Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Departamento de Matemática

MATA42 - Matemática Discreta - I

Funções

Definição, Operações, Classificação

Professora: Isamara

(Q.1) Sejam os conjuntos $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Verifique se as relações abaixo são de ORDEM PARCIAL e/ou de ORDEM TOTAL. (Justifique suas respostas)

(a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x\}$.
(b) $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x + 1\}$.
(c) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times A \mid y^2 = x^2\}$.
(d) $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = (x - 1)^2 - 1\}$.
(e) $\mathcal{L} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2\}$.

(Q.2) Identifique o DOMÍNIO, o CONTRADOMÍNIO e a IMAGEM das relações da questão $Q.1$.

(Q.3) Desenhe o **diagrama sagital** das relações da questão $Q.1$.

(Q.4) Considerando as relações definidas nos itens da Q1, Determine as relações :

(a) $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$
(b) $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$
(c) $\mathcal{S} \circ \mathcal{V}$
(d) $\mathcal{V} \circ \mathcal{S}$
(e) $\mathcal{T} \circ \mathcal{L}$

(Q.5) Considerando as relações definidas nos itens da Q1, Determine as relações inversas :

(a) $\mathcal{R}^{-1}$
(b) $\mathcal{S}^{-1}$
(c) $\mathcal{V}^{-1}$
(d) $\mathcal{T}^{-1}$
(e) $\mathcal{L}^{-1}$
(f) $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}$

(Q.6) Sejam os conjuntos $A = B = \mathbb{R}$. Determine o domínio, a imagem e o contradomínio das seguintes relações

(a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$.
(b) $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = -x + 1\}$.
(c) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = |x|\}$.
(d) $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \sqrt{(x-1)^2}\}$.
(e) $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \frac{1}{3x+3}\}$.
(f) $\mathcal{L} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \frac{1}{\sqrt{(x-4)^2}}\}$.

(Q.7) Faça a REPRESENTAÇÃO NO PLANO CARTESIANO das relações abaixo identificando o DOMÍNIO e a IMAGEM das relações.

(a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$.
(b) $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = -x + 1\}$.
(c) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = |x| + 2\}$.
(d) $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = (x - 1)^2\}$.

(Q.1) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} = [-3, 3] \subset \mathbb{Z}$.

Nos itens abaixo, vamos considerar as definições: "Uma relação de ORDEM PARCIAL deve assumir as propriedades reflexiva, anti-simétrica e transitiva". "Uma relação de ORDEM TOTAL é uma relação de ordem parcial e **conectada**".

(a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x\} =$
$\{(-3, -3), (-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.
Relação de ORDEM PARCIAL: $\mathcal{R}$ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Todavia, $\mathcal{R}$ não é de ORDEM TOTAL porque não é conectada.

(b) $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x + 1\} = \{(-3, -2), (-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$.
Relação $\mathcal{S}$ apesar de ser anti-simétrica, não é reflexiva, transitiva e nem conectada. Portanto, não é de ORDEM PARCIAL e nem de ORDEM TOTAL.

(c) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times A \mid y^2 = x^2\} =$
$\{(-3, -3), (-3, 3), (3, -3), (3, 3), (-2, -2), (-2, 2), (2, -2), (2, 2),$
$(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1), (0, 0)\}$.
Relação $\mathcal{S}$ apesar de ser reflexiva e transitiva, não é anti-simétrica e nem conectada. Portanto, não é de ORDEM PARCIAL e nem de ORDEM TOTAL.

(Q.1) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

(d) $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = (x-1)^2 - 1\} = \{(-1, 3), (0, 0), (1, -1), (2, 0), (3, 3)\}$.
Relação $\mathcal{V}$ apesar de ser anti-simétrica não é reflexiva, transitiva e nem conectada.
Portanto, não é de ORDEM PARCIAL e nem de ORDEM TOTAL.

(e) $\mathcal{L} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2\}\{(-3, 2), (-2, 2), (-1, 2), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$.
Relação $\mathcal{V}$ apesar de ser anti-simétrica e transitiva, não é reflexiva e nem conectada.
Portanto, não é de ORDEM PARCIAL e nem de ORDEM TOTAL.

(Q.2) Identifique o DOMÍNIO, o CONTRA DOMÍNIO e a IMAGEM das relações da questão $Q.1$.

(a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x\} =$
$\{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$.
$D(\mathcal{R}) = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\} = A$
$Im(\mathcal{R}) = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\} = A$

(b) $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x+1\} = \{(-3,-2),(-2,-1),(-1,0),(0,1),(1,2),(2,3)\}$.
$D(\mathcal{S}) = \{-3,-2,-1,0,1,2\} \subset A$
$Im(\mathcal{S}) = \{-2,-1,0,1,2,3\} \subset A$

(c) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times A \mid y^2 = x^2\} =$
$\{(-3,-3),(-3,3),(3,-3),(3,3),(-2,-2),(-2,2),(2,-2),(2,2),$
$(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1),(0,0)\}$.
$D(\mathcal{T}) = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\} = A$
$Im(\mathcal{T}) = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\} = A$

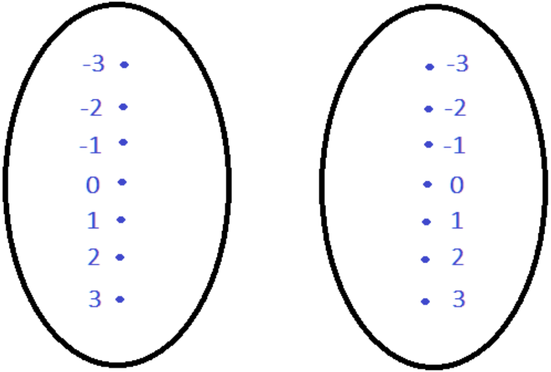
(Q.2) Identifique o DOMÍNIO, o CONTRA DOMÍNIO e a IMAGEM das relações da questão $Q.1$.

(d) $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = (x-1)^2 - 1\} = \{(-1, 3), (0, 0), (1, -1), (2, 0), (3, 3)\}$.
$D(\mathcal{V}) = \{-1, 0, 1, 2, 3\} \subset A$
$Im(\mathcal{V}) = \{-1, 0, 3\} \subset A$

(e) $\mathcal{L} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2\} = \{(-3, 2), (-2, 2), (-1, 2), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$.
$D(\mathcal{L}) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} = A$
$Im(\mathcal{L}) = \{2\} \subset A$
Para todas as relações acima, o contra domínio é o conjunto A, onde $A \supseteq Im(\mathcal{R})$.

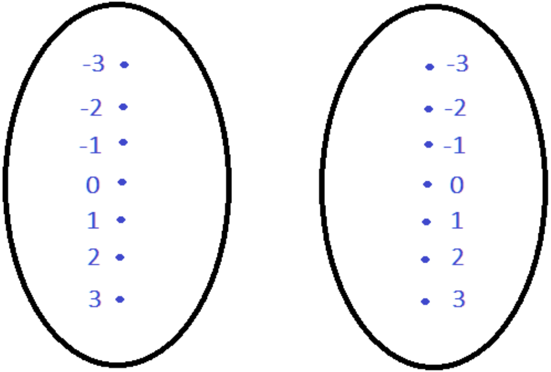
(Q.3) Desenhe o **diagrama sagital** das relações da questão $Q.1$.

(a) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in A \times A \mid y = x\} = \{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$.



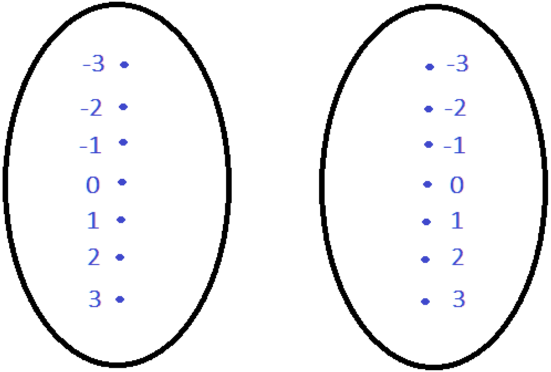
(Q.3) Desenhe o **diagrama sagital** das relações da questão $Q.1$.

