1.6 Introdução a Demonstrações

Introdução

Nesta seção, introduziremos a noção de demonstração e descreveremos métodos para a construção de demonstrações. Uma demonstração é um argumento válido que estabelece a verdade de uma sentença matemática. Uma demonstração pode usar as hipóteses do teorema, se existirem, axiomas assumidos com verdade e teoremas demonstrados anteriormente. Usando esses ingredientes e regras de inferência, o passo final da demonstração estabelece a verdade da sentença que está sendo demonstrada.

Em nossa discussão, vamos nos mover de demonstrações formais de teoremas até demonstrações mais informais. Os argumentos que introduzimos na Seção 1.5 para demonstrar que sentenças que envolvem proposições e sentenças quantificadas são verdadeiras sob demonstrações formais, se todos os passos são dados, e as regras para cada passo do argumento são também dadas. No entanto, demonstrações formais de teoremas muito comuns podem ser extremamente longas e difíceis de fazer. Na prática, as demonstrações dos teoremas feitas por humanos são na sua maioria **demonstrações informais**, em que mais de uma regra de inferência pode ser utilizada em cada passo, passos podem ser pulados, axiomas são assumidos e as regras de inferência utilizadas em cada passo não são explicitamente demonstradas. Demonstrações informais podem explicar aos humanos por que teoremas são verdadeiros, enquanto computadores só se contentam quando produzem uma demonstração formal usando sistemas de raciocínio automático.

Os métodos de demonstrações discutidos neste capítulo são importantes não só porque são utilizados para demonstrar teoremas, mas também pelas muitas aplicações em ciência da computação. Essas aplicações incluem verificar se programas de computador são corretos, estabelecendo se sistemas de operação são seguros, fazendo inferência em inteligência artificial, mostrando que sistemas de especificações são consistentes, e assim por diante. Conseqüentemente, compreender as técnicas utilizadas em demonstrações é essencial tanto para matemática quanto para ciência da computação.

Alguma Terminologia

Formalmente, um **teorema** é uma sentença que se pode demonstrar que é verdadeira. Em escrita matemática, o termo teorema é usualmente reservado para as sentenças que são consideradas com alguma importância. Teoremas menos importantes são comumente chamados de **proposições**. (Teoremas podem ser também referidos como **fatos** ou **resultados**.) Um teorema pode ser uma quantificação universal de uma sentença condicional com uma ou mais premissas e uma conclusão. No entanto, pode ser outro tipo de sentença lógica, como os exemplos vão mostrar, mais tarde, neste capítulo. Nós demonstramos que um teorema é verdadeiro com uma **demonstração**. Uma demonstração é um argumento válido que estabelece a verdade de um teorema. As sentenças utilizadas na demonstração podem incluir **axiomas** (ou **postulados**), os quais são sentenças que assumimos ser verdadeiras (por exemplo, veja Apêndice 1 com axiomas para os números reais), as premissas do teorema, se existirem, e teoremas previamente provados. Axiomas podem ser descritos usando termos primitivos que não requerem definição, mas todos os outros termos utilizados em teoremas e suas demonstrações devem ser definidos. Regras de inferência, juntamente com as definições dos termos, são utilizadas para chegar a conclusões a partir de outras afirmações, unindo os passos da demonstração. Na prática, o passo final de uma demonstração é usualmente a conclusão do teorema. No entanto, para esclarecer, vamos freqüentemente retomar a sentença do teorema como o passo final de uma demonstração.

Links

Um teorema menos importante que nos ajuda em uma demonstração de outros resultados é chamado de **lema** (plural *lemas* ou *lemata*). Demonstrações complicadas são usualmente mais fáceis de entender quando elas são demonstradas utilizando-se uma série de lemas, em que cada lema é demonstrado individualmente. Um **corolário** é um teorema que pode ser estabelecido diretamente de um teorema que já foi demonstrado. Uma **conjectura** é uma sentença que inicialmente é proposta como verdadeira, usualmente com base em alguma evidência parcial, um argumento heurístico ou a intuição de um perito. Quando uma demonstração de uma conjectura é achada, a conjectura se torna um teorema. Muitas vezes são verificadas que conjecturas são falsas, portanto elas não são teoremas.

Entendendo como Teoremas São Descritos

Exemplos Extras

Antes de introduzir métodos para demonstrar teoremas, precisamos entender como teoremas matemáticos são expostos. Muitos teoremas dizem que essa propriedade é assegurada para todos os elementos em um domínio, como os inteiros ou os números reais. Embora as sentenças precisas desses teoremas necessitem da inclusão de um quantificador universal, a convenção em matemática é omiti-la. Por exemplo, a sentença

"Se $x > y$, em que x e y são números reais positivos, então $x^2 > y^2$."

significa que

"Para todos os números reais positivos x e y, se $x > y$, então $x^2 > y^2$."

Entretanto, quando teoremas desse tipo são demonstrados, a propriedade da instanciação universal é freqüentemente usada sem ser explicitamente mencionada. O primeiro passo da demonstração usualmente envolve selecionar um elemento geral do domínio. Os passos subseqüentes mostram que esse elemento tem a propriedade em questão. Finalmente, a generalização universal implica que o teorema é válido para todos os membros do domínio.

Métodos de Demonstrações de Teoremas

Auto-avaliação

Vamos agora mudar nossa atenção para demonstração de teoremas matemáticos. Demonstrar teoremas pode ser difícil. Vamos precisar de toda a munição que tivermos para nos ajudar a demonstrar resultados diferentes. Vamos, então, introduzir uma bateria de métodos de demonstrações diferentes. Esses métodos podem se tornar parte de nosso repertório para demonstrar teoremas.

Para demonstrar um teorema da forma $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, nosso objetivo é mostrar que $P(c) \rightarrow Q(c)$ é verdadeira, em que c é um elemento arbitrário do domínio, e então aplicar a generalização universal. Nesta demonstração, precisamos mostrar que uma sentença condicional é verdadeira. Por isso, focalizaremos métodos que demonstram que condicionais são verdadeiras. Lembre-se de que $p \rightarrow q$ é verdadeira, a menos que p seja verdadeira e q seja falsa. Note que para a sentença $p \rightarrow q$ ser demonstrada, é necessário apenas mostrar que q é verdadeira se p é verdadeira. A seguinte discussão nos dará as técnicas mais comuns para demonstrar sentenças condicionais. Mais tarde vamos discutir métodos para demonstrar outros tipos de sentenças. Nesta seção e na Seção 1.7, vamos desenvolver um arsenal de muitas técnicas diferentes de demonstração, que podem ser usadas para demonstrar uma grande variedade de teoremas.

Quando você ler demonstrações, encontrará freqüentemente as palavras "obviamente" ou "claramente". Essas palavras indicam que passos foram omitidos e que o autor espera que o leitor seja capaz de fazê-los. Infelizmente, assumir isso nem sempre é interessante, pois os leitores não são todos capazes de fazer os passos nesses buracos das demonstrações. Vamos assiduamente tentar não usar essas palavras e não omitir muitos passos. No entanto, se concluirmos todos os passos em demonstrações, nossas demonstrações serão com freqüência exaustivamente longas.

Demonstrações Diretas

Uma **demonstração direta** de uma sentença condicional $p \rightarrow q$ é construída quando o primeiro passo é assumir que p é verdadeira; os passos subseqüentes são construídos utilizando-se regras de inferência, com o passo final mostrando que q deve ser também verdadeira. Uma demonstração direta mostra que uma sentença condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira mostrando que p é verdadeira, então q deve ser verdadeira, de modo que a combinação p verdadeira e q falsa nunca ocorre. Em uma demonstração direta, assumimos que p é verdadeira e usamos axiomas, definições e teoremas previamente comprovados, junto com as regras de inferência, para mostrar que q deve ser também verdadeira. Você verá que demonstrações diretas de muitos resultados são construídas de maneira direta, com uma seqüência óbvia de passos que levam da hipótese à conclusão. No entanto, demonstrações diretas algumas vezes requerem *insights* particulares e podem ser bastante astuciosas. As primeiras demonstrações diretas que vamos apresentar aqui são bastante óbvias; mais tarde veremos algumas menos óbvias.

Vamos dar muitos exemplos de demonstrações diretas. Mas, antes de darmos o primeiro exemplo, precisamos de uma definição.

DEFINIÇÃO 1 O inteiro n é *par* se existe um inteiro k tal que $n = 2k$, e n é *ímpar* se existe um inteiro k tal que $n = 2k + 1$. (Note que um inteiro é sempre par ou ímpar e nenhum inteiro é par e ímpar.)

EXEMPLO 1 Dê uma demonstração direta do teorema "Se n é um número inteiro ímpar, então n^2 *é ímpar*".

Solução: Note que este teorema diz $\forall nP((n) \to Q(n))$, em que $P(n)$ é "n é um inteiro ímpar" e $Q(n)$ é "n^2 *é ímpar*". Como dissemos, vamos seguir a convenção matemática usual para demonstrações, mostrando que $P(n)$ implica $Q(n)$, e não usando explicitamente instanciação universal. Para começar uma demonstração direta desse teorema, vamos assumir que a hipótese dessa sentença condicional é verdadeira, ou seja, assumimos que n é ímpar. Pela definição de número ímpar, temos que $n = 2k + 1$, em que k é algum inteiro. Queremos demonstrar que n^2 é também ímpar. Podemos elevar ao quadrado ambos os membros da equação $n = 2k + 1$ para obter uma nova equação que expresse n^2. Quando fizermos isso, teremos $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Pela definição de inteiro ímpar, concluímos que n^2 é ímpar (ele é um a mais que o dobro de um inteiro). Conseqüentemente, provamos que se n é um número inteiro ímpar, então n^2 é ímpar. ◀

Exemplos Extras

EXEMPLO 2 Dê uma demonstração direta de que se m e n são ambos quadrados perfeitos, então nm também é um quadrado perfeito. (Um inteiro a é um **quadrado perfeito** se existe um inteiro b tal que $a = b^2$.)

Solução: Para produzir uma demonstração direta desse teorema, assumimos que a hipótese dessa condicional é verdadeira, ou seja, assumimos que m e n são ambos quadrados perfeitos. Pela definição de quadrado perfeito, segue-se que existem inteiros s e t tal que $m = s^2$ e $n = t^2$. O objetivo da demonstração é mostrar que mn também deve ser um quadrado perfeito quando m e n o são; olhando adiante, vemos como podemos mostrar isto apenas multiplicando as duas equações $m = s^2$ e $n = t^2$. Isso mostra que $mn = s^2t^2$, o que implica que $mn = (st)^2$ (usando comutatividade e associatividade da multiplicação). Pela definição de quadrado perfeito, segue que mn também é um quadrado perfeito, pois é o quadrado de st, o qual também é um inteiro. Demonstramos que se m e n são ambos quadrados perfeitos, então mn também é um quadrado perfeito.

Demonstração por Contraposição

Demonstrações diretas vão da hipótese do teorema à sua conclusão. Elas começam com as premissas, continuam com uma seqüência de deduções e com a conclusão. No entanto, vamos ver que tentar fazer demonstrações diretas freqüentemente não tem um bom final. Precisamos de outros métodos para demonstrar teoremas da forma $\forall x(P(x) \to Q(x))$. Demonstrações de teoremas desse tipo que não são demonstrações diretas, ou seja, que não seguem das hipóteses e terminam com a conclusão, são chamadas de **demonstrações indiretas**.

Uma demonstração indireta extremamente usada é conhecida como **demonstração por contraposição**. Demonstrações por contraposição fazem uso do fato de que a sentença condicional $p \to q$ é equivalente a sua contrapositiva, $\neg q \to \neg p$, isto significa que uma sentença condicional

$p \to q$ pode ser demonstrada mostrando que sua contrapositiva, $\neg q \to \neg p$, é verdadeira. Em uma demonstração por contraposição de $p \to q$, vamos tomar $\neg q$ como uma hipótese, e usando axiomas, definições e teoremas previamente demonstrados, juntamente com regras de inferência, mostramos que $\neg p$ deve ser verdadeira.Vamos ilustrar demonstração por contraposição com dois exemplos. Esses exemplos mostram que demonstrações por contraposição podem ser bem-sucedidas quando não é fácil achar demonstrações diretas.

EXEMPLO 3 Demonstre que se n é um inteiro e $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar.

Exemplos Extras

Solução: Primeiro vamos olhar para uma demonstração direta. Para construir uma demonstração direta, devemos assumir que $3n + 2$ é um número ímpar. Isso significa que $3n + 2 = 2k + 1$ para algum inteiro k. Podemos usar esse fato para mostrar que n é ímpar? Vemos que $3n + 1 = 2k$, mas não parece ter algum meio direto para concluir que n é ímpar. Como nossa tentativa com demonstração direta falhou, vamos tentar uma demonstração por contraposição.

O primeiro passo em uma demonstração por contraposição é assumir que a conclusão da sentença condicional "Se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar" é falsa; assumimos que n é par. Então, pela definição de número par, $n = 2k$ para algum inteiro k. Substituindo $2k$ em n, chegamos a $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$. Isso nos diz que $3n + 2$ é par (pois é um múltiplo de 2), e logo não é ímpar. Isso é a negação da hipótese do teorema. Como a negação da conclusão da sentença condicional implica que a hipótese é falsa, a sentença original é verdadeira. Nossa demonstração por contraposição foi bem-sucedida; demonstramos que se n é um inteiro e $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar. ◀

EXEMPLO 4 Demonstre que se $n = ab$, em que a e b são inteiros positivos, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.

Solução: Como não há um meio óbvio de mostrar que $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$ diretamente da equação $n = ab$, em que a e b são inteiros positivos, vamos tentar uma demonstração por contraposição.

O primeiro passo nesta demonstração é assumir que a conclusão da condicional "Se $n = ab$, em que a e b são inteiros positivos, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$ " é falsa. Ou seja, assumir que a sentença $(a \leq \sqrt{n}) \vee (b \leq \sqrt{n})$ é falsa. Usando o significado da disjunção junto com a lei de De Morgan, vemos que isso implica que ambos $a \leq \sqrt{n}$ e $b \leq \sqrt{n}$ são falsas. Isso implica que $a > \sqrt{n}$ e $b > \sqrt{n}$. Podemos multiplicar essas inequações juntas (usando o fato de que se $0 < t$ e $0 < v$, então $su < tv$) para obter $ab > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$. Isso mostra que $ab \neq n$, o que contradiz a sentença $n = ab$.

