, b, c\} \ , \quad pr_2 G = \{1, 2\}$$

Observe-se:

$G \subset pr_1 G \times pr_2 G = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

3) O conjunto $G = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{N} \text{ e } y = 2x\}$ é um grafo cuja primeira projeção é o conjunto **N** dos números naturais e cuja segunda projeção é o conjunto dos números naturais pares, isto é:

$$pr_1 G = \mathbf{N} \ , \quad pr_2 G = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$$

4) O conjunto $G = \{(a, (1, 2)), (b, (3, 5))\}$ é um grafo cujas projeções são:

$$pr_1 G = \{a, b\} \ , \quad pr_2 G = \{(1, 2), (3, 5)\}$$

Observe-se que a segunda projeção de G também é um grafo cujas projeções são:

$$pr_1(pr_2G) = \{1, 3\}, \quad pr_2(pr_2G) = \{2, 5\}$$

5) Dados os conjuntos $A = \{-2, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 3\}$ o conjunto

$$G = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y < 1\}$$

é um grafo que, como conjunto de pares ordenados, se escreve:

$$G = \{(-2, -1), (-2, 0), (0, -1), (0, 0)\ (1, -1)\}$$

e, portanto, as suas projeções são:

$$pr_1G = \{-2, 0, 1\} \quad , \quad pr_2G = \{-1, 0\}$$

3. OPERAÇÕES COM GRAFOS

Sejam G e H dois grafos. Como G e H são conjuntos, podemos efetuar sobre G e H as operações usuais de *interseção, reunião* e *diferença,* isto é, determinar $G \cap H$, $G \cup H$ e $G - H$, que também são grafos.

Simbolicamente, temos:

$$G \cap H = \{(x, y) \mid (x, y) \in G \quad e \quad (x, y) \in H\}$$

$$G \cup H = \{(x, y) \mid (x, y) \in G \quad ou \quad (x, y) \in H\}$$

$$G - H = \{(x, y) \mid (x, y) \in G \quad e \quad (x, y) \notin H\}$$

Exemplo — Sejam os grafos:

$$G = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\} \quad e \quad H = \{(1, 3), (1, 4), (3, 3)\}$$

Temos:

$$G \cap H = \{(1, 3), (1, 4)\}$$

$$G \cup H = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 3)\}$$

$$G - H = \{(2, 4)\}, \quad G \Delta H = \{(2, 4), (3, 3)\}$$

4. GRAFO RECÍPROCO

Definição — Chama-se *grafo recíproco* de um grafo G o grafo cujos elementos são todos os pares ordenados (y, x) tais que $(x, y) \in G$.

Representa-se pela notação G^{-1}, que se lê: "G menos um". Portanto, simbolicamente:

$$G^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in G\}$$

Observe-se que o grafo recíproco G^{-1} é o conjunto dos pares ordenados recíprocos de todos os pares ordenados que pertencem ao grafo G.

É imediato:

$$pr_1 G^{-1} = pr_2 G \quad , \quad pr_2 G^{-1} = pr_1 G$$

O grafo recíproco de G^{-1} é o grafo G, isto é, $(G^{-1})^{-1} = G$, pois, temos:

$$(x, y) \in (G^{-1})^{-1} \Longleftrightarrow (y, x) \in G^{-1} \Longleftrightarrow (x, y) \in G$$

Em particular, se X e Y são dois conjuntos, então $(X \times Y)^{-1} = Y \times X$.

Um grafo G que coincide com o seu recíproco ($G = G^{-1}$) diz-se *simétrico.*

Exemplo: — O grafo recíproco de $G = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5)\}$ é:

$$G^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (5, 3)\}$$

5. IMAGEM DE UM CONJUNTO POR UM GRAFO

Sejam G um grafo e X um conjunto.

Definição — Chama-se *imagem* de X por G o conjunto de todos os elementos y para os quais existe $x \in X$ tal que $(x, y) \in G$.

Este conjunto representa-se por G(X). Portanto, simbolicamente:

$$G(X) = \{y \mid (\exists x)\ (x \in X \quad e \quad (x, y) \in G)\}$$

Em particular, é imediato:

$$G(pr_1 G) = pr_2 G \ , \qquad G(\phi) = \phi$$

Temos:

$$y \in G(X) \Longrightarrow (x, y) \in G \Longrightarrow y \in pr_2 G$$

o que demonstra: $G(X) \subset pr_2 G$, isto é, a imagem de um conjunto por um grafo é um subconjunto da segunda projeção do grafo.

Exemplo: — Sejam o grafo:

$$G = \{(2, 10), (3, 3), (5, 10), (7, 7), (11, 11)\}$$

e os conjuntos: $X = \{3, 5, 7\}$, $Y = \{2, 3, 11\}$. Temos:

$$G(X) = \{3, 10, 7\} \ , \quad G(Y) = \{10, 3, 11\}$$

6. IMAGEM RECÍPROCA DE UM CONJUNTO POR UM GRAFO

Seja G um grafo e Y um conjunto.

Definição — Chama-se *imagem recíproca de* Y *por* G a imagem $G^{-1}(Y)$ de Y pelo grafo recíproco G^{-1} de G.

Em outros termos, a imagem recíproca $G^{-1}(Y)$ de Y por G é o conjunto de todos os elementos x para os quais existe $y \in Y$ tal que $(y, x) \in G^{-1}$ ou $(x, y) \in G$. Portanto, simbolicamente:

$$G^{-1}(Y) = \{x \mid (\exists y)\ (y \in Y \ \text{ e } \ (x, y) \in G)\}$$

Exemplo: — Seja o grafo $G = \{(a, 3), (b, 1), (c, 1)\}$. Temos:

$$G^{-1}(\{1, 2\}) = \{b, c\}, \quad G^{-1}(\{1, 3\}) = \{a, b, c\}$$

7. COMPOSIÇÃO DE GRAFOS

Sejam G e H dois grafos.

Definição — Chama-se *grafo composto* de G e H o grafo cujos elementos são todos os pares ordenados (x, y) para os quais existe z tal que $(x, z) \in H$ e $(z, y) \in G$.

Este grafo representa-se por $G \circ H$, que se lê: "G círculo H". Portanto, simbolicamente:

$$G \circ H = \{(x, y) \mid (\exists z)\ ((x, z) \in H \ \text{ e } \ (z, y) \in G)\}$$

Exemplo: — Sejam os grafos:

$$G = \{(2, 5), (3, 4), (6, 2), (3, 0), (2, 7)\}$$

$$H = \{(4, 8), (5, 3), (0, 9), (2, 2), (7, 4), (5, 10)\}$$

Temos:

$$G \circ H = \{(5, 4), (5, 0), (2, 5), (2, 7)\}$$

$$H \circ G = \{(2, 3), (2, 10), (3, 8), (6, 2), (3, 9), (2, 4)\}$$

Observe-se que $G \circ H \neq H \circ G$, isto é, a operação de composição de grafos não goza da propriedade comutativa.

8. PROPRIEDADES DA COMPOSIÇÃO DE GRAFOS

Sejam G, H e J grafos.

(P_1) *O grafo recíproco de* $G \circ H$ *é* $H^{-1} \circ G^{-1}$, *isto é:*

$$(G \circ H)^{-1} = H^{-1} \circ G^{-1}$$

Dem.: — Com efeito:

$$\begin{aligned}(G \circ H)^{-1} &= \{(y, x) \mid (x, y) \in G \circ H\} = \\ &= \{(y, x) \mid (\exists z)\ ((x, z) \in H \text{ e } (z, y) \in G)\} = \\ &= \{(y, x) \mid (\exists z)\ ((y, z) \in G^{-1} \text{ e } (z, x) \in H^{-1})\} = \\ &= H^{-1} \circ G^{-1}\end{aligned}$$

(P_2) *Associativa:* $(G \circ H) \circ J = G \circ (H \circ J)$.

Dem.: — Com efeito:

$$\begin{aligned}(G \circ H) \circ J &= \{(x, y) \mid (\exists z)\ ((x, z) \in J \text{ e } (z, y) \in G \circ H\} = \\ &= \{(x, y) \mid (\exists t)\ (\exists z)\ ((x, z) \in J \text{ e } (z, t) \in H \text{ e } (t, y) \in G)\} = \\ &= \{(x, y) \mid (\exists t)\ ((x, t) \in H \circ J \text{ e } (t, y) \in G)\} = \\ &= G \circ (H \circ J)\end{aligned}$$

NOTA — Segundo a igualdade $(G \circ H) \circ J = G \circ (H \circ J)$, as duas maneiras de colocar parênteses na expressão $G \circ H \circ J$ conduzem ambas ao mesmo resultado, e daí a *convenção* de indicar-se o grafo $(G \circ H) \circ J$ ou $G \circ (H \circ J)$ por $G \circ H \circ J$, isto é, escrever-se:

$$(G \circ H) \circ J = G \circ (H \circ J) = G \circ H \circ J$$

Analogamente, se G, H, J e K são grafos, escreve-se:

$$(G \circ H \circ J) \circ K = G \circ (H \circ J \circ K) = G \circ H \circ J \circ K, \text{ etc.}$$

(P_3) Para todo conjunto X, tem-se: $(G \circ H)\ (X) = G(H(X))$.

Dem.: — Com efeito:

$$\begin{aligned}(G \circ H)\ (X) &= \{y \mid (\exists x)\ (x \in X \text{ e } (x, y) \in G \circ H)\} = \\ &= \{y \mid (\exists z)\ ((\exists x)\ (x \in X \text{ e } (x, z) \in H \text{ e } (z, y) \in G))\} = \\ &= \{y \mid (\exists z)\ (z \in H(X) \text{ e } (z, y) \in G)\} = G(H(X))\end{aligned}$$

E X E R C Í C I O S

1. Dados os grafos:

$$G = \{(2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\}, \qquad H = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

determinar:

a) $pr_1 G$, $pr_1 H$, $pr_2 G$ e $pr_2 H$

b) G^{-1} , H^{-1} , $G \circ H$ e $H \circ G$

c) $(G \circ H)^{-1}$, $H^{-1} \circ G$ e $H \circ G^{-1}$

d) $G(\{2\})$, $H(\{2, 4\})$, $G^{-1}(\{3, 4\})$ e $H^{-1}(\{0\})$

2. Dados os grafos:

$$G_1 = \{(a, 1), (3, (3, 4))\},$$

$$G_2 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\},$$

$$G_3 = \{(a, (1, 2)), (a, (2, 3))\}$$

determinar:

a) $pr_i G_j$ para $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$

b) $pr_1(pr_2 G_3)$ e $pr_2(pr_2 G_3)$

c) $G_i(\{1, 3\})$ e $G_i(\{a\})$ para $i = 1, 2, 3$

d) G_i^{-1} para $i = 1, 2, 3$

e) $G_1 \circ G_2$, $G_2 \circ G_1$ e $G_3 \circ G_2$

f) $G_1^{-1} \circ G_3$, $G_1 \circ G_3^{-1}$ e $G_3 \circ G_1^{-1}$

g) $(G_2 \circ G_1)^{-1}$ e $G_3 \circ (G_1^{-1} \circ G_2)$

3. Determinar $G \circ H$ e $H \circ G$ em cada um dos seguintes casos:

a) $G = \{(0, 1), (1, 2)\}$, $H = \{(1, 2), (2, 3)\}$

b) $G = \{(0, 1), (1, 2)\}$, $H = \{(0, 1), (1, 2)\}$

c) $G = \{(0, 0), (1, 2)\}$, $H = \{(1, 2), (1, 0)\}$

d) $G = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$, $H = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$

4. Sendo G e H grafos, demonstrar:

a) $pr_i(G \cup H) = (pr_i G) \cup (pr_i H)$ para $i = 1, 2$

b) $pr_i G - pr_i H \subset pr_i(G - H)$ para $i = 1, 2$

c) $pr_1(G \circ H) \subset pr_1 H$, $pr_2(G \circ H) \subset pr_2 G$

5. Sendo G um grafo, demonstrar: $G^{-1}(G(pr_1 G)) = pr_1 G$.

6. Sendo G e H grafos, demonstrar:

a) $(G \cap H)^{-1} = G^{-1} \cap H^{-1}$

b) $(G \cup H)^{-1} = G^{-1} \cup H^{-1}$

c) $(G - H)^{-1} = G^{-1} - H^{-1}$

7. Sendo G, H e J grafos, demonstrar:

a) $(H \cup J) \circ G = (H \circ G) \cup (J \circ G)$

b) $G \circ (H \cap J) \subset (G \circ H) \cap (G \circ J)$

c) $(G \circ H) - (G \circ J) \subset G \circ (H - J)$

8. Sendo G e H grafos e X e Y conjuntos, demonstrar:

a) $G \subset H \Longrightarrow G(X) \subset H(X)$

b) $X \subset Y \Longrightarrow G(X) \subset G(Y)$

c) $G \subset H \Longleftrightarrow G^{-1} \subset H^{-1}$

d) $G(X \cap Y) \subset G(X) \cap G(Y)$

e) $G(X \cup Y) = G(X) \cup G(Y)$

f) $G^{-1}(G(X)) \supset X$ se $X \subset pr_1 G$

9. Sendo G, H e J grafos, demonstrar:

a) $G \subset H \Longrightarrow G \circ J \subset H \circ J$

b) $G \subset H \Longrightarrow J \circ G \subset J \circ H$

10. Sendo A, B, C conjuntos, demonstrar:

a) Se $A \cap B \neq \phi$, então $(A \times B) \circ (A \times B) = A \times B$

b) Se $A \cap B = \phi$, então $(A \times B) \circ (A \times B) = \phi$

c) Se $B \neq \phi$, então $(B \times C) \circ (A \times B) = A \times C$

11. Sendo G e H grafos e A, B e C conjuntos, demonstrar:

a) Se $G \subset A \times B$, então $G^{-1} \subset B \times A$

b) Se $G \subset A \times B$ e $H \subset B \times C$, então $H \circ G \subset A \times C$

12. Seja G um grafo e seja S um subconjunto da primeira projeção de G ($S \subset pr_1 G$). Chama-se *restrição* de G a S o grafo:

$$G|S = \{(x, y) \mid (x, y) \in G \text{ e } x \in S\}$$

Demonstrar:

a) $G|S = G \cap (S \times pr_2 G)$

b) $G|(S \cup T) = G|S \cup G|T$

c) $G|(S \cap T) = G|S \cap G|T$

d) $(G \circ H)|S = G \circ H|S$

e) $G(S) = pr_2 G|S$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. a) $pr_1 G = \{2, 3\}$; $pr_1 H = \{2, 3, 4\}$; $pr_2 G = \{2, 3, 4\}$; $pr_2 H = \{1, 2, 3\}$

b) $G^{-1} = \{(2, 2), (3, 2), (3, 3), (4, 3)\}$;

$H^{-1} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$;

$G \circ H = \{(3, 2), (3, 3), (4, 3), (4, 4)\}$;

$H \circ G = \{(2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$

c) $(G \circ H)^{-1} = \{(2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$;

$H^{-1} \circ G = \{(2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$;

$H \circ G^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$

d) $G(\{2\}) = \{2, 3\}$; $H(\{2, 4\}) = \{1, 3\}$; $G^{-1}(\{3, 4\}) = \{2, 3\}$;

$H^{-1}(\{0\}) = \phi$

2. a) $pr_1 G_1 = \{a, 3\}$; $pr_2 G_1 = \{1, (3, 4)\}$; $pr_1 G_2 = \{1\}$;

$pr_2 G_2 = \{2, 3, 4\}$; $pr_1 G_3 = \{a\}$; $pr_2 G_3 = \{(1, 2), (2, 3)\}$

b) $pr_1(pr_2 G_3) = \{1, 2\}$; $pr_2(pr_2 G_3) = \{2, 3\}$

c) $G_1(\{1, 3\}) = \{(3, 4)\}$; $G_1(\{a\}) = \{1\}$;

$G_2(\{1, 3\}) = \{2, 3, 4\}$; $G_2(\{a\}) = \phi$;

$G_3(\{1, 3\}) = \phi$; $G_3(\{a\}) = \{(1, 2), (2, 3)\}$

d) $G_1^{-1} = \{(1, a), ((3, 4), 3)\}$;

$G_2^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$;

$G_3^{-1} = \{((1, 2), a), ((2, 3), a)\}$

e) $G_1 \circ G_2 = \{(1, (3, 4))\}$;

$G_2 \circ G_1 = \{(a, 2), (a, 3), (a, 4)\}$;

$G_3 \circ G_2 = \phi$

f) $G_1^{-1} \circ G_3 = \phi$; $G_1 \circ G_3^{-1} = \{((1, 2), 1), ((2, 3), 1\}$;

$G_3 \circ G_1^{-1} = \{(1, (1, 2)), (1, (2, 3))\}$

g) $(G_2 \circ G_1)^{-1} = \{(2, a), (3, a), (4, a)\}$; $G_3 \circ (G_1^{-1} \circ G_2) = \phi$

3. a) $G \circ H = \phi$; $H \circ G = \{(0, 2), (1, 3)\}$;

b) $G \circ H = H \circ G = \{(0, 2)\}$

c) $G \circ H = \{(1, 0)\}$; $H \circ G = \phi$

d) $G \circ H = \{\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}\}$; $H \circ G = \{(0, 0)\}$

CAPÍTULO 10

RELAÇÕES BINÁRIAS

1. DEFINIÇÃO DE RELAÇÃO BINÁRIA

Sejam A e B dois conjuntos.

Definição — Chama-se *relação binária de* A *em* B ou apenas *relação de* A *em* B toda a terna ordenada $R = (G, A, B)$, onde G é um grafo tal que $G \subset A \times B$.

Diz-se que G é o *grafo* de R, A o *conjunto de partida* e B o *conjunto de chegada* de R.

Se $(x, y) \in G$, diz-se que "y é correspondente de x pela relação R", o que se indica pela notação xRy, que se lê: "x-erre-y". Portanto: $(x, y) \in G \Longleftrightarrow xRy$.

Se, ao invés, $(x, y) \notin G$, escreve-se também $x \not R y$, que se lê: "x-não-erre-y". Portanto: $(x, y) \notin G \Longleftrightarrow x \not R y$.

No caso particular em que $B = A$, isto é, em que $R = (G, A, A)$, diz-se que R é uma *relação binária em* A ou apenas que R é uma *relação em* A.

Duas relações, $R = (G, A, B)$ e $S = (H, C, D)$, dizem-se *iguais* se e somente se $G = H$ e $A = C$ e $B = D$.

Exemplos:

1) A terna ordenada $R = ((A \times B), A, B)$ é uma relação de A em B, cujo grafo é o produto cartesiano $A \times B$ $(G = A \times B)$.

2) Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4\}$. A terna ordenada $R = (G, A, B)$, onde G é o grafo:

$$G = \{(x, y) \in A \times B \mid x + 1 < y\}$$

é uma relação de A em B, que também pode escrever-se:

$$R = (\{(x, y) \in A \times B \mid x + 1 < y\}, A, B)$$

Como $(1, 3) \in G$, $(2, 3) \notin G$, $(2, 4) \in G$ e $(3, 3) \notin G$, temos:

$$1R3 \ , \ 2 \not R 3 \ , \ 2R4 \ , \ 3 \not R 3$$

3) A terna ordenada $R = (G, \mathbf{N}, \mathbf{N})$, onde G é o grafo:

$$G = \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid x \mid y\}$$

é uma relação em **N**(conjunto dos números naturais), que também pode escrever-se:

$$R = (\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid x|y\}, \mathbf{N}, \mathbf{N})$$

Como $(3, 12) \in G$, $(2, 7) \notin G$, $(5, 15) \in G$ e $(6, 13) \notin G$, temos:

$$3R12 \ , \ 2\not R7 \ , \ 5R15 \ , \ 6\not R13$$

2. REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DE UMA RELAÇÃO

Uma relação R de A em B pode ser representada graficamente por um *diagrama cartesiano,* por uma *tabela de dupla entrada* ou por um *diagrama sagital.*

Exemplos:

1) Sejam os conjuntos $A = \{-2, 0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 3\}$ e a relação R de A em B cujo grafo é:

$$G = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y < 1\}$$

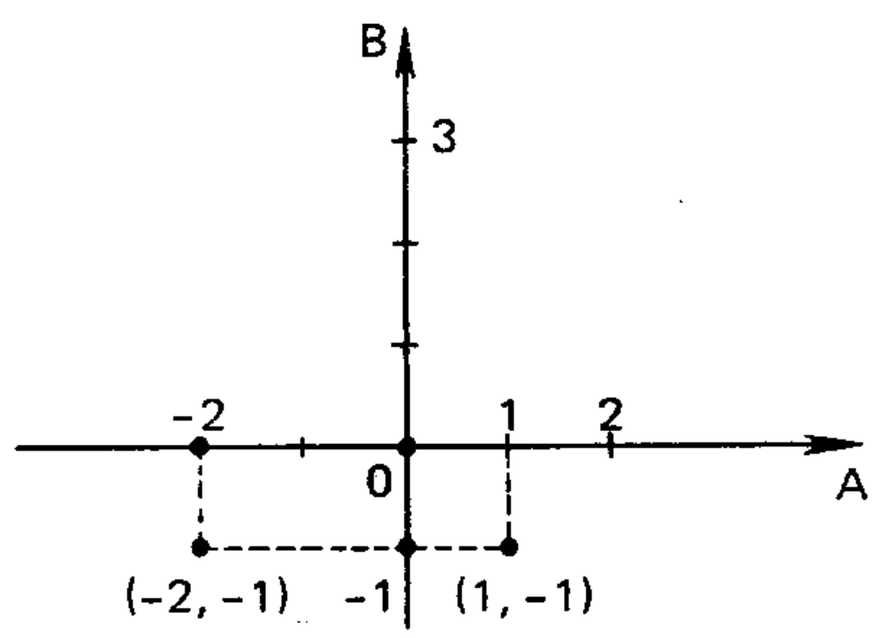
Como conjunto de pares ordenados, o grafo G pode escrever-se:

$$G = \{(-2, -1), (-2, 0), (0, -1), (0, 0), (1, -1)\}$$

e,portanto, as representações gráficas da relação R de A em B são:

1) *Diagrama cartesiano:* O par ordenado $(x, y) \in G$ é representado como em Geometria Analítica, isto é, pelo ponto do plano cartesiano de coordenadas x e y (x abscissa e y ordenada).

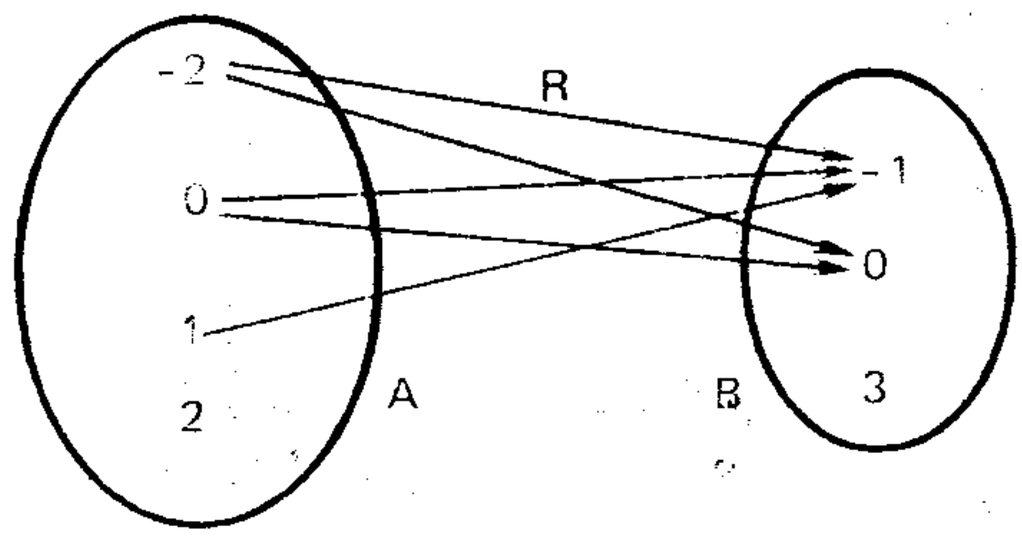
O diagrama cartesiano da relação R consiste nos *cinco* pontos assinalados na figura ao lado.



2) *Tabela de dupla entrada:* A leitura é feita "linha por coluna", assinalando-se com um asterisco * o quadrado que se encontra na interseção da "linha x" com a "coluna y" se e somente se $x + y < 1$.

A \ B	-1	0	3
-2	*	*	
0	*	*	
1	*		
2			

3) *Diagrama sagital:* Constroem-se os diagramas de VENN dos conjuntos A e B, e um elemento x de A é ligado por uma flecha a um elemento y de B se e somente se $x + y < 1$.



2) Seja a relação R em $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ cujo grafo é:

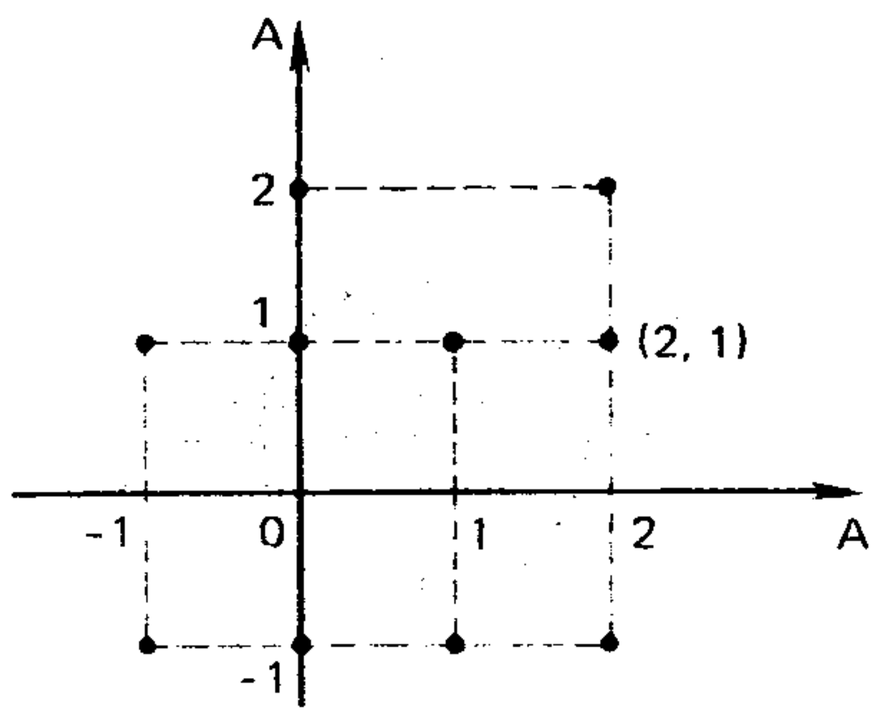
$$G = \{(x, y) \in A \times A \mid x \text{ é divisível por } y\}$$

Pela enumeração dos seus elementos, o grafo G escreve-se:

$$G = \{(-1, -1), (-1, 1), (0, -1), (0, 1), (0, 2), (1, -1), (1, 1), (2, -1), (2, 1), (2, 2)\}$$

e, portanto, as representações gráficas da relação R são:

1) *Diagrama cartesiano:*



2) *Tabela de dupla entrada*

A \ A	-1	0	1	2
-1	•		•	
0	•		•	•
1	•		•	
2	•		•	•

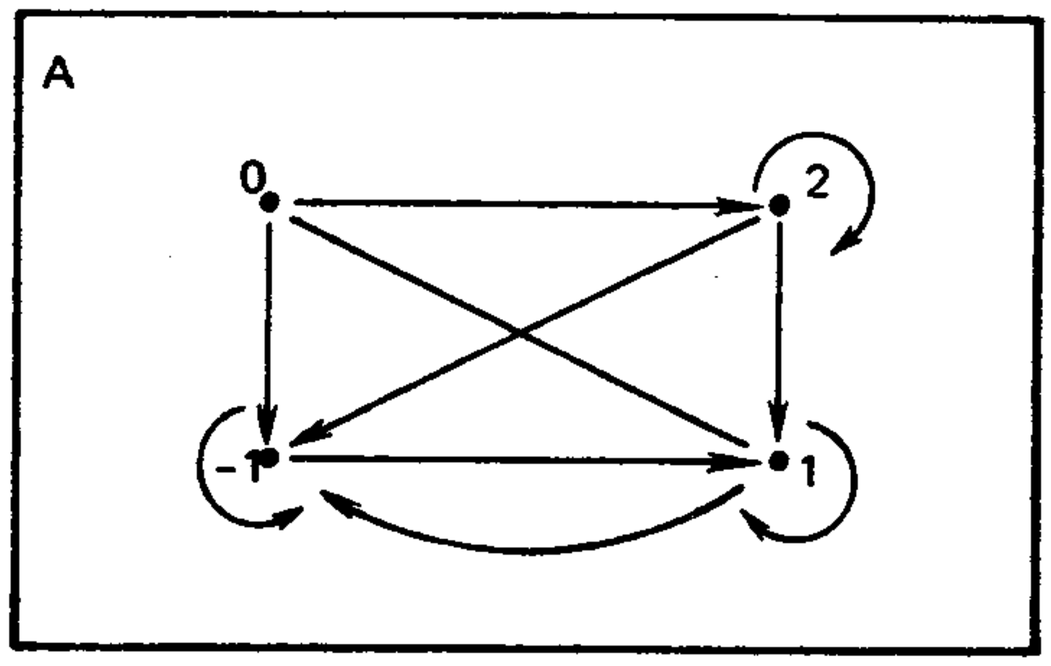
O diagrama cartesiano da relação R consiste nos *dez* pontos assinalados na figura da esquerda acima.

3) *Diagrama sagital:* Neste diagrama sagital cumpre observar:

i) O elemento 0 está ligado por uma flecha a cada um dos outros três elementos, -1, 1 e 2, porque 0 é divisível por cada um deles;

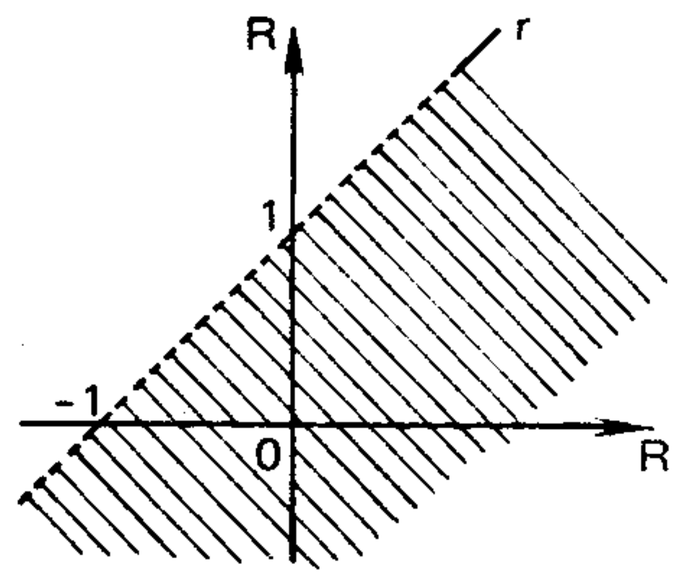
ii) Cada elemento não nulo de A está ligado a si mesmo por uma flecha, isto é, há um *laço* em torno de -1, 1 e 2, porque cada um desses elementos é divisível por si mesmo;

iii) Os elementos -1 e 1 são extremidades de flechas que têm origem em cada elemento de A, porque cada elemento de A é divisível por -1 e por 1.



3) Seja a relação S no conjunto **R** dos números reais definida pelo grafo:

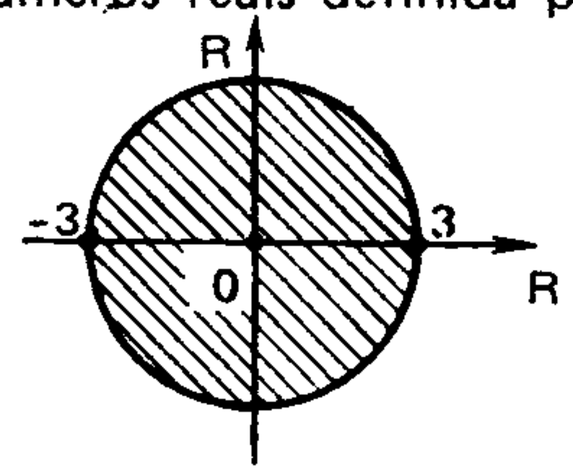
$$G = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y < x + 1\}$$



O diagrama cartesiano desta relação é o *semiplano aberto* cuja *origem* é a reta r de equação $y = x + 1$ e que contém o ponto **O**(0, 0).

4) Seja a relação T no conjunto **R** dos números reais definida pelo grafo:

$$G = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$



O diagrama cartesiano desta relação é o *disco fechado* de centro **O** e raio 3.

3. OPERAÇÕES COM RELAÇÕES

Sejam R e S relações de A em B cujos grafos respectivos são G e H:

$$R = (G, A, B) \quad e \quad S = (H, A, B)$$

Sobre R e S efetuam-se as operações usuais de *interseção, reunião, complementação* e *diferença*, isto é, determinam-se $R \cap S$, $R \cup S$, $C_{A \times B} R$, $R - S$ e $R \Delta S$, que também são relações de A em B definidas pelas seguintes igualdades:

$$R \cap S = (G \cap H, A, B) \quad , \qquad R \cup S = (G \cup H, A, B)$$

$$C_{A \times B} R = (C_{A \times B} G, A, B) \quad , \qquad R - S = (G - H, A, B)$$

$$R \Delta S = (G \Delta H, A, B)$$

Exemplo — Sejam as relações R e S de $A = \{1, 2, 3\}$ em $B = \{3, 4\}$ cujos grafos respectivos são:

$$G = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\} \qquad H = \{(1, 3), (1, 4), (3, 3)\}$$

Temos:

$$R \cap S = (\{(1, 3), (1, 4)\}, A, B)$$

$$R \cup S = (\{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 3)\}, A, B)$$

$$R - S = (\{(2, 4)\}, A, B)$$

$$R \Delta S = (\{(2, 4), (3, 3)\}, A, B)$$

$$C_{A \times B} R = (\{(2, 3), (3, 3), (3, 4)\}, A, B)$$

$$C_{A \times B} S = (\{(2, 3), (2, 4), (3, 4)\}, A, B)$$

4. DOMÍNIO E IMAGEM DE UMA RELAÇÃO

Definição 1 — Chama-se *domínio* de uma relação $R = (G, A, B)$ de A em B a primeira projeção do seu grafo G.

Representa-se pela notação D(R), que se lê: "domínio de R". Portanto, $D(R) = pr_1 G$, isto é, simbolicamente:

$$D(R) = \{x \in A \mid (\exists y)\ (y \in B \quad e \quad (x, y) \in G)\}$$

Em outros termos, o *domínio* de uma relação $R = (G, A, B)$ de A em B é o conjunto dos primeiros elementos de todos os pares ordenados que pertencem ao grafo G de R, isto é:

$$D(R) = \{x \mid (x, y) \in G\}$$

Como $pr_1 G \subset A$, segue-se que D(R) é um subconjunto do conjunto de partida A de R : $D(R) \subset A$.

Definição 2 — Chama-se *imagem* de uma relação $R = (G, A, B)$ de A em B a segunda projeção do seu grafo G.

Representa-se pela notação I(R), que se lê: "imagem de R". Portanto, $I(R) = pr_2 G$, isto é, simbolicamente:

$$I(R) = \{y \in B \mid (\exists x)\ (x \in A \quad e \quad (x, y) \in G)\}$$

Em outros termos, a *imagem* de uma relação R = (G, A, B) de A em B é o conjunto dos segundos elementos de todos os pares ordenados que pertencem ao grafo G de R, isto é:

$$I(R) = \{y \mid (x, y) \in G\}.$$

Como $pr_2 G \subset B$, segue-se que I(R) é um subconjunto do conjunto de chegada B de R : $I(R) \subset B$.

Em particular, para uma relação R em A, tanto D(R) como I(R) são subconjuntos de A.

Quando a relação R de A em B está representada por um diagrama sagital, então o *domínio* de R é o conjunto de todos os elementos de A que são *origens* de flechas, e a *imagem* de R é o conjunto de todos os elementos de B que são *extremidades* de flechas.

Exemplos:

1) Seja a relação R de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{a, b, c\}$ definida pelo grafo:

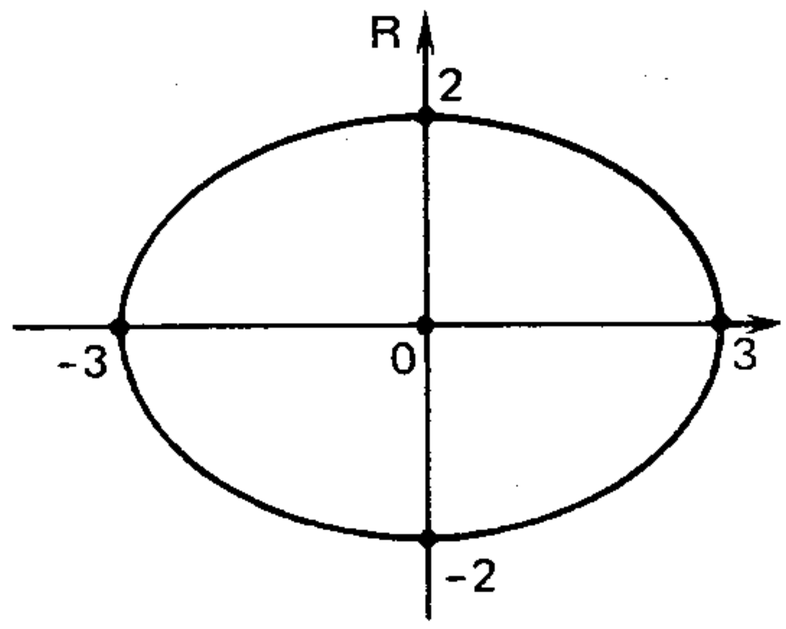
$$G = \{(2, a), (4, a), (4, c)\}$$

Temos:

$$D(R) = \{2, 4\}, \qquad I(R) = \{a, c\}$$

2) Seja a relação S no conjunto **R** dos números reais cujo grafo é:

$$G = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 4x^2 + 9y^2 = 36\}$$



Temos aqui:

$D(S) = \{x \in \mathbf{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 3\} = [-3, 3]$

$I(S) = \{y \in \mathbf{R} \mid -2 \leqslant y \leqslant 2\} = [-2, 2]$

5. RELAÇÃO RECÍPROCA

Seja R = (G, A, B) uma relação de A em B. Como o *grafo recíproco* G^{-1} de G está contido em B × A ($G^{-1} \subset B \times A$), a terna ordenada ($G^{-1}$, B, A) é uma relação de B em A.

Definição — Chama-se *relação recíproca* de uma relação R = (G, A, B) de A em B, a relação (G^{-1}, B, A) de B em A.

A relação recíproca de R representa-se pela notação R^{-1}, que se lê: "R menos um". Portanto, temos $R^{-1} = (G^{-1}, B, A)$, onde o grafo recíproco G^{-1} de G é o conjunto dos pares ordenados recíprocos de todos os pares ordenados que pertencem ao grafo G de R, isto é:

$$G^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in G\}$$

No caso particular em que B = A, também se diz que R^{-1} é a *relação oposta* de R.

Se a relação R de A em B está representada por um *diagrama sagital,* invertendo o sentido das flechas obtém-se a representação gráfica análoga da relação recíproca R^{-1} de B em A.

Se a relação R de A em B está representada por uma *tabela de dupla entrada,* a representação análoga da relação recíproca R^{-1} de B em A resulta da anterior mediante a simples troca de linhas por colunas.

Finalmente, os *diagramas cartesianos* de R e de R^{-1} são *simétricos* em relação à reta que contém a bissetriz do 1º quadrante, porque os pontos (x, y) e (y, x) são simétricos em relação a essa reta e, por definição:

$$(x, y) \in G \Longleftrightarrow (y, x) \in G^{-1}$$

6. PROPRIEDADES DA RELAÇÃO RECÍPROCA

(P_1) *A relação recíproca de* R^{-1} *é a relação* R, *isto é:* $(R^{-1})^{-1} = R$.

Dem.: — Com efeito:

$$(R^{-1})^{-1} = ((G^{-1})^{-1}, A, B) = (G, A, B) = R$$

(P_2) *O domínio de* R^{-1} *é igual à imagem de* R, *isto é:* $D(R^{-1}) = I(R)$.

Dem.: — Com efeito:

$$y \in D(R^{-1}) \Longleftrightarrow (\exists x)\ (x \in A \text{ e } (y, x) \in G^{-1})$$
$$\Longleftrightarrow (\exists x)\ (x \in A \text{ e } (x, y) \in G) \Longleftrightarrow y \in I(R)$$

(P_3) *A imagem de* R^{-1} *é igual ao domínio de* R, *isto é:* $I(R^{-1}) = D(R)$.

Dem.: — Com efeito:

$$x \in I(R^{-1}) \Longleftrightarrow (\exists y)\ (y \in B \text{ e } (y, x) \in G^{-1})$$
$$\Longleftrightarrow (\exists y)\ (y \in B \text{ e } (x, y) \in G) \Longleftrightarrow x \in D(R)$$

Exemplos:

1) Seja a relação R de $A = \{1, 2, 3\}$ em $B = \{a, b\}$ cujo grafo é:

$$G = \{(1, a), (1, b), (3, a)\}$$

A relação recíproca de R é a relação R^{-1} de B em A cujo grafo é:

$$G^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (a, 3)\}$$

2) Seja a relação R em $A = \{a, b, c\}$ cujo grafo é:

$$G = \{(a, b), (a, c), (c, c), (c, b)\}$$

A relação oposta de R é a relação R^{-1} em A cujo grafo é:

$$G^{-1} = \{(b, a), (c, a), (c, c), (b, c)\}$$

3) Seja a relação S em **R**(conjunto dos números reais) definida pelo grafo:

$$H = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 4x^2 + 9y^2 = 36\}$$

A relação oposta de S é a relação S^{-1} em **R** definida pelo grafo:

$$H^{-1} = \{(y, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 4x^2 + 9y^2 = 36\}$$

7. RELAÇÃO IDENTIDADE

Definição — Dado um conjunto A, chama-se *relação identidade em* A ou *relação idêntica em* A a relação $I_A = (D_A, A, A)$ cujo grafo D_A é a *diagonal* de $A \times A$, isto é: $D_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$.

É imediato:

$$D(I_A) = I(I_A) = A \quad , \qquad I_A^{-1} = I_A$$

Quando o conjunto A estiver subentendido, bastará dizer "relação identidade" ou apenas "identidade" e usar o símbolo I para designar esta relação.

Exemplo: — Seja o conjunto $A = \{-1, 0, 1, 2\}$. A relação identidade I_A em A é definida pelo grafo:

$$D_A = \{(-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$$

8. IMAGEM DE UM CONJUNTO POR UMA RELAÇÃO

Seja $R = (G, A, B)$ uma relação de A em B e seja X uma *parte* de $A (X \subset A)$.

Definição — Chama-se *imagem* de X pela relação R o conjunto de todos os elementos y de B para os quais existe $x \in X$ tal que $(x, y) \in G$.

Este conjunto representa-se pela notação R(X), que se lê: "R de X". Portanto, simbolicamente:

$$R(X) = \{y \in B \mid (\exists x)\ (x \in X \text{ e } (x, y) \in G)\}$$

Obviamente, R(X) é um subconjunto de B: $R(X) \subset B$.

No caso particular em que X é um conjunto unitário: $X = \{a\}$, escreve-se R(a) em lugar de $R(\{a\})$.

Exemplo: — Sejam os conjuntos:

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 19, 33\}, \qquad B = \{1, 3, 7, 10, 11, 13, 17\}$$

e as duas *partes* de A:

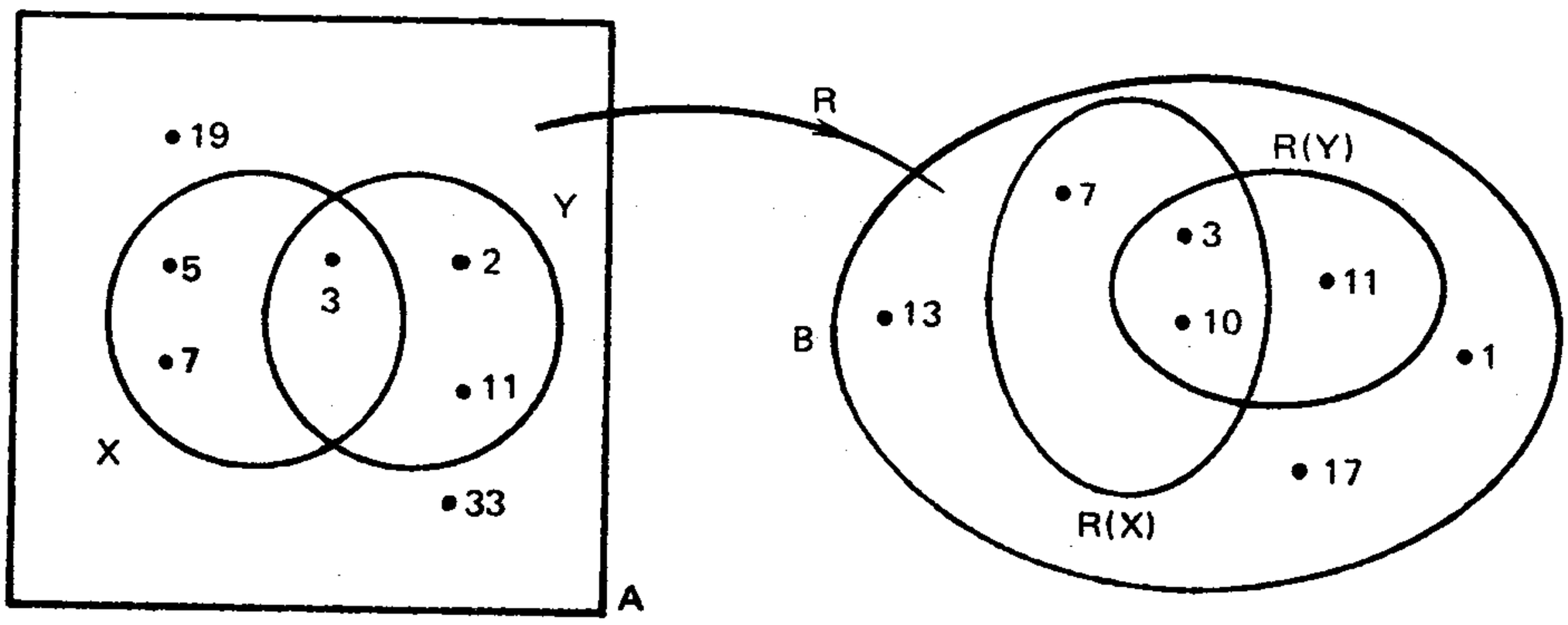
$$X = \{3, 5, 7\}, \qquad Y = \{2, 3, 11\}$$

Consideremos a relação R de A em B definida pelo grafo:

$$G = \{(x, y) \in A \times B \mid x|y\} =$$
$$= \{(2, 10), (3, 3), (5, 10), (7, 7), (11, 11)\}$$

Temos:

$$R(X) = \{3, 7, 10\} \quad \text{e} \quad R(Y) = \{3, 10, 11\}$$



9. IMAGEM RECÍPROCA DE UM CONJUNTO POR UMA RELAÇÃO

Seja $R = (G, A, B)$ uma relação de A em B e seja Y uma *parte* de $B (Y \subset B)$.

Definição — Chama-se *imagem recíproca* de Y pela relação R a imagem $R^{-1}(Y)$ de Y pela relação recíproca $R^{-1} = (G^{-1}, B, A)$ de R.

Em outros termos, a *imagem recíproca* $R^{-1}(Y)$ de Y pela relação R é o conjunto de todos os elementos x de A para os quais existe $y \in Y$ tal que $(y, x) \in G^{-1}$ ou $(x, y) \in G$. Portanto, simbolicamente:

$$R^{-1}(Y) = \{x \in A \mid (\exists\, y)\ (y \in Y \ \text{ e } \ (x, y) \in G)\}$$

Obviamente, $R^{-1}(Y)$ é um subconjunto de A: $R^{-1}(Y) \subset A$.

No caso particular em que Y é um conjunto unitário: $Y = \{b\}$, escreve-se $R^{-1}(b)$ em lugar de $R^{-1}(\{b\})$.

Exemplo — Seja a relação R de $A = \{1, 2, 3\}$ em $B = \{a, b, c, d\}$ cujo grafo é:

$$G = \{(1, a), (2, b), (3, c), (3, d)\}$$

Considerando as *partes* de B: $Y = \{b, c, d\}$ e $Z = \{c, d\}$, temos:

$$R^{-1}(Y) = \{2, 3\}\ , \quad R^{-1}(Z) = \{3\}$$

10. NÚMERO DE RELAÇÕES ENTRE DOIS CONJUNTOS FINITOS

O número de relações distintas entre dois conjuntos finitos A e B, com *m* e *n* elementos, respectivamente, é igual a 2^{mn}, porque o produto cartesiano $A \times B$ tem *mn* elementos e por conseguinte admite 2^{mn} subconjuntos, cada um dos quais é o grafo de uma relação de A em B.

Entre essas 2^{mn} relações de A em B figuram aquelas cujos grafos são $A \times B$ e o conjunto vazio ϕ, também consideradas relações de A em B porque $A \times B \subset A \times B$ e $\phi \subset A \times B$.

Em particular, o número de relações distintas em A é igual a 2^{m^2}, inclusive aquelas cujos grafos são $A \times A$ e ϕ.

Assim, p. ex., o número de relações distintas de $A = \{1, 2, 3\}$ em $B = \{a, b\}$ é igual a $2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$, e o número de relações distintas em A é igual a $2^9 = 256$.

11. COMPOSIÇÃO DE RELAÇÕES

Sejam A, B e C três conjuntos, R = (G, A, B) e S = (H, B, C) duas relações tais que o conjunto de chegada da primeira e o conjunto de partida da segunda coincidem. Então, o grafo composto $H \circ G \subset A \times C$ e, portanto, a terna ordenada $(H \circ G, A, C)$ é uma relação de A em C.

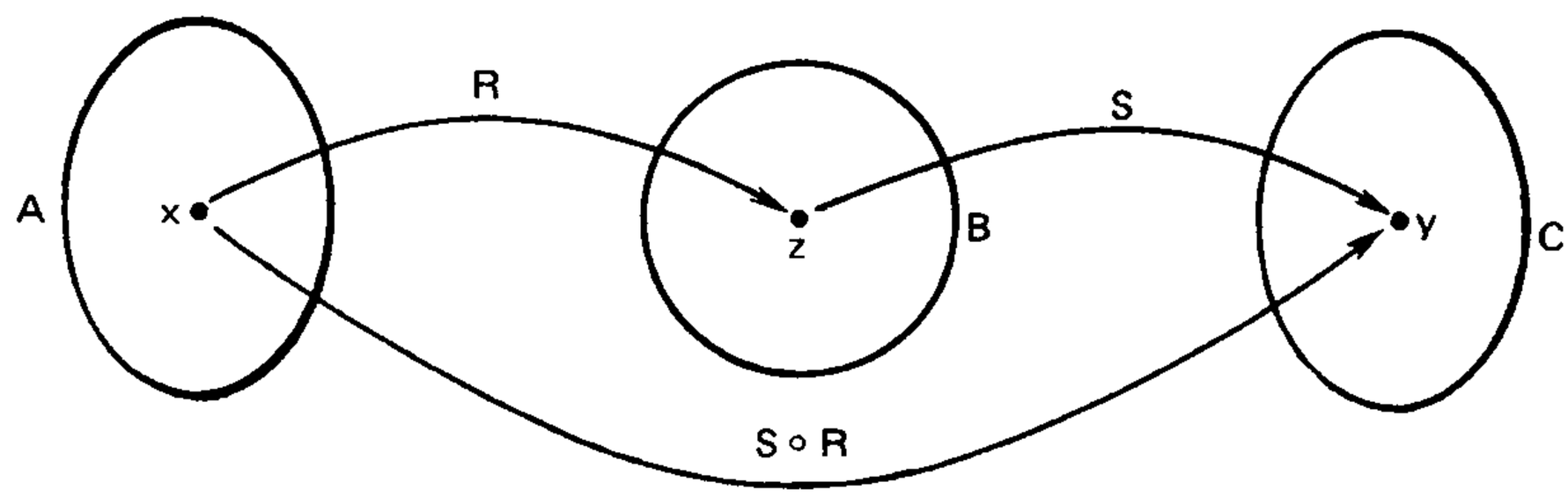
Definição — Chama-se *relação composta das relações* S *e* R a relação $(H \circ G, A, C)$ de A em C.

Em outros termos, a *relação composta de* S *e* R é a relação de A em C cujo grafo $H \circ G$ é o conjunto de todos os pares ordenados $(x, y) \in A \times C$ para os quais existe $z \in B$ tal que $(x, z) \in G$ e $(z, y) \in H$:

$$H \circ G = \{(x, y) \in A \times C \mid (\exists z)\ (z \in B,\ (x, z) \in G \text{ e } (z, y) \in H)\}$$

Esta relação representa-se pela notação $S \circ R$, que se lê: "S composto com R" ou, abreviadamente, "S círculo R". Logo, $S \circ R = (H \circ G, A, C)$.

Este importante conceito de relação composta é traduzido pelo diagrama:



Cumpre notar que a operação de composição das relações S e R (nesta ordem) somente é possível quando o conjunto de chegada de R é igual ao conjunto de partida de S, isto é, uma operação nem sempre possível de ser efetuada sobre duas relações dadas quaisquer.

No caso particular em que B = C = A, isto é, em que R = (G, A, A) e S = (H, A, A) são relações em A, então, as duas relações compostas $S \circ R$ e $R \circ S$ ficam definidas, mas são geralmente diferentes: $S \circ R \neq R \circ S$. Assim, a operação de composição de relações não goza da propriedade comutativa.

Exemplos:

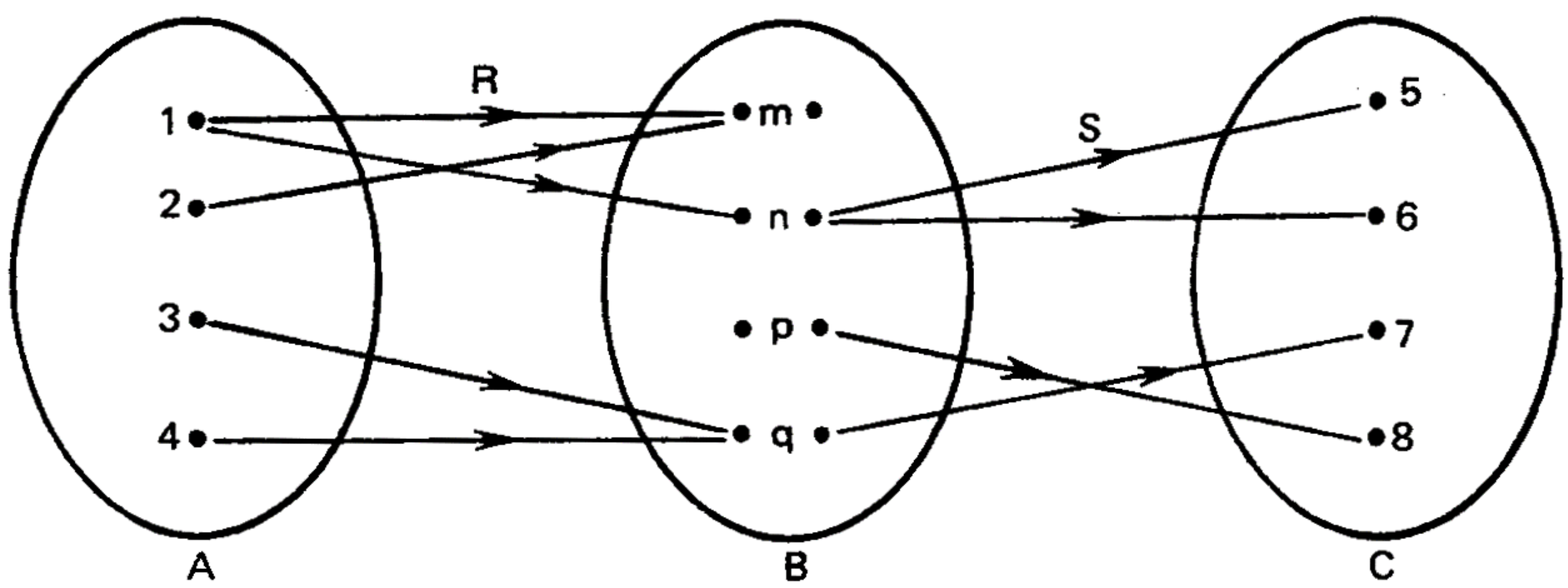
1) Sejam os conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad B = \{m, n, p, q\}, \qquad C = \{5, 6, 7, 8\}$$

e as relações R de A em B e S de B em C cujos grafos respectivos são:

$$G = \{(1, m), (1, n), (2, m), (3, q), (4, q)\}$$

$$H = \{(n, 5), (n, 6), (p, 8), (q, 7)\}$$



Temos:

$$S \circ R = (\{(1, 5), (1, 6), (3, 7), (4, 7)\}, A, C)$$

2) Sejam os conjuntos:

$$A = \{1, 3, 4\}, \quad B = \{2, 3, 5\}, \quad C = \{3, 6, 8, 11\}$$

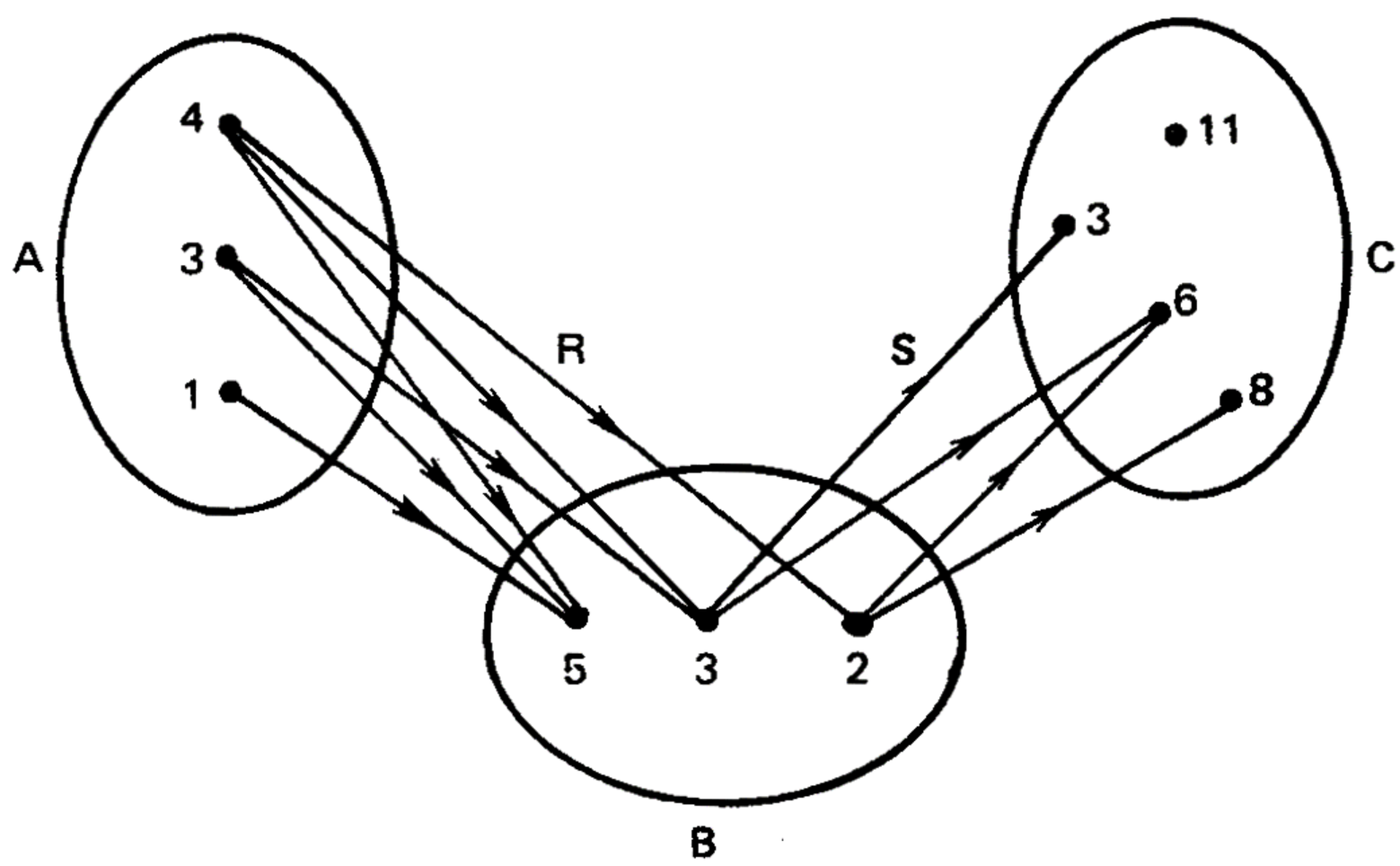
e as relações R de A em B e S de B em C cujos grafos respectivos são:

$$G = \{(x, z) \in A \times B \mid x + z > 5\}, \quad H = \{(z, y) \in B \times C \mid z \mid y\}$$

Pela enumeração dos seus elementos, os grafos G e H escrevem-se:

$$G = \{(1, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5)\}$$

$$H = \{(2, 8), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$$



Temos:

$$S \circ R = ((\{(3, 3), (3, 6), (4, 3), (4, 6), (4, 8)\}, A, C)$$

3) Sejam U = (G, **R**, **R**) e V = (H, **R**, **R**) relações em **R**(conjunto dos números reais) cujos grafos respectivos G e H são:

$$G = \{(x, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x^2 + z^2 = 4\}, \quad H = \{(z, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid z + 2y = 1\}$$

Eliminando z entre as duas equações: $x^2 + z^2 = 4$ e $z + 2y = 1$, acha-se $x^2 + 4y^2 - 4y - 3 = 0$. Logo, a relação composta de V e U é:

$$V \circ U = (\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x^2 + 4y^2 - 4y - 3 = 0\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

Analogamente, a relação composta de U e V é:

$$U \circ V = (\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x^2 + 4y^2 - 2x - 15 = 0\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

Observe-se que $V \circ U \neq U \circ V$.

12. RELAÇÃO RECÍPROCA DE UMA RELAÇÃO COMPOSTA

Teorema — Quaisquer que sejam as relações R = (G, A, B) *de* A *em* B *e* S = (H, B, C) *de* B *em* C, *tem-se:*

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

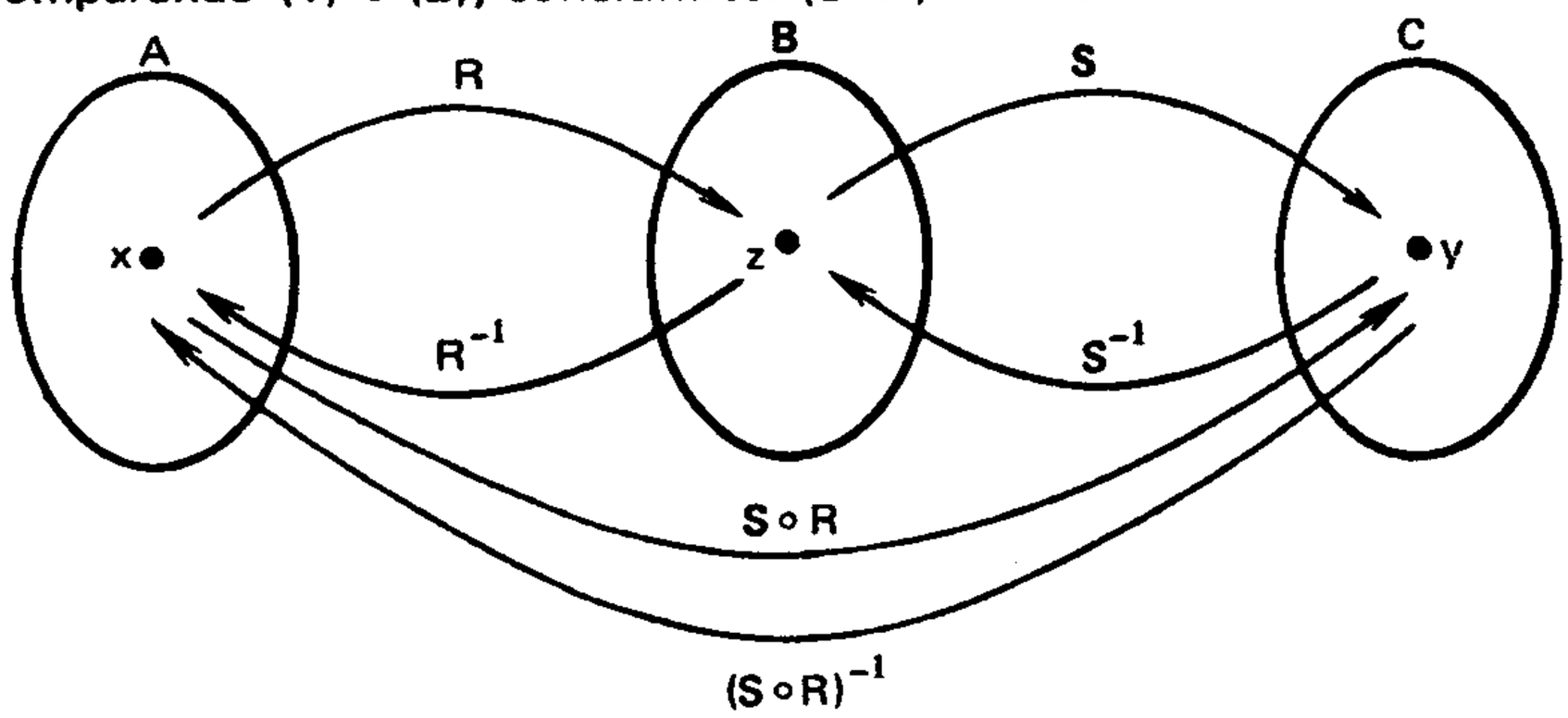
Dem.: — Com efeito, $S \circ R = (H \circ G, A, C)$ e, portanto:

$$(S \circ R)^{-1} = ((H \circ G)^{-1}, C, A) = (G^{-1} \circ H^{-1}, C, A) \qquad (1)$$

Por outra parte, $R^{-1} = (G^{-1}, B, A)$, $S^{-1} = (H^{-1}, C, B)$ e, portanto:

$$R^{-1} \circ S^{-1} = (G^{-1} \circ H^{-1}, C, A) \qquad (2)$$

Comparando (1) e (2), concluímos: $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.



Portanto, a relação recíproca da relação composta de S e R é igual à relação composta das relações recíprocas de R e S.

13. COMPOSIÇÃO DE UMA RELAÇÃO COM A IDENTIDADE

Teorema — Qualquer que seja a relação $R = (G, A, B)$ *de* A *em* B, *tem-se:*

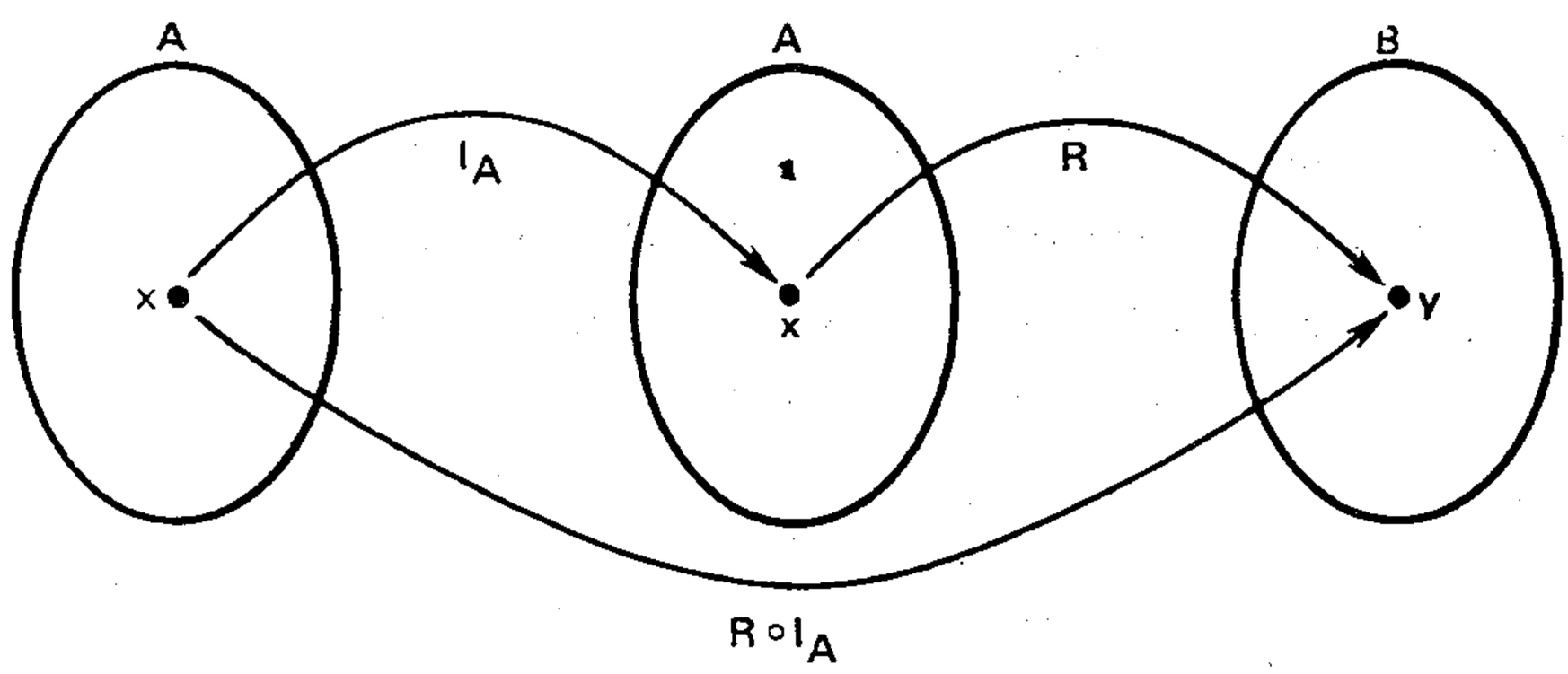
$$\text{i) } R \circ I_A = R \quad ; \quad \text{ii) } I_B \circ R = R$$

onde $I_A = (D_A, A, A)$ *e* $I_B = (D_B, B, B)$ *são as relações identidade em* A *e em* B.

Dem.:

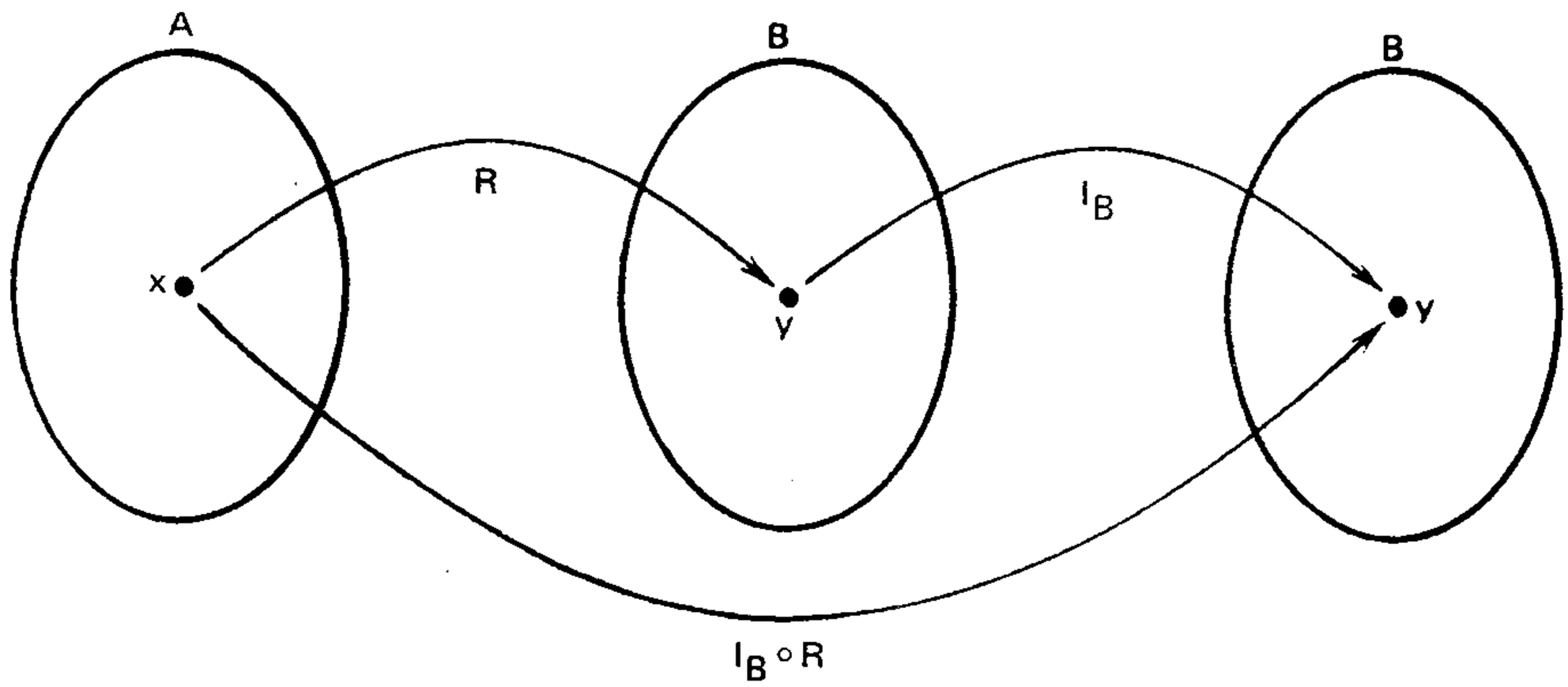
i) Como $R \circ I_A = (G \circ D_A, A, B)$ e $R = (G, A, B)$ são relações de A em B, se $G \circ D_A = G$, então $R \circ I_A = R$. Com efeito, temos:

$$G \circ D_A = \{(x, y) \in A \times B \mid (\exists x)\ (x \in A, (x, x) \in D_A, (x, y) \in G)\} =$$
$$= \{(x, y) \in A \times B \mid (x, y) \in G\} = G$$



ii) Analogamente, como $I_B \circ R = (D_B \circ G, A, B)$ e $R = (G, A, B)$ são relações de A em B, se $D_B \circ G = G$, então $I_B \circ R = R$. Com efeito, temos:

$$D_B \circ G = \{(x, y) \in A \times B \mid (\exists y)\ (y \in B, (x, y) \in G, (y, y) \in D_B)\} =$$
$$= \{(x, y) \in A \times B \mid (x, y) \in G\} = G$$



Em particular, *para toda relação* R = (G, A, A) *em* A *tem-se:*

$$R \circ I_A = I_A \circ R.$$

14. ASSOCIATIVIDADE DA COMPOSIÇÃO DE RELAÇÕES

Teorema — Quaisquer que sejam as relações R = (G, A, B) *de* A *em* B, S = (H, B, C) *de* B *em* C *e* T = (J, C, D) *de* C *em* D, *tem-se:*

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$$

Dem.: — Com efeito, como $T \circ S = (J \circ H, B, D)$, temos:

$$(T \circ S) \circ R = ((J \circ H) \circ G, A, D) = (J \circ (H \circ G), A, D) \qquad (1)$$

Analogamente, como $S \circ R = (H \circ G, A, C)$, temos:

$$T \circ (S \circ R) = (J \circ (H \circ G), A, D) \qquad (2)$$

Comparando (1) e (2), concluímos: $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

NOTA — Segundo este teorema, as duas maneiras de colocar parênteses na expressão $T \circ S \circ R$ conduzem ambas ao mesmo resultado, e daí a *convenção* de indicar-se a relação $(T \circ S) \circ R$ ou $T \circ (S \circ R)$ por $T \circ S \circ R$, isto é, escrever-se:

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R) = T \circ S \circ R$$

Para um número finito qualquer de relações adota-se convenção análoga, isto é, escreve-se:

$$(U \circ T \circ S) \circ R = U \circ (T \circ S \circ R) = U \circ T \circ S \circ R, \text{ etc.}$$

E X E R C Í C I O S

1. Determinar os elementos do *grafo* e construir o *diagrama cartesiano* das seguintes relações $R = (G, A, B)$ de A em B:

   i) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$

   $xRy \Longleftrightarrow x < y$

   ii) $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 6, 7, 10\}$

   $xRy \Longleftrightarrow x \mid y$ (x divide y)

2. Determinar os elementos do *grafo* e construir o *diagrama cartesiano* das seguintes relações $R = (G, A, A)$ em A:

   i) $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $xRy \Longleftrightarrow mdc(x, y) = 1$

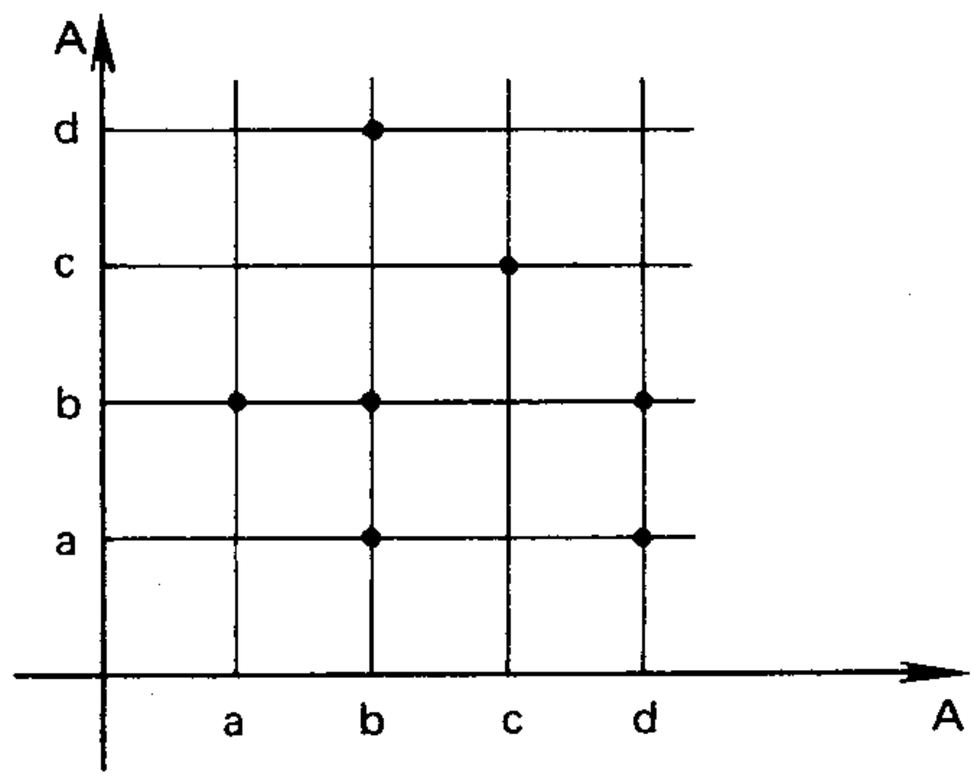
   ii) $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $xRy \Longleftrightarrow 3 \mid (x - y)$

3. Seja R a relação em $A = \{a, b, c, d\}$ cujo diagrama cartesiano consiste nos *sete pontos* assinalados na figura ao lado.

   a) Verdadeiro (V) ou falso (F): cRb, $d \not R a$, $a \not R c$, $b \not R b$.

   b) Determinar os elementos dos conjuntos: $\{x \mid xRb\}$ e $\{y \mid dRy\}$.

   c) Construir o *diagrama sagital* e a *tabela de dupla entrada* da relação R.



4. Seja R a relação em $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cujo diagrama cartesiano consiste nos *oito pontos* assinalados na figura abaixo.

