Derivadas de funções trigonométricas e exponenciais

Vamos determinar a derivada da função $f(t) = \sin t$ em um valor t qualquer:

$$f(t) = \sin t \quad \therefore \quad f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(s) - f(t)}{s - t}$$

$$= \lim_{s \to t} \frac{\sin(s) - \sin(t)}{s - t} = ? \quad \text{“}\tfrac{0}{0}\text{”}$$

Para lidar com essa obstrução algébrica, precisaremos de uma definição alternativa de derivada, que seja equivalente à original:

Afirmamos que, se $f(t)$ é derivável em t, então:

$$f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(s) - f(t)}{s - t} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Justificativa: Mudança de variáveis!

Basta fazermos $h = s - t$. Logo:

$s \to t \Rightarrow h \to 0$.

Aplicando no exemplo anterior, teremos:

$$f(t) = \sin t \Rightarrow f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(t+h) - \sin(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(t) \cdot \cos(h) + \sin(h) \cdot \cos(t) - \sin(t)}{h}$$

$$\boxed{\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \sin(b) \cdot \cos(a)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(t) \cdot (\cos(h) - 1) + \sin(h) \cdot \cos(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin(t) \cdot \left(\frac{\cos(h) - 1}{h} \right) + \frac{\sin(h)}{h} \cdot \cos(t)$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin(t) \cdot \left[\left(\frac{\cos(h) - 1}{h} \right) \cdot \left(\frac{\cos(h) + 1}{\cos(h) + 1} \right) \right] + \frac{\sin(h)}{h} \cdot \cos(t)$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin(t) \cdot \left[\frac{(\cos(h))^2 - 1}{h \cdot (\cos(h) + 1)} \right] + \frac{\sin(h)}{h} \cdot \cos(t)$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\cancel{\sin(t)}}_{\sin(t)} \cdot \underbrace{\cancel{\frac{\left[-(\sin(h))^2\right]}{h}}}_{\substack{\text{L.T.F} \\ (-1)\cdot 0}} \cdot \underbrace{\cancel{\frac{1}{\cos(h)+1}}}_{1/2} + \underbrace{\cancel{\frac{\sin(h)}{h}}}_{\substack{\text{L.T.F.} \\ 1}} \cdot \overbrace{\cancel{\cos(t)}}^{\cos(t)}$$

$$= \cos(t) .$$

$$- \underbrace{\cancel{\sin(h)}}_{0} \cdot \underbrace{\cancel{\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)}}_{\substack{\text{L.T.F.} \\ 1}}$$

__Exercício__: Determine a função derivada de $f(t)=\cos(t)$.

Vamos agora determinar a derivada da função $f(t) = e^t$:

$$f'(t) = \lim_{s\to t} \frac{e^s - e^t}{s-t} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{t+h} - e^t}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^t \cdot e^h - e^t}{h} = \lim_{h\to 0} \overbrace{\cancel{e^t}}^{e^t} \cdot \overbrace{\cancel{\frac{(e^h - 1)}{h}}}^{\text{L.E.F. } 1}$$

$$= e^t .$$

$$f'(t) = f(t)$$

$$f(t) \cdot f'(t) = 1$$

$$[f(t)]^2 \cdot [f'(t)]^2$$

$$\frac{[f(t)]^2 + [f'(t)]^2}{\sin(t)} = 5t^2$$

Exercício: Considerando $f(t) = a^t$, $0 < a \neq 1$, determine $f'(t)$.

Vamos determinar a derivada de $f(t) = tg(t)$:

$$f(t) = tg(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

$$\therefore f'(t) = \frac{\cos(t) \cdot \cos(t) - \sin(t) \cdot (-\sin(t))}{[\cos(t)]^2}$$

$$= [\sec(t)]^2 .$$

$$[t^n]' = n \cdot t^{n-1}$$

$$[\sin(t)]' = \cos(t)$$

$$[\cos(t)]' = -\sin(t)$$

$$[tg(t)]' = (\sec(t))^2$$

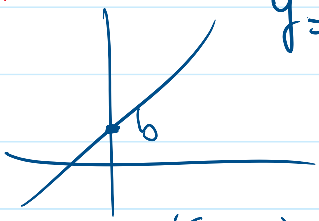
$$[tg(t)]' = (sec(t))^2$$

$$[a^t]' = ln(a) \cdot a^t$$

$$\longrightarrow \left[\log_a t\right]' = ?$$

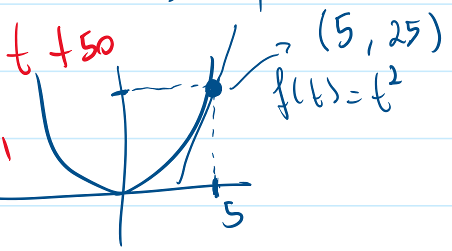
$$\longrightarrow [sec(t)]' = ?$$

$$p(t) = a_m \cdot t^m + a_{m-1} \cdot t^{m-1} + \dots + a_1 t + a_0$$



$$y = a t + b$$

$$p(t) = 5 . t^3 + 6 t^2 + t + 50$$



$$a = 2 . 5 = 10$$
$$= f'(5)$$

$$p'(t) = (5t^3)' + (6t^2)'$$
$$+ (t)' + (50)$$

$$y = 10 . t + b$$

$$25 = 10 . 5 + b$$

$$f(t) = t^2 \Rightarrow f'(t) = 2t$$

$$= 5 . (t^3)' + 6 . (t^2)' + (t)' + (50)'$$

$$b = 25 - 50$$
$$= -25$$

$$= 15t^2 + 12t + 1$$

Reta tg. em P: $y = at + b$

$$y = 2P . t + b$$

$$(\sqrt[3]{t})' = (t^{1/3})' = \frac{1}{3} \cdot t^{1/3 - 1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$$

$$(2^t)' = \cancel{t . 2^{t-1}}$$

$$\hookrightarrow = (\ln 2)\, 2^t$$

Funções racionais

$$f(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$$, p, q são polinômios.

$$f(t) = \frac{t^2 - 4}{t + 3}$$

$$f'(t) = \frac{2t \cdot (t+3) - (t^2-4) \cdot 1}{(t+3)^2}$$

$$= \frac{2t^2 + 6t - t^2 + 4}{(t+3)^2}$$

$$= \frac{t^2 + 6t + 4}{(t+3)^2}$$

$$[f(t) \cdot g(t)]' \neq f'(t) \cdot g'(t)$$

$$[f(t) + g(t)]' = f'(t) + g'(t)$$