UFMG/ICEx/DCC — DCC111 – Matemática Discreta

Lista de Exercícios 4: Soluções
Sequências e Indução Matemática

Ciências Exatas & Engenharias — 1º Semestre de 2018

1. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável, ou seja, é possível atribuir (associar) a cada número racional um número natural. Abaixo, os números racionais positivos estão representados na forma de um par ordenado onde o primeiro número representa o numerador e o segundo o denominador. Começando do número racional 1 — par ordenado $(1,1)$ — é possível associar o número natural 1 e, seguindo o sentido das setas, atribuir o próximo número natural definindo assim uma sequência de enumeração. Dado o número racional positivo $\frac{p}{q}$, qual é o número natural correspondente?

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\uparrow & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\ \ldots \\
(1,6) & & (2,6) & & (3,6) & & (4,6) & & (5,6) & & (6,6)\ldots \\
 & \nwarrow & & & & & & & & & \\
(1,5) & & (2,5) & & (3,5) & & (4,5) & & (5,5) & & (6,5)\ldots \\
\uparrow & \searrow & & \nwarrow & & & & & & & \\
(1,4) & & (2,4) & & (3,4) & & (4,4) & & (5,4) & & (6,4)\ldots \\
 & \nwarrow & & \searrow & & \nwarrow & & & & & \\
(1,3) & & (2,3) & & (3,3) & & (4,3) & & (5,3) & & (6,3)\ldots \\
\uparrow & \searrow & & \nwarrow & & \searrow & & \nwarrow & & & \\
(1,2) & & (2,2) & & (3,2) & & (4,2) & & (5,2) & & (6,2)\ldots \\
 & \nwarrow & & \searrow & & \nwarrow & & \searrow & & \nwarrow & \\
(1,1) & \to & (2,1) & & (3,1) & \to & (4,1) & & (5,1) & \to & (6,1)\ldots
\end{array}
$$

Resposta:
De acordo com o enunciado acima, a enumeração dos números racionais irá ocorrer da forma apresentada a seguir (o número natural associado a cada número racional está entre colchetes):

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\uparrow & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\ \ldots \\
(1,6) & & (2,6) & & (3,6) & & (4,6) & & (5,6) & & (6,6)\ldots \\
[21] & & & & & & & & & & \\
 & \nwarrow & & & & & & & & & \\
(1,5) & & (2,5) & & (3,5) & & (4,5) & & (5,5) & & (6,5)\ldots \\
[11] & & [20] & & & & & & & & \\
\uparrow & \searrow & & \nwarrow & & & & & & & \\
(1,4) & & (2,4) & & (3,4) & & (4,4) & & (5,4) & & (6,4)\ldots \\
[10] & & [12] & & [19] & & & & & & \\
 & \nwarrow & & \searrow & & \nwarrow & & & & & \\
(1,3) & & (2,3) & & (3,3) & & (4,3) & & (5,3) & & (6,3)\ldots \\
[4] & & [9] & & [13] & & [18] & & & & \\
\uparrow & \searrow & & \nwarrow & & \searrow & & \nwarrow & & & \\
(1,2) & & (2,2) & & (3,2) & & (4,2) & & (5,2) & & (6,2)\ldots \\
[3] & & [5] & & [8] & & [14] & & [17] & & \\
 & \nwarrow & & \searrow & & \nwarrow & & \searrow & & \nwarrow & \\
(1,1) & \to & (2,1) & & (3,1) & \to & (4,1) & & (5,1) & \to & (6,1)\ldots \\
[1] & & [2] & & [6] & & [7] & & [15] & & [16] \\
1^{\underline{a}} & & 2^{\underline{a}} & & 3^{\underline{a}} & & 4^{\underline{a}} & & 5^{\underline{a}} & & 6^{\underline{a}} \\
 & & & & & \text{Diagonais} & & & & &
\end{array}
$$

Pontos a observar:

- O número racional positivo $\frac{p}{q}$ é representado pelo par ordenado (p,q);