(b) $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x + 1\} = \{(-3, -2), (-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$.



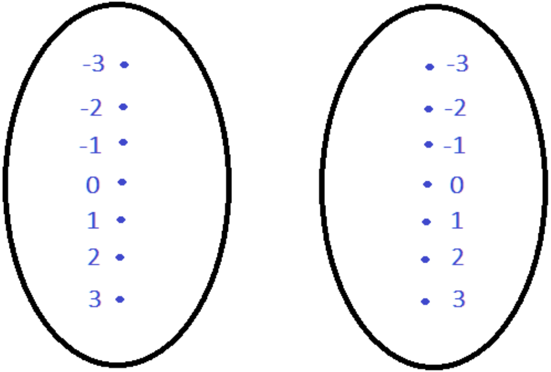
(Q.3) Desenhe o **diagrama sagital** das relações da questão $Q.1$.

(c) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times A \mid y^2 = x^2\} =$
$\{(-3,-3), (-3,3), (3,-3), (3,3), (-2,-2), (-2,2), (2,-2), (2,2),$
$(-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1), (0,0)\}$.



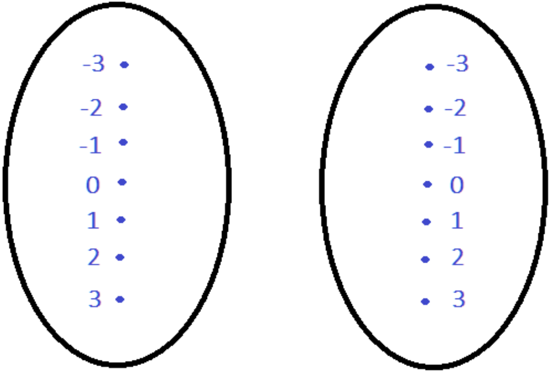
(Q.3) Desenhe o **diagrama sagital** das relações da questão $Q.1$.

(d) $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = (x-1)^2 - 1\} = \{(-1, 3), (0, 0), (1, -1), (2, 0), (3, 3)\}$.



(Q.3) Desenhe o **diagrama sagital** das relações da questão $Q.1$.

(e) $\mathcal{L} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2\} = \{(-3, 2), (-2, 2), (-1, 2), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$.



(Q.4) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x\} =$
$\{(-3,-3), (-2,-2), (-1,-1), (0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$.
$\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x + 1\} =$
$\{(-3,-2), (-2,-1), (-1,0), (0,1), (1,2), (2,3)\}$.

(a) $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(-3,-2), (-2,-1), (-1,0), (0,1), (1,2), (2,3)\} = \mathcal{S}$.
(b) $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$

Note que a RELAÇÃO IDENTIDADE é o elemento neutro na composição entre as relações: $\mathcal{R} \circ \Delta_A = \Delta_A \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}, \forall \mathcal{R}$.

(Q.4) $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times A \ \mid \ y = x + 1\} =$
$\{(-3, -2), (-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$.
$\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times A \ \mid \ y = (x - 1)^2 - 1\} = \{(-1, 3), (0, 0), (1, -1), (2, 0), (3, 3)\}$.

(c) $\mathcal{S} \circ \mathcal{V} = \{(0, 1), (1, 0), (2, 1)\}$
(d) $\mathcal{V} \circ \mathcal{S} = \{(-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)\}$

(Q.4) $\mathcal{T} = \{(x,y) \in A \times A \mid y^2 = x^2\} =$
$\{(-3,-3),(-3,3),(3,-3),(3,3),(-2,-2),(-2,2),(2,-2),(2,2),$
$(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1),(0,0)\}.$
$\mathcal{L} = \{(x,y) \in A \times A \mid y = 2\} =$
$\{(-3,2),(-2,2),(-1,2),(0,2),(1,2),(2,2),(3,2)\}.$

(e) $\mathcal{T} \circ \mathcal{L} = \{(-3,-2),(-3,2),(-2,-2),(-2,2),(-1,-2),(-1,2),$
$(0,-2),(0,2),(1,-2),(1,2),(2,-2),(2,2),(3,-2),(3,2)\}$

(Q.4) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in A \times A \mid y = x\}$.
$\mathcal{S} = \{(x,y) \in A \times A \mid y = x + 1\}$.

(a) $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x,z) \in A \times A \mid (x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,z) \in \mathcal{S}\}$
$= \{(x,z) \in A \times A \mid y = x \;\wedge\; z = y + 1\} = \{(x,z) \in A \times A \mid z = x + 1\} = \mathcal{S}$

(b) $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(x,z) \in A \times A \mid (x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,z) \in \mathcal{R}\}$
$= \{(x,z) \in A \times A \mid y = x \;\wedge\; z = y\} = \{(x,z) \in A \times A \mid z = x\} = \mathcal{R}$

Note que a m-ésima potência; $m \in \mathbb{N}$, da RELAÇÃO IDENTIDADE é igual a RELAÇÃO IDENTIDADE:
$\mathcal{R}^m = \mathcal{R} \circ \ldots \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}$, para $\mathcal{R} = \Delta_A$.

(Q.4) $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x + 1\}$.

$\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = (x-1)^2 - 1\}$.

(c) $\mathcal{S} \circ \mathcal{V} = \{(x, z) \in A \times A \mid (x, y) \in \mathcal{V} \ \wedge \ (y, z) \in \mathcal{S}\}$
$= \{(x, z) \in A \times A \mid y = (x-1)^2 - 1 \ \wedge \ z = y + 1\}$
$= \{(x, z) \in A \times A \mid z = (x-1)^2 - 1 + 1\} = \{(x, z) \in A \times A \mid z = (x-1)^2\}$

(d) $\mathcal{V} \circ \mathcal{S} = \{(x, z) \in A \times A \mid (x, y) \in \mathcal{S} \ \wedge (y, z) \in \mathcal{V}\}$
$= \{(x, z) \in A \times A \mid y = x + 1 \ \wedge \ z = (y-1)^2 - 1\}$
$= \{(x, z) \in A \times A \mid z = (x + 1 - 1)^2 - 1\} = \{(x, z) \in A \times A \mid z = x^2 - 1\}$

(Q.4) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times A \mid y^2 = x^2\}$.
$\mathcal{L} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2\}$.

(e) $\mathcal{T} \circ \mathcal{L} = \{(x, z) \in A \times A \mid (x, y) \in \mathcal{L} \wedge (y, z) \in \mathcal{T}\}$
$= \{(x, z) \in A \times A \mid y = 2 \wedge z^2 = y^2\} = \{(x, z) \in A \times A \mid z^2 = (2)^2\}$
$= \{(x, z) \in A \times A \mid z^2 = 4\} = \{(x, z) \in A \times A \mid z = \pm 2\}$

Note que, por definição da raiz quadrada: $\sqrt{y^2} = |y|$,
$z^2 = y^2 \Rightarrow z = \sqrt{y^2} = |y| = \pm y$.