Como a negação da conclusão da condicional implica que a hipótese é falsa, a sentença condicional original é verdadeira. Nossa demonstração por contraposição foi bem-sucedida; demonstramos que se $n = ab$, em que a e b são inteiros positivos, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$. ◀

DEMONSTRAÇÃO POR VACUIDADE E DEMONSTRAÇÃO POR TRIVIALIZAÇÃO Podemos rapidamente demonstrar que uma sentença condicional $p \to q$ é verdadeira quando sabemos que p é falsa, pois $p \to q$ deve ser verdadeira quando p é falsa. Conseqüentemente, se pudermos mostrar que p é falsa, então teremos uma demonstração, chamada de **demonstração por vacuidade**, da condicional $p \to q$. Demonstrações por vacuidade são empregadas para estabelecer casos especiais de teoremas que dizem que uma condicional é verdadeira para todos os números inteiros positivos [isto é, um teorema do tipo $\forall n P(n)$, em que $P(n)$ é uma função proposicional]. Técnicas de demonstração para esse tipo de teoremas serão discutidas na Seção 4.1.

EXEMPLO 5 Mostre que a proposição $P(0)$ é verdadeira, em que $P(n)$ é "Se $n > 1$, então $n^2 > n$" e o domínio consiste todos os inteiros.

Solução: Note que $P(0)$ é "Se $0 > 1$, então $0^2 > 0$". Podemos mostrar $P(0)$ utilizando-se uma demonstração por vacuidade, pois a hipótese $0 > 1$ é falsa. Isso nos diz que $P(0)$ é automaticamente verdadeira. ◀

Lembre-se: O fato de a conclusão desta sentença condicional, $0^2 > 0$, ser falsa é irrelevante para o valor-verdade da sentença condicional, pois uma condicional com uma hipótese falsa é diretamente verdadeira.

Podemos também demonstrar rapidamente que a condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira se sabemos que a conclusão q é verdadeira. Mostrar que q é verdadeira faz com que $p \rightarrow q$ deva ser também verdadeira. Uma demonstração de $p \rightarrow q$ que usa o fato de que q é verdadeira é chamada de **demonstração por trivialização**. Demonstrações por trivialização são freqüentemente usadas e de grande importância quando demonstramos casos especiais de teoremas (veja a discussão de demonstrações por casos na Seção 1.7) e em indução matemática, que é uma técnica de demonstração discutida na Seção 4.1.

EXEMPLO 6 Seja $P(n)$ a proposição "Se a e b são inteiros positivos com $a \geq b$, então $a^n \geq b^n$", em que o domínio consiste em todos os inteiros. Mostre que $P(0)$ é verdadeira.

Solução: A proposição $P(0)$ é "Se $a \geq b$, então $a^0 \geq b^0$". Como $a^0 = b^0 = 1$, a conclusão da condicional é "Se $a \geq b$, então $a^0 \geq b^0$" é verdadeira. Portanto, a sentença condicional, que é $P(0)$, é verdadeira. Este é um exemplo de demonstração por trivialização. Note que a hipótese, a sentença "$a \geq b$", não foi necessária nesta demonstração. ◀

UM POUCO DE ESTRATÉGIA DE DEMONSTRAÇÃO Descrevemos dois importantes métodos para provar teoremas da forma $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$: demonstração direta e demonstração por contraposição. Também demos exemplos que mostram como cada uma é usada. No entanto, quando você recebe um teorema da forma $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, que método você deve tentar usar para demonstrar? Vamos prover algumas regras rápidas aqui; na Seção 1.7 vamos discutir estratégias de demonstração com mais detalhes. Quando queremos demonstrar uma sentença da forma $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, primeiro devemos avaliar o que parece ser uma demonstração direta para esta sentença. Comece expandindo as definições da hipótese. Vá raciocinando sobre essas hipóteses, juntamente com os axiomas e os teoremas demonstrados. Se uma demonstração direta não aparecer em nenhuma situação, tente a mesma coisa com a contraposição. Lembre-se de que em uma demonstração por contraposição você assume que a conclusão é falsa e usa uma demonstração direta para mostrar que a hipótese deve ser falsa. Vamos ilustrar essa estratégia nos exemplos 7 e 8. Antes de apresentar nossos próximos exemplos, precisamos de uma definição.

DEFINIÇÃO 2 O número real r é *racional* se existem inteiros p e q com $q \neq 0$, tal que $r = p/q$. Um número real que não é racional é chamado de *irracional*.

EXEMPLO 7 Demonstre que a soma de dois números racionais é um racional. (Note que se incluirmos o quantificador implícito aqui, o teorema que queremos demonstrar é "Para todo número real r e todo real s, se r e s são números racionais, então $r + s$ é racional".)

Exemplos Extras

Solução: Primeiro tentemos uma demonstração direta. Para começar, suponha que r e s são racionais. Da definição de números racionais, segue que existem inteiros p e q, com $q \neq 0$, tal que $r = p/q$, e inteiros t e u, com $u \neq 0$, tal que $s = t/u$. Podemos usar essas informações para mostrar que $r + s$ é racional? O próximo passo é adicionar $r = p/q$ e $s = t/u$, para obter

$$r + s = \frac{p}{q} + \frac{t}{u} = \frac{pu + qt}{qu}.$$

Como $q \neq 0$ e $u \neq 0$, temos que $qu \neq 0$. Conseqüentemente, expressamos $r + s$ como a razão de dois inteiros, $pu + qt$ e qu, em que $qu \neq 0$. Isso significa que $r + s$ é racional. Demonstramos que a soma de dois números racionais é racional; nossa tentativa de achar uma demonstração direta foi bem-sucedida. ◀

EXEMPLO 8 Demonstre que se n é um número inteiro e n^2 *é ímpar*, então n é ímpar.

Solução: Primeiro tentaremos uma demonstração direta. Suponha que n é um inteiro e n^2 é ímpar. Então existe um inteiro k, tal que $n^2 = 2k + 1$. Podemos usar essa informação para mostrar que n é ímpar? Parece que não existe uma saída óbvia para mostrar que n é ímpar, pois, resolvendo a equação em n, temos $n = \pm\sqrt{2k+1}$, que não é interessante de trabalhar.

Como a tentativa de uma demonstração direta não rendeu frutos, tentaremos uma demonstração por contraposição. Tomaremos como hipótese a sentença n não é ímpar. Como todo inteiro é par ou ímpar, isso significa que n é par. E isso implica que existe um inteiro k, tal que $n = 2k$. Para demonstrar o teorema, devemos mostrar que essa hipótese implica a conclusão, ou seja, n^2 não é ímpar, ou ainda, que n^2 é par. Podemos usar a equação $n = 2k$ para determinar isso? Elevando ao quadrado ambos os membros da equação, obtemos $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, o que implica que n^2 é também par, pois $n^2 = 2t$, em que $t = 2k^2$. Demonstramos que se n é um número inteiro e n^2 é ímpar, então n é ímpar. Nossa tentativa de encontrar uma demonstração por contraposição foi bem-sucedida. ◄

Demonstração por Contradição

Suponha que queremos demonstrar que uma sentença p é verdadeira. Além disso, suponha que podemos achar uma contradição q tal que $\neg p \to q$ é verdadeira. Como q é falsa, mas $\neg p \to q$ é verdadeira, podemos concluir que $\neg p$ é falsa, o que significa que p é verdadeira. Como podemos encontrar uma contradição q que possa nos ajudar a demonstrar que p é verdadeira usando esse raciocínio?

Como a sentença $r \wedge \neg r$ é uma contradição qualquer que seja a proposição r, podemos demonstrar que p é verdadeira se pudermos mostrar que $\neg p \to (r \wedge \neg r)$ é verdadeira para alguma proposição r. Demonstrações desse tipo são chamadas de **demonstrações por contradição**. Como uma demonstração por contradição não mostra o resultado diretamente, esse é um outro tipo de demonstração indireta. Daremos três exemplos de demonstração por contradição. O primeiro é um exemplo de uma aplicação do princípio da casa dos pombos, uma técnica combinatória que vamos desenvolver profundamente na Seção 5.2.

EXEMPLO 9 Demonstre que ao menos 4 de 22 dias escolhidos devem cair no mesmo dia da semana.

Exemplos Extras

Solução: Seja p a proposição "Ao menos 4 dos 22 dias escolhidos caem no mesmo dia da semana". Suponha que $\neg p$ é verdadeira. Isso significa que no máximo 3 dos 22 dias caem no mesmo dia da semana. Como existem 7 dias na semana, isso implica que no máximo 21 dias podem ser escolhidos, pois, para cada dia da semana, podem ser escolhidos no máximo 3 dias que coincidem no mesmo dia da semana. Isso contradiz a hipótese que afirmava ter 22 dias considerados. Assim, se r é a sentença que diz que 22 dias foram escolhidos, então temos mostrado que $\neg p \to (r \wedge \neg r)$. Conseqüentemente, sabemos que p é verdadeira. Demonstramos que ao menos 4 de 22 dias escolhidos devem cair no mesmo dia da semana. ◄

EXEMPLO 10 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional por meio de uma demonstração por contradição.

Solução: Seja p a proposição "$\sqrt{2}$ é irracional". Para começar uma demonstração por contradição, supomos que $\neg p$ é verdadeira. Note que $\neg p$ é a sentença "Não é o caso que $\sqrt{2}$ é irracional", o que diz que $\sqrt{2}$ é racional. Vamos demonstrar que, assumindo que $\neg p$ é verdadeira, chegaremos a uma contradição.

Se $\sqrt{2}$ é racional, existem inteiros a e b tal que $\sqrt{2} = a/b$, em que a e b não têm fator comum (então a fração a/b é irredutível). (Aqui, estamos usando o fato de que todo número racional pode ser escrito em uma fração irredutível.) Como $\sqrt{2} = a/b$, quando ambos os membros da equação são elevados ao quadrado, segue-se que

$$2 = a^2/b^2.$$

Portanto,

$$2b^2 = a^2.$$

Pela definição de número par segue-se que a^2 é par. Podemos usar o fato de que se a^2 é par, então a é par, o qual segue do Exercício 16. Mas se a é par, pela definição de número par, $a = 2c$ para algum inteiro c. Então,

$$2b^2 = 4c^2.$$

Dividindo ambos os membros dessa equação por 2, temos

$$b^2 = 2c^2.$$

Pela definição de par, isso significa que b^2 é par. Novamente usando o fato de que se o quadrado de um inteiro é par, então o inteiro também deve ser par, concluímos que b deve ser par também.

Agora mostramos que ter assumido $\neg p$ nos levou à equação $\sqrt{2} = a/b$, em que a e b não têm fator comum; mas a e b são pares, ou seja, 2 divide ambos os número a e b. Note que a sentença $\sqrt{2} = a/b$, em que a e b não têm fator comum, significa em particular que 2 não divide ambos a e b. Como ter assumido $\neg p$ nos levou à contradição de que 2 divide ambos a e b e 2 não divide ambos a e b, $\neg p$ deve ser falsa. Ou seja, a sentença p, "$\sqrt{2}$ é irracional", é verdadeira. Provamos que $\sqrt{2}$ é irracional. ◄

Demonstração por contradição pode ser usada para demonstrar condicionais. Nessas demonstrações, primeiro assumimos a negação da conclusão. Então, usamos as premissas do teorema e a negação da conclusão para chegar à contradição. (A razão pela qual essas demonstrações são válidas está na equivalência lógica $p \rightarrow q$ e $(p \wedge \neg q) \rightarrow \mathbf{F}$. Para ver que essas sentenças são equivalentes, simplesmente porque cada uma é falsa em exatamente um caso, quando p é verdadeira e q é falsa.)

Note que podemos reescrever uma demonstração por contraposição de uma sentença condicional como uma demonstração por contradição. Em uma demonstração de $p \rightarrow q$ por contraposição, assumimos que $\neg q$ é verdadeira. E, então, mostramos que $\neg p$ também deve ser verdadeira. Para reescrever uma demonstração por contraposição de $p \rightarrow q$ como uma demonstração por contradição, supomos que ambas p e $\neg q$ são verdadeiras. Então, usamos os passos de uma demonstração de $\neg q \rightarrow \neg p$ para mostrar que $\neg p$ é verdadeira. Isso nos leva à contradição $p \wedge \neg p$, completando a demonstração. O Exemplo 11 ilustra como uma demonstração por contraposição de uma condicional pode ser reescrita como uma demonstração por contradição.

EXEMPLO 11 Dê uma demonstração por contradição do teorema "Se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar".

Solução: Seja p a proposição "$3n + 2$ é ímpar" e q a proposição "n é ímpar". Para construir uma demonstração por contradição, assumimos que ambas p e $\neg q$ são verdadeiras. Ou seja, assumimos que $3n + 2$ é ímpar e que n não o é. Como n não é ímpar, sabemos que é par. Seguindo os passos da solução do Exemplo 3 (uma demonstração por contraposição), podemos mostrar que se n é par, então $3n + 2$ é par. Primeiro, como n é par, existe um inteiro k, tal que $n = 2k$. Isso implica que $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$. Como $3n + 2$ é $2t$, em que $t = 3k + 1$, $3n + 2$ é par. Note que a sentença "$3n + 2$ é par" é o mesmo que $\neg p$, pois um inteiro é par se e somente se não for ímpar. Como ambas p e $\neg p$ são verdadeiras, temos uma contradição. Isso completa a demonstração por contradição, demonstrando que se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar. ◄

Note que podemos também demonstrar por contradição que $p \rightarrow q$ é verdadeira, assumindo que p e $\neg q$ são verdadeiras, e mostrando que q deve ser também verdadeira. Isso implica que $\neg q$ e q são ambas verdadeiras, uma contradição. Essa observação nos diz que podemos tornar uma demonstração direta em uma demonstração por contradição.

DEMONSTRAÇÕES DE EQUIVALÊNCIAS Para demonstrar um teorema que é uma sentença bicondicional, ou seja, que é da forma $p \leftrightarrow q$, mostramos que $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são ambas verdadeiras. A validade desse método baseia-se na tautologia

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)].$$

EXEMPLO 12 Prove o teorema "Se n é um inteiro positivo, então n é ímpar se e somente se n^2 for ímpar".

