Geometria Analítica - Semana 5

Produto Vetorial

Professor: Victor M. Cunha

Instituto de Matemática
e Estatística (IME) - UFBA

Abril 2022

- Vimos que, dados os vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, o funcional $\ell\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$\ell(\vec{w}) = det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

  é um funcional linear.
- Ora, dada a dualidade entre funcionais lineares e vetores, deve existir um vetor $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\ell(\vec{w}) = det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{n} \cdot \vec{w}, \quad \forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3$$

- Note que este vetor não pode depender de $\vec{w}$, dado que a igualdade deve valer para todo $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$. O vetor $\vec{n}$, portanto, depende apenas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- Este vetor $\vec{n}$ é denominado *produto vetorial* de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e representado por:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

- Considere os vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (-1, 2, -2)$.
  - Calcule $det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, onde $\vec{w} = (3, 0, -1)$.
  - Calcule $det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, onde $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.
  - Calcule $\vec{u} \times \vec{v}$.
  - Calcule $det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, onde $\vec{w} = (-2, 1, -1)$.
- Considere os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$. Mostre que $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$.
- Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ dois vetores colineares. Mostre que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.
- Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, mostre que que $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$.
- Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, mostre que $\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$
- Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, mostre que $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ e $\vec{u} \times (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \times \vec{v})$.

- Dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, sabemos que o funcional linear $\ell(\vec{w}) = det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = det(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ pode ser calculado por:

$$\ell(\vec{w}) = \begin{vmatrix} w_1 & u_1 & v_1 \\ w_2 & u_2 & v_2 \\ w_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = w_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

- Logo, sendo $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, como $\ell(\vec{w}) = \vec{n} \times \vec{w}$, para todo $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, devemos ter:

$$n_1 = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \qquad n_2 = -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \qquad n_3 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

- Temos então uma fórmula para encontrar as componentes de $\vec{n}$ a partir das componentes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

- Como cada componente n_i do produto vetorial corresponde ao que multiplica w_i na expressão $det(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$, a seguinte fórmula é comumente utilizada para o cálculo de $\vec{n}$:

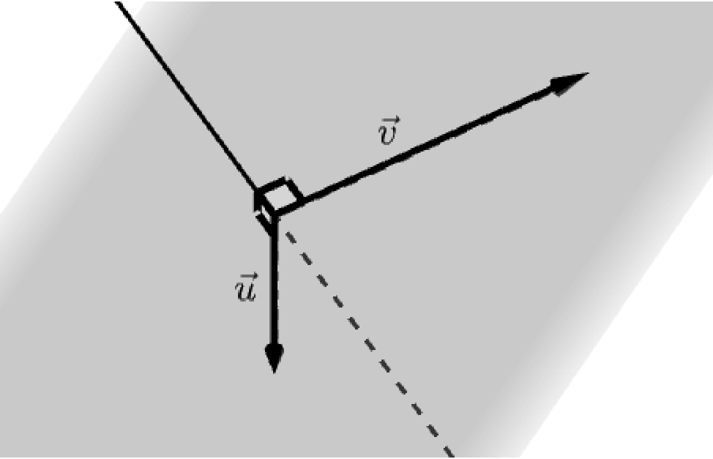
$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & u_1 & v_1 \\ \vec{j} & u_2 & v_2 \\ \vec{k} & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

- Note que não faz sentido colocar vetores como coeficientes de uma matriz. $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ neste determinante agem apenas como símbolos, para identificarem cada componente de $\vec{n}$.
- Esta expressão deve ser interpretada apenas como um método prático para calcular o produto vetorial $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.
- Como o determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta, é comum encontrar também esta expressão da seguinte forma:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

- Dados $\vec{u} = (1, 2, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 0, -1)$.
  - Calcule $det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, onde $\vec{w} = (0, -1, 3)$.
  - Calcule $\vec{u} \times \vec{v}$.
  - Calcule $det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, onde $\vec{w} = (2, 3, -4)$.
- Dados $\vec{u} = (2, -1, 3)$ e $\vec{v} = (1, 1, -1)$, calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$.
- Dados $\vec{u} = (1, 0, -1)$, $\vec{v} = (0, -2, 1)$ e $\vec{w} = (3, 1, 0)$, calcule $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ e $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.
- Dados $\vec{u} = (1, 0, -1)$ e $\vec{n} = (2, -1, 2)$, encontre $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ perpendicular à $\vec{u}$ tal que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{n}$.
- Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores do plano yz. Mostre que $\vec{u} \times \vec{v}$ é paralelo ao eixo x.