Seja $x \in \mathbb{R}$. Diz-se que o MÓDULO(ou VALOR ABSOLUTO) de x denotado por $|x|$ é definido do seguinte modo

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Assim, $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = max\{-x, x\}$.
Consequentemente, $|x| = max\{-x, x\} \Rightarrow -x \leq |x| \wedge x \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.
Agora, voltando ao exercício, tem-se por definição da raiz quadrada: $\sqrt{x}; x \geq 0 \Rightarrow x = y^2$
$\sqrt{y^2} = z, z \geq 0 \Rightarrow z^2 = y^2 \Rightarrow z^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (z - y)(z + y) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{Se } z - y = 0 \Rightarrow z = y \Rightarrow y \geq 0 \\ \text{Se } z + y = 0 \Rightarrow z = -y \Rightarrow -y \geq 0 \Rightarrow y \leq 0 \end{cases}$$

Portanto, $\sqrt{y^2} = z = |y| = \pm y$

Exemplos:

- $z^2 = 25 \Rightarrow z^2 = 5^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{5^2} = \pm 5$
- $\sqrt{x-3} \Rightarrow x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$
- $|2x-10| = 6 \Rightarrow (2x - 10 = 6) \ \vee \ (2x - 10 = -6) \Rightarrow x = 8 \ \vee \ x = 2 \Rightarrow S = \{2, 8\}$.
- $|2x-10| \geq 6 \Rightarrow (2x - 10 \geq 6) \ \vee \ (2x - 10 \leq -6) \Rightarrow x \geq 8 \ \vee \ x \leq 2 \Rightarrow S =]-\infty, 2] \ \cup \ [8, +\infty[$.
- $|2x-10| < 6 \Rightarrow -6 < 2x - 10 < 6 \Rightarrow 2 < x < 8 \Rightarrow S =]2, 8[$.

Propriedades:

- $|x| \geq 0$ e $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \vee x = -y, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $|x.y| = |x|.|y|$
  Note que
  $|x.y| = \sqrt{(x.y)^2} = \sqrt{(x^2.y^2)} = \sqrt{x^2}.\sqrt{y^2} = |x|.|y|$
- $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$
  Note que
  $|\frac{x}{y}| = \sqrt{(\frac{x}{y})^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|}$

Propriedades:

- $|x+y| \leq |x|+|y|$
  Note que
  $|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy \leq |x|^2+|y|^2+2|x|.|y| = (|x|+|y|)^2$
  Logo, $|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2 \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|$.
- $|x-y| \leq |x|+|y|$
  Note que
  $|x-y|^2 = (x-y)^2 = x^2+y^2-2xy \leq x^2+y^2+2|x|.|y| = |x|^2+|y|^2+2|x|.|y| = (|x|+|y|)^2$
  Logo, $|x-y|^2 \leq (|x|+|y|)^2 \Rightarrow |x-y| \leq |x|+|y|$.
- $|x-y| \geq |x|-|y|$
  Note que
  $|x-y|^2 = (x-y)^2 = x^2+y^2-2xy \geq x^2+y^2-2|x|.|y| = |x|^2+|y|^2-2|x|.|y| = (|x|-|y|)^2$
  Logo, $|x-y|^2 \geq (|x|-|y|)^2 \Rightarrow |x-y| \geq |x|-|y|$.

(Q.5) (a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x\}$.
$\mathcal{R}^{-1} = \{(-3, -3), (-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\} =$
$\{(y, x) \in A \times A \mid x = y\} = \mathcal{R}$.

(b) $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x + 1\} = \{(-3, -2), (-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$.
$\mathcal{S}^{-1} = \{(-2, -3), (-1, -2), (0, -1), (1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$
$\mathcal{S}^{-1} = \{(y, x) \in A \times A \mid x = y - 1\}$

(c) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times A \mid y^2 = x^2\}$.
$\mathcal{T}^{-1} = \{(-3, -3), (-3, 3), (3, -3), (3, 3), (-2, -2), (-2, 2), (2, -2), (2, 2),$
$(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1), (0, 0)\} = \mathcal{T} = \{(y, x) \in A \times A \mid x^2 = y^2\}$.

(Q.5) (d) $\mathcal{V} = \{(x,y)\in A\times A \mid y = (x-1)^2 - 1\} = \{(-1,3),(0,0),(1,-1),(2,0),(3,3)\}$.
$\mathcal{V}^{-1} = \{(3,-1),(0,0),(-1,1),(0,2),(3,3)\}$
Note que $y = (x-1)^2 - 1 \Rightarrow y+1 = (x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{y+1} = \sqrt{(x-1)^2} \Rightarrow$
$\sqrt{y+1} = |(x-1)| \Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{y+1} \Rightarrow x = \pm\sqrt{y+1}+1$
$\mathcal{V}^{-1} = \{(y,x)\in A\times A \mid x = \pm\sqrt{y+1}+1\}$.

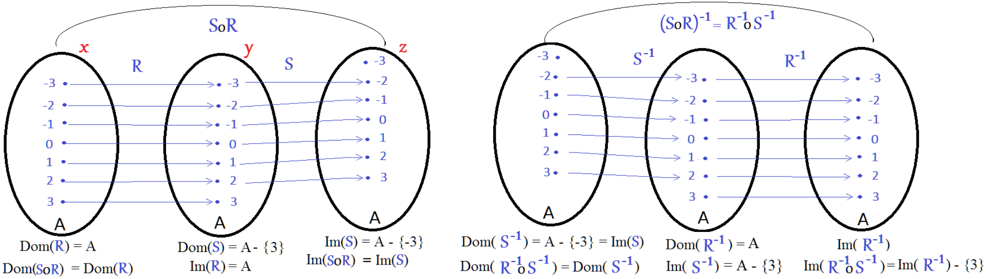
(e) $\mathcal{L} = \{(x,y)\in A\times A \mid y = 2\} = \{(-3,2),(-2,2),(-1,2),(0,2),(1,2),(2,2),(3,2)\}$.
$\mathcal{L}^{-1} = \{(2,-3),(2,-2),(2,-1),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3)\}$
$\mathcal{L}^{-1} = \{(y,x)\in A\times A \mid y = 2\}$.

(f) Por propriedade da inversa da composição entre relações, tem-se
$(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})^{-1} = (\mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{S}^{-1}) = \{(z,x)\in A\times A \mid (z,y)\in\mathcal{S}^{-1} \wedge (y,x)\in\mathcal{R}^{-1}\}$
$= \{(z,x)\in A\times A \mid y = z-1 \wedge x = y\} = \{(z,x)\in A\times A \mid x = z-1\} = \mathcal{S}^{-1}$

Ou, considerando o resultado da Q.4(a):
$(\mathcal{S}\circ\mathcal{R}) = \mathcal{S} \Rightarrow (\mathcal{S}\circ\mathcal{R})^{-1} = \mathcal{S}^{-1}\ \{(y,x)\in A\times A \mid x = y-1\}$

Note que $\mathcal{R}^{-1}$ é uma relação de identidade. Assim, $(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})^{-1} = (\mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{S}^{-1}) = \mathcal{S}^{-1}$

(Q.5) (f) $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = \mathcal{S} \Rightarrow (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{S}^{-1} = \{(y, x) \in A \times A \mid x = y - 1\}$

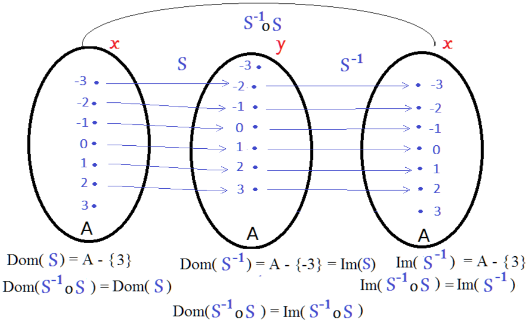


Observação

$$\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ \mathcal{S}^{-1} = \mathcal{R}$$

$$\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{S} = \{(x, x) \in A \times A \mid (x, y) \in \mathcal{S} \wedge (y, x) \in \mathcal{S}^{-1}\}$$

$$\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{S} = \{(x, x) \in A \times A \mid y = x + 1 \wedge x = y - 1\} = \{(x, x) \in A \times A \mid x = (x + 1) - 1 = x\}$$



(Q.6) Nos itens abaixo $A = B = \mathbb{R}$, assim, o contradomínio é igual a $B = \mathbb{R}$.