Solução: Esse teorema tem a forma "p se e somente se q", em que p é "n é ímpar" e q é "n^2 é ímpar". (Como usual, não explicitamos a expressão com quantificador universal.) Para demonstrar esse teorema, precisamos mostrar que $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são verdadeiras.

Exemplos Extras

Já mostramos (no Exemplo 1) que $p \rightarrow q$ é verdadeira e (no Exemplo 8) que $q \rightarrow p$ é verdadeira.

Como evidenciamos que ambas $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são verdadeiras, mostramos que o teorema é verdadeiro. ◀

Algumas vezes um teorema determina que muitas proposições são equivalentes. Esses teoremas determinam que as proposições $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ são equivalentes. Isso pode ser escrito por

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n,$$

que significa que todas as n proposições têm o mesmo valor-verdade e, conseqüentemente, que para todo i e j com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$, p_i e p_j são equivalentes. Uma maneira de demonstrar essa equivalência mutua é usar a tautologia

$$[p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n] \leftrightarrow [(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow p_1)].$$

Isso mostra que se as sentenças condicionais $p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, \ldots, p_n \rightarrow p_1$ podem ser demonstradas como verdadeiras, então as proposições $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são todas equivalentes.

Isso é muito mais eficiente que demonstrar que $p_i \rightarrow p_j$ para todo $i \neq j$ com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$.

Quando demonstramos que algumas sentenças são equivalentes, podemos estabelecer uma cadeia de sentenças condicionais que escolhermos tão grande quanto possível para trabalhar sobre essa cadeia e ir de qualquer uma dessas sentenças para outra. Por exemplo, podemos evidenciar que p_1, p_2 e p_3 são equivalentes mostrando que $p_1 \rightarrow p_3$, $p_3 \rightarrow p_2$ e $p_2 \rightarrow p_1$.

EXEMPLO 13 Demonstre que estas sentenças sobre o inteiro n são equivalentes:

p_1: n é par.
p_2: $n - 1$ é ímpar.
p_3: n^2 é par.

Solução: Vamos demonstrar que essas três sentenças são equivalentes mostrando que as condicionais $p_1 \rightarrow p_2$, $p_2 \rightarrow p_3$, e $p_3 \rightarrow p_1$ são verdadeiras.

Vamos usar uma demonstração direta para mostrar que $p_1 \rightarrow p_2$. Suponha que n é par. Então $n = 2k$ para algum inteiro k. Conseqüentemente, $n - 1 = 2k - 1 = 2(k - 1) + 1$. Isso significa que $n - 1$ é ímpar, pois é da forma $2m + 1$, em que m é o inteiro $k - 1$.

Também vamos usar uma demonstração direta para mostrar que $p_2 \rightarrow p_3$. Agora, suponha que $n - 1$ é ímpar. Então $n - 1 = 2k + 1$ para algum inteiro k. Portanto, $n = 2k + 2$, então, $n^2 = (2k + 2)^2 = 4k^2 + 8k + 4 = 2(2k^2 + 4k + 2)$. Isso significa que n^2 é o dobro do inteiro $2k^2 + 4k + 2$, e, portanto, é par.

Para demonstrar $p_3 \rightarrow p_1$, usaremos uma demonstração por contraposição. Ou seja, provamos que se n não é par, então n^2 não é par. Isso é o mesmo que demonstrar que se n é ímpar, então n^2 é ímpar, o que já demonstramos no Exemplo 1. Isso completa a demonstração. ◀

CONTRA-EXEMPLOS Na Seção 1.3, dissemos que, para demonstrar que uma sentença da forma $\forall x\, P(x)$ é falsa, precisamos apenas encontrar um **contra-exemplo**, que é um exemplo de x para o qual $P(x)$ é falsa. Quando recebemos uma sentença da forma $\forall x\, P(x)$, a qual acreditamos ser falsa ou não conseguimos demonstrar por nenhum método, procuramos por contra-exemplos. Vamos ilustrar o uso de contra-exemplos no Exemplo 14.

EXEMPLO 14 Mostre que a sentença "Todo inteiro positivo é a soma dos quadrados de dois inteiros" é falsa.

Exemplos Extras

Solução: Para mostrar que a sentença é falsa, procuramos um contra-exemplo, que será um inteiro que não é a soma dos quadrados de dois inteiros. Isso não vai demorar muito, pois 3 não pode ser escrito como a soma dos quadrados de dois inteiros. Para mostrar esse caso, note que os quadrados que não excedem 3 são $0^2 = 0$ e $1^2 = 1$. Mais que isso, não há como obter 3 da soma desses dois quadrados, com apenas dois termos. Conseqüentemente, mostramos que "Todo inteiro positivo é a soma dos quadrados de dois inteiros" é falsa. ◄

Erros em Demonstrações

Existem muitos erros comuns na construção de demonstrações matemáticas. Vamos brevemente descrever alguns deles aqui. Os erros mais comuns são erros em aritmética e álgebra básica. Até matemáticos profissionais cometem esses erros, especialmente quando estão trabalhando com fórmulas muito complicadas. Sempre que usarmos essas computações, ou passagens, devemos verificá-las tão cuidadosamente quanto possível. (Você deve também revisar os aspectos problemáticos da álgebra básica, principalmente antes de estudar a Seção 4.1.)

Links

Cada passo de uma demonstração matemática precisa ser correto e a conclusão precisa seguir logicamente os passos que a precedem. Muitos erros resultam da introdução de passos que não seguem logicamente aqueles que o precedem. Isso está ilustrado nos exemplos 15 a 17.

EXEMPLO 15 O que está errado com a famosa suposta "demonstração" de que $1 = 2$?

"Demonstração": Usamos estes passos, em que a e b são dois inteiros positivos iguais

Passo	**Razão**
1. $a = b$	Dado
2. $a^2 = ab$	Multiplicando ambos os membros de (1) por a.
3. $a^2 - b^2 = ab - b^2$	Subtraindo b^2 de ambos os lados de (2)
4. $(a - b)(a + b) = b(a - b)$	Fatorando ambos os membros de (3)
5. $a + b = b$	Dividindo ambos os lados de (4) por $a - b$
6. $2b = b$	Substituindo a por b em (5), pois $a = b$, e simplificando
7. $2 = 1$	Dividindo ambos os membros de (6) por b

Solução: Todos os passos são válidos exceto um, o passo 5, onde dividimos ambos os lados por $a - b$. O erro está no fato de $a - b$ ser zero; dividir ambos os lados de uma equação pela mesma quantidade é válido se essa quantidade não é zero. ◄

EXEMPLO 16 O que está errado com a "demonstração"?

"Teorema": Se n^2 é positivo, então n é positivo.

"Demonstração": Suponha que n^2 é positivo. Como a sentença condicional "Se n é positivo, então n^2 é positivo" é verdadeira, podemos concluir que n é positivo.

Solução: Seja $P(n)$ a proposição "n é positivo" e $Q(n)$, "n^2 é positivo". Então nossa hipótese é $Q(n)$. A sentença "*Se n* é positivo, então n^2 é positivo*"* é a sentença $\forall n(P(n) \rightarrow Q(n))$. Da hipótese $Q(n)$ e da sentença $\forall n(P(n) \rightarrow Q(n))$ não podemos concluir que $P(n)$, pois não estamos usando uma regra válida de inferência. Pelo contrário, este é um exemplo da falácia de afirmação da conclusão. Um contra-exemplo é dado por $n = -1$ para o qual $n^2 = 1$ é positivo, mas n é negativo. ◄

EXEMPLO 17 O que está errado com a "demonstração"?

> "Teorema": Se n não é positivo, então n^2 não é positivo. (Esta é a contrapositiva do "teorema" no Exemplo 16.)

"Demonstração": Suponha que n não é positivo. Como a sentença condicional "Se n é positivo, então n^2 é positivo" é verdadeira, podemos concluir que n^2 não é positivo.

Solução: Sejam $P(n)$ e $Q(n)$ as proposições do Exemplo 16. Então nossa hipótese é $\neg P(n)$ e a sentença "Se n é positivo, então n^2 é positivo" é a sentença $\forall n\,(P(n) \rightarrow Q(n))$. Da hipótese $\neg P(n)$ e da sentença $\forall n\,(P(n) \rightarrow Q(n))$ não podemos concluir que $\neg Q(n)$, pois não estamos usando uma regra válida de inferência. Ao contrário, este é um exemplo da falácia de negação da hipótese. Um contra-exemplo é dado por $n = -1$, como no Exemplo 16. ◄

Finalmente, vamos discutir um tipo de erro particularmente desonesto. Muitos argumentos baseiam-se em uma falácia chamada de **carregando a pergunta.** Essa falácia ocorre quando um ou mais passos da demonstração fundamentam-se na sentença que está sendo demonstrada. Em outras palavras, essa falácia aparece quando uma sentença é demonstrada utilizando-se a própria sentença. Esse é o motivo pelo qual essa falácia é também chamada de **raciocínio circular**.

EXEMPLO 18 O argumento seguinte está correto? Ele supostamente mostra que n é um inteiro par sempre que n^2 é um inteiro par.

> Suponha que n^2 é par. Então $n^2 = 2k$ para algum inteiro k. Seja $n = 2l$ para algum inteiro l. Isso mostra que n é par.

Solução: Este argumento é incorreto. A sentença "Seja $n = 2l$ para algum inteiro l" ocorre na demonstração. Nenhum argumento foi dado para demonstrar que n pode ser escrito como $2l$ para algum inteiro l. Este é um raciocínio circular, pois essa sentença é equivalente à sentença que está sendo demonstrada, "n é par". É claro que o resultado está correto; apenas o método de demonstração está errado. ◄

Cometer erros nas demonstrações faz parte do processo de aprendizado. Quando você comete um erro que alguém encontra, você deve analisar cuidadosamente onde está errando e garantir que não cometerá mais o mesmo erro. Matemáticos profissionais também cometem erros em demonstrações. Algumas demonstrações incorretas de importantes resultados enganaram as pessoas por anos antes de os erros serem encontrados.

Só um Começo

Temos agora desenvolvido um arsenal básico de métodos de demonstrações. Na próxima seção, vamos introduzir outros métodos de demonstração importantes. Também vamos introduzir muitas técnicas importantes de demonstração no Capítulo 4, incluindo indução matemática ou indução matemática, que pode ser usada para demonstrar resultados que valem para todos os inteiros positivos. No Capítulo 5, vamos introduzir a noção de demonstrações combinatórias.

Nesta seção, introduzimos muitos métodos para demonstrar teoremas da forma $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, incluindo demonstrações diretas e demonstrações por contraposição. Existem muitos teoremas desse tipo que têm suas demonstrações facilmente construídas pelo método direto através de hipóteses e definições de termos do teorema. No entanto, é freqüentemente difícil demonstrar um teorema sem utilizar uma demonstração por contraposição ou uma demonstração por contradição, ou alguma outra técnica de demonstração. Na Seção 1.7, vamos direcionar estratégias de demonstrações. Vamos descrever várias possibilidades que podem ser usadas para encontrar demonstrações quando o método direto não funciona. Construir demonstrações é uma arte que só pode ser aprendida através da experiência, incluindo escrever demonstrações, ter uma demonstração sua criticada e ler e analisar demonstrações.

Exercícios

1. Use uma demonstração direta para mostrar que a soma de dois números inteiros ímpares é par.

2. Use uma demonstração direta para mostrar que a soma de dois números inteiros pares é par.

3. Mostre que o quadrado de um número par é um número par, usando a demonstração direta.

4. Mostre que o inverso aditivo, ou negativo, de um número par é um número par, usando a demonstração direta.

5. Demonstre que se $m + n$ e $n + p$ são números inteiros pares, em que m, n e p são números inteiros, então $m + p$ é par. Que tipo de demonstração você utilizou?

6. Use uma demonstração direta para mostrar que o produto de dois números ímpares é ímpar.

7. Use uma demonstração direta para mostrar que todo número inteiro ímpar é a diferença de dois quadrados.

8. Demonstre que se n é um quadrado perfeito, então $n + 2$ não é um quadrado perfeito.

9. Use um demonstração por contradição para provar que a soma de um número irracional e um racional é irracional.

10. Use uma demonstração direta para mostrar que o produto de dois números racionais é racional.

11. Demonstre ou contrarie que o produto de dois números irracionais é irracional.

12. Demonstre ou contrarie que o produto de um número racional diferente de zero e um número irracional é irracional.

13. Demonstre que se x é irracional, então $1/x$ é irracional.

14. Demonstre que se x é racional e $x \neq 0$, então $1/x$ é racional.

15. Use uma demonstração por contraposição para mostrar que se $x + y \geq 2$, em que x e y são números reais, então $x \geq 1$ ou $y \geq 1$.

☞ **16.** Demonstre que se m e n são números inteiros e mn é par, então m *é par* ou n é par.

17. Mostre que se n é um número inteiro e $n^3 + 5$ é ímpar, então n é par, usando:

a) uma demonstração por contraposição.

b) uma demonstração por contradição.

18. Demonstre que se n é um número inteiro e $3n + 2$ é par, então n é par, usando:

a) uma demonstração por contraposição.

b) uma demonstração por contradição.

19. Demonstre a proposição $P(0)$, em que $P(n)$ é a proposição "Se n é um número inteiro positivo maior que 1, então $n^2 > n$". Qual tipo de demonstração você utilizou?

20. Demonstre a proposição $P(1)$, em que $P(n)$ é a proposição "Se n é um número inteiro positivo, então $n^2 \geq n$". Qual tipo de demonstração você utilizou?

21. Assuma $P(n)$ como a proposição "Se a e b são números reais positivos, então $(a + b)^n \geq a^n + b^n$". Comprove que $P(1)$ é verdadeira. Qual tipo de demonstração você utilizou?

22. Mostre que se você pegar 3 meias de uma gaveta, com apenas meias azuis e pretas, você deve pegar ou um par de meias azuis ou um par de meias pretas.

23. Mostre que pelo menos 10 de quaisquer 64 dias escolhidos devem cair no mesmo dia da semana.

24. Mostre que pelo menos 3 de quaisquer 25 dias escolhidos devem cair no mesmo mês do ano.

25. Use uma demonstração por contradição para mostrar que não há um número racional r para que $r^3 + r + 1 = 0$. [*Dica:* Assuma que $r = a/b$ seja uma raiz, em que a e b são números inteiros e a/b é o menor termo. Obtenha uma equação que envolva números inteiros, multiplicando-os por b^3. Então, veja se a e b são pares ou ímpares.]