- A soma dos índices p e q dos pares ordenados ao longo de cada diagonal é a mesma. Na primeira diagonal temos apenas um par ordenado, i.e., $(1, 1)$, e a soma vale 2. A partir da segunda diagonal, as somas dos índices valem 3, 4, 5, etc;
- Na primeira diagonal temos um par ordenado, na segunda dois, na terceira três e assim sucessivamente. Isso significa que em cada diagonal temos $(p + q) - 1$ pares ordenados;
- Quando a soma $p + q$ é um número ímpar, a enumeração ocorre de baixo para cima e, quando é par, ocorre de cima para baixo;
- Para calcular o número natural k associado ao número racional (p, q) temos que saber quantos pares ordenados existem nas diagonais anteriores à diagonal onde se encontra o par (p, q). Essa é a soma de 1 a $(p + q) - 2$, representada por S:

$$S \leftarrow \frac{[(p+q)-2] \times [(p+q)-1]}{2}.$$

- Finalmente, deve-se determinar o sentido da enumeração (de baixo para cima, ou vice-versa) para o par (p, q):

  se $(p + q) \bmod 2 = 0$ // $(p + q)$ é um número par, i.e., a diagonal é de descida?
  então $k \leftarrow S + p$ // Sim, devemos somar a S o valor de p, que é o termo que cresce.
  senão $k \leftarrow S + q$ // Não, devemos somar a S o valor de q, que é o termo que cresce.
  fimse

  Observe que quando o sentido da enumeração é de cima para baixo ao longo da diagonal, o número p deve ser somado a S para determinar a posição correta da enumeração. Quando o sentido da enumeração for o contrário, o número q deve ser somado.

2. Prove por indução matemática que

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \geq 1.$$

Resposta:
Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 1$, $1^2 = 1$ e $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k, k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.

– Hipótese indutiva:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, k \geq 1$$

– Deve-se mostrar que:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}$$

3. Prove por indução matemática que

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2, n \geq 1.$$

Resposta:
Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 1$, $1 = 1^2$. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k, k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.

– Hipótese indutiva:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2, k \geq 1$$

– Deve-se mostrar que:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2, k \geq 1$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) &= k^2 + (2k+1) \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

4. Prove por indução matemática que

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2, n \geq 1.$$

Resposta:
Essa prova pode ser dividida em duas partes: (i) prova do somatório do lado direito e substituição pela fórmula fechada, e (ii) prova do somatório do lado esquerdo. Sabe-se que a soma $1 + 2 + \ldots + n, n \geq 1$, vale $\frac{n(n+1)}{2}$ (esta prova pode ser obtida por indução matemática). Assim, temos que

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, n \geq 1.$$

Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 1$, $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k, k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.

– Hipótese indutiva:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}, k \geq 1$$

– Deve-se mostrar que:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}, k \geq 1$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)(k+1)^2 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)(k+1)^2}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

5. Prove por indução matemática que

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2n = n^2 + n, n \geq 1.$$

Resposta:
Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 1$, $2 \cdot 1 = 2$ e $1^2 + 1 = 2$. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k, k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.

– Hipótese indutiva:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2k &= k^2 + k \\ &= k(k+1), k \geq 1 \end{aligned}$$

– Deve-se mostrar que:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2k + 2(k+1) &= (k+1)^2 + (k+1) \\ &= (k+1)[(k+1)+1] \\ &= (k+1)(k+2), k \geq 1 \end{aligned}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2k + 2(k+1) &= k(k+1) + 2(k+1) \\ &= k^2 + k + 2k + 2 \\ &= k^2 + 3k + 2 \\ &= (k+1)(k+2) \end{aligned}$$

6. Prove por indução matemática que

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}, \forall \text{ inteiros } n \geq 2.$$

Resposta:
Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 2$, $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=1}^{1} i(i+1) = 1(1+1) = 2$ e $\frac{n(n-1)(n+1)}{2} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{3} = 2$. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k, k \geq 2$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.