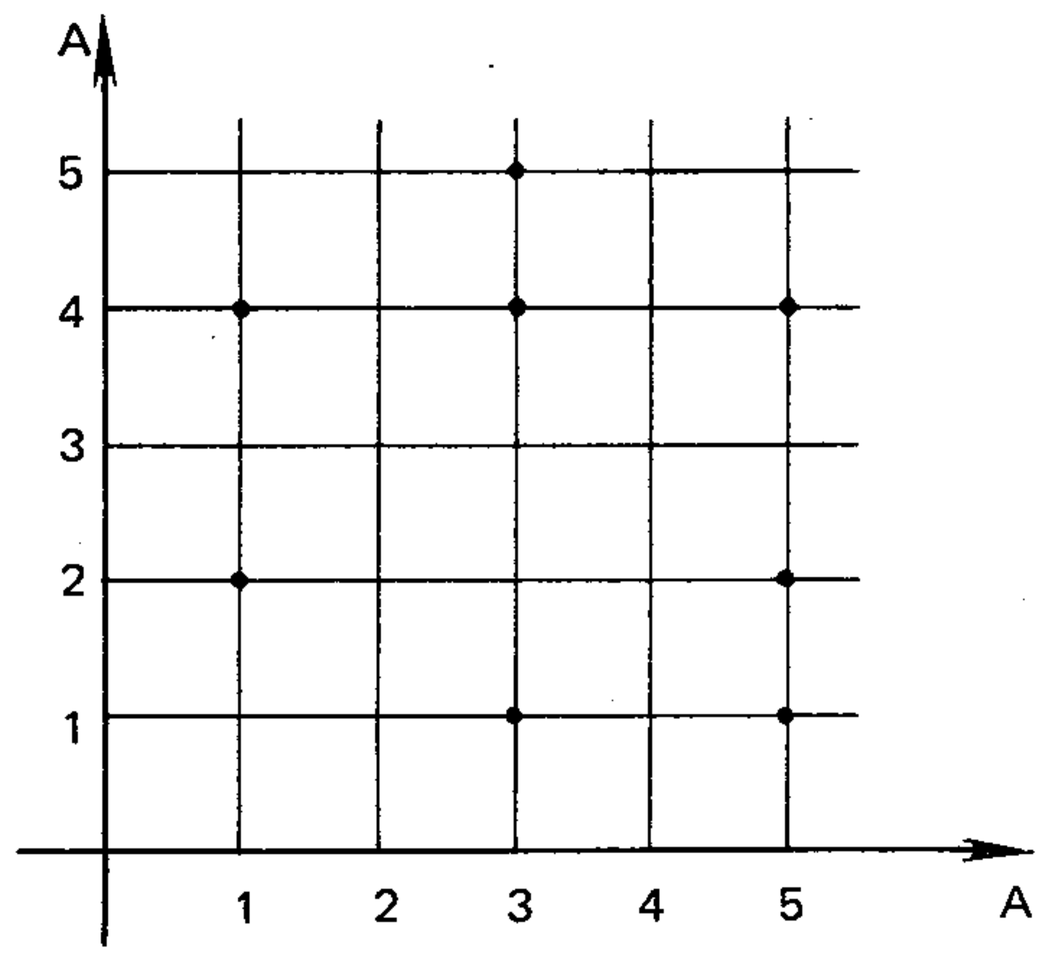
   a) Verdadeiro (V) ou falso (F): 1R4, 2R5, $3 \not R 1$, $5 \not R 3$.

   b) Determinar os elementos dos conjuntos: $\{x \mid 3Rx\}$, $\{x \mid x \not R 2\}$, $\{x \mid 4Rx\}$

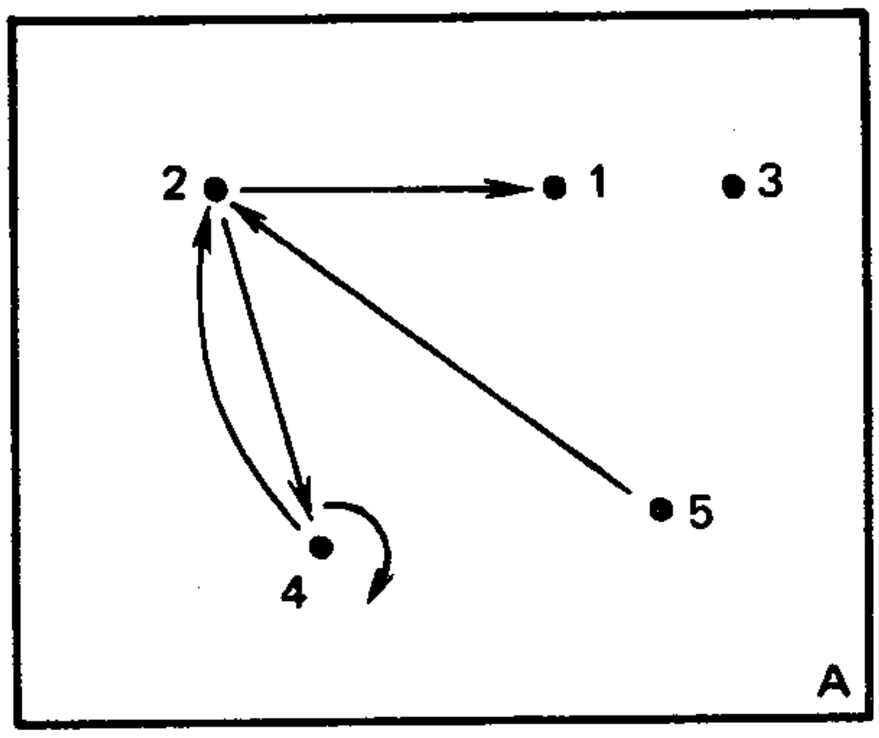
   c) Determinar o *domínio* e a *imagem* de R.

   d) Determinar os elementos do *grafo* da relação recíproca R^{-1} de R.

   e) Construir o *diagrama sagital* e a *tabela de dupla entrada* da relação recíproca R^{-1} de R.



5. Seja R a relação em $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cujo diagrama sagital é dado pela figura ao lado.



   a) Determinar os elementos do *grafo* da relação R.
   b) Determinar o *domínio* e a *imagem* da relação R.
   c) Determinar os elementos do *grafo* de R^{-1}, relação recíproca de R.
   d) Construir o *diagrama cartesiano* e o *diagrama sagital* de R^{-1}.

6. Sejam R e S relações em **N**(conjunto dos números naturais) cujos grafos respectivos são:

$$G = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid 2x + y = 10\}$$

$$H = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid x + 3y = 12\}$$

   a) Determinar os elementos dos grafos G e H.
   b) Determinar o domínio e a imagem de R e de S.
   c) Determinar os elementos dos grafos das relações recíprocas R^{-1} e S^{-1} de R e S.

7. Determinar o *domínio* e a *imagem* das seguintes relações em $A = \{1, 2\}$:

$$xRy \Longleftrightarrow x = y \quad ; \qquad xSy \Longleftrightarrow x < y \quad ; \qquad xTy \Longleftrightarrow x > y$$

8. Determinar o *domínio* e a *imagem* das seguintes relações em $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$xRy \Longleftrightarrow x = 2y \qquad\qquad xSy \Longleftrightarrow x = 2$$

$$xTy \Longleftrightarrow x > 2y \qquad\qquad xUy \Longleftrightarrow x + y = 5$$

9. Construir os *diagramas cartesianos* das relações em **R**(conjunto dos números reais) definidas pelos seguintes grafos:

   a) $G_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 4 \text{ e } y \in [-2, 4]\}$
   b) $G_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25 \text{ e } y \geqslant 0\}$
   c) $G_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25 \text{ e } x > 0\}$
   d) $G_4 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [-2, 4] \text{ e } y \in [0, 3]\}$
   e) $G_5 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 5 \text{ ou } 2x - y = 4\}$
   f) $G_6 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 5 \text{ e } 2x - y = 4\}$
   g) $G_7 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geqslant 4 \text{ e } y \geqslant 3\}$
   h) $G_8 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| \geqslant 3 \text{ e } |y| \geqslant 2\}$
   i) $G_9 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [-3, 2] \text{ e } y \in [1, 3]\}$

j) $G_{10} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + y = 3\}$

k) $G_{11} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + y < 3\}$

10. Construir os *diagramas cartesianos* das relações em **R**(conjunto dos números reais) definidas pelos seguintes grafos:

a) $H_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = |x - 2|\}$

b) $H_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| = 4\}$

c) $H_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |y - x| > 1\}$

d) $H_4 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > |x| + x\}$

e) $H_5 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + |y| < 4\}$

f) $H_6 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |y| = x - 2\}$

g) $H_7 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x + 2| = 7\}$

h) $H_8 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| - |y| = 4\}$

i) $H_9 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x + y| = 6\}$

j) $H_{10} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |y| - |x| > 1\}$

11. Sejam as relações em **R**(conjunto dos números reais):

$$S = (\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y \leqslant 5\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

$$T = (\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - y \leqslant 3 \text{ e } x \geqslant 0\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

$$U = (\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geqslant |x| + x\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

$$V = (\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geqslant |x| - x\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

Construir os *diagramas cartesianos* das relações $S \cap T$ e $U \cap V$.

12. Sejam as relações em **R**(conjunto dos números reais):

$$S = (\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geqslant x^2\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

$$T = (\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \leqslant x + 2\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

$$U = (\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 25\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

$$V = (\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geqslant \frac{4}{9}x^2\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

i) Construir os *diagramas cartesianos* das relações $S \cap T$ e $U \cap V$.

ii) Determinar o *domínio* e a *imagem* das relações $S \cap T$ e $U \cap V$.

13. Seja R a relação de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{1, 3, 5\}$ tal que $xRy \Longleftrightarrow x < y$. Determinar a relação composta de R e R^{-1}, isto é, $R \circ R^{-1}$.

14. Seja R a relação em **N**(conjunto dos números naturais) definida por $xRy \Longleftrightarrow x + 2y = 12$. Determinar $R \circ R$ e $R^{-1} \circ R$.

15. Dadas as relações U e V em **R**(conjunto dos números reais):

$$U = (\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + 2y = 5\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

$$V = (\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x - y = 3\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

determinar $V \circ U$ e $U \circ V$.

16. Determinar os grafos de todas as relações de $A = \{a, b\}$ em $B = \{c\}$.

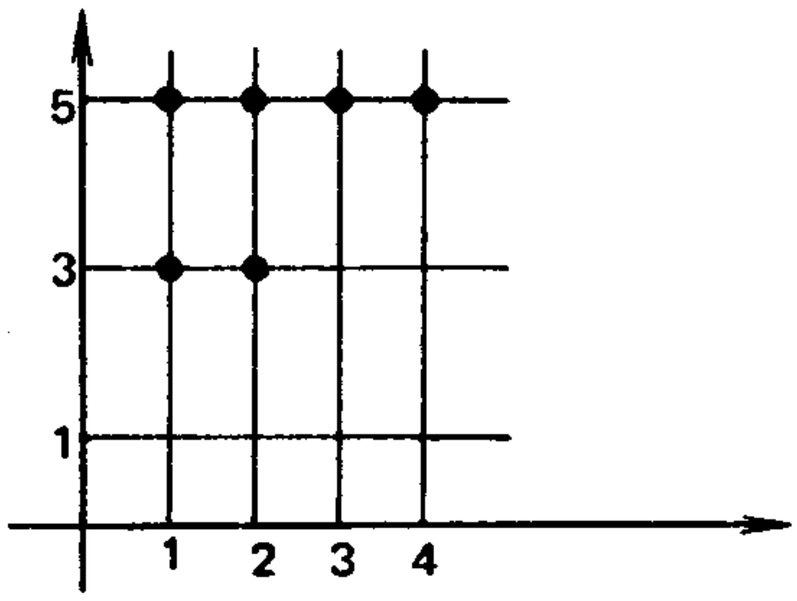
17. Determinar todos os grafos com *três* elementos de relações em $A = \{a, b\}$.

18. Determinar todos os grafos com *sete* elementos de relações R em $A = \{a, b, c\}$ que satisfazem as duas seguintes condições: (i) xRx para todo $x \in A$; (ii) se xRy, então yRx.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

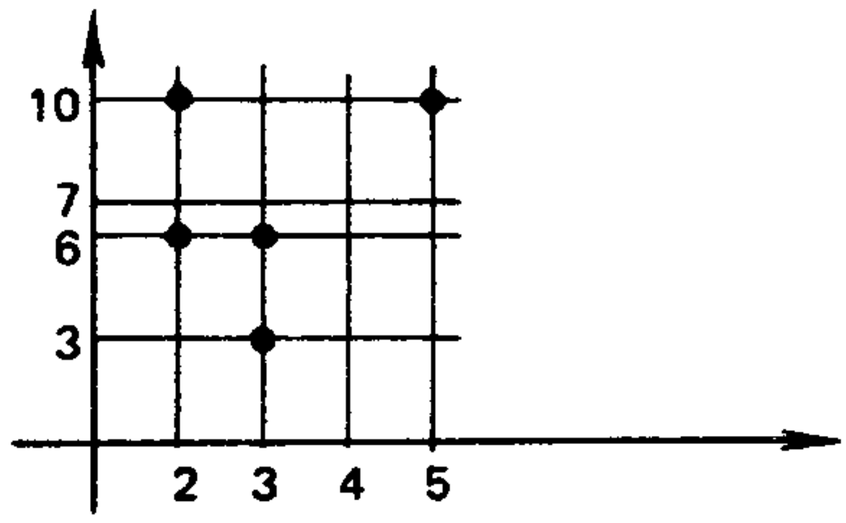
1. (i) $G = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$.

O grafo G consiste nos pares ordenados $(x, y) \in A \times B$ tais que $x < y$.



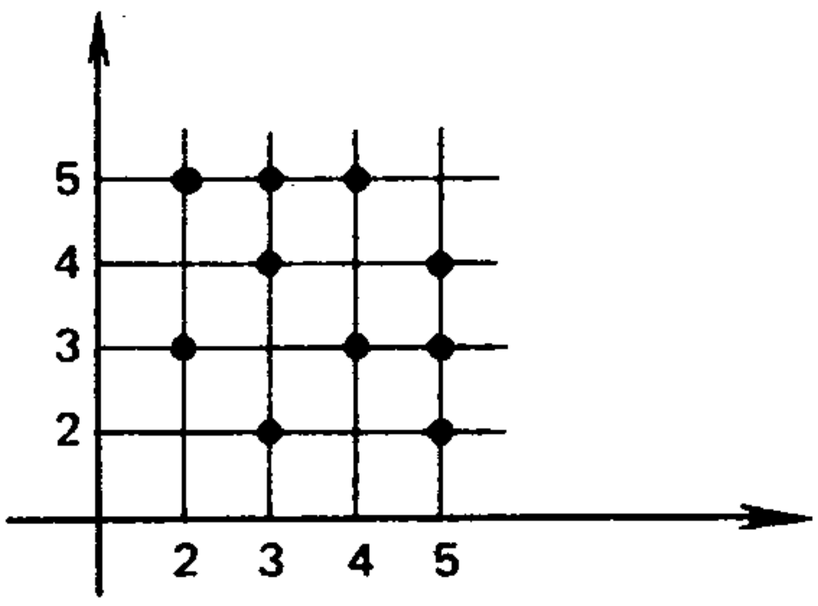
(ii) $G = \{(2, 6), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (5, 10)\}$.

O grafo G consiste nos pares ordenados $(x, y) \in A \times B$ tais que o primeiro elemento x é *divisor* do segundo, y.



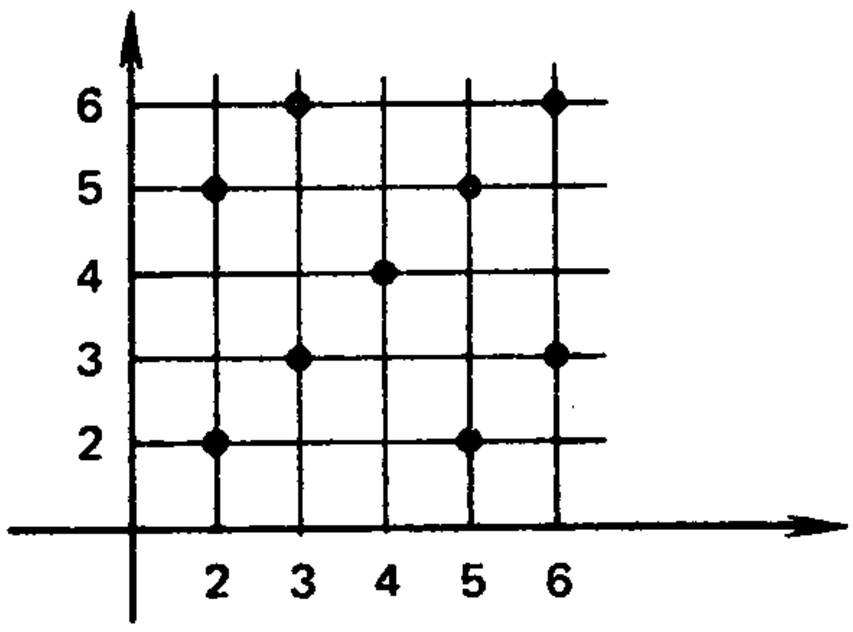
2. (i) $G = \{(2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$

O grafo G consiste nos pares ordenados $(x, y) \in A \times A$ tais que x e y são *primos entre si.*



(ii) $G = \{(2, 2), (2, 5), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (5, 2), (6, 6), (6, 3)\}$

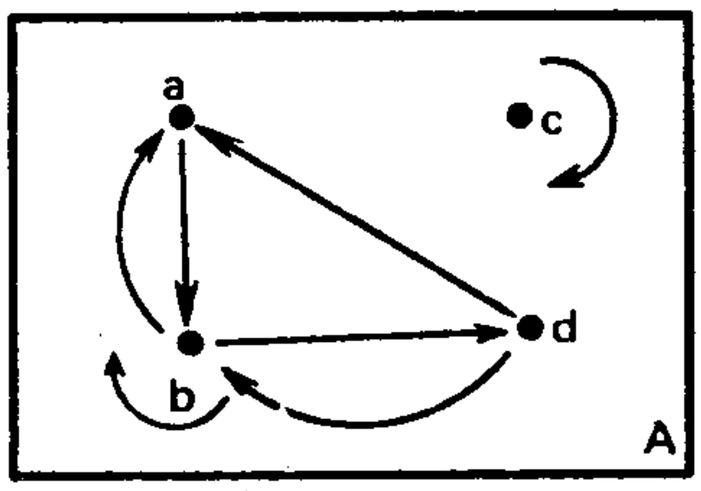
O grafo G consiste nos pares ordenados $(x, y) \in A \times A$ tais que a diferença $x - y$ é *divisível* por 3.



3. a) cRB é F ; dRa é F ; aRc é V ; bRb é F.

b) $\{a, b, d\}$ e $\{a, b\}$

c)



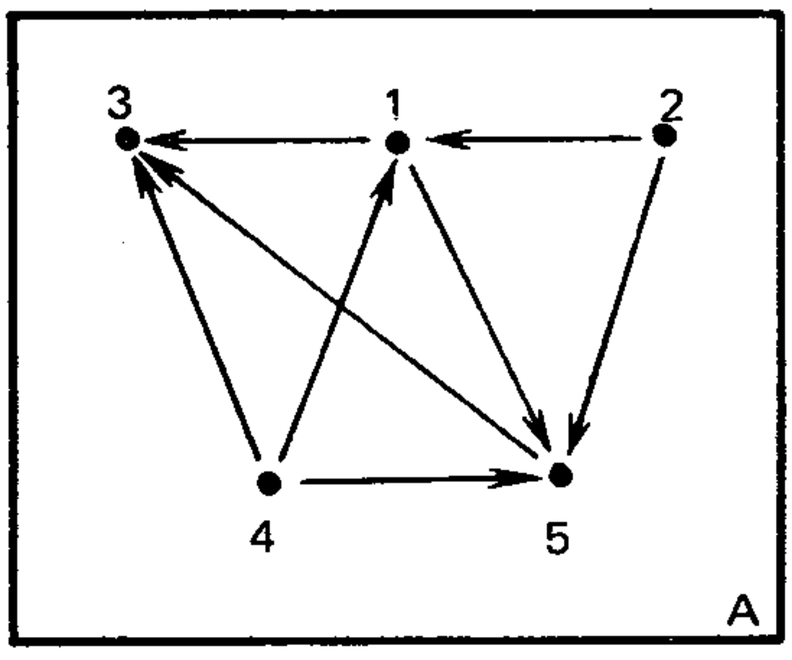
A \ A	a	b	c	d
a		*		
b	*	*		*
c			*	
d	*	*		

4. a) 1R4 é V ; 2R5 é F ; 3R1 é F ; 5R3 é V.

b) $\{1, 4, 5\}$; $\{2, 3, 4\}$;

c) $D(R) = \{1, 3, 5\}$; $I(R) = \{1, 2, 4, 5\}$

d) $\{(2, 1), (4, 1), (1, 3), (4, 3), (5, 3), (1, 5), (2, 5), (4, 5)\}$



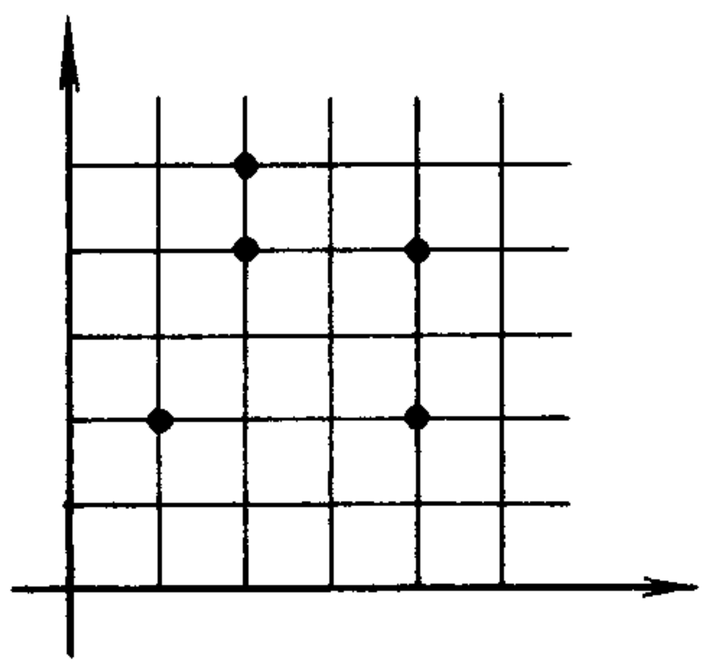
A \ A	1	2	3	4	5
1			*		*
2	*				*
3					
4	*		*		*
5			*		

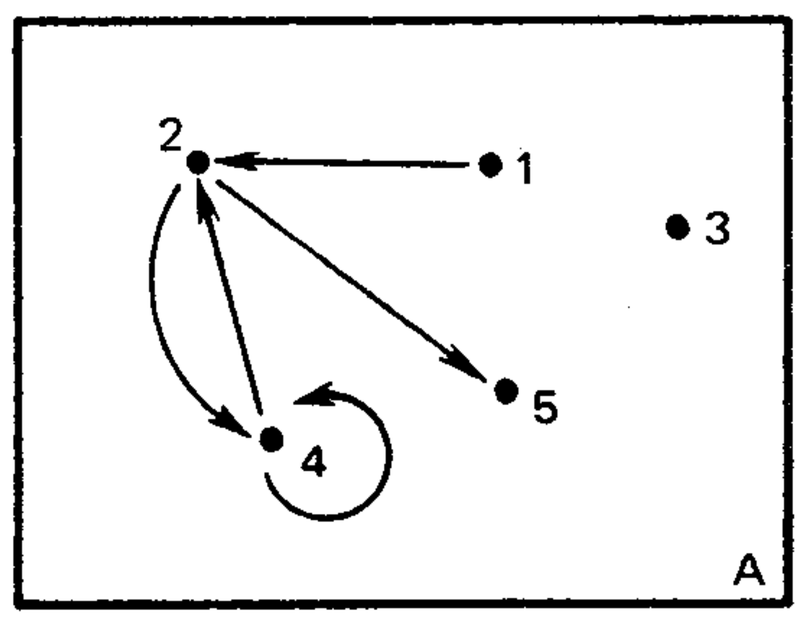
5. a) $\{(2, 1), (2, 4), (4, 2), (4, 4), (5, 2)\}$

b) $D(R) = \{2, 4, 5\}$; $I(R) = \{1, 2, 4\}$

c) $\{(1, 2), (4, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 5)\}$

d)





6. a) $G = \{(1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)\}$; $H = \{(9, 1), (6, 2), (3, 3)\}$

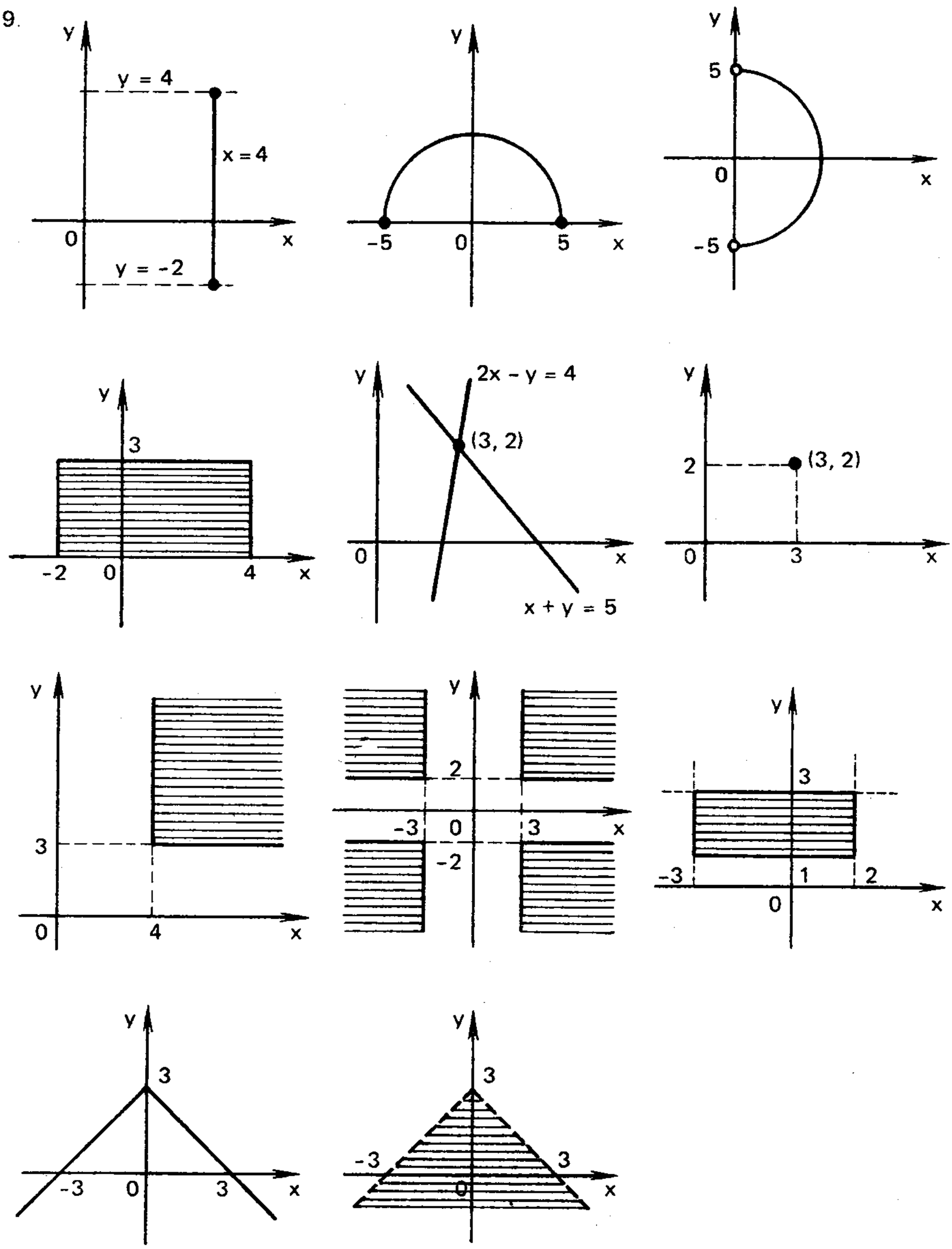
b) $D(R) = \{1, 2, 3, 4\}$; $I(R) = \{2, 4, 6, 8\}$; $D(S) = \{3, 6, 9\}$; $I(S) = \{1, 2, 3\}$

c) $G^{-1} = \{(8, 1), (6, 2), (4, 3), (2, 4)\}$; $H^{-1} = \{(1, 9), (2, 6), (3, 3)\}$

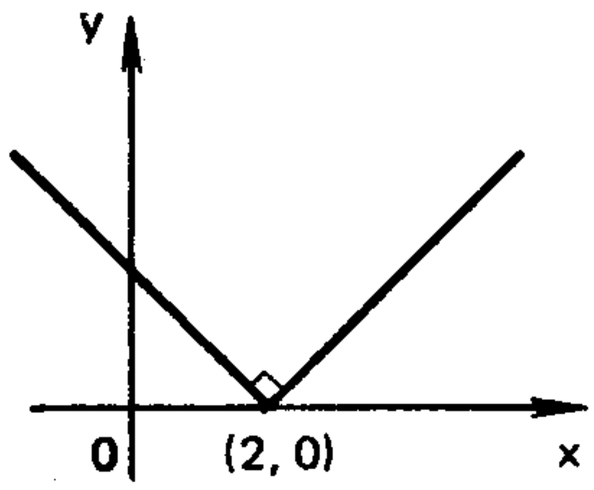
7. $D(R) = \{1, 2\} = I(R)$; $D(S) = \{1\}$; $I(S) = \{2\}$; $D(T) = \{2\}$; $I(T) = \{1\}$

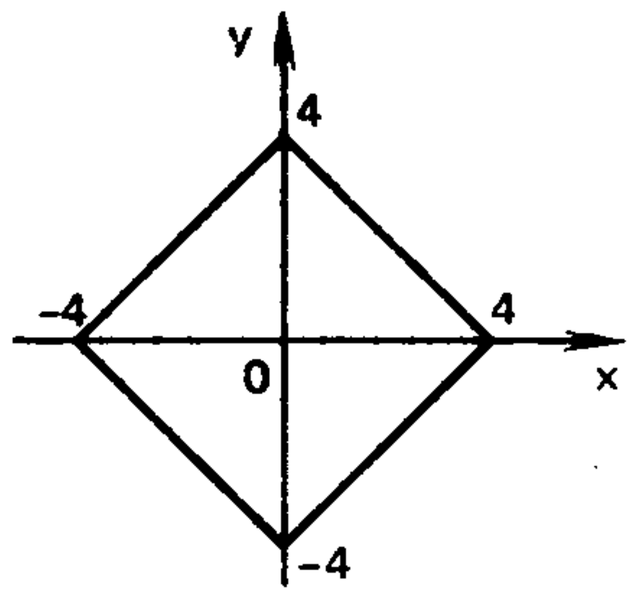
8. $D(R) = \{2, 4\}$; $I(R) = \{1, 2\}$; $D(S) = \{2\}$; $I(S) = \{1, 2, 3, 4\}$; $D(T) = \{3, 4\}$; $I(T) = \{1\}$; $D(U) = I(U) = \{1, 2, 3, 4\}$

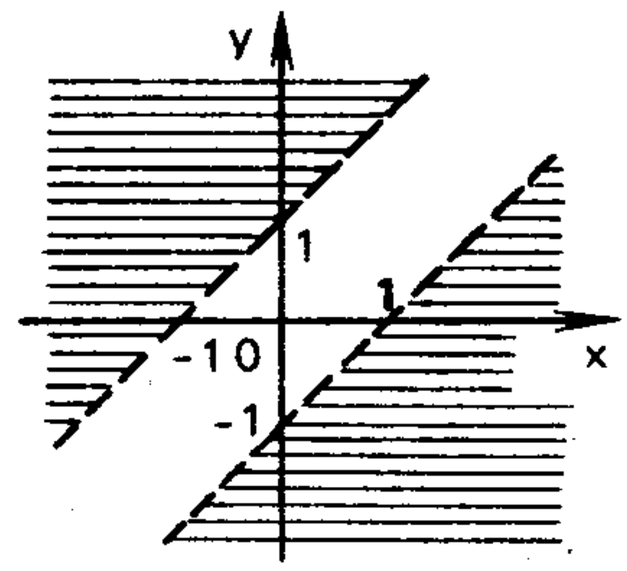
9.

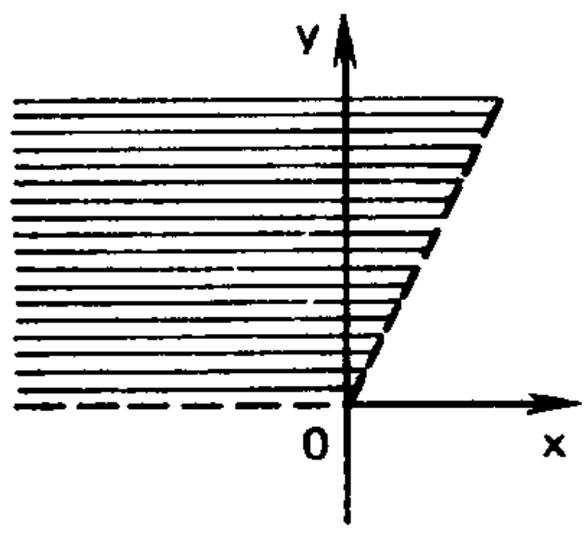

y
y = 4
x = 4
0
x
y = -2
y
-5
0
5
x
y
5
0
x
-5
y
3
-2
0
4
x
y
2x - y = 4
(3, 2)
0
x
x + y = 5
y
2
(3, 2)
0
3
x
y
3
0
4
x
y
2
-3
0
3
x
-2
y
3
-3
1
2
0
x
y
3
-3
0
3
x
y
3
-3
0
3
x

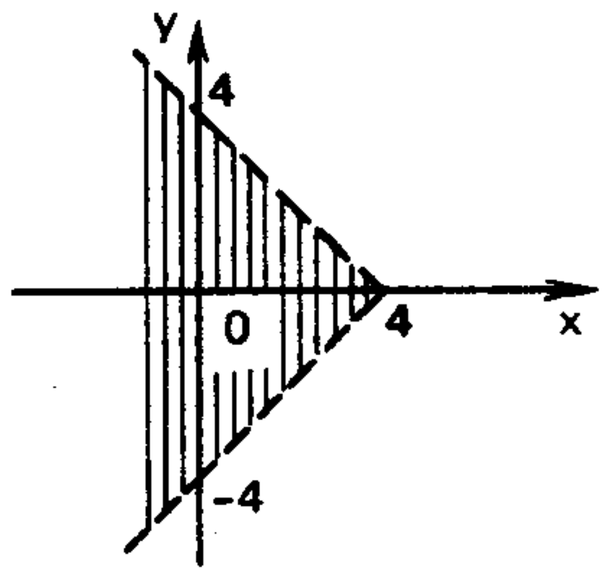
10.

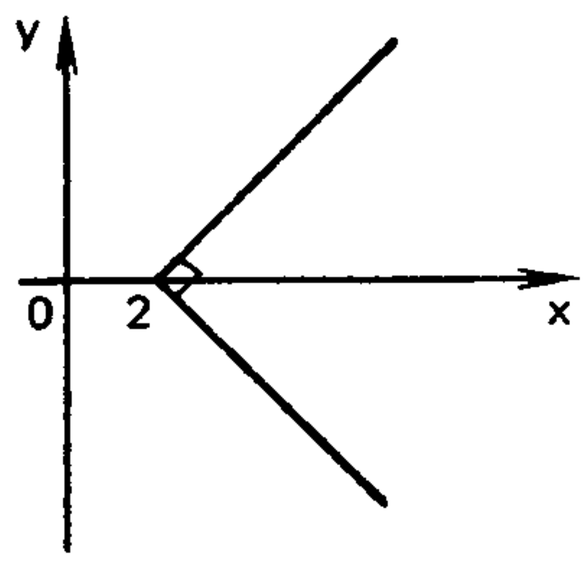

y
0
(2, 0)
x

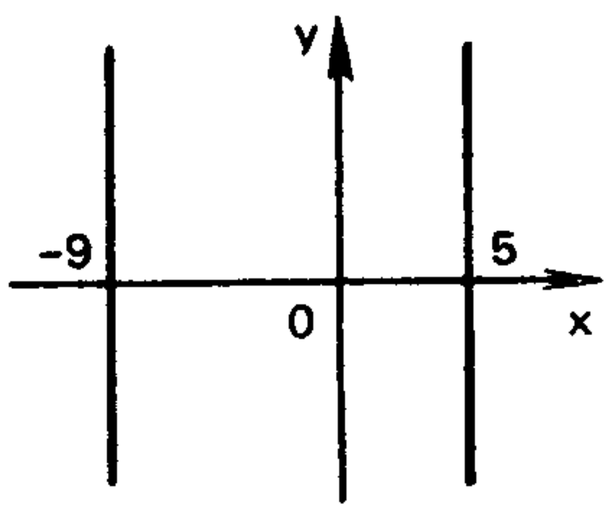

y
4
-4
4
0
x
-4

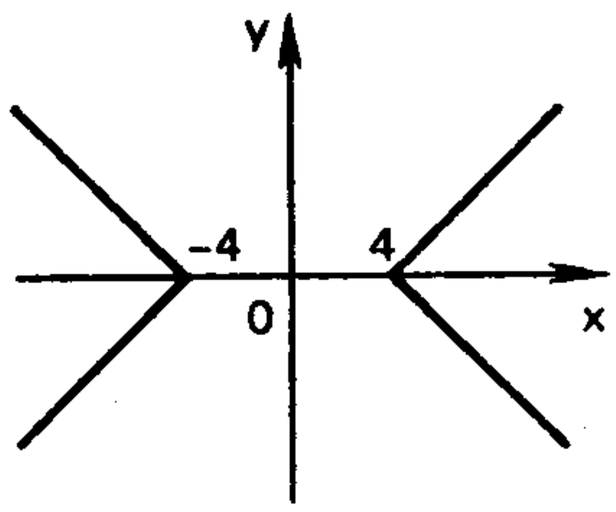

y
1
1
-1 0
x
-1

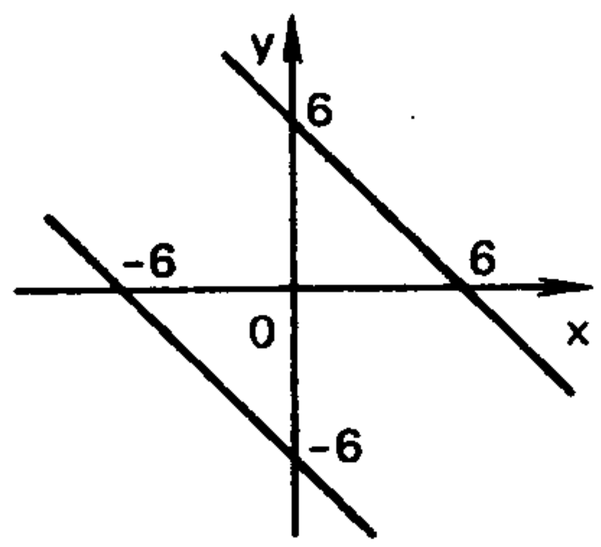

y
0
x

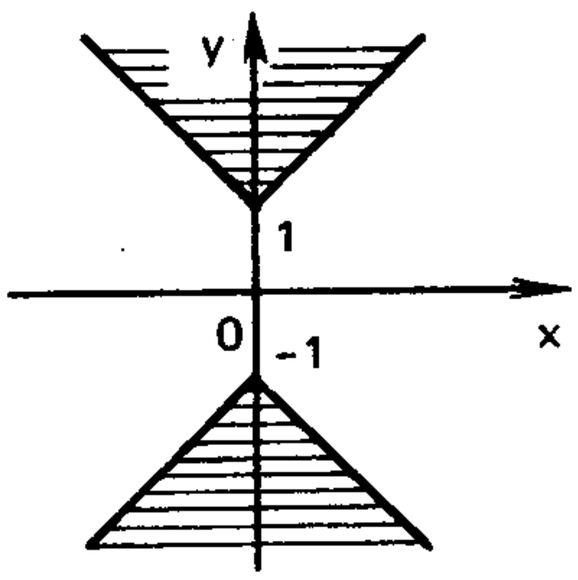

y
4
0
4
x
-4


y
0
2
x

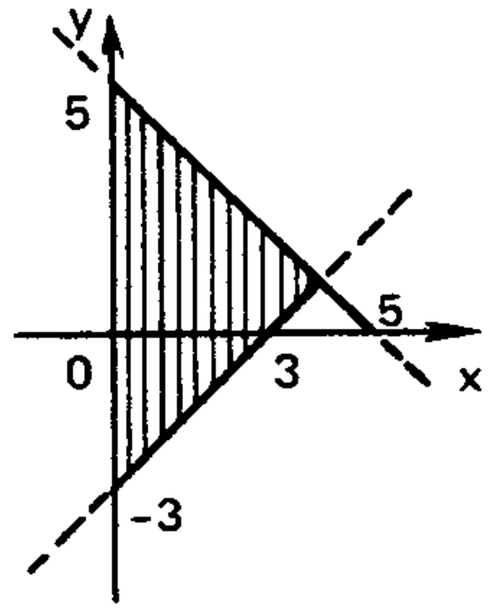

y
-9
5
0
x

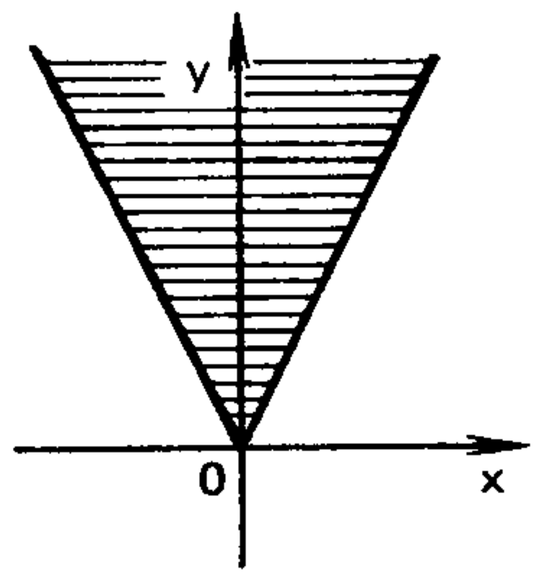

y
-4
4
0
x


y
6
-6
6
0
x
-6


y
1
0
-1
x

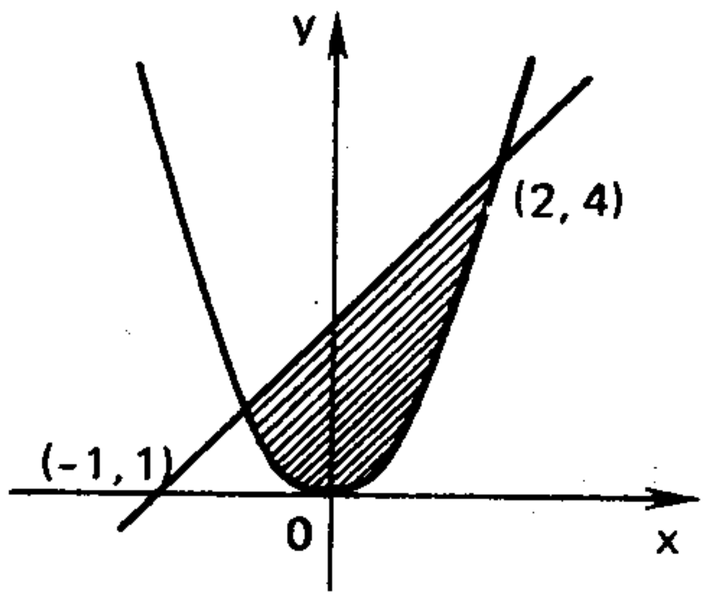
11.

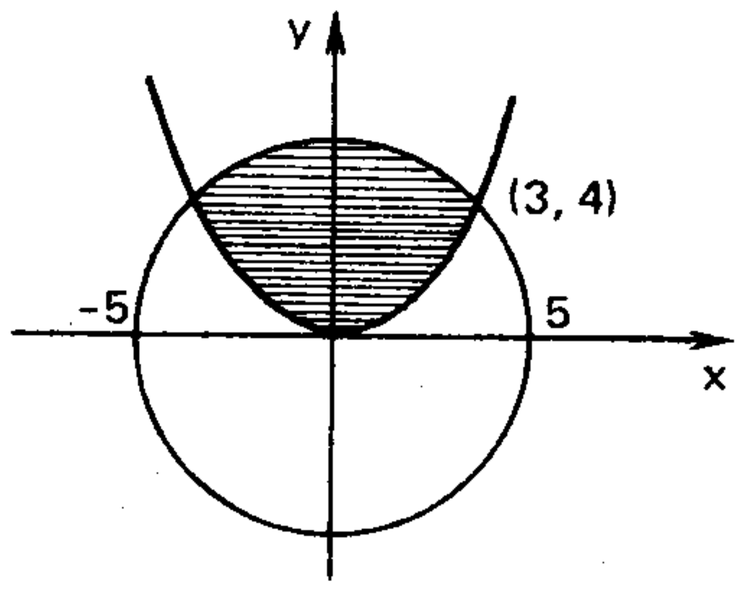

y
5
5
0
3
x
-3


y
0
x

$U \cap V$

12. i)





ii) $D(S \cap T) = [-1, 2]$ $\quad I(S \cap T) = [0, 4]$ $\quad D(U \cap V) = [-3, 3]$

$I(U \cap V) = [0, 5]$

13. $R \circ R^{-1} = (\{(3, 3), (3, 5), (5, 3), (5, 5)\}, A, B)$

14. $R \circ R = (\{(4, 4), (8, 5)\}, \mathbf{N}, \mathbf{N})$

$R^{-1} \circ R = (\{(2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (10, 10)\}, \mathbf{N}, \mathbf{N})$

15. $V \circ U = (\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y = 2\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$

$U \circ V = (\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x^2 - 12x + 2y + 4 = 0\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$

16. ϕ, $\{(a, c)\}$, $\{(b, c)\}$, $\{(a, c), (b, c)\}$

17. $\{(a, a), (a, b), (b, a)\}$; $\{(a, a), (a, b), (b, b)\}$;

$\{(a, a), (b, a), (b, b)\}$; $\{(a, b), (b, a), (b, b)\}$

18. $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a)\}$;

$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$;

$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$

CAPÍTULO 11

PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES EM UM CONJUNTO

1. Uma relação R = (G, A, A) num conjunto A pode possuir as *propriedades* (ou as *qualidades*) *reflexiva, irreflexiva, simétrica, assimétrica, anti-simétrica, transitiva* e *intransitiva,* que vamos definir e exemplificar.

2. PROPRIEDADE REFLEXIVA

Definição — Uma relação R = (G, A, A) em A diz-se *reflexiva* se e somente se para todo elemento x de A se tem $(x, x) \in G$.

Em outros termos, uma relação R = (G, A, A) é *reflexiva* se e somente se todo elemento x de A está na relação R consigo mesmo. Portanto, simbolicamente:

$$R \text{ é reflexiva} \Longleftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Longrightarrow xRx)$$

Consoante esta definição, uma relação R = (G, A, A) em A *não é reflexiva* se e somente se existe ao menos um elemento x de A tal que $x \not R x$, isto é:

$$R \text{ não é reflexiva} \Longleftrightarrow (\exists\, x)\ (x \in A \Longrightarrow x \not R x)$$

Na representação de uma relação *reflexiva* R = (G, A, A) por um *diagrama sagital* existe um *laço* em torno de cada elemento de A; e na representação de R = (G, A, A) por uma *tabela de dupla entrada* figura um asterisco * em todos os quadrados da *1ª diagonal* (diagonal descendente da esquerda para a direita).

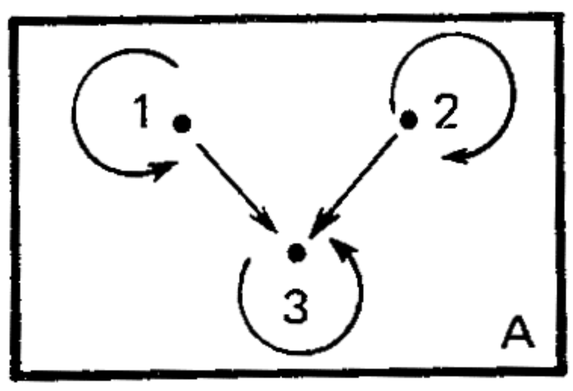
Exemplos:

1) A relação R em A = {1, 2, 3} definida pelo grafo:

$$G = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

é reflexiva, porque 1R1, 2R2 e 3R3.

As representações desta relação por um diagrama sagital e por uma tabela de dupla entrada são:



A \ A	1	2	3
1	*		*
2		*	*
3			*

2) A relação R em $A = \{a, b, c\}$ cujo grafo é:

$$G = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, b)\}$$

não é reflexiva, porque $c \in A$ e $c \not R c$.

3) Seja T o conjunto de todos os triângulos de um plano π. A relação R em T definida por

$$xRy \Longleftrightarrow x \text{ é semelhante a } y$$

é reflexiva, porque todo o triângulo é semelhante a si mesmo.

4) A relação R em **N** (conjunto dos números naturais) definida por

$$xRy \Longleftrightarrow x \mid y$$

é reflexiva, porque $x \mid x$, qualquer que seja o número natural x.

5) No conjunto **P**(E) das partes de E, a relação R em **P**(E) definida por

$$XRY \Longleftrightarrow X \subset Y$$

é reflexiva, porque $X \subset X$, qualquer que seja $X \in \mathbf{P}(E)$.

6) A relação S em $\mathbf{R}_+$ (conjunto dos números reais não negativos) definida por

$$xSy \Longleftrightarrow (x - y)^2 < 1$$

é reflexiva, porque $(x - x)^2 = 0 < 1$, para todo $x \in \mathbf{R}_+$.

7) A relação S em **R** (conjunto dos números reais) definida por

$$xSy \Longleftrightarrow x < 2y$$

não é reflexiva, porque não se tem $x < 2x$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Entretanto, a *restrição* desta relação a **N** (conjunto dos números naturais) *é reflexiva,* porque *todo número natural é menor que o seu dobro.*

3. PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES REFLEXIVAS

(P_1) Uma relação $R = (G, A, A)$ é reflexiva se e somente se a diagonal D_A de $A \times A$ está contida em G, isto é:

$$D_A \subset G \Longleftrightarrow R \text{ é reflexiva}$$

Dem.:

i) Suponhamos $D_A \subset G$. Para todo $x \in A$, temos $(x, x) \in D_A$ e, portanto, $(x, x) \in G$, isto é, R é reflexiva.

ii) Suponhamos, agora, a relação R reflexiva. Para todo $x \in A$, temos $(x, x) \in D_A$ e também $(x, x) \in G$, e, portanto, $D_A \subset G$.

(P_2) Uma relação $R = (G, A, A)$ é reflexiva se e somente se a relação recíproca $R^{-1} = (G^{-1}, A, A)$ é reflexiva, isto é:

$$R^{-1} \text{ é reflexiva} \Longleftrightarrow R \text{ é reflexiva}$$

Dem.: — Com efeito:

$$R^{-1} \text{ é reflexiva} \Longleftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Longrightarrow xR^{-1}x)$$

$$\Longleftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Longrightarrow xRx) \Longleftrightarrow R \text{ é reflexiva}$$

(P_3) Se as relações $R = (G, A, A)$ e $S = (H, A, A)$ são reflexivas, então as relações $R \cap S$ e $R \cup S$ também são reflexivas, isto é:

$$R \text{ e } S \text{ são reflexivas} \Longrightarrow R \cap S \text{ e } R \cup S \text{ são reflexivas}$$

Dem.: — Com efeito, se R e S são reflexivas, temos (pela P_1):

$$D_A \subset G \quad \text{e} \quad D_A \subset H \qquad \therefore \qquad D_A \subset G \cap H \quad \text{e} \quad D_A \subset G \cup H$$

Logo, pela P_1, $R \cap S$ e $R \cup S$ são reflexivas.

(P_4) Se a relação $R = (G, A, A)$ é reflexiva e a relação $S = (H, A, A)$ é qualquer, então a relação $R \cup S$ é reflexiva, isto é:

$$R \text{ é reflexiva e } S \text{ é qualquer} \Longrightarrow R \cup S \text{ é reflexiva}$$

Dem.: — Com efeito, se R é reflexiva, temos (pela P_1) $D_A \subset G$, e como $G \subset G \cup H$, segue-se que $D_A \subset G \cup H$. Logo, pela P_1, a relação $R \cup S$ é reflexiva.

(P_5) Se a relação $R = (G, A, A)$ é reflexiva, então as relações compostas $R \circ R^{-1}$ e $R^{-1} \circ R$ também são reflexivas, isto é:

$$R \text{ é reflexiva} \Longrightarrow R \circ R^{-1} \quad \text{e} \quad R^{-1} \circ R \text{ são reflexivas}$$

Dem.: — Com efeito, se R é reflexiva, temos:

$$(x, x) \in G \quad \text{e} \quad (x, x) \in G^{-1}, \quad \forall x \in A$$

e, portanto:

$$(x, x) \in G \circ G^{-1} \quad \text{e} \quad (x, x) \in G^{-1} \circ G, \quad \forall x \in A$$

Logo, $R \circ R^{-1}$ e $R^{-1} \circ R$ são reflexivas.

(P_6) Se a relação $R = (G, A, A)$ é reflexiva, então $G \subset G \circ G$ e a relação composta $R \circ R$ é reflexiva, isto é:

$$R \text{ é reflexiva} \Longrightarrow \begin{cases} \text{i)} & G \subset G \circ G \\ \text{ii)} & R \circ R \text{ é reflexiva} \end{cases}$$

Dem.:

i) Seja (x, y) um elemento qualquer de G: $(x, y) \in G$. Se R é reflexiva, então $(y, y) \in G$. Assim sendo, $(x, y) \in G \circ G$. Logo, $G \subset G \circ G$.

ii) Se R é reflexiva, temos $D_A \subset G$ e, pela (i), também $G \subset G \circ G$. Portanto, $D_A \subset G \circ G$, isto é, $R \circ R$ é reflexiva.

4. PROPRIEDADE IRREFLEXIVA

Definição — Uma relação $R = (G, A, A)$ em A diz-se *irreflexiva* se e somente se para todo elemento x de A se tem $(x, x) \notin G$.

Em outros termos, uma relação $R = (G, A, A)$ é *irreflexiva* se e somente se nenhum elemento x de A está na relação R consigo mesmo. Portanto, simbolicamente:

$$R \text{ é irreflexiva} \Longleftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Longrightarrow x \not R x)$$

De conformidade com esta definição, uma relação $R = (G, A, A)$ em A *não é irreflexiva* se e somente se existe ao menos um elemento x de A tal que xRx, isto é:

$$R \text{ não é irreflexiva} \Longleftrightarrow (\exists x)\ (x \in A \Longrightarrow xRx)$$

Na representação de uma relação *irreflexiva* $R = (G, A, A)$ por um *diagrama sagital* não existe *laço* em torno de nenhum elemento de A; e na representação de $R = (G, A, A)$ por uma *tabela de dupla entrada* não figura o asterisco * em nenhum dos quadrados da *1ª diagonal* (diagonal descendente da esquerda para a direita).

Exemplos:

1) A relação R em $A = \{1, 2, 3\}$ definida pelo grafo:

$$G = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$$

é irreflexiva, porque $1 \not R 1$, $2 \not R 2$ e $3 \not R 3$.

2) A relação R em $A = \{a, b, c\}$ cujo grafo é:

$$G = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, c)\}$$

não é irreflexiva, porque $a \in A$ e aRa.

Observe-se que esta relação também *não é reflexiva,* porque $b \in A$ e $b \not R b$. Logo, uma relação pode não ser nem reflexiva nem irreflexiva.

3) A relação R em **N** (conjunto dos números naturais) definida por

$$xRy \Longleftrightarrow x = 2y$$

é irreflexiva, porque $x \neq 2x$ para todo $x \in \mathbf{N}$.

4) A relação S em **R** (conjunto dos números reais) tal que

$$xSy \Longleftrightarrow x < y$$

é irreflexiva, porque $x \not< x$, qualquer que seja o número real x.

5) A relação R no conjunto A de todas as retas de um plano π definida por

$$xRy \Longleftrightarrow x \perp y \text{ (x é perpendicular a y)}$$

é irreflexiva, porque nenhuma reta é perpendicular a si mesma.

5. PROPRIEDADE SIMÉTRICA

Definição — Uma relação R = (G, A, A) em A diz-se *simétrica* se e somente se quaisquer que sejam os elementos x e y de A, se $(x, y) \in G$, então $(y, x) \in G$.

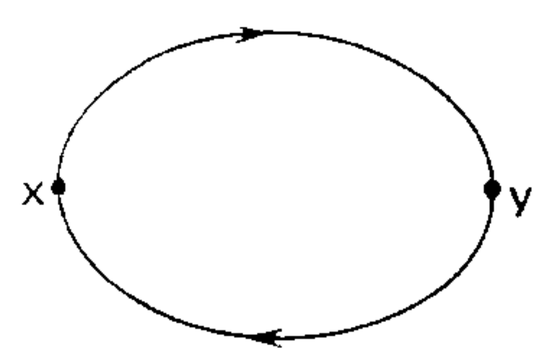
Em outros termos, uma relação R = (G, A, A) é *simétrica* se e somente se ao grafo G pertence o par ordenado recíproco de cada um dos pares ordenadosde G. Portanto, simbolicamente:

$$R \text{ é simétrica} \Longleftrightarrow (\forall x)\ (\forall y)\ (x, y \in A \text{ e } xRy \Longrightarrow yRx)$$

Segundo esta definição, uma relação R = (G, A, A) *não é simétrica* se e somente se existe ao menos um par ordenado (x, y) de G cujo par ordenado recíproco (y, x) não pertence a G, isto é, simbolicamente:

$$R \text{ não é simétrica} \Longleftrightarrow (\exists x)\ (\exists y)\ (x, y \in A \text{ e } xRy \text{ e } y \not R x)$$

Na representação de uma relação *simétrica* R = (G, A, A) por um *diagrama sagital,* se existe uma flecha de x para y, então, também existe uma flecha de y para x; e na representação de R = (G, A, A) por um *diagrama cartesiano,* os pontos correspondentes a pares ordenados recíprocos de G, (x, y) e (y, x), são *simétricos* em relação à reta que contém a bissetriz do 1º quadrante.



Exemplos:

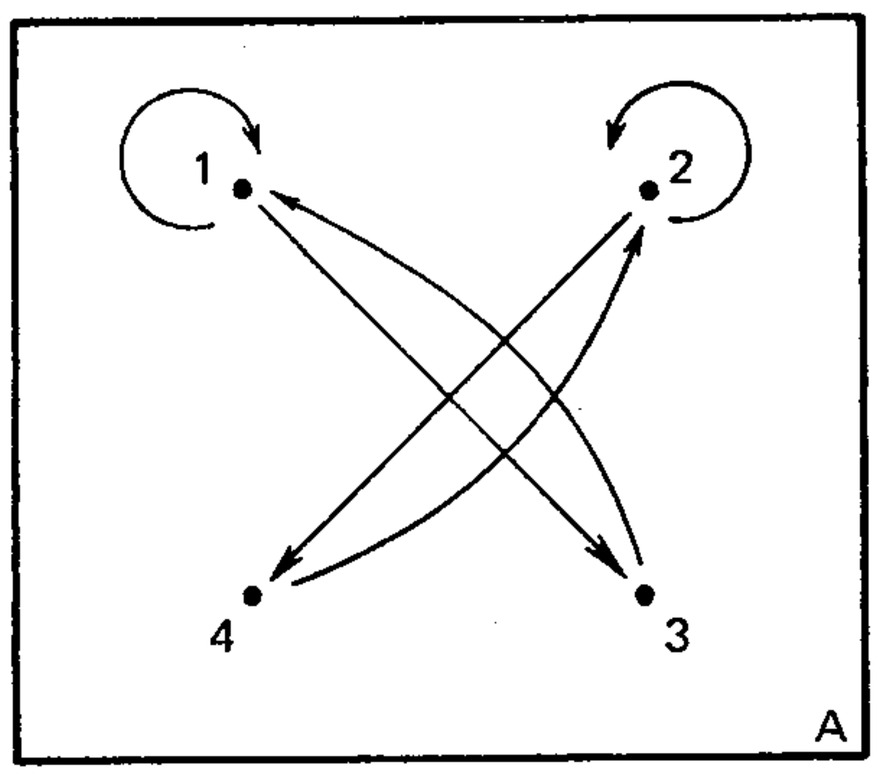
1) Sejam as relações R e S em A = { 1, 2, 3, 4 } cujos grafos respectivos são:

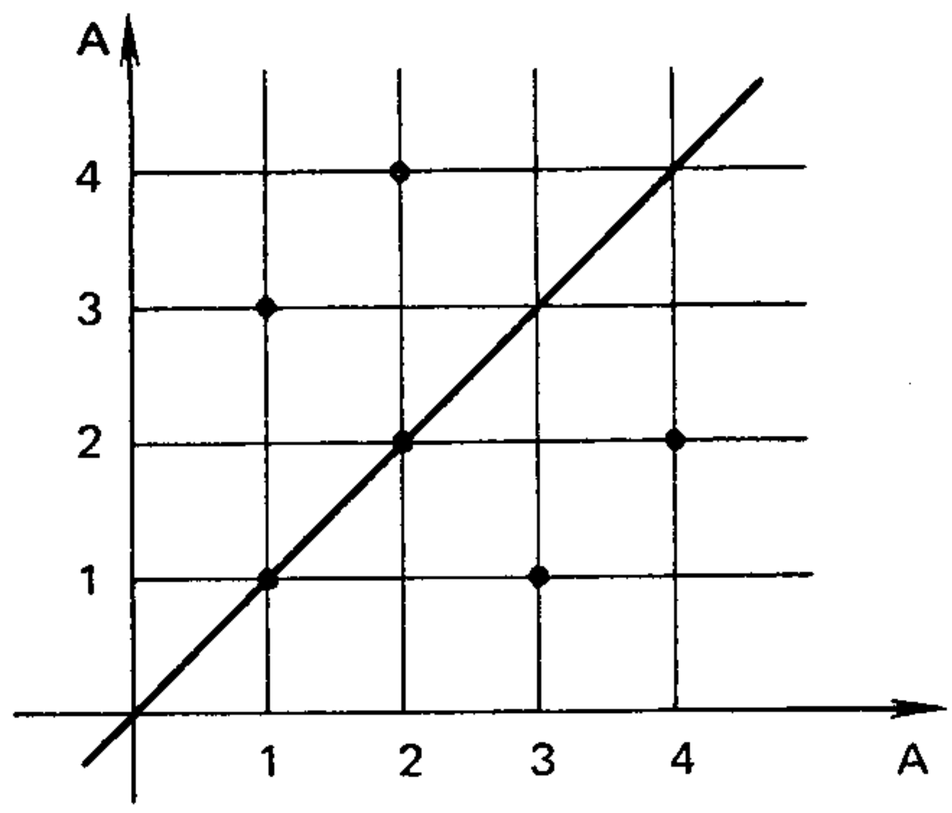
G = { (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 2) }

H = { (1, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 4) }

A relação R *é simétrica,* mas a relação S *não é simétrica,* porque 3R4 e $4 \not R 3$.

Os *diagramas sagital* e *cartesiano* da relação simétrica R são:





2) Seja A o conjunto de todos os triângulos de um plano π. A relação R em A definida por

$$xRy \Longleftrightarrow x \sim y \text{ (x é semelhante a y)}$$

é simétrica, porque, se $x \sim y$, então $y \sim x$, conforme ensina a Geometria Euclidiana.

3) A relação R em **N** (conjunto dos números naturais) tal que

$$xRy \Longleftrightarrow x \mid y \text{ (x divide y)}$$

não é simétrica, porque, p. ex., 3 divide 6, mas 6 não divide 3, isto é, 3R6, mas $6 \not R 3$.

4) A relação R em **N** (conjunto dos números naturais) definida por

$$xRy \Longleftrightarrow x + y = 12$$

é simétrica, porque, se $x + y = 12$, então $y + x = 12$, isto é, se xRy, então yRx.

6. PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES SIMÉTRICAS

(P_1) Uma relação $R = (G, A, A)$ é simétrica se e somente se é igual a sua recíproca $R^{-1} = (G^{-1}, A, A)$, isto é:

$$R \text{ é simétrica} \Longleftrightarrow R = R^{-1}$$

Dem.:

i) Suponhamos R simétrica. Então, temos:

$$(x, y) \in G \Longleftrightarrow (y, x) \in G \Longleftrightarrow (x, y) \in G^{-1}$$

e, portanto, $R = R^{-1}$.

ii) Reciprocamente, suponhamos $R = R^{-1}$. Então, temos:

$$(x, y) \in G \Longrightarrow (x, y) \in G^{-1} \Longrightarrow (y, x) \in G$$

e, portanto, R é simétrica.

(P_2) Se a relação $R = (G, A, A)$ é simétrica, então as relações compostas $R^{-1} \circ R$ e $R \circ R^{-1}$ são iguais, isto é:

$$R \text{ é simétrica} \Longrightarrow R^{-1} \circ R = R \circ R^{-1}$$

Dem.: — De fato, se R é simétrica, então $R = R^{-1}$ (pela P_1) e, portanto: $R^{-1} \circ R = R \circ R^{-1}$.

(P_3) Se as relações $R = (G, A, A)$ e $S = (H, A, A)$ são simétricas, então as relações $R \cap S$ e $R \cup S$ também são simétricas, isto é:

$$R \text{ e } S \text{ são simétricas} \Longrightarrow R \cap S \text{ e } R \cup S \text{ são simétricas}$$

Dem.: — Com efeito:

$$(x, y) \in G \cap H \Longrightarrow (x, y) \in G \text{ e } (x, y) \in H \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (y, x) \in G \text{ e } (y, x) \in H \Longrightarrow (y, x) \in G \cap H$$
$$(x, y) \in G \cup H \Longrightarrow (x, y) \in G \text{ ou } (x, y) \in H \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (y, x) \in G \text{ ou } (y, x) \in H \Longrightarrow (y, x) \in G \cup H$$

(P_4) Qualquer que seja a relação $R = (G, A, A)$, as relações $R \cap R^{-1}$ e $R \cup R^{-1}$ são simétricas, isto é:

$$R \text{ é uma relação} \Longrightarrow R \cap R^{-1} \text{ e } R \cup R^{-1} \text{ são relações simétricas}$$

Dem.: — Com efeito:

$$(x, y) \in G \cap G^{-1} \Longrightarrow (x, y) \in G \text{ e } (x, y) \in G^{-1}$$
$$\Longrightarrow (y, x) \in G^{-1} \text{ e } (y, x) \in G \Longrightarrow (y, x) \in G \cap G^{-1}.$$
$$(x, y) \in G \cup G^{-1} \Longrightarrow (x, y) \in G \text{ ou } (x, y) \in G^{-1}$$
$$\Longrightarrow (y, x) \in G^{-1} \text{ ou } (y, x) \in G \Longrightarrow (y, x) \in G \cup G^{-1}$$

(P_5) Qualquer que seja a relação $R = (G, A, A)$, as relações compostas $R^{-1} \circ R$ e $R \circ R^{-1}$ são simétricas, isto é:

$$R \text{ é uma relação} \Longrightarrow R^{-1} \circ R \text{ e } R \circ R^{-1} \text{ são relações simétricas}$$

Dem.: — Com efeito:

$$(x, y) \in G^{-1} \circ G \Longrightarrow (\exists z)\ (z \in A,\ (x, z) \in G \text{ e } (z, y) \in G^{-1})$$
$$\Longrightarrow (\exists z)\ (z \in A,\ (y, z) \in G \text{ e } (z, x) \in G^{-1})$$
$$\Longrightarrow (y, x) \in G^{-1} \circ G$$

$$(x, y) \in G \circ G^{-1} \Longrightarrow (\exists z)\ (z \in A,\ (x, z) \in G^{-1} \text{ e } (z, y) \in G)$$
$$\Longrightarrow (\exists z)\ (z \in A,\ (y, z) \in G^{-1} \text{ e } (z, x) \in G)$$
$$\Longrightarrow (y, x) \in G \circ G^{-1}$$

7. PROPRIEDADE ASSIMÉTRICA

Definição — Uma relação $R = (G, A, A)$ em A diz-se *assimétrica* se e somente se quaisquer que sejam os elementos x e y de A, se $(x, y) \in G$, então $(y, x) \notin G$.

Em outros termos, uma relação $R = (G, A, A)$ é *assimétrica* se e somente se ao grafo G não pertence o par ordenado recíproco de cada um dos pares ordenados de G. Portanto, simbolicamente:

$$R \text{ é assimétrica} \Longleftrightarrow (\forall x)\ (\forall y)\ (x, y \in A \text{ e } xRy \Longrightarrow y \not R x)$$

Segundo esta definição, uma relação $R = (G, A, A)$ *não é assimétrica* se e somente se existe ao menos um par ordenado (x, y) de G cujo par ordenado recíproco (y, x) pertence a G, isto é:

$$R \text{ não é assimétrica} \Longleftrightarrow (\exists x)\ (\exists y)\ (x, y \in A \text{ e } xRy \text{ e } yRx)$$

Obviamente, toda relação assimétrica é irreflexiva.

Na representação de uma relação assimétrica $R = (G, A, A)$ por um *diagrama sagital* não existe *laço* em torno de nenhum elemento de A e, além disso, se existe uma flecha de x para y, então, não existe flecha de y para x; e na representação de $R = (G, A, A)$ por um *diagrama cartesiano* não existem pontos situados na reta que contém a bissetriz do 1º quadrante nem pontos simétricos em relação a esta reta.

Exemplos:

1) A relação R em $A = \{1, 2, 3\}$ definida pelo grafo:

$$G = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

é assimétrica, porque 1R2 e $2 \not R 1$, 1R3 e $3 \not R 1$, 2R3 e $3 \not R 2$.

2) A relação R em $A = \{a, b, c\}$ cujo grafo é:

$$G = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a)\}$$

não é assimétrica, porque aRa, aRb e bRa.

Observe-se que esta relação também *não é simétrica,* porque aRc e $c \not R a$.

Logo, uma relação pode não ser nem simétrica nem assimétrica.

8. PROPRIEDADE ANTI-SIMÉTRICA

Definição — Uma relação R = (G, A, A) em A diz-se *anti-simétrica* se e somente se quaisquer que sejam os elementos x e y de A, se $(x, y) \in G$ e $(y, x) \in G$, então x = y.

Em outros termos, uma relação R = (G, A, A) é *anti-simétrica* se e somente se quaisquer que sejam os elementos x e y ($x \neq y$) de A, ao grafo G nunca pertencem simultaneamente o par ordenado (x, y) e o seu recíproco (y, x), isto é, nunca se tem ao mesmo tempo xRy e yRx. Portanto, simbolicamente:

$$R \text{ é anti-simétrica} \Longleftrightarrow (\forall x)\ (\forall y)\ (x, y \in A \text{ e } xRy \text{ e } yRx \Longrightarrow x = y)$$

Segundo esta definição, uma relação R = (G, A, A) *não é anti-simétrica* se e somente se existe ao menos um par ordenado (x, y) ($x \neq y$) de G cujo par ordenado recíproco (y, x) também pertence a G, isto é:

$$R \text{ não é anti-simétrica} \Longleftrightarrow (\exists x)\ (\exists y)\ (x, y \in A\ (x \neq y) \text{ e } xRy \text{ e } yRx)$$

Na representação de uma relação *anti-simétrica* R = (G, A, A) por um *diagrama sagital,* entre dois elementos quaisquer x e y ($x \neq y$) de A só pode existir uma flecha ou nenhuma; e na representação de R = (G, A, A) por um *diagrama cartesiano* não existem pontos *distintos* simétricos em relação à reta que contém a bissetriz do 1º quadrante.

Exemplos:

1) Sejam as relações R e S em $A = \{1, 2, 3\}$ cujos grafos respectivos são:

$$G = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$$
$$H = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

A relação R *é anti-simétrica,* mas a relação S *não é anti-simétrica,* porque 1R2 e 2R1 ($1 \neq 2$).

Observe-se que a relação S também *não é simétrica,* porque 2R3 e 3$\not$R2. Logo, uma relação pode não ser nem simétrica nem anti-simétrica. Por outra parte, uma relação pode ser ao mesmo tempo simétrica e anti-simétrica, como, p. ex., a relação identidade I_A num conjunto A.

2) A relação R em **N** (conjunto dos números naturais) definida por

$$xRy \Longleftrightarrow x \mid y \text{ (x divide y)}$$

é anti-simétrica, porque se $x|y$ e $y|x$ $(x, y \in \mathbf{N})$, então $x = y$. Entretanto, a *extensão* de R a **Z** (conjunto dos números inteiros) *não é anti-simétrica,* porque, p. ex., $5|(-5)$ e $(-5)|5$, mas $5 \neq -5$, isto é, $5R(-5)$ e $(-5)R5$ $(5 \neq -5)$.

3) No conjunto **P**(E) das partes de E, a relação em **P**(E) definida por

$$XRY \Longleftrightarrow X \subset Y$$

é anti-simétrica, porque, se $X \subset Y$ e $Y \subset X$, então $X = Y$.

9. PROPRIEDADE DAS RELAÇÕES ANTI-SIMÉTRICAS

(P_1) Uma relação $R = (G, A, A)$ é anti-simétrica se e somente se a interseção do grafo G com o grafo recíproco G^{-1} está contida na diagonal D_A de $A \times A$, isto é:

$$R \text{ é anti-simétrica} \Longleftrightarrow G \cap G^{-1} \subset D_A$$

Dem.:

i) Suponhamos R anti-simétrica. Então, temos:

$$\begin{aligned}(x, y) \in G \cap G^{-1} &\Longrightarrow (x, y) \in G \text{ e } (x, y) \in G^{-1} \\ &\Longrightarrow (x, y) \in G \text{ e } (y, x) \in G \\ &\Longrightarrow x = y \Longrightarrow (x, y) \in D_A\end{aligned}$$

e, portanto, $G \cap G^{-1} \subset D_A$

ii) Reciprocamente, suponhamos $G \cap G^{-1} \subset D_A$. Então, temos:

$$\begin{aligned}(x, y) \in G \text{ e } (y, x) \in G &\Longrightarrow (x, y) \in G \text{ e } (x, y) \in G^{-1} \\ &\Longrightarrow (x, y) \in G \cap G^{-1} \Longrightarrow (x, y) \in D_A \\ &\Longrightarrow x = y\end{aligned}$$

e, portanto, R é anti-simétrica.

(P_2) Se a relação $R = (G, A, A)$ é anti-simétrica, então a relação recíproca R^{-1} também é anti-simétrica, isto é:

$$R \text{ é anti-simétrica} \Longrightarrow R^{-1} \text{ é anti-simétrica}$$

Dem.: — Com efeito:

$$(x, y) \in G^{-1} \text{ e } (y, x) \in G^{-1} \Longrightarrow (x, y) \in G \text{ e } (y, x) \in G \Longrightarrow x = y$$

(P_3) Se as relações $R = (G, A, A)$ e $S = (H, A, A)$ são anti-simétricas, então a relação $R \cap S$ também é anti-simétrica, isto é:

$$R \text{ e } S \text{ são anti-simétricas} \Longrightarrow R \cap S \text{ é anti-simétrica}$$

Dem.: — Com efeito:

$$(x, y) \in G \cap H \text{ e } (y, x) \in G \cap H \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow ((x, y) \in G \text{ e } (x, y) \in H) \text{ e } ((y, x) \in G \text{ e } (y, x) \in H)$$
$$\Longrightarrow ((x, y) \in G \text{ e } (y, x) \in G) \text{ e } ((x, y) \in H \text{ e } (y, x) \in H)$$
$$\Longrightarrow (x = y) \text{ e } (x = y) \Longrightarrow x = y$$

10. PROPRIEDADE TRANSITIVA

Definição — Uma relação $R = (G, A, A)$ em A diz-se *transitiva* se e somente se quaisquer que sejam os elementos x, y e z de A, se $(x, y) \in G$ e $(y, z) \in G$, então $(x, z) \in G$.

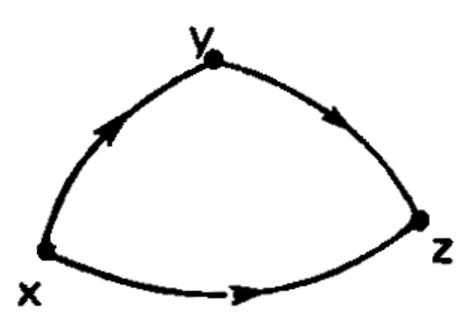
Em outros termos, uma relação $R = (G, A, A)$ é *transitiva* se e somente se quaisquer que sejam os elementos x, y e z de A, se os *pares ordenados consecutivos* (x, y) e (y, z) pertencem a G, então o *par ordenado composto* (x, z) também pertence a G. Portanto, simbolicamente:

$$R \text{ é transitiva} \Longleftrightarrow (\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (x, y, z \in A \text{ e } xRy \text{ e } yRz \Longrightarrow xRz)$$

De conformidade com esta definição, uma relação $R = (G, A, A)$ em A *não é transitiva* se e somente se existem elementos x, y e z de A tais que $(x, y) \in G$ e $(y, z) \in G$ e $(x, z) \notin G$, isto é:

$$R \text{ não é transitiva} \Longleftrightarrow (\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ (x, y, z \in A \text{ e } xRy \text{ e } yRz \text{ e } x \not R z)$$

Na representação de uma relação *transitiva* $R = (G, A, A)$ por um *diagrama sagital,* se existe uma flecha de x para y e existe uma outra flecha de y para z, então, também existe uma flecha de x para z.



Exemplos:

1) Sejam as relações R e S em $A = \{a, b, c, d\}$ cujos grafos respectivos são:

$$G = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$$
$$H = \{(a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b), (d, c)\}$$

A relação R *é transitiva,* mas a relação S *não é transitiva,* porque $(d, c) \in G$ e $(c, a) \in G$, mas $(d, a) \notin G$.

2) A relação S em **R** (conjunto dos números reais) definida por

$$xRy \Longleftrightarrow x < y$$

é transitiva, porque, se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$, quaisquer que sejam os números reais x, y e z.

3) A relação R no conjunto **P**(E) das partes de E definida por

$$XRY \Longleftrightarrow X \cap Y = X$$

é transitiva, porque, se $X \cap Y = X$ e $Y \cap Z = Y$, então $X \cap Z = X$, quaisquer que sejam os elementos X, Y e Z de **P**(E).

4) A relação R em **N** (conjunto dos números naturais) tal que

$$xRy \Longleftrightarrow x + y = 12$$

não é transitiva, porque $5 + 7 = 12$ e $7 + 5 = 12$, mas $5 + 5 \neq 12$, isto é, 5R7 e 7R5, mas $5 \not R 5$.

5) A relação R em **N**(conjunto dos números naturais) definida por

$$xRy \Longleftrightarrow x = y + 1$$

não é transitiva, porque $5 = 4 + 1$ e $4 = 3 + 1$, mas $5 \neq 3 + 1$, isto é, 5R4 e 4R3, mas $5 \not R 3$.

6) Seja A o conjunto de todas as retas de um plano π. A relação R em A definida por

$$xRy \Longleftrightarrow x \perp y \text{ (x é perpendicular a y)}$$

não é transitiva, porque $x \perp y$ e $y \perp z$ não implica $x \perp z$ (x e z são retas paralelas, $x \parallel z$).

11. PROPRIEDADE DAS RELAÇÕES TRANSITIVAS

(P_1) Se a relação R = (G, A, A) é transitiva, então a relação recíproca R^{-1} também é transitiva, isto é:

$$R \text{ é transitiva} \Longrightarrow R^{-1} \text{ é transitiva}$$

Dem.: — Com efeito:

$$(x, y) \in G^{-1} \text{ e } (y, z) \in G^{-1} \Longrightarrow (z, y) \in G \text{ e } (y, x) \in G$$
$$\Longrightarrow (z, x) \in G \Longrightarrow (x, z) \in G^{-1}$$

(P_2) Se as relações R = (G, A, A) e S = (H, A, A) são transitivas, então a relação $R \cap S$ também é transitiva, isto é:

$$R \text{ e } S \text{ são transitivas} \Longrightarrow R \cap S \text{ é transitiva}$$

Dem.: — Com efeito:

$$(x, y) \in G \cap H \text{ e } (y, z) \in G \cap H \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow ((x, y) \in G \text{ e } (x, y) \in H) \text{ e } ((y, z) \in G \text{ e } (y, z) \in H)$$
$$\Longrightarrow ((x, y) \in G \text{ e } (y, z) \in G) \text{ e } ((x, y) \in H \text{ e } (y, z) \in H)$$
$$\Longrightarrow (x, z) \in G \text{ e } (x, z) \in H \Longrightarrow (x, z) \in G \cap H$$

(P_3) Uma relação $R = (G, A, A)$ é transitiva se e somente se o grafo composto $G \circ G$ está contido em G, isto é:

$$R \text{ é transitiva} \Longleftrightarrow G \circ G \subset G$$

Dem.:

i) Suponhamos R transitiva. Então, temos:

$$(x, y) \in G \circ G \Longrightarrow (\exists z)\ (z \in A, (x, z) \in G \text{ e } (z, y) \in G) \Longrightarrow (x, y) \in G$$

e, portanto, $G \circ G \subset G$.

ii) Reciprocamente, suponhamos $G \circ G \subset G$. Então, temos:

$$(x, y) \in G \text{ e } (y, z) \in G \Longrightarrow (x, z) \in G \circ G \Longrightarrow (x, z) \in G$$

e, portanto, R é transitiva.