26. Demonstre que se n é um número inteiro positivo, então n é par se e somente se $7n + 4$ for par.

27. Demonstre que se n é um número inteiro positivo, então n é ímpar se e somente se $5n + 6$ for ímpar.

28. Demonstre que $m^2 = n^2$ se e somente se $m = n$ ou $m = -n$.

29. Demonstre ou contrarie que se m e n são números inteiros, tal que $mn = 1$, então ou $m = 1$ e $n = 1$, ou $m = -1$ e $n = -1$.

30. Mostre que essas três proposições são equivalentes, em que a e b são números reais: (*i*) a é menor que b, (*ii*) a média de a e b é maior que a, e (*iii*) a média de a e b é menor que b.

31. Mostre que essas proposições sobre o número inteiro x são equivalentes: (*i*) $3x + 2$ é par, (*ii*) $x + 5$ é ímpar, (*iii*) x^2 é par.

32. Mostre que essas proposições sobre o número real x são equivalentes: (*i*) x é racional, (*ii*) $x/2$ é racional, e (*iii*) $3x - 1$ é racional.

33. Mostre que essas proposições sobre o número real x são equivalentes: (*i*) x é irracional, (*ii*) $3x + 2$ é irracional, (*iii*) $x/2$ é irracional.

34. Esta é a razão para encontrar as soluções da equação $\sqrt{2x^2 - 1} = x$ correta? (1) $\sqrt{2x^2 - 1} = x$ é dado; (*2*) $2x^2 - 1 = x^2$, obtido pelo quadrado dos dois lados de (1); (*3*) $x^2 - 1 = 0$, obtido pela subtração de x^2 dos dois lados de (2); (*4*) $(x - 1)(x + 1) = 0$, obtido pela fatoração do lado esquerdo de $x^2 - 1$; (*5*) $x = 1$ ou $x = -1$, confirmado, pois $ab = 0$ implica que $a = 0$ ou $b = 0$.

35. Os passos abaixo para encontrar as soluções de $\sqrt{x + 3} = 3 - x$ são corretos? (*1*) $\sqrt{x + 3} = 3 - x$ é dado; (*2*) $x + 3 = x^2 - 6x + 9$, obtido tirando a raiz quadrada dos dois lados de (1); (*3*) $0 = x^2 - 7x + 6$, obtido pela subtração de $x + 3$ dos dois lados de (2); (*4*) $0 = (x - 1)(x - 6)$, obtido pela fatoração do lado direito de (3); (*5*) $x = 1$ ou $x = 6$, tirado de (4) porque $ab = 0$ implica que $a = 0$ ou $b = 0$.

36. Comprove que as proposições p_1, p_2, p_3 e p_4 podem ser equivalentes mostrando que $p_1 \leftrightarrow p_4$, $p_2 \leftrightarrow p_3$ e $p_1 \leftrightarrow p_3$.

37. Mostre que as proposições p_1, p_2, p_3, p_4 e p_5 podem ser equivalentes, demonstrando que as proposições condicionais $p_1 \rightarrow p_4$, $p_3 \rightarrow p_1$, $p_4 \rightarrow p_2$, $p_2 \rightarrow p_5$ e $p_5 \rightarrow p_3$ são verdadeiras.

38. Encontre um contra-exemplo para a proposição: todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de três números inteiros.

39. Comprove que pelo menos um dos números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é maior que ou igual ao valor da média desses números. Que tipo de demonstração você utilizou?

40. Use o Exercício 39 para mostrar que se os primeiros 10 números inteiros positivos forem colocados em círculo, em qualquer ordem, haverá três números inteiros, em localização consecutiva no círculo, que terão uma soma maior que ou igual a 17.

41. Comprove que se n é um número inteiro, estas quatro proposições são equivalentes: (*i*) n é par, (*ii*) $n + 1$ é ímpar, (*iii*) $3n + 1$ é ímpar, (*iv*) $3n$ é par.

42. Comprove que estas quatro proposições sobre o número inteiro n são equivalentes: (*i*) n^2 é ímpar, (*ii*) $1 - n$ é par, (*iii*) n^3 é ímpar, (*iv*) $n^2 + 1$ é par.

1.7 Métodos de Demonstração e Estratégia

Introdução

Auto-avaliação

Na Seção 1.6 introduzimos uma variedade de métodos de demonstrações e ilustramos como cada método pode ser usado. Nesta seção vamos continuar neste esforço. Vamos introduzir muitos outros importantes métodos de demonstrações, incluindo demonstrações em que consideramos diferentes casos separadamente e demonstrações em que comprovamos a existência de objetos com determinada propriedade desejada.

Na Seção 1.6 apenas discutimos brevemente a estratégia por trás da construção das demonstrações. Essa estratégia inclui a seleção de um método de demonstrações e então a construção com sucesso de um argumento passo a passo, com base nesse método. Nesta seção, depois que tivermos desenvolvido um grande arsenal de métodos de demonstração, vamos estudar alguns aspectos adicionais da arte e da ciência das demonstrações. Vamos prover avanços em como encontrar demonstrações trabalhando de trás para frente e adaptando demonstrações existentes.

Quando matemáticos trabalham, eles formulam conjecturas e tentam comprová-las ou tentam encontrar um contra-exemplo. Vamos brevemente descrever esse processo aqui, comprovando resultados sobre ladrilhar tabuleiros de xadrez com dominós ou outros tipos de peças. Olhando para esse método de ladrilhar, podemos ser capazes de rapidamente formular conjecturas e comprovar teoremas sem que tenhamos desenvolvido uma teoria.

Vamos concluir a seção discutindo o papel das questões abertas. Em particular, vamos discutir alguns problemas interessantes que apenas foram resolvidos depois de permanecerem abertos por centenas de anos ou porque ainda estão abertos.

Demonstração por Exaustão e Demonstração por Casos

Algumas vezes, não podemos comprovar um teorema usando um único argumento que satisfaça todos os casos possíveis. Vamos agora introduzir um método que pode ser usado para comprovar teoremas, considerando diferentes casos separadamente. Esse método baseia-se em uma regra de inferência que vamos introduzir agora. Para comprovar uma sentença condicional da forma

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow q$$

a tautologia

$$[(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow q] \leftrightarrow [(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow q)]$$

pode ser usada como regra de inferência. Isso mostra que o condicional original com a hipótese formada por uma disjunção das proposições $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pode ser comprovada verificando-se cada uma das n condicionais $p_i \rightarrow q$, $i = 1, 2, \ldots, n$, individualmente. Esse argumento é chamado de **demonstração por casos**. Algumas vezes para comprovar que uma sentença condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira, é conveniente usar a disjunção $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ em vez de p como hipótese da sentença condicional, em que p e $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ são equivalentes.

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO Alguns teoremas podem ser comprovados examinando-se um número relativamente pequeno de exemplos. Essas demonstrações são chamadas de **demonstrações por exaustão**, pois procedem pela exaustão de todas as possibilidades. Uma demonstração por exaustão é um tipo especial de demonstração por casos em que cada caso envolve apenas a demonstração de um simples exemplo. Vamos ver algumas ilustrações de demonstrações por exaustão.

EXEMPLO 1 Comprove que $(n + 1)^2 \geq 3^n$ se n é um inteiro positivo com $n \leq 4$.

Solução: Vamos usar a demonstração por exaustão. Apenas precisamos verificar que a inequação $(n + 1)^2 \geq 3^n$ é verdadeira quando $n = 1, 2, 3$ e 4. Para $n = 1$, temos $(n + 1)^2 = 2^2 = 4$ e $3^n = 3^1 = 3$; para $n = 2$, temos $(n + 1)^2 = 3^2 = 9$ e $3^n = 3^2 = 9$; para $n = 3$, temos $(n + 1)^3 = 4^3 = 64$ e $3^n = 3^3 = 27$; e para $n = 4$, temos $(n + 1)^3 = 5^3 = 125$ e $3^n = 3^4 = 81$. Em cada um dos quatro casos, vemos que $(n + 1)^2 \geq 3^n$. Usamos o método de demonstração por exaustão para demonstrar que $(n + 1)^2 \geq 3^n$ se n é um número inteiro positivo com $n \leq 4$. ◄

Exemplos Extras

EXEMPLO 2 Demonstre que os únicos inteiros positivos consecutivos não excedendo 100 que são potências perfeitas são 8 e 9. (Um inteiro é uma **potência perfeita** se for igual a n^a, em que a é um inteiro maior que 1.)

Solução: Podemos demonstrar esse fato mostrando que o único par n, $n + 1$ de inteiros positivos consecutivos que são potências perfeitas com $n < 100$ ocorre quando $n = 8$. Podemos demonstrar esse fato examinando os números inteiros positivos n não excedendo 100; primeiro verificamos quando n é uma potência perfeita e, se for, verificamos se $n + 1$ também o é. O método mais rápido para fazer isto é simplesmente olhar para todas as potências perfeitas não excedendo 100. Os quadrados que não excedem 100 são 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100. Os cubos que não excedem 100 são 1, 8, 27 e 64. As quartas potências que não excedem 100 são 1, 16 e 81. As quintas potências que não excedem 100 são 1 e 32. As sextas potências de números inteiros que não excedem 100 são 1 e 64. Não existem outras potências maiores que as sextas que excedam 100, exceto o número 1. Olhando para essa lista de potências, vemos que $n = 8$ é a única potência perfeita para a qual $n + 1$ também é uma potência perfeita. Ou seja, $2^3 = 8$ e $3^2 = 9$ são as únicas duas potências perfeitas consecutivas que não excedem 100. ◄

Podemos recorrer às demonstrações por exaustão apenas quando é necessário verificar um número relativamente pequeno de instâncias da sentença. Computadores não se incomodam quando é pedido para verificar um número muito grande de instâncias, mas eles têm limitações. Note que nenhum computador pode verificar todas as instâncias quando é impossível listar todas as possibilidades.

DEMONSTRAÇÕES POR CASOS Uma demonstração por casos deve cobrir todos as possibilidades que aparecem no teorema. Ilustramos demonstrações por casos com alguns exemplos. Em cada exemplo, você deve verificar que são cobertos todos os casos possíveis.

EXEMPLO 3 Demonstre que se n é um inteiro, então $n^2 \geq n$.

Solução: Podemos demonstrar que $n^2 \geq n$ para todos os inteiros considerando três casos, quando $n = 0$, quando $n \geq 1$ e quando $n \leq -1$. Dividimos a demonstração em três casos, pois é rápido demonstrar o resultado considerando zero, inteiros positivos e inteiros negativos separadamente.

Caso (i). Quando $n = 0$, como $0^2 = 0$, vemos que $0^2 \geq 0$. Disso segue que $n^2 \geq n$ é verdadeira nesse caso.

Exemplos Extras

Caso (ii). Quando $n \geq 1$, quando multiplicamos ambos os membros da inequação $n \geq 1$ pelo número inteiro positivo n, obtemos $n \cdot n \geq n \cdot 1$. Isso implica que $n^2 \geq n$ para $n \geq 1$.

Caso (iii). Nesse caso, $n \leq -1$. No entanto, $n^2 \geq 0$. Disso segue que $n^2 \geq n$.

Como a inequação $n^2 \geq n$ é verdadeira para os três casos, podemos concluir que se n é um inteiro, então $n^2 \geq n$. ◄

EXEMPLO 4 Use uma demonstração por casos para mostrar que $|xy| = |x|\,|y|$, em que x e y são números reais. (Lembre-se de que $|a|$, o valor absoluto de a, é igual a a quando $a \geq 0$ e igual a $-a$ quando $a \leq 0$.)

Solução: Em nossa demonstração desse teorema, vamos remover os valores absolutos usando o fato de que $|a| = a$ quando $a \geq 0$ e $|a| = -a$ quando $a < 0$. Como ambos $|x|$ e $|y|$ ocorrem em nossa fórmula, vamos precisar de quatro casos: *(i)* x e y ambos não negativos, *(ii)* x não negativo e y negativo, *(iii)* x negativo e y não negativo e *(iv)* x negativo e y negativo.

(Note que podemos remover o valor absoluto, fazendo a escolha apropriada dos sinais em cada caso.)

Caso (i). Vemos que $p_1 \rightarrow q$, pois $xy \geq 0$ quando $x \geq 0$ e $y \geq 0$, então $|xy| = xy = |x|\,|y|$.

Caso (ii). Para ver que $p_2 \rightarrow q$, note que se $x \geq 0$ e $y < 0$, então $xy \leq 0$, logo $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$. (Aqui, como $y < 0$, temos $|y| = -y$.)

Caso (iii). Para ver que $p_3 \rightarrow q$, seguimos o mesmo raciocínio como no caso anterior com os papéis de x e y invertidos.

Caso (iv). Para ver que $p_4 \rightarrow q$, note que quando $x < 0$ e $y < 0$, daí segue que $xy > 0$. Logo, $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x|\,|y|$.

Como completamos os quatro casos e esses casos são todas as possibilidades, podemos concluir que $|xy| = |x||y|$, sempre que x e y são números reais. ◄

ALAVANCANDO DEMONSTRAÇÕES POR CASOS Os exemplos que apresentamos para ilustrar demonstrações por casos proveram algum *insight* sobre quando usar esse método de demonstração. Em particular, quando não é possível tratar todos os casos ao mesmo tempo, uma demonstração por casos deve ser considerada. Mas quando usar essa demonstração? Geralmente, tentar uma demonstração por casos quando não existe um meio óbvio de começar a demonstração, mas também quando informações extras de cada caso podem ser usadas para seguir a demonstração. O Exemplo 5 ilustra como o método de demonstrações por casos pode ser usado efetivamente.

EXEMPLO 5 Formule uma conjectura sobre os dígitos decimais que ocorrem como algarismo das unidades nos quadrados de um número inteiro e demonstre seu resultado.

Solução: Os menores quadrados perfeitos são 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, e assim por diante. Notamos que os dígitos que ocorrem com algarismos das unidades dos quadrados são 0, 1, 4, 5, 6 e 9, com 2, 3, 7 e 8 não aparecendo como o último dígito dos quadrados. Conjeturamos este teorema: O último dígito decimal de um quadrado perfeito é 0, 1, 4, 5, 6 ou 9. Como podemos demonstrar esse teorema?