– Hipótese indutiva:

$$\sum_{i=1}^{k-1} i(i+1) = \frac{k(k-1)(k+1)}{3}$$

– Deve-se mostrar que:

$$\sum_{i=1}^{k} i(i+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} i(i+1) &= \sum_{i=1}^{k-1} i(i+1) + k(k+1) \\ &= \frac{k(k-1)(k+1)}{3} + k(k+1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k(k-1)(k+1)+3k(k+1)}{3} \\
&= \frac{k(k+1)[(k-1)+3]}{3} \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}
\end{aligned}
$$

7. Ache a fórmula fechada para a soma

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$\forall$ inteiros $n \geq 1$ e prove o seu resultado por indução matemática.

Resposta:
Prova (por indução matemática):
Somando os primeiros termos e simplificando temos que:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}$$

o que leva a conjectura que para todos os inteiros positivos n,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

(a) Passo base: Para $n=1$, $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$, que é o valor da fórmula fechada. O passo base é verdadeiro.
(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n=k, k\geq 1$ então deve ser verdadeira para $n=k+1$.
– Hipótese indutiva:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

– Deve-se mostrar que:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Sabe-se que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k+1}{k+2}
\end{aligned}
$$

8. Ache a fórmula fechada para o produto

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$\forall$ inteiros $n \geq 2$ e prove o seu resultado por indução matemática.

Resposta:
Seja a suposição que

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{n}$$

$\forall$ inteiros $n \geq 2$. Deve-se provar que de fato essa suposição é verdadeira.

Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 2$, $\prod_{i=2}^{2}(1-\frac{1}{i}) = (1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ e a fórmula fechada vale $\frac{1}{2}$. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k, k \geq 2$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.

– Hipótese indutiva:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k}\right)=\prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{k}$$

– Deve-se mostrar que:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\prod_{i=2}^{k+1}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{k+1}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=2}^{k+1}\left(1-\frac{1}{i}\right) &= \prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{1}{i}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\\
&= \left(\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\\
&= \left(\frac{1}{k}\right)\cdot\left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)\\
&= \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

9. Ache a fórmula fechada para a soma

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

$\forall$ inteiros $n \geq 1$ e prove o seu resultado por indução matemática.

Resposta:
Seja a suposição que

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

$\forall$ inteiros $n \geq 1$.

Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 1$, $\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{1}{(2\cdot 1-1)\cdot(2\cdot 1+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$ e a fórmula fechada vale $\frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k, k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.

– Hipótese indutiva:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

– Deve-se mostrar que:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2(k+1)-1)\cdot(2(k+1)+1)}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

ou equivalentemente,

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\ &= \frac{k(2k+3)}{(2k+1)(2k+3)}+\\ &\quad \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\ &= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}\\ &= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}\\ &= \frac{k+1}{2k+3}\end{aligned}$$

10. Ache a fórmula fechada para a soma

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{(i-1)i},$$

$\forall$ inteiros $n\geq 2$ e prove o seu resultado por indução matemática.

Resposta:
Seja a suposição que

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{(i-1)i}=1-\frac{1}{n}$$

$\forall$ inteiros $n\geq 2$. Deve-se provar que de fato essa suposição é verdadeira.

Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n=2$, os dois lados da equação valem $\frac{1}{2}$. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n=k, k\geq 2$ então deve ser verdadeira para $n=k+1$.

– Hipótese indutiva:

$$\sum_{i=2}^{k}\frac{1}{(i-1)i}=1-\frac{1}{k}, k\geq 2.$$

– Deve-se mostrar que:

$$\sum_{i=2}^{k+1}\frac{1}{(i-1)i}=1-\frac{1}{k+1}, k\geq 2.$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{k+1}\frac{1}{(i-1)i} &= \sum_{i=2}^{k}\frac{1}{(i-1)i}+\frac{1}{k(k+1)}\\ &= 1-\frac{1}{k}+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\ &= 1-\frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

11. Prove o seguinte predicado $P(n)$ usando indução matemática:

    $P(n)$: Qualquer número inteiro positivo $n \geq 8$ pode ser escrito como a soma de 3's e 5's.