(P_4) Se a relação $R = (G, A, A)$ é transitiva, então a relação composta $R \circ R$ também é transitiva, isto é:

$$R \text{ é transitiva} \Longrightarrow R \circ R \text{ é transitiva}$$

Dem.: — Com efeito, temos $G \circ G \subset G$ (pela P_3) e, portanto:

$$(x, y) \in G \circ G \text{ e } (y, z) \in G \circ G \Longrightarrow (x, y) \in G \text{ e } (y, z) \in G$$
$$\Longrightarrow (x, z) \in G \circ G$$

12. PROPRIEDADE INTRANSITIVA

Definição — Uma relação $R = (G, A, A)$ em A diz-se *intransitiva* se e somente se quaisquer que sejam os elementos x, y e z de A, se $(x, y) \in G$ e $(y, z) \in G$, então $(x, z) \notin G$.

Em outros termos, uma relação $R = (G, A, A)$ é *intransitiva* se e somente se quaisquer que sejam os elementos x, y e z de A, se os *pares ordenados consecutivos* (x, y) e (y, z) pertencem a G, então o *par ordenado composto* (x, z) não pertence a G. Portanto, simbolicamente:

$$R \text{ é intransitiva} \Longleftrightarrow (\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (x, y, z \in A \text{ e } xRy \text{ e } yRz \Longrightarrow x \not R z)$$

Segundo esta definição, uma relação R = (G, A, A) *não é intransitiva* se e somente se existem elementos x, y e z de A tais que ao menos dois *pares ordenados consecutivos* (x, y) e (y, z) e o *par ordenado composto* (x, z) pertencem a G, isto é:

$$R \text{ não é intransitiva} \Longleftrightarrow (\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ (x, y, z \in A \text{ e } xRy \text{ e } yRz \text{ e } xRz)$$

Na representação de uma relação *intransitiva* R = (G, A, A) por um *diagrama sagital,* se existe uma flecha de x para y e existe uma outra flecha de y para z, então, não existe flecha de x para z.

Exemplo — Sejam as relações R e S em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ cujos grafos respectivos são:

$$G = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4)\}$$

$$H = \{(1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$$

A relação R *é intransitiva,* porque 1R2 e 2R3 e $1 \not R 3$, 2R3 e 3R4 e $2 \not R 4$, mas a relação S *não é intransitiva,* porque 2S3 e 3S2 e 2S2.

Observe-se que a relação S também *não é transitiva,* porque 3S2 e 2S3, mas $3 \not R 3$. Logo, uma relação pode não ser nem transitiva nem intransitiva.

EXERCÍCIOS

1. Indicar quais das seguintes relações em $A = \{1, 2, 3\}$ são *reflexivas:*

$$R_1 = (\{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}, A, A)$$

$$R_2 = (\{(1, 2), (3, 2), (2, 2), (2, 3)\}, A, A)$$

$$R_3 = (\{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}, A, A)$$

$$R_4 = (\{(1, 2)\}, A, A)$$

$$R_5 = (A \times A, A, A)$$

2. Indicar quais das seguintes relações em **N** (conjunto dos números naturais) são *reflexivas:*

a) $xRy \Longleftrightarrow x \leqslant y$

b) $xSy \Longleftrightarrow x + y = 12$

c) $xTy \Longleftrightarrow mdc(x, y) = 1$

3. Dar o grafo de todas as relações em $A = \{1, 2\}$ que são *reflexivas.*

4. Indicar quais das seguintes relações em $A = \{1, 2, 3\}$ são *simétricas:*

$$R_1 = (\{(1, 1), (2s1), (2, 2), (3, 2), (2, 3)\}, A, A)$$

$$R_2 = (\{(1, 1)\}, A, A)$$

$$R_3 = (\{(1, 2)\}, A, A)$$

$$R_4 = (\{(1, 1), (3, 2), (2, 3)\}, A, A)$$

5. Indicar quais das seguintes relações em **N** (conjunto dos números naturais) são *simétricas:*

a) $xRy \Longleftrightarrow x \leqslant y$

b) $xSy \Longleftrightarrow x + 2y = 10$

c) $xTy \Longleftrightarrow (x - y)^2 > 1$

6. Dar todos os grafos com *cinco* elementos de relações em $A = \{1, 2, 3\}$ que são *reflexivas* e *simétricas.*

7. Indicar quais das seguintes relações em $A = \{1, 2, 3\}$ são *anti-simétricas:*

$$R_1 = (\{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (2, 3)\}, A, A)$$

$$R_2 = (\{(1, 1)\}, A, A) \qquad R_3 = (\{(1, 2)\}, A, A)$$

$$R_4 = (\{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}, A, A) \qquad R_5 = (A \times A, A, A)$$

8. Indicar quais das seguintes relações em **N** (conjunto dos números naturais) são *anti-simétricas:*

a) $xRy \Longleftrightarrow x \leqslant y$

b) $xSy \Longleftrightarrow x < y$

c) $xTy \Longleftrightarrow x + 2y = 10$

9. Dar um exemplo de uma relação R em $A = \{1, 2, 3\}$ que não seja nem simétrica nem anti-simétrica.

10. Indicar quais das seguintes relações em $A = \{1, 2, 3\}$ são *transitivas:*

$R_1 = (\{(1; 2), (2, 3), (1, 3), (2, 1), (1, 1)\}, A, A)$

$R_2 = (\{(1, 2), (2, 2)\}, A, A)$

$R_3 = (\{(1, 2)\}, A, A)$

$R_4 = (\{(1, 1)\}, A, A)$

$R_5 = (A \times A, A, A)$

11. Indicar quais das seguintes relações em **N**(conjunto dos números naturais) são *transitivas:*

a) $xRy \Longleftrightarrow x \leqslant y$

b) $xSy \Longleftrightarrow x \mid y$

c) $xTy \Longleftrightarrow x + 2y = 5$

12. Indicar as propriedades (reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade) das seguintes relações em $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

$R_1 = (\{(1, 1), (1, 2)\}, A, A)$

$R_2 = (\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, A, A)$

$R_3 = (\{(1, 1), (2, 3), (4, 1)\}, A, A)$

$R_4 = (A \times A, A, A)$

$R_5 = (\{(1, 3), (2, 4)\}, A, A)$

13. Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, construir *oito* (8) relações R_i ($i = 1, 2, \ldots, 8$) em A que verifiquem as condições da tabela abaixo:

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8
Reflexiva	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Não	Sim	Não
Simétrica	Sim	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	Não
Transitiva	Sim	Não	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Não

14. Mostrar que a relação R no conjunto $\mathbf{P}(E)$ das partes de E definida por $XRY \Longleftrightarrow X \subset Y$ *não é simétrica* quando o conjunto E não é vazio ($E \neq \phi$).

15. Seja a relação $R = (G, A, A)$ em A. Demonstrar:

    a) R é irreflexiva se e somente se $G \cap D_A = \phi$.

    b) R é assimétrica se e somente se $G \cap G^{-1} = \phi$.

    c) R é intransitiva se e somente se $(G \circ G) \cap G = \phi$.

16. Sejam $R = (G, A, A)$ e $S = (H, A, A)$ relações em A, sendo S reflexiva. Demonstrar:

$$G \subset H \circ G \quad e \quad G \subset G \circ H$$

17. Sejam $R = (G, A, A)$ e $S = (H, A, A)$ relações em A, sendo R reflexiva e S reflexiva e transitiva. Demonstrar que $G \subset H$ se e somente se $G \circ H = H$.

18. Demonstrar que o número de relações reflexivas num conjunto finito A, com $n \geqslant 1$ elementos, é igual a $2^{n(n-1)}$.

19. Demonstrar que o número de relações reflexivas e simétricas num conjunto finito A, com $n \geqslant 1$ elementos, é igual a $2^{n(n-1)/2}$.

20. Sejam R e S relações em A. Mostrar que as duas seguintes proposições são *falsas,* dando um *contra-exemplo* para cada uma delas:

    a) Se R e S são anti-simétricas, então $R \cup S$ é anti-simétrica.

    b) Se R e S são transitivas, então $R \cup S$ é transitiva.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. R_1 e R_5

2. R

3. $\{(1, 1), (2, 2)\}$; $\{(1, 1), (2, 2), (1, 2)\}$; $\{(1, 1), (2, 2), (2, 1)\}$;
   $\{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$

4. R_2 e R_4

5. T

6. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$; $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$
   $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2\ 3), (3, 2)\}$

7. R_2 e R_3

8. R, S e T

9. $R = (\{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}, A, A)$

10. R_2, R_3, R_4 e R_5

11. R e S

12. R_5 é reflexiva ; R_4 e R_5 são simétricas ; R_1, R_2, R_3 e R_4 são anti-simétricas;
    R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5 são transitivas.

13. $R_1 = (\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1)\}, A, A)$
    $R_2 = (\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}, A, A)$
    $R_3 = (\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2)\}, A, A)$
    $R_4 = (\{(2, 3), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}, A, A)$
    $R_5 = (\{(1, 1), (2, 2), (4, 4), (1, 2)\}, A, A)$
    $R_6 = (\{(2, 3), (3, 2)\}, A, A)$
    $R_7 = (\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 3)\}, A, A)$
    $R_8 = (\{(1, 2), (2, 3)\}, A, A)$

CAPÍTULO 12

RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

1. O conceito de *relação de equivalência num conjunto* A é extremamente importante e desempenha um papel central em toda a Matemática de nossos dias.

2. DEFINIÇÃO DE RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

Definição — Chama-se *relação de equivalência em* A a toda relação $R = (G, A, A)$ em A que é reflexiva, simétrica e transitiva.

Em outros termos, uma relação $R = (G, A, A)$ em A é uma *relação de equivalência em* A se e somente se possui simultaneamente as três propriedades seguintes:

$$(R) \quad (\forall x)\ (x \in A \Longrightarrow xRx)$$

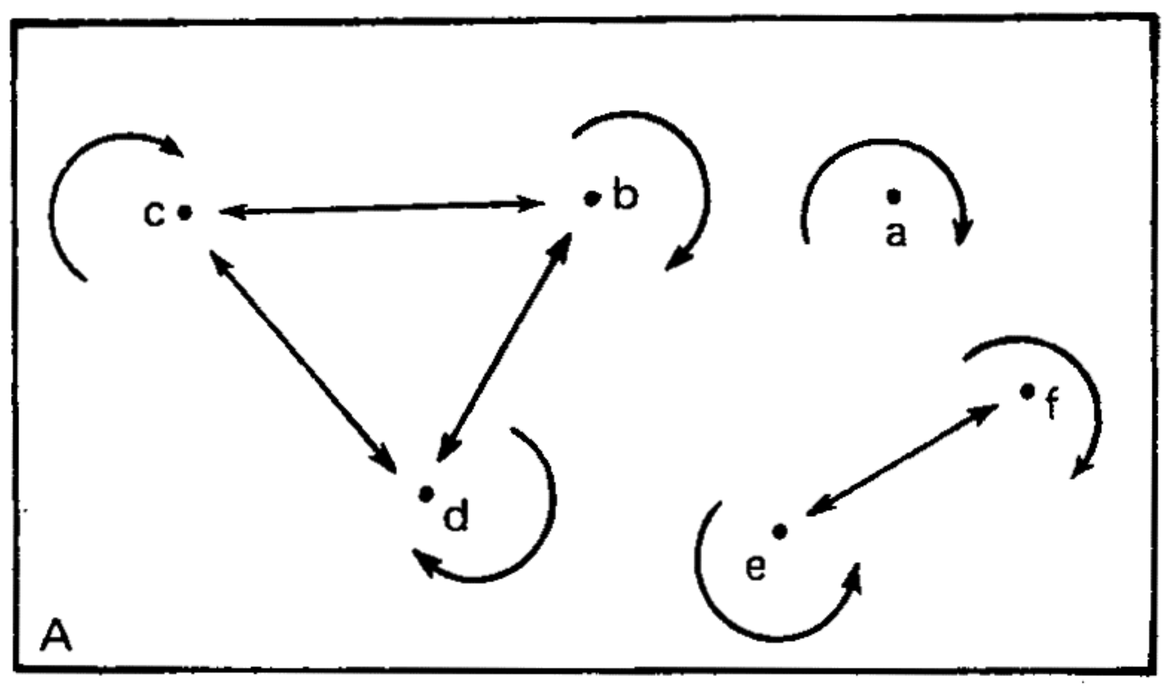
$$(S) \quad (\forall x)\ (\forall y)\ (x, y \in A \ \text{ e } \ xRy \Longrightarrow yRx)$$

$$(T) \quad (\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (x, y, z \in A \ \text{ e } \ xRy \ \text{ e } \ yRz \Longrightarrow xRz)$$

Se $R = (G, A, A)$ é uma relação de equivalência em A, então, a relação recíproca $R^{-1} = (G^{-1}, A, A)$ é uma relação em A que possui, como a R, as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja, R^{-1} também é uma relação de equivalência em A.

É imediato que a relação de identidade $I_A = (D_A, A, A)$ em A é uma relação de equivalência em A.

A figura ao lado é o *diagrama sagital* de uma relação de equivalência R em $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, pois R possui as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.



3. NOTAÇÃO

Seja $R = (G, A, A)$ uma relação de equivalência em A. Se x e y são dois elementos de A tais que x está na relação R com y, em lugar de escrever $(x, y) \in G$ ou

xRy costuma-se escrever:

$$x \equiv y \text{ (mod. R)} \quad \text{ou} \quad x \equiv y(R)$$

$$x \sim y \text{ (mod. R)} \quad \text{ou} \quad x \sim y(R)$$

que se lê: "x é equivalente a y módulo R" ou "x é equivalente a y segundo R". Se $x \equiv y$ (mod. R), então $y \equiv x$ (mod. R), e por conseguinte podemos dizer que x *e* y *são equivalentes módulo* R.

Se, ao invés, os elementos x e y de A não estão na relação R, isto é $(x, y) \notin G$ ou $x \not R y$, escreve-se:

$$x \not\equiv y \text{ (mod. R)} \quad \text{ou} \quad x \not\equiv y(R)$$

$$x \nsim y \text{ (mod. R)} \quad \text{ou} \quad x \nsim y(R)$$

que se lê: "x não é equivalente a y módulo R (ou segundo R)".

4. EXEMPLOS DE RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

1) Seja A o conjunto de todos os triângulos de um plano π. A relação R em A definida por

$$xRy \Longleftrightarrow x \sim y \text{ (x é semelhante a y)}$$

é uma relação de equivalência em A, pois, segundo ensina a Geometria Euclidiana, subsistem as três propriedades:

(R) $x \sim x$

(S) $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$

(T) $x \sim y$ e $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$

2) Seja A o conjunto de todas as retas de um plano π. A relação R em A tal que:

$$xRy \Longleftrightarrow x \parallel y \text{ (x é paralela a y)}$$

$x \parallel y$ com o significado de $x = y$ ou $x \cap y = \phi$ *(relação de paralelismo* da Geometria Euclidiana *no sentido amplo*), é uma relação de equivalência em A, pois subsistem as três propriedades:

(R) $x \parallel x$

(S) $x \parallel y \Longrightarrow y \parallel x$

(T) $x \parallel y$ e $y \parallel z \Longrightarrow x \parallel z$

Importa notar que esta relação de equivalência R em A permite *classificar* todas as retas do plano π da maneira seguinte:

i) Duas retas r e s que estão na relação R ($r \parallel s$) são postas em uma mesma classe;

ii) Duas retas r e s que não estão na relação R ($r \nparallel s$) são postas em classes diferentes.

Todas as retas do plano π estão assim classificadas. Cada classe chama-se uma "direção". E uma reta qualquer de uma classe pode ser escolhida como *representante* da direção.

3) Seja a relação R em **Z** (conjunto dos números inteiros) assim definida:

$$xRy \Longleftrightarrow 5 \mid (x - y)$$

Vamos mostrar com detalhe que R é uma relação de equivalência em **Z**.

Com efeito:

i) Para todo $x \in \mathbf{Z}$, $x - x = 0$ é divisível por 5 ($0 = 5.0$), isto é, xRx. Logo, R é *reflexiva.*

ii) Suponhamos que xRy. Então, $x - y$ é divisível por 5, isto é, temos $x - y = 5h$ ($h \in \mathbf{Z}$) e, portanto, $y - x = 5(-h)$ também é divisível por 5, ou seja, yRx. Logo, xRy implica yRx, isto é, R é *simétrica.*

iii) Suponhamos que xRy e yRz. Então, $x - y$ e $y - z$ são divisíveis por 5, isto é, temos $x - y = 5h$ e $y - z = 5k$ ($h, k \in \mathbf{Z}$) e, portanto, $x - z = (x - y) + (y - z) = 5(h + k)$ também é divisível por 5, ou seja, xRz. Logo, xRy e yRz implica xRz, isto é, R é *transitiva.*

Assim sendo, a relação considerada R em **Z** possui as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. Logo, por definição, R é uma relação de equivalência em **Z**.

4) A relação R em $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ (**N** conjunto dos números naturais) assim definida:

$$(x, y)\, R\, (z, t) \Longleftrightarrow xt = yz$$

é uma relação de equivalência em $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Com efeito, quaisquer que sejam (x, y), (z, t) e (u, v) em $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, temos:

(R) $(x, y)\, R\, (x, y)$, porque $xy = yx$. Logo, R é *reflexiva.*

(S) $(x, y)\, R\, (z, t) \Longrightarrow xt = yz \Longrightarrow zy = tx \Longrightarrow (z, t)\, R\, (x, y)$. Logo, R é *simétrica.*

(T) $(x, y)\, R\, (z, t)$ e $(z, t)\, R\, (u, v) \Longrightarrow xt = yz$ e $zv = tu \Longrightarrow$ $\Longrightarrow xztv = yztu \Longrightarrow xv = yu \Longrightarrow (x, y)\, R\, (u, v)$. Logo, R é *transitiva.*

Assim sendo, a relação considerada R em $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ possui as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. Logo, por definição, R é uma relação de equivalência em $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

5) A relação R em **Z** (conjunto dos números inteiros) definida por

$$xRy \Longleftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$$

é uma relação de equivalência em **Z**. Com efeito, quaisquer que x, y e z em **Z**, temos:

(R) xRx, porque $x^2 + x = x^2 + x$. Logo, R é *reflexiva.*

(S) $xRy \Longrightarrow x^2 + x = y^2 + y \Longrightarrow y^2 + y = x^2 + x \Longrightarrow yRx$. Logo, R é *simétrica.*

(T) xRy e $yRz \Longrightarrow x^2 + x = y^2 + y$ e $y^2 + y = z^2 + z \Longrightarrow$
$\Longrightarrow x^2 + x = z^2 + z \Longrightarrow xRz$. Logo, R é *transitiva.*

A relação considerada R em **Z** sendo reflexiva, simétrica e transitiva, é uma relação de equivalência em **Z**.

5. CLASSES DE EQUIVALÊNCIA. CONJUNTO-QUOCIENTE

Seja A um conjunto não vazio e R uma relação de equivalência em A.

Definição 1 — Chama-se *classe de equivalência módulo* R ou *classe de equivalência segundo* R de um elemento *a* de A ($a \in A$), ao conjunto de todos os elementos x de A que são equivalentes a *a* módulo R.

Representa-se por Cl(a), que se lê: "classe de a", ou por $\bar{a}$, que se lê: "a barra". Portanto, simbolicamente:

$$Cl(a) = \{ x \in A \mid xRa \}$$

ou seja

$$Cl(a) = \{ x \in A \mid x \equiv a \ (\text{mod. } R) \}$$

Manifestamente, Cl(a) é uma *parte* de A e, portanto, um *elemento* do conjunto **P**(A) das partes de A: $Cl(a) \subset A$, $Cl(a) \in \mathbf{P}(A)$.

Para todo $a \in A$, temos $a \in Cl(a)$, pois, pela propriedade reflexiva de R, aRa. Logo, Cl(a) *nunca é vazia:* $Cl(a) \neq \phi$.

A Cl(a) diz-se *determinada* ou *definida* pelo elemento *a,* o qual, por sua vez, se chama um *representante* de Cl(a).

Importa notar que Cl(a) outra coisa não é senão a *imagem* R(a) do conjunto unitário $\{ a \}$ pela relação R.

Como Cl(a) depende, obviamente, da relação de equivalência R considerada sobre o conjunto A, deveria, a rigor, ser representada por um símbolo no qual figurasse a letra R, tal como $Cl_R(a)$ ou $\bar{a}_R$.

Na literatura matemática, Cl(a) também é representada pelos símbolos A_a, [a], a/R.

Definição 2 — Chama-se *conjunto-quociente* de A pela relação de equivalência R o conjunto formado por todas as classes de equivalência módulo R.

Representa-se por A/R, que se lê: "A sobre R". Portanto, simbolicamente:

$$A/R = \{ Cl(a) \mid a \in A \}$$

Obviamente, A/R é uma *parte* de **P**(A) e, portanto, um *elemento* de **P**(**P**(A)): $A/R \subset \mathbf{P}(A)$, $A/R \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(A))$.

6. EXEMPLOS DE CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

1) Seja a relação de equivalência R em $A = \{0, 1, 2, 3\}$ cujo grafo é:

$$G = \{ (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (0, 2), (1, 3), (2, 0,), (3, 1) \}$$

As *classes de equivalência* são:

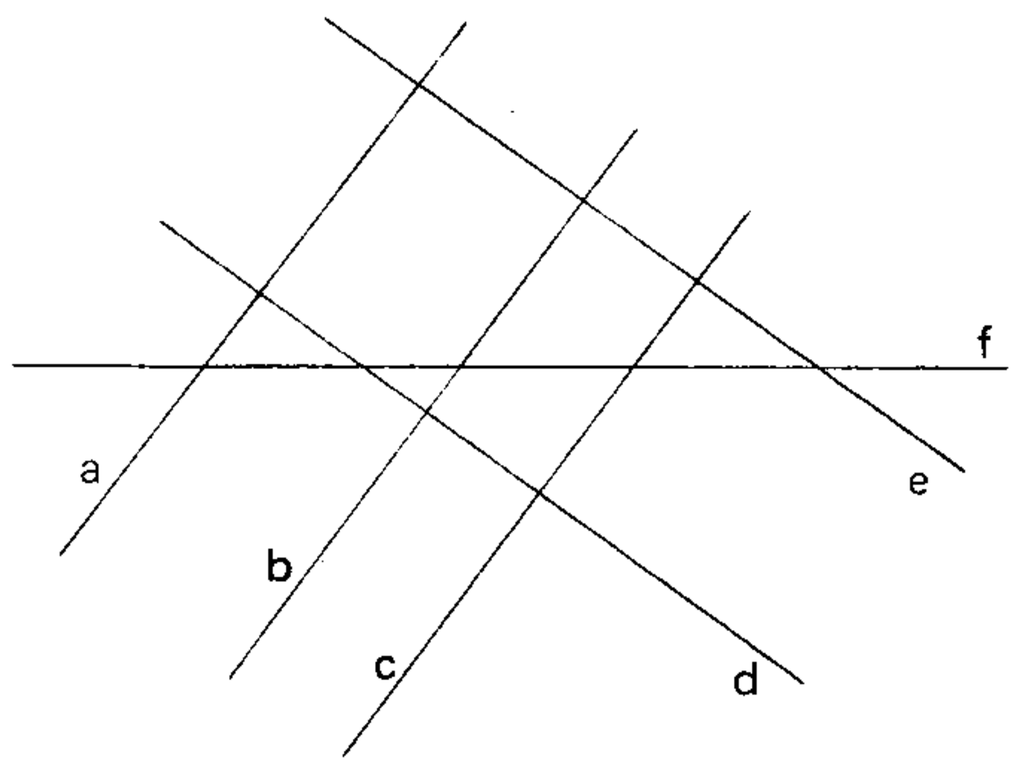
$$A_0 = \{0, 2\}, \quad A_1 = \{1, 3\}, \quad A_2 = \{2, 0\}, \quad A_3 = \{3, 1\}$$

Observe-se que $A_0 = A_2$ e $A_1 = A_3$.

O *conjunto-quociente* é:

$$A/R = \{ A_0, A_1 \} = \{ \{0, 2\}, \{1, 3\} \}$$

2) Seja $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ o conjunto das retas da figura abaixo.

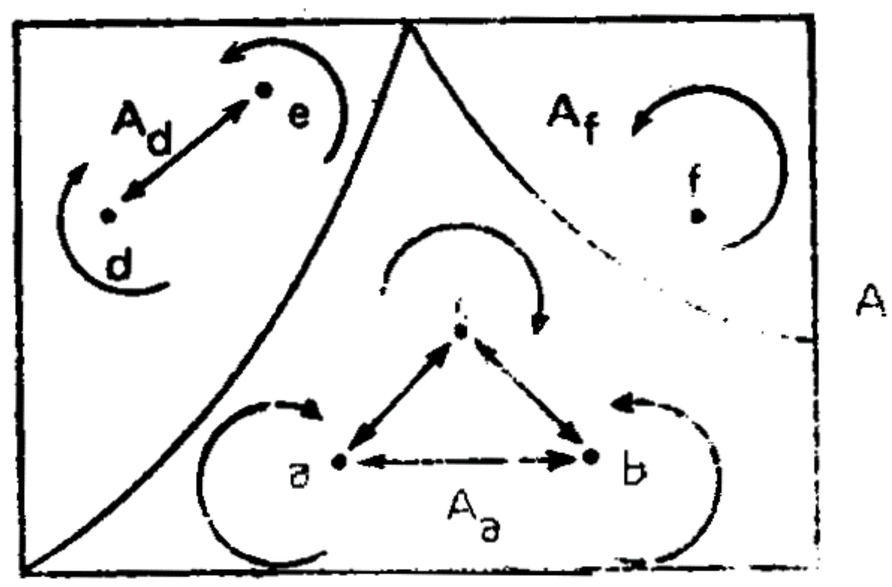


Para a relação de equivalência R em A definida por $xRy \Longleftrightarrow x \parallel y$, as *classes de equivalência* e o *conjunto-quociente* são:

$$A_a = A_b = A_c = \{a, b, c\}, \quad A_d = A_e = \{d, e\}, \quad A_f = \{f\}$$

$$A/R = \{ A_a, A_d, A_f \} = \{ \{a, b, c\}, \{d, e\}, \{f\} \}$$

A figura abaixo é o *diagrama sagital* desta relação de equivalência R em A.



3) Seja a relação de equivalência R em A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9} definida por xRy $\Longleftrightarrow$ 4 | (x − y).

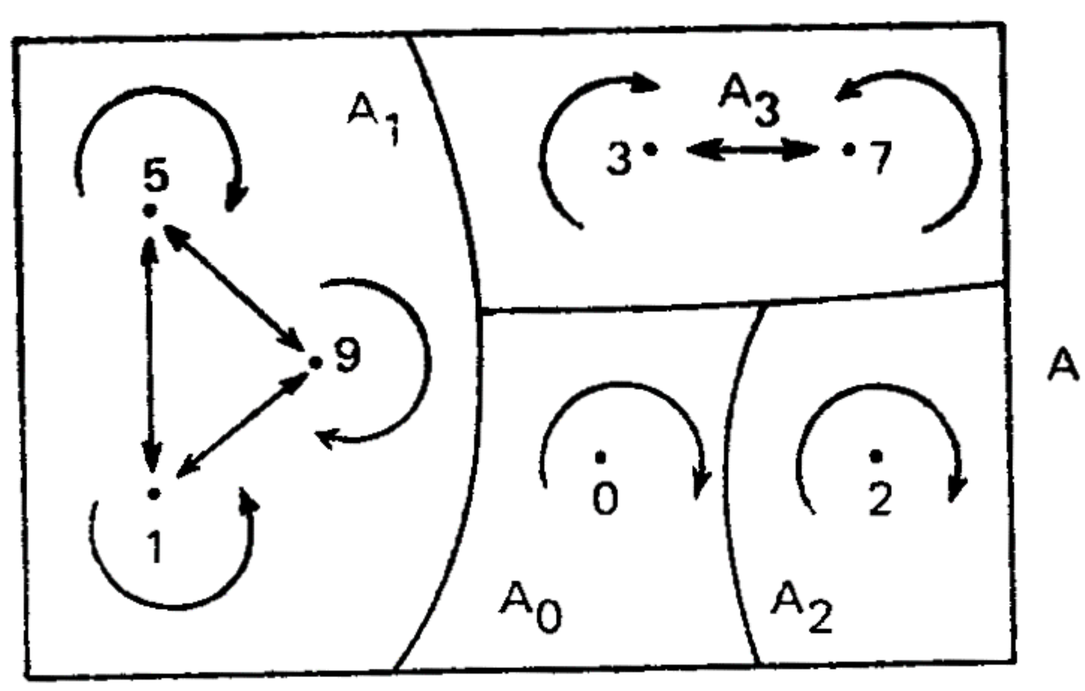
As *classes de equivalência* e o *conjunto-quociente* são.

$A_0 = \{0\}$, $A_1 = A_5 = A_9 = \{1, 5, 9\}$, $A_2 = \{2\}$,

$A_3 = A_7 = \{3, 7\}$

$A/R = \{A_0, A_1, A_2, A_3\} = \{\{0\}, \{1, 5, 9\}, \{2\}, \{3, 7\}\}$

A figura abaixo é o *diagrama sagital* desta relação de equivalência R em A.



4) Seja a relação de equivalência R em A = {−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3} definida por xRy $\Longleftrightarrow$ $x^2 + x = y^2 + y$.

As *classes de equivalência* e o *conjunto-quociente* são:

$A_0 = \{0, -1\}$, $A_1 = \{1, -2\}$, $A_2 = \{2, -3\}$, $A_3 = \{3\}$;

$A/R = \{A_0, A_1, A_2, A_3\} = \{\{0, -1\}, \{1, -2\}, \{2, -3\}, \{3\}\}$

5) Seja π um plano e s uma reta contida neste plano. Consideremos a relação R em $C_\pi s$, complementar de s em π, definida por

XRY $\Longleftrightarrow$ O segmento XY não intercepta s

i) Mostrar que R é uma relação de equivalência em $C_{\pi}s$.
ii) Determinar as classes de equivalência e o conjunto-quociente.

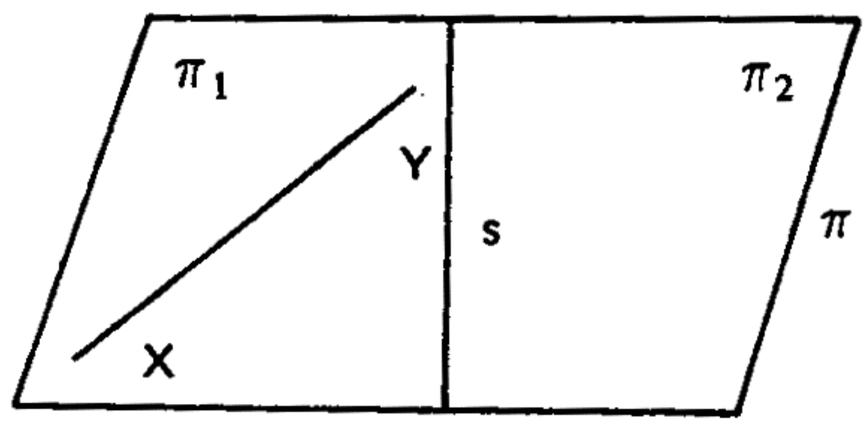
Resolução:

i) (R) XRX, porque $XX = \{X\}$ e $\{X\} \cap s = \phi$.

(S) $XRY \Longrightarrow XY \cap s = \phi \Longrightarrow YX \cap s = \phi \Longrightarrow YRX$

(T) XRY e $YRZ \Longrightarrow XY \cap s = \phi$ e $YZ \cap s = \phi \Longrightarrow$
$\Longrightarrow XZ \cap s = \phi \Longrightarrow XRZ$.

ii) As *classes de equivalência* são os dois semiplanos abertos π_1 e π_2 que a reta *s* determina no plano π. Portanto, o *conjunto-quociente* é: $\{\pi_1, \pi_2\}$.



OBSERVAÇÃO — Em cada um destes exemplos, note-se que as classes de equivalência obtidas *não são vazias, são disjuntas duas a duas* e sua *reunião* é o conjunto sobre o qual a relação de equivalência é considerada.

7. PROPRIEDADES DAS CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

Seja R uma relação de equivalência num conjunto não vazio A e sejam *a* e *b* dois elementos quaisquer de $A (a, b \in A)$.

(P_1) $Cl(a) = Cl(b)$ se e somente se aRb.

Dem.:

i) Suponhamos que aRb. Vamos provar que $Cl(a) = Cl(b)$. Com efeito, seja $x \in A$ um elemento qualquer de Cl(a), isto é, xRa. Então, por ser R transitiva, subsiste a implicação:

$$xRa \text{ e } aRb \Longrightarrow xRb$$

Ora, xRb significa que $x \in Cl(b)$. Logo, $Cl(a) \subset Cl(b)$ (1)

Seja, agora, $y \in A$ um elemento qualquer de Cl(b), isto é, yRb. Como R é simétrica, aRb implica bRa e, portanto, por ser R transitiva, subsiste a implicação:

$$yRb \text{ e } bRa \Longrightarrow yRa$$

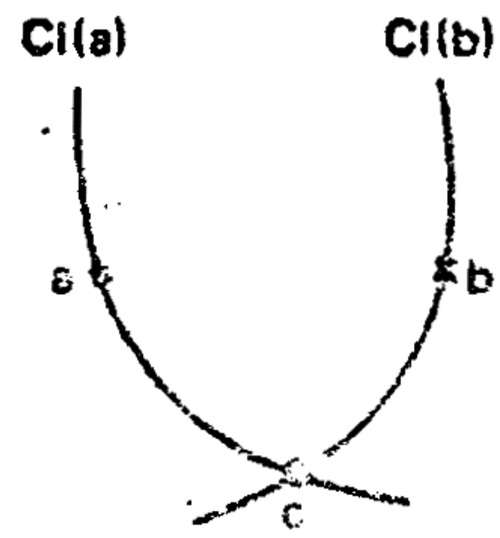
Ora, yRa significa que $y \in Cl(a)$. Logo, $Cl(b) \subset Cl(a)$ (2)

De (1) e (2), pela anti-simetria da inclusão, resulta que $Cl(a) = Cl(b)$.

ii) Suponhamos, agora, que Cl(a) = Cl(b). Vamos provar que aRb. Com efeito, $b \in Cl(b)$ e, portanto, $b \in Cl(a)$, isto é, bRa, e como R é simétrica, bRa implica aRb.

(P_2) Se $Cl(a) \cap Cl(b) \neq \phi$, então Cl(a) = = Cl(b).

Dem.: — Com efeito, se Cl(a) e Cl(b) não são disjuntas, então existe ao menos um elemento, $c \in A$ tal que $c \in Cl(a)$ e $c \in Cl(b)$, isto é, tal que cRa e cRb, ou seja, por ser R simétrica, tal que aRc e cRb. E como R é transitiva, subsiste a implicação:



$$aRc \text{ e } cRb \Longrightarrow aRb$$

Logo, pela propriedade P_1, temos Cl(a) = Cl(b).

Conclusão: Duas classes de equivalência que não são disjuntas coincidem, ou seja, *duas classes de equivalência distintas são disjuntas:*

$$Cl(a) \neq Cl(b) \Longrightarrow Cl(a) \cap Cl(b) = \phi$$

Assim, todo elemento de A pertence a uma única classe de equivalência. Portanto, escolhendo-se em cada classe de equivalência um único elemento, o conjunto $J (J \subset A)$ que se obtém é um *conjunto de representantes* das classes de equivalência segundo R.

8. PARTIÇÃO DE UM CONJUNTO

Definição — Chama-se *partição* de um conjunto não vazio $A (A \neq \phi)$, a todo conjunto P de partes não vazias de A, disjuntas duas a duas e cuja reunião é A.

Portanto, uma *partição* P de A é um subconjunto do conjunto $\mathbf{P}(A)$ das partes de A que satisfaz as três seguintes condições:

i) Se $X \in P$, então $X \neq \phi$

ii) Se X_i, $X_j \in P (X_i \neq X_j)$, então $X_i \cap X_j = \phi$

iii) $\bigcup_{X \in P} X = A$

Cada elemento de P chama-se uma *classe* da partição. Todo elemento de A pertence a uma e somente a uma classe da partição P.

Exemplos:

1) Consideremos o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ e os seguintes conjuntos de

partes de A:

$$P_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}, \{e, f\}\}$$
$$P_2 = \{\{a, b\}, \{b, c, d\}, \{e, f\}\}$$
$$P_3 = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{f\}\}$$
$$P_4 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}\}$$
$$P_5 = \{\{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \phi\}$$

Os conjuntos P_1 e P_4 são partições de A, porque cada um deles é formado de partes não vazias de A, disjuntas duas a duas e cuja reunião é A. O conjunto P_2 não é uma partição de A, porque o elemento *b* pertence a *dois* elementos de P_2. O conjunto P_3 não é uma partição de A, porque o elemento *e* não pertence a nenhum dos elementos de P_3. E o conjunto P_5 não é uma partição de A, porque P_5 compreende a *parte vazia* de A.

2) O conjunto $\{E, F\}$, sendo E o conjunto dos números naturais pares e F o conjunto dos números naturais ímpares, é uma partição do conjunto **N** dos números naturais, porque $E, F \neq \phi$, $E \cap F = \phi$ e $E \cup F = \mathbf{N}$.

9. RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA E PARTIÇÕES

I — *Partição associada a uma relação de equivalência*

Teorema — Dados um conjunto não vazio A *e uma relação de equivalência* R *em* A, *o conjunto-quociente* A/R *é uma partição de* A.

Dem.:

i) Toda classe de equivalência Cl(a) é, por definição, uma *parte* de A, e como $a \in Cl(a)$, para todo $a \in A$, Cl(a) *não é vazia,* $Cl(a) \neq \phi$.

ii) Todo par de classes de equivalência distintas, Cl(a) e Cl(b), *são disjuntas,* isto é, $Cl(a) \cap Cl(b) = \phi$.

iii) Todo elemento de A está classificado e pertence a uma única classe de equivalência; logo, a *reunião* de todas as classes de equivalência distintas, Cl(a), Cl(b), Cl(c), . . . é o conjunto A.

Assim sendo, o conjunto-quociente $A/R = \{Cl(a), Cl(b), Cl(c), \ldots\}$ é uma *partição de* A, denominada *partição de* A *associada à relação de equivalência* R ou *partição de* A *induzida pela relação de equivalência* R.

Exemplo — Seja a relação de equivalência R em $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cujo grafo é:

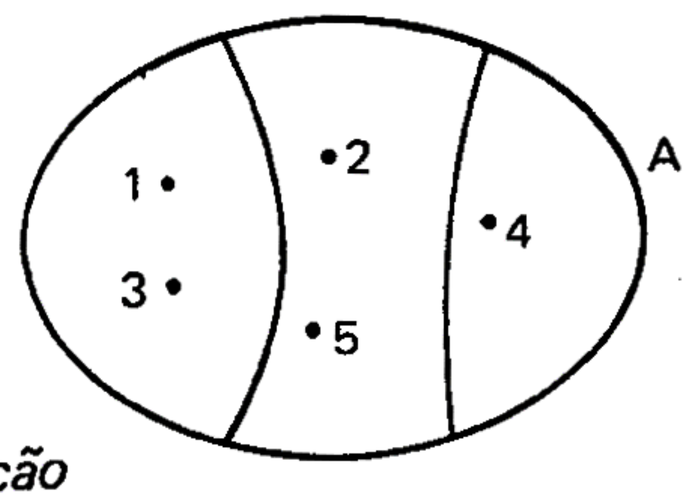
$$G = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1), (2, 5), (5, 2) \}$$

As classes de equivalência segundo R são:

$$A_1 = \{ 1, 3 \} = A_3 \quad , \quad A_2 = \{ 2, 5 \} = A_5 \quad , \quad A_4 = \{ 4 \}$$

Logo, a partição de A associada à relação de equivalência R é:

$$\{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}\}$$



II – *Relação de equivalência associada a uma partição*

Seja A um conjunto não vazio e seja $P = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ uma *partição* de A.

Teorema – A relação S em A tal que "dois elementos x e y de A estão na relação S se e somente se x e y pertencem a uma mesma classe A_i da partição $P(xSy \Longleftrightarrow x, y \in A_i)$", é uma relação de equivalência em A.

Dem.: – Com efeito, quaisquer que sejam os elementos x, y, z de A, temos:

1) xSx, porque $x \in A \Longrightarrow (\exists A_i)\ (A_i \in P \text{ e } x \in A_i) \Longrightarrow x, x \in A_i$. Logo, S *é reflexiva.*

2) $xSy \Longrightarrow x, y \in A_i \Longrightarrow y, x \in A_i \Longrightarrow ySx$. Logo, S *é simétrica.*

3) xSy e $ySz \Longrightarrow x, y \in A_i$ e $y, z \in A_j \Longrightarrow y \in A_i$ e $y \in A_j \Longrightarrow$
$\Longrightarrow A_i = A_j$. Então, $x, z \in A_i \Longrightarrow xSz$. Logo, S *é transitiva.*

Assim sendo, S é uma relação de equivalência em A, denominada *relação de equivalência associada à partição* P *de* A.

Exemplo – Seja o conjunto $A = \{ a, b, c, d, e \}$ e a partição P de A seguinte: $P = \{\{ a, b \}, \{ c, d, e \}\}$.

A relação de equivalência S em A associada a esta partição P é aquela definida pelo grafo:

$$H = \{ (a, a), (b, b), (a, b), (b, a), (c, c), (d, d), (e, e), (c, d), (c, e), (d, e), (d, c), (e, c), (e, d) \}$$

Observe-se que a partição de A associada à relação de equivalência S é precisamente P.

10. CONGRUÊNCIAS EM Z

Sejam a e b dois números inteiros quaisquer ($a, b \in \mathbf{Z}$) e seja m um número inteiro natural dado ($m \in \mathbf{N}$).

Definição — Diz-se que a *é congruente a* b *módulo* m se e somente se a diferença a - b é um múltiplo de m.

Indica-se que a é congruente a b módulo m com a notação:

$$a \equiv b \ (\text{mod. } m)$$

Portanto, simbolicamente:

$$a \equiv b \ (\text{mod. } m) \Longleftrightarrow (\exists k) \ (k \in \mathbf{Z} \ \text{e} \ a - b = km)$$

Obviamente, dois números inteiros quaisquer a e b são congruentes módulo 1, isto é: $a \equiv b \ (\text{mod. } 1), \forall a, b \in \mathbf{Z}$.

Exemplos:

1) $38 \equiv 24 \ (\text{mod. } 7)$, porque $38 - 24 = 14 = 2.7$

2) $6 \equiv -9 \ (\text{mod. } 5)$, porque $6 - (-9) = 15 = 3.5$

Teorema — A relação de congruência R *em* **Z** *definida por*

$$xRy \Longleftrightarrow x \equiv y \ (\text{mod. } m)$$

é uma relação de equivalência em **Z**.

Dem.: — Com efeito, quaisquer que sejam x, y e z em **Z**, temos:

(R) xRx, porque $x - x = 0 = 0.m$. Logo, R é *reflexiva*.

(S) $xRy \Longrightarrow x - y = km \Longrightarrow y - x = (-k)m \Longrightarrow yRx$.

Logo, R é *simétrica*.

(T) xRy e $yRz \Longrightarrow x - y = km$ e $y - z = hm \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x - z = (x - y) + (y - z) = (k + h)m \Longrightarrow xRz$.

Logo, R é *transitiva*.

E X E R C Í C I O S

1. Seja $\sim$ a relação no conjunto **R** dos números reais definida por:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \text{ é um inteiro}$$

Mostrar que $\sim$ é uma relação de equivalência em **R**.

2. Seja R a relação no conjunto **Z** dos números inteiros definida por:

$$xRy \Longleftrightarrow x \text{ e } y \text{ têm a mesma paridade}$$

Mostrar que R é uma relação de equivalência em **Z**.

NOTA — Diz-se que dois inteiros têm a mesma *paridade* se ambos são pares ou se ambos são ímpares.

3. Sejam E um conjunto, A uma *parte* dada de E($A \subset E$), R e S relações em **P**(E) assim definidas:

$$XRY \Longleftrightarrow X \cap A = Y \cap A \;;\; XSY \Longleftrightarrow X \cup A = Y \cup A$$

Mostrar que R e S são relações de equivalência.

4. Seja R a relação em $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$(**N** conjunto dos números naturais) assim definida:

$$(x, y)\, R\, (z, t) \Longleftrightarrow x + t = y + z$$

Mostrar que R é uma relação de equivalência e determinar a classe de equivalência do elemento (2, 5) de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

5. Seja $\sim$ a relação em $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (plano Cartesiano) definida por:

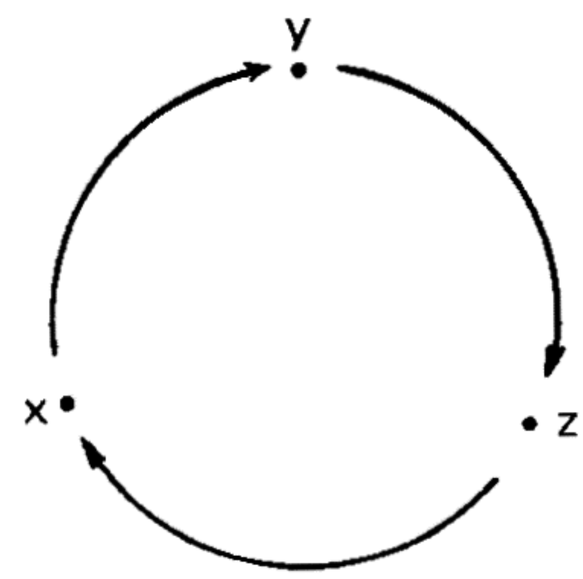
$$(x, y) \sim (z, t) \Longleftrightarrow x = z$$

Mostrar que $\sim$ é uma relação de equivalência e determinar a classe de equivalência do elemento (3, 5) de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

6. *Relação circular* — Uma relação R = (G, A, A) em A diz-se *circular* se e somente se quaisquer que sejam os elementos x, y e z de A, se $(x, y) \in G$ e $(y, z) \in G$, então $(z, x) \in G$. Portanto, simbolicamente:

$$R \text{ é circular} \Longleftrightarrow (\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(x, y, z \in A \text{ e } xRy \text{ e } yRz \Longrightarrow zRx)$$

Na representação de uma relação *circular* R = (G, A, A) por um *diagrama sagital,* se existe uma flecha de x para y e existe uma outra flecha de y para z, então, também existe uma flecha de z para x.



Demonstrar: (i) Se R é uma relação de equivalência então R é circular; (ii) Se uma relação R é reflexiva e circular, então R é uma relação de equivalência (isto é, R também é simétrica e transitiva).

7. Sejam π um plano, O um ponto fixo deste plano e R a relação em π assim definida: $XRY \Longleftrightarrow OX = OY$.
   i) Mostrar que R é uma relação de equivalência em π.
   ii) Determinar as classes de equivalência e o conjunto-quociente.

8. Sejam π um plano, O um ponto fixo deste plano e R a relação em $\pi^* = \pi - \{0\}$ assim definida: $XRY \Longleftrightarrow$ X, O, Y estão alinhados.
   i) Mostrar que R é uma relação de equivalência em π^*.
   ii) Determinar as classes de equivalência e o conjunto-quociente.

9. Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Verificar quais dos seguintes conjuntos de *partes* de A é uma *partição* de A:

$$P_1 = \{\{1, 5\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 5\}, \{3, 6\}\}$$
$$P_2 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}\}$$
$$P_3 = \{\{1, 5\}, \{2\}, \{3, 6\}\}$$
$$P_4 = \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

10. Seja o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Verificar quais dos seguintes conjuntos de *partes* de A é uma *partição* de A:

$$P_1 = \{\{a, c, e\}, \{b\}, \{d, g\}\}$$
$$P_2 = \{\{a, e, g\}, \{c, d\}, \{b, e, f\}\}$$
$$P_3 = \{\{a, b, e, g\}, \{c\}, \{d, f\}\}$$
$$P_4 = \{\{a, b, c, d, e, f, g\}\}$$

11. Determinar todas as partições dos conjuntos: $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$.

12. *Partição cruzada de um conjunto* — Sejam $P_1 = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ e $P_2 = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ duas *partições* de um mesmo conjunto A. Mostrar que con-

junto:

$$P_c = \{X_i \cap X_j \neq \phi \mid X_i \in P_1 \ , \ X_j \in P_2\}$$

também é uma partição de A, denominada *partição cruzada* de A relativa ao par (P_1, P_2) de partições de A.

13. Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Determinar a *partição cruzada* de A relativa a cada um dos seguintes pares de partições de A:

    a) $\{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}\}$ e $\{\{1, 2, 8\}, \{3, 4, 5, 6, 7\}\}$

    b) $\{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}\}$ e $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6, 7, 8\}\}$

14. Determinar todas as relações de equivalência sobre cada um dos conjuntos: $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$.

15. Determinar todas as relações de equivalência R sobre o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ que satisfazem às condições: aRb e cRd.

16. Se R e S são relações de equivalência em A, então $R \cap S$ é uma relação de equivalência em A. Provar.

17. Se R é uma relação de equivalência em A, então $R \circ R = R$. Provar.

18. Demonstrar que $R = (A \times A, A, A)$ é uma relação de equivalência em A.

19. Seja $R = (G, A, A)$ uma relação num conjunto não vazio A. Demonstrar que R é uma relação de equivalência em A se e somente se $D_A \subset G$, $R = R^{-1}$ e $R \circ R = R$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

4. $\{(2, 5), (1, 4), (3, 6), \ldots, (n, n + 3), \ldots\}$

5. $\{(3, y) \mid y \in R\}$

7. ii) As *classes de equivalência* são as circunferências $C_1, C_2, C_3, \ldots$ do plano π e de centro O (concêntricas) e o *conjunto-quociente* $\pi/R = \{C_1, C_2, C_3, \ldots\}$.

8. ii) As *classes de equivalência* são as retas $r_1, r_2, r_3, \ldots$ do plano π que passam por O e privadas deste ponto, e o *conjunto-quociente* $\pi^*/R = \{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$.

9. P_1 e P_4

10. P_3 e P_4

11. $\{\{1, 2, 3\}\}$; $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$; $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$;
$\{\{3\}, \{1, 2\}\}$; $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.
$\{\{a, b, c, d\}\}$; $\{\{a\}, \{b, c, d\}$; $\{\{b\}, \{a, c, d\}\}$;
$\{\{c\}, \{a, b, d\}\}$; $\{\{d\}, \{a, b, c\}\}$; $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$;
$\{\{a, c\}, \{b, d\}\}$; $\{\{a, d\}, \{b, c\}$; $\{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$;
$\{\{a\}, \{c\}, \{b, d\}\}$; $\{\{a\}, \{d\}, \{b, c\}\}$;
$\{\{b\}, \{c\}, \{a, d\}\}$; $\{\{b\}, \{d\}, \{a, c\}\}$;
$\{\{c\}, \{d\}, \{a, b\}\}$; $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$

13. a) $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{8\}, \{5, 6, 7\}\}$
b) $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}, \{6, 7, 8\}\}$

14. $(\{(1,1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}, A, A)$; $(\{(1, 1), (2, 2)\}, A, A)$
$(\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}, B, B)$
$(\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}, B, B)$
$(\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}, B, B)$
$(\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}, B, B)$
$(\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, B, B)$

CAPÍTULO 13

RELAÇÕES DE ORDEM

1. DEFINIÇÃO DE RELAÇÃO DE ORDEM

Definição — Chama-se *relação de ordem* ou apenas *ordem* num conjunto não vazio A a toda relação R = (G, A, A) em A que é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Em outros termos, uma relação R = (G, A, A) em A é uma *relação de ordem* em A ou uma *ordem* em A se e somente se possui simultaneamente as três propriedades seguintes:

(R) $(\forall x)\ (x \in A \Longrightarrow xRx)$

(AS) $(\forall x)\ (\forall y)\ (x, y \in A \text{ e } xRy \text{ e } yRx \Longrightarrow x = y)$

(T) $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (x, y, z \in A \text{ e } xRy \text{ e } yRz \Longrightarrow xRz)$

Todo conjunto munido de uma ordem R diz-se *conjunto ordenado pela ordem* R. Também se diz que o conjunto possui uma *estrutura de ordem* definida pela R. Portanto, uma *estrutura de ordem* é um par ordenado (A, R), onde A é um conjunto não vazio e R é uma ordem em A.

Exemplos:

1) A relação no conjunto **R** dos números reais definida por "$x \leqslant y$" é uma *ordem* em **R**, denominada *ordem natural,* pois possui as três propriedades:

(R) $(\forall x)\ (x \in \mathbf{R} \Longrightarrow x \leqslant x)$

(AS) $(\forall x)\ (\forall y)\ (x, y \in \mathbf{R} \text{ e } x \leqslant y \text{ e } y \leqslant x \Longrightarrow x = y)$

(T) $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (x, y, z \in \mathbf{R} \text{ e } x \leqslant y \text{ e } y \leqslant z \Longrightarrow x \leqslant z)$

2) A relação no conjunto **N** dos números naturais definida por "$x \mid y$" (x divide y) é uma *ordem* em **N**. Com efeito, $x \mid y$ significa que existe um inteiro natural *q* tal que $y = xq$, isto é, simbolicamente:

$$x \mid y \overset{\bullet}{\Longleftrightarrow} (\exists q)\ (q \in \mathbf{N} \text{ e } y = xq)$$

Por outra parte, subsistem as três propriedades:

(R) $(\forall x)\ (x \in \mathbf{N} \Longrightarrow x \mid x)$, porque $x = x.1$ $(q = 1 \in \mathbf{N})$

(AS) $(\forall x)\ (\forall y)\ (x, y \in \mathbf{N} \text{ e } x \mid y \text{ e } y \mid x \Longrightarrow x = y)$. De fato:

$$x \mid y \text{ e } y \mid x \Longrightarrow y = xq \text{ e } x = yq' \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x = (xq)q' = x(qq') \Longrightarrow qq' = 1 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow q = q' = 1 \Longrightarrow x = y$$

(T) $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (x, y, z \in \mathbf{N} \text{ e } x \mid y \text{ e } y \mid z \Longrightarrow x \mid z)$.

De fato:

$$x \mid y \text{ e } y \mid z \Longrightarrow y = xq \text{ e } z = yq' \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow z = (xq)q' = x(qq')\ (qq' \in \mathbf{N}) \Longrightarrow x \mid z$$

3) A relação no conjunto **Z** dos números inteiros definida por "$x \mid y$" *não é uma ordem em* **Z**, porque esta relação não possui a propriedade anti-simétrica, pois, p. ex., $5 \mid -5$ e $-5 \mid 5$, mas $5 \neq -5$.

4) A relação no conjunto **P**(E) das partes de um conjunto E definida por "$X \subset Y$" (relação de inclusão) é uma *ordem* em **P**(E), porque esta relação possui as três propriedades:

(R) $(\forall X)\ (X \in \mathbf{P}(E) \Longrightarrow X \subset X)$

(AS) $(\forall X)\ (\forall Y)\ (X, Y \in \mathbf{P}(E) \text{ e } X \subset Y \text{ e } Y \subset X \Longrightarrow X = Y)$

(T) $(\forall X)\ (\forall Y)\ (\forall Z)\ (X, Y, Z \in \mathbf{P}(E) \text{ e } X \subset Y \text{ e } Y \subset Z \Longrightarrow$
$\Longrightarrow X \subset Z)$

demonstradas anteriormente (Capítulo 3).

2. ELEMENTOS COMPARÁVEIS

Seja R uma *relação de ordem* num conjunto não vazio A.

Definição — Dois elementos quaisquer x e y do conjunto A dizem-se *comparáveis* pela *ordem* R se e somente se uma das sentenças xRy ou yRx for verdadeira.

Portanto, se nenhuma das sentenças xRy e yRx for verdadeira, isto é, $x \not R y$ e $y \not R x$, então x e y *não são comparáveis* pela *ordem* R, o que se indica pela notação $x \parallel y$.

Exemplo — Os inteiros naturais 3 e 5 *são comparáveis* pela *ordem natural* "$x \leqslant y$" em **N**, porque $3 \leqslant 5$, mas *não são comparáveis* pela *ordem* "$x \mid y$" em **N**, porque 3 não divide 5 e 5 não divide 3, isto é, $3 \not\mid 5$ e $5 \not\mid 3$.

Observe-se, através deste exemplo, que dois elementos de um conjunto podem ser comparáveis por uma ordem e não comparáveis por uma outra ordem.

3. ORDEM PARCIAL E ORDEM TOTAL

Definição 1 — Uma relação de ordem R num conjunto não vazio A tal que existe ao menos um par (x, y) de elementos de A não comparáveis pela R denomina-se *relação de ordem parcial* R *em* A ou *ordem parcial em* A.

Portanto, uma *ordem parcial* R *em* A é uma ordem R em A que satisfaz à condição:

$$(\exists x)\ (\exists y)\ (x, y \in A \ \text{ e } \ xRy \ \text{ e } \ yRx)$$

Se R é uma ordem parcial em A, diz-se que A é um *conjunto parcialmente ordenado pela* R ou que o conjunto A possui uma *estrutura de ordem parcial definida pela* R. Portanto, uma *estrutura de ordem parcial* é um par ordenado (A, R), onde A é um conjunto e R é uma ordem parcial em A.

Definição 2 — Uma relação de ordem R num conjunto não vazio A tal que todos os elementos de A são comparáveis dois a dois pela R chama-se *relação de ordem total* R *em* A ou *ordem total* R *em* A.

Portanto, uma *ordem total* R *em* A é uma ordem R em A que satisfaz à condição:

$$(\forall x)\ (\forall y)\ (x, y \in A \ \text{ e } \ xRy \ \text{ ou } \ yRx)$$

Se R é uma ordem total em A, diz-se que A é um *conjunto totalmente ordenado* pela R ou que o conjunto A possui uma *estrutura de ordem total* definida pela R. Portanto, uma *estrutura de ordem total* é um par ordenado (A, R), onde A é um conjunto e R é uma ordem total em A.

Um conjunto totalmente ordenado é também chamado *conjunto linearmente ordenado* ou uma *cadeia*.

Exemplos:

1) A relação no conjunto **N** dos números naturais definida por "$x \mid y$" (relação de divisibilidade) é uma *ordem parcial em* **N**, porque dos inteiros naturais nem sempre são comparáveis por esta ordem, como, p. ex., 5 e 7 (5 não divide 7 e 7 não divide 5).

2) A relação no conjunto **P**(E) das partes de um conjunto E com mais de um elemento definida por "$X \subset Y$" (relação de inclusão) é uma *ordem parcial em* **P**(E), porque, se P e Q são duas partes *disjuntas* de E ($P \cap Q = \phi$), P e Q não são comparáveis por esta ordem ($P \not\subset Q$ e $Q \not\subset P$).

No caso particular em que E é um conjunto unitário, $E = \{a\}$, temos $P(E) = \{\phi, E\}$, e como $\phi \subset E$, resulta uma *ordem total* em P(E).

3) A ordem natural "$x \leqslant y$" no conjunto **R** dos números reais é uma *ordem total em* **R**, porque, quaisquer que sejam os números reais x e y, se tem $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$, isto é, dois números reais quaisquer são comparáveis pela ordem natural em **R**.

4) A relação no conjunto $A = \{2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots\}$ definida por "x é um múltiplo de y" é uma *ordem total em* A, porque dois elementos quaisquer de A são visivelmente comparáveis por esta ordem (cada elemento de A a partir do 2º é múltiplo de cada um dos elementos que o precedem).

4. ORDEM OPOSTA

Seja R uma *ordem* num conjunto não vazio A. A relação recíproca R^{-1} de $R(yR^{-1}x \Longleftrightarrow xRy)$ possui, como a R, as propriedades reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Logo, R^{-1} também é uma *ordem* em A, denominada *ordem opósta* de R.

Se R é uma ordem total em A, a ordem oposta R^{-1} também é uma ordem total em A, porque, se xRy ou yRx, então $yR^{-1}x$ ou $xR^{-1}y$.

Exemplo — Consideremos a ordem R em $A = \{2, 3, 6, 8\}$ definida por

$$xRy \Longleftrightarrow x \mid y$$

isto é:

$$R = (\{(2, 2), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (6, 6), (8, 8)\}, A, A)$$

Então, a *ordem oposta* de R é a relação R^{-1} em A definida por

$$yR^{-1}x \Longleftrightarrow y \text{ é múltiplo de } x$$

isto é:

$$R^{-1} = (\{(2, 2), (6, 2), (8, 2), (3, 3), (6, 3), (6, 6), (8, 8)\}, A, A)$$

5. ORDEM ESTRITA

Definição — Chama-se *ordem estrita* num conjunto não vazio A toda a relação R em A que é irreflexiva e transitiva.

Em outros termos, uma relação R em A é uma *ordem estrita em* A se e somente se possui simultaneamente as duas propriedades seguintes:

(IR) $(\forall x)\ (x \in A \Longrightarrow x \not R x)$

(T) $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (x, y, z \in A \text{ e } xRy \text{ e } yRz \Longrightarrow xRz)$

Uma ordem estrita R num conjunto A também possui a propriedade *assimétrica*, isto é, $(\forall x)\ (\forall y)\ (x, y \in A \text{ e } xRy \Longrightarrow y \not R x)$, porque, se xRy e yRx, então xRx, e, portanto, R não seria irreflexiva.

Se R é uma ordem estrita em A, diz-se que A é um *conjunto estritamente ordenado pela* R.

6. ORDEM ESTRITA TOTAL

Definição — Uma relação de ordem estrita R num conjunto não vazio A que satisfaz à condição:

$$(\forall x)\ (\forall y)\ (x, y \in A \text{ e } x \neq y \Longrightarrow xRy \text{ ou } yRx)$$

denomina-se uma *ordem estrita total em* A.

Importa notar que as duas alternativas xRy e yRx não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo em virtude da propriedade assimétrica de R.

Se R é uma ordem estrita total em A, diz-se que A é um *conjunto estrita e totalmente ordenado pela* R.

Exemplo — A relação no conjunto **N** dos números naturais definida por "$x < y$" é uma ordem estrita total em **N**, porque, quaisquer que sejam os inteiros naturais x, y, z, temos:

i) $x \not< x$

ii) $x < y \text{ e } y < z \Longrightarrow x < z$

iii) $x < y \text{ ou } y < x$

7. SUBCONJUNTOS DE UM CONJUNTO ORDENADO

Seja R uma *ordem* num conjunto não vazio A e seja E um subconjunto de A ($E \subset A$).

A ordem R em A *induz* uma ordem R_E em E do modo natural seguinte:

$$(\forall x)\ (\forall y)\ (x, y \in E \text{ e } xR_Ey) \Longleftrightarrow xRy$$

Diz-se que R_E é a *ordem induzida* em E pela ordem R ou a *restrição* da ordem R a E e, reciprocamente, que a ordem R é uma *extensão* ou um *prolongamento* da ordem R_E a A.

Se G e G_E são os grafos respectivos de R e R_E, é imediato que se tem:

$$G_E = G \cap (E \times E)$$

Se R é uma ordem parcial em A, a restrição de R a um subconjunto de A pode ser uma ordem total, mas se R é uma ordem total em A, então, a restrição de R a todo subconjunto de A também é uma ordem total. Em outros termos, subconjuntos de um conjunto parcialmente ordenado podem ser totalmente ordenados pela ordem induzida, mas todo subconjunto de um conjunto totalmente ordenado também é totalmente ordenado pela ordem induzida.

Em particular, a parte vazia e toda parte com um só elemento (parte unitária) de qualquer conjunto ordenado são totalmente ordenadas pela ordem induzida.

Para simplificar a notação, a ordem num conjunto A e a sua restrição a um subconjunto de A são habitualmente indicadas pelo mesmo símbolo.

Exemplo — Consideremos a ordem parcial R em $A = \{2, 3, 6, 12\}$ definida por $xRy \Longleftrightarrow x \mid y$.

As *restrições* de R aos subconjuntos de A:

$$E = \{2, 3, 6\} \quad e \quad F = \{2, 6, 12\}$$

são:

$$R_E = (\{(2, 2), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (6, 6)\}, E, E)$$
$$R_F = (\{(2, 2), (2, 6), (2, 12), (6, 6), (6, 12), (12, 12)\}, F, F)$$

Observe-se que R_E é uma ordem parcial em E (2 e 3 não são comparáveis pela R e que R_F é uma ordem total em F (todos os elementos de F são comparáveis dois a dois pela R), isto é, E e F são subconjuntos ordenados de A, o primeiro parcialmente e o segundo totalmente pela ordem induzida.

8. NOTAÇÕES

Seja R uma *ordem* num conjunto A. Em lugar de xRy costuma-se escrever "$x \leqslant y$", que se lê: "x é menor ou igual a y" ou "x precede y".

Com o mesmo significado de "$x \leqslant y$" escreve-se "$y \geqslant x$", que se lê: "y é maior ou igual a x" ou "y sucede x", isto é, as relações "$x \leqslant y$" e "$y \geqslant x$" são equivalentes: $x \leqslant y \Longleftrightarrow y \geqslant x$.

Se $x \leqslant y$ e $x \neq y$, escreve-se "$x < y$", que se lê: "x é menor do que y" ou "x precede estritamente y", isto é, as relações "$x \leqslant y$ e $x \neq y$" e "$x < y$" são equivalentes: $x \leqslant y$ e $x \neq y \Longleftrightarrow x < y$.

Com o mesmo significado de "$x < y$" escreve-se "$y > x$", que se lê: "y é

maior do que x" ou "y sucede estritamente x", isto é, as relações "$x < y$" e "$y > x$" são equivalentes: $x < y \Longleftrightarrow y > x$.

A relação "$x \leqslant y$" é equivalente a "$x < y$ ou $x = y$"; a relação "$x \leqslant y$ e $y < z$" implica "$x < z$"; e a relação "$x < y$ e $y \leqslant z$" implica "$x < z$", isto é, simbolicamente:

$$\text{i) } x \leqslant y \Longleftrightarrow x < y \text{ ou } x = y$$

$$\text{ii) } x \leqslant y \quad \text{e} \quad y < z \Longrightarrow x < z$$

$$\text{iii) } x < y \quad \text{e} \quad y \leqslant z \Longrightarrow x < z$$

Num conjunto ordenado, a *negação de* "$x \leqslant y$" *é* "$x > y$ ou $x \,||\, y$", e num conjunto totalmente ordenado, a *negação de* "$x \leqslant y$" *é* "$x > y$".

A ordem oposta de R é, por definição, a relação R^{-1} tal que

$$xR^{-1}y \Longleftrightarrow yRx \Longleftrightarrow y \leqslant x \Longleftrightarrow x \geqslant y$$

Portanto, em lugar de $xR^{-1}y$ pode-se escrever "$x \geqslant y$".

9. DIAGRAMA DE HASSE DE UMA RELAÇÃO DE ORDEM

A representação gráfica de uma relação de ordem R (parcial ou total) num conjunto finito A se faz geralmente por um *diagrama de HASSE,* que é um diagrama sagital de R simplificado pelas seguintes convenções:

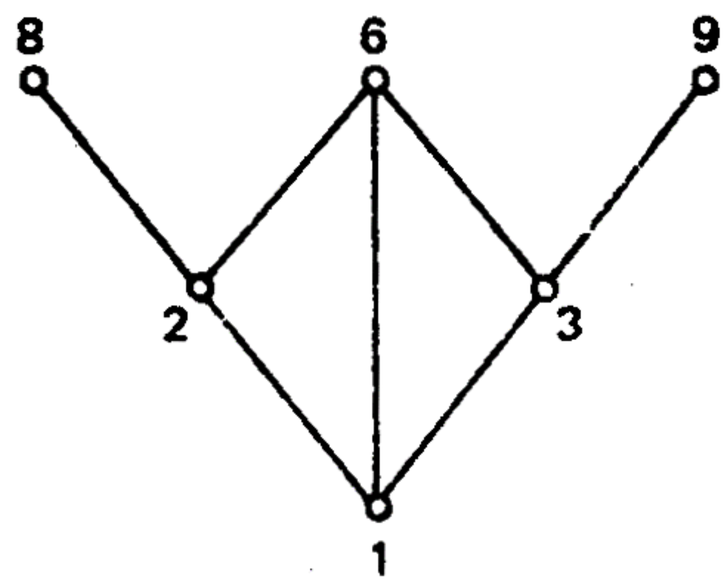
I) Representam-se os elementos de A por pontos ou pequenos círculos e não se desenham "laços" em torno de cada elemento de A, isto é, a propriedade reflexiva de R fica subentendida.

II) Se existe uma flecha de x para y e uma outra flecha de y para z (x, y, z elementos de A), não se desenha a flecha de x para z, isto é, fica subentendida a propriedade transitiva de R.

III) Suprimem-se as flechas, que são substituídas por segmentos de reta, e "orienta-se" o desenho de "baixo para cima", de tal modo que, se x e y são dois elementos comparáveis de A e xRy, o segmento que une os pontos representativos de x e y seja "ascendente" (o ponto que representa y acima do ponto que representa x).

Exemplos:

(1)



$A = \{1, 2, 3, 6, 8, 9\}$

$xRy \iff x \mid y$

R é uma ordem parcial

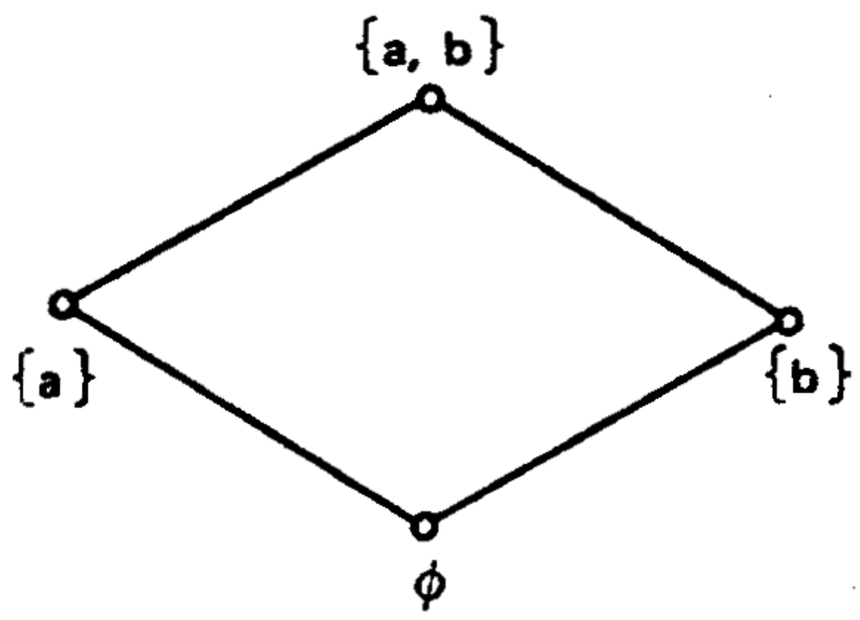
(2)

$A = \{1, 3, 6, 12, 24\}$

$xRy \iff x \mid y$

R é uma ordem total

(3)



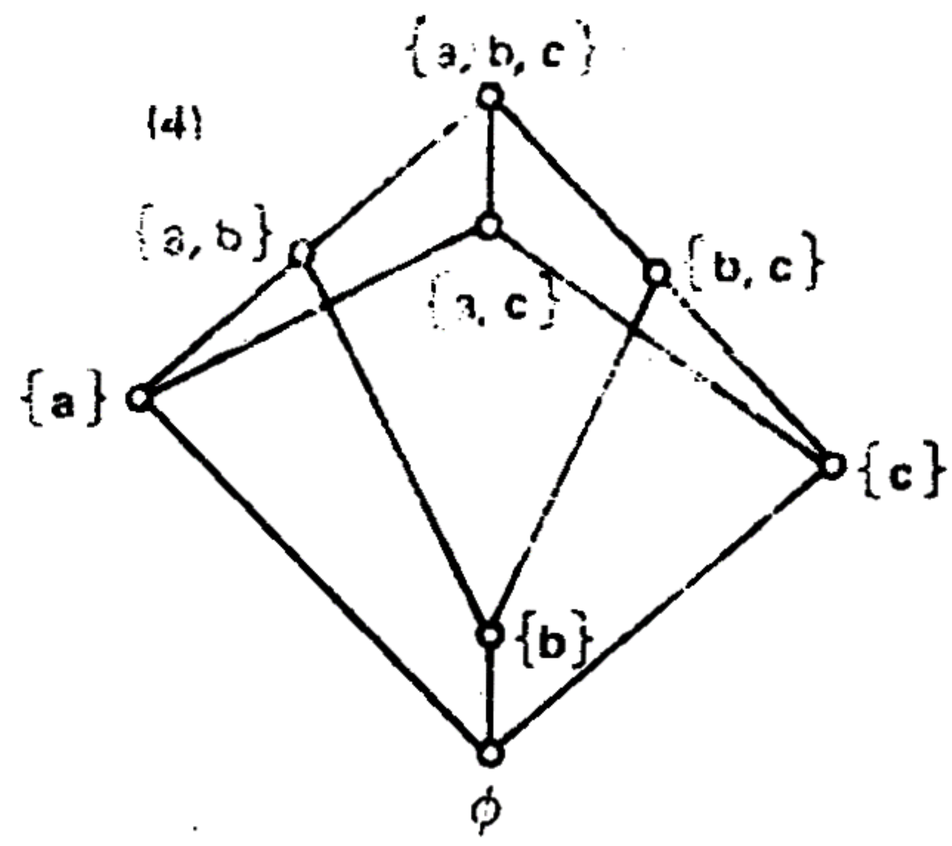
$A = \{a, b\}$

$X, Y \in \mathbf{P}(A)$

$XRY \iff X \subset Y$

R é uma ordem parcial

(4)



$A = \{a, b, c\}$

$X, Y \in \mathbf{P}(A)$

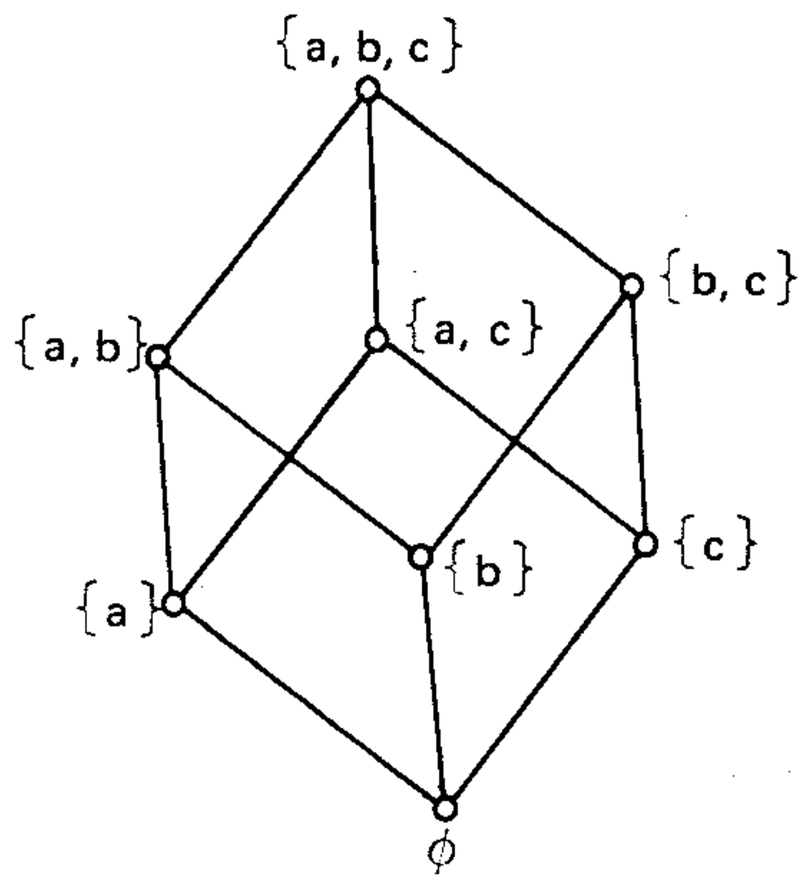
$XRY \iff X \subset Y$

R é uma ordem parcial

Na representação de uma relação de ordem parcial por um diagrama de HASSE, os elementos *não comparáveis* são aqueles que não estão ligados por segmentos ascendentes. Assim, no Ex. 1, não são comparáveis os elementos 2 e 3, 2 e 9, 3 e 8, etc.

A relação de ordem parcial no conjunto $\mathbf{P}(A)$ das partes do conjunto $A = \{a, b, c\}$ definida pela relação de inclusão "$X \subset Y$" (Ex. 4) pode também ser

representada graficamente pelo diagrama espacial abaixo.



Os pontos representativos dos elementos de **P**(A) são os oito vértices de um cubo no espaço tridimensional.

10. ORDENS LEXICOGRÁFICA E ANTILEXICOGRÁFICA

Sejam A e B conjuntos ordenados pela relação de ordem $\leqslant$.

Definição 1 — Chama-se *ordem lexicográfica de* $A \times B$ a relação de ordem R em $A \times B$ assim definida:

$$(a, b)\ R\ (c, d) \iff a < c \quad \text{ou} \quad a = c \quad \text{e} \quad b \leqslant d$$

O nome de *ordem lexicográfica de* $A \times B$ é por ser esta ordem análoga à maneira como se dispõem as palavras de um dicionário (p. ex., *bc* precede *gu*, porque *b* precede *g*, e *be* precede *bx* porque *e* precede *x*).

Definição 2 — Chama-se *ordem antilexicográfica de* $A \times B$ a relação de ordem S em $A \times B$ assim definida:

$$(a, b)\ S\ (c, d) \iff b < d \quad \text{ou} \quad b = d \quad \text{e} \quad a \leqslant c$$

Exemplo — Com **N** ordenado pela *ordem natural* e $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ *ordenado lexicograficamente,* temos:

$(4, 27) < (9, 11)$, porque $4 < 9$

$(7, 15) > (7, 11)$, porque $7 = 7$ e $15 > 11$

$(8, 12) > (5, 19)$, porque $8 > 5$

$(3, 13) < (3, 17)$, porque $3 = 3$ e $13 < 17$

11. INTERVALOS DE UM CONJUNTO ORDENADO

Seja A um conjunto ordenado pela relação de ordem "$\leqslant$" e sejam *a* e *b* dois elementos de A (a, b$\in$A) tais que a $\leqslant$ b.

Definição 1 — Chama-se *intervalo fechado* a um subconjunto de A de um dos três tipos seguintes:

$$[a, b] = \{x \in A \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$
$$[a, \rightarrow[= \{x \in A \mid x \geqslant a\}$$
$$]\leftarrow, a] = \{x \in A \mid x \geqslant a\}$$

Definição 2 — Chama-se *intervalo aberto* a um subconjunto de A de um dos três tipos seguintes:

$$]a, b[= \{x \in A \mid a < x < b\}$$
$$]a, \rightarrow[= \{x \in A \mid x > a\}$$
$$]\leftarrow, a[= \{x \in A \mid x < a\}$$

O próprio conjunto A é considerado como um intervalo aberto, indicado por $]\leftarrow, \rightarrow[$.

Definição 3 — Chama-se *intervalo semi-aberto* a um subconjunto de A de um dos dois tipos seguintes:

$$]a, b] = \{x \in A \mid a < x \leqslant b\}$$
$$[a, b[= \{x \in A \mid a \leqslant x < b\}$$

Nos intervalos $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$ os elementos *a* e *b* chamam-se *extremos* do intervalo: *a* é o *extremo esquerdo* e *b* é o *extremo direito.*

Um intervalo fechado nunca é vazio, mas um intervalo aberto $]a, b[$ pode ser vazio mesmo quando a $<$ b.

O intervalo fechado $[a, a]$ é o conjunto unitário $\{a\}$; e os intervalos $[a, a[$, $]a, a]$, $]a, a[$ são todos vazios.

Exemplos:

1) No conjunto **N** dos números naturais, ordenado pela relação de divisibilidade "$x \mid y$", o intervalo aberto $]2, 48[$ é o conjunto $\{4, 6, 8, 12, 16, 24\}$, e o intervalo semi-aberto $]\leftarrow, 24]$ é o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 12, 24\}$.