(a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$.
$Dom(\mathcal{R}) = \mathbb{R}$; $Im(\mathcal{R}) = \mathbb{R}$

(b) $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = -x + 1\}$.
$Dom(\mathcal{S}) = \mathbb{R}$; $Im(\mathcal{S}) = \mathbb{R}$

(c) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = |x|\}$.
$Dom(\mathcal{T}) = \mathbb{R}$; $y = |x| \geq 0 \Rightarrow Im(\mathcal{T}) = \mathbb{R}_+$

(d) $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \sqrt{(x-1)^2}\}$.
$(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow Dom(\mathcal{V}) = \mathbb{R}$; $y = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \geq 0 \Rightarrow Im(\mathcal{V}) = \mathbb{R}_+$;

(e) $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \frac{1}{3x+3}\}$.
$3x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow Dom(\mathcal{V}) = \mathbb{R} - \{-1\}$;
$y = \frac{1}{3x+3} \Rightarrow 3x + 3 = \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{1}{3y} - 1 \Rightarrow y \neq 0 \Rightarrow Im(\mathcal{V}) = \mathbb{R}^*$

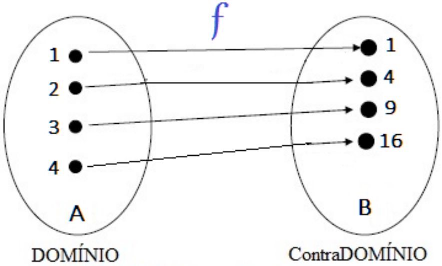
(f) $\mathcal{L} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \frac{1}{\sqrt{(x-4)^2}}\}$.
$\sqrt{(x-4)^2} \neq 0 \Rightarrow |(x-4)| \neq 0 \Rightarrow x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4 \Rightarrow Dom(\mathcal{L}) = \mathbb{R} - \{4\}$;
$|x-4| = \frac{1}{y} \Rightarrow (\frac{1}{y} \geq 0) \wedge (y \neq 0) \Rightarrow (y \geq 0) \wedge (y \neq 0) \Rightarrow y > 0 \Rightarrow Im(\mathcal{L}) = \mathbb{R}^*_+$

(Q.7) Faça a REPRESENTAÇÃO NO PLANO CARTESIANO das relações abaixo identificando o DOMÍNIO e a IMAGEM das relações.

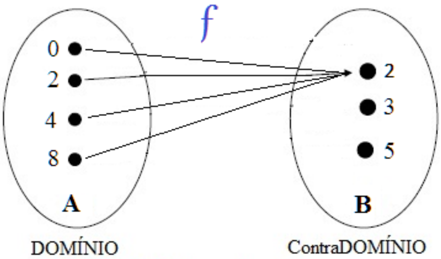
(a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$.
(b) $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = -x + 1\}$.
(c) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = |x| + 2\}$.
(d) $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = (x - 1)^2\}$.

Uma relação $\mathcal{F} \subseteq A \times B$ do conjunto A sobre o conjunto B é uma função quando todos os elementos do conjunto A participam da relação e cada elemento do conjunto A está em relação com apenas um único elemento do conjunto B.

EXEMPLOS:



$$F = \{ (x,y) \mid y = x^2 \}$$



$$F = \{ (x,y) \mid y|x \}$$

DEFINIÇÃO: (Funções)

Sejam A e B dois conjuntos não vazios e $\mathcal{F} \subseteq A \times B$. Uma FUNÇÃO(ou APLICAÇÃO) de A em B é uma terna $f = (\mathcal{F}, A, B)$ sendo $\mathcal{F}$ uma relação de A em B satisfazendo aos axiomas,

(i) $\forall x \in A, \exists y \in B; (x, y) \in \mathcal{F}$, isto é, $Dom(\mathcal{F}) = A$; e

(ii) $\forall x \in A, \forall y, z \in B; (x, y) \in \mathcal{F} \wedge (x, z) \in \mathcal{F} \Rightarrow y = z$; ou seja, $\mathcal{F}$ é "**unívoca**".

NOTAÇÃO:

$$f: \begin{array}{l} A \to B \\ x \to y \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} A \xrightarrow{f} B \\ x \xrightarrow{f} y = f(x) \end{array}$$

lê-se: " FUNÇÃO(ou APLICAÇÃO) de A em B ", ou " FUNÇÃO f definida em A com valores em B ".

DEFINIÇÃO: (Domínio)

Seja uma função $f = (\mathcal{F}, A, B)$. Diz-se que o conjunto $Dom(f) = A$ é o DOMÍNIO de f; sse, $\forall x \in A, \exists! y \in B; f(x) = y$.

DEFINIÇÃO: (ContraDomínio)

Seja uma função $f = (\mathcal{F}, A, B)$. Diz-se que o conjunto $Codom(f) = B$ é o CONTRA-DOMÍNIO de f.

DEFINIÇÃO: (Imagem)

Seja uma função $f = (\mathcal{F}, A, B)$. Diz-se que o conjunto $Im(f) \subseteq Codom(f)$; $Im(f) = \{y \in B \mid y = f(x),$ para algum $x \in A\}$ é a IMAGEM de f.

OBSERVAÇÃO:

- Uma função $f = (\mathcal{F}, A, B)$; $A \subseteq \mathbb{R}$ é denominada FUNÇÃO DE VARIÁVEL REAL.
- Uma função $f = (\mathcal{F}, A, B)$; $B \subseteq \mathbb{R}$ é denominada FUNÇÃO REAL.
- Uma função $f = (\mathcal{F}, A, B)$; $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ é denominada FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL (ou FUNÇÃO NUMÉRICA).

Determinar Domínio e Imagem

Se $f = (\mathcal{F}, A, B)$ é uma função real de variável real.

- a imagem de f, geralmente, é determinada obtendo uma EXPRESSÃO ALGÉBRICA EM x;
- para determinar o domínio de f, tenta-se encontrar o conjunto de todos os valores reais de x que garantam a existência das operações na expressão algébrica dada em $\mathbb{R}$.

EXEMPLOS:

1. Seja a função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ determine o domínio $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}.$$
2. Seja a função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ determine o domínio $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-3}.$$

EXEMPLO.1:
Seja a função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ determine o domínio $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}.$$

- Determinando as CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA da expressão algébrica $f(x)$ em $\mathbb{R}$:
  $(x - 3 \geq 0) \wedge (\sqrt{x-3} \neq 0) \Leftrightarrow (x \geq 3) \wedge (x \neq 3) \Leftrightarrow x > 3 \Leftrightarrow x \in]3, +\infty[$
  Portanto, $A = Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\} =]3, +\infty[$.

- Determinando o conjunto imagem da função:
  $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}};$ para algum $x \in A\}$.
  Pela expressão $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ tal que $x \in Dom(f)$ tem-se que $y > 0 \Rightarrow Im(f) = \mathbb{R}^*_+$.
  Note que
  $y = \frac{1}{\sqrt{x-3}} \Rightarrow \sqrt{x-3} = \frac{1}{y} \Rightarrow (\sqrt{x-3})^2 = (\frac{1}{y})^2 \Rightarrow x - 3 = \frac{1}{y^2} \Rightarrow x = 3 + \frac{1}{y^2} \Rightarrow y \neq 0$

EXEMPLO.2:

Seja a função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ determine o domínio $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 3}.$$

- Determinando as CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA da expressão algébrica $f(x)$ em $\mathbb{R}$:
  $(x \geq 0) \wedge (\sqrt{x} - 3 \neq 0) \Leftrightarrow (x \geq 0) \wedge (x \neq 9) \Leftrightarrow x \in [0, 9[\cup]9, +\infty[$
  Portanto, $A = Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \geq 0) \wedge (x \neq 9)\} = [0, 9[\cup]9, +\infty[= \mathbb{R}_+ - \{9\}$.