    Resposta:
    Prova (por indução matemática fraca):

    (a) Passo base: $P(n_0) = P(8)$: Para $n_0 = 8$, temos que $8 = 3 + 5$ e o predicado P é verdadeiro.

    (b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.
    – Suponha que a fórmula seja verdadeira para $n = k$, i.e.,

    $$P(k) : k = 3a + 5b,$$

    para $a \geq 0$ e $b \geq 0$. [hipótese indutiva]
    – Deve-se mostrar que

    $$P(k + 1) : k + 1 = 3a' + 5b',$$

    para $a' \geq 0$ e $b' \geq 0$.
    Dois casos a considerar para $k + 1$:
    (i) $b \neq 0$: É possível substituir um 5 por dois 3's quando é feita a soma de:

    $$\begin{aligned} k+1 &= 3a + 5b + 1 \\ &= 3a + 5(b-1) + 5 + 1 \\ &= 3a + 2{\cdot}3 + 5(b-1) \\ &= 3a' + 5b' \end{aligned}$$

    (ii) $b = 0$: Neste caso, deve haver pelo menos três 3's para termos valores de $n \geq 9$. Assim, temos:

    $$\begin{aligned} k+1 &= 3a + 1 \\ &= 3(a-3) + 3{\cdot}3 + 1 \\ &= 3a' + 2{\cdot}5 \\ &= 3a' + 5b' \end{aligned}$$

    [Isto era o que devia ser provado.]

12. Suponha que temos selos de 4 e 7 centavos. Prove que é possível ter qualquer valor de postagem de 18 centavos ou mais usando somente esses selos.

    Resposta:
    Prova (por indução matemática forte):

    (a) Passo base: Para os seguintes valores de postagem p é possível usar apenas selos de 4 e 7 centavos.

p	Selos
18	$7 + 7 + 4$
19	$7 + 4 + 4 + 4$
20	$4 + 4 + 4 + 4 + 4$
21	$7 + 7 + 7$

    Assim, o passo base é verdadeiro.

    (b) Passo indutivo: Vamos supor que para todos inteiros p, $18 \leq p < k$, p seja um valor de postagem que pode ser obtido apenas com selos de 4 e 7 centavos. Vamos provar que a proposição também é verdadeira para k.

    Ao dividirmos k por 4 temos um quociente q e um resto entre 0 e 3. Ao dividirmos os valores de postagem $p \in [18, 21]$ temos também como resto os valores entre 0 e 3. Ou seja, k pode ser expresso como um valor de postagem p entre 18 e 21 somando de um fator múltiplo de 4. Formalmente temos que $k \equiv p \bmod 4$ para um valor de $p \in [18, 21]$. Isto é lido como: k é congruente com p módulo 4, o que significa que existe um valor de $p \in [18, 21]$ que quando dividido por 4 deixa o mesmo resto que k quando dividido por 4.

13. Prove por indução matemática que $n^2 < 2^n$, para todos inteiros $n \geq 5$.

<u>**Resposta**</u>:
Prova (por indução matemática):

(a) <u>Passo base</u>: Para $n = 5$, a desigualdade $5^2 < 2^5$ é verdadeira. Assim, o passo base é verdadeiro.

(b) <u>Passo indutivo</u>: se a afirmação é verdadeira para $n = k, k \geq 5$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$.

- Hipótese indutiva:
$$k^2 < 2^k$$
para todos inteiros $k \geq 5$.
- Deve-se mostrar que:
$$(k+1)^2 < 2^{k+1}$$
para todos inteiros $k \geq 5$.
Sabe-se que:
$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 < 2^k + 2k + 1$$
pela hipótese indutiva. Sabe-se também que
$$2k + 1 < 2^k$$
para $k \geq 3$. Colocando estas desigualdades juntas, temos;
$$(k+1)^2 < 2^k + 2k + 1 < 2^k + 2^k$$

14. Seja a seqüência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida como

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_k &= 7a_{k-1}, \forall \text{ inteiros } k \geq 2 \end{aligned}$$

Prove por indução matemática que $a_n = 3 \cdot 7^{n-1}$ para todos os inteiros $n \geq 1$.