2) Seja o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$. No conjunto **P**(A) das partes de A, ordenado pela relação de inclusão "$X \subset Y$", o intervalo fechado $[\{a\}, \{a, b, c, d\}]$ é o subconjunto de **P**(A) seguinte:

$$\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

E X E R C Í C I O S

1. Seja o conjunto **N** dos números naturais, ordenado pela relação de divisibilidade "x | y" (x divide y).

   i) Colocar o símbolo correto $<$, $>$ ou $\|$ (não comparáveis) entre os elementos dos seguintes pares de números naturais:

   4 — 12 ; 18 — 6 ; 10 — 30 ; 7 — 12

   ii) Indicar quais dos seguintes subconjuntos de **N** são totalmente ordenados:

   $A = \{2, 8, 24\}$; $B = \{3, 7, 18\}$; $C = \{5, 15, 30\}$;

   $D = \{3, 9, 27, 243\}$; $E = \{3, 4, 5, \ldots\}$; $F = \{8\}$

2. Consideremos no conjunto **N** dos números naturais a relação de ordem definida por "x é múltiplo de y".

   i) Colocar o símbolo correto $<$, $>$ ou $\|$ (não comparáveis) entre os elementos dos seguintes pares de números naturais:

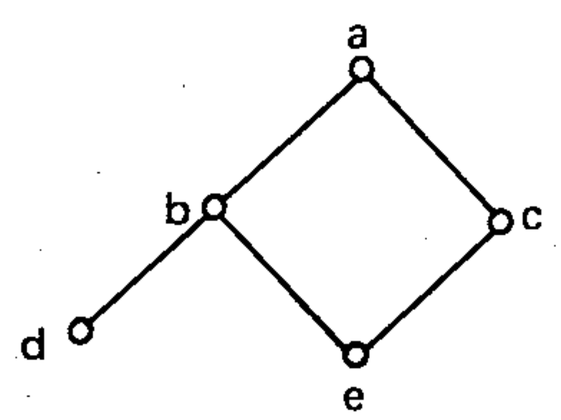
   3 — 27 ; 8 — 1 ; 5 — 25 ; 6 — 9

   ii) Indicar quais dos seguintes subconjuntos de **N** são totalmente ordenados:

   $A = \{3, 12, 36\}$; $B = \{1, 5, 9\}$; $C = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$;

   $D = \{13\}$; $E = \{5, 10, 20, 40\}$; $F = \{7, 21, 42\}$

3. Seja o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$, ordenado conforme o diagrama abaixo.



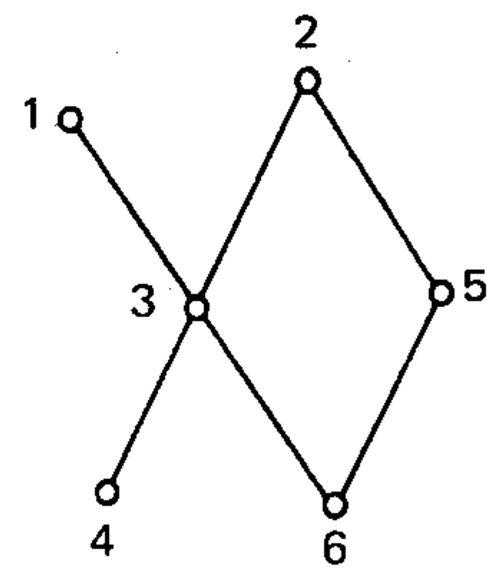
   i) Colocar o símbolo correto $<$, $>$ ou $\|$ (não comparáveis) entre os elementos de A dos seguintes pares:

   b — e ; d — a ; a — e ; b — c

   ii) Determinar todos os pares de elementos de A que não são comparáveis por esta ordem.

   iii) Construir um diagrama que defina a ordem oposta em A.

4. Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ordenado conforme o diagrama ao lado.



   i) Colocar o símbolo correto $<$, $>$ ou $\|$ (não comparáveis) entre os elementos de A dos seguintes pares:

   $1 - 6$; $4 - 2$; $6 - 2$; $4 - 5$

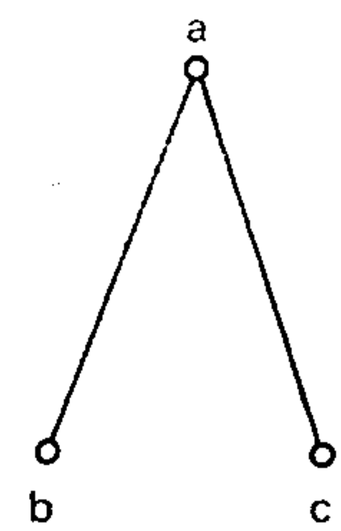
   ii) Determinar todos os pares de elementos de A que não são comparáveis por esta ordem.

   iii) Construir um diagrama que defina a ordem oposta em A.

   iv) Achar todos os subconjuntos de A, cada um contendo pelo menos três elementos, e totalmente ordenados.

   v) Achar todos os subconjuntos de A, cada um contendo pelo menos três elementos, e totalmente ordenados pela ordem oposta.

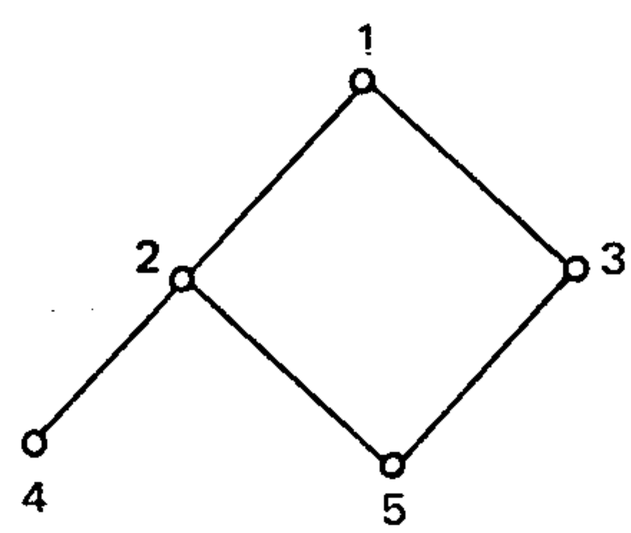
5. Seja o conjunto $A = \{a, b, c\}$, ordenado conforme o diagrama ao lado, e seja E a coleção de todos os subconjuntos de A, não vazios, e totalmente ordenados.



   i) Achar todos os elementos da coleção E.

   ii) Construir um diagrama da relação de ordem parcial em E definida pela relação de inclusão "$X \subset Y$".

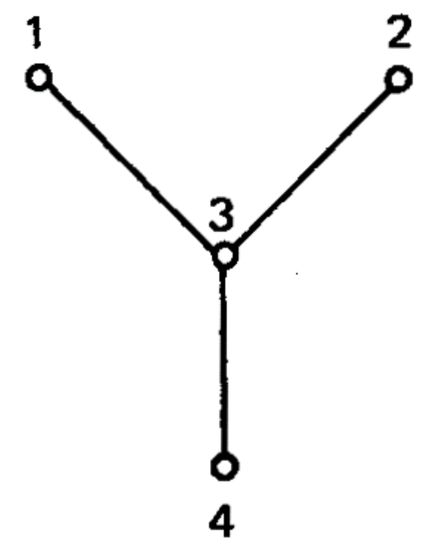
6. Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ordenado conforme o diagrama ao lado, e seja E a coleção de todos os subconjuntos de A, cada um contendo dois ou mais elementos, e totalmente ordenados.



   i) Achar todos os elementos da coleção E.

   ii) Construir um diagrama da relação de ordem parcial em E definida pela relação de inclusão "$X \subset Y$".

7. Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, ordenado conforme o diagrama ao lado, e seja E a coleção de todos os subconjuntos de A, não vazios, e totalmente ordenados.



i) Achar todos os elementos da coleção E.

ii) Construir um diagrama da relação de ordem parcial em E definida pela relação de inclusão "$X \subset Y$"

8. Mostrar que a relação R em $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ definida por

$$(a, b)\, R\, (c, d) \iff a \leqslant c \text{ e } b \leqslant d$$

é uma ordem em $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ que não é total.

9. Mostrar que a relação S em $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ definida por

$$(a, b)\, S\, (c, d) \iff a < c \text{ ou } a = c \text{ e } b \leqslant d$$

é uma ordem em $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$,

10. Mostrar que uma relação R em um conjunto não vazio A é uma ordem em A se e somente se $R \cap R^{-1} = I_A$ e $R \circ R = R$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

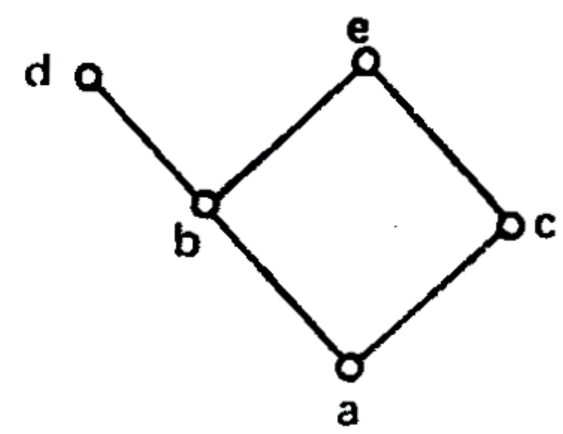
1. i) $4 < 12$; $18 > 6$; $10 < 30$; $7 \| 12$ ii) A, C, D, E e F

2. i) $3 > 27$; $8 < 1$; $5 > 25$; $6 \| 9$ ii) A, D, E e F

3. i) $b > e$; $d < a$; $a > e$; $b \| e$

   ii) b e c ; c e d ; d e e

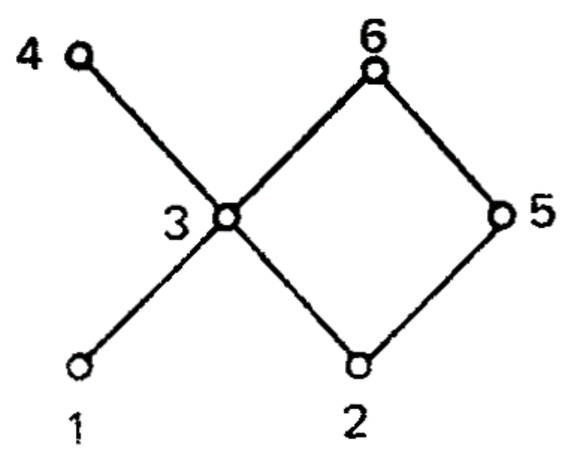
   iii)



4. i) $1 > 6$; $4 < 2$; $6 < 2$; $4 \| 5$

   ii) 1 e 2 ; 1 e 5 ; 3 e 5 ; 4 e 5 ; 4 e 6

   iii)



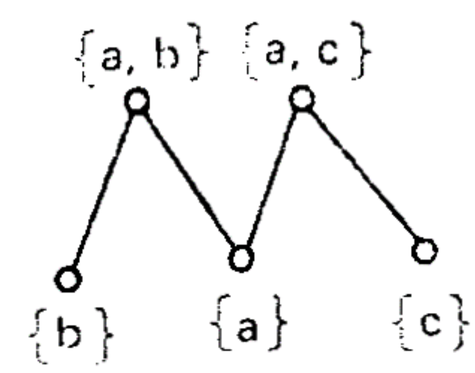
   iv) $\{1, 3, 4\}$; $\{1, 3, 6\}$; $\{2, 3, 4\}$

   $\{2, 5, 6\}$; $\{2, 3, 6\}$

   v) Os mesmos subconjuntos de (iv).

5. i) $\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$; $\{a, b\}$; $\{a, c\}$

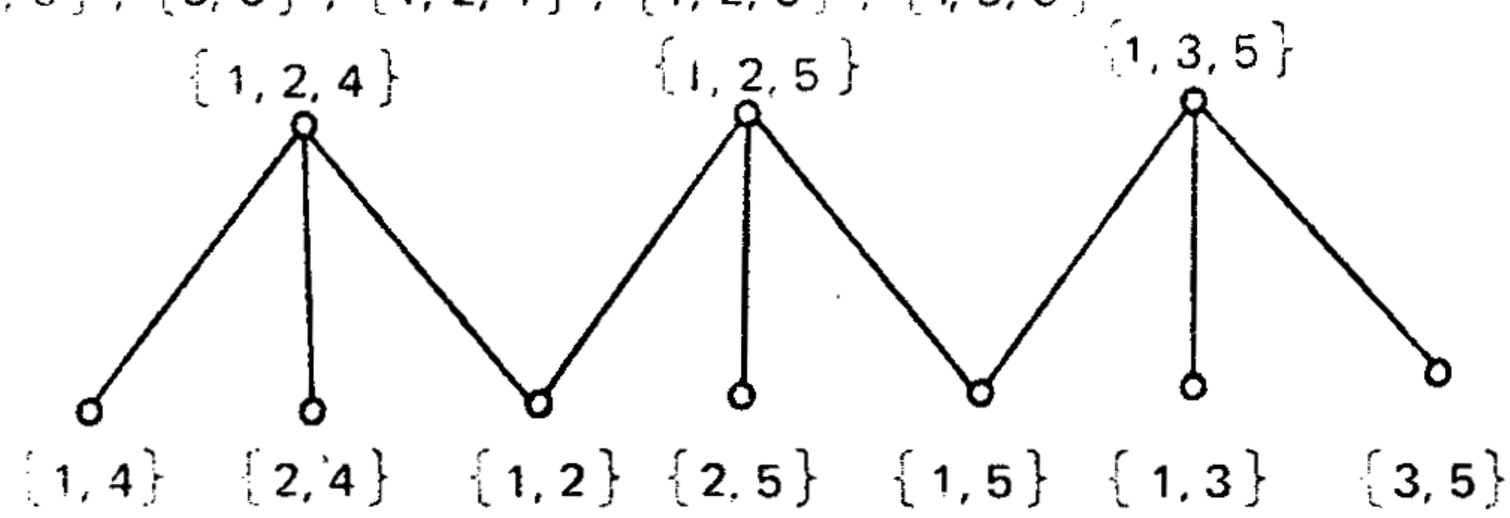
   ii)



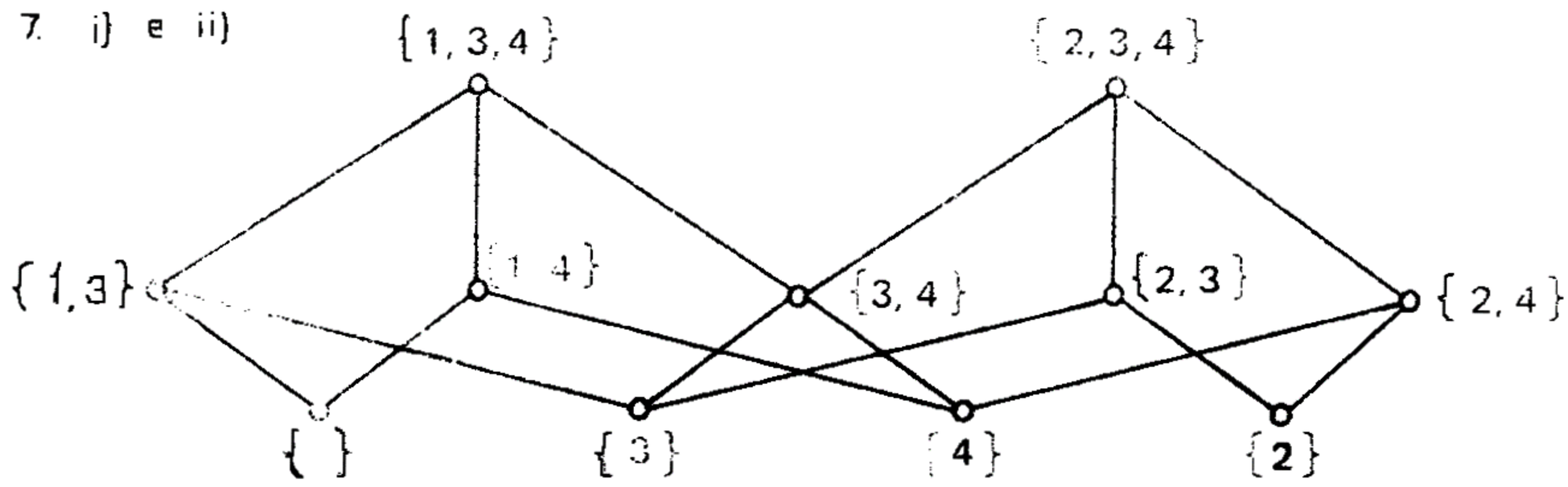
6. i) $\{1, 2\}$; $\{1, 4\}$; $\{1, 5\}$; $\{1, 3\}$; $\{2, 4\}$

   $\{2, 5\}$; $\{3, 5\}$; $\{1, 2, 4\}$; $\{1, 2, 5\}$; $\{1, 3, 5\}$

   ii)



7. i) e ii)



CAPÍTULO 14

ELEMENTOS NOTÁVEIS DE UM CONJUNTO ORDENADO

1. ELEMENTO MÍNIMO E ELEMENTO MÁXIMO

Seja A um conjunto ordenado pela relação de ordem $\leqslant$.

Definição — Chama-se *elemento mínimo* de A um elemento $a \in A$ tal que $a \leqslant x$ para todo $x \in A$.

Representa-se pela notação "minA", que se lê: "mínimo de A". Portanto, simbolicamente:

$$\min A = a \Longleftrightarrow a \in A \quad e \quad (\forall\, x)\ (x \in A \Longrightarrow a \leqslant x)$$

Teorema 1 — Se *a* é elemento mínimo de A, então este elemento é único.

Dem.: — Com efeito, se existisse um outro elemento mínimo *b* de A, teríamos:

i) $a \leqslant b$, porque $a = \min A$

ii) $b \leqslant a$, porque $b = \min A$

Logo, pela propriedade anti-simétrica de toda relação de ordem: $a = b$.

O elemento mínimo de A, se existe, denomina-se também *primeiro elemento de* A ou *menor elemento de* A.

Teorema 2 — Se $\min A = a$, $\min B = b$ e $A \subset B$, então $a \geqslant b$.

Dem.: — Por definição, temos $b \leqslant x$ para todo $x \in B$. E como $a \in A \subset B$, segue-se que $a \in B$. Logo, $b \leqslant a$, isto é, $a \geqslant b$.

Simbolicamente: $A \subset B \Longrightarrow \min A \geqslant \min B$.

Definição 2 — Chama-se *elemento máximo* de A um elemento $a \in A$ tal que $x \leqslant a$ para todo $x \in A$.

Representa-se pela notação "maxA", que se lê: "máximo de A". Portanto, simbolicamente:

$$\max A = a \Longleftrightarrow a \in A \quad e \quad (\forall\, x)\ (x \in A \Longrightarrow x \leqslant a)$$

Teorema 3 — Se *a* é elemento máximo de A, então este elemento é único.

Dem.: — Com efeito, se existisse um outro elemento máximo *b* de A, teríamos:

i) $b \leqslant a$, porque $a = \max A$

ii) $a \leqslant b$, porque $b = \max A$

Logo, pela propriedade anti-simétrica de toda relação de ordem: $a = b$.

O elemento máximo de A, se existe, denomina-se também *último elemento de* A ou *maior elemento de* A.

Se *a* é o elemento mínimo de A para a ordem $\leqslant$, então *a* é o elemento máximo de A para a ordem oposta $\geqslant$, e vice-versa.

Teorema 4 — Se $\max A = a$, $\max B = b$ e $A \subset B$, então $a \leqslant b$.

Dem.: — Por definição, temos $x \leqslant b$ para todo $x \in B$. E como $a \in A \subset B$, segue-se que $a \in B$. Logo, $a \leqslant b$.

Simbolicamente: $A \subset B \Longrightarrow \max A \leqslant \max B$.

Exemplos:

1) O conjunto **N** dos números naturais, ordenado pela *ordem natural* "$\leqslant$", tem o elemento mínimo, que é 1 ($\min N = 1$), porque $1 \leqslant n$ para todo $n \in \mathbf{N}$, mas não tem o elemento máximo, porque todo número natural é menor que o seu sucessor, isto é, $n < n + 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Importa notar que todo subconjunto não vazio A de **N** possui o elemento mínimo, isto é:

$$(\forall A \subset N \ , \ A \neq \phi) \Longrightarrow \exists! \min A$$

Esta propriedade é conhecida pelo nome de *princípio do menor número natural.*

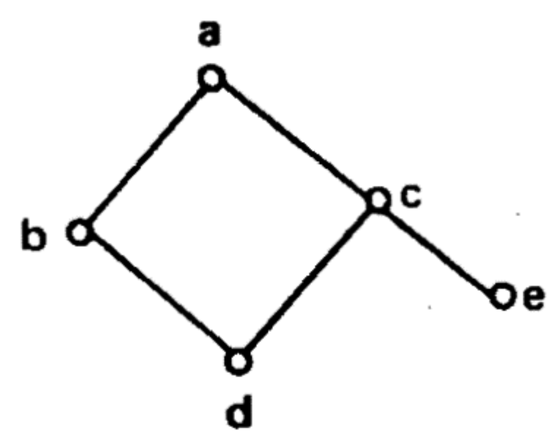
2) O mesmo conjunto **N** dos números naturais, ordenado pela relação de divisibilidade "$x \mid y$", tem o elemento mínimo, que é 1 ($\min N = 1$), porque $1 \mid n$ qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$, mas não tem o elemento máximo, porque $n \mid 2n$ qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$.

3) Seja o conjunto **P**(E) das partes de um conjunto E, ordenado pela relação de inclusão "$\subset$". Para todo elemento A de **P**(E) se verifica $\phi \subset A \subset E$, e por conseguinte o elemento mínimo e o elemento máximo de **P**(E) são respectivamente ϕ e E, isto é:

$$\min P(E) = \phi \ , \quad \max \mathbf{P}(E) = E$$

4) Os conjuntos **Z**, **Q** e **R**, ordenados pela *ordem natural* "$\leqslant$" não tem o elemento mínimo nem o elemento máximo.

5) O conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$, ordenado conforme o diagrama ao lado, não tem o elemento mínimo (*d* não é o elemento mínimo porque *d* não precede *e*), mas tem o elemento máximo, que é *a*, porque cada um dos elementos de A precede *a*, isto é, $x \leqslant a$ para todo $x \in A$.



6) O conjunto $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 5\}$, ordenado por "$x \leqslant y$", não tem o elemento mínimo nem o elemento máximo.

2. ELEMENTOS MINIMAIS E ELEMENTOS MAXIMAIS

Seja A um conjunto ordenado pela relação de ordem $\leqslant$.

Definição 1 — Chama-se *elemento minimal* de A um elemento $a \in A$ tal que elemento algum de A precede estritamente *a*.

Em outros termos, um elemento $a \in A$ chama-se *elemento minimal* de A se e somente se a seguinte condição se verifica:

$$(\forall x)\ (x \in A \ \text{ e } \ x \leqslant a \Longrightarrow x = a)$$

Definição 2 — Chama-se *elemento maximal* de A um elemento $a \in A$ tal que elemento algum de A sucede estritamente *a*.

Em outros termos, um elemento $a \in A$ chama-se *elemento maximal* de A se e somente a seguinte condição se verifica:

$$(\forall x)\ (x \in A \ \text{ e } \ x \geqslant a \Longrightarrow x = a)$$

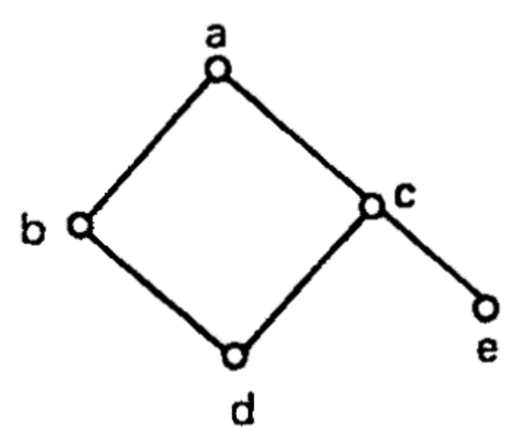
Todo elemento minimal de A é um elemento maximal de A para a ordem oposta, e vice-versa.

Teorema — Se *a* é o elemento mínimo (resp., máximo) de A, então *a* é o único elemento minimal (resp., maximal) de A.

Dem.: — Com efeito, todo elemento $x \in A$ e distinto de *a*, é tal que $a < x$ (resp., $x < a$), isto é, elemento algum de A, distinto de *a*, satisfaz a definição de elemento minimal (resp., maximal).

Exemplos:

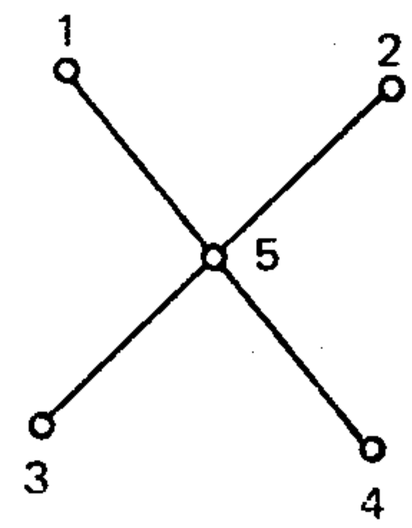
1) Seja o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$, ordenado segundo o diagrama ao lado.



Os *elementos minimais* de A são *d* e *e*, porque elemento algum de A precede estritamente qualquer

um deles. E o único *elemento maximal* de A é *a*, que também é o *elemento máximo* de A (A não tem o *elemento mínimo*).

2) Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ordenado segundo o diagrama ao lado.



Obviamente, os *elementos minimais* de A são 3 e 4, e os *elementos maximais* de A são 1 e 2.

Observe-se que A não tem o *elemento mínimo* nem o *elemento máximo*.

3) Seja o conjunto $A = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ dos inteiros naturais maiores do que 1, ordenado pela relação de divisibilidade "$x \mid y$".

São *elementos minimais* de A todos os elementos de A que são *primos*, porque, se $p \in A$ é primo, somente p divide p (visto que $1 \notin A$) Por outra parte, se $a \in A$ não é primo, então existe $b \in A$ tal que $b \mid a$ ($b \neq a$), isto é, $b < a$ (*b* precede estritamente *a*).

O conjunto A não possui *elementos maximais*, porque, qualquer que seja $a \in A$, *a* divide em particular *2a*.

4) No conjunto **P**(E) das partes de um conjunto E, ordenado pela relação de inclusão, os elementos mínimo e máximo de **P**(E) são ϕ e E. Logo, o conjunto **P**(E) tem um único *elemento minimal*, ϕ, e um único *elemento maximal*, E.

No conjunto **P**(E) - ϕ, são *elementos minimais* todas as partes $\{x\}$ de E com um só elemento (partes unitárias), enquanto que o único *elemento maximal* continua sendo E.

Em **P**(E) - $\{\phi, E\}$ (conjunto das partes próprias de E), são *elementos minimais* as partes unitárias $\{x\}$ de E e são *elementos maximais* as diferenças $E - \{x\}$.

3. MINORANTES E MAJORANTES

Seja A um conjunto ordenado pela relação de ordem "$\leqslant$" e seja X uma *parte* de A ($X \subset A$).

Definição 1 — Chama-se *minorante* de X em A a todo elemento *a* de A tal que $a \leqslant x$ para todo $x \in X$.

Se *a* é um minorante de X em A, diz-se que *a minora* X ou que X é *minorada* por *a*. Além disso, todo elemento $b \in A$ tal que $b \leqslant a$ também é um minorante de X em A.

É imediato que um minorante *a* de X tal que $a \in X$, se existe, é o elemento mínimo de X.

O conjunto dos minorantes de X em A representa-se por $m_A(X)$ ou apenas por $m(X)$.

Teorema 1 — Sejam X e Y partes de A. Se $X \subset Y$, então $m_A(Y) \subset m_A(X)$.

Dem.: — Com efeito:

$$x \in m_A(Y) \Longrightarrow x \leqslant y\,,\ \forall\, y \in Y \Longrightarrow x \leqslant y\,,$$
$$\forall\, y \in X \Longrightarrow x \in m_A(X)$$

Definição 2 — Chama-se *majorante* de X em A a todo elemento *a* de A tal que $x \leqslant a$ para todo $x \in X$.

Se *a* é um majorante de X em A, diz-se que a *majora* X ou que X é *majorada* por *a*. Além disso, todo elemento $b \in A$ tal que $a \leqslant b$ também é um majorante de X em A.

É imediato que um majorante *a* de X tal que $a \in X$, se existe, é o elemento máximo de X.

O conjunto dos majorantes de X em A representa-se por $M_A(X)$ ou apenas por $M(X)$.

Todo majorante de X é um minorante de X para a ordem oposta, e vice-versa. Portanto, se *a* majora X para a ordem $\leqslant$, *a* minora X para a ordem oposta $\geqslant$, e vice-versa.

Quando a parte X é ao mesmo tempo minorada e majorada, então diz-se que X é *limitada*. Em particular, toda parte com um só elemento (parte unitária) é limitada.

Teorema 2 — Sejam X e Y partes de A. Se $X \subset Y$, então $M_A(Y) \subset M_A(X)$.

Dem.: — Com efeito:

$$x \in M_A(Y) \Longrightarrow y \leqslant x\,,\quad \forall\, y \in Y \Longrightarrow y \leqslant x\,,$$
$$\forall\, y \in X \Longrightarrow x \in M_A(X)$$

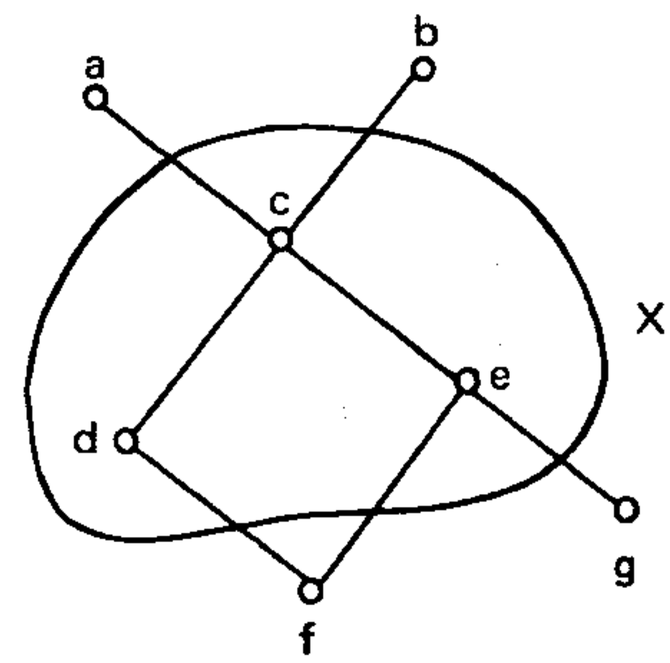
Exemplos:

1) No conjunto **N** dos números naturais, ordenado pela relação de divisibilidade "$x \mid y$", consideremos a parte $X = \{m, n\}$ de **N** formada pelos inteiros naturais distintos *m* e *n*.

Obviamente, todo *divisor comum de* m *e* n é um *minorante* de X em **N** e todo *múltiplo comum de* m *e* n é um *majorante* de X em **N**,

2) No conjunto **P**(E) das partes de um conjunto E, ordenado por inclusão, toda parte X de **P**(E) admite como minorante e majorante, respectivamente, a *interseção* e a *reunião* dos conjuntos de X.

3) No conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, ordenado conforme o diagrama ao lado, consideremos a parte $X = \{c, d, e\}$ de A.



O elemento *f* de A é o único *minorante* de X em A, e os elementos *a, b, c* de A são *majorantes* de X em A.

Observe-se que X não tem o elemento mínimo e que o majorante *c* é o elemento máximo de X ($c \in X$).

4. EXTREMO INFERIOR E EXTREMO SUPERIOR

Seja A um conjunto ordenado pela relação de ordem "$\leqslant$" e seja X uma *parte* de A ($X \subset A$).

Definição 1 — Chama-se *extremo inferior* ou *ínfimo* de X em A o elemento máximo do conjunto $m_A(X)$ dos minorantes de X em A.

O ínfimo de X em A, se existe, representa-se por $\inf_A X$ ou apenas por $\inf A$. Portanto, simbolicamente: $\inf_A X = \max(m_A(X))$.

O ínfimo de X em A, se existe, é único, por ser o elemento máximo de um conjunto, e pode pertencer ou não a X.

O elemento mínimo de X, se existe, é o elemento máximo do conjunto $m_A(X)$ dos minorantes de X em A e, portanto, o ínfimo de X em A: $\min X = \inf_A X$.

Teorema 1 — Sejam X e Y partes de A que possuem ínfimo em A. Se $X \subset Y$, então $\inf_A Y \leqslant \inf_A X$.

Dem.: — Com efeito, pelo teorema 1 do n. 3, temos:

$$X \subset Y \Longrightarrow m_A(Y) \subset m_A(X)$$

E pelo teorema 4 do n. 1, temos:

$$m_A(Y) \subset m_A(X) \Longrightarrow \max(m_A(Y)) \leqslant \max(m_A(X)) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \inf_A Y \leqslant \inf_A X$$

Definição 2 — Chama-se *extremo superior* ou *supremo* de X em A o elemento mínimo do conjunto $M_A(X)$ dos majorantes de X em A.

O supremo de X em A, se existe, representa-se por $\sup_A X$ ou apenas por $\sup X$. Portanto, simbolicamente: $\sup_A X = \min(M_A(X))$.

O supremo de X em A, se existe, é único, por ser o elemento mínimo de um conjunto, e pode pertencer ou não a X.

O elemento máximo de X, se existe, é o elemento mínimo do conjunto $M_A(X)$ dos majorantes de X em A e, portanto, o supremo de X em A:

$$\max X = \sup_A(X)$$

O supremo de X em A para a ordem $\leqslant$ é o ínfimo de X em A para a ordem oposta $\geqslant$, e vice-versa.

Teorema 2 — Sejam X e Y partes de A que possuem supremo em A. Se $X \subset Y$, então $\sup_A X \leqslant \sup_A Y$.

Dem.: — Com efeito, pelo teorema 2 do n. 3, temos:

$$X \subset Y \Longrightarrow M_A(Y) \subset M_A(X)$$

E pelo teorema 2 do n. 1, temos:

$$M_A(Y) \subset M_A(X) \Longrightarrow \min(M_A(X)) \leqslant \min(M_A(Y)) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \sup_A X \leqslant \sup_A Y$$

NOTA — O ínfimo de uma *parte com dois elementos* $\{x, y\}$ de um conjunto ordenado A representa-se por $\inf_A(x, y)$ ou apenas por $\inf(x, y)$; analogamente, o supremo representa-se por $\sup_A(x, y)$ ou apenas por $\sup(x, y)$.

De modo geral, o ínfimo e o supremo de uma *parte finita com n elementos* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de um conjunto ordenado A representam-se pelas notações:

$$\inf_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ ou } \inf(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;;$$
$$\sup_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ ou } \sup(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Nesta notação, a ordem em que se escrevem os elementos x_i é indiferente. Assim, p. ex., $\inf_A(x, y) = \inf_A(y, x)$.

Exemplos:

1) No conjunto **N** dos números naturais, ordenado pela relação de divisibilidade "$x \mid y$", consideremos a parte $X = \{a, b\}$ de **N** formada pelos dois inteiros naturais distintos *a* e *b*.

Os minorantes de X são todos os divisores comuns de *a* e *b*, e como todos os divisores comuns de *a* e *b* são divisores do mdc (a, b), segue-se que o conjunto $m_{\mathbf{N}}(X)$ dos minorantes de X em **N** tem como elemento máximo o mdc (a, b), isto é: $\inf_{\mathbf{N}}(a, b) = \text{mdc}(a, b)$.

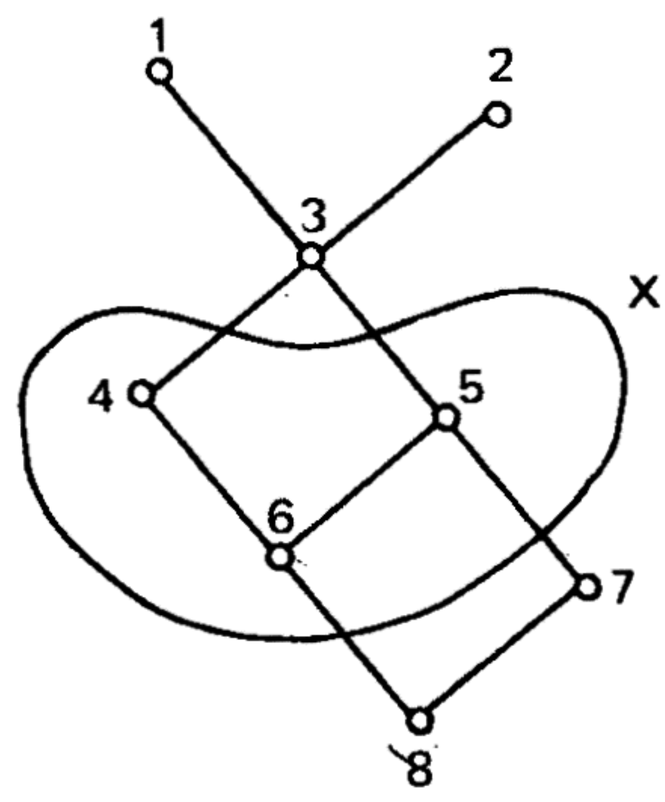
Analogamente, os majorantes de X são todos os múltiplos comuns de *a* e *b*, e como todos os múltiplos comuns de *a* e *b* são múltiplos do mmc (a, b), segue-se que o conjunto $M_{\mathbf{N}}(X)$ dos majorantes de X em **N** tem como elemento mínimo o mmc (a, b), isto é: $\sup_{\mathbf{N}}(a, b) = \text{mmc}(a, b)$.

Assim, p. ex., temos:

$$\inf_{\mathbf{N}}(12, 136) = \text{mdc}(12, 136) = 4$$

$$\sup_{\mathbf{N}}(12, 136) = \text{mmc}(12, 136) = 408$$

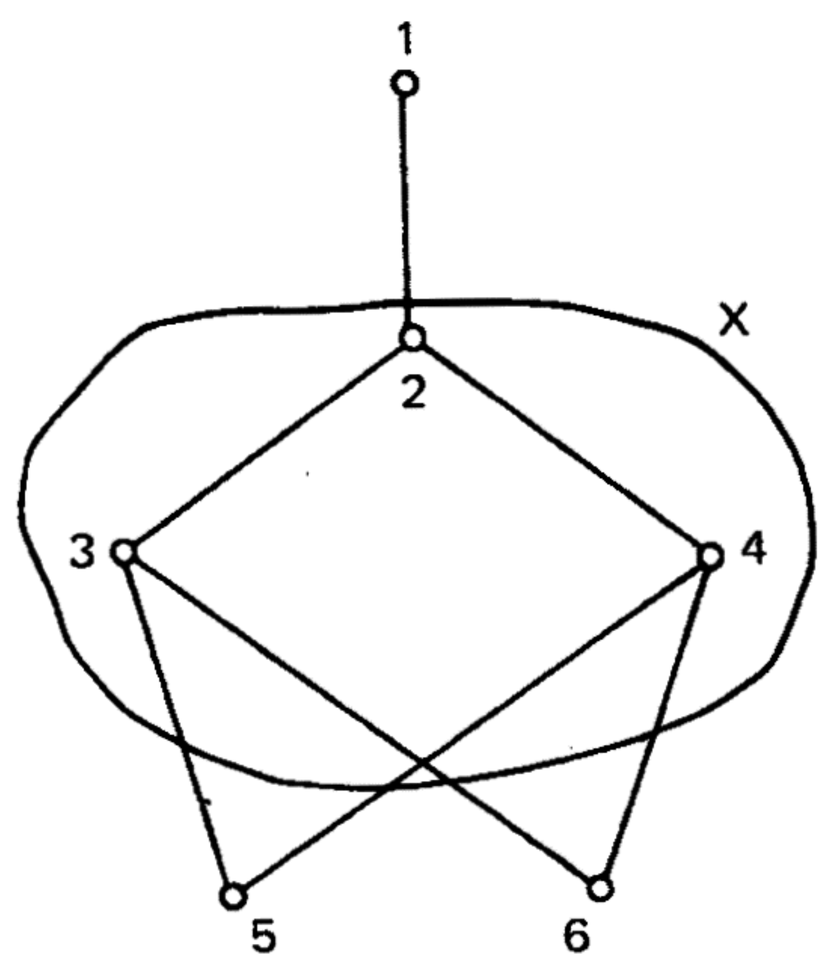
2) No conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 7, 8\}$, ordenado conforme o diagrama ao lado, consideremos a parte $X = \{4, 5, 6\}$ de A.



Os elementos 6 e 8 de A são os minorantes de X em A, isto é, $m_A(X) = \{6, 8\}$, e como $8 \leqslant 6$, segue-se que o $\inf_A X = 6$. Observe-se que $6 \in X$ é o elemento mínimo de X ($\min X = 6$).

Os elementos 1, 2, 3 são os majorantes de X em A, isto é, $M_A(X) = \{1, 2, 3\}$, e como $3 \leqslant 1$ e $3 \leqslant 2$, segue-se que o $\sup_A X = 3$. Observe-se que 3 não pertence a X ($3 \notin X$).

3) No conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ordenado segundo o diagrama ao lado, consideremos a parte $X = \{2, 3, 4\}$ de A.



Os elementos 5 e 6 de A são os minorantes de X em A, isto é, $m_A(X) = \{5, 6\}$, e como 5 e 6 não são comparáveis, não existe o $\inf_A X$.

Os elementos 1 e 2 de A são os majorantes de X em A, isto é, $M_A(X) = \{1, 2\}$, e como $2 \leqslant 1$, temos $\sup_A X = 2$. Observe-se que $2 \in X$ é o elemento máximo de X.

4) No conjunto **P**(E) das partes de um conjunto E, ordenado por inclusão, toda parte X de **P**(E) tem ínfimo, que é a *interseção* dos conjuntos de X, e também tem supremo, que é a *reunião* dos conjuntos de X.

Assim, p. ex., se A, B e C são partes de E, o conjunto $X = \{A, B, C\}$ é uma parte de **P**(E) cujo ínfimo e supremo são, respectivamente:

$$\inf X = A \cap B \cap C \quad , \quad \sup X = A \cup B \cup C$$

5. RETICULADOS

Definição — Chama-se *reticulado* um conjunto ordenado A tal que todo subconjunto formado por *dois* elementos de A tem ínfimo e supremo em A.

Sejam x e y dois elementos quaisquer de um reticulado A. O ínfimo e o supremo em A do subconjunto $\{x, y\}$ de A representam-se, respectivamente, por $x \wedge y$ e $x \vee y$, isto é:

$$\inf_A(x, y) = x \wedge y \quad , \quad \sup_A(x, y) = x \vee y$$

Todo conjunto totalmente ordenado é um reticulado, pois

$$x \wedge y = x \quad e \quad x \vee y = y \quad se \quad x \leqslant y$$

Exemplos:

1) O conjunto **N** dos números naturais, ordenado pela relação de divisibilidade "$x \mid y$", é um reticulado, porque, quaisquer que sejam os inteiros naturais *a* e *b*, existem o ínfimo e o supremo de $\{a, b\}$ em **N**, que são, precisamente, o mdc (a, b) e o mmc (a, b), isto é:

$$a \wedge b = \text{mdc}(a, b) \quad , \quad a \vee b = \text{mmc}(a, b)$$

2) O conjunto **P**(E) das partes de um conjunto E, ordenado pela relação de inclusão, é um *reticulado*, porque, quaisquer que sejam as partes A e B de E, existem o ínfimo e o supremo de $\{A, B\}$ em **P**(E), que são, precisamente, a *interseção* e a *reunião* de A e B, isto é:

$$A \wedge B = A \cap B \quad , \quad A \vee B = A \cup B$$

6. PROPRIEDADES ELEMENTARES DE UM RETICULADO

Quaisquer que sejam os elementos x, y, z de um reticulado A, tem-se:

(P_1) $x \wedge y \leqslant x$ e $x \wedge y \leqslant y$

Dem.: — Com efeito, $x \wedge y$ é um minorante de $\{x, y\}$ em A.

(P_2) $x \leqslant x \vee y$ e $y \leqslant x \vee y$

Dem.: — Com efeito, $x \vee y$ é um majorante de $\{x, y\}$ em A.

(P_3) $z \leqslant x$ e $z \leqslant y \Longrightarrow z \leqslant x \wedge y$

Dem.: — Com efeito, z é um minorante de $\{x, y\}$ em A e $x \wedge y$ é o elemento máximo do conjunto dos minorantes de $\{x, y\}$ em A.

(P_4) $x \leqslant z$ e $y \leqslant z \Longrightarrow x \vee y \leqslant z$

Dem.: — Com efeito, z é um majorante de $\{x, y\}$ em A e $x \vee y$ é o elemento mínimo do conjunto dos majorantes de $\{x, y\}$ em A.

(P_5) $x \leqslant y \Longleftrightarrow x \wedge y = x$ e $x \leqslant y \Longleftrightarrow x \vee y = y$

Dem.: — Com efeito, se $x \leqslant y$, então, pela definição de ínfimo, $x \wedge y = x$. Reciprocamente, se $x \wedge y = x$, então $x = x \wedge y \leqslant y$.

De modo inteiramente análogo, demonstra-se que $x \leqslant y \Longleftrightarrow x \vee y = y$.

7. CONJUNTO BEM ORDENADO

Definição — Diz-se que um conjunto A é *bem ordenado* se e somente se A é ordenado e todo subconjunto não vazio de A tem mínimo.

Em outros termos, um conjunto A é bem ordenado se e somente se A é ordenado e qualquer que seja o subconjunto não vazio B de A existe $b \in B$ tal que $b \leqslant x$ para todo $x \in B$.

Se A é bem ordenado por uma ordem $\leqslant$, diz-se, então, que $\leqslant$ é uma *boa ordem* sobre A.

Em particular, o conjunto vazio é considerado bem ordenado.

Obviamente, *todo subconjunto de um conjunto bem ordenado é bem ordenado.*

Teorema — Todo conjunto bem ordenado é totalmente ordenado

Dem.: — Seja A um conjunto bem ordenado e sejam x e y dois elementos quaisquer de A. O subconjunto $\{x, y\}$ de A tem mínimo, que é x ou y, e, portanto, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$, isto é, dois elementos quaisquer de A são comparáveis. Logo, A é totalmente ordenado.

NOTA — Os conjuntos **Z**, **Q** e **R** são totalmente ordenados pela ordem habitual $\leqslant$, mas não são bem ordenados por esta ordem, pois o subconjunto $\mathbf{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ de **Z**, de **Q** e de **R** não tem mínimo. Logo, um conjunto totalmente ordenado não é necessariamente bem ordenado.

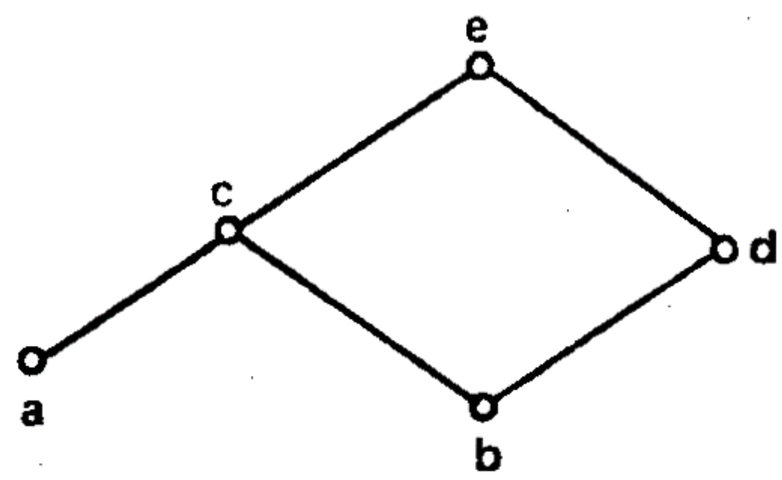
8. ELEMENTOS CONSECUTIVOS DE UM CONJUNTO ORDENADO

Definição — Dois elementos a e b de um conjunto ordenado A dizem-se *consecutivos* se e somente se $a < b$ e não existe elemento algum c de A tal que $a < c < b$.

Também se diz, neste caso, que b *é sucessor imediato de* a e que a *é antecessor imediato de* b.

Exemplos:

1) Seja o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$, ordenado segundo o diagrama ao lado.



O elemento c é *sucessor imediato* tanto de a como de b, e o elemento b é *antecessor imediato* tanto de c como de d.

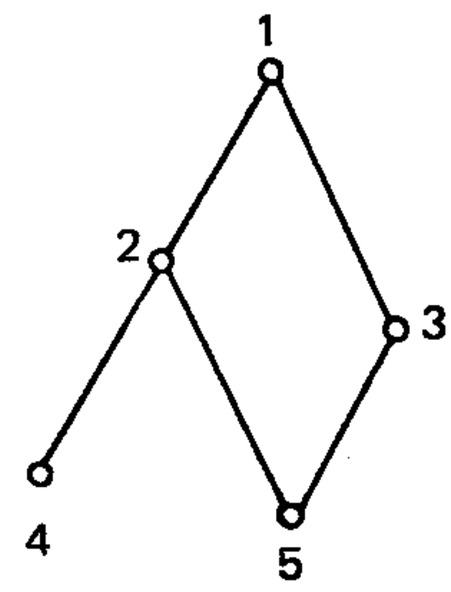
2) Seja o conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais. Nenhum elemento de $\mathbf{Q}$ tem sucessor imediato nem antecessor imediato, isto é, dois elementos quaisquer de $\mathbf{Q}$ não são consecutivos. De fato, se $a, b \in \mathbf{Q}$, com $a < b$, a média aritmética $\frac{(a+b)}{2} \in \mathbf{Q}$, e temos $a < \frac{(a+b)}{2} < b$.

Teorema — Todo elemento de um conjunto bem ordenado tem um sucessor imediato, exceto o elemento máximo, se existe.

Dem.: — Com efeito, se a é elemento do conjunto bem ordenado A e a é distinto do elemento máximo de A, se existe, o conjunto $B = \{x \in A \mid a < x\}$ é um subconjunto não vazio de A e, portanto, B tem mínimo b. Então, $a < b$ e, pela definição de b, não existe elemento algum $c \in A$ tal que $a < c < b$, isto é, b é sucessor imediato de a.

E X E R C Í C I O S

1. Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ordenado conforme o diagrama ao lado, determinar:



   i) O elemento mínimo e o elemento máximo de A.

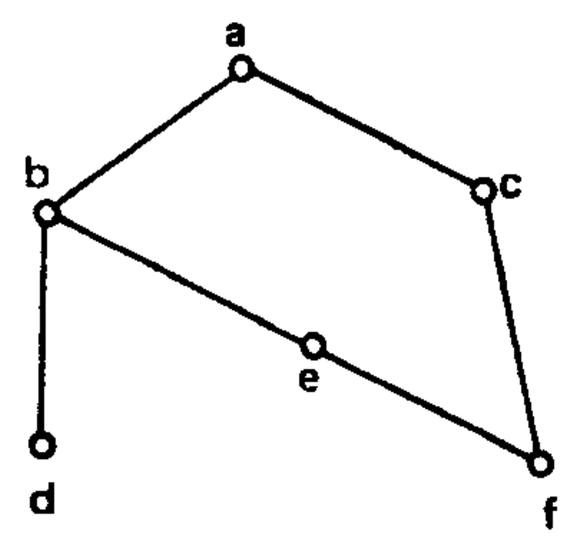
   ii) Os elementos minimais e os elementos maximais de A.

2. Dado o conjunto $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$, ordenado por "x é múltiplo de y", determinar:

   i) O elemento mínimo e o elemento máximo de A.

   ii) Os elementos minimais e os elementos maximais de A.

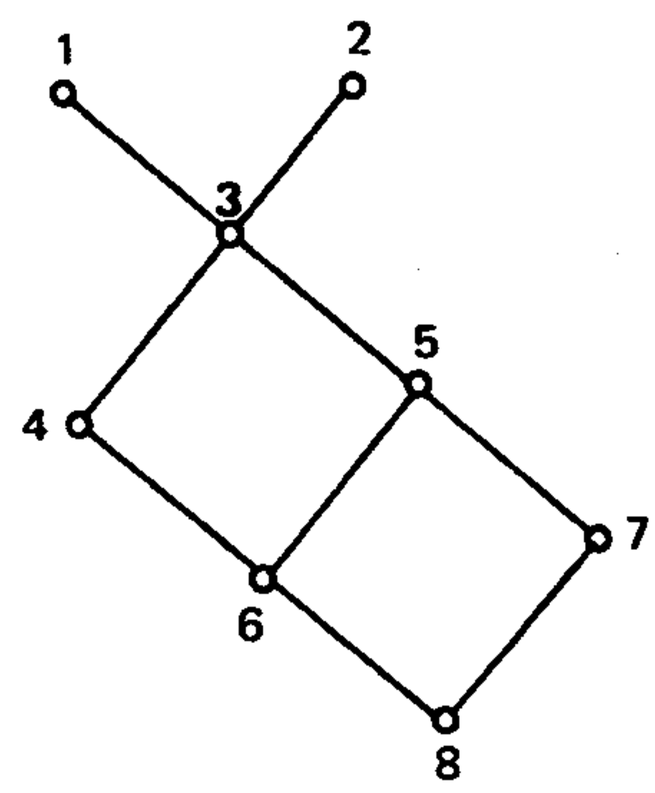
3. Dado o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, ordenado conforme o diagrama ao lado, determinar:



   i) O elemento mínimo e o elemento máximo de A.

   ii) Os elementos minimais e os elementos maximais de A.

4. Dados o conjunto $A = \{1, 2, \ldots, 7, 8\}$, ordenado segundo o diagrama ao lado, e os seguintes subconjuntos de A:



$$E = \{4, 5, 7\} \ ,$$

$$F = \{2, 3, 6\} \ ,$$

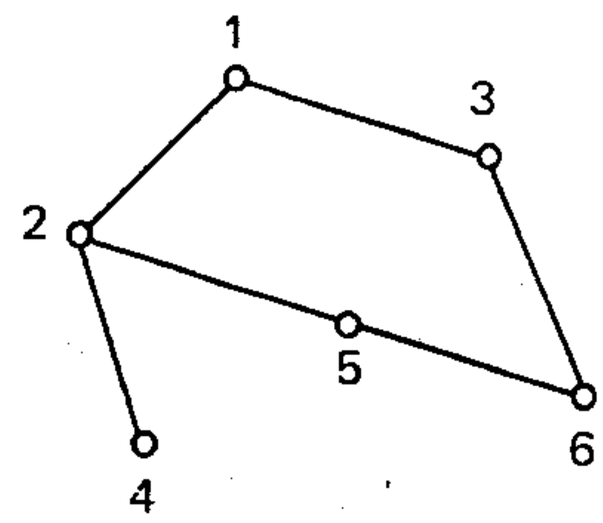
$$G = \{1, 2, 4, 7\}$$

determinar:

   i) O conjunto dos minorantes e o conjunto dos majorantes de E, F e G em A.

   ii) O ínfimo e o supremo de E, F e G em A.

5. Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ordenado conforme o diagrama ao lado, seja F a coleção de todos os subconjuntos não vazios de A e totalmente ordenados. Supondo F ordenada por inclusão, determinar todos os elementos minimais e todos os elementos maximais de F.



6. Dado o conjunto $A = \{2, 3, 4, \ldots\}$, ordenado pela relação de divisibilidade "$x \mid y$", seja F a coleção de todos os subconjuntos não vazios de A e totalmente ordenados. Supondo F ordenada por inclusão, determinar todos os elementos minimais e todos os elementos maximais de F.

7. Seja o conjunto $X = \{x \in \mathbf{Q} \mid 16 < x^2 < 32\}$. Considerando X como *parte* do conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais com a ordem natural "$\leqslant$", determinar o ínfimo e o supremo de X em $\mathbf{Q}$.

8. Demonstrar que, se *a* e *b* são elementos minimais (resp., maximais) de um conjunto totalmente ordenado A, então $a = b$.

9. Dados o conjunto $A = \{2, 3, 4, \ldots\}$ e a relação de ordem "$\leqslant$" em $A \times A$ assim definida:

$$(a, b) \leqslant (c, d) \Longleftrightarrow a \mid c \text{ e } d \mid b$$

determinar todos os elementos minimais e todos os elementos maximais de $A \times A$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. i) O conjunto A não tem o elemento mínimo, e o elemento máximo de A é 1 (maxA = 1)
   ii) Os elementos minimais de A são 4 e 5, e o único elemento maximal de A é 1.

2. i) O conjunto A não tem o elemento mínimo nem o elemento máximo.
   ii) Os elementos minimais de A são 6, 8 e 9; e os elementos maximais de A são 2, 3 e 5.

3. i) O conjunto A não tem o elemento mínimo, e o elemento máximo de A é *a* (maxA = a)
   ii) Os elementos minimais de A são *d* e *f*; e o único elemento maximal de A é *a*.

4. i) $m(E) = \{8\}$; $m(F) = \{6, 8\}$; $m(G) = \{8\}$

   $M(E) = \{1, 2, 3\}$; $M(F) = \{2\}$; $M(G) = \phi$

   ii) $\inf E = 8$; $\inf F = 6$; $\inf G = 8$

   $\sup E = 3$; $\sup F = 2$; $\sup G$ não existe

5. Os elementos minimais de F são os subconjuntos unitários de A, isto é, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ e $\{6\}$; e os elementos maximais de F são $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{1, 2, 5, 6\}$.

6. Os elementos minimais de F são todos os subconjuntos unitários de A; e os elementos maximais de A são todos os subconjuntos de A da forma $\{p, 2p, 3p, \ldots, np, \ldots\}$, sendo *p primo.*

7. $\inf X = 4$; $\sup X$ não existe.

8. Todo par ordenado (p, x), sendo *p primo*, é um elemento minimal, e todo par ordenado (x, p), sendo *p primo*, é um elemento maximal.

4

FUNÇÕES

CAPÍTULO 15

NOÇÕES FUNDAMENTAIS

1. GRAFO FUNCIONAL

Definição — Diz-se que um grafo F é um *grafo funcional* se, para todo x, existe quando muito um elemento correspondente de x por F.

Portanto, se F é um *grafo funcional,* não há dois pares ordenados diferentes em F com o mesmo primeiro elemento, isto é, se os pares ordenados (x, y_1) e (x, y_2) são elementos de F, então $y_1 = y_2$.

Assim, p. ex., $F = \{(1, 2), (2, 5), (3, 2), (4, 7)\}$ é um grafo funcional.

2. CONCEITO DE FUNÇÃO

Definição — Diz-se que uma relação binária $f = (F, A, B)$ de A em B é uma *função f de* A *em* B se e somente se as duas seguintes condições são verificadas:

i) O conjunto de partida A de f é igual ao seu domínio D(f), isto é:

$$A = D(f) = pr_1 F$$

Segundo esta condição, para todo $x \in A$ *existe* $y \in B$ tal que $(x, y) \in F$:

$$(\forall x)\ (\exists y)\ (x \in A,\ y \in B \ \text{ e } \ (x, y) \in F)$$

ii) O grafo F de f é um *grafo funcional,* isto é:

$$(x, y_1) \in F \ \text{ e } \ (x, y_2) \in F \Longrightarrow y_1 = y_2$$

Segundo esta condição, é *único* o correspondente $y \in B$ de $x \in A$ por f.

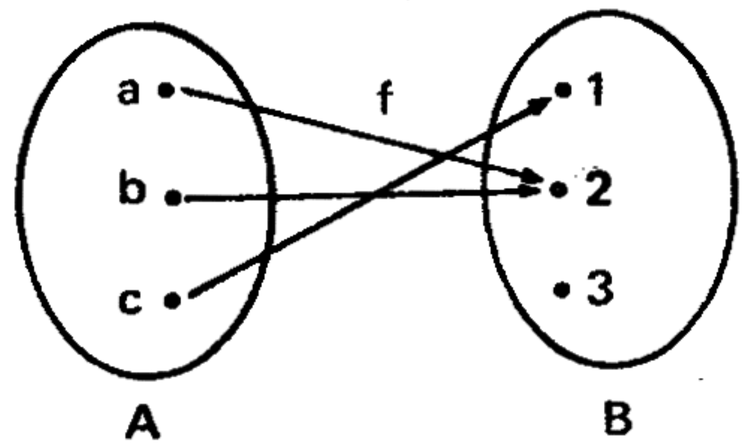
As condições (i) e (ii) da definição referem-se, pois, respectivamente à *existência* e à *unicidade* do elemento $y \in B$ cada vez que é dado $x \in A$.

Uma função f de A em B diz-se também *função f definida em* A *e com valores em* B ou *aplicação f de* A *em* B.

3. EXEMPLOS DE FUNÇÕES

1) Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e o grafo

$$F = \{(a, 2), (b, 2), (c, 1)\}$$



A relação binária $f = (F, A, B)$ é uma *função f de* A *em* B, porque $D(f) = A$ e F é um grafo funcional.

Observe-se que na representação gráfica de f por um diagrama sagital:

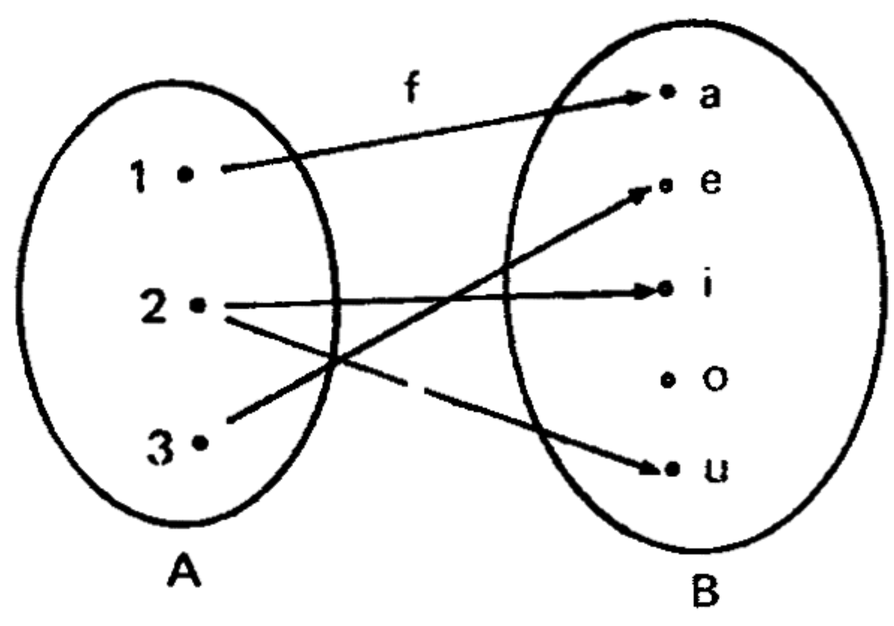
i) cada elemento do conjunto A é a origem de uma *única* flecha;

ii) todo elemento do conjunto B não é necessariamente extremidade de flecha;

iii) um mesmo elemento do conjunto B pode ser extremidade de mais de uma flecha.

2) Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, e, i, o, u\}$ e o grafo

$$F = \{(1, a), (2, i), (3, e), (2, u)\}$$

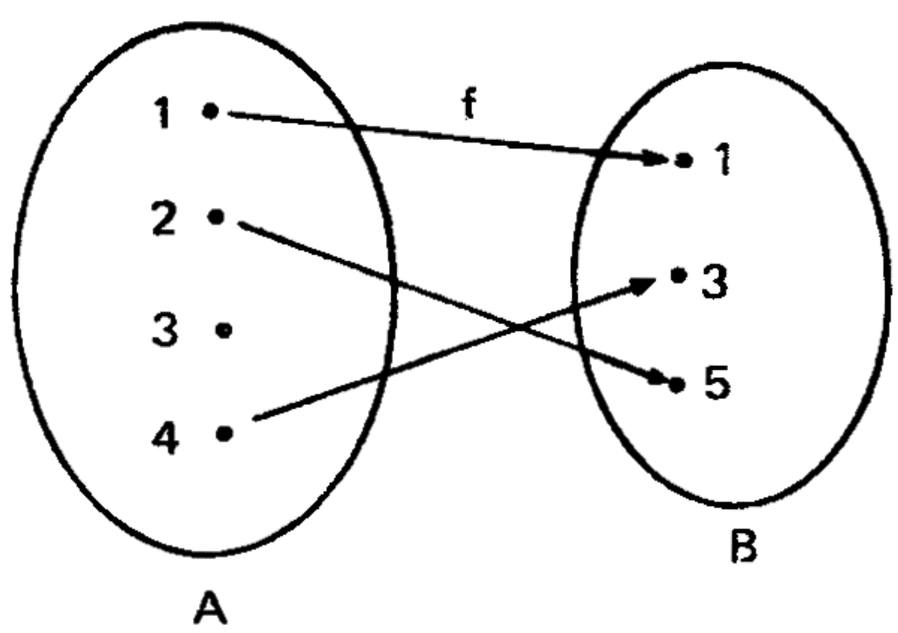


A relação binária $f = (F, A, B)$ *não é uma função f de* A *em* B, porque F não é um grafo funcional (há dois pares ordenados diferentes em F que têm o mesmo primeiro elemento, (2, i) e (2, u)).

No diagrama sagital de f, o elemento $2 \in A$ é a origem de *duas* flechas cujas extremidades são os elementos i e u de B.

3) Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ e o grafo

$$F = \{(1, 1), (2, 5), (4, 3)\}$$



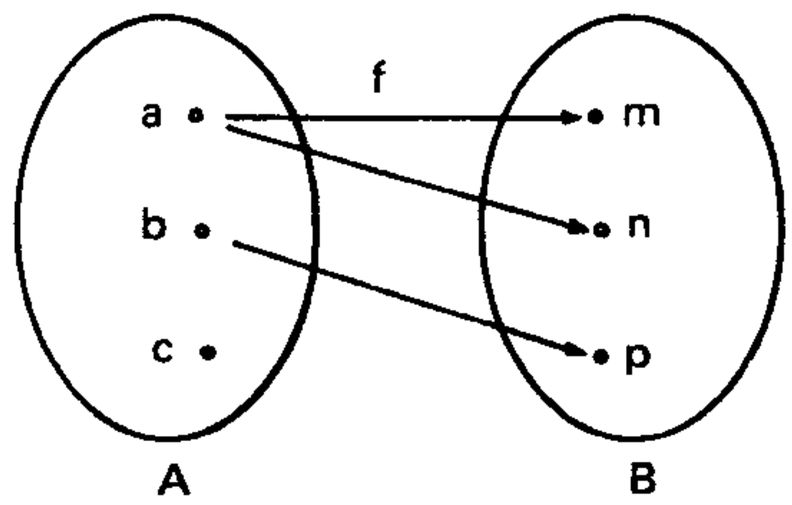
A relação binária $f = (F, A, B)$ *não é uma função f de* A *em* B, porque $D(f) \neq A$ (o elemento $3 \in A$ não figura como primeiro elemento de nenhum par ordenado pertencente ao grafo F).

No diagrama sagital de f, o elemento $3 \in A$ não é origem de flecha.

4) Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{m, n, p\}$ e o grafo

$$F = \{(a, m), (a, n), (b, p)\}$$

A relação binária $f = (F, A, B)$ *não é uma função f de* A *em* B, porque $D(f) \neq A$ e F não é um grafo funcional (o elemento $c \in A$ não figura como primeiro elemento de nenhum par ordenado pertencente ao grafo F e há dois pares ordenados diferentes em F que têm o mesmo primeiro elemento, (a, m) e (a, n)).



No diagrama sagital de f, o elemento $c \in A$ não é origem de flecha, enquanto que o elemento $a \in A$ é a origem de *duas* flechas.

4. NOTAÇÕES

Uma função $f = (F, A, B)$ de A em B indica-se por uma das seguintes notações:

$$f : A \longrightarrow B \quad \text{ou} \quad A \xrightarrow{f} B$$

cada uma das quais se lê: "função f de A em B" ou "função f definida em A com valores em B".

Para cada elemento x de A, o *único* elemento y de B tal que $(x, y) \in F$ representa-se por f(x), que se lê: "f de x", isto é, escreve-se $y = f(x)$ para indicar que $(x, y) \in F$, e diz-se que f(x) é a "*imagem* de x pela função f" ou o "*valor* da função f no elemento x de A".

Em lugar de $y = f(x)$ também se escreve xfy, que se lê: "x-efe-y". São, pois, equivalentes as expressões: $(x, y) \in F$, $y = f(x)$, xfy.

Para indicar que $y = f(x)$ também se usam as seguintes notações:

$$f : x \longmapsto f(x) \quad , \quad x \longmapsto f(x) \quad , \quad x \xmapsto{f} y = f(x)$$

O *grafo* F da função f é, portanto, o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $y = f(x)$, isto é, simbolicamente:

$$F = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

Ao elemento genérico x de A, primeiro elemento dos pares ordenados pertencentes ao grafo F, dá-se o nome de *variável independente* ou *argumento* da função f.

Para facilitar a compreensão de definições e de demonstrações em que intervêm várias funções, usam-se diagramas tais como o que se vê ao lado, no qual toda letra minúscula que encima uma flecha representa uma função do conjunto origem da flecha no conjunto extremidade.

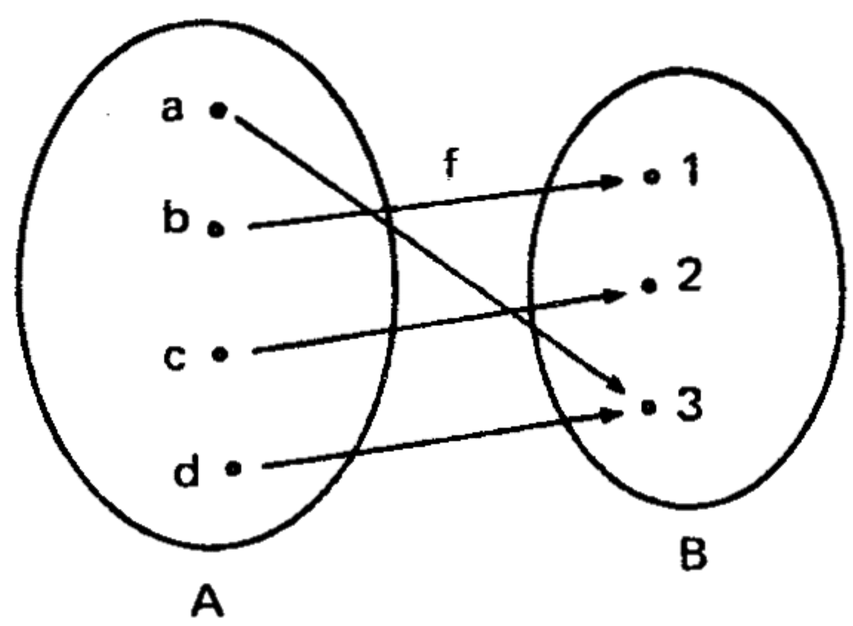
$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[dr, "h"] & \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "v"] \arrow[d, "u"'] & & E \arrow[d, "t"] \\
 & D \arrow[rr, "w"] & & F
\end{tikzcd}$$

As funções de um conjunto A num conjunto B são os *elementos* de um novo conjunto – *o conjunto das funções de* A *em* B, que se representa pelos símbolos B^A ou F(A, B). Logo, $f : A \longrightarrow B$ é um *elemento* deste conjunto: $f \in F(A, B)$.

NOTA – Numa função $f : A \longrightarrow B$, cumpre distinguir bem o significado dos símbolos x, f(x) e f, pois x é elemento de A ($x \in A$), f(x) é elemento de B ($f(x) \in B$), e f é uma terna ordenada: f = (F, A, B), onde F é um conjunto de pares ordenados $(x, f(x)) \in A \times B$, isto é, F é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$ ($F \subset A \times B$).

Exemplos:

1) Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. O diagrama sagital ao lado define uma função f de A em B tal que se tem:



$$f(a) = 3 \quad , \quad f(b) = 1$$

$$f(c) = 2 \quad , \quad f(d) = 3$$

Portanto, o *grafo* desta função f é o conjunto:

$$F = \{(a, 3), (b, 1), (c, 2), (d, 3)\}$$

e a função f é a terna ordenada (F, A, B).

2) Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ e o grafo funcional:

$$F = \{(0, a), (1, a), (2, a), (3, c)\}$$

A função f = (F, A, B) é tal que se tem: f(0) = a, f(1) = f(2) = a, f(3) = c. Observe-se que os elementos distintos 1 e 2 de A têm a mesma *imagem*, o elemento *a* de B.

3) Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{m, n, p, q\}$ e o grafo funcional:

$$G = \{(a, n), (b, m), (c, n), (d, q)\}$$

A função g = (G, A, B) é tal que se tem: g(a) = n, g(b) = m, g(c) = n, g(d) = q. Observe-se que o elemento *p* de B não é imagem de elemento algum de A, enquanto que o elemento *n* de B é a imagem dos elementos distintos *a* e *c* de A (g(a) = g(c) = n).

5. DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E IMAGEM DE UMA FUNÇÃO.

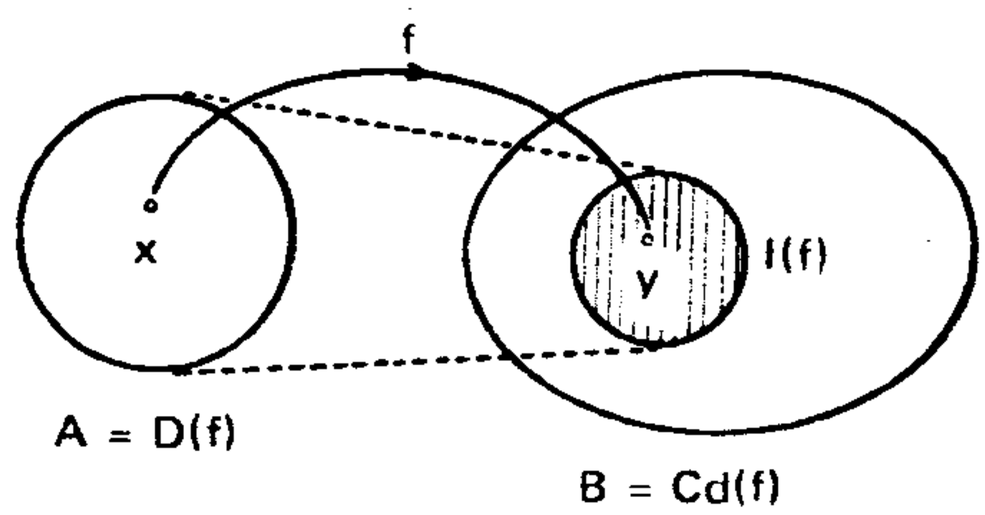
i) *Domínio* — Seja a função f = (F, A, B) de A em B. Como f é uma relação binária, o seu *domínio* é o conjunto dos primeiros elementos de todos os pares ordenados do grafo F, conjunto este que, pela definição de função (condição (i)), é igual a A. Logo, o *domínio* D(f) de uma função de A em B é o conjunto A, isto é, D(f) = A.

É usual dar-se também o nome de *conjunto de definição* ao domínio A de uma função f de A em B.

ii) *Contradomínio* — Para toda função f = (F, A, B) de A em B, o conjunto B recebe o nome de *contradomínio* de f, isto é, Cd(f) = B.

O conceito de função f de A em B não exclui a possibilidade dos conjuntos A e B serem *iguais* (A = B), caso em que f é uma função de A em si próprio, isto é, cujo domínio e contradomínio são um mesmo conjunto A: D(f) = Cd(f) = A.

iii) *Imagem* — Chama-se *imagem* de uma função f = (F, A, B) de A em B, o conjunto formado por todos os elementos de B que são imagens dos elementos de A.



Em outros termos, a imagem I(f) de uma função f de A em B é o conjunto dos elementos de B da *forma* f(x), $x \in A$. Portanto, simbolicamente:

$$I(f) = \{ f(x) \in B \mid x \in A \}$$

Obviamente, I(f) é uma *parte* do contradomínio B, isto é: $I(f) \subset B$.

NOTA — Uma função f = (F, A, B) tal que:

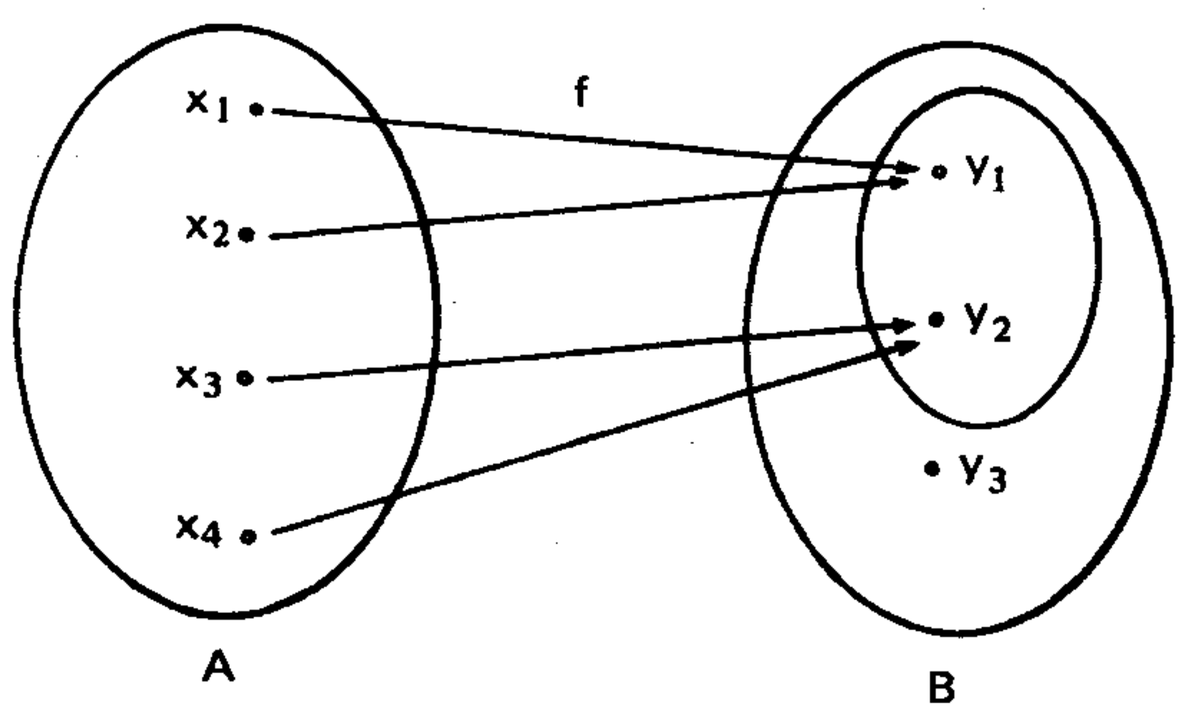
i) o domínio $A \subset \mathbf{R}$, isto é, definida em **R** ou apenas em uma parte de **R**, diz-se *função de variável real;*

ii) o contradomínio $B \subset \mathbf{R}$, isto é, com valores em **R**, diz-se *função real;*

iii) o domínio $A \subset \mathbf{R}$ e o contradomínio $B \subset \mathbf{R}$, isto é, definida em **R** ou apenas em uma parte de **R** e com valores em **R**, diz-se *função real de variável real* ou *função numérica.*

Exemplos:

1) Sejam os conjuntos $A = \{ x_1, x_2, x_3, x_4 \}$, $B = \{ y_1, y_2, y_3 \}$ e a função f de A em B definida pelo diagrama abaixo.



Temos:

$$D(f) = A \quad , \quad Cd(f) = B \quad , \quad I(f) = \{ y_1, y_2 \}$$

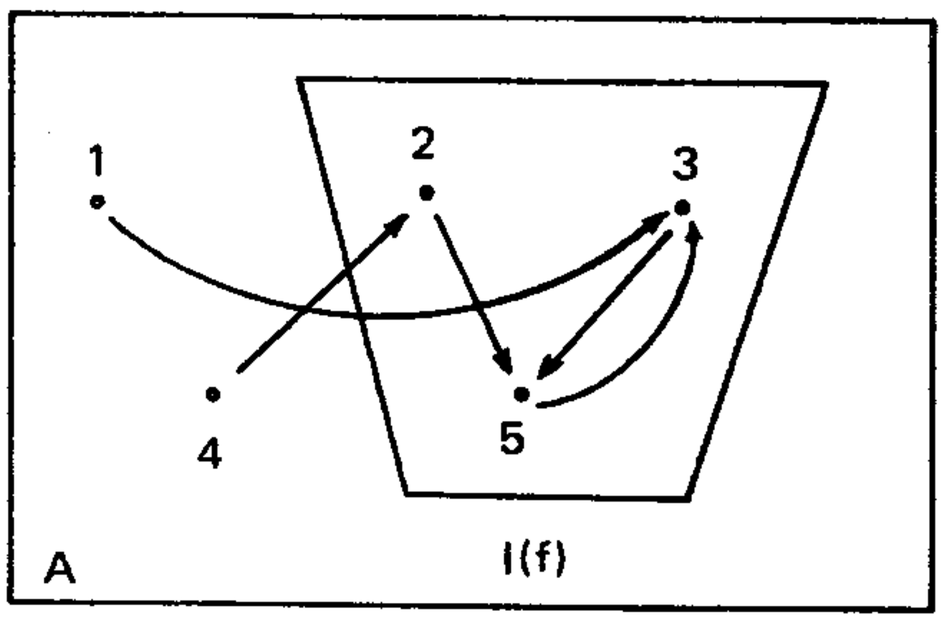
Observe-se que a imagem I(f) desta função f é uma parte própria do seu contradomínio B, e isto significa ser o contradomínio B desnecessariamente amplo para definir f.

2) Sejam os conjuntos $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $B = \{ I, II \}$ e o grafo funcional:

$$G = \{ (1, I), (2, II), (3, I), (4, II), (5, II) \}$$

Para a função g = (G, A, B), temos: D(g) = A, Cd(g) = B, I(g) = B.