- Determinando o conjunto imagem da função:
  $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-3};$ para algum $x \in A\} = \{y \in \mathbb{R} | y \leq -\frac{1}{3} \vee y > 0\}$
  Pela expressão $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ tal que $x \in Dom(f)$ tem-se que para
  $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}; x = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}; x = 4 \Rightarrow y = -1; x = 16 \Rightarrow y = 1; x = 25 \Rightarrow y = \frac{1}{2}; x = 36 \Rightarrow y = \frac{1}{3}; \ldots$
  Então, para $0 \leq x < 9 \Rightarrow y \leq -\frac{1}{3}$ e para $x > 9 \Rightarrow y > 0$

Exercícios:

1. Seja a função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ determine o domínio $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}.$$

$x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x^2 - 4 = (x+2)(x-2) \neq 0 \Rightarrow (x \neq -2) \wedge (x \neq 2) \Rightarrow$
$x \in]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[\Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}.$

2. Seja a função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ determine o domínio $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que

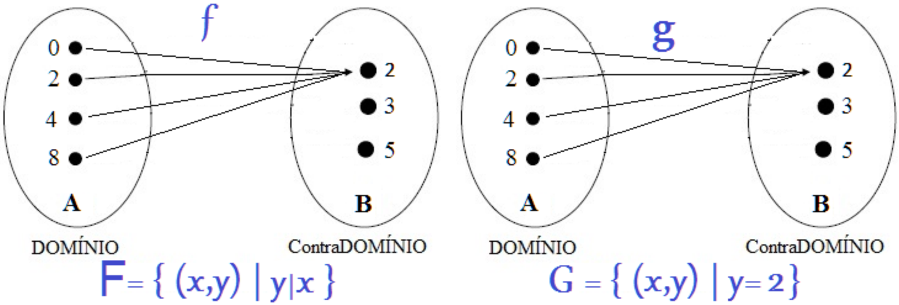
$$f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{x+2}.$$

$(-x \geq 0) \wedge (x+2 \neq 0) \Rightarrow (x \leq 0) \wedge (x \neq -2) \Rightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]-2, 0] \Rightarrow x \in \mathbb{R}_- - \{-2\}$

DEFINIÇÃO:

Sejam as funções $f : A \to B$ e $g : A \to B$. Diz-se que $f = g$ sse $f(x) = g(x); \forall x \in A$.
Note que os domínios e contradomínios são iguais.

EXEMPLO:



Exercícios:

1. Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, -2, 0, 1, 2\}$, e sejam as funções $f : A \rightarrow B$ tal que $f(x) = x - 1$ e $g : A \rightarrow B$ tal que $g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$. Verifique se $f = g$. Verificando a igualdade para cada elemento no domínio:
   $f(1) = g(1) = 0; f(2) = g(2) = 1; f(3) = g(3) = 2.$
   Note que para $A = \mathbb{R} - \{-1\}$ e
   $B = \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow x - 1 = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1$
2. Sejam as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(x) = |x|$.
   Verifique se $f = g$.
   Verificando a igualdade $\forall x \in \mathbb{R}$:
   Se $x > 0 \rightarrow f(x) = x$ e $g(x) = x \Rightarrow f(x) = g(x)$
   Se $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$ e $g(0) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$
   Se $x < 0 \rightarrow f(x) = -x$ e $g(x) = -x \Rightarrow f(x) = g(x)$
   Portanto, $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$ (por exemplo: $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = |2| = \pm 2$).

Todavia, para as funções reais de valores reais $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$ tem-se que $f(x) \neq g(x)$

DEFINIÇÃO:

Sejam as funções $f = (\mathcal{F}, A, B)$ e $g = (\mathcal{G}, C, D)$; tais que $f(x) = g(x); \forall x \in A \cap C$.
Assim, a função união $h = f \cup g$ é definida por

$$h: \quad A \cup C \rightarrow B \cup D$$

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad x \in A \\ g(x), & \text{se} \quad x \in C \end{cases}$$

EXEMPLO:

Seja a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \begin{cases} 4x + 3, & \text{se} \quad x > 5 \\ x^2 - 2, & \text{se} \quad x \leq 5 \end{cases}$

Então, por exemplo,
$h(-2) = g(-2) = (-2)^2 - (-2) = 6;$
$h(2) = g(2) = (2)^2 - 2 = 2;$
$h(6) = f(6) = 4(6) + 3 = 27.$

EXEMPLO:

Seja a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \begin{cases} f(x) = x - 1, & \text{se} \quad x \geq 1 \\ g(x) = -x + 1, & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$

Então, por exemplo,
$h(1) = f(1) = 0$;
$h(0) = g(0) = 1$;
$h(2) = f(2) = 1$.
$h(-1) = g(-1) = 2$;
$h(3) = f(3) = 2$.
Note que $h(x) = \sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|$

DEFINIÇÃO:

Seja A um conjunto não vazio. A função $I_A = (\Delta_A, A, A)$ é denominada FUNÇÃO IDENTIDADE(ou FUNÇÃO IDÊNTICA) em A.

NOTAÇÃO: I_A (ou Id_A ou 1_A)

$$\begin{aligned} I_A : \quad & A \rightarrow A \\ & x \rightarrow y = I_A(x) = x \end{aligned}$$

EXEMPLO:

Dado $A = \{2, 3, 7, 8\}$ tem-se a relação identidade sobre A :
$\Delta_A = \{(2,2), (3,3), (7,7), (8,8)\}$; então, a FUNÇÃO IDENTIDADE

$$\begin{aligned} I_A : \quad & A \rightarrow A \\ & x \rightarrow y = I_A(x) = x \end{aligned}$$

onde,

$(2,2) \Leftrightarrow I_A(2) = 2, \cdots, (8,8) \Leftrightarrow I_A(8) = 8.$

DEFINIÇÃO:

Sejam A, B conjuntos não vazios e $b \in B$ fixo. A função $f = (C_b, A, B)$ tal que $C_b \subset A \times B$; $C_b = \{(x, b) \in A \times B \mid x \in A$ e b é fixo em $B\}$; definida por

$$\begin{aligned} f : \quad & A \rightarrow B \\ & x \rightarrow b = f(x); \forall x \in A \end{aligned}$$

é denominada FUNÇÃO CONSTANTE.

EXEMPLO:

Dado $A = \{2, 3, 7, 8\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ tem-se a RELAÇÃO CONSTANTE sobre $A \times B$ para $b = 3$ fixo em B :

$C_3 = \{(2, 3), (3, 3), (7, 3), (8, 3)\}$; então, a FUNÇÃO CONSTANTE

$$\begin{aligned} f : \quad & A \rightarrow B \\ & x \rightarrow f(x) = 3 \end{aligned}$$

onde,

$(2, 3) \Leftrightarrow f(2) = 3, \cdots, (8, 3) \Leftrightarrow f(8) = 3$, isto é, $f(2) = f(3) = f(7) = f(8) = 3$.

Definição:

Seja uma função $f = (\mathcal{F}, A, B)$. Diz-se que f é uma função INJETIVA (ou INJETORA ou UM PARA UM ou BIUNÍVOCA) se e somente se $\forall x_1, x_2 \in A$, se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;
ou seja, $\forall x_1, x_2 \in A; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

EXEMPLOS:

- A função $f(x) = x^2$ não é injetora, pois, por exemplo:
  $f(-1) = f(1) = 1; x_1 = -1 \neq x_2 = 1.$
  Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) = x_1^2$ e $f(x_2) = x_2^2$.
  Supondo $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$
  Para $x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2|$
  Por propriedade do módulo de um número real:
  $|x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2$
  Então,
  Se $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f$ é injetora
  Se $x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f$ não é uma função um para um, isto é, f não é injetora.
- A função $f(x) = x + 1$ é injetora, pois, para $x_1 \neq x_2$ temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.
  Supondo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}; \Rightarrow f(x_1) = x_1 + 1$ e $f(x_2) = x_2 + 1$.
  Igualando as funções: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$.
  Concluimos que f é injetora; pois, $f(x_1) = f(x_2)$ quando $x_1 = x_2$.