<u>**Resposta**</u>:
Prova (por indução matemática):

(a) <u>Passo base</u>: Para $n = 1$, $a_n = a_1 = 3 \cdot 7^{1-1} = 3 \cdot 1 = 3$. O passo base é verdadeiro.

(b) <u>Passo indutivo</u>: se a afirmação é verdadeira para $n = k, k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$.

- Hipótese indutiva:
$$a_k = 3 \cdot 7^{k-1}$$
para todos inteiros $k \geq 1$.
- Deve-se mostrar que:
$$a_{k+1} = 3 \cdot 7^{(k+1)-1} = 3 \cdot 7^k$$
para todos inteiros $k \geq 1$.
Sabe-se que:
$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 7a_k, && \forall \text{ inteiros } k \geq 2 \\ &= 7 \cdot (3 \cdot 7^{k-1}) && \text{Hipótese indutiva} \\ &= 3 \cdot 7^k \end{aligned}$$

15. Seja a seqüência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida como

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 3 \\ a_k &= a_{k-2} + 2a_{k-1}, \forall \text{ inteiros } k \geq 3 \end{aligned}$$

Prove por indução matemática que a_n é ímpar para todos os inteiros $n \geq 1$.

<u>**Resposta**</u>:
Prova (por indução matemática forte):

(a) Passo base: A propriedade é verdadeira para $n = 1$ e $n = 2$, já que $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$, que são ímpares.

(b) Passo indutivo: Se $k > 2$ e a propriedade é verdadeira para todos i, $1 \leq i < k$, então deve ser verdadeira para $n = k$.

- Hipótese indutiva: Seja $k > 2$ um inteiro e suponha que a_i é ímpar para todos os inteiros i, $1 \leq i < k$.
- Deve-se mostrar que a_k é ímpar. Sabe-se pela definição de

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n = a_{k-2} + 2a_{k-1}$$

Sabe-se também que a_{k-2} é ímpar pela hipótese indutiva, já que $1 \leq k - 2 < k$ e $k > 2$, e $2a_{k-1}$ é par, pela definição de número par. Assim,

$$a_{k-2} + 2a_{k-1}$$

é a soma de um número ímpar e um número par, que dá como resultado sempre um número ímpar.

16. Seja a seqüência $g_0, g_1, g_2, \ldots$ definida como

$$\begin{aligned} g_0 &= 12 \\ g_1 &= 29 \\ g_k &= 5g_{k-1} - 6g_{k-2}, \forall \text{ inteiros } k \geq 2 \end{aligned}$$

Prove por indução matemática que $g_n = 5 \cdot 3^n + 7 \cdot 2^n$ para todos os inteiros $n \geq 0$.

Resposta:
Prova (por indução matemática forte):

(a) Passo base: Para $n = 0$, temos que $g_0 = 5 \cdot 3^0 + 7 \cdot 2^0 = 5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 12$ e para $n = 1$, temos que $g_1 = 5 \cdot 3^1 + 7 \cdot 2^1 = 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = 29$. Logo, o passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: Se $k > 1$ e a propriedade é verdadeira para todos i, $1 \leq i < k$, então deve ser verdadeira para $n = k$.