3) Seja o conjunto $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ e a função $f : A \longrightarrow A$ definida pelo diagrama ao lado.



Temos:

$$D(f) = Cd(f) = A \quad ,$$

$$I(f) = \{ 2, 3, 5 \} \subset A$$

4) Seja o conjunto $A = \{ a, b, c, d \}$ e a função $f : A \longrightarrow A$ assim definida:

$$f(a) = a \quad , \quad f(b) = c \quad , \quad f(c) = a \quad , \quad f(d) = a$$

Temos: $D(f) = Cd(f) = A$, $I(f) = \{ a, c \} \subset A$

5) Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, c\}$ e a função $g : A \longrightarrow B$ assim definida:

$$g(a) = b \quad , \quad g(b) = c \quad , \quad g(c) = c \quad , \quad g(d) = b$$

Temos: $D(g) = A$, $Cd(g) = B$, $I(g) = \{b, c\} \subset B$

6) Seja o conjunto $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e a função $f : A \longrightarrow \mathbf{Z}$ definida por $f(x) = x^3 - 2$.

Temos $D(f) = A$ e $Cd(f) = \mathbf{Z}$. Para determinar a imagem $I(f)$ de f, cumpre achar a imagem de cada um dos elementos do seu domínio A:

$$f(-2) = (-2)^3 - 2 = -10 \ ;$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 2 = -3 \ ;$$

$$f(0) = 0^3 - 2 = -2 \ ;$$

$$f(1) = 1^3 - 2 = -1 \ ;$$

$$f(2) = 2^3 - 2 = 6$$

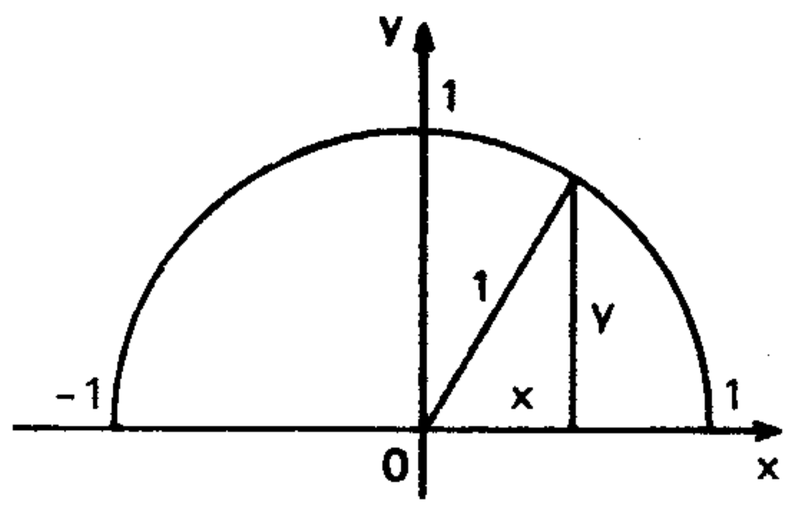
Portanto: $I(f) = \{-10, -3, -2, -1, 6\} \subset \mathbf{Z}$.

7) Consideremos o intervalo fechado $I = [-1, 1]$ e a função $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Temos:

$$D(f) = I \quad , \quad Cd(f) = \mathbf{R} \quad ,$$

$$I(f) = [0, 1].$$



O *gráfico cartesiano* de f é a *semicircunferência* de *centro* na origem O e de *raio* 1.

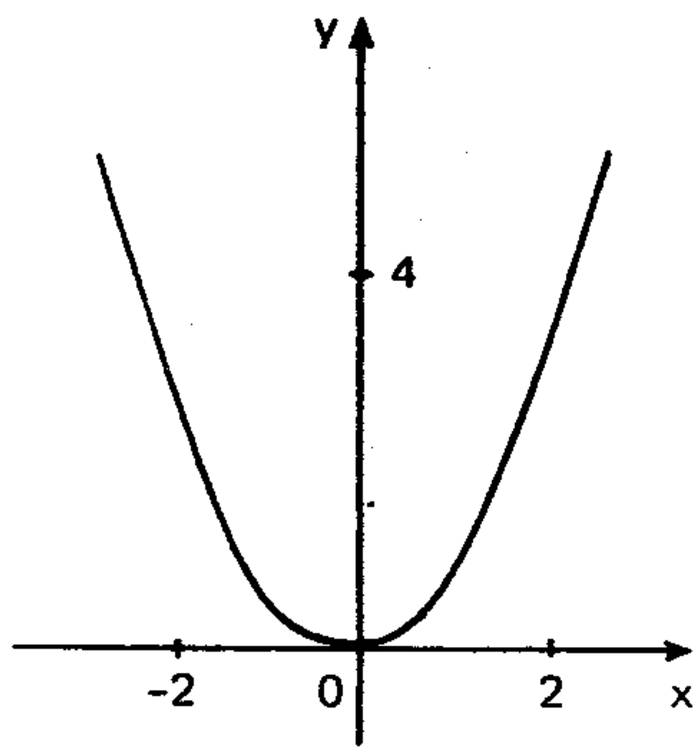
8) Consideremos o intervalo fechado $I = [-2, 2]$ e a função $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ que associa a cada número real deste intervalo o seu quadrado, isto é, a função:

$$f = (\{(x, x^2) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}, I, \mathbf{R})$$

Temos:

$$D(f) = I \quad , \quad Cd(f) = \mathbf{R} \quad ,$$

$$I(f) = [0, 4]$$



O *gráfico cartesiano* de f é uma *parábola* de *vértice* na origem O e cujo *eixo* é Oy.

9) Consideremos o conjunto C das circunferências de um plano π e a toda circunferência $c \in C$ associemos o número real r ($r \in \mathbf{R}$) que é o *raio* de c. Obtemos, deste modo, uma função $f : C \longrightarrow \mathbf{R}$ (função real) tal que:

$$D(f) = C \quad , \quad Cd(f) = \mathbf{R} \quad , \quad I(f) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 0\} = \mathbf{R}_+$$

6. DETERMINAÇÃO DO DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO

Definir uma função f significa, por um lado, especificar o domínio e o contradomínio de f, e por outro lado, dar um processo qualquer que permita determinar, para todo elemento x do domínio, a imagem f(x) de x pela f.

Quando f é uma *função real de variável real,* o processo que geralmente se usa para obter a imagem f(x) de cada elemento x do domínio de f consiste em dar uma "expressão algébrica em x". Neste caso, quando outras indicações não sejam dadas, subentende-se sempre que o domínio da função f é o *domínio de existência* da expressão algébrica dada no conjunto **R** dos números reais, isto é, o conjunto de todos os valores reais de x para os quais as operações indicadas na expressão algébrica dada possam ser efetuadas *(Regra do domínio máximo).*

Assim, p. ex., a expressão algébrica $\sqrt{x}$ em **R** tem por *domínio de existência* o conjunto $\mathbf{R}_+$ dos números reais não negativos, e em **N** (conjunto dos números naturais) tem por *domínio de existência* o conjunto dos números naturais que são *quadrados perfeitos.*

Exemplos:

1) Determinar o domínio $X \subset \mathbf{R}$ da função $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 3}}$$

A expressão f(x) só é definida quando $x - 3 \geqslant 0$ e $\sqrt{x - 3} \neq 0$, isto é, $x \geqslant 3$ e $x \neq 3$, condições estas equivalentes à seguinte: $x > 3$.

Portanto:

$$X = D(f) = \{x \mid x > 3\} =]3, \longrightarrow[$$

Então, a função considerada é precisamente:

$$f = (\{(x, f(x)) \mid f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 3}}\},]3, \longrightarrow[\, , \mathbf{R})$$

2) Determinar o domínio $X \subset \mathbf{R}$ da função $g : X \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} .$$

A expressão g(x) só é definida quando $x \geqslant 0$ e $\sqrt{x} - 1 \neq 0$, isto é, $x \geqslant 0$ e $x \neq 1$. Portanto:

$$X = D(g) = \{ x \mid x \geqslant 0 \ \text{ e } \ x \neq 1 \} = [0, 1[\cup]1, \longrightarrow[$$

$$g = (\{ (x, g(x)) \mid g(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \}, [0, 1[\cup]1, \longrightarrow[, \mathbf{R})$$

3) Determinar o domínio $X \subset \mathbf{R}$ da função $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$.

A expressão f(x) só é definida quando o radicando $2 + x - x^2$ é não negativo, isto é:

$$2 + x - x^2 \geqslant 0 \ , \ \text{ ou: } \ (x + 1)\,(x - 2) \leqslant 0$$

donde

i) $x + 1 \geqslant 0$ e $x - 2 \leqslant 0$, isto é: $-1 \leqslant x \leqslant 2$;

ii) $x + 1 \leqslant 0$ e $x - 2 \geqslant 0$, isto é: $x \leqslant -1$ e $x \geqslant 2$ (impossível)

Portanto: $X = D(f) = \{ x \mid -1 \leqslant x \leqslant 2 \} = [-1, 2]$.

Então, a função considerada é precisamente:

$$f = (\{ (x, f(x)) \mid f(x) = \sqrt{2 + x - x^2} \}, [-1, 2], \mathbf{R})$$

4) Determinar o domínio $X \subset \mathbf{R}$ da função $h : X \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $h(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$.

A expressão h(x) só é definida quando $-x \geqslant 0$, $x + 2 \geqslant 0$, $x + 2 \neq 0$, isto é, $x \leqslant 0$, $x \geqslant -2$, $x \neq -2$, condições estas equivalentes à seguinte: $-2 < x \leqslant 0$. Portanto:

$$X = D(h) = \{ x \mid -2 < x \leqslant 0 \} =]-2, 0]$$

Então a função considerada é precisamente:

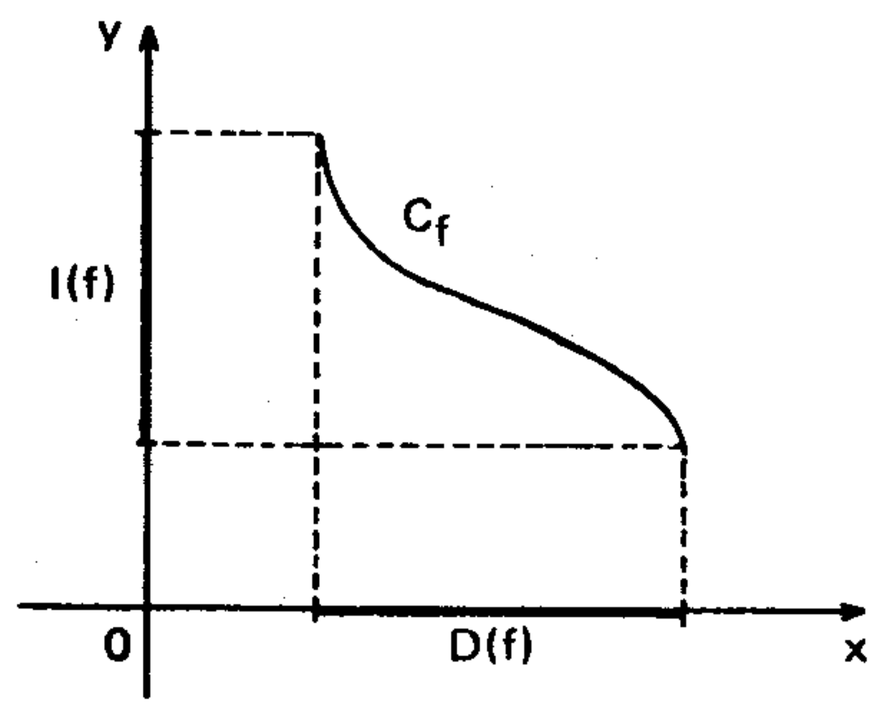
$$h = (\{ (x, h(x)) \mid h(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{x - 2}} \},]-2, 0], \mathbf{R})$$

7. PROPRIEDADES DO GRÁFICO CARTESIANO DE UMA FUNÇÃO

De conformidade com a definição de função, o *gráfico cartesiano* C_f de uma função $f : A \longrightarrow B$ possui as seguintes propriedades:

(P_1) Toda paralela ao eixo 0y, conduzida por um ponto de abscissa $x \in D(f) = A$, intercepta C_f num *único* ponto.

(P_2) O *domínio* $D(f) = A$ de f é o conjunto das abscissas x de todos os pontos (x, y) de C_f, e a *imagem* I(f) de f é o conjunto das *ordenadas* y de todos os pontos (x, y) de C_f.



8. COINCIDÊNCIA DE DUAS FUNÇÕES

Definição — Diz-se que duas funções f e g *coincidem num conjunto* X se e somente se as duas seguintes condições são verificadas:

i) O conjunto X está contido nos domínios de f e de g, isto é: $X \subset D(f)$ e $X \subset D(g)$.

ii) Tem-se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Duas funções que têm o mesmo grafo, têm também o mesmo domínio, e nele coincidem.

Exemplo — As funções:

$$f = (\{(x, f(x)) \mid f(x) = x^2\}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q})$$

$$g = (\{(x, g(x)) \mid g(x) = x^2\}, \mathbf{R}_+, \mathbf{R})$$

coincidem em **N** (conjunto dos números naturais), porque $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}_+$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbf{N}$,

Estas mesmas funções não coincidem, p. ex., em $\mathbf{Z}_-$, porque $\mathbf{Z}_- \not\subset \mathbf{R}_+$, isto é, a condição (i) da definição não se verifica.

9. IGUALDADE DE DUAS FUNÇÕES

Sejam $f = (F, A, B)$ e $g = (G, C, D)$ duas funções. Como f e g são ternas ordenadas, a relação $f = g$ significa que

$$F = G \quad , \quad A = C \quad , \quad B = D$$

isto é, duas funções f e g são iguais se e somente se têm o mesmo grafo, o mesmo domínio e o mesmo contradomínio.

A primeira condição, $F = G$, implica a segunda, $A = C$, porque $A = pr_1 F$ e $C = pr_1 G$.

Quando se verificam as condições: $A = C$ e $B = D$, para que se verifique também a condição $F = G$, isto é, se tenha $f = g$, basta evidentemente que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$, por isso que o grafo F é formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$ e o grafo G pelos pares ordenados $(x, g(x))$, com $x \in A$. Portanto, dizer que $f = g$ equivale a dizer que f e g têm o mesmo domínio A, o mesmo contradomínio B e coincidem em A.

Exemplos:

1) Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 1, 3, 4\}$ e as funções f e g, de A em B, seguintes:

$$f = (\{(1, 1), (2, 4)\}, A, B)$$
$$g = (\{(x, x^2) \mid x \in A\}, A, B)$$

Estas funções são *iguais* $(f = g)$, porque têm o mesmo domínio A, o mesmo contradomínio B e coincidem em A: $f(1) = 1 = g(1)$, $f(2) = 4 = g(2)$.

2) As funções f e g, de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$, tais que $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(x) = x$ para todo $x \in \mathbf{R}$, *são diferentes,* porque não coincidem em $\mathbf{R}$. Assim, p. ex., para $x = -1 \in \mathbf{R}$, temos: $f(-1) = 1$ e $g(-1) = -1$, isto é, $f(-1) \neq g(-1)$. Aliás, $f(x) \neq g(x)$ para todo $x \in \mathbf{R}^*_-$.

10. RESTRIÇÃO DE UMA FUNÇÃO

Seja $f = (F, A, B)$ uma função e seja X uma *parte* de A $(X \subset A)$.

A terna ordenada $g = (G, X, B)$, onde G é o grafo cujos elementos são todos os pares ordenados $(x, f(x))$ tais que $x \in X$, é uma função. Com efeito, é óbvio que $G \subset X \times B$ e que, para todo $x \in X$, existe um *único* par ordenado $(x, f(x)) \in G$.

Definição — Chama-se *restrição* de f à parte X a função $g = (G, X, B)$ de X em B tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Esta função g, restrição de f a X, representa-se geralmente pelos símbolos $f|X$ ou f_X.

Portanto, a restrição de f à parte X é a função $f|X : X \longrightarrow B$ definida por $f|X(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Obviamente: $f|X = (F \cap (X \times B), X, B)$.

Exemplos:

1) Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e a função:

$$f = (\{(a, 2), (b, 1), (c, 2), (d, 3)\}, A, B)$$

A *restrição* da função f à *parte* $X = \{a, b, c\}$ de A é a função:

$$f|X = (\{(a, 2), (b, 1), (c, 2)\}, X, B)$$

2) Seja a função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ para todo $x \in \mathbf{R}$. A *restrição* de f à *parte* **N** de **R** é a função:

$$f|\mathbf{N} = (\{(x, x^2 + 1) \mid x \in \mathbf{N}\}, \mathbf{N}, \mathbf{R})$$

NOTA — Dada uma função f, a restrição de f a uma parte X do seu domínio é *única,* isto é, a operação de restrição é *unívoca.*

Duas funções que têm o mesmo contradomínio e que coincidem num conjunto X, têm suas restrições a X iguais.

11. PROLONGAMENTO DE UMA FUNÇÃO

Sejam $f = (F, A, B)$ e $g = (G, C, D)$ duas funções.

Definição — Diz-se que g é um *prolongamento* de f se e somente se $F \subset G$ e $B \subset D$.

Dizer que $F \subset G$ equivale a dizer que $A \subset C$ e que g coincide com f em A, isto é, a condição $F \subset G$ é equivalente às duas seguintes: $A \subset C$ e $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.

Portanto, g é um *prolongamento* de f se e somente se as três seguintes condições são verificadas:

$$A \subset C \ , \quad B \subset D \ \text{ e } \ g(x) = f(x) \ , \quad \forall x \in A$$

Quando interessa destacar o domínio C de g diz-se que g é um *prolongamento de* f *a* C ou que g *prolonga* f *a* C. Analogamente, diz-se que g é um *prolongamento de* f *a* C *e a* D ou que g *prolonga* f *a* C *e a* D todas as vezes que interessa destacar o domínio C e o contradomínio D de g.

Exemplo — Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e a função:

$$f = (\{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}, A, B)$$

A função g de $C = \{a, b, c, d, e\}$ em $D = \{1, 2, 3, 4\}$ seguinte:

$$g = (\{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4), (e, 1)\}, C, D)$$

é um *prolongamento* de f. De modo mais preciso, g é um *prolongamento de* f aos *conjuntos* C *e* D.

As funções h e j de C em D seguintes:

$$h = (\{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4), (e, 4)\}, C, D)$$

$$j = (\{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 2), (e, 3)\}, C, D)$$

também são *prolongamentos de* f *aos conjuntos* C *e* D.

E X E R C Í C I O S

1. Indicar quais das seguintes relações binárias são *funções:*

   a) $(\{(0, 0), (0, 1)\}, \{0\}, \{0, 1\})$

   b) $(\{(0, 0), (1, 0)\}, \{0, 1\}, \{0\})$

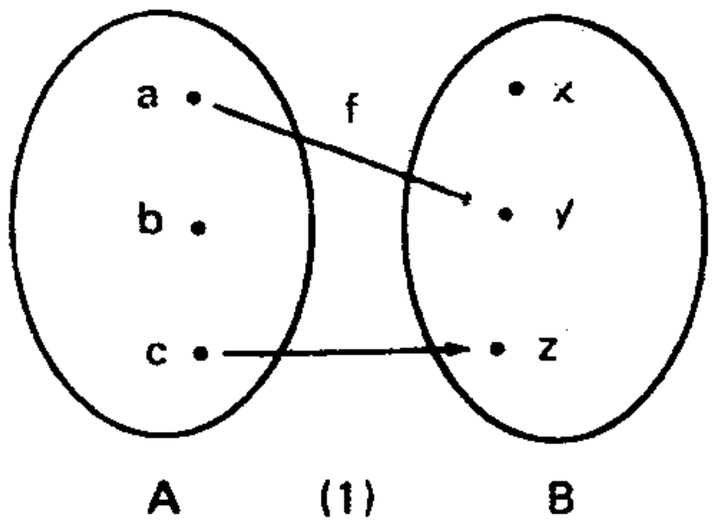
   c) $(\{(1, 6), (3, 4)\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\})$

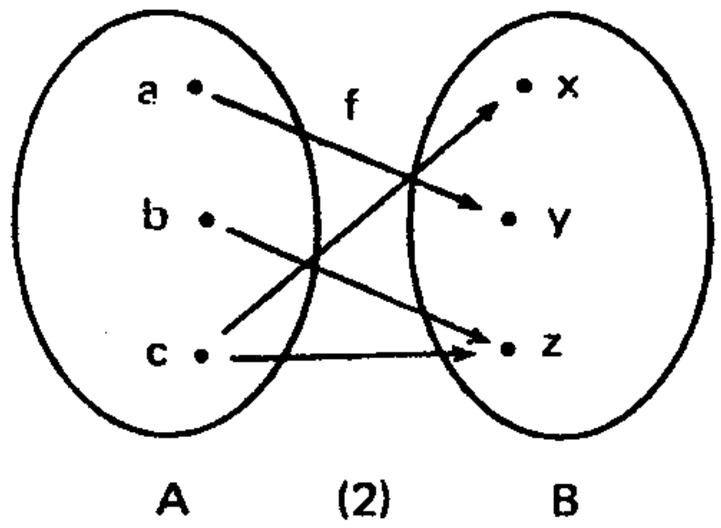
   d) $(\{(1, 4), (2, 6), (3, 4)\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\})$

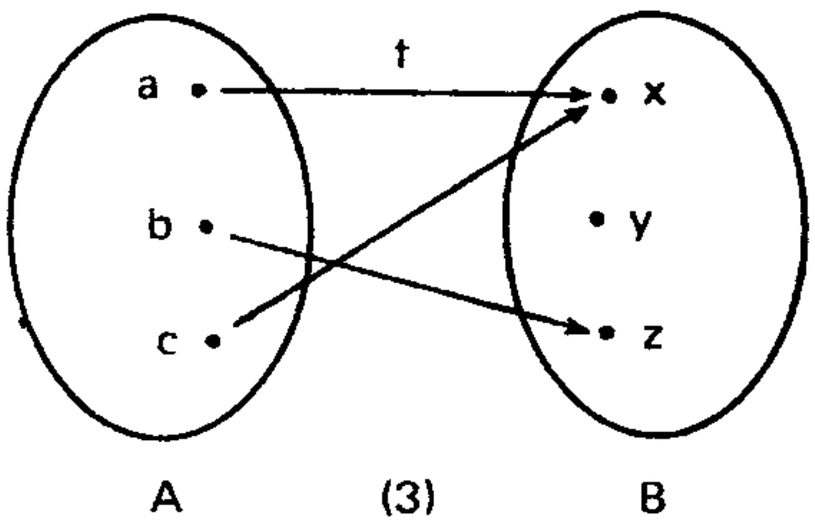
   e) $(\{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1)\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

   f) $(\{(a, d), (a, e), (b, f), (c, e)\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\})$

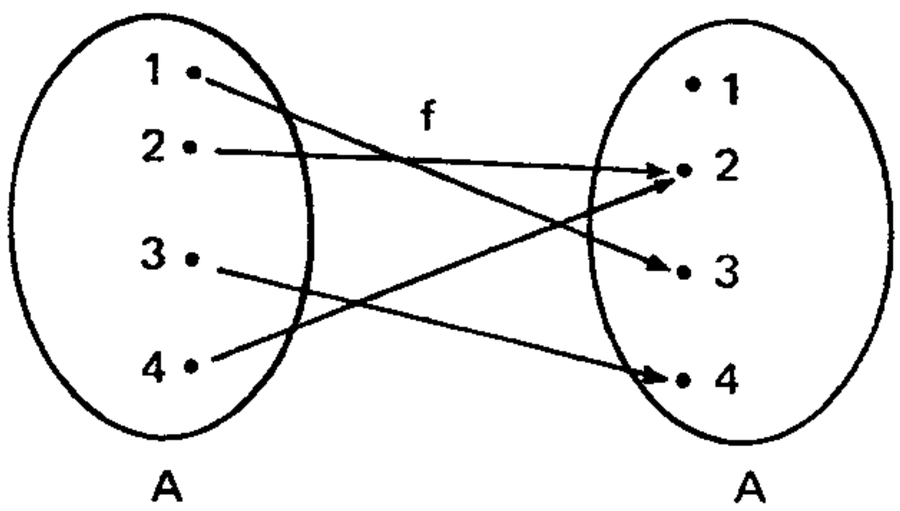
2. Indicar quais dos seguintes diagramas define uma *função* f *de* A *em* B.







3. Determinar o *grafo* da função $f : A \longrightarrow A$ definida pelo seguinte diagrama:



4. Dar a *expressão algébrica* que define cada uma das seguintes funções reais de variável real:

   a) f associa a todo número real o seu cubo;

   b) g associa a todo número real o seu quadrado mais 5;

   c) h associa a todo número real o número 3.

5. Dar a *expressão algébrica* que define cada uma das seguintes funções reais de variável real:

   a) f associa a todo número real positivo o seu cubo e associa aos demais números reais o número 3;

   b) g associa a todo número real maior ou igual a 5 o seu cubo e aos demais números reais associa o quadrado de cada um deles;

   c) h associa a todo número real o seu valor absoluto menos 2.

6. Indicar quais dos seguintes conjuntos são *grafos* de funções de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em A:

$$F = \{(2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4)\}$$

$$G = \{(3, 1), (4, 2), (1, 3)\}$$

$$H = \{(2, 1), (3, 4), (1, 4), (4, 2)\}$$

7. Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, determinar o *grafo* da função $f : A \longrightarrow \mathbf{Z}$ definida por $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

8. Seja a função $f : [-2, 8] \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$. Calcular f(5), f(-3) e f(t - 3).

9. Seja a função $f : [-3, 5] \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 7$. Calcular f(2), f(6) e f(t - 2).

10. Seja a função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \text{ é racional} \\ -1 \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Calcular: $f(\frac{3}{5})$, $f(\pi)$, f(2,171717...), $f(\sqrt{3})$.

11. Seja a função $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ assim definida:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{se } x \geqslant 2 \\ x + 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Calcular: g(6), g(0) e g(-3).

12. Seja a função h : **R** $\longrightarrow$ **R** assim definida:

$$h(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x > 3 \\ x^2 - 2 & \text{se } -2 \leqslant x < 3 \\ 2x + 3 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

Calcular: h(2), h(5), h(−1) e h(−4).

13. Seja a função h : **R** $\longrightarrow$ **R** assim definida:

$$h(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x > 9 \\ x^2 - x & \text{se } x \in [-9, 9] \\ x - 5 & \text{se } x < -9 \end{cases}$$

Calcular: h(5), h(11), h(−13) e h(h(7)).

14. Seja a função f : $[2, 8] \longrightarrow$ **R** definida por $f(x) = (x - 2)(x - 8)$. Calcular: f(4) . f(7), f(−1), f(f(3)) e f(f(5)).

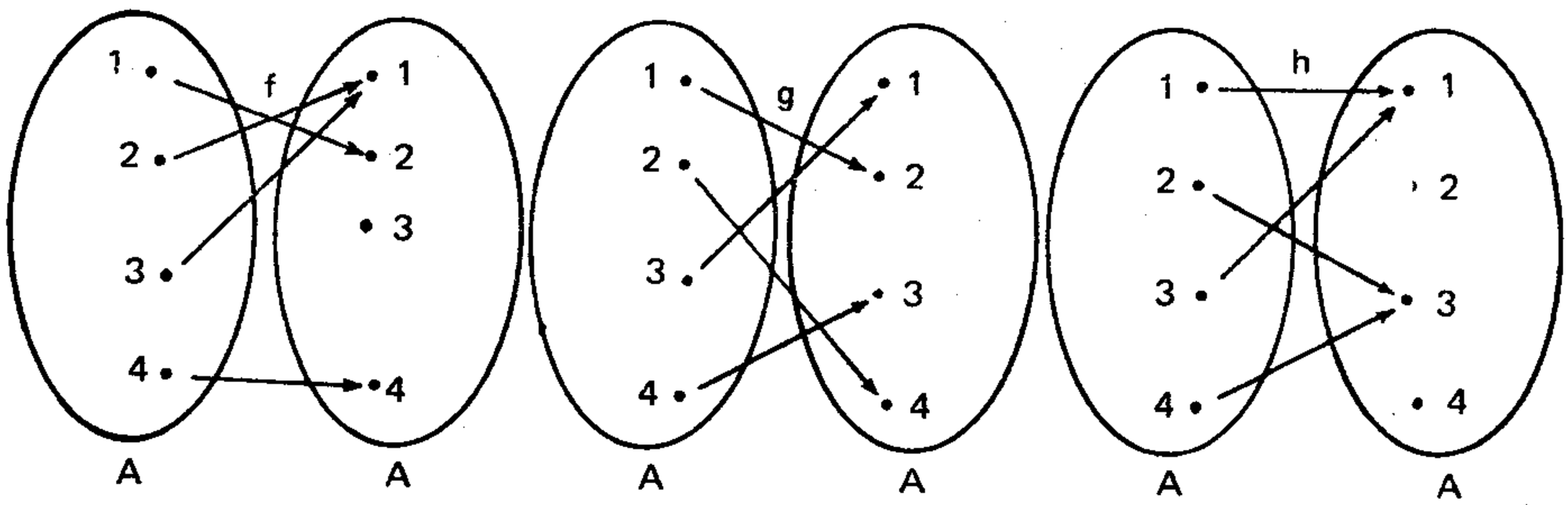
15. Indicar quais dos seguintes pares ordenados:

(2, 6) , (8, 11) , (10, 12) , (4, 7) , (−6, −9) , (−1, 2)

pertence ao grafo da função h : **Z** $\longrightarrow$ **Z** definida por $h(x) = x + 3$.

16. Dado o conjunto $A = \{-1, 0, 2, 5, 7\}$, determinar a *imagem* da função f : A $\longrightarrow$ **Z** definida por $f(x) = x^2 + x - 2$.

17. Determinar a *imagem* das funções f, g e h, de A em A, definidas pelos seguintes diagramas:



18. Determinar a *imagem* da função f cujo grafo é:

$$F = \{(x, x^2 + 1) \mid x \in \{1, 2, 3\}\}$$

19. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{3, 4\}$, determinar o *domínio* e a *imagem* da função f assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \in A \\ 1 - x & \text{se } x \in B \end{cases}$$

20. Determinar a *imagem* das seguintes funções:

$$f = (\{(x, x^3) \mid x \in \mathbf{R}\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

$$g = (\{(x, \operatorname{sen} x) \mid x \in \mathbf{R}\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

$$h = (\{(x, 1 + x^2) \mid x \in \mathbf{R}\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

21. Uma função f é definida por $f(x) = 2x - 1$ e a sua imagem é o conjunto $\{-1, 2, 4\}$. Achar o *domínio* de f.

22. Determinar o *domínio* de cada uma das seguintes funções reais de variável real:

a) $f : x \longmapsto f(x) = \sqrt{3 - x}$

b) $g : x \longmapsto g(x) = \dfrac{x}{x - 5}$

c) $h : x \longmapsto h(x) = \sqrt{4 - x^2}$

d) $f : x \longmapsto f(x) = \sqrt{-(x - 3)^2}$

e) $g : x \longmapsto g(x) = \sqrt{-(x^2 - 9)^2}$

f) $h : x \longmapsto h(x) = \sqrt{x - x^3}$

g) $f : x \longmapsto f(x) = x\sqrt{x^2 - 2}$

h) $g : x \longmapsto f(x) = \sqrt{1 + x} + \sqrt{3 - x}$

23. Construir os *gráficos cartesianos* das funções f e g de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$ e assim definidas:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < -2 \\ 1 & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ -2 & \text{se } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x > 3 \\ 2 & \text{se } -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ -x - 2 & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

24. Determinar todas as funções de $A = \{a, b, c\}$ em $B = \{1, 2\}$.

25. Dada a função $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x$, verificar quais das seguintes funções são um *prolongamento* da f:

a) $g_1 : [-2, \longrightarrow [\longrightarrow \mathbf{R}$

$g_1(x) = x$

b) $g_2 : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$

$g_2(x) = x$

c) $g_3 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$

$g_3(x) = |x|$

d) $g_4 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$

$g_4(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$

26. Mostrar que o número de funções de um conjunto finito A com *m* elementos em outro conjunto finito B com *n* elementos é igual a n^m.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. (b) , (d) e (e) 2. (3) 3. $\{(1, 3), (2, 2), (3, 4), (4, 2)\}$

4. (a) $f(x) = x^3$; (b) $g(x) = x^2 + 5$; (c) $h(x) = 3$

5. (a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x > 0 \\ 3 & \text{se } x \leqslant 0 \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \geqslant 5 \\ x^2 & \text{se } x < 5 \end{cases}$

   (c) $h(x) = |x| - 2$

6. H 7. $\{(1, 2), (2, 7), (3, 14), (4, 23), (5, 34)\}$

8. $f(5) = 24$; $f(-3)$ não é definido, porque $-3 \notin D(f)$;

   $f(t - 3) = t^2 - 6t + 8$, $1 \leqslant t \leqslant 11$

9. $f(2) = 1$; $f(6)$ não é definido, porque $6 \notin D(f)$;

   $f(t - 2) = 2t^2 - 8t + 1$, $-1 \leqslant t \leqslant 7$

10. $f(\frac{3}{5}) = 1$; $f(\pi) = -1$; $f(2{,}1717...) = 1$; $f(\sqrt{3}) = -1$

11. $g(6) = 18$; $g(0) = 2$; $g(-3) = -1$

12. $h(2) = 2$; $h(5) = 14$; $h(-1) = -1$; $h(-4) = -5$

13. $h(5) = 20$; $h(11) = 25$; $h(-13) = -18$; $h(h(7)) = 87$

14. $f(4) . f(7) = 40$; $f(-1)$ não é definido, porque $-1 \notin D(f)$;

    $f(f(3)) = 9$; $f(f(5))$ não é definido, porque $9 \notin D(f)$.

15. (8, 11), (4, 7) e (-1, 2)

16. $\{-2, 4, 28, 54\}$

17. $\{1, 2, 4\}$; $\{1, 2, 3, 4\}$; $\{1, 3\}$

18. $\{2, 5, 10\}$

19. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; $\{-2, -1, 0, -3\}$

20. $\mathbf{R}$; $[-1, 1]$; $[1, \longrightarrow[$

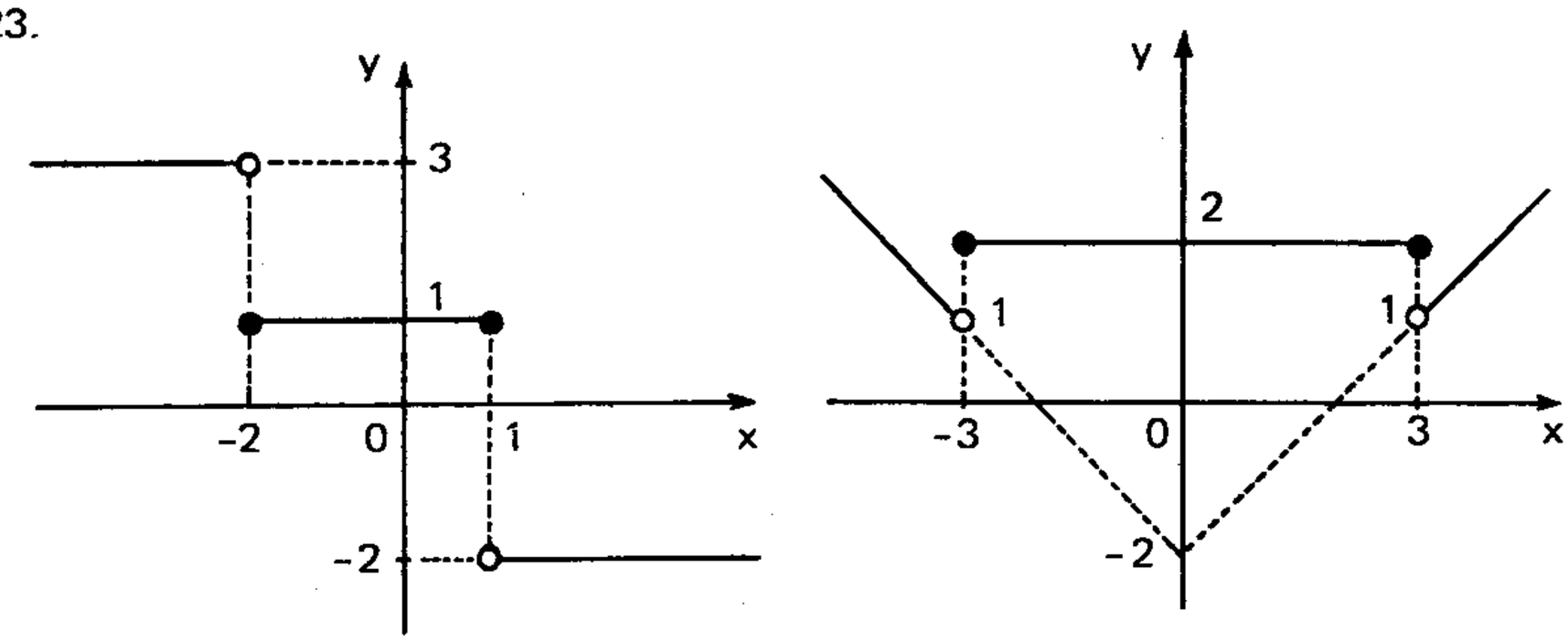
21. $\{0, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$

22. (a) $]\longleftarrow, 3]$ (b) $\mathbf{R} - \{5\}$; (c) $[-2, 2]$; (d) $\{3\}$;

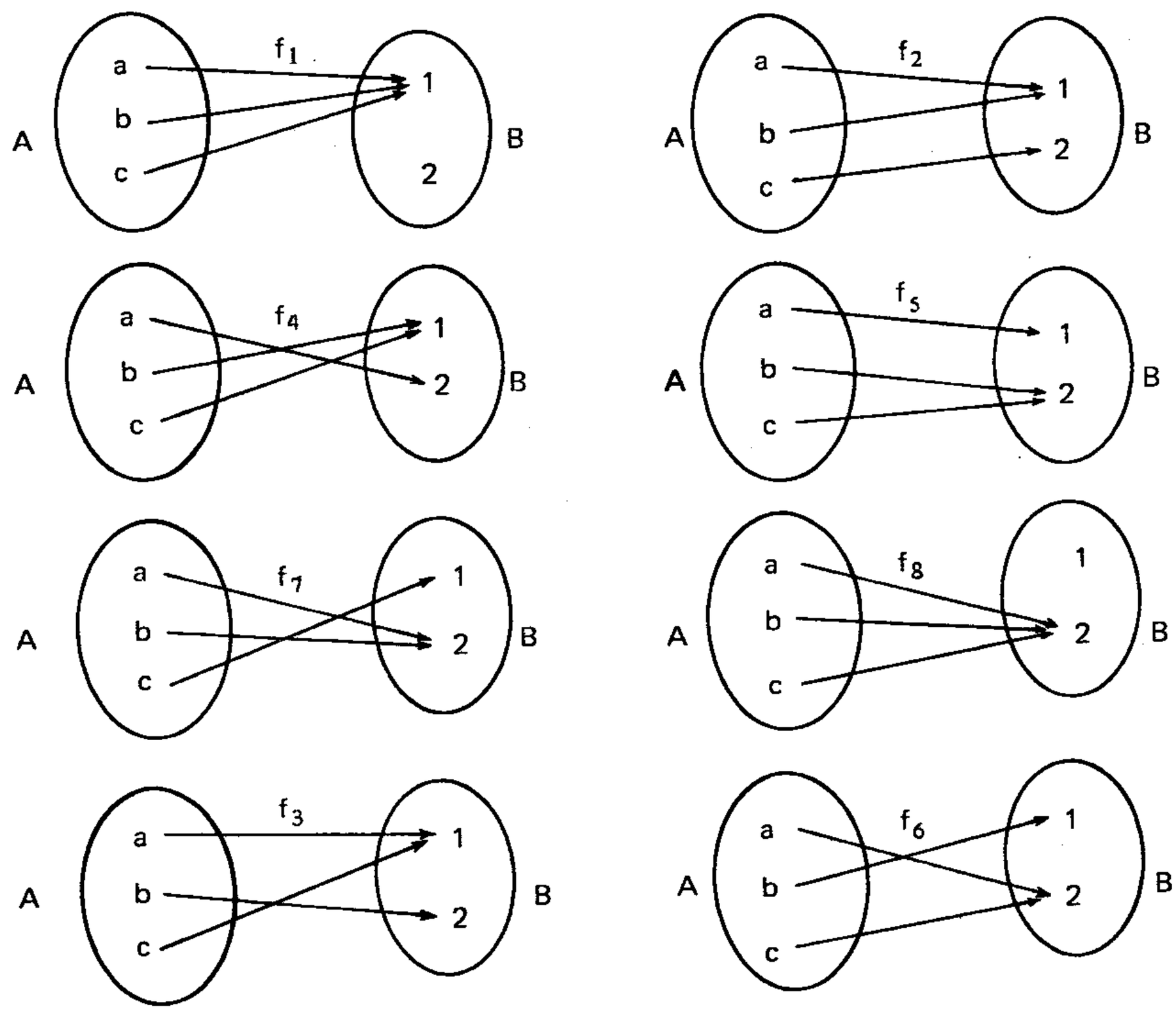
(e) $\{3, -3\}$; (f) $]\longleftarrow, -1] \cup [0, 1]$;

(g) $\{x \mid x = 0 \text{ ou } |x| \geqslant \sqrt{2}\}$; (h) $[-1, 3]$

23.



24. As funções procuradas são definidas pelos *oito* seguintes diagramas:



25. g_1 , g_3 e g_4

CAPÍTULO 16

IMAGEM DIRETA E IMAGEM INVERSA DE UM CONJUNTO POR UMA FUNÇÃO

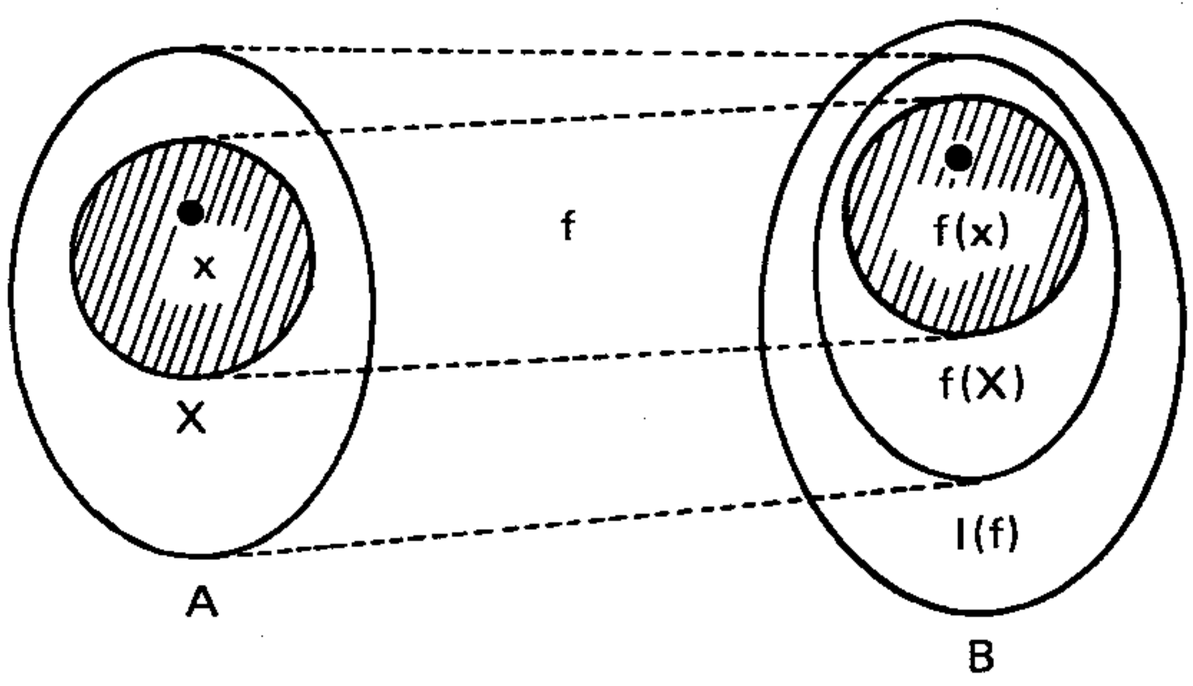
1. IMAGEM DIRETA DE UM CONJUNTO POR UMA FUNÇÃO

Seja f uma função de A em B e seja X uma *parte* qualquer de A ($X \subset A$).

Definição — Chama-se *imagem direta* ou apenas *imagem* de X pela f, a parte de B formada pelas imagens de todos os elementos de X pela f.

A imagem direta de X pela f representa-se por f(X). Portanto, simbolicamente:

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$



Observe-se que f(X) está contido na imagem I(f) de f, isto é, subsiste a inclusão: $f(X) \subset I(f)$.

Obviamente, quaisquer que sejam f e $x \in X$, tem-se:

$$f(\phi) = \phi \quad \text{e} \quad f(\{x\}) = \{f(x)\}$$

Em particular, a imagem direta f(A) de A coincide com a imagem I(f) de f, isto é, $f(A) = I(f)$.

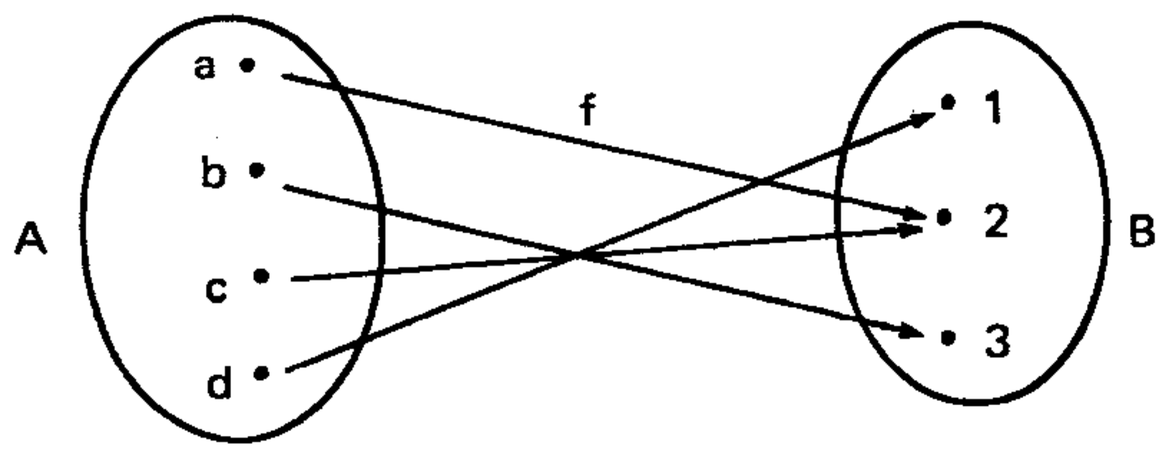
Quando f seja uma função de A em A, a imagem direta f(X) de uma parte X de A é uma parte de A. Em particular, se $f(X) \subset X$, então diz-se que X é uma parte de A *estável* pela f.

Também no caso em que f é uma função de A em A, um elemento x de A para o qual $f(x) = x$ diz-se *invariante* pela f. Se cada elemento de uma parte X de

A é invariante pela f, diz-se que X é *localmente invariante* pela f. E se f(X) = X, sem que cada elemento de X seja necessariamente invariante pela f, diz-se que X é *globalmente invariante* pela f. Logo, uma *parte invariante* X de A pela f é aquela que coincide com a sua imagem direta f(X) pela f(f(X) = X).

Exemplos:

1) Seja a função f : A ⟶ B definida pelo seguinte diagrama:



Temos, p. ex.:

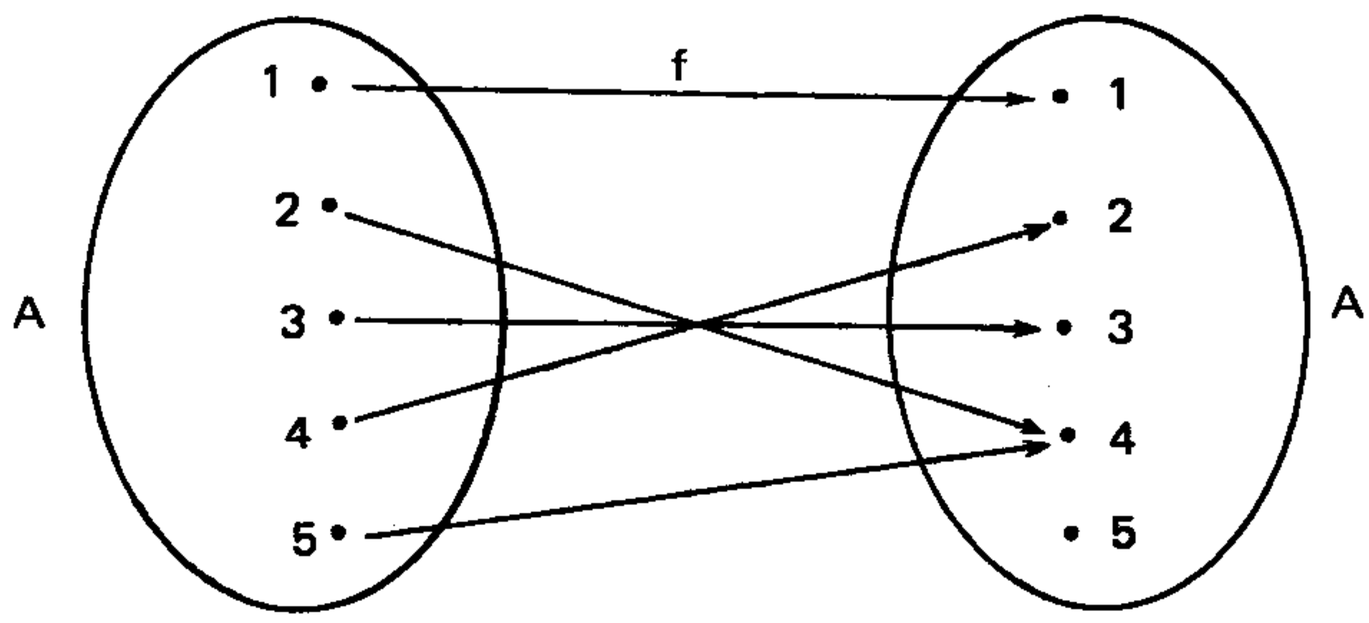
$f(\{a\}) = \{f(a)\} = \{2\}$

$f(\{a, b\}) = \{f(a), f(b)\} = \{2, 3\}$

$f(\{a, c\}) = \{f(a), f(c)\} = \{2, 2\} = \{2\}$

$f(\{a, b, d\}) = \{f(a), f(b), f(d)\} = \{2, 3, 1\}$

2) Seja a função f : A ⟶ A definida pelo seguinte diagrama:



Temos, p. ex.:

$f(\{2, 3, 4, 5\}) = \{2, 3, 4\} \subset \{2, 3, 4, 5\}$. Logo, $\{2, 3, 4, 5\}$ é uma parte de A *estável* pela f.

$f(\{1, 3\}) = \{1, 3\}$ e $f(\{2, 3, 4\}) = \{2, 3, 4\}$. Logo, $\{1, 3\}$ e $\{2, 3, 4\}$ são partes de A *invariantes* pela f, a primeira *localmente invariante* e a segunda *globalmente invariante.*

3) Seja a função f : **R** ⟶ **R** definida por $f(x) = x^2 + 3$.

Temos, p. ex.:

$$f(\{1, 3, 5\} = \{f(1), f(3), f(5)\} = \{4, 12, 28\}$$

$$f(\{x \mid 3 \leqslant x \leqslant 5\}) = \{x \mid 12 \leqslant x \leqslant 28\} = [12, 28]$$

2. PROPRIEDADES DA IMAGEM DIRETA

Seja $f = (F, A, B)$ uma função e sejam X e Y duas partes quaisquer de A $(X, Y \subset A)$.

(P_1) Se $X \subset Y$, então $f(X) \subset f(Y)$.

Dem.: — Seja y um elemento qualquer de $f(X)$. Então, existe ao menos um elemento x de X tal que $f(x) = y$, isto é, subsiste a implicação:

$$y \in f(X) \Longrightarrow (\exists x)\ (x \in X \text{ e } f(x) = y)$$

Como $x \in X$ e $X \subset Y$, segue-se que $x \in Y$ e, portanto, $f(x) = y \in f(Y)$.

Fica assim provado que $y \in f(X) \Longrightarrow y \in f(Y)$, isto é: $f(X) \subset f(Y)$.

(P_2) *Imagem direta da reunião de duas partes:* $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

Dem.: — Como $X \subset X \cup Y$ e $Y \subset X \cup Y$, temos (Propriedade P_1):

$$f(X) \subset f(X \cup Y) \quad \text{e} \quad f(Y) \subset f(X \cup Y)$$

e, portanto:

$$f(X) \cup f(Y) \subset f(X \cup Y) \qquad (1)$$

Vamos, agora, mostrar que $f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$. Seja y um elemento qualquer de $f(X \cup Y)$. Então existe ao menos um elemento x de $X \cup Y$ tal que $f(x) = y$, isto é, subsiste a implicação:

$$y \in f(X \cup Y) \Longrightarrow (\exists x)\ (x \in X \cup Y \text{ e } f(x) = y)$$

ou seja:

$$y \in f(X \cup Y) \Longrightarrow (\exists x)\ ((x \in X \text{ ou } x \in Y) \text{ e } f(x) = y)$$

Posto isto, se:

$$x \in X \Longrightarrow f(x) = y \in f(X)$$

$$x \in Y \Longrightarrow f(x) = y \in f(Y)$$

Em qualquer dos casos, $f(x) = y \in f(X) \cup f(Y)$. E fica assim provado que $y \in f(X \cup Y) \Longrightarrow y \in f(X) \cup f(Y)$, isto é:

$$f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y) \qquad (2)$$

Comparando as inclusões (1) e (2), concluímos: $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

Exprime-se este resultado dizendo que a imagem direta *conserva* ou *preserva* a reunião.

(P_3) *Imagem direta da interseção de duas partes:* $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

Dem.: — Como $X \cap Y \subset X$ e $X \cap Y \subset Y$, temos (Propriedade P_1):

$$f(X \cap Y) \subset f(X) \quad \text{e} \quad f(X \cap Y) \subset f(Y)$$

e, portanto:

$$f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$$

Como se vê, a imagem direta *não conserva* ou *não preserva* a interseção.

Daremos a seguir um exemplo para mostrar que não se pode, em geral, substituir a inclusão anterior por uma igualdade, isto é, que $f(X \cap Y)$ é geralmente uma *parte própria* de $f(X) \cap f(Y)$.

Seja a função $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ definida por $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbf{Z}$. Considerando as partes $X = \{0, 1\}$ e $Y = \{2, 3\}$ de $\mathbf{Z}$, temos:

$$f(X \cap Y) = f(\phi) = \phi \neq \{0\} = f(X) \cap f(Y)$$

(P_4) *Imagem direta da diferença de duas partes:* $f(X - Y) \supset f(X) - f(Y)$.

Dem.: — Seja y um elemento qualquer de $f(X) - f(Y)$. Então, $y \in f(X)$ e $y \notin f(Y)$, e por conseguinte existe ao menos um elemento x de X tal que $f(x) = y$. Como $y \notin f(Y)$, segue-se que $x \notin Y$. Portanto:

$$x \in X - Y \quad \text{e} \quad f(x) = y \in f(X) - f(Y)$$

Fica assim provado que $y \in f(X) - f(Y) \Longrightarrow y \in f(X - Y)$, isto é:

$$f(X) - f(Y) \subset f(X - Y), \quad \text{ou}: \ f(X - Y) \supset f(X) - f(Y)$$

O exemplo que damos a seguir mostra que não se pode, em geral, substituir esta inclusão por uma igualdade.

Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e a função $f : A \longrightarrow A$ definida por $f(x) = 3$ para todo $x \in A$. Considerando as partes $X = \{1, 2\}$ e $Y = \{3\}$ de A, temos:

$$f(X - Y) = f(X) = \{3\} \neq \phi = f(X) - f(Y)$$

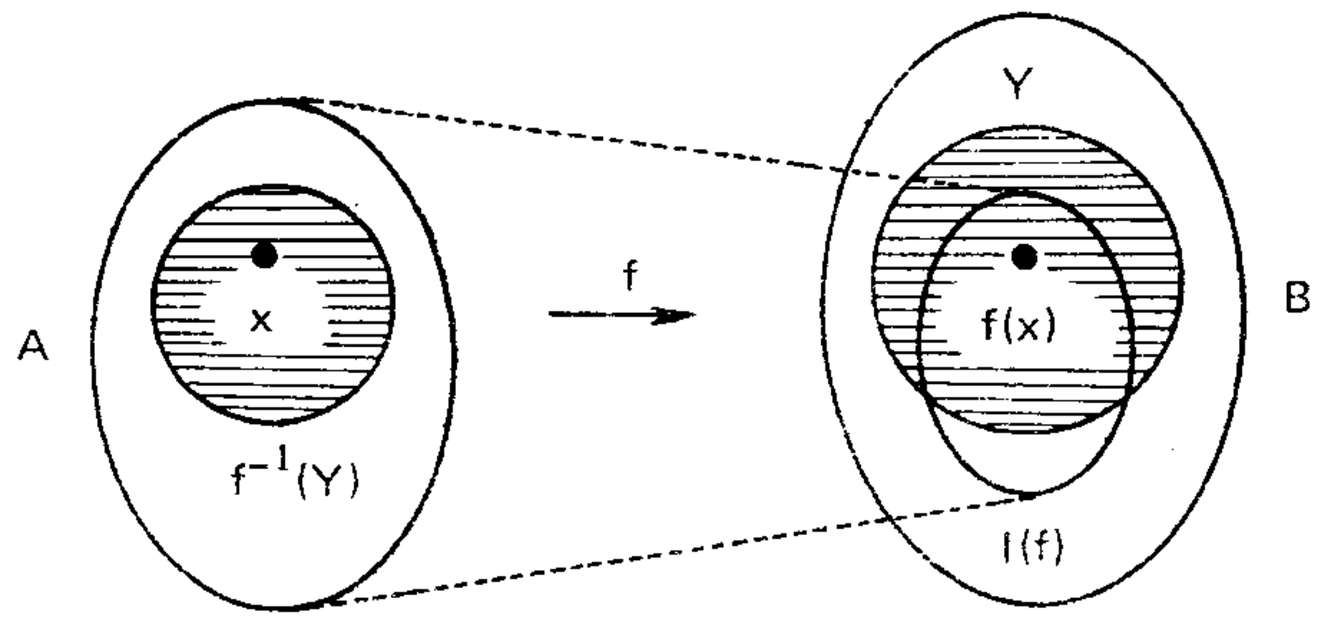
3. IMAGEM INVERSA DE UM CONJUNTO POR UMA FUNÇÃO

Seja f uma função de A em B e seja Y uma *parte* qualquer de $B (Y \subset B)$.

Definição — Chama-se *imagem inversa* ou *imagem recíproca* de Y pela f, a parte de A formada por todos os elementos x cujas imagens $f(x)$ pela f pertencem a Y.

A imagem inversa de Y pela f representa-se por $f^{-1}(Y)$. Portanto, simbolicamente:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$$



Em particular, se y é um elemento de B, $f^{-1}(\{y\})$ é o conjunto de todos os $x \in A$ tais que $f(x) = y$, isto é:

$$f^{-1}(\{y\} = \{x \in A \mid f(x) = y\}$$

Neste caso, escreve-se $f^{-1}(y)$ em lugar de $f^{-1}(\{y\})$.

Obviamente, as relações "$f(x) = y$" e "$x \in f^{-1}(y)$" são equivalentes:

$$f(x) = y \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(y).$$

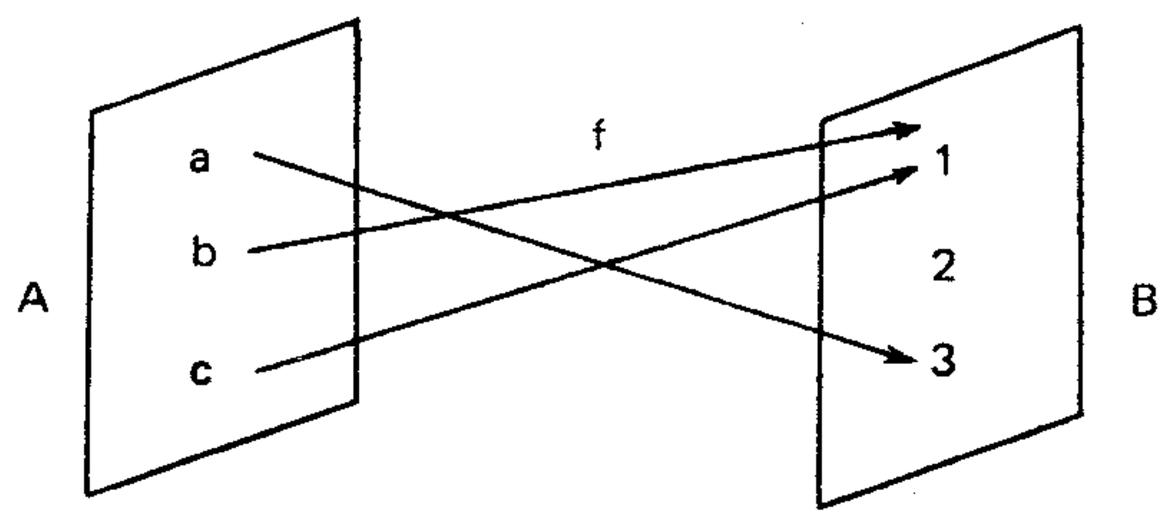
Observe-se ainda que: $f^{-1}(B) = f^{-1}(I(f)) = A$.

NOTA – É claro que $f^{-1}(\phi) = \phi$, mas se pode ter $f^{-1}(Y) = \phi$ para uma parte não vazia Y de B, p. ex., quando $Y \neq \phi$ é tal que $Y \subset B - f(A)$.

Para que $Y \neq \phi$ implique $f^{-1}(Y) \neq \phi$ é necessário e suficiente que $I(f) = B$, isto é, que a função f seja sobrejetora.

Exemplos:

1) Seja a função $f : A \longrightarrow B$ definida pelo seguinte diagrama:

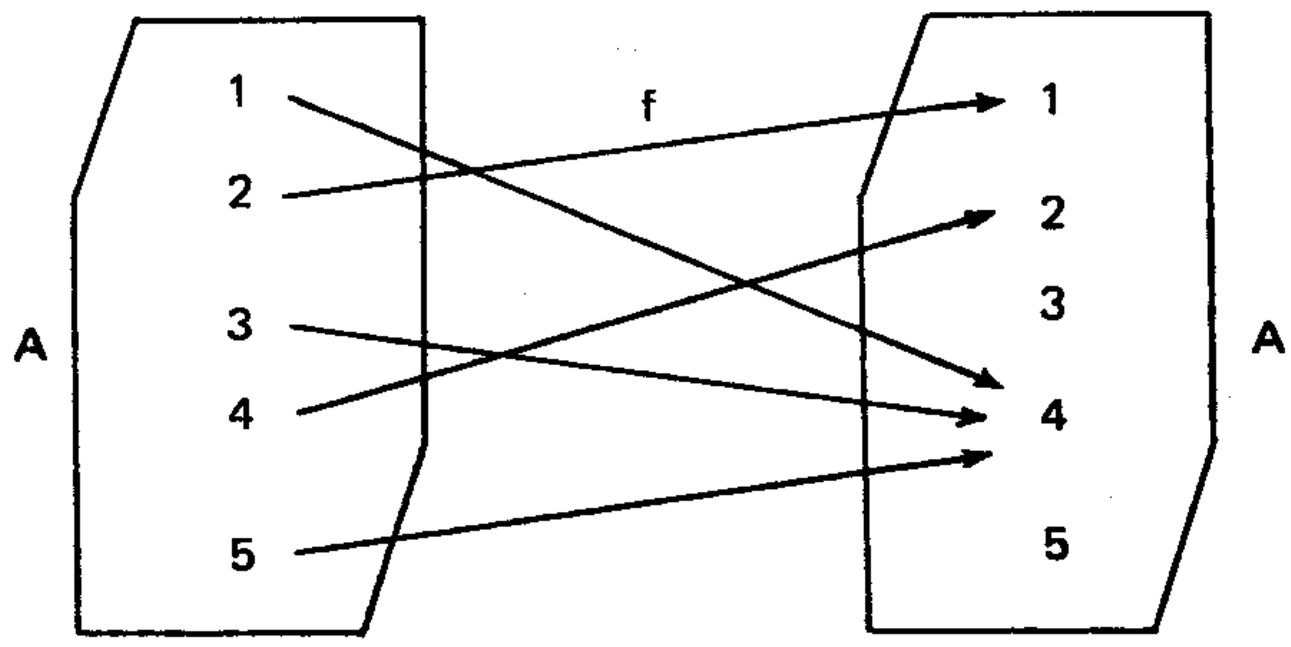


Temos, p. ex.:

$$f^{-1}(1) = \{b, c\} \; ; \quad f^{-1}(2) = \phi \; ; \quad f^{-1}(3) = \{a\} \; ;$$

$$f^{-1}(\{1, 2\}) = \{b, c\} \; ; \quad f^{-1}(\{1, 3\}) = \{a, b, c\} = A$$

2) Seja a função $f : A \longrightarrow A$ definida pelo seguinte diagrama:



Temos, p. ex.:

$f^{-1}(1) = \{2\}$; $f^{-1}(3) = \phi = f^{-1}(5)$; $f^{-1}(4) = \{1, 3, 5\}$;

$f^{-1}(\{1, 2\}) = \{2, 4\}$; $f^{-1}(\{3, 5\}) = \phi$;

$f^{-1}(\{2, 3, 4\}) = \{1, 3, 4, 5\}$

3) Seja a função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

Aqui, a imagem inversa de cada número real y pode dar lugar aos seguintes casos:

i) se $y > 0$, temos $f^{-1}(y) = \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\}$;

ii) se $y = 0$, temos $f^{-1}(y) = \{0\}$;

iii) se $y < 0$, temos $f^{-1}(y) = \phi$.

Assim, p. ex.:

$f^{-1}(4) = \{2, -2\}$; $f^{-1}(-9) = \phi$; $f^{-1}(\{4, 9\}) = \{2, -2, 3, -3\}$;

$f^{-1}(R_-) = \{0\}$; $f^{-1}(\{x \mid 9 \leqslant x \leqslant 16\}) = [3, 4] \cup [-4, -3]$;

$f^{-1}(\{x \mid 1 < x < 4\}) =]1, 2[\cup]-2, -1[$

4. PROPRIEDADES DA IMAGEM INVERSA

Seja $f = (F, A, B)$ uma função e sejam X e Y duas partes quaisquer de $B(X, Y \subset B)$.

(P_1) Se $X \subset Y$, então $f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$.

Dem.: — Seja x um elemento qualquer de $f^{-1}(X)$. Então, $f(x) \in X$, e como $X \subset Y$, segue-se que $f(x) \in Y$, isto é, $x \in f^{-1}(Y)$. Fica assim provado que:

$$x \in f^{-1}(X) \Longrightarrow x \in f^{-1}(Y) \text{ , isto é: } f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$$

(P_2) *Imagem inversa da reunião de duas partes:*

$$f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$$

Dem.: — Como $X \subset X \cup Y$ e $Y \subset X \cup Y$, temos (Propriedade P_1):

$$f^{-1}(X) \subset f^{-1}(X \cup Y) \quad \text{e} \quad f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(X \cup Y)$$

e, portanto:

$$f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(X \cup Y) \qquad (1)$$

Vamos, agora, mostrar que $f^{-1}(X \cup Y) \subset f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Seja x um elemento qualquer de $f^{-1}(X \cup Y)$. Então, $f(x) \in X \cup Y$, e, portanto:

$$f(x) \in X \quad \text{ou} \quad f(x) \in Y \Longrightarrow x \in f^{-1}(X) \quad \text{ou} \quad x \in f^{-1}(Y)$$
$$\Longrightarrow x \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$$

Fica assim provado que $x \in f^{-1}(X \cup Y) \Longrightarrow x \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$, isto é:

$$f^{-1}(X \cup Y) \subset f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \qquad (2)$$

Comparando as inclusões (1) e (2), concluímos:

$$f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$$

(P_3) *Imagem inversa da interseção de duas partes:*

$$f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$$

Dem.: — Como $X \cap Y \subset X$ e $X \cap Y \subset Y$, temos (Propriedade P_1):

$$f^{-1}(X \cap Y) \subset f^{-1}(X) \quad \text{e} \quad f^{-1}(X \cap Y) \subset f^{-1}(Y)$$

e, portanto:

$$f^{-1}(X \cap Y) \subset f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \qquad (3)$$

Vamos, agora, mostrar que $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(X \cap Y)$. Seja x um elemento qualquer de $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$. Então, $x \in f^{-1}(X)$ e $x \in f^{-1}(Y)$, e, portanto:

$$f(x) \in X \quad \text{e} \quad f(x) \in Y \Longrightarrow f(x) \in X \cap Y \Longrightarrow x \in f^{-1}(X \cap Y)$$

Fica assim provado que $x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \Longrightarrow x \in f^{-1}(X \cap Y)$, isto é:

$$f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(X \cap Y) \qquad (4)$$

Comparando as inclusões (3) e (4), concluímos:

$$f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$$

(P_4) *Imagem inversa da diferença de duas partes:*

$$f^{-1}(X - Y) = f^{-1}(X) - f^{-1}(Y)$$

Dem.: — Mostraremos, primeiro, que $f^{-1}(X - Y) \subset f^{-1}(X) - f^{-1}(Y)$. Seja x um elemento qualquer de $f^{-1}(X - Y)$. Então, $f(x) \in X - Y$, e, portanto:

$$f(x) \in X \text{ e } f(x) \notin Y \Longrightarrow x \in f^{-1}(X) \text{ e } x \notin f^{-1}(Y)$$
$$\Longrightarrow x \in f^{-1}(X) - f^{-1}(Y)$$

Fica assim provado que $x \in f^{-1}(X - Y) \Longrightarrow x \in f^{-1}(X) - f^{-1}(Y)$, isto é:

$$f^{-1}(X - Y) \subset f^{-1}(X) - f^{-1}(Y) \qquad (5)$$

Mostraremos, agora, que $f^{-1}(X) - f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(X - Y)$. Seja x um elemento qualquer de $f^{-1}(X) - f^{-1}(Y)$. Então, $x \in f^{-1}(X)$ e $x \notin f^{-1}(Y)$, e, portanto:

$$f(x) \in X \text{ e } f(x) \notin Y \Longrightarrow f(x) \in X - Y \Longrightarrow x \in f^{-1}(X - Y)$$

Fica assim provado que $x \in f^{-1}(X) - f^{-1}(Y) \Longrightarrow x \in f^{-1}(X - Y)$, isto é:

$$f^{-1}(X) - f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(X - Y) \qquad (6)$$

Comparando as inclusões (5) e (6), concluímos:

$$f^{-1}(X - Y) = f^{-1}(X) - f^{-1}(Y)$$

(P_5) *Imagem inversa do complementar de uma parte:*

$$f^{-1}(C_B X) = C_A f^{-1}(X)$$

Dem.: — Temos $C_B X = B - X$ e, portanto (Propriedade P_4):

$$f^{-1}(C_B X) = f^{-1}(B) - f^{-1}(X) = A - f^{-1}(X) = C_A f^{-1}(X)$$

Observe-se que, segundo estas cinco propriedades, a imagem inversa *conserva* ou *preserva* a inclusão, a reunião, a interseção, a diferença e a complementação.

5. EXTENSÃO DE UMA FUNÇÃO AO CONJUNTO DAS PARTES

Seja $f = (F, A, B)$ uma função e seja X uma *parte* qualquer de $A (X \subset A)$.

A *imagem* $f(X)$ de X pela f é uma parte de B; logo, a função f faz corresponder a toda parte X de A e, portanto, a todo elemento X do conjunto $\mathbf{P}(A)$ das partes de A, um *único* elemento $f(X)$ do conjunto $\mathbf{P}(B)$ das partes de B. Em outros termos, a função f *induz* uma função de $\mathbf{P}(A)$ em $\mathbf{P}(B)$, também representada pela letra f:

$$f : X \in \mathbf{P}(A) \longmapsto f(X) \in \mathbf{P}(B)$$

e que se denomina *extensão de f ao conjunto* $\mathbf{P}(A)$ *das partes de* A.

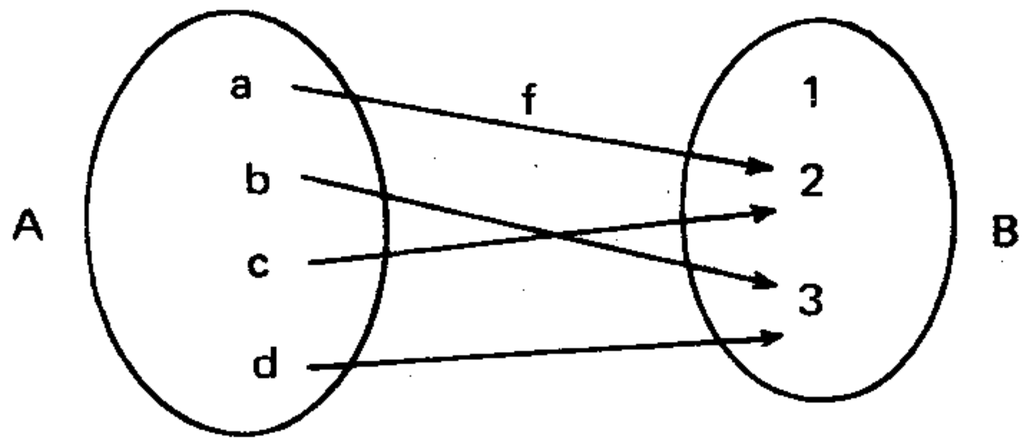
Analogamente, se Y é uma *parte* qualquer de B($Y \subset B$), a *imagem recíproca* $f^{-1}(Y)$ de Y pela f é uma parte de A; logo, a função f faz corresponder a toda parte Y de B e, portanto, a todo elemento Y do conjunto **P**(B) das partes de B, um *único* elemento $f^{-1}(Y)$ do conjunto **P**(A) das partes de A. Em outros termos, a função f induz uma função f^{-1} de **P**(B) em **P**(A):

$$f^{-1} : Y \in \mathbf{P}(B) \longmapsto f^{-1}(Y) \in \mathbf{P}(A)$$

e que se denomina *extensão recíproca de f ao conjunto* **P**(B) *das partes de* B.

E X E R C Í C I O S

1. Seja a função $f : A \longrightarrow B$ definida pelo seguinte diagrama:



Determinar: $f(\{a\})$, $f(\{b, d\})$ e $f(\{a, b, d\})$.

2. Dada a função $f = (\{(1, 3), (2, 2), (3, 5), (4, 3), (5, 1)\}, A, A)$, determinar: $f(\{1, 4\})$, $f(\{2, 5\})$ e $f(\{1, 2, 3\})$.

3. Seja a função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$. Determinar: $f(\{-1, 0, 1\})$, $f(]-2, 2[)$, $f(\mathbf{R})$, $f^{-1}(\{10, 17\})$, $f^{-1}(\mathbf{R})$ e $f^{-1}(]5, 10[)$.

4. Seja a função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$. Determinar: $f^{-1}(5)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(10)$, $f^{-1}(-5)$, $f^{-1}([10, 26])$, $f^{-1}(\phi)$, $f^{-1}([0, 5])$, $f^{-1}([-5, 1])$ e $f^{-1}([-5, 5])$.

5. Dada a função $f = (\{(1, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 1), (5, 2), (6, 4)\}, A, B)$ de $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4\}$, determinar: $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(3)$, $f^{-1}(4)$ e $\{x \mid x \in A \text{ e } f(x) < 3\}$.

6. Seja a função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2 + x - 2$. Determinar: $f^{-1}(10)$, $f^{-1}(-5)$ e $f^{-1}(4)$.

7. Seja a função $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z}$ assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } x \text{ é par} \end{cases}$$

Determinar: $f(\{2, 3, 4, 5\})$, $f^{-1}(1)$ e $f^{-1}(\frac{3}{5})$.

8. Seja a função $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ definida por $f(x) = x^2 - x$.

   i) Determinar: $f(\{-1, 0, 1\})$, $f(\{-2, 0, 2\})$ e $f^{-1}(3)$.

   ii) Sendo $X = \{2, 6, 12\}$ e $Y = \{6, 12, 20\}$, determinar $f(X \cup Y)$, $f(X \cap Y)$ e $f(X - Y)$.

9. Seja a função $f = (\{(0, a), (1, a), (2, b), (3, c), (4, c)\}, A, B)$ de $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{a, b, c, d\}$. Determinar: $f(\{1\} \cap \{2\})$, $f(\{0, 3\})$, $f^{-1}(b)$, $f^{-1}(C_B\{a, c\})$ e $f^{-1}(\phi - B)$.

10. Sejam a função $f : A \longrightarrow B$ e as *partes* X de A e Y de B. Demonstrar:

i) $f^{-1}(Y \cap I(f)) = f^{-1}(Y)$;

ii) $f^{-1}(f(X)) \supset X$;

iii) $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. $\{2\}$; $\{3\}$; $\{2, 3\}$

2. $\{3\}$; $\{2, 1\}$; $\{2, 3, 5\}$

3. $\{2, 1\}$; $]1, 5[$; $[1, \longrightarrow[$; $\{\pm 3, \pm 4\}$; $\mathbf{R}$; $]-3, -2[\cup]2, 3[$

4. $\{-2, 2\}$; ϕ ; $\{-3, 3\}$; ϕ ; $[-5, -3]\cup[3, 5]$; ϕ ; $[-2, 2]$; $\{0\}$; $[-2, 2]$

5. $\{1, 5\}$; $\{3\}$; $\{2, 6\}$; $\{1, 4, 5\}$

6. $\{-4, 3\}$; ϕ ; $\{2, -3\}$

7. $\{0, 1\}$; $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$; ϕ

8. i) $\{0, 2\}$; $\{0, 2, 6\}$; ϕ

   ii) $\{2, 30, 132, 380\}$; $\{30, 132\}$; $\{2\}$

9. ϕ ; $\{a, c\}$; $\{2\}$; $\{2\}$; ϕ

CAPÍTULO 17

DIFERENTES TIPOS DE FUNÇÕES

1. FUNÇÃO CONSTANTE

Sejam A e B dois conjuntos e seja *b* um elemento qualquer de B ($b \in B$).

Definição — Chama-se *função constante de* A *em* B *determinada pelo elemento b,* a função $f : A \rightarrow B$ definida por $f(x) = b$ para todo $x \in A$.

Portanto, a *função constante determinada pelo elemento b* é a função:

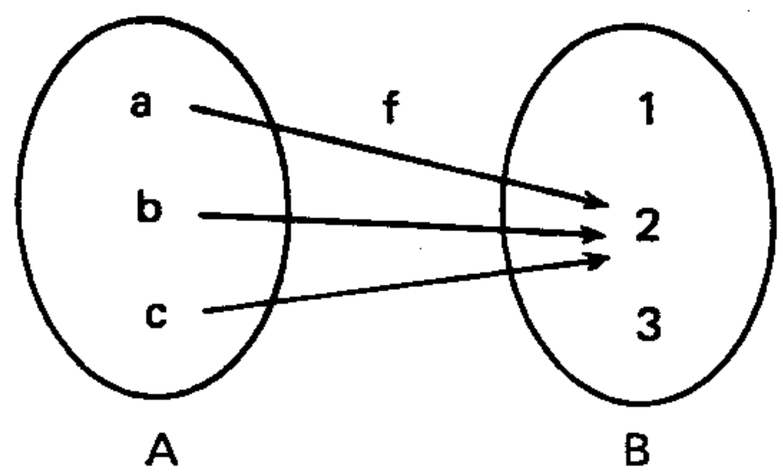
$$f = (\{(x, b) \mid x \in A\}, A, B)$$

De um modo geral, chama-se *função constante* toda a função $f : A \longrightarrow B$ cuja imagem $I(f)$ é formada por um único elemento de B, isto é, tal que $I(f)$ é um conjunto unitário.

Exemplos:

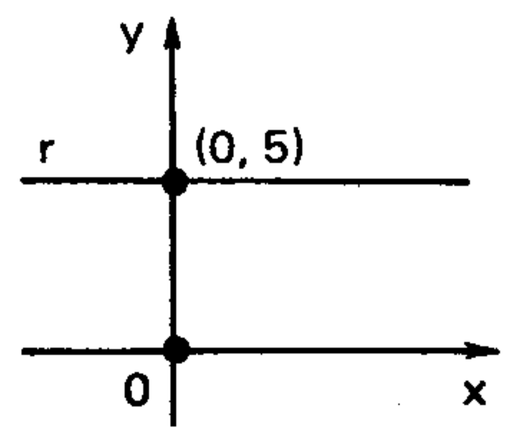
1) A função f de $A = \{a, b, c\}$ em $B = \{1, 2, 3\}$ seguinte:

$$f = (\{(a, 2), (b, 2), (c, 2)\}, A, B)$$



é uma *função constante determinada pelo elemento* $2 \in B$, pois temos $f(a) = f(b) = f(c) = 2$, isto é, $I(f) = \{2\}$, conjunto unitário.