DEFINIÇÃO:

Seja uma função $f = (\mathcal{F}, A, B)$. Diz-se que f é uma função SOBREJETIVA (ou SOBRE B ou SOBREJETORA) se e somente se $Im(f) = B$; ou seja,
$\forall y \in B, \exists x \in A; y = f(x)$.

EXEMPLOS:

- A função $f(x) = x^2$ não é sobrejetora, pois, por exemplo: $\nexists x \in \mathbb{R}; f(x) = -1$; ou seja, $-1 \notin Im(f) \Rightarrow Im(f) \subset \mathbb{R}$.
  $y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y} \Rightarrow y \geq 0$.
- A função $f(x) = x + 1$ é sobrejetora, pois, $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$; ou seja, $Im(f) = \mathbb{R}$.
  $y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow y \in \mathbb{R}$

DEFINIÇÃO:

Seja uma função $f = (\mathcal{F}, A, B)$. Diz-se que f é uma função BIJETIVA(ou BIJETORA ou uma BIJEÇÃO ou uma CORRESPONDÊNCIA BIUNÍVOCA) se e somente se f é uma função INJETIVA e SOBREJETIVA.

EXEMPLOS:

- A função $f(x) = x^2$ não é injetora e não é sobrejetora; logo, não é bijetora.
- A função $f(x) = x + 1$ é injetora e sobrejetora; logo, é bijetora.

DEFINIÇÃO: (Função Soma)

Sejam as funções $f = (\mathcal{F}, A, B)$ e $g = (\mathcal{G}, A, B)$. Diz-se que a função $(f + g, A, B)$ definida por

$f + g : A \rightarrow B$

$f + g(a) = f(a) + g(a)$

é a função SOMA de f com g.

Assim temos,

$f : A \rightarrow B$	$g : A \rightarrow B$	$f + g : A \rightarrow B$
$a \rightarrow b_1 = f(a)$	$a \rightarrow b_2 = g(a)$	$f + g(a) = b_1 + b_2$

EXEMPLO: Sejam as funções f e g definidas abaixo;

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$	$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$	$f + g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
$a \rightarrow b_1 = f(a) = a^2$	$a \rightarrow b_2 = g(a) = 2a$	$f + g(a) = b_1 + b_2 = a^2 + 2a$

DEFINIÇÃO: (Função Multiplicação)

Sejam as funções $f = (\mathcal{F}, A, B)$ e $g = (\mathcal{G}, A, B)$. Diz-se que a função $(f.g, A, B)$ definida por

$f.g : A \rightarrow B$

$f.g(a) = f(a).g(a)$

é a função MULTIPLICAÇÃO de f e g.

Assim temos,

$$\begin{array}{lll} f : A \rightarrow B & g : A \rightarrow B & f.g : A \rightarrow B \\ a \rightarrow b_1 = f(a) & a \rightarrow b_2 = g(a) & f.g(a) = b_1.b_2 \end{array}$$

EXEMPLO: Sejam as funções f e g definidas abaixo;

$$\begin{array}{llll} f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & & f.g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ a \rightarrow b_1 = f(a) = a^2 & a \rightarrow b_2 = g(a) = 2a & \text{então,} & f.g(a) = b_1.b_2 = a^2.2a = 2a^3 \end{array}$$

DEFINIÇÃO: (Função Divisão)

Sejam as funções $f = (\mathcal{F}, A, B)$ e $g = (\mathcal{G}, A, B)$. Diz-se que a função $(\frac{f}{g}, A, B)$ definida por

$$\frac{f}{g} : A \rightarrow B$$

$$\frac{f}{g}(a) = \frac{f(a)}{g(a)};\, g(a) \neq 0$$

é a função DIVISÃO de f por g.

Assim tem-se,

$$\begin{array}{lll} f : A \rightarrow B & g : A \rightarrow B & \frac{f}{g} : A \rightarrow B \\ a \rightarrow b_1 = f(a) & a \rightarrow b_2 = g(a) & \frac{f}{g}(a) = \frac{b_1}{b_2};\, b_2 \neq 0 \end{array}$$

EXEMPLO: Sejam as funções f e g definidas abaixo;

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$a \rightarrow b_1 = f(a) = a^2 - 1$

$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$a \rightarrow b_2 = g(a) = a + 1$

$$\frac{f}{g} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

então,

$$\frac{f}{g}(a) = \frac{b_1}{b_2} = \frac{a^2-1}{a+1} = \frac{(a-1)(a+1)}{a+1} = a - 1$$

DEFINIÇÃO: (Função Composta)

Sejam as funções $f = (\mathcal{F}, A, B)$ e $g = (\mathcal{G}, B, C)$. Diz-se que a função (gof, A, C) definida por

$gof : A \rightarrow C$

$gof(a) = g(f(a)) = g(b) = c$

é a função COMPOSTA de g com f.

$f : A \rightarrow B \qquad g : B \rightarrow C$

$a \rightarrow b = f(a) \qquad b \rightarrow c = g(b)$

$g o f : A \rightarrow C$

$g o f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$

Exemplo: Sejam as funções f e g definidas abaixo;

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \qquad g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$a \rightarrow b = f(a) = a + 1 \qquad b \rightarrow c = g(b) = b^2 + 3b$

temos as funções: $g o f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e $f o g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$; tais que

$g o f(a) = g(f(a)) = g(a + 1) = (a + 1)^2 + 3(a + 1) = a^2 + 5a + 4$

$f o g(b) = f(g(b)) = f(b^2 + 3b) = b^2 + 3b + 1$

Proposição:

Seja uma função $f = (\mathcal{F}, A, B)$ BIJETIVA então existe uma função $g = (\mathcal{G}, B, A)$ BIJETIVA .

D] Uma função $f = (\mathcal{F}, A, B)$ é BIJETIVA se, e somente se, f é uma função UM PARA UM e é SOBRE B. Vamos agora definir a função $g = (\mathcal{G}, B, A)$;
$g : B \to A$; tal que $b \to g(b) = a$; onde a é o único valor em A para $g(b) = a$ e, isto é possível de ser definido pois, (i) a função f é UM PARA UM; e
(ii) Como f é sobre B, i.é, $Im(f) = B$, tem-se que g está definida para qualquer $b \in B$.
Logo, por (i) e (ii), g é uma função bem definida.
Por outro lado, como f é função temos todos os elementos de A relacionados aos de B o que leva g a ser uma função "sobre A";
Porém, f é injetiva então, essa relação é "um para um" fato que define g também injetiva.
Portanto, g é uma função bijetiva.

DEFINIÇÃO: (Função Invertível)

Seja uma função $f = (\mathcal{F}, A, B)$. Diz-se que f é uma função INVERTÍVEL se e somente se f é BIJETIVA. E ainda, Diz-se que a função bijetiva $g = (\mathcal{G}, B, A)$ é a função INVERSA de f.
NOTAÇÃO: $g = f^{-1}$

Assim tem-se,

$$\begin{array}{ll} f : A \rightarrow B & f^{-1} : B \rightarrow A \\ a \rightarrow b = f(a) & b \rightarrow a = f^{-1}(b) \end{array}$$

Exemplo: Seja a função f bijetiva definida como segue;

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & f^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \rightarrow y = f(x) = x + 1 & y \rightarrow x = f^{-1}(y) \end{array}$$

Como determinar a função inversa: $f^{-1}(y)$?