- Hipótese indutiva: Seja $k > 1$ um inteiro e suponha que $g_k = 5 \cdot 3^k + 7 \cdot 2^k$ para todos os inteiros i, $1 \leq i < k$.
- Deve-se mostrar que $g_k = 5 \cdot 3^k + 7 \cdot 2^k$ para $n = k$.
  Sabe-se que:

$$\begin{aligned} g_k &= 5g_{k-1} - 6g_{k-2} \\ &= 5(5 \cdot 3^{k-1} + 7 \cdot 2^{k-1}) - 6(5 \cdot 3^{k-2} + 7 \cdot 2^{k-2}) \\ &= 25 \cdot 3^{k-1} + 35 \cdot 2^{k-1} - 30 \cdot 3^{k-2} - 42 \cdot 2^{k-2} \\ &= 3^{k-2}(25 \cdot 3 - 30) + 2^{k-2}(35 \cdot 2 - 42) \\ &= 3^{k-2} \cdot 45 + 2^{k-2} \cdot 28 \\ &= 3^{k-2}(9 \cdot 5) + 2^{k-2}(4 \cdot 7) \\ &= 5 \cdot 3^k + 7 \cdot 2^k \end{aligned}$$

17. Seja a seqüência $h_0, h_1, h_2, \ldots$ definida como

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ h_1 &= 2 \\ h_2 &= 3 \\ h_k &= h_{k-1} + h_{k-2} + h_{k-3}, \forall \text{ inteiros } k \geq 3 \end{aligned}$$

Prove por indução matemática que $h_n \leq 3^n$ para todos os inteiros $n \geq 0$.

Resposta:
Prova (por indução matemática forte):

(a) Passo base: A propriedade é verdadeira para

n	h_n	3^n
0	$h_0 = 1$	$3^0 = 1$
1	$h_1 = 2$	$3^1 = 3$
2	$h_2 = 3$	$3^2 = 9$

(b) Passo indutivo: Se $k > 2$ e a propriedade é verdadeira para todos i, $1 \leq i < k$, então deve ser verdadeira para $n = k$.

- Hipótese indutiva: Seja $k > 2$ um inteiro e suponha que $h_i \leq 3^i$ para todos os inteiros i, $1 \leq i < k$.
- Deve-se mostrar que $h_k \leq 3^k$. Sabe-se pela definição de

$$h_k = h_{k-1} + h_{k-2} + h_{k-3}$$

Sabe-se também que

$$\begin{array}{l} h_{k-1} \leq 3^{k-1} \\ h_{k-2} \leq 3^{k-2} \\ h_{k-3} \leq 3^{k-3} \end{array}$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} h_k & = & h_{k-1} + h_{k-2} + h_{k-3} \\ & \leq & 3^{k-1} + 3^{k-2} + 3^{k-3} \\ & \leq & 3^{k-3}(3^2 + 3^1 + 1) \\ & \leq & 3^{k-3}(3 \cdot 4) \\ & \leq & 4 \cdot 3^{k-2} \leq 3^k \end{array}$$

já que $4 < 3^2$.

18. Seja a seqüência $x_0, x_1, x_2, \ldots$ definida como

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & 0 \\ x_1 & = & 1 \\ x_k & = & 5x_{k-1}^3 + 7x_{k-2}, \forall \text{ inteiros } k \geq 2 \end{array}$$

Prove por indução matemática que se k é múltiplo de 3 então x_k é par.

Resposta:
Prova (por indução matemática forte):

(a) Passo base:
Ao observarmos essa sequência temos:

i	x_i	Número
0	0	par
1	1	ímpar
2	$5 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1 = 5$	ímpar
3	$5 \cdot 5^3 + 7 \cdot 0 = 632$	par
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Para os índices 0 e 3, múltiplos de 3, a proposição está correta e, assim, o passo base é verdadeiro. (Se continuarmos a calcular os próximos valores de x_i veremos que ambos x_4 e x_5 são números ímpares e x_6 é par.

(b) Passo indutivo: Se $k \geq 2$ e a propriedade é verdadeira para todos i, $1 \leq i < k$, então deve ser verdadeira para $n = k$.

– Hipótese indutiva: seja $k = 3k'$, ou seja, k é um múltiplo de 3. Os números $x_{3k'-1}$ e $x_{3k'-2}$ são ímpares.