2) A função $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $g(x) = 5$ para todo $x \in \mathbf{R}$ é uma *função constante determinada pelo elemento* $5 \in \mathbf{R}$ e cuja imagem é um conjunto unitário: $I(g) = \{5\}$.



Observe-se que o *gráfico cartesiano* desta função é a reta r paralela ao eixo Ox que passa pelo ponto (0, 5).

3) A função h de $A = \{a, b, c\}$ em $B = \{1, 2, 3\}$ seguinte:

$$h = (\{(a, 2), (b, 3), (c, 3)\}, A, B)$$

não é uma função constante, porque a sua imagem $I(h) = \{2, 3\}$ não é um conjunto unitário.

2. FUNÇÃO IDÊNTICA

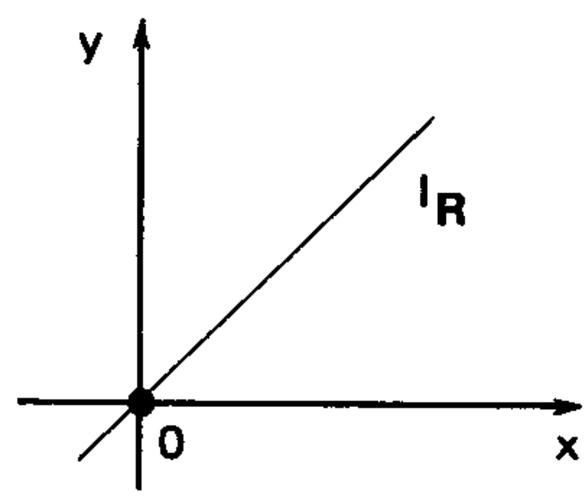
Definição — Chama-se *função idêntica de* A a função $f : A \longrightarrow A$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in A$.

A função idêntica de A também é denominada *identidade de* A, e representa-se pelos símbolos Id_A, I_A e 1_A.

Obviamente, os elementos do *grafo* de I_A são todos os pares ordenados (x, x) tais que $x \in A$, isto é, o *grafo* de I_A coincide com a *diagonal* $D_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ do produto cartesiano $A \times A$, e por conseguinte $I_A = (D_A, A, A)$.

Observe-se ainda que a imagem da função idêntica de A é o próprio conjunto A, isto é, $I(I_A) = A$.

No caso particular em que $A = \mathbf{R}$, temos a função idêntica de $\mathbf{R}$, $I_{\mathbf{R}}$, cujo *gráfico cartesiano* é a reta que contém a bissetriz do 1.º quadrante.



Exemplo — A *função idêntica de* $A = \{a, b, c, d\}$ é

$$I_A = (\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}, A, A)$$

3. FUNÇÃO DE INCLUSÃO

Seja A um conjunto e seja X uma *parte* de A ($X \subset A$).

Definição — Chama-se *função de inclusão de* X *em* A a função $i_X : X \longrightarrow A$ definida por $i_X(x) = x$ para todo $x \in X$.

Observe-se que a função de inclusão de X em A é a *restrição* da função idêntica de A à parte X de A ($i_X = I_A|X$). Além disso, se $X = A$, a função de inclusão de X em A coincide com a função idêntica de A ($i_X = I_A$).

Exemplo — A função de inclusão de $X = \{a, b, c\}$ em $A = \{a, b, c, d\}$ é:

$$i_X = (\{(a, a), (b, b), (c, c)\}, X, A)$$

4. FUNÇÃO CARACTERÍSTICA DE UMA PARTE DE UM CONJUNTO

Seja A um conjunto e seja X uma *parte* qualquer de A ($X \subset A$).

Definição — Chama-se *função característica de* X *em* A a função

$$C_X : A \longrightarrow \{0, 1\}$$

assim definida:

$$C_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in X \\ 0 & \text{se } x \notin X \end{cases} \qquad (\forall x \in A)$$

É imediato que $C_X(x) = 0$ para todo $x \in A - X = C_A X$, isto é:

$$C_X(A - X) = C_X(C_A X) = \{0\}$$

Por ser

$$\begin{cases} C_X(x) = 1 \quad \text{e} \quad C_{A-X}(x) = 0 \quad \text{se} \quad x \in X \ ; \\ C_X(x) = 0 \quad \text{e} \quad C_{A-X}(x) = 1 \quad \text{se} \quad x \notin X \end{cases}$$

temos:

$$C_{A-X}(x) = 1 - C_X(x) \ , \quad \forall x \in A$$

Dados os valores da função C_X (0 ou 1) para todo elemento de A, a parte X de A resulta conhecida. Por esse motivo, C_X recebe o nome de *função característica da parte* X *em* A.

Em particular:

i) $X = \phi \Longleftrightarrow C_\phi = (\{(x, 0) \mid x \in A\}, A, \{0, 1\})$

ii) $X = A \Longleftrightarrow C_A = (\{(x, 1) \mid x \in A\}, A, \{0, 1\})$

Como se vê, as funções características da *parte vazia* e da *parte cheia* de A são *funções constantes de* A *em* $\{0, 1\}$ *determinadas* respectivamente pelos elementos 0 e 1. Reciprocamente, se a função característica C_X da *parte* X de A é uma função constante, então $X = \phi$ ou $X = A$.

Exemplo — Consideremos o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ e as seguintes *partes* de A : $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{c, d\}$, $Z = \{a, d, e\}$.

As *funções características de* X, Y *e* Z *em* A são:

$$C_X = (\{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 0), (e, 0)\}, A, \{0, 1\})$$

$$C_Y = (\{(a, 0), (b, 0), (c, 1), (d, 1), (e, 0)\}, A, \{0, 1\})$$

$$C_Z = (\{(a, 1), (b, 0), (c, 0), (d, 1), (e, 1)\}, A, \{0, 1\})$$

Em particular:

$$C_\phi = (\{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0), (e, 0)\}, A, \{0, 1\})$$
$$C_A = (\{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 1), (e, 1)\}, A, \{0, 1\})$$

que são *funções constantes de* A *em* $\{0, 1\}$, *determinadas* respectivamente pelos elementos 0 e 1.

5. FAMÍLIA DE ELEMENTOS DE UM CONJUNTO

Consideremos uma função $f = (F, I, A)$. Em certos casos é costume indicar a imagem $f(i)$ de um elemento genérico i de I pela notação indexada f_i (lê-se: "f índice i"), isto é escrever f_i em lugar de $f(i)$ ($f_i = f(i)$). E quando esta notação indexada é usada, a função f indica-se por $(f_i)_{i \in I}$ (lê-se: "f_i, i percorrendo I), isto é, põe-se $f = (f_i)_{i \in I}$, e recebe o nome de *família de elementos de* A *tendo* I *para conjunto de índices* ou *família de elementos de* A *indexada pelo conjunto* I. Além disso, cada elemento f_i denomina-se *termo de índice i* da família $(f_i)_{i \in I}$.

Chama-se *conjunto dos termos da família* $(f_i)_{i \in I}$ a imagem $I(f)$ da função f, que, neste caso, se representa por $\{f_i, i \in I\}$ ou $\{f_i\}_{i \in I}$.

De conformidade com a definição de igualdade de duas funções, duas famílias de elementos d. A : $(f_i)_{i \in I}$ e $(g_j)_{j \in J}$ são *iguais* se e somente se $I = J$ e $f_i = g_i$ para todo $i \in I$.

Se $(f_i)_{i \in I}$ é uma família, e $J \subset I$, diz-se que $(f_i)_{i \in J}$ é uma *subfamília* da família $(f_i)_{i \in I}$ ou uma *família extraída* da família $(f_i)_{i \in I}$.

Notações tais como $(x_i)_{i \in I}$ são também usadas para representar uma família de elementos de um conjunto A.

Observe-se que o conceito de *família de elementos de* A *tendo* I *para conjunto de índices* só difere do conceito de *função de* I *em* A pela notação e terminologia.

6. SEQÜÊNCIA

Definição — Chama-se *seqüência em* A ou *sucessão em* A toda a família $(x_i)_{i \in I}$ de elementos de um conjunto A, sendo o conjunto dos índices I uma *parte* do conjunto **N** dos números naturais ($I \subset \mathbf{N}$).

Em outros termos, *seqüência em* A é toda função $f = (F, I, A)$ cujo domínio I é uma *parte* de **N**.

Quando o conjunto dos índices I está fixado, usa-se a notação mais simples (x_i) para indicar a seqüência $(x_i)_{i \in I}$.

Uma seqüência $(x_i)_{i \in I}$ diz-se *finita* ou *infinita* consoante o conjunto dos índices I seja finito ou infinito, respectivamente.

Dois casos particulares da definição acima são importantes:

Caso 1 — O conjunto dos índices $I = \mathbf{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

Neste caso, a seqüência $(x_i)_{i \in N}$ é *infinita* e indica-se por uma das seguintes notações:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \quad \text{ou} \quad (x_i)_{i \geqslant 1}$$

Caso 2 — O conjunto dos índices $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Neste caso, a seqüência $(x_i)_{i \in I}$ é *finita,* com *n* termos, denominada *n-upla de elementos de* A, e indica-se por uma das seguintes notações:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{ou} \quad (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

Em qualquer dos casos, x_n diz-se o *n-ésimo termo* ou *termo geral* da seqüência.

Exemplos:

1) A seqüência infinita $(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$, com $x_i = 1$ para todo $i \in \mathbf{N}$, que também pode ser indicada por $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, é uma *seqüência constante.* O termo geral é $x_n = 1$ e o *conjunto dos termos* é $\{1\}$, conjunto unitário.

Note-se que o conjunto dos termos de uma seqüência infinita pode ser finito.

2) A seqüência infinita $(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$, tal que

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \text{ é par} \\ 1 & \text{se } i \text{ é ímpar} \end{cases}$$

também pode ser indicada por $(1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$. O *termo geral* é $x_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1})$ e o *conjunto dos termos* é $\{0, 1\}$.

7. FAMÍLIA DE PARTES DE UM CONJUNTO

Sejam I e A dois conjuntos e seja f uma função de I em $\mathbf{P}(A)$, conjunto das partes de A ($f : I \longrightarrow \mathbf{P}(A)$). Então, a função f associa a todo elemento i de I um

único elemento $f(i) = X_i$ de $\mathbf{P}(A)$:

$$f : i \in I \longmapsto f(i) = X_i \in \mathbf{P}(A)$$

Esta função f indica-se por $(X_i)_{i \in I}$ (lê-se: "X_i, i percorrendo I"), isto é, põe-se $f = (X_i)_{i \in I}$, e denomina-se *família de partes de* A *tendo* I *para conjunto de índices* ou *família de partes de* A *indexada pelo conjunto* I. Além disso, cada parte X_i de A diz-se *termo de índice i* da família $(X_i)_{i \in I}$. E o *conjunto dos termos da família* $(X_i)_{i \in I}$ é a imagem I(f) da função f, que, neste caso, se indica por uma das seguintes notações: $\{X_i, i \in I\}$ ou $\{X_i\}_{i \in I}$.

No caso particular em que o conjunto dos índices I é uma parte do conjunto **N** dos números naturais ($I \subset \mathbf{N}$), a família $(X_i)_{i \in I}$ chama-se uma *seqüência de partes de* A.

Exemplo — Sejam os conjuntos $I = \{a, b, c\}$, $A = \{r, s, t, u, v\}$ e as *partes* de A: $X_a = \{r, t, u\}$, $X_b = \{s, t\}$, $X_c = \{r, u\}$.

A função $f : I \longrightarrow \mathbf{P}(A)$ assim definida: $f(a) = X_a$, $f(b) = X_b$, $f(c) = X_c$ é uma *família de partes de* A *com índices em* I, que também pode ser indicada assim:

$$f = (X_i)_{i \in I} = (\{(a, X_a), (b, X_b), (c, X_c)\}, I, \mathbf{P}(A))$$

O conjunto dos termos da família é: $\{X_i, i \in I\} = \{X_a, X_b, X_c\}$.

8. FUNÇÃO DE ESCOLHA

Seja $(X_i)_{i \in I}$ uma família de partes não vazias de um conjunto A.

Definição — Chama-se *função de escolha* da família $(X_i)_{i \in I}$ uma função f de $\{X_i, i \in I\}$ em A tal que, para todo $i \in I$, a imagem $f(X_i)$ de cada parte X_i de A é um elemento de X_i ($f(X_i) \in X_i$, $\forall i \in I$).

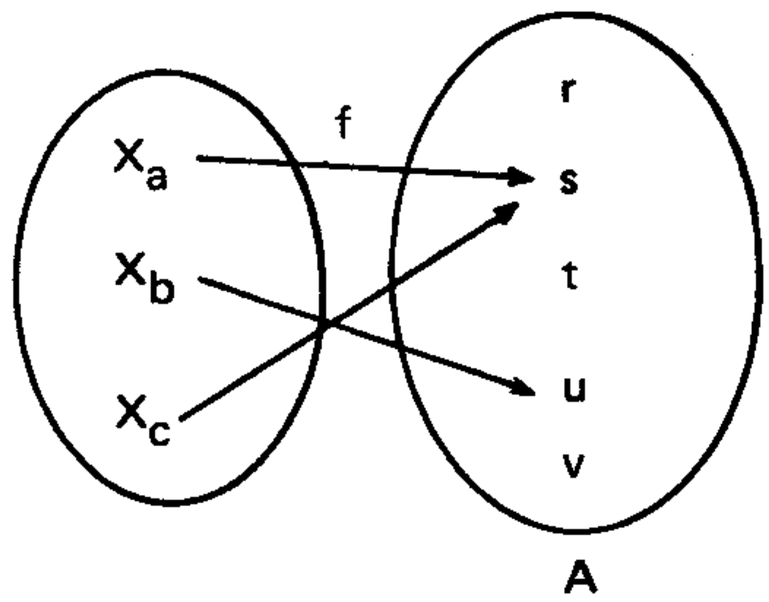
Exemplo — Consideremos o conjunto $A = \{r, s, t, u, v\}$, as *partes* de A:

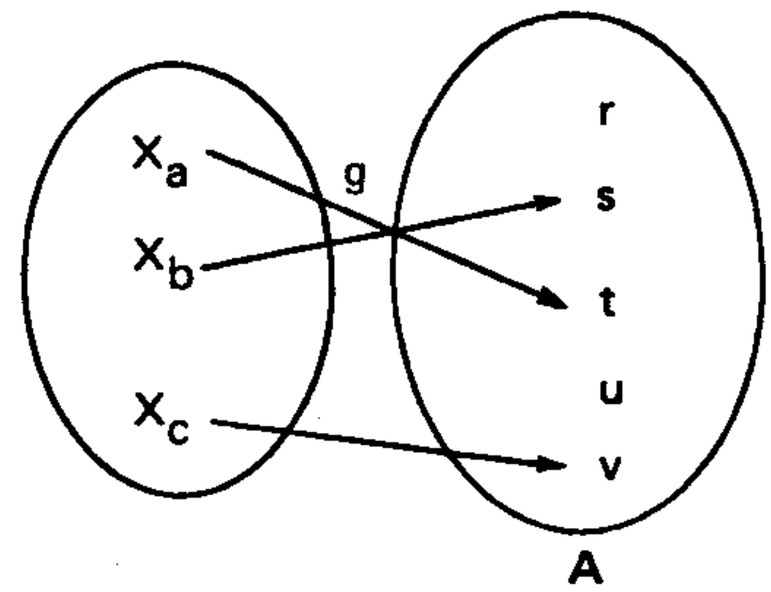
$$X_a = \{r, s, t\}, \quad X_b = \{r, t, u\}, \quad X_c = \{s, v\}$$

a *família de partes de* A *com índices em* $I = \{a, b, c\}$:

$$(X_i)_{i \in I} = (\{(a, X_a), (b, X_b), (c, X_c)\}, I, \mathbf{P}(A))$$

e as *funções* f e g de $\{X_a, X_b, X_c\}$ em A definidas pelos seguintes diagramas:





A função f é uma *função de escolha da família* $(X_i)_{i\in I}$, pois temos

$$f(X_a) = s\in X_a \quad , \quad f(X_b) = u\in X_b \quad , \quad f(X_c) = s\in X_c$$

mas a função g não o é, porque $g(X_b) = s\notin X_b$.

9. OPERAÇÕES COM FAMÍLIAS DE PARTES DE UM CONJUNTO

Seja $(X_i)_{i\in I}$ uma família de partes de um conjunto A tendo I para conjunto de índices.

I – REUNIÃO

Definição – Chama-se *reunião da família* $(X_i)_{i\in I}$ ao conjunto de todos os elementos x de A que possuem a propriedade: existe $i\in I$ tal que $x\in X_i$.

Em outros termos, a *reunião da família* $(X_i)_{i\in I}$ é o conjunto de todos os elementos x de A que pertencem a, pelo menos, um dos termos X_i da família.

Representa-se tal reunião por $\bigcup_{i\in I} X_i$, que se lê: "reunião dos X_i, ii percorrendo I". Portanto, simbolicamente:

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \{x\in A \mid (\exists\, i)\ (i\in I \ \text{ e } \ x\in X_i)\}$$

Em particular, usam-se as notações:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \quad \text{ou} \quad \bigcup_{n\geqslant 1} X_n \quad \text{se } I = \mathbf{N}\ ;$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i \quad \text{ou} \quad X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_n \quad \text{se } I = \{1, 2, \ldots, n\}$$

II – Interseção

Definição – Chama-se *interseção da família* $(X_i)_{i\in I}$ ao conjunto de todos os elementos x de A que possuem a propriedade: $x\in X_i$ para todo $i\in I$.

Em outros termos, a *interseção da família* $(X_i)_{i\in I}$ é o conjunto dos elementos x de A que pertencem a todos os termos X_i da família.

Representa-se tal interseção por $\bigcap_{i\in I} X_i$, que se lê: "interseção dos X_i, i percorrendo I". Portanto simbolicamente:

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \{x\in A \mid (\forall\, i)\ (i\in I \Longrightarrow x\in X_i)\}$$

Em particular, usam-se as notações:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \quad \text{ou} \quad \bigcap_{n\geqslant 1} X_n \quad \text{se } I = \mathbf{N}\ ;$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i \quad \text{ou} \quad X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n \quad \text{se } I = \{1, 2, \ldots, n\}$$

III — Produto cartesiano

Definição — Chama-se *produto cartesiano da família* $(X_i)_{i\in I}$ ao conjunto de todas as famílias $(x_i)_{i\in I}$ de elementos de A tais que $x_i \in X_i$ para todo $i\in I$.

Representa-se este produto por $\prod_{i\in I} X_i$, que se lê: "produto cartesiano dos X_i, i percorrendo I". Portanto, simbolicamente:

$$\prod_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid (\forall\, i)\ (i\in I \Longrightarrow x_i \in X_i)\}$$

Em outros termos, o *produto cartesiano* da família $(X_i)_{i\in I}$ é o conjunto de todas as funções $f : I \longrightarrow A$ tais que $f(i)\in X_i$ para todo $i\in I$.

Simbolicamente, temos:

$$\prod_{i\in I} X_i = \{f : I \longrightarrow A \mid (\forall\, i)\ (i\in I \Longrightarrow f(i)\in X_i)\}$$

Note-se que $\prod_{i\in I} X_i$ também é o conjunto de todas as *funções de escolha* da família $(X_i)_{i\in I}$.

No caso particular em que $X_i = A$ para todo $i\in I$, o produto cartesiano $\prod_{i\in I} X_i$ é o conjunto de todas as funções de I em A: $\prod_{i\in I} X_i = A^I$, e recebe o nome de *potência cartesiana* I *de* A.

Se I = N, a família $(X_i)_{i\in I}$ é uma *seqüência infinita* $(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ de partes de A, cujo produto cartesiano se indica por uma das seguintes notações:

$$\prod_{n=1}^{\infty} X_n \quad \text{ou} \quad \prod_{n\geqslant 1} X_n$$

Os elementos desse produto são as seqüências $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ tais que $x_n \in X_n$ para cada $n\in\mathbf{N}$.

Se $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, a família $(X_i)_{i \in I}$ é uma *seqüência finita* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de n partes de A, cujo produto cartesiano se indica por uma das seguintes notações:

$$\prod_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{ou} \qquad X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$$

Os elementos desse produto são todas as n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tais que $x_i \in X_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Neste caso, a cada função $f : I \longrightarrow A$ tal que $f(i) \in X_i$ para todo $i \in I$ corresponde a única n-upla $(f(1), f(2), \ldots, f(n))$, e vice-versa. Logo, no caso finito, a definição anterior coincide com aquela dada no Capítulo 8 para o produto cartesiano de n conjuntos.

Em particular, para $I = \{1\}$ e $I = \{1, 2\}$, temos:

$$\prod_{i \in I} X_i = X_1 \qquad \text{e}$$

$$\prod_{i \in I} X_i = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1 \quad \text{e} \quad x_2 \in X_2\}$$

No caso em que os n conjuntos fatores $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são iguais a um mesmo conjunto X, o produto cartesiano $X \times X \times \ldots \times X$ (n vezes) é o conjunto de todas as n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tais que $x_i \in X$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Este produto indica-se por X^n e denomina-se *potência cartesiana n-ésima de* X.

Exemplo — Suponhamos $I = \{1, 2\}$, $X_1 = \{a, b\}$ e $X_2 = \{c, d\}$. Então o produto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ é o conjunto de todas as funções:

$$f : \{1, 2\} \longrightarrow \{a, b, c, d\}$$

tais que $f(1) \in X_1$ e $f(2) \in X_2$. Estas funções são dadas pelas seguintes tabelas:

i	f(i)
1	a
2	c

i	f(i)
1	a
2	d

i	f(i)
1	b
2	c

i	f(i)
1	b
2	d

Por conseqüência, temos:

$$\prod_{i \in I} X_i = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\} = X_1 \times X_2$$

10. FUNÇÕES MONÓTONAS

Sejam A e B dois *conjuntos ordenados* por relações de ordem indicadas pelo mesmo símbolo $\leqslant$.

Definição 1 — Diz-se que uma função $f : A \longrightarrow B$ é *crescente* (resp., *decrescente*) se e somente se a relação $x \leqslant y$ em A implica a relação $f(x) \leqslant f(y)$ (resp., $f(x) \geqslant f(y)$) em B.

Se a função f é crescente ou decrescente, então diz-se que f é *monótona.*

Definição 2 — Diz-se que uma função $f : A \longrightarrow B$ é *estritamente crescente* (resp., *estritamente decrescente*) se e somente se a relação $x < y$ em A implica a relação $f(x) < f(y)$ (resp., $f(x) > f(y)$) em B.

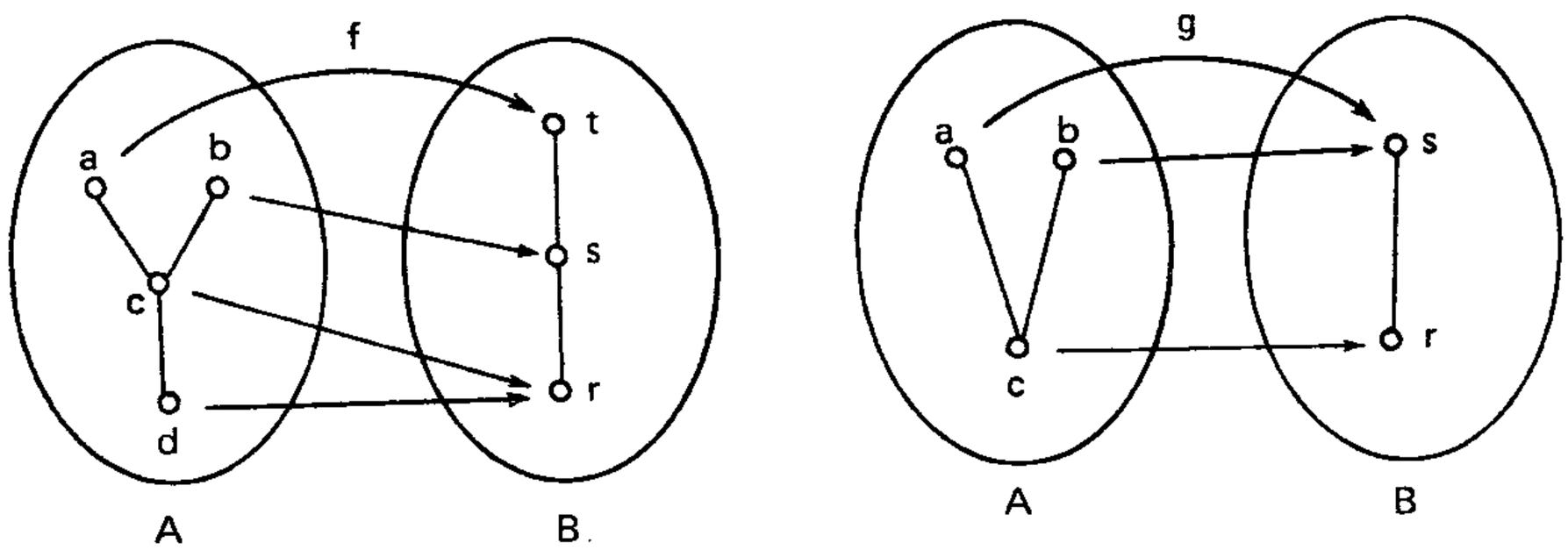
Se a função f é estritamente crescente ou estritamente decrescente, então diz-se que f é *estritamente monótona.*

Em particular, uma *seqüência* $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ de números reais diz-se *crescente* (resp., *decrescente*) se e somente se para todo inteiro natural n se tem $a_n \leqslant a_{n+1}$ (resp., $a_n \geqslant a_{n+1}$).

Analogamente, uma *seqüência* $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ de números reais diz-se *estritamente crescente* (resp., *estritamente decrescente*) se e somente se para todo inteiro natural n se tem $a_n < a_{n+1}$ (resp., $a_n > a_{n+1}$).

Exemplos:

1) As funções f e g de A em B definidas pelos diagramas abaixo são, respectivamente, crescente e estritamente crescente.



2) Seja E um conjunto. A função $f : X \longmapsto E - X$ de $\mathbf{P}(E)$ (ordenado por inclusão) em si mesmo é estritamente decrescente.

3) Seja E um conjunto ordenado. Para todo $x \in E$, seja U_x o conjunto dos $y \in E$ tais que $y \geqslant x$. A função $f : x \longmapsto U_x$ de E em $\mathbf{P}(E)$ (ordenado por inclusão) é estritamente decrescente.

E X E R C Í C I O S

1. Dado o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$, achar as *partes* X, Y, Z e T de A cujas *funções características* são:

$$C_X = (\{(a, 1), (b, 0), (c, 0), (d, 1)\}, A, \{0, 1\})$$

$$C_Y = (\{(a, 0), (b, 1), (c, 0), (d, 0)\}, A, \{0, 1\})$$

$$C_Z = (\{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\}, A, \{0, 1\})$$

$$C_T = (\{(a, 1), (b, 1), (c, 0), (d, 1)\}, A, \{0, 1\})$$

2. Sejam X e Y *partes* de A ($X, Y \subset A$). Demonstrar que, para todo x de A, se tem:

i) $C_X(x) = C_Y(x) \Longleftrightarrow X = Y$

ii) $C_{X \cap Y}(x) = C_X(x).C_Y(x)$

iii) $C_{X \cup Y}(x) = C_X(x) + C_Y(x) - C_X(x).C_Y(x)$

iv) $C_{X - Y}(x) = C_X(x) - C_{X \cap Y}(x)$

3. Dados o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, as *partes* de A:

$$X_1 = \{1, 2, 3\}, \quad X_2 = \{1, 5\}, \quad X_3 = \{2, 4, 5\}, \quad X_4 = \{3, 4\}$$

a *família* de partes de A com índices em $I = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$(X_i)_{i \in I} = (\{(1, X_1), (2, X_2), (3, X_3), (4, X_4)\}, I, \mathbf{P}(A))$$

e as *funções* de $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ em A seguintes:

$$f_1 = (\{(X_1, 1), (X_2, 2), (X_3, 3), (X_4, 4)\}, X, A)$$

$$f_2 = (\{(X_1, 1), (X_2, 1), (X_3, 4), (X_4, 4)\}, X, A)$$

$$f_3 = (\{(X_1, 2), (X_2, 1), (X_3, 4), (X_4, 3)\}, X, A)$$

$$f_4 = (\{(X_1, 3), (X_2, 5), (X_3, 1), (X_4, 3)\}, X, A)$$

indicar aquelas que são *funções de escolha* da família $(X_i)_{i \in I}$.

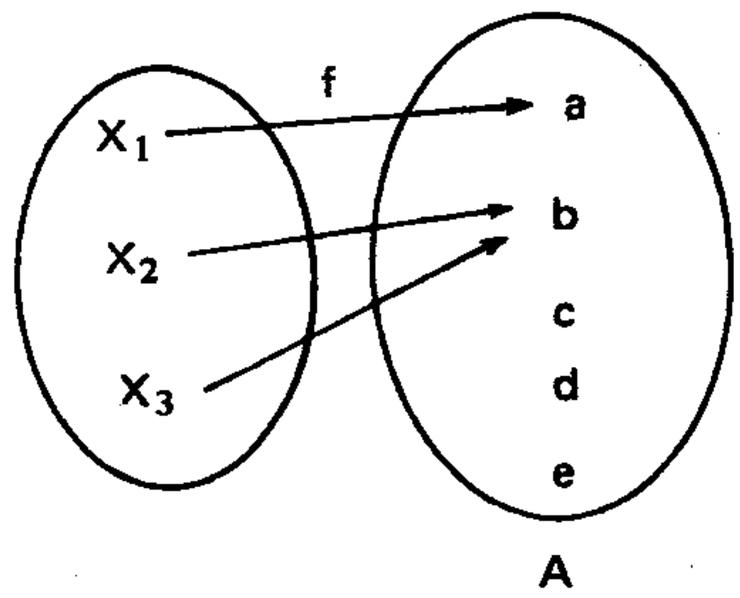
4. Dados o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$, as *partes* de A:

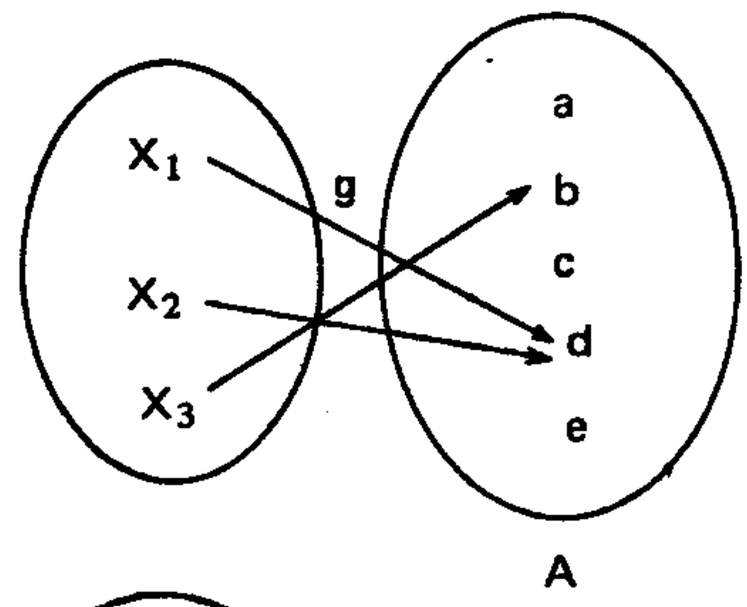
$$X_1 = \{a, b, d\}, \quad X_2 = \{c, d, e\}, \quad X_3 = \{b\}$$

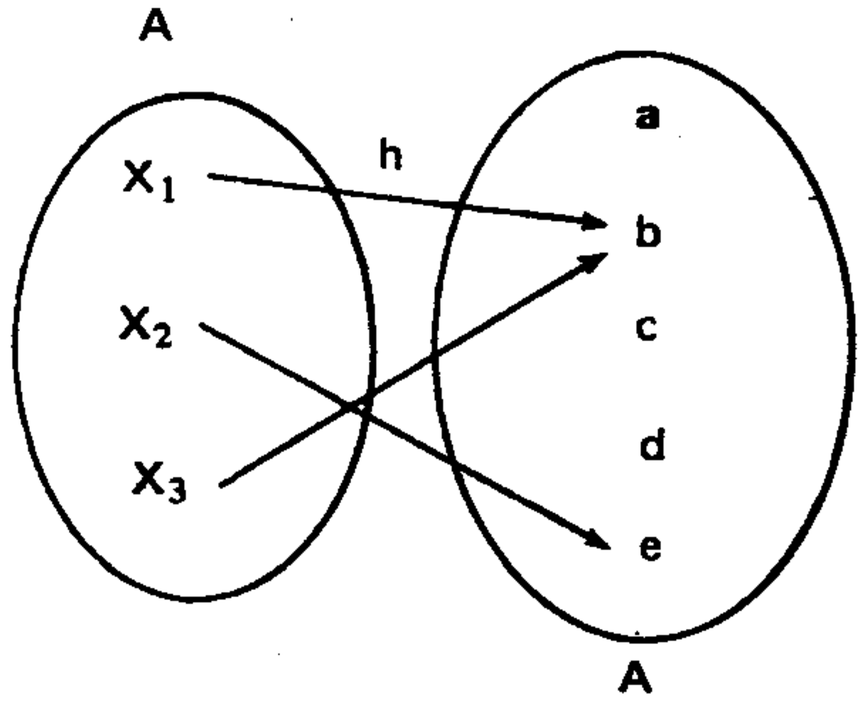
a *família* de partes de A com índices em $I = \{1, 2, 3\}$:

$$(X_i)_{i \in I} = (\{(1, X_1), (2, X_2), (3, X_3)\}, I, \mathbf{P}(A))$$

e as *funções* f, g e h de $\{X_1, X_2, X_3\}$ em A definidas pelos seguintes diagramas:







indicar aquelas que são *funções de escolha* da família $(X_i)_{i \in I}$.

5. Dados os conjuntos: $X_1 = \{1, 10\}$, $X_2 = \{2, 4, 6, 10\}$, $X_3 = \{3, 6, 9\}$, $X_4 = \{4, 8\}$ e $X_5 = \{5, 6, 10\}$, determinar:

   i) $\bigcap_{i \in I} X_i$ e $\bigcup_{i \in I} X_i$ sendo $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

   ii) $\bigcap_{i \in J} X_i$ e $\bigcup_{i \in J} X_i$ sendo $J = \{2, 3, 5\}$

6. Seja $X_n = \{x \mid x \text{ é múltiplo de } n\} = \{n, 2n, 3n, \ldots\}$, onde $n \in \mathbf{N}$. Determinar:

   i) $X_2 \cap X_7$, $X_6 \cap X_8$, $X_3 \cup X_{12}$ e $X_3 \cap X_{12}$;

   ii) $X_s \cup X_{st}$ e $X_s \cap X_{st}$, onde $s, t \in \mathbf{N}$.

7. Seja $X_i =]i, i + 1]$, onde $i \in \mathbf{Z}$. Determinar, com a notação de intervalo:

   i) $X_4 \cup X_5$ e $X_6 \cap X_7$;

   ii) $X_s \cup X_{s+1} \cup X_{s+2}$ com $s \in \mathbf{Z}$;

   iii) $\bigcup_{i=4}^{20} X_i$, $\bigcup_{i=0}^{15} X_{s+i}$ e $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} X_{s+i}$

8. Seja $X_i = [i, i+1]$, onde $i \in \mathbf{Z}$. Determinar:

i) $X_1 \cup X_2$ e $X_3 \cap X_4$; ii) $\bigcup_{i=7}^{18} X_i$ e $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} X_i$

9. Seja $X_n = \left]0, \frac{1}{n}\right[$, onde $n \in \mathbf{N}$. Determinar:

i) $X_3 \cup X_7$ e $X_3 \cap X_{20}$;

ii) $X_s \cup X_t$ e $X_s \cap X_t$;

iii) $\bigcap_{i \in \mathbf{N}} X_i$ e $\bigcup_{i \in J} X_i$, com $J \subset \mathbf{N}$.

10. Dados $X_n = \left]0, \frac{1}{n}\right]$ e $Y_n = \left[0, \frac{1}{n}\right[$, com $n \in \mathbf{N}$, determinar :

$$\bigcap_{i \in \mathbf{N}} X_i \quad \text{e} \quad \bigcap_{i \in \mathbf{N}} Y_i$$

11. Seja $X_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$, com $n \in \mathbf{N}$. Determinar:

$$\bigcup_{i \in \mathbf{N}} X_i \quad \text{e} \quad \bigcap_{i \in \mathbf{N}} X_i$$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. $X = \{a, d\}$; $Y = \{b\}$; $Z = \phi$; $T = \{a, b, d\}$

3. f_2 e f_3

4. g e h

5. i) ϕ ; $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$

   ii) $\{6\}$; $\{2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$

6. i) X_{14} , X_{24} , X_3 e X_{12} ;

   ii) X_s e X_{st}

7. i) $]4, 6]$ e ϕ ;

   ii) $]s, s + 3]$;

   iii) $]4, 21]$, $]s, s + 16]$ e $\mathbf{R}$

8. i) $[1, 3]$ e $\{4\}$;

   ii) $[7, 19]$ e $\mathbf{R}$

9. i) X_3 e X_{20} ;

   ii) X_m e X_M , sendo $m = \min(s, t)$ e $M = \max(s, t)$;

   iii) ϕ e X_j , sendo j o *menor elemento de* J.

10. ϕ e $\{0\}$

11. $[0, 1]$ e $\{0\}$

CAPÍTULO 18

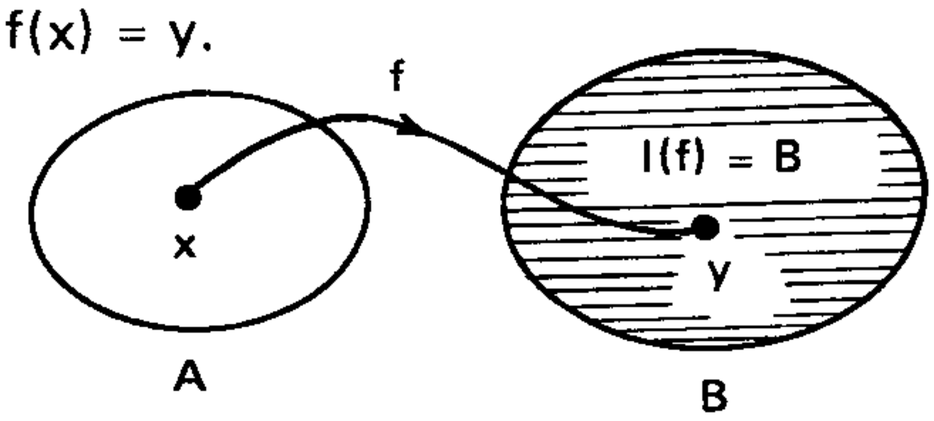
QUALIDADES DE UMA FUNÇÃO

1. São *qualidades* de uma função f de A em B ($f : A \longrightarrow B$) ser *sobrejetora, injetora* ou *bijetora,* que vamos definir.

2. FUNÇÃO SOBREJETORA

Definição — Uma função $f : A \longrightarrow B$ diz-se *sobrejetora* se e somente se para todo $y \in B$ existe ao menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Em outros termos, uma função $f : A \longrightarrow B$ é *sobrejetora* se e somente se a sua imagem $I(f) = f(A)$ coincide com o seu contradomínio $B(I(f) = f(A) = B)$.

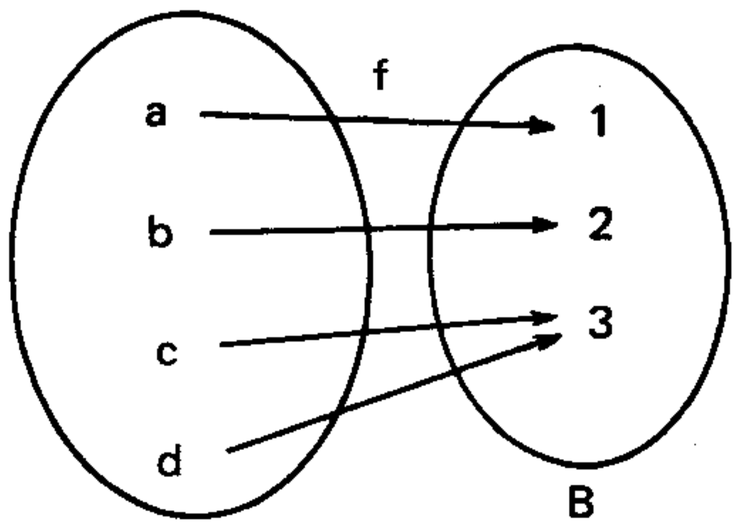


Simbolicamente, o fato de f *ser sobrejetora de* A *em* B exprime-se do seguinte modo:

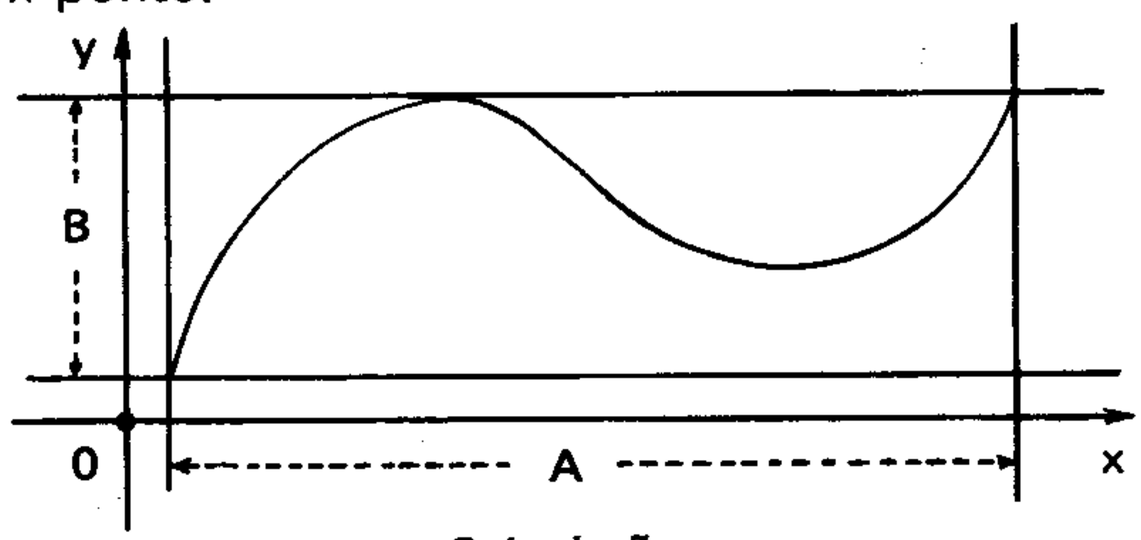
$$f \text{ é sobrejetora} \Longleftrightarrow [(\forall y)(y \in B) \Longrightarrow (\exists x)(x \in A \text{ e } f(x) = y)]$$

Quando uma função $f : A \longrightarrow B$ é sobrejetora, também se diz que f é uma *sobrejeção de* A *em* B ou que f é uma *função de* A *sobre* B.

Dada uma função sobrejetora $f : A \longrightarrow B$, na sua representação por um *diagrama sagital,* todo elemento de B é extremo de pelo menos uma flecha com origem num elemento de A, e na sua representação por um *gráfico cartesiano,* toda reta paralela ao eixo Ox que passa pelo ponto (0, y), qualquer que seja $y \in B$, corta o gráfico cartesiano em pelo menos um ponto.



Sobrejeção



Sobrejeção

Exemplos:

1) A função f de $A = \{a, b, c, d, e\}$ em $B = \{1, 2, 3\}$ seguinte:

$$f = (\{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 1), (e, 2)\}, A, B)$$

é sobrejetora, pois $I(f) = f(A) = \{1, 2, 3\} = B$.

2) A função $f : \mathbf{R}^* \longrightarrow \{-1, 1\}$ definida por $f(x) = \frac{x}{|x|}$ é *sobrejetora,* pois, temos:

i) $x > 0 \Longrightarrow |x| = x \Longrightarrow f(x) = \frac{x}{x} = 1$

ii) $x < 0 \Longrightarrow |x| = -x \Longrightarrow f(x) = \frac{x}{-x} = -1$

Portanto: $I(f) = f(\mathbf{R}^*) = \{-1, 1\}$.

3) A função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2$ *não é sobrejetora,* porque $I(f) = f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_+ \neq \mathbf{R}$.

4) A função $f : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$ *não é sobrejetora,* porque $I(f) = f([0, \frac{\pi}{2}]) = [0, 1] \neq \mathbf{R}$.

5) A função $f : x \longmapsto 3x - 4$ de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$ é *sobrejetora,* pois para todo $y \in \mathbf{R}$:

$$3x - 4 = y \Longrightarrow x = \frac{1}{3}(y + 4) \in \mathbf{R}$$

6) A função $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ assim definida:

$$f(x) = x + 1, \text{ para } x \text{ par}$$

$$f(x) = x - 1, \text{ para } x \text{ ímpar}$$

é *sobrejetora.* Com efeito, dado um número natural y, par, então $y + 1$ é ímpar, e temos $f(y + 1) = y$; se, ao invés, y é ímpar, então $y - 1$ é par, e temos $f(y - 1) = y$.

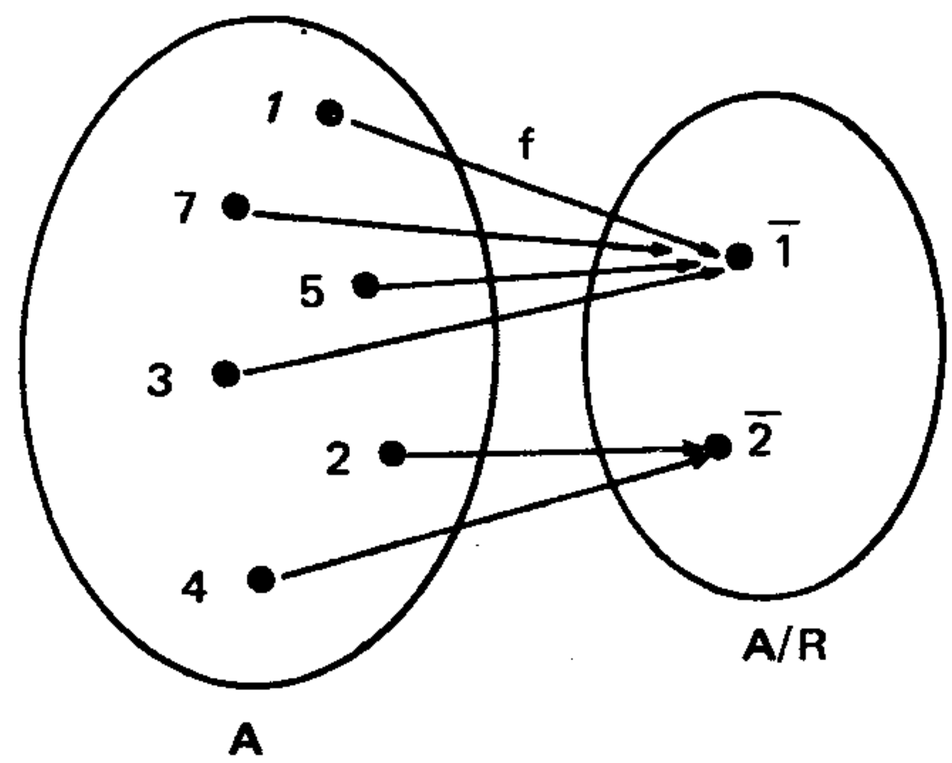
7) Seja $\mathbf{P}(A)$ o conjunto das partes de A. A função $f : X \longmapsto C_A X$, de $\mathbf{P}(A)$ em si mesmo, que associa a toda parte X de A o seu *complemento* $C_A X$, é *sobrejetora,* porque, para todo $Y \in \mathbf{P}(A)$, a equação $C_A X = Y$ admite a solução $X = C_A Y$, isto é, todo $Y \in \mathbf{P}(A)$ é imagem de um $X \in \mathbf{P}(A)$.

8) Seja R uma *relação de equivalência* sobre um conjunto A e seja A/R o *conjunto quociente* de A pela R. A função $f : x \longmapsto \bar{x}$ de A em A/R que associa a todo elemento x de A a *classe de equivalência* $\bar{x}$ à qual pertence x, é *sobrejetora,* e recebe o nome de *sobrejeção canônica de* A *em* A/R.

Assim, p. ex., se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ e R é a relação de equivalência em A definida por

$$xRy \Longleftrightarrow \text{x e y são da mesma paridade}$$

temos: $A/R = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ e $I(f) = f(A) = A/R$.



3. FUNÇÃO INJETORA

Definição — Uma função $f : A \longrightarrow B$ diz-se *injetora* se e somente se dois elementos distintos quaisquer x_1 e x_2 de A têm sempre imagens também distintas pela f.

Portanto, uma função injetora $f : A \longrightarrow B$ *transforma* elementos distintos de A em elementos também distintos de B.

Simbolicamente, o fato de f ser uma função injetora de A em B exprime-se do seguinte modo:

$$f \text{ é injetora} \Longleftrightarrow [(\forall x_1)(\forall x_2)(x_1, x_2 \in A \text{ e } x_1 \neq x_2) \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$$

ou, sob forma equivalente:

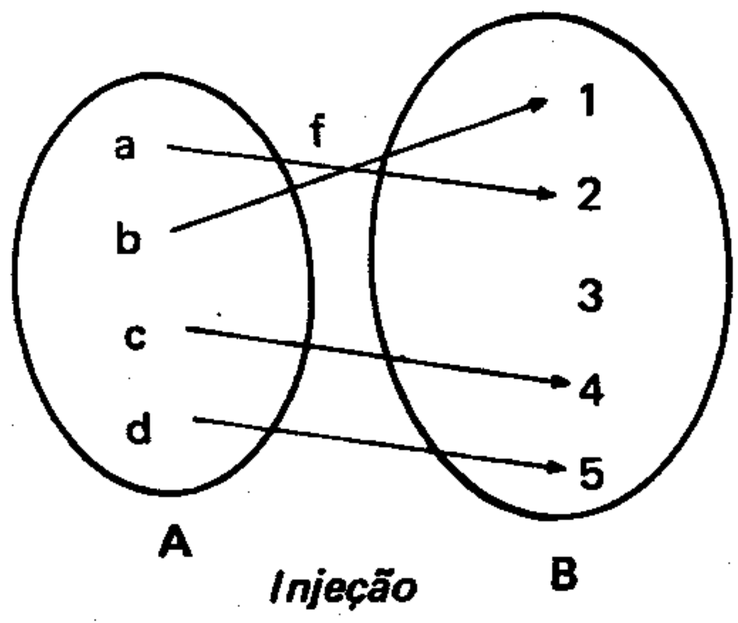
$$f \text{ é injetora} \Longleftrightarrow [(\forall x_1)(\forall x_2)(x_1, x_2 \in A \text{ e } f(x_1) = f(x_2)) \Longrightarrow x_1 = x_2]$$

Em outros termos, uma função $f : A \longrightarrow B$ é *injetora* se e somente se para todo elemento y de B existe, no máximo, um elemento x de A tal que $f(x) = y$, isto é, para todo $y \in B$, a imagem inversa $f^{-1}(y)$ é um conjunto unitário ou é vazia:

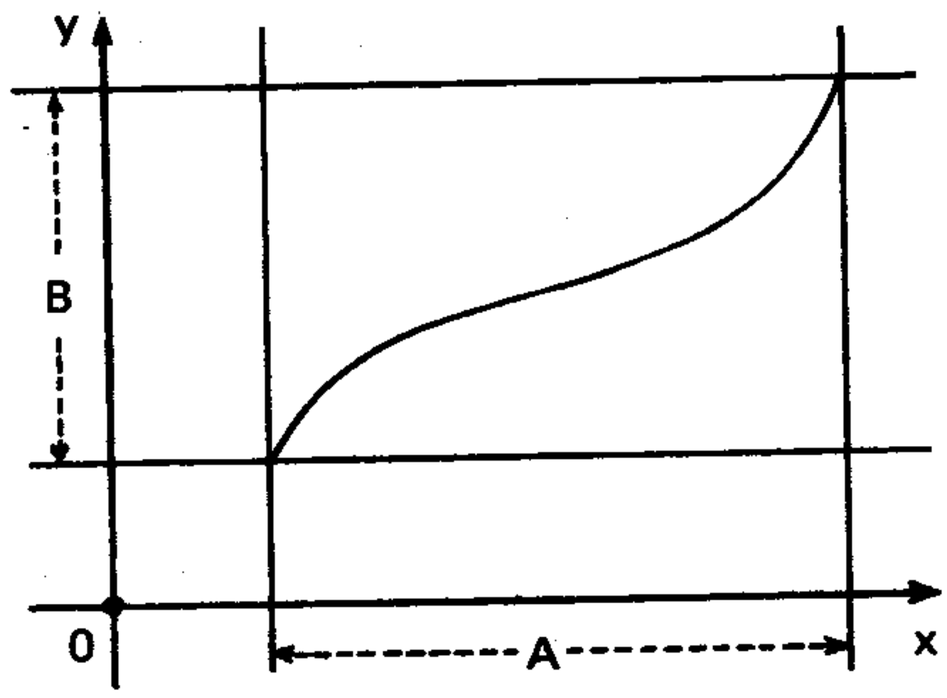
$$f \text{ é injetora} \Longleftrightarrow [(\forall y)(y \in B) \Longrightarrow (f^{-1}(y) = \{x\}(x \in A) \text{ ou } f^{-1}(y) = \phi)]$$

Quando uma função $f : A \longrightarrow B$ é injetora também se diz que f é uma *injeção* de A em B.

Dada uma função injetora $f : A \longrightarrow B$, na sua representação por um *diagrama sagital,* cada elemento de B é o extremo de, no máximo, uma flecha com origem num elemento de A, e na sua representação por um *gráfico cartesiano,* toda reta paralela ao eixo Ox que passa pelo ponto (0, y), com $y \in B$, não corta o gráfico cartesiano ou o corta num único ponto.



Injeção



Injeção

Exemplos:

1) A função f de $A = \{a, b, c\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4\}$ seguinte:

$$f = (\{(a, 4), (b, 2), (c, 1)\}, A, B)$$

é *injetora,* pois os elementos distintos de A estão *transformados* em elementos também distintos de B.

2) A função $f : x \longmapsto x^2$ de **Z** em **Z** *não é injetora,* porque, para $x \neq 0$, temos $f(x) = f(-x) = x^2$ e $x \neq -x$.

Observe-se que esta mesma função também *não é sobrejetora,* isto é, uma função não é necessariamente injetora ou sobrejetora (em geral não é uma coisa nem outra).

3) A função $f : x \longmapsto x^3$ de **R** em **R** é *injetora,* porque

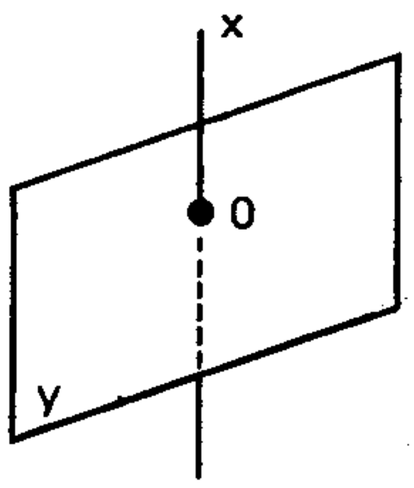
$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow x_1^3 \neq x_2^3 \ , \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{R}$$

4) A função $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ definida por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbf{N}$ e $a \neq 0$, é *injetora,* pois temos:

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \Longrightarrow ax_1 = ax_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

5) Uma *função constante,* cujo domínio consta de mais de um elemento *não é injetora,* porque todos os elementos do domínio têm a mesma imagem.

6) Seja E o conjunto das retas que passam por um ponto O do espaço e seja F o conjunto dos planos do espaço.



A toda reta $x \in E$ associemos o plano $y \in F$ que é perpendicular em O à reta x. Obtemos, desta maneira, uma função f de E em F, que é *injetora,* pois duas retas distintas x_1 e x_2 de E têm sempre para imagens dois planos também distintos y_1 e y_2 de F.

7) Seja P o *conjunto de todos os países do mundo* e seja C o *conjunto de todas as cidades do mundo.*

A função $f : P \longrightarrow C$ que a cada país associa a sua *capital* é *injetora,* porque dois países diferentes têm capitais também diferentes, isto é, nenhuma cidade é a capital de dois países diferentes.

A imagem $I(f) = f(P)$ desta função é o conjunto de todas as cidades que são capitais de algum país, e como existem cidades (elementos de C) que não são capitais de nenhum país, segue-se que $f(P) \neq C$, e por conseguinte a função f *não é sobrejetora.*

8) Seja A um conjunto. A função $f : x \longmapsto (x, x)$ de A em $A \times A$ é uma função *injetora,* denominada *função diagonal de* A.

4. FUNÇÃO BIJETORA

Definição – Uma função $f : A \longrightarrow B$ diz-se *bijetora* se e somente se f é ao mesmo tempo sobrejetora e injetora.

Em outros termos, uma função $f : A \longrightarrow B$ é *bijetora* se e somente se para todo $y \in B$ existe um *único* $x \in A$ tal que $f(x) = y$, isto é, para todo $y \in B$ a imagem inversa $f^{-1}(y)$ é um conjunto unitário. Portanto, simbolicamente:

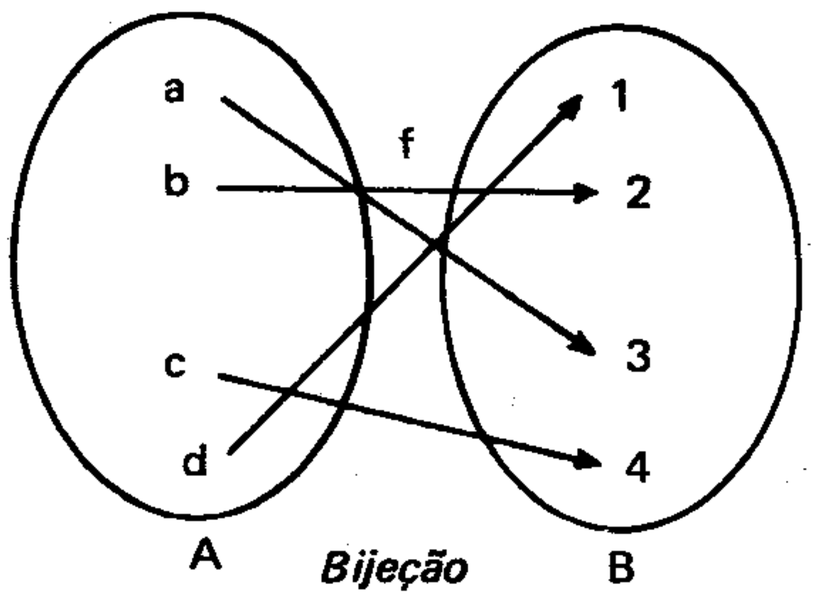
$$f \text{ é bijetora} \Longleftrightarrow [(\forall y)(y \in B) \Longrightarrow (\exists! x)(x \in A \text{ e } f(x) = y)]$$

ou, sob forma equivalente:

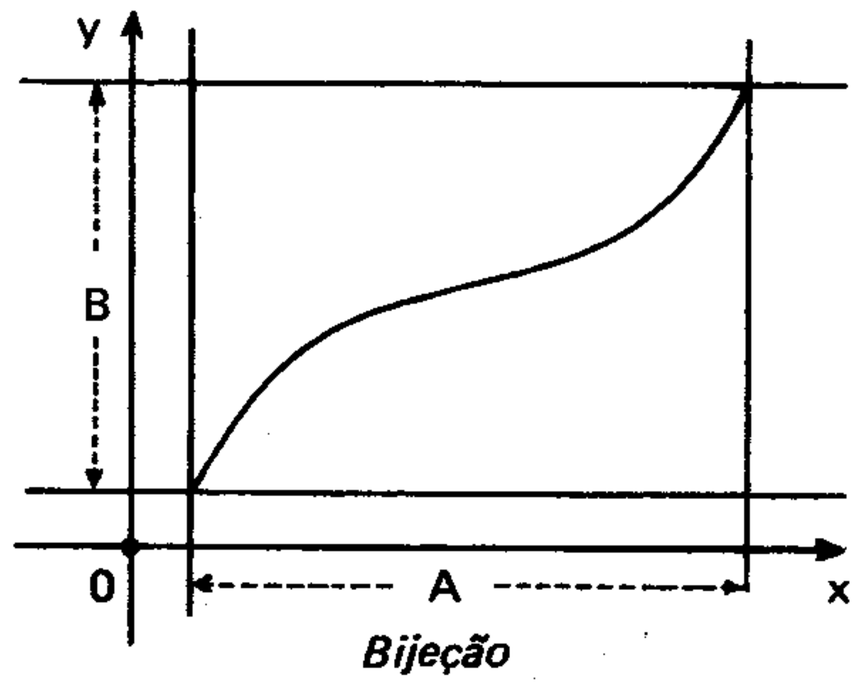
$$f \text{ é bijetora} \Longleftrightarrow [(\forall y)(y \in B) \Longrightarrow (f^{-1}(y) = \{x\} \text{ e } x \in A)]$$

Quando uma função $f : A \longrightarrow B$ é bijetora, também se diz que f é uma *bijeção de* A *em* B.

Dada uma função bijetora $f : A \longrightarrow B$, na sua representação por um *diagrama sagital,* todo elemento de B é o extremo de uma única flecha com origem num elemento de A, e na sua representação por um *gráfico cartesiano,* toda reta paralela ao eixo Ox que passa pelo ponto (0, y), qualquer que seja $y \in B$, corta o gráfico cartesiano num *único* ponto.



Bijeção



Bijeção

Exemplos:

1) A função f de $A = \{a, b, c\}$ em $B = \{1, 2, 3\}$ seguinte:

$$f = (\{(a, 3), (b, 1), (c, 2)\}, A, B)$$

é *bijetora*, pois cada um dos elementos de B é a imagem pela f de um único elemento de A

Observe-se que a *relação recíproca* desta função f:

$$f^{-1} = (\{(3, a), (1, b), (2, c)\}, B, A)$$

também é uma *função bijetora de* B *em* A.

2) A função $f : x \longmapsto x^2$ de $\mathbf{R}_+$ em $\mathbf{R}_+$ é *bijetora,* pois todo número real não negativo tem uma e somente uma raiz quadrada em $\mathbf{R}_+$.

3) A função $f : x \longmapsto x^3$ de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$ é *bijetora,* pois todo número real tem uma e somente uma raiz cúbica real.

4) A função $f : x \longmapsto x - 4$ de $\mathbf{Z}$ em $\mathbf{Z}$ é *bijetora,* porque todo $y \in \mathbf{Z}$ é a imagem pela f do *único* elemento $x = 4 + y$ de $\mathbf{Z}$.

5) A *função idêntica de* A, I_A, é *bijetora,* qualquer que seja o conjunto A.

6) Seja A um conjunto e seja D_A a *diagonal* de $A \times A$. A função $f : x \longmapsto (x, x)$ de A em D_A é *bijetora,* obviamente.

7) Qualquer que seja o conjunto A e o elemento b, a função $f : x \longmapsto (x,b)$ de A em $A \times \{b\}$ é *bijetora,* obviamente.

8) Seja E o conjunto das retas que passam por um ponto O do espaço e seja F o conjunto dos planos que passam por O.

A toda reta $x \in E$ associemos o plano $y \in F$ que lhe é *perpendicular.* Obtemos, assim, uma função $f : x \longmapsto y$ de E em F, que é: (i) *sobrejetora,* pois todo plano

y que passa por O é perpendicular a uma reta x que passa 0; (ii) *injetora,* pois as duas retas distintas x_1 e x_2 de E correspondem dois planos também distintos y_1 e y_2 de F.

Logo, a função f é uma *bijeção de* E *em* F.

NOTA — Sejam A e B conjuntos *finitos* e seja f uma função de A em B. Denotando por n(A), n(B) e n(f(A)) o número de elementos dos conjuntos A, B e f(A), temos as propriedades imediatas seguintes:

i) f é sobrejetora $\Longrightarrow n(A) \geqslant n(B) = n(f(A))$

ii) f é injetora $\Longrightarrow n(A) \leqslant n(B) \geqslant n(f(A))$

iii) f é bijetora $\Longrightarrow n(A) = n(B) = n(f(A))$

5. FUNÇÃO INVERSA DE UMA FUNÇÃO BIJETORA

Teorema — Seja $f = (F, A, B)$ uma função. A relação recíproca $f^{-1} = (F^{-1}, B, A)$ de f é uma função se e somente se f é bijetora.

Dem.:

i) Com efeito, se f^{-1} é uma *função,* seu *conjunto de partida* B é igual ao seu *domínio,* isto é, $B = pr_1F^{-1}$. E como $pr_1F^{-1} = pr_2F$, temos $pr_2F = B$, e isto prova ser a função f *sobrejetora.*

Por outra parte, sejam x e y dois elementos de A tais que $f(x) = f(y)$. Então, $(x, f(x)) \in F$ e $(y, f(y)) \in F$, isto é, $(f(x), x) \in F^{-1}$ e $(f(y), y) \in F^{-1}$. Mas, sendo f^{-1} uma função, segue-se que $x = y$, e isto prova ser a função f *injetora.*

Fica assim provado que, se f^{-1} é uma função, a função f é sobrejetora e injetora, isto é, *bijetora.*

ii) Reciprocamente, se f é *bijetora,* também é sobrejetora, e temos $pr_2F = B$. E como $pr_2F = pr_1F^{-1}$, resulta que $pr_1F^{-1} = B$, isto é, o *domínio de* f^{-1} *coincide com o seu conjunto de partida.*

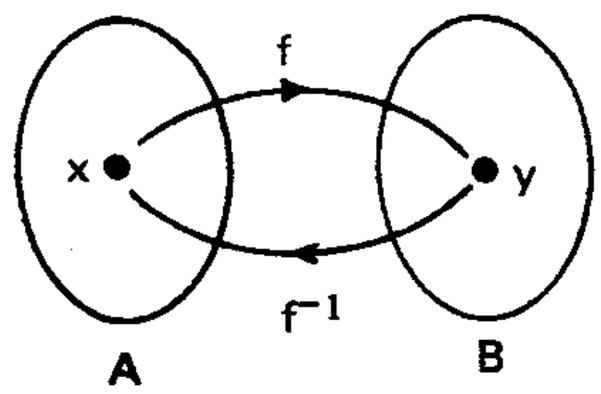
Por outra parte, se x_1 e x_2 são os correspondentes de algum $y \in B$ por f^{-1}, isto é, $(y, x_1) \in F^{-1}$ e $(y, x_2) \in F^{-1}$, então $(x_1, y) \in F$ e $(x_2, y) \in F$. Mas, sendo f bijetora, resulta que $x_1 = x_2$, e isto prova ser F^{-1} *um grafo funcional.*

Fica assim provado que, se a função f é bijetora, a relação recíproca f^{-1} de f é uma função.

Este teorema nos mostra que, para toda função bijetora $f = (F, A, B)$, a relação recíproca $f^{-1} = (F^{-1}, B, A)$ de f é uma função de B em A, o que justifica a seguinte *definição:*

Chama-se *função inversa* ou *função recíproca* de uma função bijetora $f = (F, A, B)$ a função $f^{-1} = (F^{-1}, B, A)$ de B em A.

Obviamente, a função inversa f^{-1} é bijetora e tal que $f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y$. Portanto:



$$f^{-1} = (\{(y, x) \mid f(x) = y\}, B, A)$$

Como toda função bijetora, $f^{-1} = (F^{-1}, B, A)$ possui uma função inversa $(f^{-1})^{-1}$, que é a própria função f, pois temos: $(f^{-1})^{-1} = ((F^{-1})^{-1}, A, B) = (F, A, B) = f$.

Toda função bijetora $f = (F, A, B)$ e a sua função inversa $f^{-1} = (F^{-1}, B, A)$ estabelecem uma *correspondência biunívoca* entre os conjuntos A e B. Também se diz que os conjuntos A e B estão em *correspondência biunívoca* por essas funções.

Exemplos:

1) Seja a função bijetora f de $A = \{a, b, c, d\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4\}$ seguinte:

$$f = (\{(a, 4), (b, 3), (c, 1), (d, 2)\}, A, B)$$

A *função inversa de* f é a função bijetora f^{-1} de B em A seguinte:

$$f^{-1} = (\{(4, a), (3, b), (1, c), (2, d)\}, B, A)$$

2) Seja a função bijetora $f : x \longmapsto 3x - 5$ de **R** em **R**. Denotando por y a imagem de x pela f, temos:

$$y = f(x) = 3x - 5 \qquad \therefore \qquad x = \frac{1}{3}(y + 5)$$

E como x é a imagem de y pela função inversa $f^{-1} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, isto é, $f^{-1}(y) = x$, temos:

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(y + 5)$$

Com a notação habitual, a letra x representando a variável independente, a função inversa de f é a função f^{-1} de **R** em **R** definida por

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 5)$$

3) Seja a função f de $\mathbf{R} - \{3\}$ em $\mathbf{R} - \{1\}$ definida por $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 3}$.

Esta função é bijetora, porque todo elemento y de $\mathbf{R} - \{1\}$ é a imagem pela f do único elemento $x = \dfrac{3y - 2}{y - 1}$ de $\mathbf{R} - \{3\}$. Logo, *existe* a função inversa $f^{-1} : \mathbf{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbf{R} - \{3\}$ definida por $f^{-1}(x) = \dfrac{3x - 2}{x - 1}$.

6. PERMUTAÇÃO DE UM CONJUNTO

Definição — Chama-se *permutação* de um conjunto A a toda bijeção f de A em si mesmo.

A toda permutação f corresponde uma *permutação inversa* f^{-1}.

Indica-se por P_A o conjunto de todas as permutações de A, e no caso particular em que $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, usa-se a notação P_n.

A permutação f de $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ definida por $f(j) = a_j$, $(1 \leqslant j \leqslant n)$ indica-se do seguinte modo:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

Exemplos:

1) A função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = ax + b\ (a \neq 0)$ é uma *permutação de* $\mathbf{R}$ $(f \in P_{\mathbf{R}})$. A *permutação inversa* é a função $f^{-1} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \dfrac{(x - b)}{a}$

2) Uma *permutação do conjunto* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ é:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

tal que $f \in P_5$ e $f(1) = 4$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$, $f(4) = 5$, $f(5) = 2$.

Trocando de lugar as duas linhas de f, obtemos a *permutação inversa de* f:

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

3) A *função idêntica* I_A *de* A é uma *permutação de* A, denominada *permutação idêntica de* A.

4) A função $f : X \longmapsto C_A X$ de $\mathbf{P}(A)$ em si mesmo que a cada *parte* X de A associa o seu complemento em A é uma *permutação* do conjunto $\mathbf{P}(A)$ das partes de A.

7. INVOLUÇÃO

Definição — Chama-se *involução de um conjunto* A uma permutação de A que coincide com sua própria inversa.

Simbolicamente: f involutória $\Longleftrightarrow f \in P_A$ e $f = f^{-1}$.

Exemplo — A função $f : X \longrightarrow C_A X$ de $\mathbf{P}(A)$ em si mesmo é uma *involução de* $\mathbf{P}(A)$, conjunto das partes de A.

8. EQUAÇÕES COM UMA INCÓGNITA

Consideremos uma função $f : A \longrightarrow B$ e seja b um elemento de $B (b \in B)$.

Definição — Chama-se *equação* na *incógnita* x a sentença aberta em A:

$$f(x) = b \qquad (1)$$

que é *verdadeira* para todos os elementos x de A cujas imagens pela f são o elemento b de B, isto é, *verdadeira* para todos os $x \in A$ e tais que $x \in f^{-1}(b)$, e que é *falsa* para todos os outros elementos de A.

Os elementos x de A que pertencem à imagem inversa $f^{-1}(b)$ dizem-se as *soluções* ou *raízes* da equação (1). Além disso, o conjunto $f^{-1}(b)$ de tais elementos denomina-se *conjunto-solução* S da equação (1) e determiná-lo é o que se chama *resolver* a equação (1) em A.

No caso particular em que o conjunto-solução S é *vazio* ($S = \phi$), a equação (1) não possui solução alguma em A e diz-se que é *impossível* em A.

Consoante a *qualidade* da função f, a equação $f(x) = b$ tem as seguintes propriedades:

(P_1) f *é qualquer* — A equação $f(x) = b$ tem *ao menos* uma solução em A se $b \in f(A)$ e *nenhuma* solução em A se $b \notin f(A)$.

(P_2) f *é sobrejetora* — Para todo $b \in B$, a equação $f(x) = b$ tem *ao menos* uma solução em A.

(P_3) f *é injetora* — Para todo $b \in B$, a equação $f(x) = b$ tem, *no máximo*, uma solução em A (uma *única* solução em A se $b \in f(A)$ e *nenhuma* solução em A se $b \notin f(A)$).

(P_4) f *é bijetora* — Para todo $b \in B$, a equação $f(x) = b$ tem uma *única* solução em A.

Reciprocamente, se, para todo $b \in B$, a equação $f(x) = b$ tem em A *ao menos* uma solução, *no máximo* uma solução ou uma *única* solução, então, a função f é, por definição, sobrejetora, injetora e bijetora, respectivamente.

Exemplos:

1) Consideremos a *função constante* $f : x \longmapsto k$ de A em B.

Para a equação $f(x) = k$, o conjunto-solução $S = A$, isto é, todo elemento de A é solução desta equação; e para a equação $f(x) = b\ (b \neq k)$, o conjunto-solução $S = \phi$, isto é, esta equação é *impossível* em A.

2) Seja $C_X : A \longrightarrow \{0, 1\}$ a *função característica* de uma *parte* dada X de A.

Para a equação $C_X(x) = 1$, temos $S = X$, e para a equação $C_X(x) = 0$, temos $S = A - X = C_A X$.

3) Resolver em $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ as equações $f(x) = 2$ e $f(x) = 3$, sendo f a função de A em **N** definida por $f(x) = \text{mdc}\,(2, x)$.

Temos:

$$f(1) = f(3) = f(5) = 1$$

$$f(2) = f(4) = f(6) = 2$$

Logo, para a equação $f(x) = 2$, o conjunto-solução $S = \{2, 4, 6\}$, isto é, são *soluções* desta equação os elementos 2, 4 e 6 de A.

Para a equação $f(x) = 3$, o conjunto-solução $S = \phi$, isto é, esta equação é *impossível* em A.

Observe-se que, se f é a função de **N** em **N** tal que $f(x) = \text{mdc}\,(2, x)$, então, todos os números naturais pares são soluções da equação $f(x) = 2$, isto é, o conjunto-solução desta equação é $S' = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, diferente do anterior $S = \{2, 4, 6\}$, o que mostra ser importante precisar o conjunto no qual a equação deve ser resolvida.

9. ISOMORFISMO DE CONJUNTOS ORDENADOS

Sejam A e B dois *conjuntos ordenados* por relações de ordem indicadas pelo mesmo símbolo $\leqslant$, e seja $f : A \longrightarrow B$ uma *função bijetora de* A *em* B.

Definição — Diz-se que f é um *isomorfismo de* A *em* B se e somente se, quaisquer que sejam x e y em A, se tem:

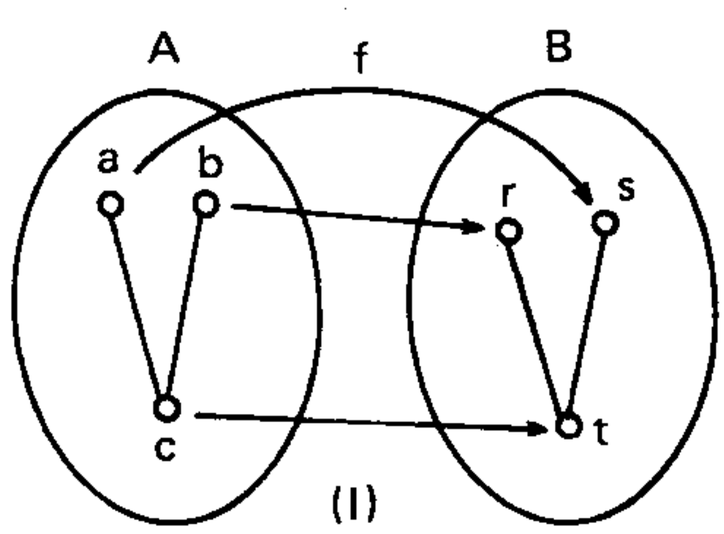
$$x \leqslant y \Longleftrightarrow f(x) \leqslant f(y) \qquad (1)$$

Quando existe um tal isomorfismo de A em B, então diz-se que A *é isomorfo a* B, o que se indica pela notação "$A \simeq B$".

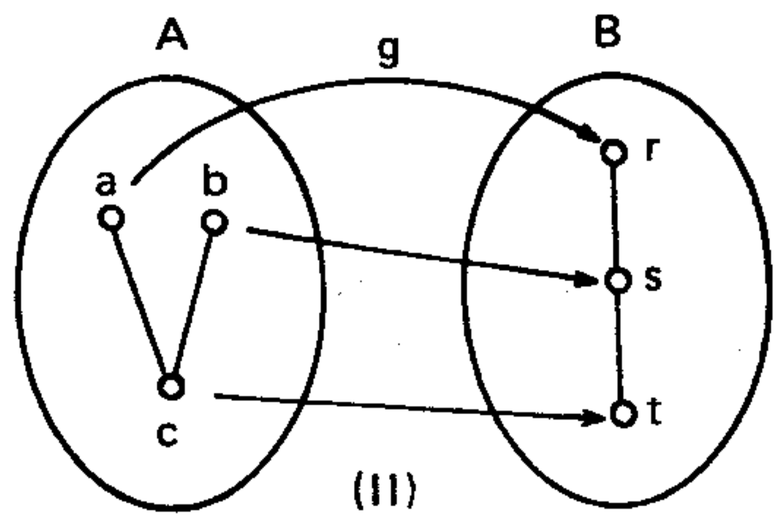
A equivalência (1) nos mostra que existe entre os elementos de dois conjuntos isomorfos uma correspondência biunívoca que preserva a relação de ordem.

Exemplos:

1) A função $f : A \longrightarrow B$ definida pelo diagrama I é um *isomorfismo de* A *em* B, mas a função $g : A \longrightarrow B$ definida pelo diagrama II *não é um isomorfismo de* A *em* B, pois $f(b) < f(a)$, mas a e b não são comparáveis.

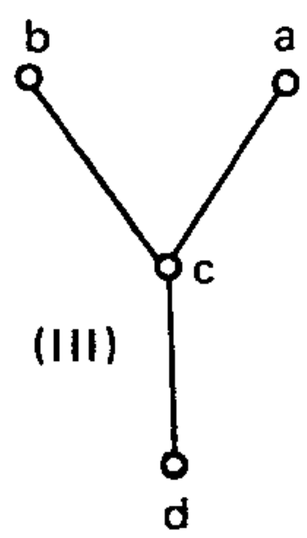


(I)

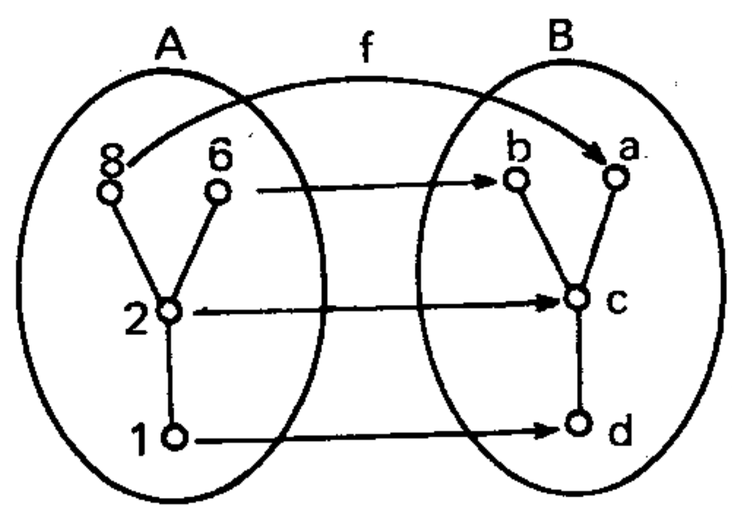


(II)

2) Consideremos os conjuntos $A = \{1, 2, 6, 8\}$, ordenado pela relação de divisibilidade "$x \mid y$", e $B = \{a, b, c, d\}$ ordenado pelo diagrama III.



(III)



(IV)

A função $f : A \longrightarrow B$ definida pelo diagrama IV é um *isomorfismo de* A em B, isto é, A *é isomorfo a* B ($A \simeq B$).

A função $g = (\{(1, d), (2, c), (6, a), (8, b)\}, A, B)$ também é um *isomorfismo de* A *em* B.