- Veremos agora como interpretar geometricamente o produto vetorial $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.
- Vimos que caso $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam colineares, $det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ para todo $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ e portanto $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.
- Consideremos agora o caso de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ Linearmente Independentes:
- Como $det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) = 0$, temos $\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.
- Deste modo, o produto vetorial $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ é *perpendicular* à $\vec{u}$ e à $\vec{v}$.
- Note que, como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares, a partir deste perpendicularismo a direção de $\vec{n}$ fica definida.
- Para o sentido, note que $det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}) = \vec{n} \cdot \vec{n} = \|\vec{n}\|^2 > 0$. Logo, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}\}$ formam uma base de orientação positiva.
- O sentido de $\vec{n}$ pode então ser obtido a partir de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pela regra da mão-direita.


$\vec{v}$
$\vec{u}$

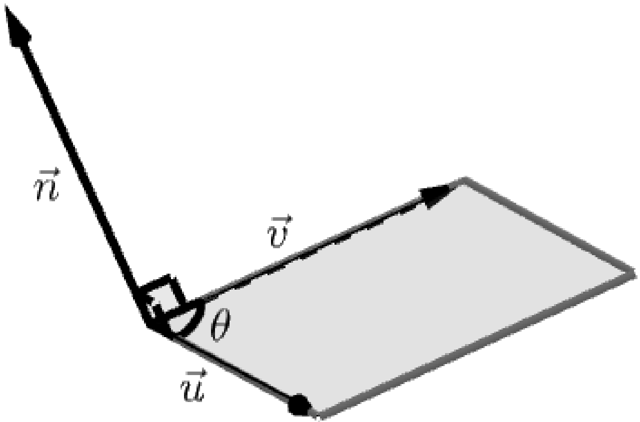
- Finalmente, para a norma de $\vec{n}$, comparamos as expressões para os módulos de $det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ e $\vec{n} \cdot \vec{w}$:

$$|det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \, sen\, \theta |cos\, \psi| \qquad |\vec{n} \cdot \vec{w}| = \|\vec{n}\| \, \|\vec{w}\| \, |cos\, \varphi|$$

- Como $\vec{n}$ é perpendicular à $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o ângulo formado entre $\vec{w}$ e a direção perpendicular à $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é igual (ou suplementar) ao formado entre $\vec{w}$ e $\vec{n}$, e $cos\, \psi = |cos\, \varphi|$.
- Logo, a partir de $|det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = |\vec{n} \cdot \vec{w}|$, temos:

$$\|\vec{n}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, sen\, \theta$$

- Ou seja, $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ é igual à área do paralelogramo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- Podemos interpretar $|det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = |\vec{n} \cdot \vec{w}|$ como o volume de um paralelepípedo sendo igual ao produto da área da base, dada por $\|\vec{n}\|$, pela altura, dada pela projeção de $\vec{w}$ sobre $\vec{n}$: $|proj_{\vec{n}}\, \vec{w}| = \dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{w}\|}$.


$\vec{n}$
$\vec{v}$
θ
$\vec{u}$

- Calcule a área do triângulo ABC, onde $A(1,2,1)$, $B(-2,1,-1)$ e $C(1,-1,1)$.
- Sejam $\vec{u}=(-1,2,2)$ e $v=(0,-1,-2)$, encontre um vetor unitário $\vec{w}$ perpendicular à $\vec{u}$ e à $\vec{v}$.
- Dados $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ vetores não-colineares. Mostre que $E=\{\vec{u},\vec{u}\times\vec{v},\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v})\}$ é uma base ortogonal de orientação positiva do $\mathbb{R}^3$.
- Seja $E=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ uma base ortonormal de orientação positiva. Mostre que $\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3,\ \ \vec{e}_2\times\vec{e}_3=\vec{e}_1$ e $\vec{e}_3\times\vec{e}_1=\vec{e}_2$.
- Seja $E=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ uma base ortogonal de orientação positiva, com $\|\vec{e}_1\|=2$, $\|\vec{e}_2\|=1$ e $\|\vec{e}_3\|=4$. Calcule:
  - $\vec{e}_1\times\vec{e}_2,\ \ \vec{e}_2\times\vec{e}_3$ e $\vec{e}_3\times\vec{e}_1$
  - $(2\vec{e}_1+\vec{e}_2)\times(\vec{e}_1-2\vec{e}_2+\vec{e}_3)$.

Anti-Comutatividade $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.

Bilinearidade

$$\begin{aligned} \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}, \qquad & \vec{u} \times (\alpha\vec{v}) &= \alpha(\vec{u} \times \vec{v}) \\ (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} &= \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}, \qquad & (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} &= \alpha(\vec{u} \times \vec{v}) \end{aligned}$$

Perpendicularismo $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$.

Módulo e Sentido Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ não-colineares, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ apresenta orientação positiva e temos

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot sen\,\theta$$

onde θ é o ângulo formado entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Caso $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam colineares, $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

- O produto misto dos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ é definido a partir da combinação do produto vetorial com o escalar, ou seja:

$$p_m = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

- Note que, a partir da definição do produto vetorial, temos

$$p_m = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

- Logo, o produto misto nada mais é do que uma outra forma de representar o determinante $det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, que já estudamos.