Derivadas funções trigonométricas

INVERSAS!

As derivadas das seis funções trigonométricas inversas são dadas pelas seguintes fórmulas, no qual u é função derivável de x.

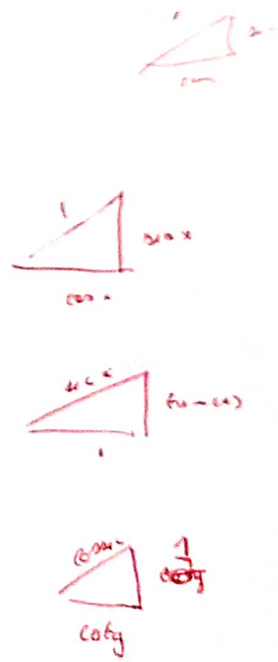
$y = \text{arc sin } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $\quad$ $y = \text{arc cotg } u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$

$y = \text{arc cos } u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $\quad$ $y = \text{arc sec } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

$y = \text{arc tg } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$ $\quad$ $y = \text{arc cosec } u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

Obs: as funções $f: I \to J$ é inversível se $g: J \to I$

$$g'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)}$$



Diferencie as funções dadas:

a) $y = \text{arc sin } \underbrace{3x}_{u}$

$y = \text{arc sin } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $\rightsquigarrow$

$$\boxed{1^2 + tg^2 = sec^2}$$

$$y' = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

sen 2x : 10 . 2x . 2

Derivada da função tg

$$\boxed{\frac{d}{dx}(tg\,x) = sec^2 x}$$

P. ⇒ Se $f(t) = tg\,t$, t é derivável de x,

então $f'(t) = sec^2 t \cdot t'$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = x^{-n} \\ f'(x) = -n\,x^{-(n+1)} \end{array}}$$

Cotangente

P.: Se $f(t) = cotg\,t$, t é função derivável em x,

então $f'(t) = -cossec^2 t \cdot t'$

$$\frac{d}{dx}(cotg\,x) = -cossec^2 x$$

Ex. Seja $f(t) = (\underbrace{3 + 2\,cotg\,t}_{g(t)})^4$ determine $\frac{dy}{dx}$

⇔ $f(t) = h(g(t))$

$f'(t) = 4(3+2\,cotg\,t)^3 \cdot 2 \cdot -cossec^2 t$

$f'(t) = -8\,(3+2\,cotg\,t)^3 \cdot cossec^2 t$

Derivada do cosseno

P: se $f(x) = \cos x$ então $f'(x) = -\sin x$

P: consequência do estudo $f(t) = \cos t$ e t = função derivável então

$f'(t) = -\sin t \cdot t'$

Exemplos: Seja $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, determine $f'(x)$

$f(t) = \cos t$ $\quad f(g(x)) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

$g(x) = \frac{\pi}{2} - x$

$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$f'(x) = -\sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (0 - 1)$

$f'(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

Ex: Seja $f(t) = \dfrac{\cos t}{1 - \sin t}$ Determine sua derivada!

Derivada do quociente

$$(f/g)'(p) = \frac{f'(p)\, g(p) - f(p)\, g'(p)}{(g(p))^2} =$$

$$\Rightarrow \frac{-\sin t \cdot (1 - \sin t) - [\cos t \cdot (-\cos t)]}{(\cancel{\cos}\ \sin t)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\sin t + \sin^2 t + \cos^2 t}{(1 - \sin t)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\sin t + 1}{(1 - \sin t)^2} = \boxed{\frac{1}{1 - \sin t}}$$

Derivada das funções secante

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot tg\, x$$

$$\left(\frac{1}{\cos}\right)' = \frac{1\cos x - 1(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos} \cdot \frac{1}{\cos}$$

$$\boxed{= tg\, a \cdot \sec 1}$$

Pr: se $y = \sec t$, e t é uma função derivável de x,

então $f'(t) = \sec t \cdot tg\, t \cdot t'$

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

Seja $y = \sec^{5/3} t$ determine $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec t) = \sec t \cdot tg\, t \rightsquigarrow f(t) = (\underbrace{\sec t}_{g(t)})^{5/3}$$

$$f'(t) = \sec^{5/3} t \cdot$$

$$f'(t) = \frac{5}{3}(\sec t)^{2/3} \cdot (\sec t)'$$

$$= \frac{5}{3}(\sec t)^{2/3} \cdot \sec t \cdot tg\, t$$

$$= \frac{5}{3}\sqrt[3]{\sec^2 t}\ \sec t \cdot tg\, t$$

Derivada da cossecante

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\operatorname{cossec} x \cotg x$$