Primeiro, note que podemos expressar um inteiro n como $10a + b$, em que a e b são inteiros positivos e b é 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Aqui, a é o inteiro obtido quando subtraímos o algarismo decimal final do n de n e dividimos por 10. Depois, note que $(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = 10(10a^2 + 2b) + b^2$, então o algarismo final de n^2 é o mesmo algarismo final de b^2. Além disso, note-se que o dígito decimal final de b^2 é o mesmo dígito final de $(10 - b)^2 = 100 - 20b + b^2$. Conseqüentemente, podemos reduzir nossa demonstração em seis casos.

Caso (i). O dígito final de n é 1 ou 9. Então o dígito decimal final de n^2 é o dígito decimal final de $1^2 = 1$ ou $9^2 = 81$, ou seja, 1.

Caso (ii). O dígito final de n é 2 ou 8. Então o dígito decimal final de n^2 é o dígito decimal final de $2^2 = 4$ ou $8^2 = 64$, ou seja, 4.

Caso (iii). O dígito final de n é 3 ou 7. Então o dígito decimal final de n^2 é o dígito decimal final de $3^2 = 9$ ou $7^2 = 49$, ou seja, 9.

Caso (iv). O dígito final de n é 4 ou 6. Então o dígito decimal final de n^2 é o dígito decimal final de $4^2 = 16$ ou $6^2 = 36$, ou seja, 6.

Caso (v). O dígito final de n é 5. Então o dígito decimal final de n^2 é o dígito decimal final de $5^2 = 25$, ou seja, 5.

Caso (vi). O dígito final de n é 0. Então o dígito decimal final de n^2 é o dígito decimal final de $0^2 = 0$, ou seja, 0.

Como consideramos todos os seis casos, podemos concluir que o dígito decimal final de n^2 em que n é um número inteiro, é 0, 1, 2, 4, 5, 6 ou 9. ◀

Às vezes, podemos eliminar alguns dos casos, restando poucos exemplos, como o Exemplo 6 ilustra.

EXEMPLO 6 Mostre que não existem soluções inteiras para x e y de $x^2 + 3y^2 = 8$.

Solução: Podemos rapidamente reduzir a demonstração apenas verificando poucos casos, pois $x^2 > 8$ quando $|x| \geq 3$ e $3y^2 > 8$ quando $|y| \geq 2$. Disso restam os casos em que x toma um dos valores $-2, -1, 0, 1$ ou 2 e y toma um dos valores $-1, 0$, ou 1. Podemos terminar usando uma demonstração exaustiva. Para economizar com os casos restantes, notamos que x^2 só pode ser 0, 1 ou 4, e os possíveis valores de $3y^2$ são 0 e 3, logo vemos que a maior soma possível para os valores de x^2 e $3y^2$ é 7. Conseqüentemente, é impossível termos $x^2 + 3y^2 = 8$ com x e y inteiros. ◀

SEM PERDA DE GENERALIDADE Na demonstração do Exemplo 4, dispensamos o caso (*iii*), em que $x < 0$ e $y \geq 0$, pois é o mesmo que o caso (*ii*), em que $x \geq 0$ e $y < 0$, com os papéis de x e y invertidos. Para encurtar a demonstração, pudemos demonstrar os casos (*ii*) e (*iii*) juntos, assumindo, **sem perda de generalidade**, que $x \geq 0$ e $y < 0$. Implícito nessa sentença está o fato de que podemos provar o caso com $x < 0$ e $y \geq 0$, usando o mesmo argumento utilizado para o caso com $x \geq 0$ e $y < 0$, mas com as mudanças óbvias. Em geral, quando a frase "sem perda de generalidade" é usada em uma demonstração, queremos dizer que demonstrando um caso do teorema, nenhum argumento adicional é necessário para demonstrar o outro caso especificado. Ou seja, o outro caso segue o mesmo argumento, com as mudanças necessárias. É claro que o uso incorreto desse princípio pode levar a erros desafortunados. Às vezes assume-se que não perderemos a generalidade, mas isso leva à perda de generalidade. Esses erros podem ser cometidos por não levarmos em conta que um caso é substancialmente diferente dos outros. Isso pode levar a uma demonstração incompleta ou, possivelmente, errada. De fato, muitas demonstrações incorretas de famosos teoremas tinham seus erros em argumentos que usavam a idéia de "sem perda de generalidade" para demonstrar casos que não poderiam ser rapidamente demonstrados a partir de casos mais simples.

Vamos agora ilustrar uma demonstração em que "sem perda de generalidade" é usada efetivamente.

EXEMPLO 7 Mostre que $(x + y)^r < x^r + y^r$ quaisquer que sejam x e y reais positivos e r é um número real com $0 < r < 1$.

Solução: Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x + y = 1$. [Para ver isso, suponha que tenhamos demonstrado o teorema, assumindo que $x + y = 1$. Suponha que $x + y = t$. Então $(x/t) + (y/t) = 1$, o que implica que $((x/t) + (y/t))^r < (x/t)^r + (y/t)^r$. Multiplicando-se ambos os lados dessa última equação por t^r, mostramos que $(x + y)^r < x^r + y^r$.]

Assumindo que $x + y = 1$, como x e y são positivos, temos $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$. Como $0 < r < 1$, segue que $0 < 1 - r < 1$, portanto $x^{1-r} < 1$ e $y^{1-r} < 1$. Isso significa que $x < x^r$ e $y < y^r$. Conseqüentemente, $x^r + y^r > x + y = 1$. Isso significa que $(x + y)^r = 1^r < x^r + y^r$. Isso demonstra o teorema para $x + y = 1$.

Como assumimos $x + y = 1$ sem perda de generalidade, sabemos que $(x + y)^r < x^r + y^r$ quaisquer que sejam x e y reais positivos e r é um número real com $0 < r < 1$. ◀

ERROS COMUNS COM DEMONSTRAÇÕES EXAUSTIVAS E DEMONSTRAÇÕES POR CASOS Um erro comum de raciocínio é tirar conclusões incorretas dos exemplos. Não importa quantos exemplos separados são considerados, um teorema não é demonstrado considerando-se exemplos, a menos que todos os possíveis casos sejam cobertos. O problema de demonstrar um teorema é análogo a mostrar que um programa de computador sempre fornece a saída desejada. Não importa quantos valores de entrada são testados, a menos que todos os valores sejam testados, não podemos concluir que o programa sempre produz a saída correta.

EXEMPLO 8 É verdade que todo número inteiro positivo é a soma de 18 quartas potências de inteiros?

Solução: Para determinar quando n pode ser escrito como a soma de 18 quartas potências de inteiros, devemos começar examinando quando n é a soma de 18 quartas potências de inteiros para o menor inteiro positivo. Como as quatro primeiras quartas potências são 0, 1, 16, 81, . . . , se pudermos selecionar 18 termos desses que adicionados resultam n, então n é a soma de 18 quartas potências. Podemos mostrar que todos os números inteiros positivos até o 78 podem ser escritos como a soma de 18 quartas potências. (Os detalhes são deixados para o leitor.) No entanto, se decidirmos que já é o bastante, podemos chegar a uma conclusão errada. Pois não é verdade que todo inteiro positivo pode ser escrito como a soma de 18 quartas potências de inteiros, uma vez que 79 não pode ser escrito como essa soma (como o leitor pode verificar). ◀

Outro erro comum envolve fazer afirmações não garantidas que levam a demonstrações por casos incorretas em que nem todos os casos são considerados. Isso é ilustrado no Exemplo 9.

EXEMPLO 9 O que está errado com esta "demonstração"?

"Teorema": Se x é um número real, então x^2 é um número real positivo.

"Demonstração": Seja p_1 "x é positivo", seja p_2 "x é negativo" e seja q "x^2 é positivo". Para mostrar que $p_1 \rightarrow q$ é verdadeira, note que quando x é positivo, x^2 é positivo, pois é o produto de dois números positivos, x e x. Para mostrar que $p_2 \rightarrow q$, note que, quando x é negativo, x^2 é positivo, pois é o produto de dois números negativos, x e x. Isso completa a demonstração.

Solução: O problema com a demonstração que demos está no fato de não notarmos o caso $x = 0$. Quando $x = 0$, $x^2 = 0$ não é positivo, portanto o suposto teorema é falso. Se p é "x é um número real", então podemos demonstrar resultados em que p é a hipótese com três casos, p_1, p_2 e p_3, em que p_1 é "x é positivo", p_2 é "x é negativo" e p_3 é "$x = 0$" uma vez que temos a equivalência $p \leftrightarrow p_1 \vee p_2 \vee p_3$. ◀

Demonstrações de Existência

Muitos teoremas são afirmações de que determinados objetos de certo tipo existem. Um teorema desse tipo é uma proposição da forma $\exists x\, P(x)$, em que P é um predicado. Uma demonstração de uma proposição da forma $\exists x\, P(x)$ é chamada de **demonstração de existência**. Existem muitos meios de demonstrar um teorema desse tipo. Às vezes, uma demonstração de existência de $\exists x\, P(x)$ pode ser dada encontrando-se um elemento a tal que $P(a)$ é verdadeira. Essas demonstrações de existência são chamadas de **construtivas**. Também é possível dar uma demonstração de existência que seja **não construtiva**; ou seja, não encontramos um elemento a tal que $P(a)$ é verdadeira, mas podemos provar que $\exists x\, P(x)$ é verdadeira de alguma outra maneira. Um método comum de fornecer uma demonstração de existência não construtiva é usar a demonstração por contradição e mostrar que a negação da quantificação existencial implica uma contradição. O conceito de demonstração construtiva de existência é ilustrado no Exemplo 10 e o conceito de não construtiva, no Exemplo 11.

EXEMPLO 10 **Demonstração de Existência Construtiva** Mostre que existe um inteiro positivo que pode ser escrito como a soma de cubos de duas maneiras diferentes.

Exemplos Extras

Solução: Depois de considerável trabalho (tal como uma procura computacional), encontramos

$$1.729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3.$$

Como mostramos um inteiro positivo que pode ser escrito como a soma de cubos de dois modos diferentes, está feito. ◀

EXEMPLO 11 **Demonstração de Existência Não Construtiva** Mostre que existem números irracionais x e y, tal que x^y é racional.

Solução: De acordo com o Exemplo 10 na Seção 1.6, sabemos que $\sqrt{2}$ é irracional. Considere o número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Se ele é racional, temos dois números irracionais x e y com x^y racional, ou seja, $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$. Por outro lado, se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é irracional, então podemos tomar $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$, logo $x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = \sqrt{2}^2 = 2$.

Esta demonstração é um exemplo de demonstração de existência não construtiva, pois não encontramos números irracionais x e y, tal que x^y é racional. No entanto, mostramos que ou o par $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ ou o par $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2}$ tem a propriedade desejada, mas não mostramos para qual dos dois pares isso funciona! ◀

Demonstrações não construtivas de existência são delicadas, como o Exemplo 12 ilustra.

EXEMPLO 12 **Chomp** é um jogo para dois jogadores. Nesse jogo, biscoitos são dispostos em uma grade retangular. O biscoito na ponta esquerda é envenenado, como mostra a Figura 1(a). Os dois jogadores fazem movimentos alternadamente, um tem de comer um biscoito restante, junto com todos os biscoitos à direita e/ou abaixo deste (veja a Figura 1(b), por exemplo). O perdedor é o jogador que não tiver escolha e tiver de comer o biscoito envenenado. Perguntamos se um dos dois jogadores pode ter uma estratégia vencedora. Ou seja, pode um jogador sempre fazer movimentos que garantam a ele a vitória?

Links

Solução: Vamos dar uma demonstração de existência não construtiva de uma estratégia vencedora para o primeiro jogador. Ou seja, vamos mostrar que o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora sem descrevê-la explicitamente.

Primeiro, note que o jogo tem um fim e não pode terminar empatado porque, com cada movimento, ao menos um biscoito é comido; portanto, depois de $m \times n$, o jogo chega ao fim, em

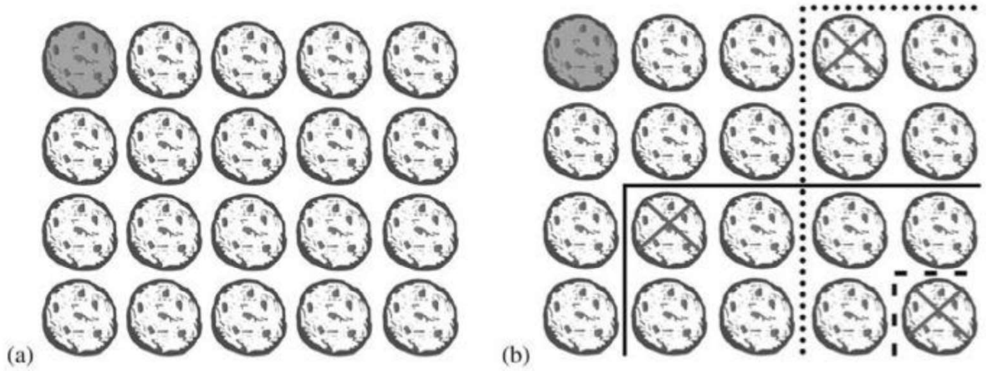

FIGURA 1 (a) Chomp, o Biscoito na Ponta Superior Esquerda é Envenenado (b) Três Movimentos Possíveis

que a grade original é $m \times n$. Agora, suponha que o primeiro jogador comece o jogo comendo exatamente o biscoito no canto direito inferior. Existem duas possibilidades, esse é o primeiro movimento de uma estratégia vencedora para o primeiro jogador ou o segundo jogador pode fazer uma jogada que seja o primeiro movimento de uma estratégia vencedora para o segundo jogador. Nesse segundo caso, em vez de comer o biscoito no canto inferior direito, o primeiro jogador poderia ter feito o mesmo movimento que o segundo jogador fez como seu primeiro movimento de uma estratégia vencedora (e então continuar seguindo aquela estratégia vencedora). Isso garantiria uma vitória para o primeiro jogador.