Inversa à Esquerda

Seja uma função $f = (\mathcal{F}, A, B)$. Diz-se que f é uma **função com inversa à esquerda** sse existir uma função $g = (\mathcal{G}, B, A)$ tal que $(gof)(x) = x = I_A(x), \forall x \in A$.
Neste caso, a função g é dita uma inversa à esquerda para f.

PROPOSIÇÃO:

Uma função $f : A \to B$ tem inversa à esquerda se e somente se f for injetora.

D] ($\Rightarrow$) Por definição, se f é **injetora** então $\forall y \in Im(f) = f(A)$ existe um **único** $x \in A$ tal que $y = f(x)$.
Para $y = f(x)$, vamos escrever $x = g(y)$ o que nos permite definir uma função $g : f(A) \to A$ tal que $g(f(x)) = g(y) = x; \forall x \in A$. Note que, $gof = I_A$.
Completando a definição da função g, para $y \in B - Im(f)$ vamos fixar um $x_0 \in A$ tal que $g(y) = x_0$ e, assim, temos $g : B \to A$; $g(y) = \begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{f}^{-1}(y), \text{ se } y \in Im(f) \\ \mathrm{x}_0, \text{ se } y \notin Im(f) \end{cases}$
($\Leftarrow$) Agora, considerando a g definida, vamos tomar dois elementos quaisquer x_1 e x_2 em A tais que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$ pois g é uma função $g = (\mathcal{G}, Im(f), A) : (f(x_1), x_1) \in \mathcal{G} \wedge (f(x_2), x_2) \in \mathcal{G} \Rightarrow x_1 = x_2$.
Portanto, f é **Injetiva**.

Inversa à Direita

Seja uma função $f = (\mathcal{F}, A, B)$. Diz-se que f é uma **função com inversa à direita** sse existir uma função $g = (\mathcal{G}, B, A)$ tal que $(fog)(y) = y = I_B(y), \forall y \in B$.
Neste caso, a função g é dita UMA INVERSA À DIREITA para f.

Proposição:

Uma função $f : A \rightarrow B$ tem inversa à direita se e somente se f for sobrejetora.

D] ($\Rightarrow$) Por definição, se f é **sobrejetora** então $\forall y \in B, \exists x \in A$ tal que $y = f(x)$. Desta forma, o conjunto $f^{-1}(y)$ não é vazio.
Então, vamos **escolher**(fixar) para cada $y \in B$ um $x \in A$ tal que $y = f(x)$(ou seja, $f^{-1}(y) = x$) e, façamos $g(y) = x$.
Assim, definimos uma função $g : B \rightarrow A$ tal que $f(g(y)) = y; \forall y \in B$. Note que, $fog = I_B$.
Logo, g é uma inversa à direita de f.
($\Leftarrow$) Se existe $g : B \rightarrow A$ tal que $fog = I_B$
então, $\forall y \in B$, fazendo $x = g(y)$, temos $f(x) = f(g(y)) = y$.
Portanto, f é **Sobrejetiva**.

Definição: (Função Invertível)

Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Diz-se que $g : B \rightarrow A$ é a inversa da função f sse:

- $(gof) = Id_A \Rightarrow (gof)(a) = a, \forall a \in A$
- $(fog) = Id_B \Rightarrow (fog)(b) = b, \forall b \in B$

Isto é, sse g é inversa à esquerda e à direita para f.

PROPOSIÇÃO:

"Se a INVERSA de f existe então ela é única "

D] Para provar a unicidade da inversa, vamos supor, por absurdo, que as funções $g: B \rightarrow A$ e $h: B \rightarrow A$ sejam funções inversas de f.
Então, $gof(a) = I_A(a)$ e $fog(b) = I_B(b)$. Do mesmo modo, $hof(a) = I_A(a)$ e $foh(b) = I_B(b)$.
Por propriedade da composição de funções, sendo a função indentidade o elemento neutro, temos:
$h = hoI_B = ho(fog) = (hof)og = I_Aog = g$
$g = goI_B = go(foh) = (gof)oh = I_Aoh = h$
Portanto, $h = g$.

Função Invertível

Exemplo: Seja a função f bijetiva definida como segue;

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad$ $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$x \to y = f(x) = x + 1$ $\quad$ $y \to x = f^{-1}(y)$

Pela definição de funções invertíveis; tem-se que,

$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = I_A(a)$

e, por outro lado; $f(a) = f(f^{-1}(b)) = I_B(b)$;

Então,

$y = f(x) = x + 1$; e, $x = f^{-1}(y)$;$f^{-1}(y) = ?$

Aplicando a função f temos,

$f(x) = f(f^{-1}(y))$

$x + 1 = I_{\mathbb{N}}(y)$

$x + 1 = y$

$x = y - 1$

Logo,

$f^{-1}(y) = y - 1.$

Função Invertível

Exemplo: Seja a função f bijetiva definida como segue;

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $\qquad$ $f^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$x \rightarrow y = f(x) = x + 1$ $\qquad$ $y \rightarrow y - 1$

Pela definição de funções invertíveis; tem-se que,

$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = I_A(a)$

Então,

$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x + 1) = (x + 1) - 1 = x = I_A(x)$

e, por outro lado;

$f(x) = f(f^{-1}(y)) = f((y - 1)) = (y - 1) + 1 = y = I_B(y)$.

Portanto, a f^{-1} encontrada é inversa à esquerda e à direita de f.

Exercícios - Funções

(1) Verifique se as funções de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ definidas abaixo são injetoras.

  (a) $f(x) = x - 1$
  (b) $f(x) = x^2 + 1$
  (c) $f(x) = x^3$
  (d) $f(x) = 2x^2$

(2) Verifique se as funções definidas no exercício anterior são sobrejetoras.

Exercícios - Funções

(3) Dê um exemplo de uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ que seja

- (a) injetora mas não sobrejetora
- (b) sobrejetora mas não injetora
- (c) injetora e sobrejetora
- (d) não seja injetora e nem sobrejetora

(4) Verifique se as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas abaixo são bijetoras.

- (a) $f(x) = 3x - 4$
- (b) $f(x) = -3x^2 + 7$
- (c) $f(x) = \frac{(x+1)}{(x+2)}$
- (d) $f(x) = x^5 + 1$

Exercícios - Funções

(5) Verifique se as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas abaixo são bijetoras.

- (a) $f(x) = 2x + 1$
- (b) $f(x) = x^2 + 1$
- (c) $f(x) = x^3$
- (d) $f(x) = \frac{(x^2+1)}{(x^2+2)}$

(6) Determine, se possível, a inversa das funções do exercício anterior.

(7) Sejam as funções $g : A \rightarrow B$ e $f : B \rightarrow C$.

- (a) Mostre que se as funções f e g são funções injetivas, então $f o g$ também é injetiva.
- (b) Mostre que se as funções f e g são funções sobrejetivas, então $f o g$ também é sobrejetiva.

Exercícios - Funções

(8) Sejam as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x + 2$. Determine,

(a) fog e gof

(b) $f + g$ e $f.g$

(9) Sejam as funções $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$; onde a, b, c, d são constantes. Verifique para quais valores das constantes tem-se que $fog = gof$.

(10) Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax + b$, com a, b constantes; $a \neq 0$. Mostre que f é invertível e, em seguida, ache a sua inversa.

(11) Sejam as funções invertíveis $f : A \to B$ e $g : C \to A$. Mostre que a composta fog é invertível e $(fog)^{-1} = g^{-1} o f^{-1}$.

DEFINIÇÃO:

Sejam A e B conjuntos não vazio. A função $f = (\mathcal{F}, A, B)$ é denominada FUNÇÃO LINEAR de A em B tal que,

$$\begin{aligned} f : \quad & A \rightarrow B \\ & x \rightarrow y = ax; a \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

EXEMPLO:

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \rightarrow y = 2x; \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO: O conjunto imagem de f é $\mathbb{R}$:
$y = f(x) = ax; a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{y}{a}; a \neq 0.$
Ou seja, $\forall y \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$.