– Deve-se mostrar que $x_{3k'}$ é par.
Sabe-se que

$$x_{3k'} = 5x_{3k'-1}^3 + 7x_{3k'-2}.$$

O primeiro termo terá como resultado um número ímpar já que $x_{3k'-1}$ é ímpar que quando elevado a uma potência cúbica multiplicado por um fator ímpar, fornece um número ímpar. O segundo termo terá como resultado um número ímpar já que $x_{3k'-2}$ é ímpar que quando multiplicado por um fator ímpar, fornece um número ímpar. Assim, como $x_{3k'}$ é o resultado da soma de dois números ímpares, temos que $x_{3k'}$ é par.

19. Seja a seqüência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definida como

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_k &= a_{k-1} + 3^k(k-1), \forall \text{ inteiros } k \geq 2 \end{aligned}$$

Ache a fórmula fechada para o k-ésimo termo e prove por indução matemática.

Resposta:
Ao observarmos essa sequência temos:

i	a_i
0	0
1	0
2	$0 + 1 \cdot 3^2$
3	$1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3$
4	$1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4$
$\vdots$	$\vdots$

ou seja, o termo

$$a_k = \sum_{i=2}^{k}(i-1)3^i = \sum_{i=2}^{k} i3^i - \sum_{i=2}^{k} 3^i.$$

Calcule essa soma sabendo que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} ix^i = \frac{x - nx^n + (n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Dica: transforme a soma $\sum_{i=0}^{n-1} ix^i$ em uma soma $\sum_{i=2}^{n} ix^i$, ou seja, acrescente o termo para $i = n$ e remova os termos para $i = 0$ e $i = 1$.

20. Seja a seqüência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definida como

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_k &= k - a_{k-1}, \forall \text{ inteiros } k \geq 1 \end{aligned}$$

Ache a fórmula fechada para o k-ésimo termo e prove por indução matemática.

Resposta:
Ao observarmos essa sequência temos:

i	a_i
0	0
1	1
2	$2-1=1$
3	$3-1=2$
4	$4-2=2$
5	$5-2=3$
6	$6-3=3$
7	$7-3=4$
8	$8-4=4$
$\vdots$	$\vdots$

ou seja, o termo

$$a_k = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil.$$

Se k é par então $a_k = \frac{k}{2}$; se k é ímpar então $a_k = \frac{k+1}{2}$.
Prova (por indução matemática forte):

(a) Passo base: A propriedade é verdadeira para $i = 0..8$.

(b) Passo indutivo: Se $k > 2$ e a propriedade é verdadeira para todos i, $0 \leq i < k$, então deve ser verdadeira para $n = k$.
- Hipótese indutiva: Se i é par então $a_i = \frac{i}{2}$; se i é ímpar então $a_i = \frac{i+1}{2}$, para $0 \leq i < k$.
- Deve-se mostrar que essa proposição é verdadeira para k.
  Sabe-se que $a_k = k - a_{k-1}$. Temos dois casos:
  (i) k é par: $a_k = k - a_{k-1} = k - \frac{k}{2} = \frac{k}{2}$, já que $k-1$ é ímpar e $a_{k-1} = \frac{k-1+1}{2}$.
  (ii) k é ímpar: $a_k = k - a_{k-1} = k - \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2}$, já que $k-1$ é par e $a_{k-1} = \frac{k-1}{2}$.

21. Prove por indução matemática que $\forall n \geq 1, 3^n - 2$ é ímpar.

Resposta:
Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 1$, $3^1 - 2 = 1$ é ímpar. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a afirmação é verdadeira para $n = k, k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.
- Hipótese indutiva: $\forall k \geq 1, 3^k - 2$ é ímpar.
- Deve-se mostrar que: $3^{k+1} - 2$ é ímpar.

Sabe-se que: $3^{k+1} - 2 = 3 \cdot 3^k - 2 = 3 \cdot 3^k - 6 + 4 = 3(3^k - 2) + 4$.

Pela hipótese indutiva $3^k - 2$ é um número ímpar que quando multiplicado por 3 e somado com 4 continua sendo um número ímpar.