Note que mostramos que uma estratégia vencedora existe, mas não especificamos uma tal estratégia. Conseqüentemente, a demonstração é não construtiva. De fato, ninguém foi capaz de descrever uma estratégia vencedora para o Chomp que se aplique para todas as grades retangulares, e descreva os movimentos que o primeiro jogador deve seguir. No entanto, estratégias vencedoras podem ser descritas para determinados casos especiais, como quando a grade é quadrada e quando tem apenas duas linhas de biscoitos (veja os exercícios 15 e 16 na Seção 4.2). ◀

Demonstrações de Unicidade

Alguns teoremas afirmam a existência de um único elemento com uma determinada propriedade. Em outras palavras, esses teoremas afirmam que existe exatamente um elemento com essa propriedade. Para demonstrar uma sentença desse tipo, precisamos mostrar que um elemento com essa propriedade existe e que nenhum outro elemento tem essa propriedade. As duas partes de uma **demonstração de unicidade** são:

Existência: Mostramos que um elemento x com a propriedade desejada existe.
Unicidade: Mostramos que se $y \neq x$, então y não tem a propriedade desejada.

Equivalentemente, podemos mostrar que se x e y têm ambos essa propriedade, então $x = y$.

Observação: Mostrar que existe um único elemento x, tal que $P(x)$ é o mesmo que demonstrar a sentença $\exists x(P(x) \wedge \forall y(y \neq x \rightarrow \neg P(y)))$.

Vamos ilustrar os elementos de uma demonstração de unicidade no Exemplo 13.

EXEMPLO 13 Mostre que se a e b são números reais e $a \neq 0$, então existe um único número real r, tal que $ar + b = 0$.

Solução: Primeiro, note que o número real $r = -b/a$ é uma solução para $ar + b = 0$, pois $a(-b/a) + b = -b + b = 0$. Conseqüentemente, um número real r existe para o qual $ar + b = 0$. Esta é a parte de existência da demonstração.

Segundo, suponha que s é um número real, tal que $as + b = 0$. Então, $ar + b = as + b$, em que $r = -b/a$. Subtraindo b de ambos os lados, encontramos $ar = as$. Dividindo ambos os lados dessa última equação por a, que não é zero, vemos $r = s$. Isso significa que se $s \neq r$, então $as + b \neq 0$. Isso estabelece a parte da unicidade da demonstração. ◀

Exemplos Extras

Estratégias de Demonstração

Encontrar demonstrações pode ser um trabalho desafiador. Quando você é confrontado com uma sentença para demonstrar, você deve primeiro substituir os termos por suas definições e, então, cuidadosamente analisar o que as hipóteses e a conclusão significam. Depois disso, você pode tentar demonstrar o resultado usando um dos métodos de demonstração avaliados. Geralmente, se a sentença é uma sentença condicional, você deve primeiro tentar uma demonstração direta; se esta

Links

GODFREY HAROLD HARDY (1877–1947) Hardy, nascido em Cranleigh, Surrey, Inglaterra, foi o mais velho de dois filhos de Isaac Hardy e Sophia Hall Hardy. Seu pai era mestre em geografia e desenho pela Escola de Cranleigh e também dava aulas de canto e jogava futebol. Sua mãe dava aulas de piano e mantinha uma pensão para jovens estudantes. Os pais de Hardy eram devotos da educação de seus filhos. Hardy demonstrou suas habilidades com números com apenas dois anos de idade, quando começou a desenhar números em milhões. Ele teve um tutor em matemática em vez de freqüentar a escola regular. Foi para a Winchester College, escola de segundo grau particular, aos 13 anos ao ganhar uma bolsa de estudos. Ele era um excelente aluno e demonstrou um intenso interesse por matemática. Hardy entrou para o Trinity College, Cambridge, em 1896, com uma bolsa de estudos e ganhou vários prêmios durante o tempo que passou por lá, graduando-se em 1899.

Hardy manteve o cargo de professor em matemática na Trinity College, na Cambridge University, de 1906 a 1919, quando foi indicado para a cadeira de geometria de Sullivan, em Oxford. Ele ficou descontente com Cambridge por causa da demissão do famoso filósofo e matemático Bertrand Russell, do Trinity, pelas atividades antibélicas, e não apoiava algumas atitudes administrativas tomadas. Em 1931, ele retornou a Cambridge como professor de matemática pura, onde permaneceu até sua aposentadoria em 1942. Ele foi um matemático purista e manteve uma visão elitista da matemática, esperando que sua pesquisa nunca fosse aplicada.

Ironicamente, Hardy é talvez o mais conhecido dos criadores da lei Hardy–Weinberg, que predita os modelos de herança. Seu trabalho nessa área aparece como uma carta no periódico *Science,* no qual ele usa as idéias de álgebra simples para demonstrar os erros em um artigo sobre genética. Hardy trabalhou primeiramente com a teoria de números e função, explorando alguns tópicos como a função zeta de Riemann, séries de Fourier e a distribuição dos números primos. Ele fez muitas contribuições importantes a destacados problemas, como os de Waring sobre a representação dos números inteiros positivos como soma da k-ésima potência e o problema da representação dos números inteiros ímpares como a soma de três primos. Hardy é também lembrado pelas suas colaborações com John E. Littlewood, colega de trabalho com quem escreveu mais de 100 artigos, e com o famoso matemático indiano prodígio Srinivasa Ramanujan. Sua colaboração com Littlewood formou a piada de que existiam apenas três matemáticos importantes naquela época, Hardy, Littlewood e Hardy–Littlewood, embora algumas pessoas pensassem que Hardy teria inventado uma pessoa fictícia, Littlewood, porque Littlewood era muito pouco visto fora de Cambridge. Hardy teve a sabedoria de reconhecer a genialidade de Ramanujan a partir de escritos não convencionais, mas extremamente criativos enviados por Ramanujan para ele, enquanto outros matemáticos falharam nesta tarefa. Hardy trouxe Ramanujan para Cambridge, e ele colaborou em importantes artigos, estabelecendo novos resultados no número de partições de números inteiros. Hardy se interessava pela educação matemática, e seu livro *Um Curso de Matemática Pura* teve um grande efeito na educação primária e secundária em matemática na primeira metade do século XX. Hardy também escreveu *Uma Apologia de um Matemático*, em que ele deu sua resposta à pergunta de que se vale a pena devotar a vida ao estudo da matemática. Neste livro é apresentada a visão dele do que é matemática e o que ela faz.

Hardy teve um grande interesse por esportes. Ele era um fã ávido de críquete e acompanhava os resultados de perto. Em uma determinada partida em que ele estava, tiraram uma foto dele da qual não gostou (apenas cinco fotos são conhecidas), além disso, não gostava de espelhos, cobrindo-os com uma toalha imediatamente ao entrar em um quarto de hotel.

NOTA HISTÓRICA O matemática inglês G. H. Hardy, quando visitava o indiano prodígio Ramanujan no hospital, contou-lhe que se lembrara do número 1.729, o número de táxis que tomara, que era bastante estúpido. Ramanujan respondeu: "Não; é um número muito interessante; é o menor número que pode ser expresso como a soma dos cubos de duas formas diferentes".

falhar, você pode tentar uma demonstração indireta. Se nenhuma dessas tentativas funcionar, você deve tentar uma demonstração por contradição.

RACIOCÍNIO DIRETO E PARA TRÁS Qualquer que seja o método escolhido, você precisa de um ponto de partida para sua demonstração. Para começar uma demonstração direta de uma sentença condicional, comece com as premissas. Usando estas premissas, juntamente com os axiomas e conhecendo teoremas, você pode construir uma demonstração usando uma seqüência de passos que nos leva à conclusão. Esse tipo de raciocínio, chamado de *raciocínio direto*, é o tipo mais comum de raciocínio usado para demonstrar resultados relativamente simples. Similarmente, com raciocínios indiretos, você pode começar com a negação da conclusão e, usando uma seqüência de passos, obter a negação das premissas.

Infelizmente, raciocínio direto é com freqüência difícil de usar para demonstrar resultados mais complicados, pois os raciocínios necessários para alcançar a conclusão desejada podem estar distantes do óbvio. Nesses casos pode ser interessante usar um *raciocínio para trás*. Raciocinando de trás para frente para demonstrar uma sentença q, achamos uma sentença p que pode demonstrar a propriedade que $p \to q$. (Note que isso não ajuda a encontrar uma sentença r que você pode demonstrar que $q \to r$, pois esta é uma falácia de carregar a pergunta para concluir de $q \to r$ e r que q é verdadeira.) Raciocínios de trás para frente serão ilustrados nos exemplos 14 e 15.

Links

SRINIVASA RAMANUJAN (1887–1920) Famoso prodígio matemático, Ramanujan nasceu e foi criado no sul da Índia, próximo à cidade de Madras (agora chamada de Chennai). Seu pai era balconista em uma loja de roupas. Sua mãe contribuía com a renda familiar cantando em um templo local. Ramanujan estudou em uma escola de língua inglesa, expondo seu talento e interesse pela matemática. Com 13 anos, ele usava um livro de teoria para universitários. Quando ele tinha 15 anos, um universitário deu-lhe uma cópia de *Sinopse da Matemática Pura*. Ramanujan decidiu trabalhar com os mais de 6 mil resultados do livro, declarados sem demonstração ou explicação, escrevendo tudo em folhas depois coletadas em um livro de anotações. Terminou o colegial em 1904 e ganhou uma bolsa de estudos para a Universidade de Madras. Inscrito em um currículo de artes finas, ele não freqüentava suas aulas e assistia às aulas de matemática, o que o fez perder sua bolsa. Ele não passou nos exames na universidade quatro vezes, de 1904 a 1907, indo bem apenas em matemática. Durando esse tempo, ele completava seu caderno de anotações com escritos originais, algumas vezes redescobrindo trabalhos já publicados e, em outras, fazendo novas descobertas.

Sem um diploma universitário, era difícil para Ramanujan conseguir um emprego decente. Para sobreviver, ele dependia de ajuda de amigos. Ele foi tutor de estudantes em matemática, mas suas maneiras não convencionais de pensar e sua falta de conhecimento do programa de ensino causavam-lhe problemas. Ele casou-se em 1909, um casamento arranjado com uma garota 9 anos mais nova que ele. Por precisar sustentar a nova família, mudou-se para Madras e foi atrás de um emprego. Ele mostrava suas anotações matemáticas aos empregadores em potencial, mas elas os transtornavam. Entretanto, um professor da Presidency College reconheceu sua genialidade e o apoiou e, em 1912, ele conseguiu um emprego como gerente de contas, ganhando um pequeno salário.

Ramanujan continuou seu trabalho matemático durante esse tempo e publicou seu primeiro artigo em 1910 em um periódico indiano. Ele percebeu que seu trabalho ía além daquilo já feito pelos matemáticos indianos e decidiu escrever aos matemáticos ingleses. O primeiro matemático a quem escreveu, recusou seu pedido de ajuda. Mas, em janeiro de 1913, ele escreveu a G. H. Hardy, que estava inclinado a recusar Ramanujan, mas as proposições matemáticas em sua carta, sem demonstrações, chamaram a atenção de Hardy. Ele decidiu examiná-las de perto com a ajuda de seu colega e colaborador J. E. Littlewood. Eles decidiram, depois de um estudo minucioso, que Ramanujan era provavelmente um gênio, porque suas proposições "poderiam ser escritas apenas por um matemático de alto nível; elas devem ser verdadeiras, porque se forem falsas, ninguém poderia ter a imaginação de inventá-las".

Hardy conseguiu uma bolsa de estudos para Ramanujan, trazendo-o para a Inglaterra, em 1914. Hardy pessoalmente o auxiliou na análise matemática e eles trabalharam juntos por 5 anos, provando teoremas significativos sobre o número de partições de inteiros. Durante esse tempo, Ramanujan fez importantes contribuições para a teoria dos números e também trabalhou com frações, séries infinitas e funções elípticas. Ramanujan teve várias idéias que envolviam determinados tipos de funções e séries, mas suas suposições de teoremas de números primos estavam geralmente erradas. Isso ilustra sua vaga idéia do que constitui uma demonstração correta. Ele foi um dos membros mais novos que se juntou à Irmandade da Sociedade Real. Infelizmente, em 1917, Ramanujan ficou muito doente. Nesta época, pensou-se que ele estava tendo problemas com o clima inglês e tivesse contraído tuberculose. Sabe-se agora que ele sofria de deficiência de uma vitamina, uma vez que Ramanujan era vegetariano. Ele retornou para a Índia em 1919, continuando seus estudos em matemática mesmo quando estava confinado em sua cama. Ele era religioso e acreditava que seu talento matemático procedia da divindade de sua família, Namagiri. Ramanujan considerava a matemática e a religião como que entrelaçadas. Ele dizia que "uma equação para mim não tem significado a menos que expresse um pensamento de Deus". Sua curta vida veio ao final em abril de 1920, quando ele tinha 32 anos de idade. Ramanujan deixou muitas anotações com resultados não publicados. Os escritos nesses cadernos mostram os pensamentos de Ramanujan, mas são limitados. Muitos matemáticos devotaram anos de estudo para explicar e justificar os resultados dos cadernos.

EXEMPLO 14 Dados dois números reais positivos x e y, sua **média aritmética** é $(x + y)/2$ e sua **média geométrica** é $\sqrt{xy}$. Quando comparamos essas médias para pares de números reais positivos distintos, vemos que a média aritmética é sempre maior que a geométrica. [Por exemplo, quando $x = 4$ e $y = 6$, temos $5 = (4 + 6)/2 > \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24}$.] Podemos demonstrar que essa inequação é sempre verdadeira?

Solução: Para demonstrar que $(x + y)/2 > \sqrt{xy}$ quando x e y são números reais distintos, podemos pensar de trás para frente. Construímos a seqüência de inequações equivalentes. As inequações equivalentes são:

Exemplos Extras

$$\begin{aligned} (x+y)/2 &> \sqrt{xy}, \\ (x+y)^2/4 &> xy, \\ (x+y)^2 &> 4xy, \\ x^2 + 2xy + y^2 &> 4xy, \\ x^2 - 2xy + y^2 &> 0, \\ (x-y)^2 &> 0. \end{aligned}$$

Como $(x - y)^2 > 0$ quando $x \neq y$, segue que a inequação final é verdadeira. Como todas essas inequações são equivalentes, segue que $(x + y)/2 > \sqrt{xy}$ quando $x \neq y$. Uma vez que fizemos esse raciocínio, podemos facilmente reverter os passos para construir uma demonstração usando um raciocínio direto. Daremos agora esta demonstração.