P: $f(t) = \operatorname{cossec} t$, e t é uma função derivável de x,

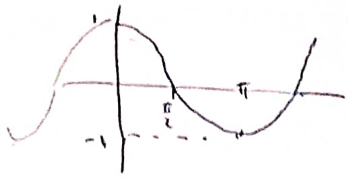
então $f'(t) = -\operatorname{cossec} t \cdot \cotg t \cdot t'$

Ex:

seja $f(t) = \operatorname{cossec}^2 t$

$$= 2 \cdot \operatorname{cossec} t \cdot -\operatorname{cossec} t \cdot \cotg t$$

Determine uma expressão para $g'(t)$



$f(t) = \cos(t)$

a) $g(t) = \text{arc} \cos(t)$

$\to f: [0, \pi] \to [1, -1]$

Sabe-se que $f'(t) = -\sin(t)$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

$g'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{-\sin(t)} =$

$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$

$-\sin t = -\sqrt{1 - \cos^2(t)}$

$= \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2(t)}}$

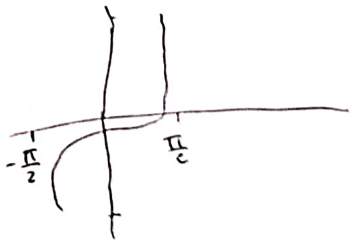
(ii) mudança de variável $y = f(t) = \cos(t)$

$\boxed{g'(y) = \frac{1}{-\sqrt{1 - y^2}}} \to g'(t) = \frac{1}{-\sqrt{1 - y^2}}$ ou $g'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$

b) $g(t) = \text{arc tg}(t)$

$f(t) = tg(t)$

$f'(t) = \sec^2 t$



Sabe-se

$g'(f(t)) = \frac{1}{\sec^2(t)} =$

$1 + tg^2(t) = \sec^2(t)$ $\quad f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to$

$g'(f(t)) = \frac{1}{1 + tg^2(t)}$

(ii) MDV $y = f(t) = tg(t)$

$\boxed{g'(y) = \frac{1}{1 + y^2}} \to g'(t) = \frac{1}{1 + t^2}$

c) $g(t) = \text{arc cotg}(t)$

$f(t) = \text{cotg } t$

$f'(t) = -\text{cossec}^2 t$

$tg\ t = \sqrt{\sec^2(t) - 1}$

$\sin^2 t^2 + \cos^2 t = 1$

$1 + tg^2(t) = \sec^2(t)$

$1 + \text{cotg}^2(t) = \text{cossec}^2(t)$

$$g'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)}$$

$$= \frac{1}{-\text{cossec}^2 t} = \frac{1}{-1 + \text{cotg}^2(t)}$$

d) MDV $y = \text{cotg } t = f(t)$

$$g'(y) = \frac{1}{-1 - y^2} = \boxed{-\frac{1}{1 - y^2}} \rightarrow g'(t) = \frac{1}{1 - t^2}$$

d) $g(t) = \text{arc sec}(t)$

$f(t) = \sec t$

$f'(t) = \sec t \cdot tg\ t$

$$g'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)}$$

$$g'(f(t)) = \frac{1}{\sec t \cdot tg\ t}$$

$$g'(f(t)) = \frac{1}{\sec t\ \sqrt{\sec^2(t) - 1}}$$

MDV $y = f(t) = \sec t$

$$g'(y) = \frac{1}{|y| \cdot \sqrt{y^2 - 1}}$$

e) $g(t) = \text{arc cossec}(t)$

$f(t) = \text{cossec } t$

$f'(t) = -\text{cossec } t \cdot \text{cotg } t$

MDV

$y = f(t) = \text{cossec}$

$$g'(f(t)) = \frac{1}{-\text{cossec } t \cdot \text{cotg } t}$$

$$= \frac{1}{-\text{cossec } t \sqrt{\text{cossec}^2 t - 1}}$$

$$g'(y) = \frac{1}{|y| \sqrt{y^2 - 1}}$$