3) O conjunto $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dos números naturais é *isomorfo* ao conjunto $\mathbf{P} = \{2, 4, 6, \ldots\}$ dos números naturais pares ($\mathbf{N} \simeq P$), porque a função $f : \mathbf{N} \longrightarrow P$ definida por $f(x) = 2x$ é um *isomorfismo de* **N** *em* P.

4) A função idêntica de A, $I_A : A \longrightarrow A$ é um isomorfismo de A em si mesmo, porque I_A é bijetora e, além disso, se $I_A(x) = x$ e $I_A(y) = y$, então:

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow I_A(x) \leqslant I_A(y)$$

Assim sendo, temos $A \simeq A$, isto é, *todo conjunto ordenado é isomorfo a si mesmo.*

E X E R C Í C I O S

1. Mostrar que a função f de $A = [-1, 1]$ em A, definida por $f(x) = x^3$, é sobrejetora.

2. Mostrar que a função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}_+$, definida por $f(x) = x + |x|$, é sobrejetora.

3. Mostrar que a função f de $A = [-1, 1]$ em A, definida por $f(x) = x^2$, não é sobrejetora.

4. A função $f : \mathbf{R} \longrightarrow X$, definida por $f(x) = x^2 + 3$, é sobrejetora. Determinar o conjunto X.

5. Determinar todas as *sobrejeções* de $A = \{a, b, c\}$ em $B = \{1, 2\}$.

6. Mostrar que a função $f : [-3, -1] \longrightarrow \mathbf{R}$, definida por $f(x) = x^2$, é injetora.

7. Mostrar que a função $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}_+$, definida por $f(x) = x^2$, não é injetora.

8. Determinar o intervalo I, de amplitude a maior possível, de modo que a função $f : x \longmapsto x^2$ de I em $\mathbf{R}$ seja injetora.

9. Determinar todas as *injeções* de $A = \{a, b\}$ em $B = \{1, 2, 3\}$.

10. Mostrar que é bijetora a função $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbf{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{x}{(1 - |x|)}$.

11. Determinar todas as *bijeções* de $A = \{a, b, c\}$ em $B = \{1, 2, 3\}$.

12. Determinar a *função inversa* da função bijetora $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 5$.

13. Determinar a *função inversa* da função bijetora:

$$f : x \longmapsto f(x) = \frac{x - 1}{x + 1} \text{ de } \mathbf{R} - \{-1\} \text{ em } \mathbf{R} - \{1\}$$

14. Seja a permutação f do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ seguinte:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

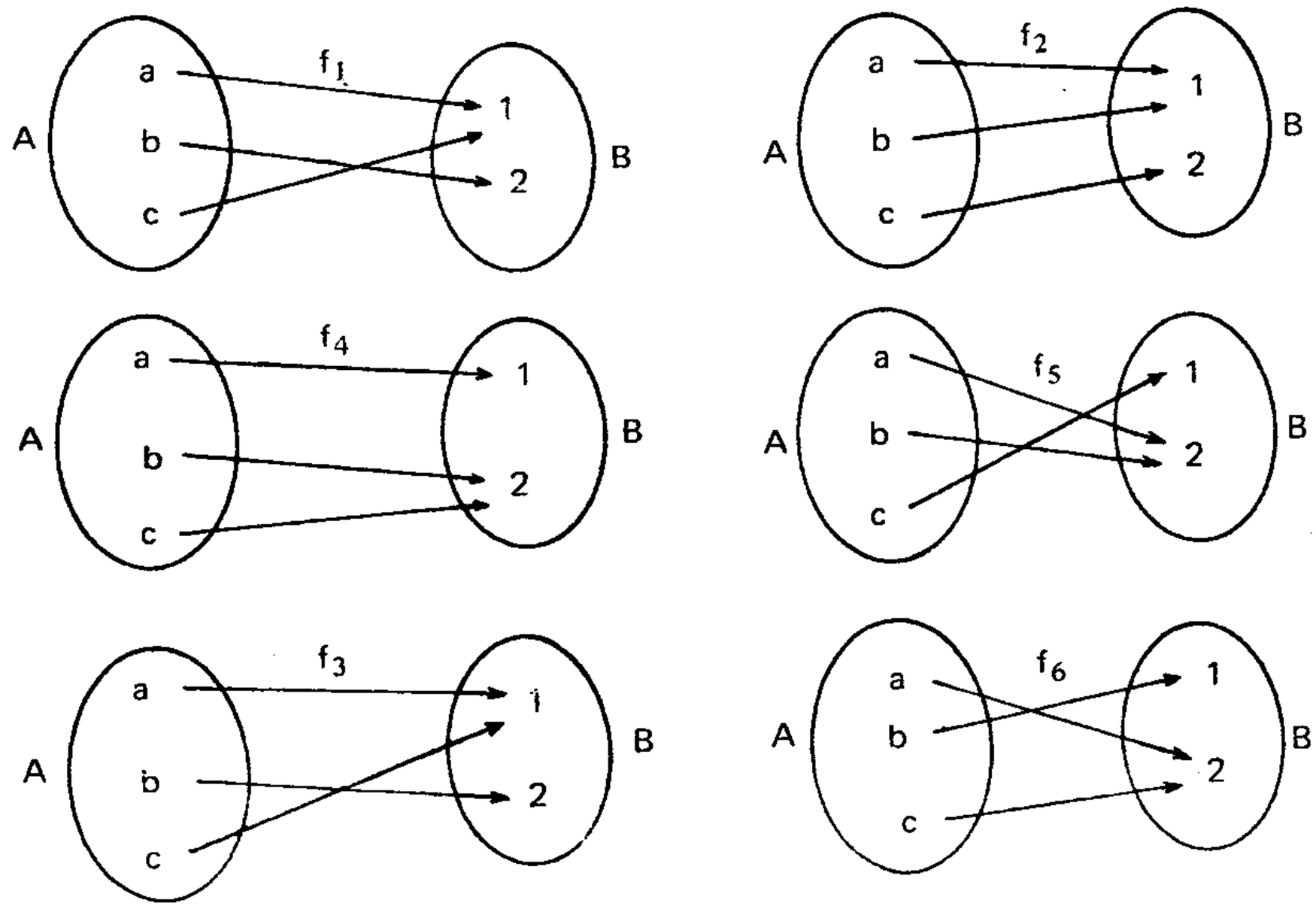
Determinar: $f(\{1, 3\})$, $f(\{1\}) \cup f(\{2\})$, $f^{-1}(\{2, 3, 4\})$ e a permutação inversa f^{-1}.

15. Resolver em $A = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ a equação $f(x) = 10$, sendo f a função de A em **N** definida por $f(x) = \text{mdc}(2, x) + \text{mmc}(8, x)$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

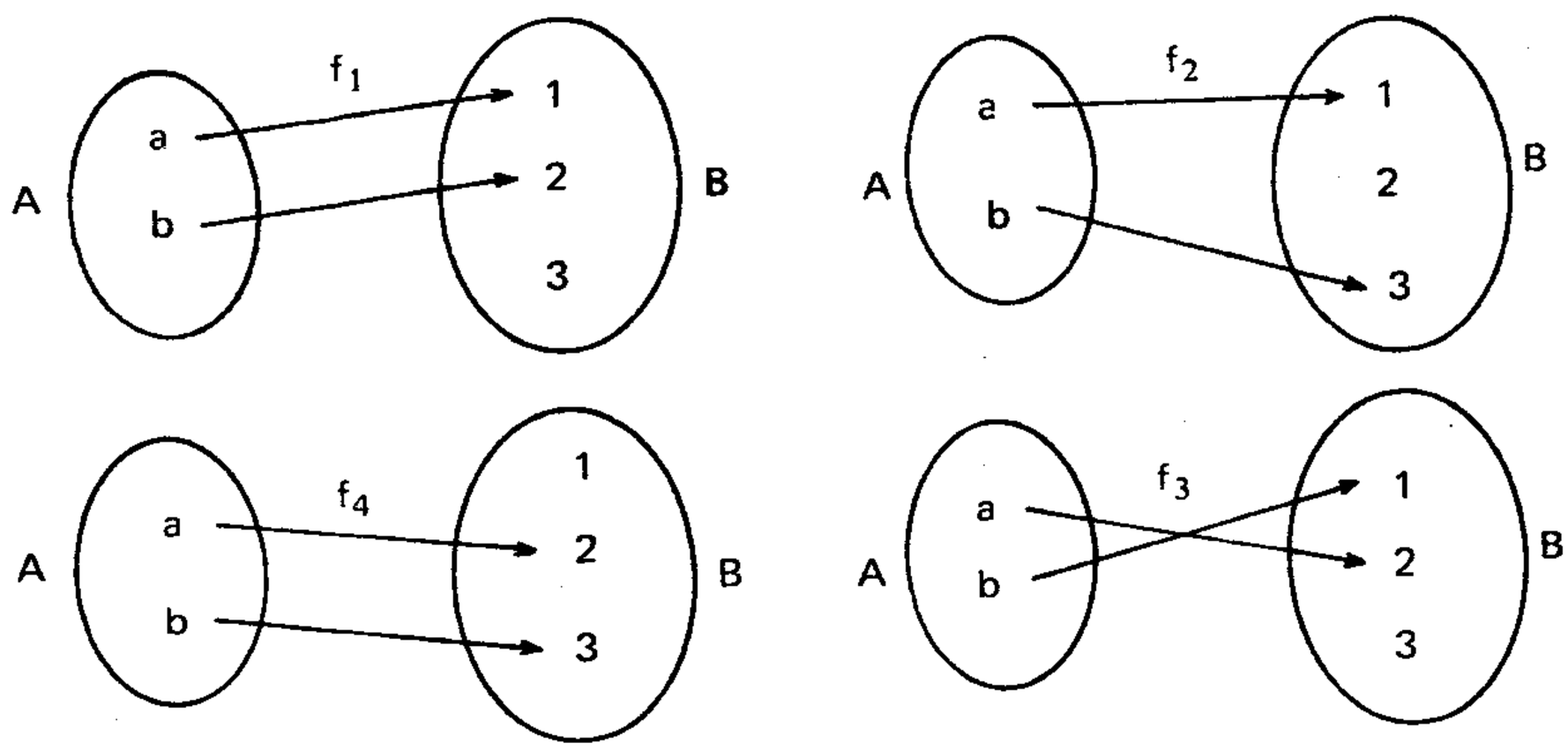
4. $X = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 3\}$

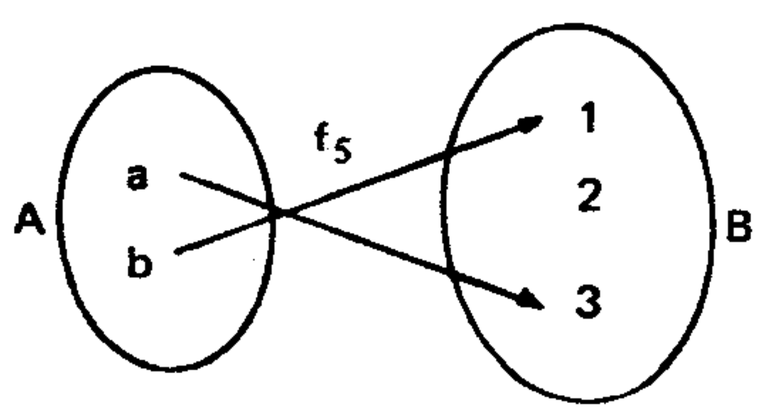
5. São as *seis* funções definidas pelos seguintes diagramas:

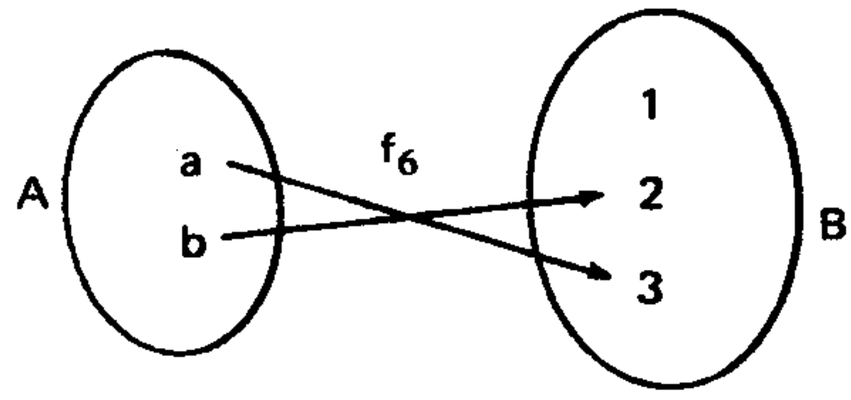


8. $I =]\longleftarrow, 0] = \mathbf{R}_-$ ou $I = [0, \longrightarrow[= \mathbf{R}_+$

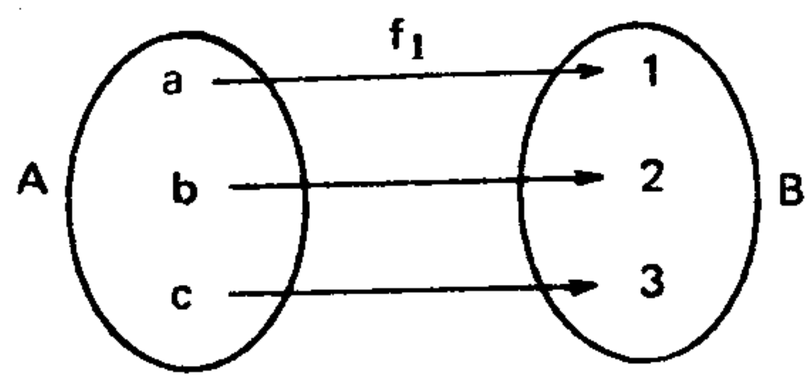
9. São as *seis* funções definidas pelos seguintes diagramas:

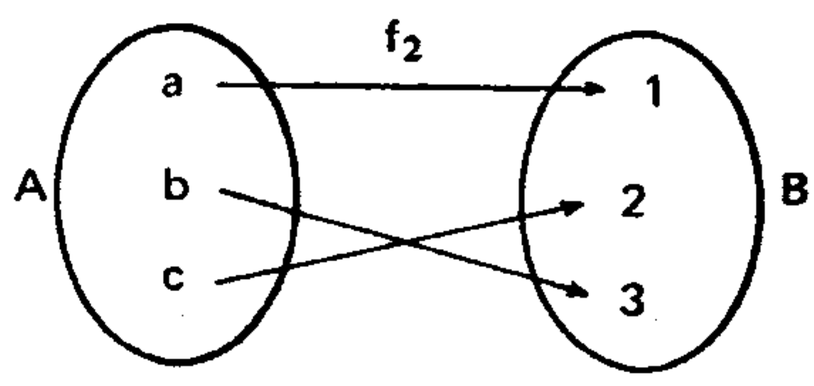


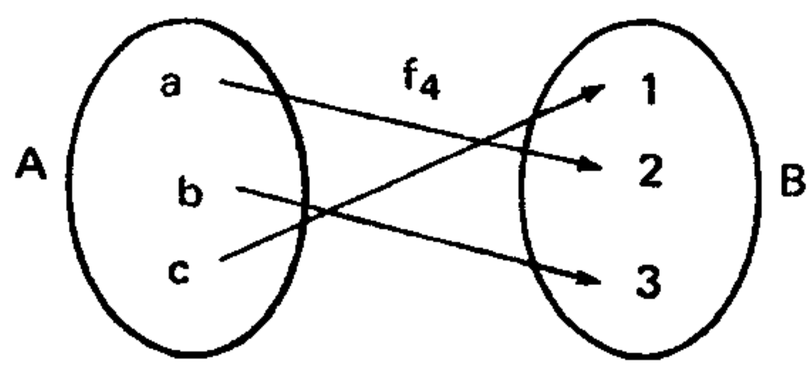


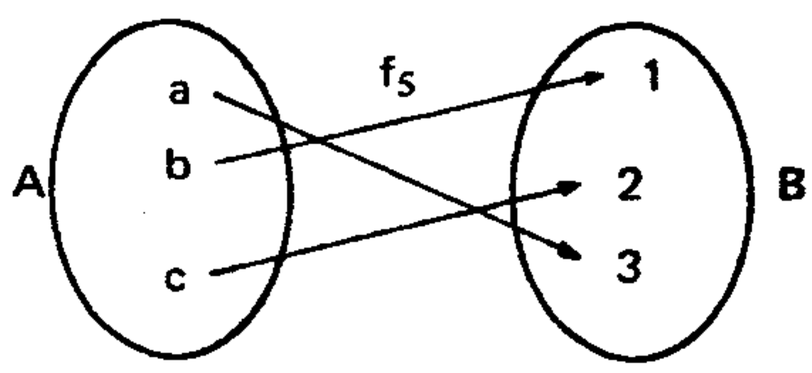


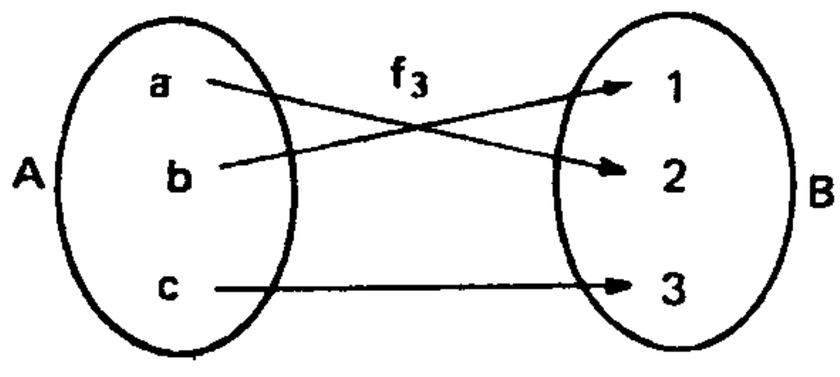
11. São as *seis* funções definidas pelos seguintes diagramas:

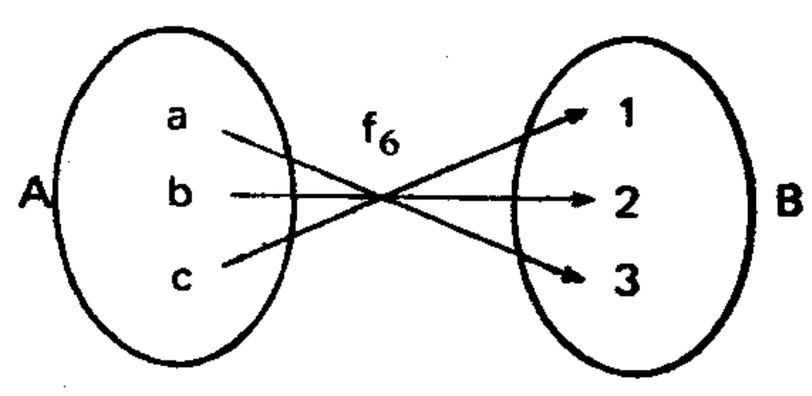












12. $f^{-1} = (\{x, \sqrt[3]{x-5} \mid x \in \mathbf{R}\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$

13. $f^{-1} : x \longmapsto f^{-1}(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ de $\mathbf{R} - \{1\}$ em $\mathbf{R} - \{-1\}$.

14. $\{2, 4\}$; $\{1, 2\}$; $\{1, 3, 5\}$

15. $x = 2, 4, 8$

CAPÍTULO 19

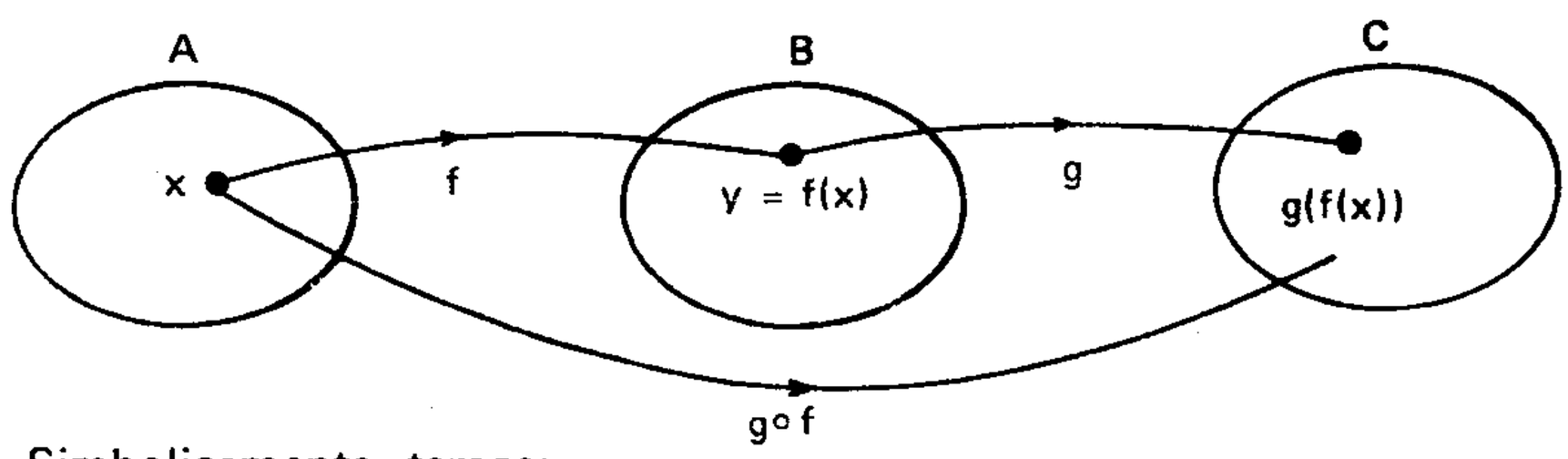
COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

1. FUNÇÃO COMPOSTA DE DUAS FUNÇÕES

Sejam A, B, C três conjuntos, distintos ou não. Consideremos as duas funções $f = (F, A, B)$ e $g = (G, B, C)$ tais que o contradomínio da primeira e o domínio da segunda coincidem.

Teorema — A relação composta $g \circ f = (G \circ F, A, C)$ de g e f é uma função de A em C.

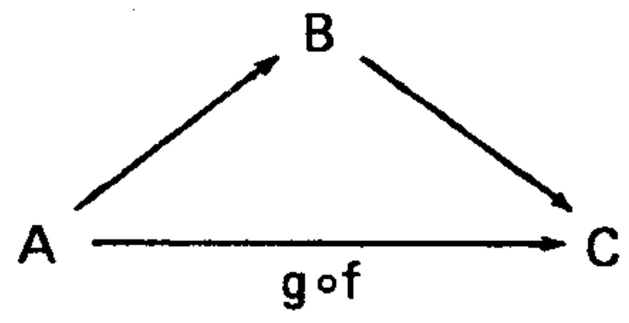
Dem.: — Pela função f, a todo elemento $x \in A$ corresponde o elemento único $f(x) \in B$ tal que $(x, f(x)) \in F$. Além disso, a todo elemento $y \in B$ corresponde, pela função g, o elemento único $g(y) \in C$ tal que $(y, g(y)) \in G$. Portanto, em particular, ao elemento $y = f(x) \in B$ corresponde, pela função g, o elemento único $g(f(x)) \in C$ tal que $(f(x), g(f(x))) \in G$. Assim sendo, fazendo corresponder, diretamente, a todo elemento $x \in A$ o elemento único $g(f(x)) \in C$ tal que $(x, g(f(x))) \in G \circ F$, resulta definida uma *nova função* $g \circ f = (G \circ F, A, C)$ de A em C tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$, denominada *função composta de* g *e* f.

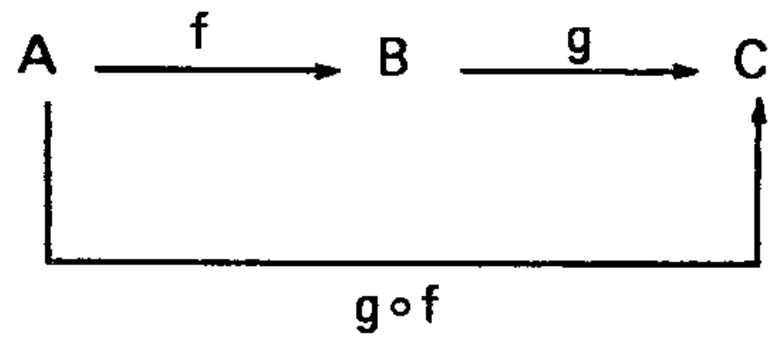


Simbolicamente, temos:

$$g \circ f = (\{(x, g(f(x)) \mid x \in A\}, A, C)$$

Esta operação, que a todo par de funções: $f = (F, A, B)$ e $g(G, B, C)$, associa uma determinada função $g \circ f = (G \circ F, A, C)$, chama-se *composição de funções,* e pode ser visualizada pelos seguintes diagramas:





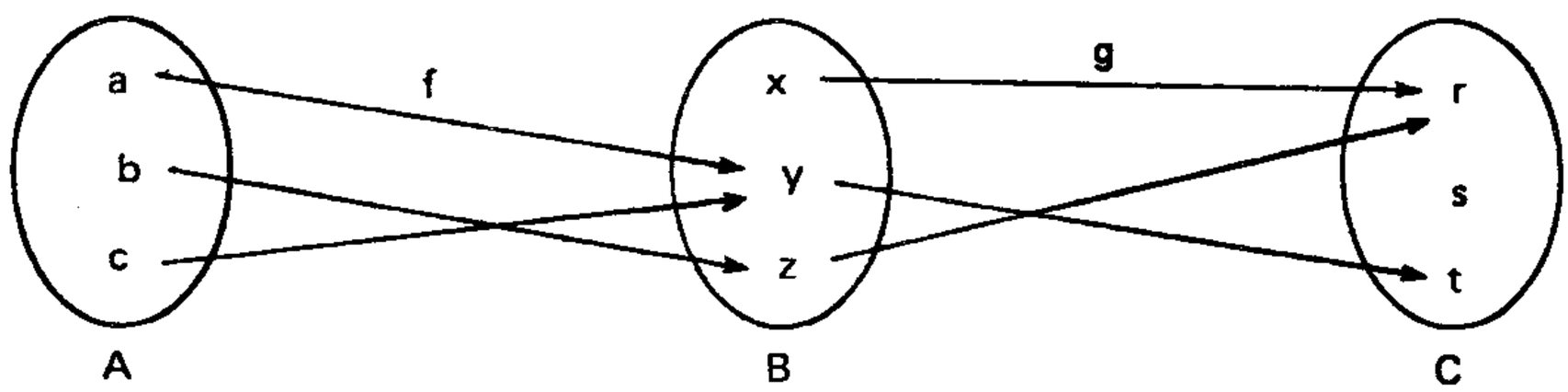
NOTA — Quando os conjuntos C e A são *diferentes* ($C \neq A$), não tem sentido formar a função composta $f \circ g$ de f e g, visto que o contradomínio de g e o domínio de f não coincidem, mas no caso particular em que $C = A$, ou seja, em que $f = (F, A, B)$ e $g = (G, B, A)$ tem sentido não somente formar a função composta $g \circ f = (G \circ F, A, A)$, visto que o contradomínio de f e o domínio de g coincidem, mas também formar a função composta $f \circ g = (F \circ G, B, B)$ definida por $(f \circ g)(y) = f(g(y))$ para todo $y \in B$, porque o contradomínio de g e o domínio de f também coincidem.

Observe-se que os domínios das funções compostas $g \circ f$ e $f \circ g$ são A e B, e, portanto, pelo conceito de igualdade de duas funções, resulta que $g \circ f \neq f \circ g$.

No caso ainda mais particular em que $C = B = A$, ou seja, em que $f = (F, A, A)$ e $g = (G, A, A)$ são funções de A em A, as funções compostas $g \circ f$ e $f \circ g$ existem e são ambas funções de A em A, mas, mesmo neste caso, geralmente se tem $g \circ f \neq f \circ g$, isto é, a *ordem* segundo a qual se efetua a composição de f e g não é indiferente. Quando $g \circ f = f \circ g$, isto é, $g(f(x)) = f(g(x))$ para todo $x \in A$, diz-se que f e g *comutam* ou são *comutáveis.*

Exemplos:

1) Sejam as funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ definidas pelos diagramas:



Vamos determinar a função composta $g \circ f : A \longrightarrow C$ de g e f.

Consoante a definição de função composta de duas funções, temos:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(y) = t$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(z) = r$$

$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(y) = t$$

Portanto: $g \circ f = (\{(a, t), (b, r), (c, t)\}, A, C)$.

2) Sejam as funções f e g de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ em A seguintes:

$$f = (\{(1, 3), (2, 5), (3, 3), (4, 1), (5, 2)\}, A, A)$$

$$g = (\{(1, 4), (2, 1), (3, 1), (4, 2), (5, 3)\}, A, A)$$

Vamos determinar as funções compostas $g \circ f$ e $f \circ g$.

De conformidade com a definição de função composta de duas funções, temos:

$$(g \circ f)\ (1) = g(f(1)) = g(3) = 1$$

$$(g \circ f)\ (2) = g(f(2)) = g(5) = 3$$

$$(g \circ f)\ (3) = g(f(3)) = g(3) = 1$$

$$(g \circ f)\ (4) = g(f(4)) = g(1) = 4$$

$$(g \circ f)\ (5) = g(f(5)) = g(2) = 1$$

Portanto: $g \circ f = (\{(1, 1), (2, 3), (3, 1), (4, 4), (5, 1)\}, A, A)$.

Analogamente, temos:

$$(f \circ g)\ (1) = f(g(1)) = f(4) = 1$$

$$(f \circ g)\ (2) = f(g(2)) = f(1) = 3$$

$$(f \circ g)\ (3) = f(g(3)) = f(1) = 3$$

$$(f \circ g)\ (4) = f(g(4)) = f(2) = 5$$

$$(f \circ g)\ (5) = f(g(5)) = f(3) = 3$$

Portanto: $f \circ g = (\{(1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 5), (5, 3)\}, A, A)$.

Observe-se que as funções compostas $g \circ f$ e $f \circ g$ são *diferentes* ($g \circ f \neq f \circ g$), isto é, a *operação de composição de funções não é comutativa.*

3) Sejam as funções f e g de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em A seguintes:

$$f = (\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}, A, A)$$

$$g = (\{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}, A, A)$$

Aqui, temos: $g \circ f = f \circ g = (\{(1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}, A, A)$, isto é, f e g são *comutáveis.*

4) Sejam os conjuntos:

$$A = \{-1, 0, 1, 2\}, \quad B = \{-5, -3, -1, 1, 2\}, \quad C = \{0, 3, 6, 8, 24\}$$

e as funções:

$$f = (\{x, 2x - 3) \mid x \in A\}, A, B)$$

$$g = (\{x, x^2 - 1) \mid x \in B\}, B, C)$$

Vamos determinar a função composta $g \circ f$. Temos, sucessivamente:

$$(g \circ f)\ (-1) = g(f(-1) = g(-5) = 24$$

$$(g \circ f)\ (0) = g(f(0) = g(-3) = 8$$

$$(g \circ f)\ (1) = g(f(1) = g(-1) = 0$$

$$(g \circ f)\ (2) = g(f(2) = g(1) = 0$$

Portanto: $g \circ f = (\{(-1, 24), (0, 8), (1, 0), (2, 0)\}, A, C)$.

Para todo $x \in A$, temos:

$$(g \circ f)\ (x) = g(f(x)) = g(2x - 3) = (2x - 3)^2 - 1 = 4x^2 - 12x + 8$$

Então, $g \circ f$ é a função de A em C definida por $(g \circ f)\ (x) = 4x^2 - 12x + 8$, isto é:

$$g \circ f = (\{x, 4x^2 - 12x + 8) \mid x \in A\}, A, C)$$

Observe-se, p. ex.:

$$(g \circ f)\ (1) = 4 \,.\, 1^2 - 12 \,.\, 1 + 8 = 0$$

$$g(f(1)) = g(2 \,.\, 1 - 3) = g(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$$

5) Consideremos as funções:

$$f = (\{(x, x^2 - 2) \mid x \in \mathbf{R}\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

$$g = (\{(x, 3x + 1) \mid x \in \mathbf{R}\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

Aqui, as funções compostas $g \circ f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ e $f \circ g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ são definidas por:

$$(g \circ f)\ (x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2) = 3(x^2 - 2) + 1 = 3x^2 - 5$$

$$(f \circ g)\ (x) = f(g(x)) = f(3x + 1) = (3x + 1)^2 - 2 = 9x^2 + 6x - 1$$

isto é:

$$g \circ f = (\{x, 3x^2 - 5) \mid x \in \mathbf{R}\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

$$f \circ g = (\{x, 9x^2 + 6x - 1) \mid x \in \mathbf{R}\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

Observe-se que $g \circ f \neq f \circ g$.

6) Seja A um conjunto qualquer. Consideremos as funções:

$$f : x \longmapsto \{x\} \text{ de A em } \mathbf{P}(A)$$

$$g : x \longmapsto A - X \text{ de } \mathbf{P}(A) \text{ em } \mathbf{P}(A)$$

A função composta de g e f é:

$$g \circ f : x \longmapsto A - \{x\} \text{ de } A \text{ em } \mathbf{P}(A)$$

Assim, p. ex., se $A = \{1, 2, 3\}$, temos:

$$g \circ f = (\{(1, \{2, 3\}), (2, \{1, 3\}), (3, \{1, 2\})\}, A, \mathbf{P}(A))$$

7) Sejam:

i) E o conjunto dos pontos do espaço, salvo o ponto O;

ii) F o conjunto das retas do espaço que passam por O;

iii) G o conjunto dos planos do espaço que passam por O.

A todo ponto $x \in E$ associemos a reta $y \in F$ que passa por x, e a esta reta $y \in F$ associemos o plano $z \in G$ que lhe é perpendicular. A primeira operação define uma função $f : E \longrightarrow F$, e a segunda operação define uma função $g : F \longrightarrow G$. A função composta $g \circ f : E \longrightarrow G$ é aquela que associa a todo ponto $x \in E$ o plano $z \in G$ que é perpendicular à reta Ox.

2. PROPRIEDADES DA COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

(P_1) Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ duas funções e $g \circ f : A \longrightarrow C$ a função composta de g e f. Quaisquer que sejam $X \subset A$ e $Z \subset C$, tem-se:

i) $(g \circ f)(X) = g(f(X))$

ii) $(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$

Dem. de (i) — Seja z um elemento qualquer de $(g \circ f)(X)$. Então, existe $x \in X$ tal que $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Como $f(x) \in f(X)$, segue-se que $z = g(f(x)) \in g(f(X))$. Logo, subsiste a inclusão:

$$(g \circ f)(X) \subset g(f(X)) \qquad (1)$$

Seja, agora, z um elemento qualquer de $g(f(X))$. Então, existe $y \in f(X)$ tal que $z = g(y)$. E como $y \in f(X)$, existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Portanto, temos:

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \Longrightarrow z \in (g \circ f)(X)$$

Logo, subsiste a inclusão:

$$g(f(X)) \subset (g \circ f)(X) \qquad (2)$$

Comparando as inclusões (1) e (2), obtemos (i).

Dem. de (ii) — Seja x um elemento qualquer de $(g \circ f)^{-1}(Z)$. Então, temos $(g \circ f)(x) \in Z$, isto é, $g(f(x)) \in Z$. Portanto: $f(x) \in g^{-1}(Z)$ e $x \in f^{-1}(g^{-1}(Z))$. Logo, subsiste a inclusão:

$$(g \circ f)^{-1}(Z) \subset f^{-1}(g^{-1}(Z)) \qquad (3)$$

Seja, agora, x um elemento qualquer de $f^{-1}(g^{-1}(Z))$. Então, $f(x) \in g^{-1}(Z)$ e $g(f(x)) \in Z$. Portanto: $(g \circ f)(x) \in Z$ e $x \in (g \circ f)^{-1}(Z)$. Logo, subsiste a inclusão:

$$f^{-1}(g^{-1}(Z)) \subset (g \circ f)^{-1}(Z) \qquad (4)$$

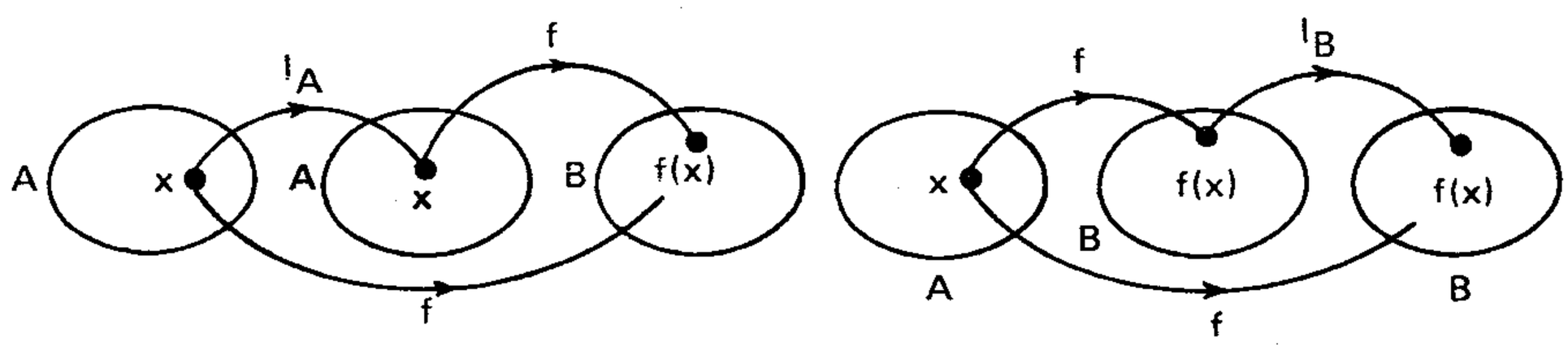
Comparando as inclusões (3) e (4), obtemos (ii).

(P_2) Qualquer que seja a função $f : A \longrightarrow B$, as funções compostas:

$f \circ I_A : A \longrightarrow B$ e $I_B \circ f : A \longrightarrow B$ são iguais à função f, isto é:

$$f \circ I_A = f \quad \text{e} \quad I_B \circ f = f \qquad (1)$$

Dem.: — As funções compostas $f \circ I_A$ e $I_B \circ f$ estão definidas, pois o contradomínio de I_A e o domínio f são iguais (conjunto A), e o contradomínio de f e o domínio de I_B também são iguais (conjunto B).



Além disso, as funções $f \circ I_A$, $I_B \circ f$ e f possuem o mesmo domínio — o conjunto A, o mesmo contradomínio — o conjunto B, e para todo $x \in A$, temos:

$$(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$$

$$(I_B \circ f)(x) = I_B(f(x)) = f(x)$$

o que demonstra as igualdades (1).

Em particular, para toda função $f : A \longrightarrow A$, tem-se:

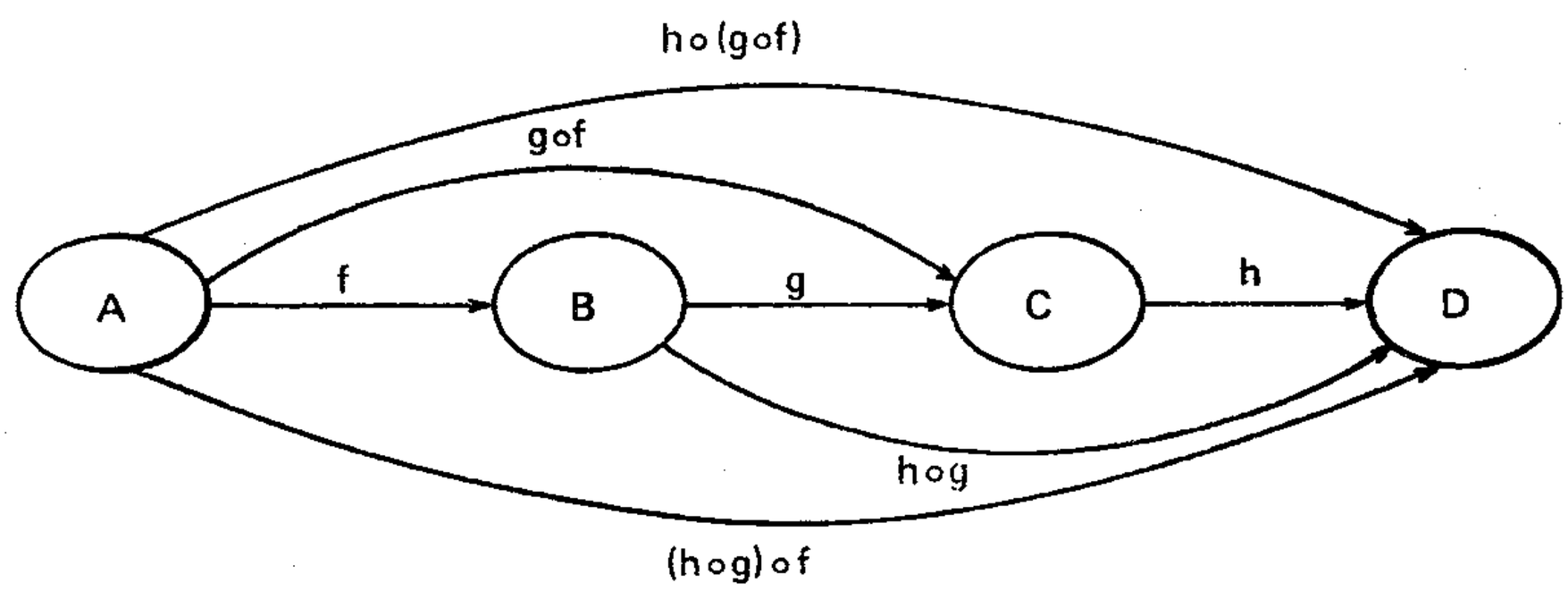
$$f \circ I_A = f = I_A \circ f \qquad (2)$$

isto é, a função idêntica de A, I_A, é *elemento neutro* para a operação de composição de funções no conjunto F(A, A) das funções de A em A.

As igualdades (2) valem, obviamente, para toda permutação de A ($f \in P_A$).

Observe-se que, se $A \neq B$, as compostas de f e I_B ($f \circ I_B$) e de I_A e f ($I_A \circ f$) não estão definidas.

(P_3) Quaisquer que sejam as funções: $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$, as funções: $h \circ (g \circ f) : A \longrightarrow D$ e $(h \circ g) \circ f : A \longrightarrow D$ são iguais: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.



Dem.: — As funções compostas $g \circ f : A \longrightarrow C$ e $h \circ g : B \longrightarrow D$ estão definidas, pois o contradomínio de f e o domínio de g são iguais (conjunto B) e o contradomínio de g e o domínio de h também são iguais (conjunto C). Por razões inteiramente análogas, as funções $h \circ (g \circ f)$ e $(h \circ g) \circ f$ também estão definidas, e como possuem o mesmo domínio — o conjunto A, o mesmo contradomínio — o conjunto D, para estabelecer que elas são iguais, resta mostrar que é:

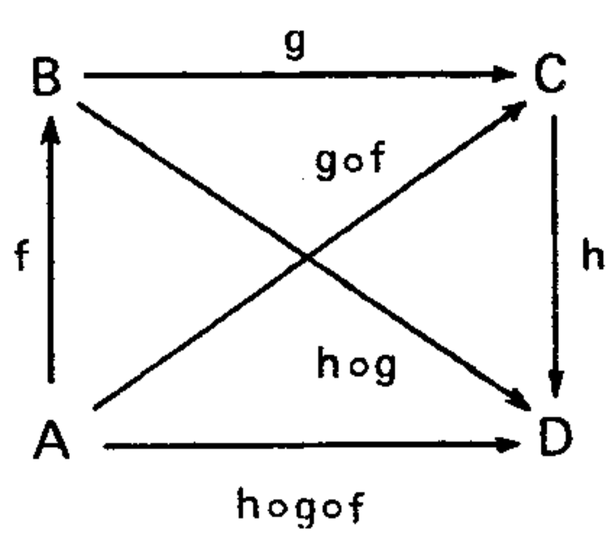
$$(h \circ (g \circ f))\ (x) = ((h \circ g) \circ f)\ (x)\ , \quad \forall\ x \in A$$

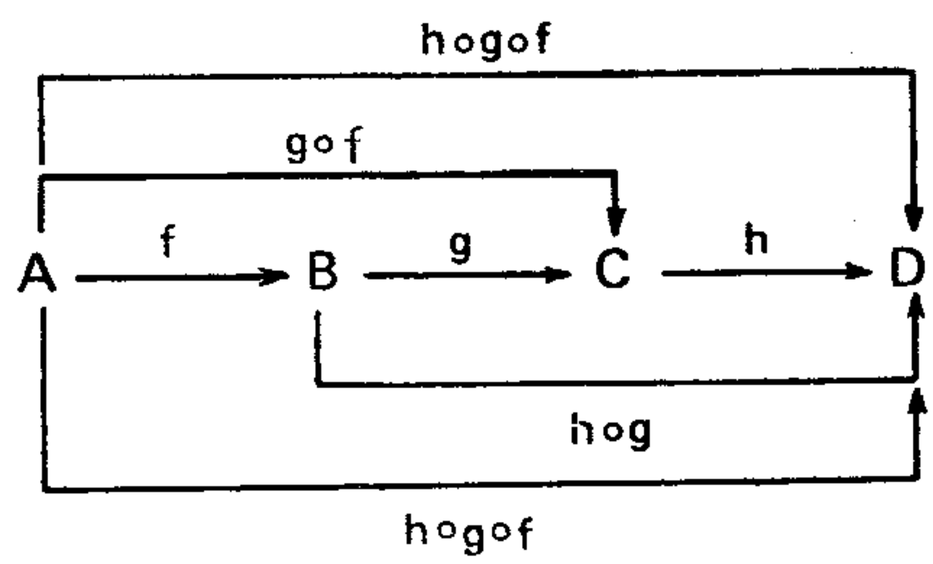
Realmente, temos:

$$(h \circ (g \circ f))\ (x) = h((g \circ f)\ (x)) = h(g(f(x)))\ , \quad \forall x \in A$$

$$((h \circ g) \circ f)\ (x) = (h \circ g)\ (f(x)) = h(g(f(x)))\ , \quad \forall x \in A$$

Esta *propriedade associativa* da operação de composição de funções pode ser representada pelos seguintes diagramas:





A função única $h \circ (g \circ f)$ ou $(h \circ g) \circ f$ de A em D representa-se por $h \circ g \circ f$ e diz-se que é *composta* das três funções h, g e f consideradas nesta ordem.

(P_4) Se as funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ são sobrejetoras, então a função composta $g \circ f : A \longrightarrow C$ também é sobrejetora.

Dem.: — Com efeito, seja z um elemento qualquer de C. Como g é sobrejetora, existe, ao menos, um elemento $y \in B$ tal que $g(y) = z$. Analogamente, sendo f sobrejetora, existe, ao menos, um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Logo, temos: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, e isto prova que a função composta $g \circ f$ é sobrejetora.

Esta propriedade, em geral, enuncia-se sob a forma abreviada: *A composta de duas funções sobrejetoras também é sobrejetora.*

(P_5) Se as funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ são injetoras, então a função composta $g \circ f : A \longrightarrow C$ também é injetora.

Dem.: — Sejam x e y dois elementos de A tais que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Vamos demonstrar que $x = y$. Com efeito, temos $g(f(x)) = g(f(y))$, e como g é injetora, segue-se que $f(x) = f(y)$, donde, por ser f injetora, $x = y$. Logo, a função composta $g \circ f$ é injetora.

Esta propriedade, em geral, enuncia-se sob a forma abreviada: *A composta de duas funções injetoras também é injetora.*

(P_6) Se as funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ são bijetoras, então a função composta $g \circ f : A \longrightarrow C$ também é bijetora.

Dem.: — Com efeito, as funções f e g, sendo bijetoras, são ao mesmo tempo sobrejetoras e injetoras. Logo, pelas duas propriedades anteriores, a função composta $g \circ f$ também é simultaneamente sobrejetora e injetora, ou seja, bijetora.

Esta propriedade, em geral, enuncia-se sob a forma abreviada: *A composta de duas funções bijetoras também é bijetora.*

Em particular, *a composta de duas permutações de* A *também é uma permutação de* A, isto é, se $f \in P_A$ e $g \in P_A$, então $g \circ f \in P_A$ e $f \circ g \in P_A$.

(P_7) Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ duas funções e $g \circ f : A \longrightarrow C$ a função composta de g e f. Então:

i) Se $g \circ f$ é sobrejetora, g também é sobrejetora;

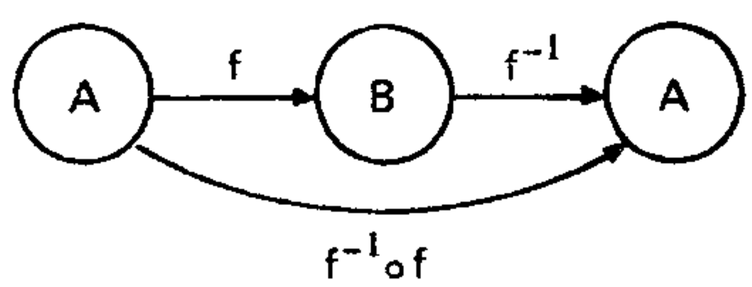
ii) Se $g \circ f$ é injetora, f também é injetora.

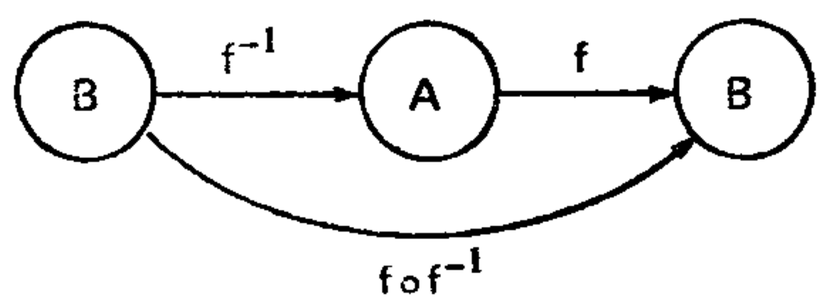
Dem. de (i) — Seja z um elemento qualquer de C. Vamos demonstrar que existe $y \in B$ tal que $g(y) = z$. Com efeito, sendo $g \circ f$ sobrejetora, existe, ao menos,

um elemento $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = z$, ou seja, tal que $g(f(x)) = z$. Denotando por y o elemento $f(x) \in B$, vem $g(y) = z$. Logo, a função g é sobrejetora.

Dem. de (ii) — Sejam x e y dois elementos de A tais que $f(x) = f(y)$. Vamos demonstrar que $x = y$. Com efeito, por ser g uma função, temos $g(f(x)) = g(f(y))$ ou $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, donde, por ser $g \circ f$ injetora, $x = y$. Logo, a função f é injetora.

(P_8) Qualquer que seja a função bijetora $f : A \longrightarrow B$, as compostas $f^{-1} \circ f : A \longrightarrow A$ e $f \circ f^{-1} : B \longrightarrow B$ são, respectivamente, iguais às funções idênticas de A e B: $f^{-1} \circ f = I_A$ e $f \circ f^{-1} = I_B$.





Dem.: — Seja x um elemento qualquer de A e $y \in B$ a sua imagem pela f, isto é, $f(x) = y$, donde, pela definição de função inversa, $f^{-1}(y) = x$.

Portanto:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = I_A(x)$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = I_B(y)$$

o que demonstra as igualdades $f^{-1} \circ f = I_A$ e $f \circ f^{-1} = I_B$.

Em particular, se f é uma função bijetora de A em A, ou seja, se f é uma permutação de A ($f \in P_A$), temos:

$$f^{-1} \circ f = I_A = f \circ f^{-1}$$

(P_9) Se $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ são duas funções tais que as compostas $g \circ f : A \longrightarrow A$ e $f \circ g : B \longrightarrow B$ são, respectivamente, iguais às funções idênticas de A e de B: $g \circ f = I_A$ e $f \circ g = I_B$, então:

i) As funções f e g são bijetoras;

ii) Cada uma das funções f e g é a inversa da outra: $f = g^{-1}$ e $g = f^{-1}$.

Dem. de (i) — Como I_A é bijetora, então $g \circ f$ também é bijetora. Logo, pela Propriedade P_7, a função f é injetora e a função g é sobrejetora.

Analogamente, como I_B é bijetora, então $f \circ g$ também é bijetora. Logo, pela mesma Propriedade P_7, a função f é sobrejetora e a função g é injetora.

Assim sendo, f e g são simultaneamente sobrejetoras e injetoras, isto é, f e g são bijetoras.

Dem. de (ii) — Sendo a função g bijetora, existe a função inversa g^{-1}, e temos:

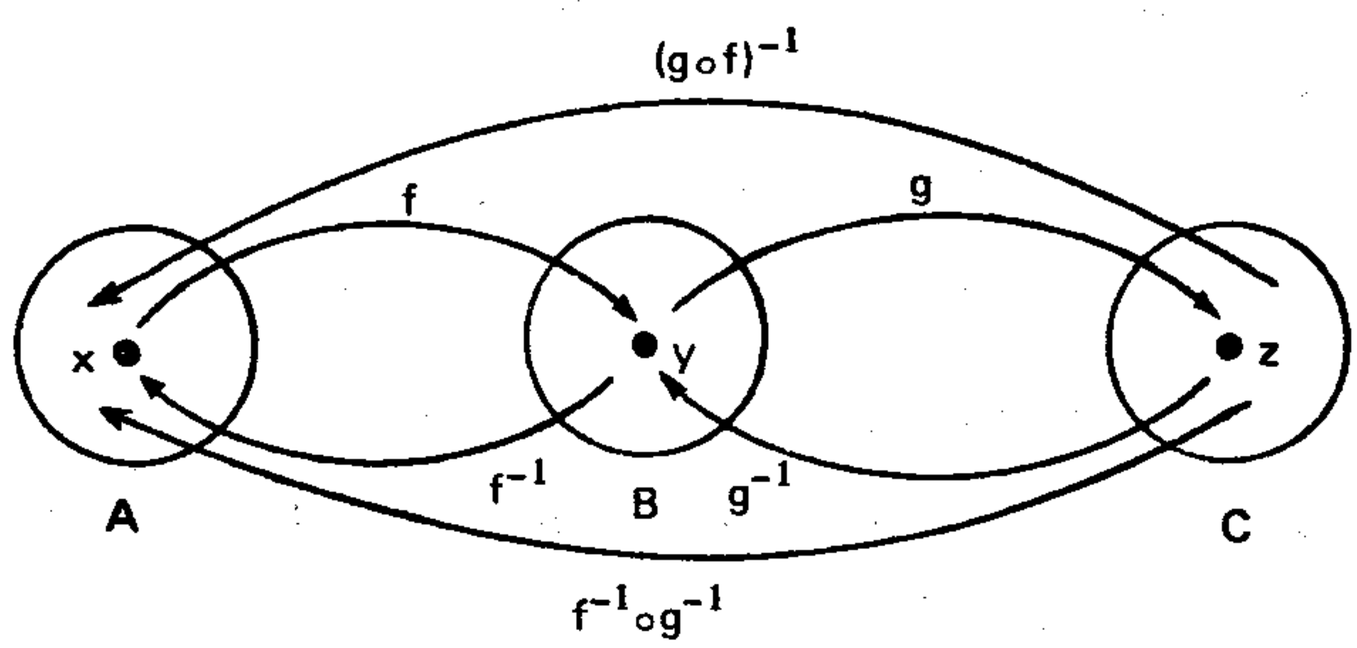
$$f = f \circ I_A = f \circ (g \circ g^{-1}) = (f \circ g) \circ g^{-1} = I_B \circ g^{-1} = g^{-1}$$

Analogamente, sendo a função f bijetora, existe a função inversa f^{-1}, e

$$g = g \circ I_B = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = I_A \circ f^{-1} = f^{-1}$$

(P_{10}) Se as funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ são bijetoras, então a função inversa de $g \circ f : A \longrightarrow C$ existe e é a composta das funções inversas de f e g: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Dem.: — Como a composta de duas funções bijetoras é bijetora (Propriedade P_6), $g \circ f$ é bijetora, e, portanto, *existe* a sua inversa $(g \circ f)^{-1}$.



Por outra parte, como as funções $(g \circ f)^{-1}$ e $f^{-1} \circ g^{-1}$ têm o mesmo domínio — o conjunto C, o mesmo contradomínio — o conjunto A, para estabelecer que elas são iguais, basta mostrar que é:

$$(g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z), \quad \forall z \in C$$

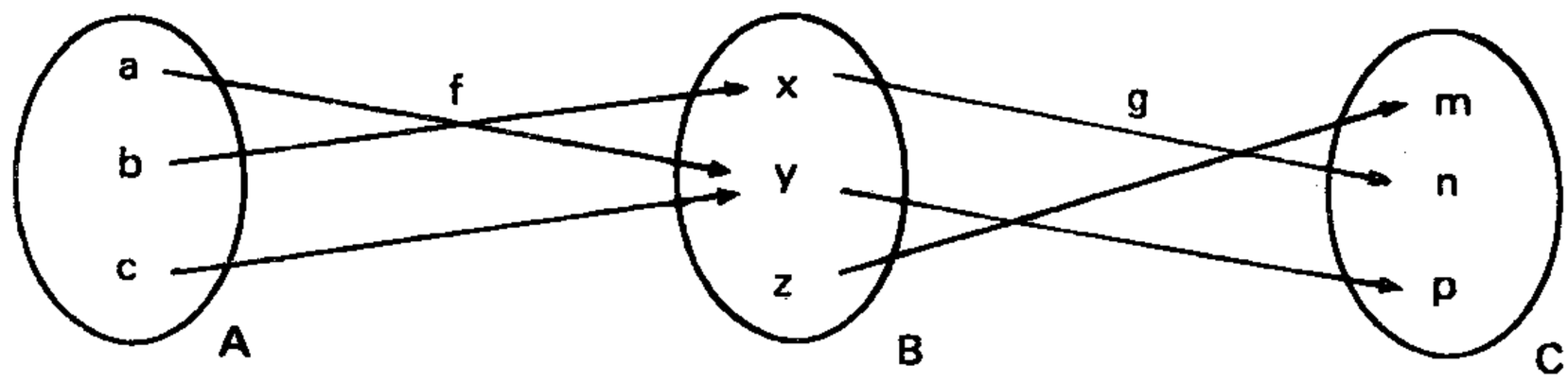
Realmente, temos:

$$x = (g \circ f)^{-1}(z) \Longleftrightarrow (g \circ f)(x) = z \Longleftrightarrow g(f(x)) = z \Longleftrightarrow$$

$$f(x) = g^{-1}(z) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(g^{-1}(z)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$$

E X E R C Í C I O S

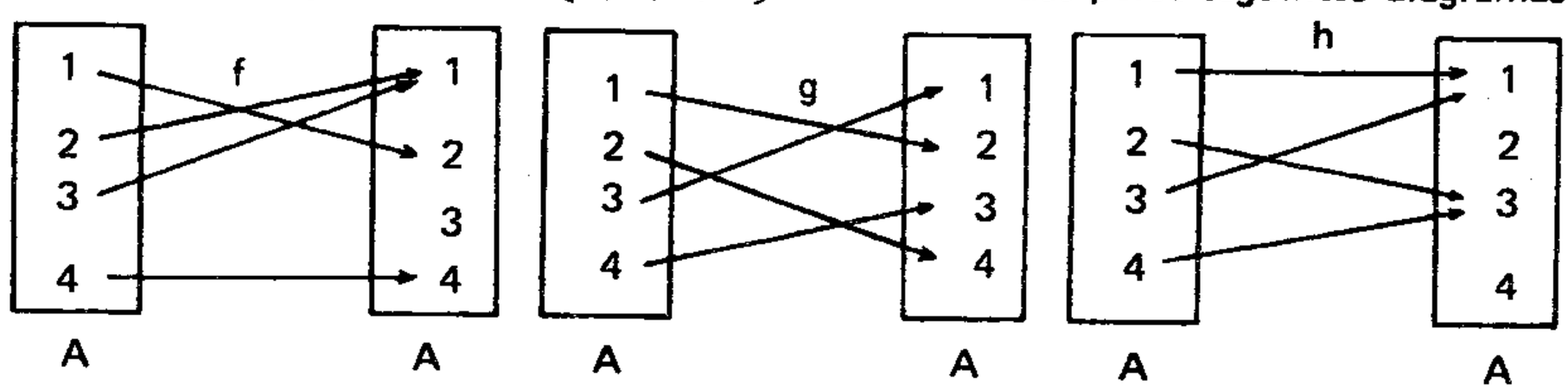
1. Sejam as funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ definidas pelo diagrama:



i) Determinar a *função composta* $g \circ f : A \longrightarrow C$.

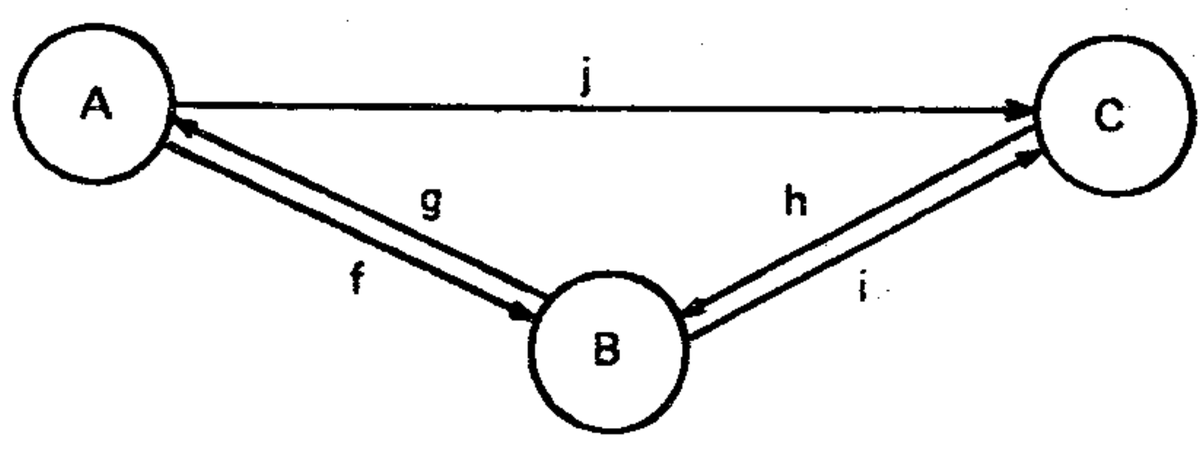
ii) Achar as *imagens* das funções f, g e $g \circ f$.

2. Sejam as funções f, g e h de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em A definidas pelos seguintes diagramas:



Determinar as *funções compostas:* $f \circ g$, $h \circ f$ e $g \circ g$.

3. Sejam f, g, h, i, j funções cujos domínios e contradomínios são dados pelo diagrama:



Determinar o *domínio* e o *contradomínio* de cada uma das seguintes funções: $g \circ f$, $i \circ f$, $g \circ h$, $i \circ h$, $h \circ j$ e $h \circ j \circ g$.

4. Sejam as funções f e g de **R** em **R** definidas por $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x^2 - 1$. Calcular:

i) $(f \circ g)(0)$, $(g \circ f)(1)$, $(f \circ f)(2)$ e $(g \circ g)(3)$.

ii) $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(f \circ f)(x)$ e $(g \circ g)(x)$.

5. Sejam as funções $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ e $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{se } x > 2 \\ x^2 - 2|x| & \text{se } x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{e} \quad g(x) = 3x + 1$$

Calcular: $(g \circ f)(1)$, $(f \circ g)(2)$, $(f \circ f)(3)$ e $(g \circ g)(4)$.

6. Sejam as funções:

$$f = (\{(x, 2x + 1) \mid x \in \mathbf{R}\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

$$g = (\{(x, x^2 + 1) \mid x \in \mathbf{R}\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

Calcular: $(g \circ f)(0)$, $(f \circ g)(2)$, $(f \circ f)(3)$ e $(g \circ g)(5)$.

7. Dadas as funções:

$$f = (\{(x, |x|) \mid x \in \mathbf{R}\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

$$g = (\{(x, x - 1) \mid x \in \mathbf{R}\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

determinar a *função composta* $f \circ g$.

8. Dadas as funções f, g e h, de **R** em **R**, definidas por

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad , \quad g(x) = 2x + 3 \quad , \quad h(x) = 5x$$

calcular: $((h \circ g) \circ f)(0)$, $(h \circ (f \circ g))(1)$ e $((f \circ h) \circ g)(-2)$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. i) $g \circ f = (\{(a, p), (b, n), (c, p)\}, A, C)$

   ii) $I(f) = \{x, y\}$; $I(g) = \{m, n, p\}$; $I(g \circ f) = \{n, p\}$

2. $f \circ g = (\{(1, 1), (2, 4), (3, 2), (4, 1)\}, A, A)$

   $h \circ f = (\{(1, 3), (2, 1), (3, 1), (4, 3)\}, A, A)$

   $g \circ g = (\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}, A, A)$

3. $g \circ f : A \longrightarrow A$; $i \circ f : A \longrightarrow C$; $g \circ h : C \longrightarrow A$;

   $i \circ h : C \longrightarrow C$; $h \circ j ; A \longrightarrow B$; $h \circ j \circ g : B \longrightarrow B$

4. i) $(f \circ g)(0) = 1$; $(g \circ f)(1) = 24$; $(f \circ f)(2) = 17$; $(g \circ g)(3) = 63$

   ii) $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$; $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 12x + 8$;

   $(f \circ f)(x) = 4x + 9$; $(g \circ g)(x) = x^4 - x^2$

5. $(g \circ f)(1) = -2$; $(f \circ g)(2) = 9$; $(f \circ f)(3) = -1$; $(g \circ g)(4) = 40$

6. $(g \circ f)(0) = 2$; $(f \circ g)(2) = 11$; $(f \circ f)(3) = 15$; $(g \circ g)(5) = 677$

7. $f \circ g = (\{(x, |x - 1|) \mid x \in \mathbf{R}\}, \mathbf{R}, \mathbf{R})$

8. $((h \circ g) \circ f)(0) = 35$; $(h \circ (f \circ g))(1) = 60$; $((f \circ h) \circ g)(-2) = 42$

CAPÍTULO 20

ÁLGEBRA DAS FUNÇÕES REAIS

1. OPERAÇÕES SOBRE FUNÇÕES REAIS

Sejam $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbf{R}$ duas *funções reais* cujos domínios A e B se *cortam:* $A \cap B = I \neq \phi$.

I – *Adição* – Chama-se *soma* das funções f e g, a função real f + g de I em **R** definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Simbolicamente, temos:

$$f + g = (\{(x, f(x) + g(x)) \mid x \in I\}, I, \mathbf{R})$$

Em particular, se k é um número real qualquer ($k \in \mathbf{R}$), a *soma* de f e k é a função real f + k de A em **R** definida por $(f + k)(x) = f(x) + k$, isto é:

$$f + k = (\{(x, f(x) + k) \mid x \in A\}, A, \mathbf{R})$$

II – *Subtração* – Chama-se *diferença* das funções f e g, a função real f - g de I em **R** definida por $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$.

Simbolicamente, temos:

$$f - g = (\{(x, f(x) - g(x)) \mid x \in I\}, I, \mathbf{R})$$

III – *Multiplicação* – Chama-se *produto* das funções f e g, a função real fg de I em **R** definida por $(fg)(x) = f(x) . g(x)$.

Simbolicamente, temos:

$$fg = (\{(x, f(x) . g(x)) \mid x \in I\}, I, \mathbf{R})$$

Em particular, se k é um número real qualquer ($k \in \mathbf{R}$), o *produto* de k por f é a função real kf de A em **R** definida por $(kf)(x) = k . f(x)$, isto é:

$$kf = (\{(x, k . f(x)) \mid x \in A\}, A, \mathbf{R})$$

Se $k = -1$, então $-f$ a função real de A em **R** definida por $(-f)(x) = -f(x)$ isto é:

$$-f = (\{(x, -f(x)) \mid x \in A\}, A, \mathbf{R})$$

IV — *Divisão* — Chama-se *quociente* das funções f e g, a função real $\frac{f}{g}$ de $I^* = \{x \in I \mid g(x) \neq 0\}$ em **R** definida por $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Simbolicamente, temos:

$$\frac{f}{g} = (\{(x, \frac{f(x)}{g(x)}) \mid x \in I^*\}, I^*, \mathbf{R})$$

Em particular, $\frac{1}{f}$ é a função real de $A^* = \{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$ em **R** definida por $(\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{f(x)}$, isto é:

$$\frac{1}{f} = (\{(x, \frac{1}{f(x)}) \mid x \in A^*\}, A^*, \mathbf{R})$$

V — *Potenciação* — Chama-se *potência de expoente* n ($n \in \mathbf{N}$) das função f, a função real de A em **R** definida por $(f^n)(x) = (f(x))^n$.

Simbolicamente, temos:

$$f^n = (\{(x, (f(x))^n) \mid x \in A\}, A, \mathbf{R})$$

VI — *Valor absoluto* — Chama-se *valor absoluto* das função f, a função real $|f|$ de A em **R** definida por $|f|(x) = |f(x)|$.

Simbolicamente, temos:

$$|f| = (\{(x, |f(x)|) \mid x \in A\}, A, \mathbf{R})$$

Exemplos:

1) Sejam os conjuntos $A = \{0, 3, 4, 5, 8\}$ e $B = \{0, 3, 5, 7, 8\}$ e as seguintes funções:

$$f = (\{(0, 5), (3, 2), (4, 3), (5, 6), (8, 11)\}, A, \mathbf{Q})$$

$$g = (\{(0, 6), (3, 3), (5, -4), (7, 10), (8, 9)\}, B, \mathbf{Q})$$

Determinar a *soma*, a *diferença*, o *produto* e o *quociente* dessas duas funções.

Resolução — Temos $A \cap B = I = \{0, 3, 5, 8\}$. Portanto:

$$f + g = (\{(0, 11), (3, 5), (5, 2), (8, 20)\}, I, \mathbf{Q})$$

$$f - g = (\{(0, -1), (3, -1), (5, 10), (8, 2)\}, I, \mathbf{Q})$$

$$fg = (\{(0, 30), (3, 6), (5, -24), (8, 99)\}, I, \mathbf{Q})$$

$$\frac{f}{g} = (\{(0, \frac{5}{6}), (3, \frac{2}{3}), (5, -\frac{3}{2}), (8, \frac{11}{9})\}, I, \mathbf{Q})$$

2) Seja o conjunto $A = \{-2, 0, 1, 2\}$ e a função f de A em $\mathbf{Q}$:

$$f = (\{(-2, 4), (0, -5), (1, 3), (2, 0)\}, A, \mathbf{Q})$$

Determinar: $f + 5$, $3f$, $-f$, $\frac{1}{f}$, f^3 e $|f|$.

Resolução — Temos:

$$f + 5 = (\{(-2, 9), (0, 0), (1, 8), (2, 5)\}, A, \mathbf{Q})$$

$$3f = (\{(-2, 12), (0, -15), (1, 9), (2, 0)\}, A, \mathbf{Q})$$

$$-f = (\{(-2, -4), (0, 5), (1, -3), (2, 0)\}, A, \mathbf{Q})$$

$$\frac{1}{f} = (\{(-2, \frac{1}{4}), (0, -\frac{1}{5}), (1, \frac{1}{3})\}, A^*, \mathbf{Q})$$

$$f^3 = (\{(-2, 64), (0, -125), (1, 27), (2, 0)\}, A, \mathbf{Q})$$

$$|f| = (\{(-2, 4), (0, 5), (1, 3), (2, 0)\}, A, \mathbf{Q})$$

3) Sejam as funções reais $f : \{a, b, c\} \longrightarrow \mathbf{R}$ e $g : \{a, b, c\} \longrightarrow \mathbf{R}$ assim definidas:

$$f(a) = 1 \quad , \quad f(b) = -2 \quad , \quad f(c) = 3$$

$$g(a) = -2 \quad , \quad g(b) = 0 \quad , \quad g(c) = 1$$

Determinar as funções reais: $3f - 2g$, $fg - 2f$ e $\frac{f}{g} + 3f$.

Resolução — Temos:

$$(3f - 2g)\ (a) = 3.f(a) - 2.g(a) = 3.1 - 2.(-2) = 7$$

$$(3f - 2g)\ (b) = 3.f(b) - 2.g(b) = 3.(-2) - 2.0 = -6$$

$$(3f - 2g)\ (c) = 3.f(c) - 2.g(c) = 3.3 - 2.1 = 7$$

Portanto: $3f - 2g = (\{(a, 7), (b, -6), (c, 7)\}, \{a, b, c\}, \mathbf{R})$.

Analogamente, temos:

$$(fg - 2f)\ (a) = f(a).g(a) - 2.f(a) = 1.(-2) - 2.1 = -4$$

$$(fg - 2f)\ (b) = f(b).g(b) - 2.f(b) = (-2).0 - 2.(-2) = 4$$

$$(fg - 2f)\ (c) = f(c).g(c) - 2.f(c) = 3.1 - 2.3 = -3$$

Portanto: $fg - 2f = (\{(a, -4), (b, 4), (c, -3)\}, \{a, b, c\}, \mathbf{R})$.

Finalmente, temos:

$$(\frac{f}{g} + 3f)\ (a) = \frac{f(a)}{g(a)} + 3.f(a) = \frac{1}{(-2)} + 3.1 = \frac{5}{2}$$

$$(\frac{f}{g} + 3f)\ (c) = \frac{f(c)}{g(c)} + 3.f(c) = \frac{3}{1} + 3.3 = 12$$

Portanto: $\frac{f}{g} + 3f = (\{(a, \frac{5}{2}), (c, 12)\}, \{a, c\}, \mathbf{R})$

4) Sejam as funções f e g de **R** em **R** definidas por $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$. Determinar as funções $2f - 3g$ e $fg + 3$ de **R** em **R**.

Resolução — Temos:

$$(2f - 3g)(x) = 2.f(x) - 3.g(x) = 2(3x + 1) - 3(x^2 - 1) = -3x^2 + 6x + 5$$

$$(fg + 3)(x) = (fg)(x) + 3 = f(x).g(x) + 3 = (3x + 1)(x^2 - 1) + 3 =$$
$$= 3x^3 + x^2 - 3x + 2$$

Portanto:

$$2f - 3g = (\{(x, -3x^2 + 6x + 5) \mid x \in \mathbf{R}\}, \mathbf{R}, \mathbf{R}) \quad e$$
$$fg + 3 = (\{(x, 3x^3 + x^2 - 3x + 2) \mid x \in \mathbf{R}\}, \mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

E X E R C Í C I O S

1. Determinar a *soma*, a *diferença*, o *produto* e o *quociente* das funções reais de $A = \{2,3,4,5\}$ em **Z** seguintes:

$$f = (\{(2, 4), (3, 9), (4, 6), (5, 7)\}, A, \mathbf{Z})$$

$$g = (\{(2, 2), (3, 3), (4, 2), (5, 0)\}, A, \mathbf{Z})$$

2. Determinar a *soma*, a *diferença*, o *produto* e o *quociente* das funções reais f de $A = \{-1, 3, 4, 7\}$ em **Q** e g de $B = \{0, 3, 4, 8\}$ em **Q** seguintes:

$$f = (\{(-1, 0), (3, 9), (4, 6), (7, 10)\}, A, \mathbf{Q})$$

$$g = (\{(0, 3), (3, 3), (4, 2), (8, 11)\}, B, \mathbf{Q})$$

3. Dada a função real $f = (\{(1, 2), (2, -3), (3, -1)\}, A, \mathbf{R})$ de $A = \{1, 2, 3\}$ em **R**, determinar: $f + 4$, $3f$, $-f$, $\frac{1}{f}$, f^3 e $|f|$.

4. Dadas as funções reais f de $A = \{-3, 0, 2, 3, 4\}$ em **R** e g de $B = \{2, 3, 4, 6\}$ em **R** seguintes:

$$f = (\{(-3, 2), (0, 0), (2, 4), (3, -1), (4, 3)\}, A, \mathbf{R})$$

$$g = (\{(2, 0), (3, 4), (4, 7), (6, 2)\}, B, \mathbf{R})$$

determinar: $(f + g)(2)$, $(fg)(3)$ e $(f^2 + 3g)(4)$.

5. Dadas as funções reais f de $A = \{-2, -1, 2, 3, 4, 7\}$ em **R** e g de $B = \{-2, 0, 1, 2, 4\}$ em **R** seguintes:

$$f = (\{(-2, 0), (-1, 0), (2, 3), (3, 2), (4, 7), (7, 2)\}, A, \mathbf{R})$$

$$g = (\{(-2, 3), (0, 0), (1, 2), (2, 1), (4, 0)\}, B, \mathbf{R})$$

determinar: $f(f + g)$, $\frac{(f + g)}{(f - g)}$, $(\frac{1}{f})(\frac{1}{g})$ e $\frac{f}{g^2}$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. $f + g = (\{(2, 6), (3, 12), (4, 8), (5, 7)\}, A, \mathbf{Z})$

   $f - g = (\{(2, 2), (3, 6), (4, 4), (5, 7)\}, A, \mathbf{Z})$

   $fg = (\{(2, 8), (3, 27), (4, 12), (5, 0)\}, A, \mathbf{Z})$

   $\frac{f}{g} = (\{(2, 2), (3, 3), (4, 3)\}, \{2, 3, 4\}, \mathbf{Z})$

2. $f + g = (\{(3, 12), (4, 8)\}, \{3, 4\}, \mathbf{Q})$

   $f - g = (\{(3, 6), (4, 4)\}, \{3, 4\}, \mathbf{Q})$

   $fg = (\{(3, 27), (4, 12)\}, \{3, 4\}, \mathbf{Q})$

   $\frac{f}{g} = (\{(3, 3), (4, 3)\}, \{3, 4\}, \mathbf{Q})$

3. $f + 4 = (\{(1, 6), (2, 1), (3, 3)\}, A, \mathbf{R})$

   $3f = (\{(1, 6), (2, -9), (3, -3)\}, A, \mathbf{R})$

   $-f = (\{(1, -2), (2, 3), (3, 1)\}, A, \mathbf{R})$

   $\frac{1}{f} = (\{(1, \frac{1}{2}), (2, -\frac{1}{3}), (3, -1)\}, A, \mathbf{R})$

   $f^3 = (\{(1, 8), (2, -27), (3, -1)\}, A, \mathbf{R})$

   $|f| = (\{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}, A, \mathbf{R})$

4. $(f + g)(2) = 4$; $(fg)(3) = -4$; $(f^2 + 3g)(4) = 30$

5. $f(f + g) = (\{(-2, 0), (2, 12), (4, 49)\}, \{-2, 2, 4\}, \mathbf{R})$

   $\frac{(f + g)}{(f - g)} = (\{(-2, -1), (2, 2), (4, 1)\}, \{-2, 2, 4\}, \mathbf{R})$

   $(\frac{1}{f})(\frac{1}{g}) = (\{(2, \frac{1}{3})\}, \{2\}, \mathbf{R})$

   $\frac{f}{g^2} = (\{(-2, 0), (2, 3)\}, \{-2, 2\}, \mathbf{R})$

CAPÍTULO 21

CONJUNTOS EQÜIPOTENTES

1. CONJUNTOS EQÜIPOTENTES

Definição — Um conjunto A diz-se *eqüipotente* a um conjunto B se e somente se existe uma função $f : A \longrightarrow B$ que é *bijetora.*

Indica-se que A é eqüipotente a B por uma das seguintes notações:

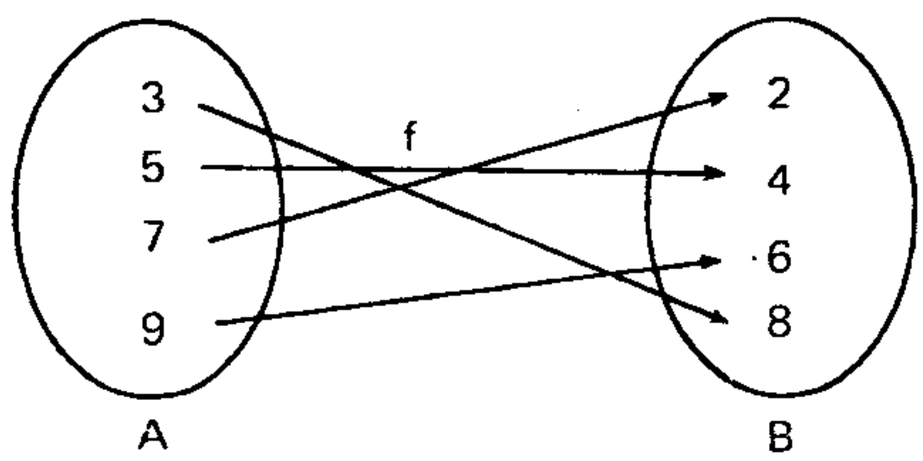
$$A \sim B \quad , \qquad A \rightleftarrows B \quad , \qquad Eq(A, B)$$

cada uma das quais se lê: "A é eqüipotente a B".

Se A é eqüipotente a B, a função bijetora $f : A \longrightarrow B$ e a sua função inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$ estabelecem uma *correspondência biunívoca* ou *correspondência um-a-um* entre os conjuntos A e B.