Suponha que x e y são números reais distintos. Então $(x - y)^2 > 0$, pois o quadrado de um número diferente de zero é positivo (veja Apêndice 1). Como $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, isso implica que $x^2 - 2xy + y^2 > 0$. Adicionando $4xy$ em ambos os lados, obtemos $x^2 + 2xy + y^2 > 4xy$. Como $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, isso significa que $(x + y)^2 \geq 4xy$. Dividindo ambos os membros dessa equação por 4, vemos que $(x + y)^2/4 > xy$. Finalmente, tomando raízes quadradas dos dois lados (o que preserva a inequação, pois ambos os lados são positivos), temos $(x + y)/2 > \sqrt{xy}$. Concluímos que se x e y são números reais positivos, então sua média aritmética $(x + y)/2$ é maior que sua média geométrica $\sqrt{xy}$. ◄

EXEMPLO 15 Suponha que duas pessoas participem de um jogo, e que cada um na sua vez toma uma, duas ou três pedras de uma pilha que contém 15 pedras. A pessoa que remove a última pedra ganha o jogo. Mostre que o primeiro jogador pode ganhar, não importando o que o segundo jogador faça.

Solução: Para comprovar que o primeiro jogador pode sempre ganhar o jogo, podemos pensar de trás para frente. No último passo, o primeiro jogador pode ganhar se sobrar uma pilha com uma, duas ou três pedras. O segundo jogador será forçado a deixar uma, duas ou três pedras se ele tiver de jogar com uma pilha que contém quatro pedras. Conseqüentemente, uma maneira de o primeiro jogador ganhar é deixar quatro pedras para o segundo jogador na sua penúltima jogada. O primeiro jogador pode deixar quatro pedras quando existirem cinco, seis ou sete na pilha que o segundo jogador deixou, o que acontecerá quando o segundo jogador fizer seu movimento em uma pilha com oito pedras. Conseqüentemente, para forçar o segundo jogador a deixar cinco, seis ou sete pedras, o primeiro jogador deve deixar oito pedras para o segundo na sua antipenúltima jogada. Isso significa que deve ter nove, dez ou onze pedras para esta jogada. Similarmente, o segundo jogador deve deixar doze pedras quando fizer sua primeira jogada. Podemos reverter este argumento para mostrar que o primeiro jogador deve sempre fazer jogadas para ganhar o jogo, qualquer que sejam as jogadas do segundo. Essas jogadas sucessivamente deixam doze, oito e quatro pedras para o segundo. ◄

ADAPTANDO DEMONSTRAÇÕES DE EXISTÊNCIA Uma excelente maneira de procurar por possíveis métodos que podem ser usados para demonstrar uma sentença é tomar vantagem das demonstrações de existência. Freqüentemente, uma demonstração de existência pode ser adaptada para demonstrar um novo resultado. Mesmo quando esse não é o caso, alguma idéia da demonstração de existência pode ser usada para ajudar. Como demonstrações de existência nos dão dicas para novas demonstrações, você deve ler e entender essas demonstrações quando encontrá-las em seus estudos. Esse processo é ilustrado no Exemplo 16.

EXEMPLO 16 No Exemplo 10 da Secção 1.6, demonstramos que $\sqrt{2}$ é irracional. Agora, conjecturamos que $\sqrt{3}$ é irracional. Podemos adaptar a demonstração do Exemplo 10 da Seção 1.6 para mostrar que $\sqrt{3}$ é irracional?

Exemplos Extras

Solução: Para adaptar a demonstração do Exemplo 10 da Seção 1.6, começamos imitando os passos da demonstração, mas substituindo $\sqrt{2}$ por $\sqrt{3}$. Primeiro, supomos que $\sqrt{3} = d/c$ em que a fração c/d é irredutível. Elevando ambos os lados ao quadrado, temos $3 = c^2/d^2$, logo $3d^2 = c^2$. Podemos usar essa equação para mostrar que 3 deve ser um fator de c e d, similar a como usamos a equação $2b^2 = a^2$ no Exemplo 10 da Seção 1.6 para mostrar que 2 deveria ser um fator de a e b? (Lembre-se de que um inteiro s é um fator de um inteiro t se t/s for um inteiro. Um inteiro n é par se e somente se 2 for um fator de n.) Sim, podemos, mas precisamos de mais alguma munição da teoria dos números, que vamos desenvolver no Capítulo 3. Vamos terminar a demonstração, mas deixaremos as justificativas desses passos para o Capítulo 3. Como 3 é um fator de c^2, este deve ser um fator de c. Mais que isso, como 3 é um fator de c, 9 deve ser um fator de c^2, o que significa que 9 é um fator de $3d^2$. Isso implica que 3 é um fator de d^2, o que significa que 3 é um fator de d. Isso mostra que 3 é um fator de c e d, o que é uma contradição. Depois de termos certeza das justificativas desses passos, teremos mostrado que $\sqrt{3}$ é irracional pela adaptação da demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional. Note que esta demonstração pode ser estendida para mostrar que $\sqrt{n}$ é irracional sempre que n for um inteiro positivo que não é um quadrado perfeito. Deixaremos estes detalhes para o Capítulo 3. ◀

Uma boa dica é procurar demonstrações de existência que você pode adaptar quando for confrontado com a demonstração de um novo teorema, particularmente quando o novo teorema parece semelhante a um que você já demonstrou.

Procurando Contra-exemplos

Na Seção 1.5, introduzimos o uso de contra-exemplos para mostrar que determinadas sentenças são falsas. Quando confrontado com uma conjectura, você deve primeiro tentar demonstrar essa conjectura, e, se suas tentativas não tiverem sucesso, você deve tentar encontrar um contra-exemplo. Se você não conseguir um contra-exemplo, deve tentar demonstrar a sentença. De qualquer forma, procurar contra-exemplos é extremamente importante, pois freqüentemente nos dá algum *insight* sobre o problema. Vamos ilustrar o papel dos contra-exemplos com alguns exemplos.

EXEMPLO 17 No Exemplo 14 da Seção 1.6, mostramos que a sentença "Todo inteiro positivo é a soma de dois quadrados de inteiros" é falsa, encontrando um contra-exemplo. Ou seja, existem inteiros positivos que não podem ser escritos como a soma de dois quadrados de inteiros. Portanto, não podemos escrever todos os inteiros como a soma de quadrados de dois números inteiros, mas talvez possamos escrever todo número inteiro como a soma dos quadrados de três números inteiros. Ou seja, a sentença "Todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de três números inteiros" é verdadeira ou falsa?

Exemplos Extras

Solução: Como sabemos mostrar que nem todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma de dois quadrados de inteiros, devemos inicialmente ser céticos sobre todo inteiro poder ser escrito como a soma de três quadrados de inteiros. Portanto, vamos primeiro procurar por um contra-exemplo. Ou seja, podemos mostrar que a sentença "Todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de três números inteiros" é falsa se encontrarmos um inteiro que não seja a soma de quadrados de três inteiros. Para encontrar um contra-exemplo, tentamos escrever a sucessão dos inteiros como a soma de três quadrados. Vemos que $1 = 0^2 + 0^2 + 1^2$, $2 = 0^2 + 1^2 + 1^2$, $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$, $4 = 0^2 + 0^2 + 2^2$, $5 = 0^2 + 1^2 + 2^2$, $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$, mas não podemos encontrar um modo de escrever 7 como a soma de três quadrados. Para mostrar que não existem três quadrados que somados resultem 7, notemos que os únicos quadrados possíveis que podemos usar menores que 7 são 0, 1 e 4. Como não existe soma de três termos que resulte 7 com essas parcelas, segue-se que 7 é um contra-exemplo. Concluímos que a sentença "Todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de três números inteiros" é falsa.

Mostramos que nem todo inteiro positivo pode ser escrito como a soma de quadrados de três inteiros. A próxima pergunta deve ser se podemos escrever todos os inteiros positivos como a soma de quatro quadrados de inteiros. Alguma experimentação mostra evidências de que sim. Por exemplo, $7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$, $25 = 4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$ e $87 = 9^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$. Isso nos faz conjecturar que "Todo inteiro positivo é a soma dos quadrados de quatro inteiros" é verdadeira. Para uma demonstração, veja [Ro05]. ◀

Estratégia de Demonstração em Ação

A matemática é geralmente concebida como se fatos matemáticos estivessem cravados em pedras. Textos de matemática (incluindo este livro) apresentam formalmente teoremas e suas demonstrações. Essas apresentações não nos levam a descobrir o processo matemático. Esse processo começa com a exploração de conceitos e exemplos, fazendo perguntas, formulando conjecturas e tentando valorar essas conjecturas com uma demonstração ou com contra-exemplos. Essas são as atividades do dia-a-dia de um matemático. Acredite ou não, o material apresentado em livros é originalmente concebido dessa forma.

Pessoas formulam conjecturas com base em muitos tipos de evidência. O exame de casos especiais pode nos levar a uma conjectura, como a identificação de possíveis modelos. Alterando hipóteses e conclusões de teoremas conhecidos também podemos ser levados a conjecturas plausíveis. Em outros tempos, conjecturas eram feitas com base na intuição, na crença de que um resultado era verdadeiro. Independentemente de como uma conjectura foi feita, uma vez formulada, o objetivo é demonstrar que é verdadeira ou falsa. Quando um matemático acredita que uma conjectura deve ser verdadeira, ele tenta encontrar uma demonstração. Se não consegue encontrá-la, deve procurar por um contra-exemplo. Quando não encontra um contra-exemplo, deve tornar atrás e tentar provar a conjectura novamente. Embora muitas conjecturas sejam verificadas rapidamente, algumas resistem por centenas de anos e levam ao desenvolvimento de novas partes da matemática. Vamos mencionar algumas famosas conjecturas mais tarde, nesta seção.

Ladrilhando

Links

Podemos ilustrar os aspectos de estratégia de demonstrações através de um breve estudo sobre como fazer coberturas de um tabuleiro de xadrez, como se colocássemos ladrilhos em um piso. Olhando para esse processos, podemos rapidamente descobrir e demonstrar muitos resultados diferentes, usando vários métodos de demonstração. Existe um sem-número de conjecturas que pode ser feito e estudado nessa área. Para começar, precisamos definir alguns termos. Um **tabuleiro de xadrez** é um retângulo dividido em quadrados de mesmo tamanho em linhas horizontais e verticais. O jogo de xadrez é jogado em um tabuleiro com 8 linhas e 8 colunas; esse tabuleiro será chamado de **tabuleiro standard** e é mostrado na Figura 2. Nesta seção, usaremos o termo **tabuleiro** para representar qualquer quadriculado de qualquer tamanho, como, por exemplo, as partes do tabuleiro de xadrez obtidas pela retirada de um ou mais quadrados. Um **dominó** é uma peça retangular formada por dois quadrados, como mostra a Figura 3. Dizemos que um tabuleiro está **ladrilhado** por dominós quando todos os seus quadrados estão cobertos sem haver dominós sobrepostos nem dominós com partes para fora do tabuleiro. Agora podemos desenvolver alguns resultados sobre ladrilhamento de tabuleiros usando dominós.

7. $\neg Q(c) \vee S(c)$	Instanciação universal a partir de (6)
8. $S(c)$	Silogismo disjuntivo a partir de (5) e (7)
9. $\forall x(R(x) \to \neg S(x))$	Premissa
10. $R(c) \to \neg S(c)$	Instanciação universal a partir de (9)
11. $\neg R(c)$	*Modus tollens* a partir de (8) e (10)
12. $\exists x \neg R(x)$	Generalização existencial a partir de (11)

31. Seja p "Está chovendo"; seja q "Ivete tem sua sombrinha"; seja r "Ivete se molha." As hipóteses são $\neg p \vee q$, $\neg q \vee \neg r$, e $p \vee \neg r$. A resolução das duas primeiras dá $\neg p \vee \neg r$. A resolução desta e da terceira hipótese dá $\neg r$, como desejado. **33.** Suponha que esta proposição seja satisfatória. Usar a resolução nas primeiras duas cláusulas nos permite concluir $q \vee q$; em outras palavras, sabemos que q tem de ser verdadeira. Usar a resolução nas duas últimas cláusulas nos permite concluir $\neg q \vee \neg q$; em outras palavras, sabemos que $\neg q$ deve ser verdadeira. Isso é uma contradição. Assim, a proposição não é satisfatória. **35.** Válido.

Seção 1.6

1. Sejam $n = 2k + 1$ e $m = 2l + 1$ inteiros ímpares. Então, $n + m = 2(k + l + 1)$ é par. **3.** Suponha que n seja par. Então, $n = 2k$ para algum inteiro k. Portanto, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Como escrevemos n^2 como 2 vezes um inteiro, concluímos que n^2 é par. **5.** Demonstração direta: suponha que $m + n$ e $n + p$ sejam pares. Então, $m + n = 2s$ para algum inteiro s e $n + p = 2t$ para algum inteiro t. Se somarmos estas expressões, obtemos $m + p + 2n = 2s + 2t$. Subtraindo $2n$ de ambos os lados e fatorando, temos $m + p = 2s + 2t - 2n = 2(s + t - n)$. Como escrevemos $m + p$ como 2 vezes um inteiro, concluímos que $m + p$ é par. **7.** Como n é ímpar, podemos escrever $n = 2k + 1$ para algum inteiro k. Então, $(k + 1)^2 - k^2 = k^{2+} 2k + 1 - k^2 = 2k + 1 = n$. **9.** Suponha que r seja racional e que i seja irracional e que $s = r + i$ seja racional. Então, pelo Exemplo 7, $s + (-r) = i$ é racional, o que é uma contradição. **11.** Como $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ é racional e $\sqrt{2}$ é irracional, o produto de dois números irracionais não é necessariamente irracional. **13.** Demonstração por contraposição: se $1/x$ fosse racional, então, por definição, $1/x = p/q$ para alguns inteiros p e q com $q \neq 0$. Como $1/x$ não pode ser 0 (se fosse, então teríamos a contradição $1 = x \cdot 0$ ao multiplicar ambos os lados por x), sabemos que $p \neq 0$. Agora, $x = 1/(1/x) = 1/(p/q) = q/p$ pelas regras usuais da álgebra e da aritmética. Portanto, x pode ser escrito como o quociente de dois inteiros com o denominador diferente de zero. Logo, por definição, x é racional. **15.** Suponha que não seja verdade que $x \geq 1$ ou $y \geq 1$. Então, $x < 1$ e $y < 1$. Somando estas duas desigualdades, obtemos $x + y < 2$, que é a negação de $x + y \geq 2$. **7. a)** Suponha que n seja ímpar, de modo que $n = 2k + 1$ para algum inteiro k. Então, $n^3 + 5 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k + 3)$. Como $n^3 + 5$ é duas vezes algum inteiro, ele é par. **b)** Suponha que $n^3 + 5$ seja ímpar e que n seja ímpar. Como n é ímpar e o produto de dois números ímpares é ímpar, segue que n^2 é ímpar e, então, que n^3 é ímpar. Mas, então, $5 = (n^3 + 5) - n^3$ teria de ser par, pois é a diferença entre dois números ímpares. Portanto, a suposição que $n^3 + 5$ e n eram ambos ímpares é falsa. **19.** A proposição é vagamente verdadeira, pois 0 não é um inteiro positivo. Demonstração por vacuidade. **21.** $P(1)$ é verdadeira pois $(a + b)^1 = a + b \geq a^1 + b^1 = a + b$. Demonstração direta. **23.** Se escolhêssemos 9 ou menos dias em cada dia da semana, isto cobriria no máximo $9 \cdot 7 = 63$ dias. Mas escolhemos 64 dias. Esta contradição mostra que pelo menos 10 dos dias que escolhemos devem ser no mesmo dia da semana. **25.** Suponha por contradição que a/b seja uma raiz racional, em que a e b são inteiros e esta fração está o mais simplificada possível (isto é, a e b não tem divisores comuns maiores do que 1). Substitua a raiz proposta na equação para obter $a^3/b^3 + a/b + 1 = 0$. Multiplique por b^3 para obter $a^3 + ab^2 + b^3 = 0$. Se a e b forem ambos ímpares, então o lado esquerdo é a soma de três números e, portanto, deve ser ímpar. Se a for ímpar e b for par, então o lado esquerdo é ímpar + par + par, o que é novamente ímpar. Analogamente, se a for par e b for ímpar, então o lado esquerdo é par + par + ímpar, o que é novamente ímpar. Como a fração a/b está simplificada, não pode ocorrer de ambos, a e b, serem pares. Portanto, em todos os casos, o lado esquerdo é ímpar e, portanto, não pode ser igual a 0. Esta contradição mostra que não existe nenhuma raiz. **27.** Primeiro, suponha que n seja ímpar, de modo que $n = 2k + 1$ para algum inteiro k. Então, $5n + 6 = 5(2k + 1) + 6 = 10k + 11 = 2(5k + 5) + 1$. Logo, $5n + 6$ é ímpar. Para demonstrar a recíproca, suponha que n seja par, de modo que $n = 2k$ para algum inteiro k. Então, $5n + 6 = 10k + 6 = 2(5k + 3)$, de modo que $5n + 6$ é par. Assim, n é ímpar se e somente se $5n + 6$ for ímpar. **29.** Esta proposição é verdadeira. Suponha que m não seja nem 1 nem -1. Então, mn tem um fator m maior do que 1. Por outro lado, $mn = 1$, e 1 não tem um fator assim. Logo, $m = 1$ ou $m = -1$. No primeiro caso, $n = 1$, e no segundo caso, $n = -1$, pois $n = 1/m$. **31.** Demonstramos que todas estas são equivalentes a x ser par. Se x for par, então $x = 2k$ para algum inteiro k. Portanto, $3x + 2 = 3 \cdot 2k + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$, que é par, pois foi escrito na forma $2t$, em que $t = 3k + 1$. Analogamente, $x + 5 + 2k + 5 = 2k + 4 + 1 = 2(k + 2) + 1$, de modo que $x + 5$ é ímpar; e $x^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$, de modo que x é par. Para as recíprocas, usaremos uma demonstração por contraposição. Assim, suponha que x não seja par; logo, x é ímpar e podemos escrever $x = 2k + 1$ para algum inteiro k. Então, $3x + 2 = 3(2k + 1) + 2 = 6k + 5 = 2(3k + 2) + 1$, que é ímpar (isto é, não é par), pois foi escrito na forma $2t + 1$, em que $t = 3k + 2$. Analogamente, $x + 5 = 2k + 1 + 5 = 2(k + 3)$, de modo que $x + 5$ é par (isto é, não é ímpar). Que x^2 é ímpar já foi demonstrado no Exemplo 1. **33.** Damos demonstrações por contraposição de $(i) \to (ii)$, $(ii) \to (i)$, $(i) \to (iii)$ e $(iii) \to (i)$. Para a primeira delas, suponha que $3x + 2$ seja racional, ou seja, igual a p/q para inteiros p e q com $q \neq 0$. Então, podemos escrever $x = ((p/q) - 2)/3 = (p - 2q)/(3q)$, em que $3q \neq 0$. Isso mostra que x é racional. Para a segunda afirmação condicional, suponha que x seja racional, ou seja, igual a p/q com $q \neq 0$. Assim, podemos escrever $3x + 2 = (3p + 2q)/q$, em que $q \neq 0$. Isto mostra que $3x + 2$ é racional. Para a terceira afirmação condicional, suponha que $x/2$ seja racional, ou seja, igual a p/q para inteiros p e q com $q \neq 0$. Então, podemos escrever $x = 2$

p/q, em que $q \neq 0$. Isso mostra que x é racional. E para a quarta afirmação condicional, suponha que x seja racional, ou seja, igual a p/q para inteiros p e q com $q \neq 0$. Então, podemos escrever $x/2 = p/(2q)$, em que $2q \neq 0$. Isso mostra que $x/2$ é racional. **35.** Não **37.** Suponha que $p_1 \to p_4 \to p_2 \to p_5 \to p_3 \to p_1$. Para demonstrar que uma destas proposições implica qualquer uma das outras, use simplesmente silogismo hipotético repetidamente. **39.** Daremos uma demonstração por contradição. Suponha que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sejam todos menores do que A, em que A é a média desses números. Então, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < nA$. Dividir ambos os lados por n mostra que $A + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n < A$, que é uma contradição. **41.** Mostraremos que as quatro afirmações são equivalentes indicando que (*i*) implica (*ii*), (*ii*) implica (*iii*), (*iii*) implica (*iv*) e (*iv*) implica (*i*). Primeiro, suponha que n seja par. Então, $n + 2k$ para algum inteiro k. Assim, $n + 1 = 2k + 1$, de modo que $n + 1$ é ímpar. Isso mostra que (*i*) implica (*ii*). A seguir, suponha que $n + 1$ seja ímpar, de modo que $n + 1 = 2k + 1$ para algum inteiro k. Então, $3n + 1 = 2n + (n + 1) = 2(n + k) + 1$, o que mostra que $3n + 1$ é ímpar, indicando que (*ii*) implica (*iii*). A seguir, suponha que $3n + 1$ seja ímpar, de modo que $3n + 1 = 2k + 1$ para algum inteiro k. Assim, $3n = (2k + 1) - 1 = 2k$, de modo que $3n$ é par. Isso mostra que (*iii*) implica (*iv*). Finalmente, suponha que n não seja par. Então, n é ímpar, de modo que $n = 2k + 1$ para algum inteiro k. Logo, $3n = 3(2k + 1) = 6k + 3 = 2(3k + 1) + 1$, e $3n$ é ímpar. Isso completa a demonstração por contraposição de que (*iv*) implica (*i*).

Seção 1.7

1. $1^2 + 1 = 2 \geq 2 = 2^1$; $2^2 + 1 + 5 \geq 4 = 2^2$; $3^2 + 1 = 10 \geq 8 = 2^3$; $4^2 + 1 = 17 \geq 16 = 2^4$ **3.** Se $x \leq y$, então $\max(x, y) + \min(x, y) = y + x = x + y$. Se $x \geq y$, então $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$. Como estes são os dois únicos casos, a igualdade sempre é válida. **5.** Existem quatro casos. *Caso 1:* $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Então, $|x| + |y| = x + y = |x + y|$. *Caso 2:* $x < 0$ e $y < 0$. Então, $|x| + |y| = -x + (-y) = -(x + y) = |x + y|$, pois $x + y < 0$. *Caso 3:* $x \geq 0$ e $y < 0$. Então, $|x| + |y| = x + (-y)$. Se $x \geq -y$, então $|x + y| = x + y$. Mas, como $y < 0$, $-y > y$, de modo que $|x| + |y| = x + (-y) > x + y = |x + y|$. Se $x < -y$, então $|x + y| = -(x + y) = -x + (-y)$. Mas, como $x \geq 0$, $x \geq -x$, de modo que $|x| + |y| = x + (-y) \geq -x + (-y) = |x + y|$. *Caso 4:* $x < 0$ e $y \geq 0$. Idêntico ao Caso 3, com os papéis de x e y trocados. **7.** 10.001, 10.002, ..., 10.100 não são quadrados perfeitos, pois $100^2 = 10.000$ e $101^2 = 10.201$; construtivo. **9.** $8 = 2^3$ e $9 = 3^2$ **11.** Sejam $x = 2$ e $y = \sqrt{2}$. Se $x^y = 2^{\sqrt{2}}$ for irracional, teremos acabado. Se não, então sejam $x = 2^{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}/4$. Então $x^y = (2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}/4} = 2^{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2})/4} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$. **13.** **a)** Esta afirmação garante a existência de x com determinada propriedade. Se fizermos $y = x$, então vemos que $P(x)$ é verdadeira. Se y for qualquer coisa diferente de x, então $P(x)$ não é verdadeira. Logo, x é o único elemento que torna P verdadeira. **b)** A primeira cláusula aqui diz que existe um elemento que torna P verdadeira. A segunda cláusula diz que sempre que dois elementos tornarem P verdadeira, eles devem, na realidade, ser o mesmo elemento. Juntos, elas dizem que P é satisfeita por exatamente um elemento. **c)** Esta afirmação garante a existência de um x que torna P verdadeira e tem a propriedade adicional que sempre que encontremos um elemento que torna P verdadeira, este elemento é x. Em outras palavras, x é o único elemento que torna P verdadeira. **15.** A equação $|a - c| = |b - c|$ é equivalente à disjunção de duas equações: $a - c = b - c$ ou $a - c = -b + c$. A primeira destas é equivalente a $a = b$, o que contraria a hipótese feita neste problema, de modo que a equação original é equivalente a $a - c = -b + c$. Somando $b + c$ a ambos os lados e dividindo por 2, vemos que esta equação é equivalente a $c = (a + b)/2$. Logo, existe uma única solução. Além disso, este c é um inteiro, pois a soma de inteiros ímpares a e b é par. **17.** Nos foi pedido que isolássemos k em $n = (k - 2) + (k + 3)$. Usando as regras usuais, reversíveis, da álgebra, vemos que esta equação é equivalente a $k = (n - 1)/2$. Em outras palavras, este é o único valor de k que torna nossa equação verdadeira. Como n é ímpar, $n - 1$ é par, de modo que k é um inteiro. **19.** Se x for ele próprio um inteiro, então podemos tomar $n = x$ e $\in = 0$. Nenhuma outra solução é possível neste caso, pois, se o inteiro n for maior que x, então n é pelo menos $x + 1$, o que tornaria $\in \geq 1$. Se x não for um inteiro, então, arredonde-o para o próximo inteiro, e chame este inteiro de n. Seja $\in = n - x$. Claramente, $0 \leq \in < 1$; este é o único $\in$ que funcionará com este n, e n não pode ser maior, pois $\in$ é restrito a ser menor que 1. **21.** A média harmônica de dois números reais positivos distintos x e y é sempre menor que a média geométrica. Para demonstrar que $2xy/(x + y) < \sqrt{xy}$, multiplique ambos os lados por $(x + y)/(2\sqrt{xy})$ para obter a desigualdade equivalente $\sqrt{xy} < (x + y)/2$, que foi demonstrada no Exemplo 14. **23.** A paridade (par ou ímpar) da soma de números escritos na lousa nunca muda, pois $j + k$ e $|j - k|$ têm a mesma paridade (e, em cada passo, reduzimos a soma por $j + k$, mas a aumentamos por $|j - k|$). Portanto, o inteiro no final do processo deve ter a mesma paridade de $1 + 2 + \cdots + (2n) = n(2n + 1)$, que é ímpar, pois n é ímpar. **25.** Sem perda de generalidade, podemos supor que n é não negativo, pois a quarta potência de um inteiro e a quarta potência de seu oposto são a mesma coisa. Dividimos um inteiro positivo arbitrário n por 10, obtendo um quociente k e um resto l, o que implica que $n = 10k + l$, e l é um inteiro entre 0 e 9, inclusive. Então, podemos calcular n^4 em cada um destes 10 casos. Obtemos os seguintes valores, em que X é algum inteiro que é um múltiplo de 10, cujo valor exato não nos interessa. $(10k + 0)^4 = 10{,}000k^4 = 10{,}000k^4 + 0$, $(10k + 1)^4 = 10{,}000k^4 + X \cdot k^3 + X \cdot k^2 + X \cdot k + 1$, $(10k + 2)^4 = 10{,}000k^4 + X \cdot k^3 + X \cdot k^2 + X \cdot k + 16$, $(10k + 3)^4 = 10{,}000k^4 + X \cdot k^3 + X \cdot k^2 + X \cdot k + 81$, $(10k + 4)^4 = 10{,}000k^4 + X \cdot k^3 + X \cdot k^2 + X \cdot k + 256$, $(10k + 5)^4 = 10{,}000k^4 + X \cdot k^3 + X \cdot k^2 + X \cdot k + 625$, $(10k + 6)^4 = 10{,}000k^4 + X \cdot k^3 + X \cdot k^2 + X \cdot k + 1296$, $(10k + 7)^4 = 10{,}000k^4 + X \cdot k^3 + X \cdot k^2 + X \cdot k + 2401$, $(10k + 8)^4 = 10{,}000k^4 + X \cdot k^3 + X \cdot k^2 + X \cdot k + 4096$, $(10k + 9)^4 = 10{,}000k^4 + X \cdot k^3 + X \cdot k^2 + X \cdot k + 6561$. Como cada coeficiente indicado por X é um múltiplo de 10, o termo correspondente não tem efeito nos primeiros algarismos da resposta. Portanto, os primeiros algarismos são 0, 1, 6, 1, 6, 5, 6, 1, 6, 1, respectivamente, de modo que ele é sempre 0, 1, 5 ou