Exemplos:

1) Sejam os conjuntos $A = \{3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$. O diagrama abaixo define uma função bijetora $f : A \longrightarrow B$.



Logo, A *é eqüipotente a* B ($A \sim B$).

2) Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{3, 5\}$. Aqui, nenhuma das funções de A em B é bijetora, e, portanto, A *não é eqüipotente a* B ($A \nsim B$).

3) Sejam os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\} = [1, 2]$$

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid 8 \leqslant x \leqslant 13\} = [8, 13]$$

A função $f : A \longrightarrow B$ definida por $f(x) = 5x + 3$ é bijetora. Logo, A *é eqüipotente a* B ($A \sim B$).

4) Sejam os conjuntos:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \quad \text{e} \quad P = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

A função $f : \mathbf{N} \longrightarrow P$ definida por $f(n) = 2n$ é bijetora. Logo, o conjunto $\mathbf{N}$ dos números naturais é eqüipotente ao conjunto P dos números naturais pares ($\mathbf{N} \sim P$).

$$\begin{array}{lccccccccccc} \mathbf{N} = \{ & 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & \ldots & , & n & , & \ldots \} \\ & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow & & \\ P = \{ & 2 & , & 4 & , & 6 & , & 8 & , & \ldots & , & 2n & , & \ldots \} \end{array}$$

Observe-se que P é um *subconjunto próprio* de $\mathbf{N}$ ($P \subset \mathbf{N}$ e $P \neq \mathbf{N}$), pois $\mathbf{N}$ contém todos os elementos de P e mais outros: todos os números naturais ímpares.

5) Sejam A e B dois conjuntos e seja $f : A \longrightarrow B$ uma função injetora. A função $g : A \longrightarrow f(A)$ definida por $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A$ é bijetora, e, portanto, A é eqüipotente a $f(A)$, isto é, o domínio A de uma função injetora f é eqüipotente à sua imagem $f(A)$ ($A \sim f(A)$).

6) Seja A um conjunto qualquer. A função $f : A \longrightarrow A \times \{1\}$ definida por $f(x) = (x, 1)$ é bijetora. Logo, $A \sim A \times \{1\}$.

Teorema — A relação R no conjunto $\mathbf{P}(E)$ das partes de um conjunto E, definida por $ARB \Longleftrightarrow A \sim B$ é uma relação de equivalência em $\mathbf{P}(E)$, isto é, possui as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva:

(R) $A \sim A$

(S) Se $A \sim B$, então $B \sim A$

(T) Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$

Dem.: — (R) A função idêntica de A, $I_A : A \longrightarrow A$, é bijetora, qualquer que seja o conjunto $A \in \mathbf{P}(E)$. Logo, $A \sim A$.

(S) Se $A \sim B$, existe uma função bijetora $f : A \longrightarrow B$ e, portanto, existe a função inversa de f, $f^{-1} : B \longrightarrow A$, que também é bijetora. Logo, $A \sim B$ implica $B \sim A$.

(T) Se $A \sim B$ e $B \sim C$, existem as funções bijetoras $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$, e, portanto, a função composta $g \circ f : A \longrightarrow C$ também é bijetora. Logo, $A \sim B$ e $B \sim C$ implica $A \sim C$.

2. CONJUNTOS FINITOS E CONJUNTOS INFINITOS

Definição 1 — Um conjunto A diz-se *finito* se e somente se A é *vazio* ou se existe um número natural n tal que A é eqüipotente ao conjunto $\mathbf{N}_n = \{1,2,3,\ldots,n\}$ dos números naturais não superiores a n.

Se A é vazio ($A = \phi$), diz-se que o *número de elementos de* A *é* 0, e se $A \sim \mathbf{N}_n$ diz-se que o *número de elementos de* A *é* n.

O número de elementos de um conjunto finito A indica-se por n(A). Portanto: $n(A) = 0$ se $A = \phi$ e $n(A) = n$ se $A \sim \mathbf{N}_n$.

Se A é um conjunto finito e $B \subset A$, os conjuntos B e A - B também são finitos e $n(A) = n(B) + n(A - B)$.

Definição 2 — Um conjunto A que não é finito diz-se *infinito.*

É óbvio que, se A é finito (infinito) e se A é eqüipotente a B, então B também é finito (jnfinito).

Dois conjuntos finitos eqüipotentes têm o mesmo número de elementos, isto é, para conjuntos finitos a *eqüipotência* significa ter o mesmo número de elementos.

Um conjunto finito não pode ser eqüipotente a um de seus subconjuntos próprios, mas isto é possível para conjuntos infinitos, pois, como vimos anteriormente, o conjunto **N** dos números naturais é eqüipotente ao conjunto P dos números naturais pares, e P é um subconjunto próprio de **N**.

3. CONJUNTOS ENUMERÁVEIS

Definição — Um conjunto A diz-se *enumerável* se e somente se A é eqüipotente ao conjunto **N** dos números naturais ($A \sim \mathbf{N}$).

Como $\mathbf{N} \sim \mathbf{N}$, pois todo conjunto é eqüipotente a si mesmo, **N** *é enumerável.*

Todo conjunto enumerável A é infinito, porque $A \sim \mathbf{N}$ e **N** é infinito.

Se A é enumerável e se A é eqüipotente a B, então B também é enumerável, porque $B \sim A$ e $A \sim \mathbf{N}$ implica $B \sim \mathbf{N}$.

Um conjunto infinito que não é eqüipotente a **N** diz-se *não-enumerável.*

Exemplos:

1) Seja o conjunto $I = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ dos números naturais ímpares. A função $f : I \longrightarrow \mathbf{N}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$ é bijetora. Logo, I é eqüipotente a $\mathbf{N}$ ($I \sim \mathbf{N}$), e, portanto, o conjunto I *é enumerável.*

2) O conjunto **Z** dos números inteiros é eqüipotente a **N** ($\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}$), porque a função $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{N}$ assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ -2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é bijetora. Logo, o conjunto **Z** *é enumerável.*

3) Consideremos uma seqüência infinita em A de termos todos *distintos:* $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$. Esta seqüência é a função *injetora:*

$$f : n \in \mathbf{N} \longmapsto f(n) = a_n \in A$$

isto é:

$$f = (\{(1, a_1), (2, a_2), \ldots, (n, a_n), \ldots\}, \mathbf{N}, A)$$

A função $g : \mathbf{N} \longrightarrow f(\mathbf{N})$ tal que $g(n) = f(n)$ para todo $n \in \mathbf{N}$ é bijetora, e, portanto o conjunto $f(\mathbf{N}) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ dos termos da seqüência é enumerável. Assim, p. ex., são enumeráveis os seguintes conjuntos:

$$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$$

$$\{1, -2, 3, -4, \ldots, n.(-1)^{n-1}, \ldots\}$$

$$\{(1, 1), (4, 8), (9, 27), \ldots, (n^2, n^3), \ldots\}$$

5

OPERAÇÕES INTERNAS

CAPÍTULO 22

OPERAÇÕES INTERNAS. NOÇÕES FUNDAMENTAIS

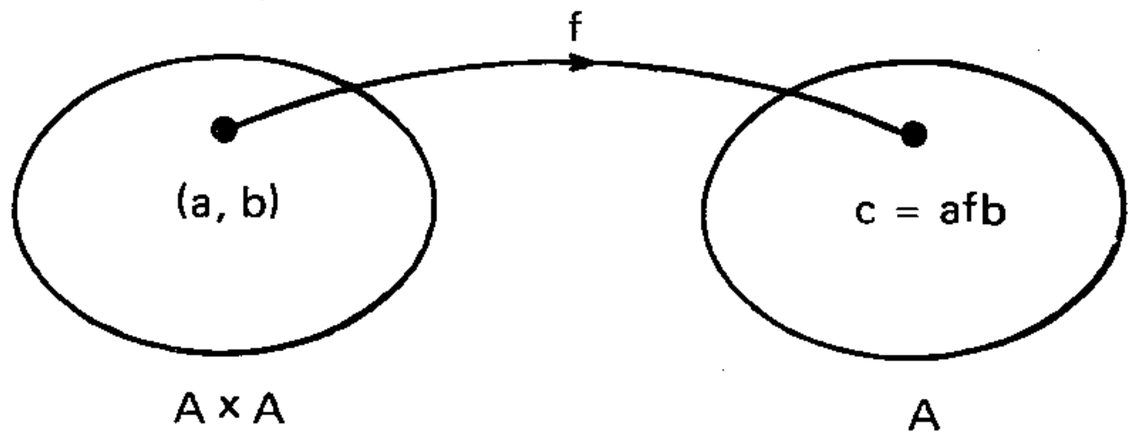
1. OPERAÇÃO INTERNA NUM CONJUNTO

Consideremos um conjunto não vazio $A\ (A \neq \phi)$ e o *produto cartesiano* $A \times A$ de A por si mesmo.

Definição — Chama-se *operação interna em* A ou apenas *operação em* A toda a função $f : A \times A \longrightarrow A$ do produto cartesiano $A \times A$ em A.

Portanto, uma operação f em A faz corresponder a todo par ordenado (a, b) de $A \times A$ um *único* elemento c = afb de A, isto é, simbolicamente:

$$f : (a, b) \in A \times A \xmapsto{f} c = afb \in A$$



Diz-se, então, que o conjunto A se acha *munido* da operação f e o conjunto produto $A \times A$ chama-se o *domínio* da operação f.

A imagem c = afb do elemento $(a, b) \in A \times A$ denomina-se o *composto* de a e b pela operação f; por sua vez, a e b dizem-se os *termos* do composto afb = c, sendo a o *primeiro termo* ou *termo da esquerda* e b o *segundo termo* ou *termo da direita.*

Por ser f uma operação com dois termos, a e b, é uma *operação binária;* além disso, f é uma *operação interna,* porque tanto os termos a e b como o composto afb = c são elementos de um mesmo conjunto A.

2. NOTAÇÕES

Para designar o *composto* afb de a e b relativo à operação f, usa-se colocar no lugar da letra f um sinal tal como $*, \circ, \top, \perp, \ldots$, isto é, em lugar de afb escreve-se:

$a * b$ ("a estrela b") ; $a \circ b$ ("a círculo b")

$a \top b$ ("a truc b") ; $a \perp b$ ("a antitruc b")

Com a *notação aditiva* escreve-se: $a + b$, que se lê: "a mais b". Neste caso, a operação $(a, b) \xmapsto{+} a + b = c$ denomina-se *adição* e c diz-se a *soma* das *parcelas* a e b.

Com a *notação multiplicativa* escreve-se: $a.b$ ou ab, que se lê: "a multiplicado por b" ou "a vezes b". Neste caso, a operação $(a, b) \xmapsto{\circ} a.b = c$ denomina-se *multiplicação* e c diz-se o *produto* dos *fatores* a e b.

Com a notação $(A, *, \circ, \top, \ldots)$ indica-se abreviadamente o conjunto A munido das operações $*, \circ, \top, \ldots$ Assim, p. ex.:

1) $(\mathbf{N}, +)$ designa o conjunto **N** dos números naturais munido da operação + de adição.

2) $(\mathbf{R}, X)$ designa o conjunto **R** dos números reais munido da operação $\circ$ de multiplicação.

3) $(\mathbf{P}(E), \cap)$ designa o conjunto $\mathbf{P}(E)$ das partes de E munido da operação $\cap$ de interseção.

4) $(F(A, A), \circ)$ designa o conjunto $F(A, A)$ das funções de A em A munido da operação $\circ$ de composição de funções.

NOTA — Sejam a, b, c três elementos quaisquer de um conjunto A munido da operação $*$. Como o composto de dois elementos é único, se $a = b$, então $a*c$ e $b*c$ são um mesmo elemento de A, e, portanto:

$$a = b \Longrightarrow a * c = b * c$$

Analogamente:

$$a = b \Longrightarrow c * a = c * b$$

Por conseqüência:

$$a = b \quad e \quad m = n \Longrightarrow a * m = b * n \quad e \quad m * a = n * b$$

3. EXEMPLOS DE OPERAÇÕES

1) A *adição* e a *multiplicação* de números naturais são *operações em* **N**, porque a todo par ordenado (a, b) de elementos de **N** associam respectivamente os elementos $a + b$ e ab de **N**, isto é:

$$(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \Longrightarrow a + b \in \mathbf{N} \quad e \quad ab \in \mathbf{N}$$

2) A função que a todo par ordenado (a, b) de elementos de **N** faz corresponder o elemento mdc (a, b) é uma *operação em* **N**, porque o mdc (a, b) é um elemento de **N**, isto é:

$$(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \Longrightarrow \text{mdc}\,(a, b) \in \mathbf{N}$$

3) A função que a todo par ordenado (a, b) de elementos de **N** associa o elemento a + 2b é uma *operação em* **N**, porque a + 2b é um elemento de **N**, isto é:

$$(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \Longrightarrow (a + 2b) \in \mathbf{N}$$

Adotando como símbolo desta operação a estrela * , temos:

$$a * b = a + 2b$$

e, portanto, em particular:

$$4 * 7 = 4 + 2.7 = 18 \quad ; \quad 5 * 5 = 5 + 2.5 = 15 \text{ , etc.}$$

4) No conjunto **P**(E) das partes de um dado conjunto E, a função que a todo par ordenado (X, Y) de elementos de **P**(E) faz corresponder a *interseção* $X \cap Y$ das *partes* X e Y de E, é uma *operação em* **P**(E), porque $X \cap Y \in \mathbf{P}(E)$, isto é:

$$(X \in \mathbf{P}(E) \quad e \quad Y \in \mathbf{P}(E)) \Longrightarrow X \cap Y \in \mathbf{P}(E)$$

Analogamente, a *reunião* $X \cup Y$ das *partes* X e Y de E também é uma *operação em* **P**(E), porque $X \cup Y \in \mathbf{P}(E)$, isto é:

$$(X \in \mathbf{P}(E) \quad e \quad Y \in \mathbf{P}(E)) \Longrightarrow X \cup Y \in \mathbf{P}(E)$$

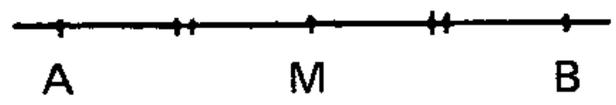
5) A *composição de funções* no conjunto F(A, A) das funções de A em A é uma *operação em* F(A, A), pois, se f e g são elementos desse conjunto, a função composta $f \circ g$ também o é, ou seja:

$$(f \in F(A, A) \quad e \quad g \in F(A, A)) \Longrightarrow f \circ g \in F(A, A)$$

6) Seja A um conjunto qualquer. A função que a todo par ordenado (a, b) de elementos de A associa o primeiro elemento a é uma *operação em* A.

Adotando $\top$ como símbolo desta operação, temos: $a \top b = a$.

7) Seja E o conjunto dos pontos do espaço. A função que a dois pontos quaisquer A e B associa o ponto médio M do segmento AB é uma operação em E, porque, quaisquer que sejam os pontos A e B, elementos de E, resulta bem determinado o ponto médio M do segmento AB, que também é elemento de E.



Adotando * como símbolo desta operação, temos: A * B = M, esta igualdade tendo o significado: "o ponto médio de AB é M".

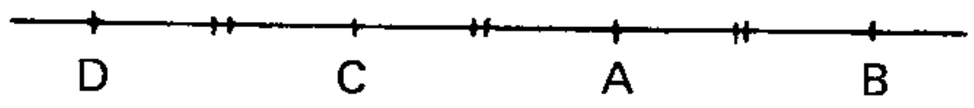
Observe-se que A * A = A e A * B = B * A.

8) Seja ainda E o conjunto dos pontos do espaço. A função que a dois pontos quaisquer M e N associa o ponto simétrico P do segundo, N, em relação ao primeiro, M, é uma operação * em E, tal que M * N = P, esta igualdade tendo o significado: "o simétrico de N em relação a M é P".

Na figura abaixo, os pontos A, B, C e D são tais que se tem:

A * B = C , A * C = B , C * A = D , C * D = A

Observe-se que A * C ≠ C * A.



9) A *adição* é uma operação no conjunto $\mathbf{P} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ dos números naturais pares, porque a somá de dois números naturais pares é um número natural par, mas não é uma operação no conjunto $I = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ dos números naturais ímpares, porque a soma de dois números naturais ímpares é um número natural par.

10) A *adição* e a *multiplicação* não são operações em $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, pois $2 + 3 = 5 \notin A$ e $2.3 = 6 \notin A$.

11) A *adição* é uma *operação em* $\mathbf{Z}_- = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \leqslant 0\}$, mas a *multiplicação* não o é, pois, $(-1).(-2) = 2 \notin \mathbf{Z}_-$.

12) Seja $S = \{A, B, C, D\}$, onde $A = \phi$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, c\}$, $D = \{a, b, c\}$. A *reunião* $\cup$ é uma *operação em* S, mas a *interseção* $\cap$ não o é, pois, $B \cap C = \{a\} \notin S$.

4. TÁBUA DE UMA OPERAÇÃO

Uma operação * num conjunto *finito* A pode sempre ser definida por meio de uma *tabela de dupla entrada* que indique o composto correspondente a cada par ordenado (a, b) de elementos de A, denominada *tábua da operação * em* A.

A tabela de dupla entrada ao lado define uma operação *, no conjunto finito $A = \{a, b, c, d\}$, ou seja, é a *tábua da operação * em* A. A leitura é feita linha por coluna; p. ex., o composto b * c de b e c encontra-se na interseção da linha b (termo da esquerda) com a coluna c (termo da direita), isto é, b * c = d.

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Exemplos:

1) Seja o conjunto $E = \{a, b\}$, com $a \neq b$. As *tábuas das operações* $\cap$ (interseção) e $\cup$ (reunião) *em* $\mathbf{P}(E) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, E\}$ são:

$\cap$	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	E
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
$\{a\}$	ϕ	$\{a\}$	ϕ	$\{a\}$
$\{b\}$	ϕ	ϕ	$\{b\}$	$\{b\}$
E	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	E

$\cup$	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	E
ϕ	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	E
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	E	E
$\{b\}$	$\{b\}$	E	$\{b\}$	E
E	E	E	E	E

2) Seja o conjunto $E = \{a, b\}$, com $a \neq b$. As *tábuas das operações* $-$ (diferença e Δ (diferença simétrica) em $\mathbf{P}(E) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, E\}$ são:

$-$	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	E
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
$\{a\}$	$\{a\}$	ϕ	$\{a\}$	ϕ
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b\}$	ϕ	ϕ
E	E	$\{b\}$	$\{a\}$	ϕ

Δ	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	E
ϕ	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	E
$\{a\}$	$\{a\}$	ϕ	E	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	E	ϕ	$\{a\}$
E	E	$\{b\}$	$\{a\}$	ϕ

5. PARTE FECHADA EM RELAÇÃO A UMA OPERAÇÃO

Seja A um conjunto munido de uma operação $*$ e seja F uma *parte* de A.

Definição — Diz-se que F é *fechada em relação à operação* $*$ se e somente se o composto $x * y$ de dois elementos quaisquer x e y de F é um elemento de $F (x * y \in F, \forall x, y \in F)$.

Também se costuma dizer que um conjunto A munido de uma operação $*$ é *fechado em relação à operação* $*$.

Exemplos:

1) Em $(\mathbf{N}, +)$, a parte $P = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ de $\mathbf{N}$ formada pelos números naturais pares é *fechada para a adição* $(+)$.

2) Em (**N**, .), a parte I = {1, 3, 5, 7, . . .} de **N** formada pelos números naturais ímpares é *fechada para a multiplicação* (.), mas em (**N**, +), I *não é fechada em relação à adição* (+).

3) Em (**Z**, .), {0}, {1}, {0, 1}, {-1, 1}, {-1, 0, 1} são partes de **Z** fechadas em relação à multiplicação (.).

4) Em (**N**, mmc), a parte F = {1, 2, 3, 4, 5, 6} de **N** não é fechada em relação à operação mmc. Realmente, temos, p. ex., mmc (4, 6) = 12 $\notin$ F.

5) Em (**C**, +), a parte F = {-1, 1, -i, i} ($i = \sqrt{-1}$) de **C** (conjunto dos números complexos) é *fechada para a multiplicação,* conforme deixa ver claramente a tábua ao lado.

.	-1	1	-i	i
-1	1	-1	i	-i
1	-1	1	-i	i
-i	i	-i	-1	1
i	-i	i	1	-1

Observe-se que em (**C**, :), esta mesma parte F de **C** é *fechada em relação à divisão.*

6) Em (**Q**, +), as partes **N**, **Z**, $\mathbf{Z}_-$ e $\mathbf{Q}_+$ de **Q** *são fechadas para à adição* (+). E em (**Q**, .), as partes **N**, **Z** e $\mathbf{Q}_+$ de **Q** *são fechadas para a multiplicação* (.).

6. RESTRIÇÃO DE UMA OPERAÇÃO

Seja A um conjunto munido de uma operação * e seja F uma parte de A fechada em relação à operação *.

Definição — Chama-se *restrição da operação * à parte fechada* F a função $f : F \times F \longrightarrow F$ definida por xfy = x * y.

A operação * em A e a sua restrição f à parte fechada F de A são geralmente indicadas pelo mesmo símbolo, * (f = *).

A restrição da operação * em A à parte fechada F de A também é denominada *operação induzida* em F pela operação * em A.

7. ITERAÇÃO DE UMA OPERAÇÃO

Seja A um conjunto munido de uma operação *. O composto de uma *terna ordenada* (a_1, a_2, a_3) de elementos de A é definido pela igualdade:

$$a_1 * a_2 * a_3 = (a_1 * a_2) * a_3$$

onde $(a_1 * a_2) * a_3$ significa que se deve determinar primeiro o composto de a_1 e a_2 e depois o composto de $a_1 * a_2$ e a_3.

Uma outra maneira de *associar* os elementos a_1, a_2 e a_3 (nesta ordem) é $a_1 * (a_2 * a_3)$ e significa que se deve determinar primeiro o composto de a_2 e a_3 e depois o composto de a_1 e $a_2 * a_3$.

Os compostos $(a_1 * a_2) * a_3$ e $a_1 * (a_2 * a_3)$ são, em geral, distintos.

O composto de uma *quaterna ordenada* (a_1, a_2, a_3, a_4) de elementos de A é definida pela igualdade:

$$a_1 * a_2 * a_3 * a_4 = (a_1 * a_2 * a_3) * a_4$$

onde $a_1 * a_2 * a_3$ indica o composto da terna ordenada (a_1, a_2, a_3), isto é:

$$a_1 * a_2 * a_3 * a_4 = ((a_1 * a_2) * a_3) * a_4$$

Todas as distintas maneiras de *associar* os elementos a_1, a_2, a_3 e a_4 (nesta ordem) são:

$$(a_1 * a_2 * a_3) * a_4 \qquad (1)$$

$$((a_1 * a_2) * a_3) * a_4 \qquad (2)$$

$$a_1 * (a_2 * a_3 * a_4) \qquad (3)$$

$$a_1 * ((a_2 * a_3) * a_4) \qquad (4)$$

$$(a_1 * (a_2 * a_3)) * a_4 \qquad (5)$$

$$a_1 * (a_2 * (a_3 * a_4)) \qquad (6)$$

$$(a_1 * a_2) * (a_3 * a_4) \qquad (7)$$

Pela definição de composto de uma terna ordenada, são *iguais* os compostos (1) e (2), bem como (3) e (4), e por conseguinte restam apenas os cinco compostos (2), (4), (5), (6) e (7), que, em geral, são distintos dois a dois.

De um modo geral, o composto de uma *n-upla* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de elementos de A é definido por recorrência do seguinte modo:

$$a_1 * a_2 * \ldots * a_n = \begin{cases} a_1 & \text{se } n = 1 \\ (a_1 * a_2 * \ldots * a_{n-1}) * a_n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Portanto, o composto da n-upla $(a_1 * a_2 * \ldots * a_n)$, com $n > 1$, se obtém efetuando sucessivamente a $n - 1$ operações seguintes:

$$((\ldots(((a_1 * a_2) * a_3) * a_4) * \ldots) * a_{n-1}) * a_n$$

Há diferentes maneiras de *associar* os elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (nesta ordem), que se obtêm por distribuições distintas dos parênteses. Assim, p. ex., uma das maneiras de *associar* os *sete* elementos $a_1, a_2, \ldots, a_7$ (nesta ordem) é a seguinte:

$$(a_1 * ((a_2 * a_3) * (a_4 * a_5))) * (a_6 * a_7)$$

onde a estrela da última operação é a única que fica fora de qualquer parêntese.

8. SOMAS E PRODUTOS

Quando o símbolo da operação é + (* = +, *notação aditiva*), o composto $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ indica-se por

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i$$

e é denominado *soma da n-upla* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ou *soma dos elementos* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (nesta ordem).

Analogamente, quando o símbolo da operação é . (* = ., *notação multiplicativa*), o composto $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ indica-se por

$$a_1 . a_2 . \ldots . a_n \quad \text{ou} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i$$

e é denominado *produto da n-upla* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ou *produto dos elementos* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (nesta ordem).

9. MÚLTIPLOS E POTÊNCIAS

O composto $a * a * \ldots * a$ (n elementos) indica-se por $\overset{n}{*} a$.

Esta notação é substituída por na quando o símbolo da operação é + (* = +, *notação aditiva*), e por a^n quando o símbolo da operação é . (* = ., *notação multiplicativa*), isto é:

$$a + a + \ldots + a \text{ (n parcelas)} = na$$

$$a . a . \ldots . a \text{ (n fatores)} = a^n$$

Diz-se, então, que na é o *múltiplo de* a *segundo o número natural* n e que a^n é a *potência n-ésima de* a. Além disso, a e n chamam-se, respectivamente, *base* e *expoente* de a^n.

Em particular, temos:

$1a = a$, $2a = a + a$ (*dobro de* a) , $3a = a + a + a$ (*triplo de* a) , etc.

$a^1 = a$, $a^2 = a.a$ (*quadrado de* a) , $a^3 = a.a.a$ (*cubo de* a) , etc.

CAPÍTULO 23

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

1. IDEMPOTÊNCIA

Definição — Uma operação * em A diz-se *idempotente* se e somente se para todo elemento a de A se tem: $a * a = a$.

Numa operação idempotente * em A tem-se: $\overset{n}{*}a = a \; (n \in \mathbf{N})$ para todo $a \in A$.

Exemplo — A *interseção* e a *reunião* em $\mathbf{P}(E)$ *são idempotentes:*

$$A \cap A = A \quad \text{e} \quad A \cup A = A \quad , \; \forall \, A \in \mathbf{P}(E)$$

2. COMUTATIVIDADE

Definição — Uma operação * em A diz-se *comutativa* se e somente se quaisquer que sejam os elementos a e b de A se tem: $a * b = b * a$.

Numa operação comutativa * em A, é imediato que a *restrição* de * a uma parte fechada F de A também é comutativa.

Exemplos:

1) A *adição* e a *multiplicação* em $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{R}$ *são comutativas:*

$$a + b = b + a \quad \text{e} \quad ab = ba \; , \quad \forall \, a, b \in \mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$$

2) A operação * em $\mathbf{R}$ definida por $a * b = \frac{1}{2}(a + b)$, denominada *média aritmética, é comutativa:*

$$a * b = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(b + a) = b * a \; , \quad \forall \, a, b \in \mathbf{R}$$

3) A operação * em $\mathbf{R}_+$ definida por $a * b = \sqrt{ab}$, denominada *média geométrica, é comutativa:*

$$a * b = \sqrt{ab} = \sqrt{ba} = b * a \; , \quad \forall \, a, b \in \mathbf{R}_+$$

4) A operação * em $\mathbf{R}$ definida por $a * b = a + b + ab$ *é comutativa:*

$$a * b = a + b + ab = b + a + ba = b * a \; , \quad \forall \, a, b \in \mathbf{R}$$

5) A *interseção*, a *reunião* e a *diferença simétrica* em **P**(E) *são comutativas:*

$$A \cap B = B \cap A \quad , \quad A \cup B = B \cup A \quad , \quad A \Delta B = B \Delta A \quad , \quad \forall\, A, B \in \mathbf{P}(E)$$

6) Seja E o conjunto dos pontos do espaço. A operação * em E definida por:

"M * N é o ponto médio do segmento MN"

é comutativa, porque o ponto médio do segmento MN é o mesmo que o do segmento NM, isto é, $M * N = N * M, \forall\, M, N \in E$.

7) A *subtração* em **R** *não é comutativa:* $7 - 5 = 2 \neq -2 = 5 - 7$.

8) A *potenciação* em **N** *não é comutativa:* $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$.

9) A operação * em $A = \{0, 1\}$, definida pela tábua ao lado, *não é comutativa:* $0 * 1 = 0 \neq 1 = 1 * 0$.

*	0	1
0	0	0
1	1	1

10) A operação * em **R** definida por a * b = a *não é comutativa:* $3 * 5 = 3 \neq$ $\neq 5 = 5 * 3$.

11) A operação * em **R** definida por a * b = a + 2b *não é comutativa:*

$$5 * 7 = 5 + 2.7 = 19 \qquad \text{e} \qquad 7 * 5 = 7 + 2.5 = 17$$

Portanto: $5 * 7 \neq 7 * 5$.

3. ASSOCIATIVIDADE

Definição — Uma operação * em A diz-se *associativa* se e somente se quaisquer que sejam os elementos a, b e c de A se tem:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Logo, para uma operação associativa * em A, o composto de uma terna ordenada (a, b, c) de elementos de A não depende da maneira de *associar* os elementos a, b e c (nesta ordem), isto é, os parênteses das expressões (a * b) * c e a * (b * c) podem ser suprimidos, o resultado comum sendo representado por a * b * c :

$$(a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c$$

Exemplos:

1) A *adição* e a *multiplicação* em **N**, **Z**, **Q** ou **R** *são associativas:*

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{e} \quad (a.b).c = a.(b.c)$$

quaisquer que sejam, a,b e c em **N**, **Z**, **Q** ou **R**.

2) A operação * em **R** definida por a * b = a *é associativa:*

$$(a * b) * c = a * c = a \quad \text{e} \quad a * (b * c) = a * b = a$$

quaisquer que sejam a, b e c em **R**.

3) A operação * em **R** definida por a * b = a + b + ab *é associativa:*

$$(a * b) * c = (a + b + ab) * c = a + b + ab + c + (a + b + ab)c =$$
$$= a + b + c + ab + ac + bc + abc \ ;$$

$$a * (b * c) = a * (b + c + bc) = a + b + c + bc + a(b + c + bc) =$$
$$= a + b + c + ab + ac + bc + abc$$

Portanto: $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall$ a, b, c$\in$**R**.

4) A *interseção,* a *reunião* e a *diferença simétrica* em **P**(E) *são associativas:*

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad , \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C) \quad , \quad \forall A, B, C \in \mathbf{P}(E)$$

5) A operação de *composição de funções* no conjunto F(A, A) das funções de A em A *é associativa:*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \ , \quad \forall \ f, g, h \in F(A, A)$$

6) A operação * em A = {a, b, c, d, e} definida pela tábua ao lado *é associativa.* Por exemplo:

*	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

$$(b * c) * d = d * d = b$$
$$b * (c * d) = b * a = b \ ;$$
$$(d * e) * a = c * a = c$$
$$\text{e}$$
$$d * (e * a) = d * e = c \ ; \text{ etc.}$$

Esta mesma operação também *é comutativa.* Observe-se que são *iguais* os elementos simetricamente colocados em relação à *diagonal principal* (a, c, e, b, d).

7) A *subtração* em **R** *não é associativa:* (8 - 5) - 2 = 3 - 2 = 1 e 8 - (5 - 2) = = 8 - 3 = 5.

8) A *divisão* em $\mathbf{R}^*$ *não é associativa:* $(12:6):2 = 2:2 = 1$ e $12:(6:2) = 12:3 = 4$.

9) A *potenciação* $a * b = a^b$ em $\mathbf{N}$ *não é associativa:*

$$(2 * 3) * 2 = 2^3 * 2 = 8 * 2 = 8^2 = 64$$

e

$$2 * (3 * 2) = 2 * 3^2 = 2 * 9 = 2^9 = 512$$

Portanto: $(2 * 3) * 2 \neq 2 * (3 * 2)$, isto é: $(2^3)^2 \neq 2^{(3^2)}$.

NOTA — Por *convenção* a^{b^c} significa sempre $a^{(b^c)}$.

10) A operação * em $\mathbf{R}$ definida por $a * b = a + 2b$ *não é associativa:*

$$(a * b) * c = (a + 2b) * c = a + 2b + 2c$$

e

$$a * (b * c) = a * (b + 2c) = a + 2(b + 2c) = a + 2b + 4c$$

11) A operação * em $\mathbf{R}$ definida por $a * b = \frac{1}{2}(a + b)$ (*média aritmética*) *não é associativa:*

$$(a * b) * c = \frac{1}{2}(a + b) * c = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(a + b) + c) = \frac{1}{4}(a + b + 2c)$$

$$a * (b * c) = a * \frac{1}{2}(b + c) = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{2}(b + c)) = \frac{1}{4}(2a + b + c)$$

12) A operação * em $A = \{1, 2, 3\}$ definida pela tábua ao lado *não é associativa:*

*	1	2	3
1	1	2	3
2	3	1	2
3	2	3	1

$$(2 * 3) * 1 = 2 * 1 = 3$$

$$2 * (3 * 1) = 2 * 2 = 1$$

4. ASSOCIATIVIDADE GENERALIZADA

Se a operação * em A é associativa, todos os compostos que se podem formar *associando* de diferentes maneiras n elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de A, nesta ordem, são *iguais* ao composto $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ da n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e, portanto, todos estes compostos são iguais entre si.

Vamos demonstrar, p. ex., que se tem:

$$(a_1 * ((a_2 * a_3) * (a_4 * a_5))) * (a_6 * a_7) = a_1 * a_2 * \ldots * a_7$$

Com efeito, temos:

$$a_1 * a_2 * \ldots * a_7 = (a_1 * a_2 * \ldots * a_6) * a_7 =$$
$$= ((a_1 * a_2 * \ldots * a_5) * a_6) * a_7 =$$
$$= (a_1 * a_2 * \ldots * a_5) * (a_6 * a_7)$$

Por outra parte, temos:

$$a_1 * a_2 * \ldots * a_5 = (a_1 * a_2 * a_3 * a_4) * a_5 = ((a_1 * a_2 * a_3) * a_4) * a_5$$
$$= (a_1 * a_2 * a_3) * (a_4 * a_5) = (a_1 * (a_2 * a_3)) * (a_4 * a_5) =$$
$$= a_1 * ((a_2 * a_3) * (a_4 * a_5))$$

Portanto:

$$a_1 * a_2 * \ldots * a_7 = (a_1 * ((a_2 * a_3) * (a_4 * a_5))) * (a_6 * a_7)$$

Como se vê, se a operação * é associativa, não é necessário usar parênteses para indicar agrupamentos de elementos de um composto com três ou mais termos, mas é essencial, no entanto, conservar a ordem segundo a qual os termos estão sendo considerados.

Se a operação * é associativa e comutativa, então o composto $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ da n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *não depende da ordem dos seus termos.* Vamos demonstrar, p. ex., que se tem:

$$a_1 * a_2 * a_3 * a_4 = a_3 * a_1 * a_4 * a_2$$

Com efeito, comecemos por levar o termo a_3 ao primeiro lugar. Temos:

$$a_1 * a_2 * a_3 * a_4 = a_1 * (a_2 * a_3) * a_4 = a_1 * (a_3 * a_2) * a_4 =$$
$$= (a_1 * a_3) * (a_2 * a_4) = a_3 * a_1 * a_2 * a_4$$

Por outra parte, temos:

$$a_3 * a_1 * a_2 * a_4 = (a_3 * a_1) * (a_2 * a_4) = (a_3 * a_1) * (a_4 * a_2)$$

Portanto: $a_1 * a_2 * a_3 * a_4 = a_3 * a_1 * a_4 * a_2$.

NOTA — Como conseqüência imediata da associatividade generalizada temos as duas seguintes fórmulas:

$$(\overset{m}{*}\, a) * (\overset{n}{*}\, a) = \overset{m+n}{*}\, a \qquad \text{e} \qquad \overset{m}{*}\,(\overset{n}{*}\, a) = \overset{mn}{*}\, a$$

Com as notações *aditiva* (+) e *multiplicativa* (.) estas fórmulas escrevem-se:

$$ma + na = (m + n)a \qquad \text{e} \qquad m(na) = (mn)a \;;$$

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad \text{e} \qquad (a^n)^m = a^{mn}$$

5. DISTRIBUTIVIDADE

Seja A um conjunto munido de *duas* operações, * e $\top$.

Definição 1 — Diz-se que a operação * *é distributiva à esquerda em relação à operação* $\top$ se e somente se, quaisquer que sejam a, b e c em A, se tem:

$$a * (b \top c) = (a * b) \top (a * c)$$

Definição 2 — Diz-se que a operação * *é distributiva à direita em relação à operação* $\top$ se e somente se, quaisquer que sejam a, b e c em A, se tem:

$$(b \top c) * a = (b * a) \top (c * a)$$

Definição 3 — Diz-se que a operação * *é distributiva em relação à operação* $\top$ se e somente se * é distributiva à esquerda e à direita em relação à operação $\top$.

Em outros termos, a operação * *é distributiva em relação à operação* $\top$ se e somente se, quaisquer que sejam a, b e c em A, se tem:

$$a * (b \top c) = (a * b) \top (a * c) \quad \text{e} \quad (b \top c) * a = (b * a) \top (c * a)$$

NOTA — Se a operação * é distributiva à esquerda em relação à operação $\top$ e se * é comutativa, então * também é distributiva à direita em relação à operação $\top$. Com efeito, temos:

$$(b \top c) * a = a * (b \top c) = (a * b) \top (a * c) = (b * a) \top (c * a)$$

Analogamente, se a operação * é distributiva à direita em relação à operação $\top$ e se * é comutativa, então * também é distributiva à esquerda em relação à operação $\top$. Com efeito, temos:

$$a * (b \top c) = (b \top c) * a = (b * a) \top (c * a) = (a * b) \top (a * c)$$

Portanto, quando a operação * é comutativa, a distributividade unilateral de * em relação a uma operação $\top$ implica a distributividade bilateral de * em relação a $\top$, ou seja, a distributividade de * em relação a $\top$.

Em resumo, se a operação * é comutativa, os três tipos de distributividade antes definidos de * em relação a uma operação $\top$ coincidem entre si.

Exemplos:

1) Em (**R**, +, .), a multiplicação é distributiva em relação à adição:

$$a.(b + c) = a.b + a.c \quad \text{e} \quad (b + c).a = b.a + c.a$$

2) Em (**R**, -, .), a multiplicação é distributiva em relação à subtração:

$$a.(b - c) = a.b - a.c \quad \text{e} \quad (b - c).a = b.a - c.a$$

3) Em $(\mathbf{R}^*, +, :)$, a divisão é distributiva à direita em relação à adição:

$$(b + c) : a = (b : a) + (c : a)$$

4) Em $(\mathbf{R}^*, -, :)$, a divisão é distributiva à direita em relação à subtração:

$$(b - c) : a = (b : a) - (c : a)$$

5) Em $\mathbf{N}$, munido das operações de multiplicação e potenciação $b * c = b^c$, a potenciação é distributiva à direita em relação à multiplicação, pois temos:

$$(b.c) * a = (b.c)^a = (b^a).(c^a) = (b * a).(c * a)$$

Por outro lado, temos:

$$a * (b.c) = a^{b.c} \neq (a^b).(a^c) = (a * b).(a * c)$$

isto é, a potenciação não é distributiva à esquerda em relação à multiplicação.

6) Em $(\mathbf{P}(E), \cap, \cup)$, a interseção é distributiva em relação à reunião e vice-versa:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{e} \quad (B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A) \ ;$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{e} \quad (B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$$

7) Em $(\mathbf{P}(E), \cap, \Delta)$, a interseção é distributiva em relação à diferença simétrica:

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C) \quad \text{e} \quad (B \Delta C) \cap A = (B \cap A) \Delta (C \cap A)$$

8) Em $\mathbf{Z}$, munido da adição ($* = +$) e da operação $\top$ definida por $a \top b = a^2 b$, temos:

$$a \top (b + c) = a^2(b + c) = a^2 b + a^2 c = (a \top b) + (a \top c)$$

isto é, a operação $\top$ é distributiva à esquerda em relação à operação + de adição.

Por outro lado, temos:

$$(b + c) \top a = (b + c)^2.a = ab^2 + 2abc + ac^2$$

e

$$(b \top a) + (c \top a) = b^2 a + c^2 a$$

isto é, $(b + c) \top a \neq (b \top a) + (c \top a)$. Logo, a operação $\top$ não é distributiva à direita em relação à operação + de adição.

9) Em $\mathbf{Z}$, munido da adição e da operação $\top$ definida por $a \top b = a$, temos:

$$a \top (b + c) = a \quad \text{e} \quad (a \top b) + (a \top c) = a + a = 2a$$

isto é, $a \top (b + c) \neq (a \top b) + (a \top c)$. Logo, a operação $\top$ não é distributiva à esquerda em relação à operação + de adição.

Por outro lado, temos:

$$(b + c) \top a = b + c = (b \top a) + (c \top a)$$

isto é, a operação $\top$ é distributiva à direita em relação à operação + de adição.

10) Consideremos o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ munido da operação * definida por $x * y = x$ e da operação $\top$ definida pela tábua ao lado.

$\top$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Temos:

$$(x \top y) * z = x \top y = (x * z) \top (y * z)$$

isto é, a operação * é distributiva à direita em relação à operação $\top$.

Por outro lado, temos:

$$z * (x \top y) = z \qquad \text{e} \qquad (z * x) \top (z * y) = z \top z$$

E como a igualdade $z \top z = z$ somente é verdadeira para o elemento a de A ($a \top a = a$), segue-se que, em geral, $z * (x \top y) \neq (z * x) \top (z * y)$. Logo, a operação * não é distributiva à esquerda em relação à operação $\top$.

CAPÍTULO 24

ELEMENTOS NOTÁVEIS DE UM CONJUNTO MUNIDO DE UMA OPERAÇÃO

1. ELEMENTOS IDEMPOTENTES

Seja A um conjunto munido de uma operação $*$.

Definição — Diz-se que um elemento a de A é *elemento idempotente para a operação* $*$ se e somente se $a * a = a$.

Quando todo elemento de A é idempotente para a operação $*$, então a *operação* $*$ *é idempotente.*

Exemplos:

1) Em $(\mathbf{R}, +)$, o número 0 é elemento idempotente para a operação de adição: $a + a = a \Longrightarrow 2a = a \Longrightarrow a = 0$.

2) Em $(\mathbf{R}, .)$, os números 0 e 1 são elementos idempotentes para a operação de multiplicação:

$$a.a = a \Longrightarrow a^2 = a \Longrightarrow a(a - 1) = 0 \Longrightarrow a = 0 \quad \text{ou} \quad a = 1$$

3) Em $\mathbf{R}$, munido da operação $*$ definida por $a * b = ab - (a + b) + 2$, os números 1 e 2 são elementos idempotentes para a operação $*$:

$$a * a = a \Longrightarrow a.a - (a + a) + 2 = a \Longrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a = 1 \quad \text{ou} \quad a = 2$$

4) Em $\mathbf{R}$, munido da operação $\top$ definida por $a \top b = \frac{1}{2}(a+b)$, todo elemento $a \in \mathbf{R}$ é idempotente para a operação $\top$: $a \top a = \frac{1}{2}(a + a) = a$, isto é, a operação $\top$ é idempotente.

5) Em $\mathbf{R}$, munido da operação $*$ definida por $a * b = a$, todo elemento $a \in \mathbf{R}$ é idempotente para a operação $*$: $a * a = a$, isto é, a operação $*$ é idempotente .

2. ELEMENTO ABSORVENTE

Seja A um conjunto munido de uma operação $*$.

Definição — Diz-se que $a \in A$ é *elemento absorvente para a operação* $*$ se e somente se para todo $x \in A$ se tem: $a * x = x * a = a$.

Observe-se que a condição $a * x = x * a$ sempre se verifica quando a operação $*$ é *comutativa.*

Unicidade do elemento absorvente — Se a *e* a' *são elementos absorventes para a operação* $*$, *então* $a = a'$.

Dem.: — Com efeito, para todo $x \in A$, temos:

$$a * x = a \quad (1) \qquad e \qquad x * a' = a' \quad (2)$$

Fazendo $x = a'$ em (1) e $x = a$ em (2), vem:

$$a * a' = a \qquad e \qquad a * a' = a' \qquad \therefore \qquad a = a'$$

NOTA — Se a é o elemento absorvente para a operação $*$, temos $a * x = a$ para todo $x \in A$. Em particular, para $x = a$, vem $a * a = a$, isto é, a *é elemento idempotente para a operação* $*$.

Exemplos:

1) Em $(\mathbf{R}, .)$, o número 0 é o elemento absorvente para a operação de multiplicação: $0.x = x.0 = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

2) Em $(\mathbf{P}(E), \cap)$, o conjunto vazio ϕ é o elemento absorvente para a operação de interseção: $\phi \cap X = X \cap \phi = \phi$, $\forall\, X \in \mathbf{P}(E)$.

3) Em $(\mathbf{P}(E), \cup)$, o conjunto E é o elemento absorvente para a operação de reunião: $E \cup X = X \cup E = E$, $\forall\, X \in \mathbf{P}(E)$.

4) Em $\mathbf{R}$, munido da operação $*$ definida por $a * b = a + b - ab$, o número 1 é o elemento absorvente para a operação $*$:

$$a * x = a \Longrightarrow a + x - ax = a \Longrightarrow x(1 - a) = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Como a operação $*$ é *comutativa:* $1 * x = x * 1 = 1$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

3. ELEMENTO NEUTRO

Seja A um conjunto munido de uma operação $*$.

Definição — Diz-se que $e \in A$ é *elemento neutro para a operação* $*$ se e somente se para todo $x \in A$ se tem: $e * x = x * e = x$.

Observe-se que a condição $e * x = x * e$ sempre se verifica quando a operação $*$ é *comutativa.*

Unicidade do elemento neutro — Se e *e* e' *são elementos neutros para a operação* $*$, *então* $e = e'$.

Dem.: — Com efeito, para todo $x \in A$, temos:

$$e * x = x \quad (1) \qquad e \qquad x * e' = x \quad (2)$$

Fazendo $x = e'$ em (1) e $x = e$ em (2), vem:

$$e * e' = e' \qquad e \qquad e * e' = e \qquad \therefore \qquad e' = e$$

NOTA — Se e é o elemento neutro para a operação $*$, temos $e * x = x$ para todo $x \in A$. Em particular, para $x = e$, vem $e * e = e$, isto é, e *é elemento idempotente para a operação* $*$.

Exemplos:

1) Em $(\mathbf{R}, +)$, o número 0 é o elemento neutro para a operação de adição: $0 + x = x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

2) Em $(\mathbf{R}, .)$, o número 1 é o elemento neutro para a operação de multiplicação: $1.x = x.1 = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

3) Em $(\mathbf{P}(E), \cap)$, o conjunto E é o elemento neutro para a operação de interseção: $E \cap X = X \cap E = X$, $\forall X \in \mathbf{P}(E)$.

4) Em $(\mathbf{P}(E), \cup)$, o conjunto vazio ϕ é o elemento neutro para a operação de reunião: $\phi \cup X = X \cup \phi = X$, $\forall X \in \mathbf{P}(E)$.

5) Em $(\mathbf{P}(E), \Delta)$, o conjunto vazio ϕ é o elemento neutro para a operação diferença simétrica: $\phi \Delta X = X \Delta \phi = X$, $\forall X \in \mathbf{P}(E)$.

6) Em $A = \{1, 2, 3\}$, munido da operação $*$ definida pela *tábua* ao lado, 3 é o elemento neutro para a operação $*$, pois temos:

*	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

$$3 * 1 = 1 = 1 * 3,$$
$$3 * 2 = 2 = 2 * 3,$$
$$3 * 3 = 3 = 3 * 3$$

NOTA — Para uma operação $*$ num conjunto finito, definida por uma *tábua*, o *elemento neutro*, caso exista, se encontra na interseção da linha e coluna de mesma ordem que são respectivamente iguais à linha e a coluna que começam logo após o símbolo $*$.

7) Em $(\mathbf{N}, +)$, não existe o elemento neutro para a operação de adição, porque $e + x = x + e = x$ implica $e = 0$, mas $0 \notin \mathbf{N}$.

8) Em $(\mathbf{Z}, -)$, não existe o elemento neutro para a operação de subrração,

porque $x - e = e - x = x$ implica $e = 0$ e $-x = x$, mas a segunda igualdade não é verdadeira para todo x em **Z**.

9) Em $(\mathbf{R}^*, :)$, não existe o elemento neutro para a operação de divisão, porque $x : e = e : x = x$ implica $e = 1$ e $1 : x = x$, mas a segunda igualdade não é verdadeira para todo x em $\mathbf{R}^*$.

10) A operação máximo divisor comum em **N** não tem o elemento neutro, pois não existe nenhum $e \in \mathbf{N}$ tal que, para todo número natural x, se verifique $\text{mdc}(e, x) = x$.

4. ELEMENTO ZERO E ELEMENTO UNIDADE

Para uma operação * em A indicada com a *notação aditiva* ($* = +$), o elemento neutro *e* para esta operação, se existe, chama-se *elemento zero* ou apenas *zero,* e representa-se por 0 ($e = 0$), quando não importa confundir com o *número* 0. Então, para todo x em A, tem-se: $x + 0 = 0 + x = x$.

Analogamente, para uma operação * em A indicada com a *notação multiplicativa* ($* = .$), o elemento neutro *e* para esta operação, se existe, chama-se *elemento unidade* ou apenas *unidade,* e representa-se por 1 ($e = 1$), quando não fizer mal confundir com o *número* 1. Então, para todo x em A, tem-se: $1.x = x.1 = x$.

NOTA — Para uma operação * em A que possui elemento neutro *e,* coloca-se, por definição: $\overset{0}{*}x = e$, qualquer que seja x em A. Portanto, com as notações aditiva e multiplicativa, temos: $0x = 0$ e $x^0 = 1$, $\forall x \in A$.

Se F é uma *parte fechada de* A e se $e \in F$, é imediato que *e* também é o elemento neutro para a *restrição* de * à parte F.

5. ELEMENTOS PERMUTÁVEIS

Seja A um conjunto munido de uma operação * .

Definição — Diz-se que dois elementos a e b de A são *permutáveis* ou que a e b *permutam* na operação * se e somente se $a * b = b * a$.

Também se diz que a e b são *comutáveis* ou que a e b *comutam* na operação * .

Portanto, se a operação * em A é *comutativa,* todo par de elementos de A comutam entre si.

Quando existe um elemento $c \in A$ permutável com qualquer elemento x de A, isto é, tal que $c * x = x * c$, $\forall x \in A$, diz-se que c é um *elemento central de* (A, *). Além disso, chama-se *centro de* (A, *) o conjunto de todos os seus elementos centrais, que se indica por $C_*(A)$.

O *elemento absorvente* a e o *elemento neutro* e para a operação *, caso existam, são elementos centrais de (A, *), pois por definição: $a * x = x * a = a$ e $e * x = x * e = x$, $\forall x \in A$.

Obviamente, uma operação * em A é *comutativa* se e somente se os conjuntos A e $C_*(A)$ coincidem ($A = C_*(A)$).

6. ELEMENTOS REGULARES

Seja A um conjunto munido de uma operação *.

Definição 1 — Diz-se que $a \in A$ é um *elemento regular à esquerda para a operação* * se e somente se, quaisquer que sejam os elementos x e y de A, a relação $a * x = a * y$ implica $x = y$, isto é:

$$(\forall x, y \in A)\ (a * x = a * y \Longrightarrow x = y)$$

Também se diz que a é um *elemento simplificável à esquerda para a operação* *, e quando se passa da igualdade $a * x = a * y$ para a igualdade $x = y$ diz-se que se *simplifica à esquerda por* a.

Quando todo elemento de A é simplificável à esquerda diz-se que é *válida a regra de simplificação à esquerda em* A *para a operação* *.

Definição 2 — Diz-se que $a \in A$ é um *elemento regular à direita para a operação* *, se e somente se, quaisquer que sejam os elementos x e y de A, a relação $x * a = y * a$ implica $x = y$, isto é:

$$(\forall x, y \in A)\ (x * a = y * a \Longrightarrow x = y)$$

Também se diz que a é um *elemento simplificável à direita para a operação* *, e quando se passa da igualdade $x * a = y * a$ para a igualdade $x = y$ diz-se que se *simplifica à direita por* a.

Quando todo elemento de A é simplificável à direita diz-se que é *válida a regra de simplificação à direita em* A *para a operação* *.

Definição 3 — Diz-se que $a \in A$ é um *elemento regular para a operação* * se e somente se a é um elemento regular à esquerda e à direita para a operação *.

Em outros termos, a é um *elemento regular para a operação* * se e somente se, quaisquer que sejam os elementos x e y de A, as relações $a * x = a * y$ e $x * a = y * a$ implicam $x = y$, isto é:

$$(\forall x, y \in A)\ (a * x = a * y \Longrightarrow x = y \ \text{ e } \ x * a = y * a \Longrightarrow x = y)$$

Também se diz que a é um *elemento simplificável para a operação* * , e quando se passa da igualdade $a * x = a * y$ (ou $x * a = y * a$) para a igualdade $x = y$ diz-se que se *simplifica por* a.

Quando todo elemento de A é simplificável, diz-se que é *válida a regra de simplificação em* A *para a operação* * .

Obviamente, se a operação * é comutativa, todo elemento regular à esquerda ou à direita para a operação * é elemento regular para esta operação.

O elemento neutro e para a operação * , se existe, é um elemento regular para esta operação.

Exemplos:

1) Em (**R**, +), todo número real a é *elemento regular* para a operação de adição:

$$a + x = a + y \Longrightarrow x = y \quad \text{e} \quad x + a = y + a \Longrightarrow x = y$$

2) Em (**R**, .), todo número real $a \neq 0$ é *elemento regular* para a operação de multiplicação:

$$a.x = a.y \Longrightarrow x = y \quad \text{e} \quad x.a = y.a \Longrightarrow x = y$$

Note-se que $0.x = 0.y$ não implica $x = y$, porque a 1.ª igualdade tem lugar quaisquer que sejam x e y em **R**.

3) Em **R**, munido da operação * definida por $a * b = a$, todo número real a é *elemento regular à direita* para esta operação:

$$x * a = y * a \Longrightarrow x = y$$

Observe-se que $a * x = a * y$ não implica $x = y$, porque a 1.ª igualdade tem lugar quaisquer que sejam a, x, y em **R**. Logo, a operação * não possui elemento regular à esquerda e, portanto, elemento regular.

4) Em **N**, munido da operação * definida por $a * b = a^b$ (potenciação), todo número natural $a \neq 1$ é *elemento regular* para esta operação:

$$a^x = a^y \Longrightarrow x = y \quad \text{e} \quad x^a = y^a \Longrightarrow x = y$$

Note-se que $1^x = 1^y$ não implica $x = y$, porque a 1.ª igualdade tem lugar quaisquer que sejam x e y em **N**.

Como $x^1 = y^1 \Longrightarrow x = y$, segue-se que 1 é *elemento regular à direita* para a operação de potenciação em **N**.

5) Em **R**, munido da operação * definida por $a * b = a - b + ab$, se verifica:

$$a * x = a * y \Longrightarrow a - x + ax = a - y + ay \Longrightarrow (a - 1)x = (a - 1)y$$

$$x * a = y * a \Longrightarrow x - a + xa = y - a + ya \Longrightarrow (1 - a)x = (1 - a)y$$

Logo, todo número real $a \neq 1$ é elemento regular para a operação *.

6) Em $(\mathbf{P}(E), \cap)$, somente o conjunto E é *elemento regular* para a interseção, pois, se $A \neq E$, $A \cap X = A \cap Y$ não implica $X = Y$.

7) Em $(\mathbf{P}(E), \cup)$, somente o conjunto vazio ϕ é *elemento regular* para a reunião, pois, se $A \neq \phi$, $A \cup X = A \cup Y$ não implica $X = Y$.

7. ELEMENTOS SIMETRIZÁVEIS

Seja A um conjunto munido de uma operação * que *admite elemento neutro* e.

Definição — Diz-se que um elemento a de A é *simetrizável para a operação* * se e somente se existe ao menos um elemento a' de A tal que

$$a * a' = a' * a = e$$

Também se diz que a' *é simétrico de* a *para a operação* *.

O conjunto de todos os elementos de A simetrizáveis para a operação * indica-se por $S_*(A)$.

Da definição anterior resulta imediatamente que:

i) Se a é simetrizável, então seu simétrico a' também é simetrizável e a é simétrico de a' : $(a')' = a$.

ii) O elemento neutro e é simetrizável e o próprio e é seu simétrico, pois $e * e = e$. Logo, $e' = e$.

Quando o símbolo da operação em A é + (* = +, *notação aditiva*), a denomina-se *oposto de* a e representa-se por $-a$ $(a' = -a)$. Portanto:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0 \quad \text{e} \quad -(-a) = a$$

Quando o símbolo da operação em A é . (* = ., *notação multiplicativa*), a' denomina-se *inverso de* a (a diz-se agora *inversível*) e representa-se por a^{-1} $(a' = a^{-1})$. Portanto:

$$a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1 \quad \text{e} \quad (a^{-1})^{-1} = a$$

Exemplos:

1) Em $(\mathbf{N}, .)$, temos $S.(\mathbf{N}) = \{1\}$, isto é, o único elemento *inversível* é 1, cujo *inverso* é o próprio 1.

2) Em $(\mathbf{Z}, +)$ e $(\mathbf{Z}, .)$, temos $S_+(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ e $S.(\mathbf{Z}) = \{-1, 1\}$.

3) Em $(\mathbf{Q}, .)$ e $(\mathbf{R}, .)$, temos $S.(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^*$ e $S.(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^*$.

4) Em $(\mathbf{P}(E), \cap)$ e $(\mathbf{P}(E), \cup)$, temos $S_\cap(\mathbf{P}(E)) = \{E\}$ e $S_\cup(\mathbf{P}(E)) = \{\phi\}$.

5) Seja $(\mathbf{Q}, *)$, a operação $*$ definida por $a * b = a + b - ab$.

É imediato que, para todo $x \in \mathbf{Q}: 0 * x = x * 0 = x$. Logo, 0 é o elemento neutro para a operação $*$.

Se $a \in \mathbf{Q}$ é simetrizável e admite a' por simétrico, temos:

$$a * a' = 0 \Longrightarrow a + a' - aa' = 0 \Longrightarrow a' = \frac{a}{a - 1} \ (a \neq 1)$$

Portanto, todo elemento a de $\mathbf{Q}$, exceto 1, é simetrizável, e tem por simétrico $\frac{a}{(a-1)}$, isto é, $S_*(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} - \{1\}$.

6) Seja $(\mathbf{R}, *)$, a operação $*$ definida por $a * b = a + b - 2a^2b^2$.

O elemento neutro para esta operação é 0, pois, para todo $x \in \mathbf{R}$, $0 * x = x * 0 = x$. Portanto, se $a \in \mathbf{R}$ é simetrizável e admite a' por simétrico, temos:

$$a * a' = 0 \Longrightarrow a + a' - 2a^2a'^2 = 0 \Longrightarrow a' = \frac{(1 \pm \sqrt{1 + 8a^3})}{4a^2}$$

Como $1 + 8a^3 \geqslant 0$ implica $a \geqslant -\frac{1}{2}$, segue-se que todo número real a, diferente de zero e tal que $a > -\frac{1}{2}$, é simetrizável e admite *dois* simétricos. Assim, p. ex., 1 é simetrizável e admite *dois simétricos:* 1 e $-\frac{1}{2}$. Em particular, $-\frac{1}{2}$ é simetrizável e tem como *único simétrico* 1.

Em resumo, temos $S_*(\mathbf{R}) = \{a \in \mathbf{R}^* \mid a \geqslant -\frac{1}{2}\}$.

8. PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS SIMETRIZÁVEIS PARA UMA OPERAÇÃO ASSOCIATIVA.

Seja A um conjunto munido de uma *operação associativa* $*$ *que admite elemento neutro* e.

(P_1) *Todo elemento simetrizável* a *de* A *admite um único simétrico.*

Dem.: — Com efeito, suponhamos que a admite *dois simétricos,* a' e a'', para a operação *. Então, temos:

$$a * a' = a' * a = e \qquad e \qquad a * a'' = a'' * a = e$$

Posto isto, usando estas duas relações e a propriedade associativa da operação *, calculemos de *duas maneiras* o composto a'' * a * a':

$$a'' * a * a' = (a'' * a) * a' = e * a' = a'$$

$$a'' * a * a' = a'' * (a * a') = a'' * e = a''$$

Por conseqüência: a' = a''.

(P_2) *Todo elemento simetrizável* a *de* A *é regular para a operação* *.

Dem.: — Com efeito, suponhamos a * x = a * y, com x, y∈A. Então, se a' é o simétrico de a, também temos:

$$a' * (a * x) = a' * (a * y)$$

ou seja, por ser a operação * associativa:

$$(a' * a) * x = (a' * a) * y$$

ou, por ser a' * a = e:

$$e * x = e * y \qquad \therefore \qquad x = y$$

Suponhamos, agora, x * a = y * a, com x, y∈A. Então, analogamente, também temos:

$$(x * a) * a' = (y * a) * a'$$

$$x * (a * a') = y * (a * a')$$

$$x * e = y * e \qquad \therefore \qquad x = y$$

Logo, a *é elemento regular para a operação* *.

(P_3) *Se* a *e* b *são elementos simetrizáveis de* A *e seus simétricos respectivos são* a' *e* b', *então* a * b *é simetrizável e seu simétrico é* b' * a'.

Dem.: — Com efeito, por ser a operação * associativa, temos:

$$(a * b) * (b' * a') = a * (b * b') * a' = a * e * a' = a * a' = e$$

$$(b' * a') * (a * b) = b' * (a' * a) * b = b' * e * b = b' * b = e$$

Logo, a * b *é simetrizável e* (a * b)' = b' * a'.

Observe-se a *ordem* em que se deve compor os simétricos de a e b para obter o simétrico de a * b. O simétrico de b * a é a' * b'.

Em particular, se a operação * é *associativa* e *comutativa,* então, temos:

$$(a * b)' = (b * a)' = a' * b' = b' * a'$$

De conformidade com a Propriedade P_2, a * b e b' * a' são *elementos regulares* para a operação *.

Na *notação aditiva* (* = +), a Propriedade P_3 nos ensina que, se a e b são simetrizáveis, então a + b é simetrizável e

$$-(a + b) = (-b) + (-a)$$

Na *notação multiplicativa* (* = .), a mesma Propriedade P_3 nos ensina que se a e b são inversíveis, então a.b é inversível e

$$(a.b)^{-1} = b^{-1}.a^{-1}$$

Em particular, se a operação * é *associativa* e *comutativa,* então as duas fórmulas anteriores podem escrever-se sob as formas habituais:

$$-(a + b) = (-a) + (-b) \quad , \quad (a.b)^{-1} = a^{-1}.b^{-1}$$

E X E R C Í C I O S

1. Mostrar que a *multiplicação* é uma operação em $A = \{-1, 1\}$.

2. Mostrar que o *mdc* e o *mmc* são operações em $A = \{1, 2, 3, 6\}$ e construir as *tábuas* destas operações.

3. Construir a *tábua* da operação de multiplicação em $A = \{-1, 0, 1\}$.

4. Seja $S = \{A, B, C, D\}$ onde $A = \phi$, $B = \{a\}$, $C = \{a, b\}$, $D = \{a, b, c\}$. Mostrar que a *reunião* ($\cup$) e a *interseção* ($\cap$) são operações em S e construir as *tábuas* destas operações.

5. Seja $S = \{A, B, C, D\}$, onde $A = \phi$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, c\}$, $D = \{a, b, c\}$. Mostrar que a *interseção* ($\cap$) não é uma operação em S.

6. Seja $*$ a operação em **N** definida por $a * b = ab^2$. Calcular : $2 * 3$, $(2 * 3) * 2$ e $2 * (3 * 2)$.
   R. 18, 72, 288

7. Mostrar que as seguintes operações em **R** são *comutativas:*
   a) $a * b = ab + 3$
   b) $a * b = \sqrt{a^2 + b^2}$
   c) $a * b = a^2 - ab + b^2$
   d) $a * b = \dfrac{ab}{a + b}$

8. Determinar os *elementos idempotentes* para a operação $*$ em **Z** definida por $a * b = ab^2$.
   R. 0, 1, -1

9. Determinar os *elementos idempotentes* para a operação T em **Z** definida por $aTb = a + b + ab$.
   R. 0, -1

CAPÍTULO 25

HOMOMORFISMOS DE DUAS OPERAÇÕES

1. HOMOMORFISMO

Sejam A e B dois conjuntos munidos respectivamente das operações * e $\top$, e seja $f: A \longrightarrow B$ uma função de A em B.

Definição — Diz-se que f é um *homomorfismo de* (A, *) *em* (B, $\top$) se e somente se, quaisquer que sejam a e b em A, se tem:

$$f(a * b) = f(a) \top f(b)$$

Para todo homomorfismo f de (A, *) em (B, $\top$), a imagem f(A) da função $f: A \longrightarrow B$ passa a ser denominada *imagem do homomorfismo* f.

Exemplo — Consideremos o conjunto **N** dos números naturais munido das operações de *adição* e *multiplicação*. A função $f: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ definida por $f(x) = 2^x$ é um *homomorfismo de* (**N**, +) *em* (**N**, .), pois, quaisquer que sejam os números naturais a e b, temos:

$$f(a + b) = 2^{a+b} = 2^a . 2^b = f(a) . f(b)$$

2. EPIMORFISMO, MONOMORFISMO E ISOMORFISMO

Definição 1 — Diz-se que f é um *epimorfismo de* (A, *) *em* (B, $\top$) se e somente se f é um homomorfismo de (A, *) em (B, $\top$) e a função f é *sobrejetora* (f(A) = B).

Em outros termos, f é um *epimorfismo de* (A, *) *em* (B, $\top$) se e somente se são válidas as duas seguintes condições:

i) $f(a * b) = f(a) \top f(b)$

ii) $f(A) = B$

Um epimorfismo f de (A, *) em (B, $\top$) também se denomina *homomorfismo sobrejetor de* (A, *) *em* (B, $\top$).

Definição 2 — Diz-se que f é um *monomorfismo de* (A, *) *em* (B, $\top$) se e somente se f é um homomorfismo de (A, *) em (B, $\top$) e a função f é *injetora* ($a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b)$).

Em outros termos, f é um *monomorfismo de* (A, *) *em* (B, $\top$) se e somente se são válidas as duas seguintes condições:

i) $f(a * b) = f(a) \top f(b)$

ii) $a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b)$

Um monomorfismo f de (A, *) em (B, $\top$) também se denomina *homomorfismo injetor de* (A, *) *em* (B, $\top$).

Definição 3 — Diz-se que f é um *isomorfismo de* (A, *) *em* (B, $\top$) se e somente se f é um homomorfismo de (A, *) em (B, $\top$) e a função f é *bijetora* ($(\forall y \in B)\ (\exists!\ x \in A)\ (f(x) = y)$).

Em outros termos, f é um *isomorfismo de* (A, *) *em* (B, $\top$) se e somente se são válidas as duas seguintes condições:

i) $f(a * b) = f(a) \top f(b)$

ii) $(\forall y \in B)\ (\exists!\ x \in A)\ (f(x) = y)$

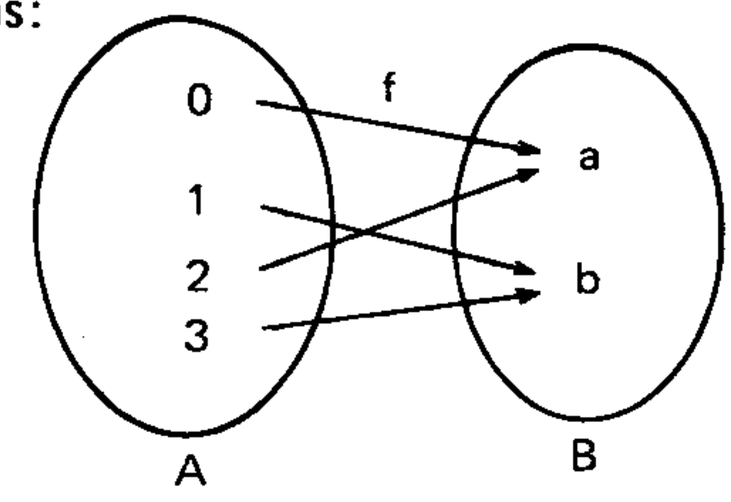
Um isomorfismo de (A, *) em (B, $\top$) também se denomina *homomorfismo bijetor de* (A, *) *em* (B, $\top$).

Exemplos:

1) Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$, munidos respectivamente das operações * e $\top$ definidas pelas tábuas:

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\top$	a	b
a	a	b
b	b	a



A função $f : A \longrightarrow B$ definida pelo diagrama acima é um *epimorfismo de* (A, *) *em* (B, $\top$), pois f satisfaz as condições (i) e (ii) da definição 1. Realmente, temos:

$$f(0 * 1) = f(1) = b = a \top b = f(0) \top f(1)$$

$$f(1 * 3) = f(0) = a = b \top b = f(1) \top f(3)\ \text{, etc.}$$

$$f(A) = \{a, b\} = B$$

A função $g : B \longrightarrow A$ definida por $g(a) = 0$ e $g(b) = 2$ é um *monomorfismo de* $(B, \top)$ *em* $(A, *)$, pois g satisfaz as condições (i) e (ii) da definição 2. De fato, temos:

$$g(a \top b) = g(b) = 2 = 0 * 2 = g(a) * g(b)$$

$$g(b \top b) = g(a) = 0 = 2 * 2 = g(b) * g(b) \text{ , etc.}$$

$$a \neq b \Longrightarrow g(a) \neq g(b) \ (0 \neq 2)$$

2) A função $f : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \text{Log}\, x$ é um *isomorfismo de* $(\mathbf{R}_+^*, .)$ em $(\mathbf{R}, +)$, pois, quaisquer que sejam a e b em $\mathbf{R}_+^*$, temos:

$$f(a.b) = \text{Log}\,(a.b) = \text{Log}\,a + \text{Log}\,b = f(a) + f(b)$$

e, além disso, a função f é bijetora.

3. ENDOMORFISMO E AUTOMORFISMO

Seja A um conjunto munido da operação * e seja $f : A \longrightarrow A$ uma função de A em A.

Definição 1 — Diz-se que f é um *endomorfismo de* $(A, *)$ se e somente se f é um homomorfismo de $(A, *)$ em $(A, *)$.

Em outros termos, f é um *endomorfismo de* $(A, *)$ se e somente se, quaisquer que sejam a e b em A, se tem: $f(a * b) = f(a) * f(b)$.

Definição 2 — Diz-se que f é um *automorfismo de* $(A, *)$ se e somente se f é um homomorfismo de $(A, *)$ em $(A, *)$ e a função f é bijetora.

Exemplos:

1) A função $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é um *endomorfismo* de $(\mathbf{R}_+, .)$, pois, quaisquer que sejam a e b em $\mathbf{R}_+$, temos:

$$f(a.b) = \sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b} = f(a).f(b)$$

2) A função $f : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}$ definida por $f(x) \doteq 2x$ é um *automorfismo de* $(\mathbf{Q}, +)$, pois, quaisquer que sejam os números racionais a e b, temos:

$$f(a + b) = 2(a + b) = 2a + 2b = f(a) + f(b)$$

e, além disso, a função f é bijetora.

4. PROPRIEDADES DOS HOMOMORFISMOS

Seja $f : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de $(A, *)$ em $(B, \top)$.

(P_1) *A imagem* f(A) *do homomorfismo* f *é uma parte de* B *fechada para a operação* $\top$ *em* B.

Dem.: — Quaisquer que sejam os elementos a_1 e b_1 de f(A), existem elementos a e b de A tais que $f(a) = a_1$ e $f(b) = b_1$.

Como a e b são elementos de A, a * b também é um elemento de A e, portanto, f(a * b) é um elemento de f(A).

Por outra parte, sendo f um homomorfismo, temos:

$$f(a * b) = f(a) \top f(b) = a_1 \top b_1 \in f(A)$$

(P_2) *Se a operação * em* A *é comutativa, então a operação* $\top$ *em* f(A) *também é comutativa.*

Dem.: — Quaisquer que sejam os elementos a_1 e b_1 de f(A), existem elementos a e b de A tais que $f(a) = a_1$ e $f(b) = b_1$. Portanto, se a operação * em A é comutativa, temos:

$$a * b = b * a \qquad \therefore \qquad f(a * b) = f(b * a)$$

ou seja, por ser f um homomorfismo:

$$f(a) \top f(b) = f(b) \top f(a) \ , \quad \text{isto é:} \quad a_1 \top b_1 = b_1 \top a_1$$

(P_3) *Se a operação * em* A *é associativa, então a operação* $\top$ *em* f(A) *também é associativa.*

Dem.: — Quaisquer que sejam os elementos a_1, b_1, c_1 de f(A), existem elementos a, b, c de A tais que $f(a) = a_1$, $f(b) = b_1$, $f(c) = c_1$. Portanto, se a operação * em A é associativa, temos:

$$(a * b) * c = a * (b * c) \qquad \therefore \qquad f((a * b) * c) = f(a * (b * c))$$

ou seja, por ser f um homomorfismo:

$$f(a * b) \top f(c) = f(a) \top f(b * c)$$

$$(f(a) \top f(b)) \top f(c) = f(a) \top (f(b) \top f(c))$$

isto é:

$$(a_1 \top b_1) \top c_1 = a_1 \top (b_1 \top c_1)$$

(P_4) *Se* e *é o elemento neutro para a operação * em* A, *então* $e_1 = f(e)$ *é o elemento neutro para a operação* $\top$ *em* f(A).

Dem.: — Qualquer que seja o elemento a_1 de f(A), existe $a \in A$ tal que $f(a) = a_1$. Portanto, se e é o elemento neutro para a operação * em A, temos:

$$e * a = a * e = a \qquad \therefore \qquad f(e * a) = f(a * e) = f(a)$$

ou seja, por ser f um homomorfismo:

$$f(e) \top f(a) = f(a) \top f(e) = f(a)$$

isto é:

$$e_1 \top a_1 = a_1 \top e_1 = a_1$$

(P_5) *Se* $a \in A$ *é simetrizável para a operação* * *em* A *e admite* a' *para simétrico, então* $a_1 = f(a) \in f(A)$ *é simetrizável para a operação* $\top$ *em* f(A) *e admite* $a'_1 = f(a')$ *para simétrico.*

Dem.: — Temos $a * a' = a' * a = e$ e, portanto:

$$f(a * a') = f(a' * a) = f(e)$$

ou seja, por ser f um homomorfismo:

$$f(a) \top f(a') = f(a') \top f(a) = f(e)$$

isto é:

$$a_1 \top a'_1 = a_1 \top a'_1 = e_1$$

5. NÚCLEO DE UM HOMOMORFISMO

Seja A um conjunto munido de uma operação * que admite *elemento neutro* e, e seja f um homomorfismo de (A, *) em (B, $\top$).

Pela Propriedade P_4, o *elemento neutro* para a operação $\top$ em f(A) é $e_1 = f(e)$.

Definição — Chama-se *núcleo do homomorfismo* f o conjunto de todos os elementos de A cuja imagem por f é o elemento neutro e_1.

O núcleo de f indica-se pela notação Nu(f). Portanto, simbolicamente:

$$Nu(f) = \{x \in A \mid f(x) = e_1\}$$

Obviamente: $e \in Nu(f)$.

Exemplo — Para o homomorfismo f de (**Z**, .) em ($\mathbf{Z}_+$, .) definido por $f(x) = x^2$ temos $Nu(f) = \{-1, 1\}$.

6. COMPOSIÇÃO DE HOMOMORFISMOS

Teorema — Se $f : A \longrightarrow B$ *é um homomorfismo de* (A, *) *em* (B, $\top$) *e se* $g : B \longrightarrow C$ *é um homomorfismo de* (B, $\top$) *em* (C, $\perp$), *então a função composta* $g \circ f : A \longrightarrow C$ *é um homomorfismo de* (A, *) *em* (C, $\perp$).

Dem.: — Com efeito, quaisquer que sejam os elementos a e b de A, temos:

$$(g \circ f)\ (a * b) = g(f(a * b)) = g(f(a) \top f(b)) =$$
$$= g(f(a)) \perp g(f(b)) = (g \circ f)\ (a) \perp (g \circ f)\ (b)$$

Como a função composta de duas funções bijetoras é bijetora, segue-se que em particular: *o composto de dois isomorfismos é um isomorfismo.*

7. ISOMORFISMO RECÍPROCO DE UM ISOMORFISMO

Teorema — Se $f : A \longrightarrow B$ é um isomorfismo de $(A, *)$ em $(B, \top)$, então a função recíproca $f^{-1} : B \longrightarrow A$ de f é um isomorfismo de $(B, \top)$ em $(A, *)$.

Dem.: — As funções f e f^{-1} são ambas bijetoras e, portanto, quaisquer que sejam os elementos a_1 e b_1 de B existem e são *únicos* os elementos a e b de A tais que

$$f(a) = a_1 \quad e \quad f(b) = b_1 \quad ou \quad a = f^{-1}(a_1) \quad e \quad b = f^{-1}(b_1)$$

Por outra parte, como f é um isomorfismo, temos:

$$f(a * b) = f(a) \top f(b) = a_1 \top b_1 \quad \therefore \quad a * b = f^{-1}(a_1 \top b_1)$$

ou seja:

$$f^{-1}(a_1 \top b_1) = f^{-1}(a_1) * f^{-1}(b_1)$$

Logo, f^{-1} é um homomorfismo de $(B, \top)$ em $(A, *)$ e como a função f^{-1} é bijetora, segue-se que f^{-1} é um isomorfismo de $(B, \top)$ em $(A, *)$, denominado *isomorfismo recíproco* ou *isomorfismo inverso* do isomorfismo f.

B I B L I O G R A F I A

1. BEX, R. — Leçons de Mathématique; Duculot; 1969
2. BITTINGER, MARVIN L. — Logic and Proof; Addison-Wesley; 1970
3. BOURBAKI, N. — Théorie des Ensembles; Hermann; 1970
4. BOUVIER, A. — La Théorie des Ensembles; P.U.F.; 1969
5. BREUER, J. — Teoria de los Conjuntos; Paraninfo; 1970
6. DAVIS, THOMAS A. — Sets and Functions; Harcourt; 1972
7. DIEUDONNÉ, J. — Análisis Moderno; Reverté; 1966
8. DUBREIL-JACOTIN — Lecciones de Álgebra Moderna; Reverté; 1965
9. FAIRCHILD-TULCEA — Sets; Saunders; 1970
10. FLORIAN, E. — Introduction à L'Algèbre Moderne; Masson; 1972
11. FRANK AYRES — Álgebra Moderna; McGraw-Hill; 1971
12. GODEMENT, R. — Álgebra; Tecnos; 1967
13. HAUSDORFF, F. — Set Theory; Chelsea; 1957
14. KAMKE, E. — Théorie des Ensembles; Dunod; 1964
15. KAUFMANN-PRÉCIGOUT — Matemáticas Nuevas; Continental; 1970
16. LENTIN y RIVAUD — Álgebra Moderna; Aguilar; 1969
17. LEUNG and CHEN — Elementary Set Theory; Oxford; 1967
18. LIPSCHUTZ, S. — Set Theory; Schaum; 1964
19. MENDELSON, E. — Boolean Algebra; Schaum; 1970
20. MONK, J. D. — Set Theory; McGraw-Hill; 1969
21. NACHBIN, L. — Introdução à Álgebra; McGraw-Hill; 1971
22. OUBINA, L. — Teoria de Conjuntos; Eudeba; 1965
23. PINTER, CHARLES C. — Set Theory; Addison-Wesley; 1971
24. QUEYSANNE, M. — Álgebra Básica; Vicens-Vives; 1971
25. RUBIN, JEAN E. — Set Theory; Holden-Day; 1967
26. SUPPES, P. — Axiomatic Set Theory; Van Nostrand; 1969
27. ZAMANSKY, M. — Álgebra y Análisis Moderno; Montaner; 1967
28. ZEHNA-JOHNSON — Elements of Set Theory; Allyn-Bacon; 1968

GRÁFICA L.P.M. EDITORA

Composição
R. Tamandaré, 1025
Fone: 278-0048
São Paulo - S.P.

00341

GRÁFICA BENETTI LTDA.
Rua João Alves, 189
São Paulo

DO AUTOR:

GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA
RELAÇÕES E FUNÇÕES
CURSO DE TRIGONOMETRIA PLANA
EXERCÍCIOS E FORMULÁRIOS DE TRIGONOMETRIA PLANA
EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA NO ESPAÇO
INICIAÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA
INICIAÇÃO À MATEMÁTICA MODERNA.