Proposição:

A função linear é **bijetora**.

D]: Seja $f : A \rightarrow B$ tal que $y = f(x) = ax; a \neq 0$ a função linear.
Por definição, uma função bijetora é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.
Vamos provar que
(i) f é injetora:
Para x_1 e $x_2 \in A$ temos, $f(x_1) = ax_1$ e $f(x_2) = ax_2$.
Supondo $x_1 \neq x_2$ e igualando $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow ax_1 = ax_2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \;\Rightarrow\; F(contradição)$
Logo, para $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f$ é injetora.
(i) f é sobrejetora:
Temos que $Im(f) = Codom(f) = \mathbb{R}$ pois $y = f(x) = ax; a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{y}{a}; a \neq 0$.
Ou seja, $\forall y \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$.
Concluimos que f é sobrejetora.
Portanto, por (i) e (ii) provamos que f é uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Corolário:

A função linear é **invertível**.

D]: Por definição, uma função é invertível sse ela possui inversa à esquerda e à direita, ou seja ela for bijetora.
Neste caso, como a função linear $f : A \rightarrow B$ tal que $y = f(x) = ax; a \neq 0$ é bijetora então, é invertível.
Determinando a inversa de f:
$f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que $y \rightarrow x = f^{-1}(y)$
$f^{-1}(y) = x \Rightarrow f(f^{-1}(y)) = f(x) \Rightarrow I_y = f(x) \Rightarrow y = ax; a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{y}{a}; a \neq 0$
Logo, $f^{-1}(y) = \frac{y}{a}; a \neq 0.$
Note que $f(f^{-1}(y)) = f(\frac{y}{a}) = a(\frac{y}{a}) = y = I_B$
E, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(ax) = (\frac{ax}{a}) = x = I_A$
f^{-1} é a inversa à esquerda e à direita para f.

DEFINIÇÃO:

Sejam A e B conjuntos não vazio. A função $f = (\mathcal{F}, A, B)$ é denominada FUNÇÃO AFIM de A em B tal que,

$$\begin{aligned} f: \quad & A \rightarrow B \\ & x \rightarrow y = ax + b;\ a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

onde, a é denominado COEFICIENTE ANGULAR e b é denominado COEFICIENTE LINEAR.

EXEMPLO:

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \rightarrow y = 2x + 3; \end{aligned}$$

onde, os $a = 2$ é o coeficiente angular e $b = 3$ é o coeficiente linear.

OBSERVAÇÃO:

- O conjunto imagem de f é $\mathbb{R}$:
  $y = f(x) = ax + b; a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{y-b}{a} = \frac{y}{a} - \frac{b}{a}; a \neq 0.$
  Ou seja, $\forall y \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$.
- No plano cartesiano a função afim é uma reta cuja **declividade** é definida pelo COEFICIENTE ANGULAR.
- A reta que representa uma função afim no plano cartesiano passa pela origem apenas quando $b = 0$. Ou seja, quando a função afim é também linear.
- No plano cartesiano a função afim é uma reta que intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, b)$ e intercepta o eixo das abscissas no ponto $(-\frac{b}{a}, 0)$; $a \neq 0$.
  Note que $-\frac{b}{a}$ é O ZERO da função afim: $y = ax + b; a \neq 0$; para
  $y = 0 \Rightarrow 0 = ax + b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$.

Definição:

Sejam A e B conjuntos não vazio. A função $f = (\mathcal{F}, A, B)$ é denominada FUNÇÃO MODULAR de A em B tal que,

$$\begin{aligned} f: \quad & A \rightarrow B \\ & x \rightarrow y = |x| \end{aligned}$$

Ou seja, $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

EXEMPLO:

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \rightarrow y = |2x+3|; \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, \text{ se } 2x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2} \\ -2x-3, \text{ se } 2x+3 < 0 \Rightarrow x < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO:

- O conjunto imagem de f é $\mathbb{R}_+$:
  $y = f(x) = |x| \geq 0$.
  Ou seja, $\forall y \in \mathbb{R}_+$ existe $\pm x \in \mathbb{R}$.
- No plano cartesiano a função modular é a união de duas semi-retas, as bissetrizes do 1 e 2 quadrantes, de origem no ponto $(0, 0)$.
- A função modular não é injetora (para $x_1 = -x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$) e nem sobrejetora($\forall y \in \mathbb{R}^*_-; y \notin Im(f)$).

EXEMPLO:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = |x+2| + x - 1;$$

Podemos escrever $f(x) = g(x) + h(x)$ tais que, $g(x) = |x+2|$ e $h(x) = x - 1$.

Assim, $g(x) = \begin{cases} x+2, \text{ se } x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ -x-2, \text{ se } x+2 < 0 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$

Então, vamos estudar os valores da $f(x)$ para os dois casos: (i)$x \geq -2$ ou (ii)$x < -2$.

(i) Para $x \geq -2$:

$f(x) = g(x) + h(x) = (x+2) + (x-1) = 2x + 1$

(ii) Para $x < -2$:

$f(x) = g(x) + h(x) = (-x-2) + (x-1) = -3$

Portanto,

$f(x) = \begin{cases} 2x+1, \text{ se } x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ -3, \text{ se } x+2 < 0 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$

Exercícios - Funções

(1) Verifique se as funções de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ definidas abaixo são injetoras.

   (a) $f(x) = x - 1$
   (b) $f(x) = x^2 + 1$
   (c) $f(x) = x^3$
   (d) $f(x) = 2x^2$

(2) Verifique se as funções definidas no exercício anterior são sobrejetoras.

Exercícios - Funções

(3) Dê um exemplo de uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ que seja

- (a) injetora mas não sobrejetora
- (b) sobrejetora mas não injetora
- (c) injetora e sobrejetora
- (d) não seja injetora e nem sobrejetora

(4) Verifique se as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas abaixo são bijetoras.

- (a) $f(x) = 3x - 4$
- (b) $f(x) = -3x^2 + 7$
- (c) $f(x) = \frac{(x+1)}{(x+2)}$
- (d) $f(x) = x^5 + 1$

Exercícios - Funções

(5) Verifique se as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas abaixo são bijetoras.

(a) $f(x) = 2x + 1$
(b) $f(x) = x^2 + 1$
(c) $f(x) = x^3$
(d) $f(x) = \frac{(x^2+1)}{(x^2+2)}$

(6) Determine, se possível, a inversa das funções do exercício anterior.

(7) Sejam as funções $g : A \rightarrow B$ e $f : B \rightarrow C$.

(a) Mostre que se as funções f e g são funções injetivas, então $f o g$ também é injetiva.
(b) Mostre que se as funções f e g são funções sobrejetivas, então $f o g$ também é sobrejetiva.

Exercícios - Funções

(8) Sejam as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x + 2$. Determine,

- (a) fog e gof
- (b) $f + g$ e $f.g$

(9) Sejam as funções $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$; onde a, b, c, d são constantes. Verifique para quais valores das constantes tem-se que $fog = gof$.

(10) Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = ax + b$, com a, b constantes; $a \neq 0$. Mostre que f é invertível e, em seguida, ache a sua inversa.

(11) Sejam as funções invertíveis $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow A$. Mostre que a composta fog é invertível e $(fog)^{-1} = g^{-1} o f^{-1}$.

Exercícios - Funções

(12) Sejam as funções $f(x) = x - 5$ e $g(x) = x^4 + 4$.
Então, podemos afirmar que

(1) A função f é BIJETORA se for definida $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mas não será se for definida $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.
(2) A função g é BIJETORA se for definida $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ mas não será se for definida $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.
(3) Para $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ temos que a função $(f + g)(1) + (f + g)(-1) = 0$.
(4) Para $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$; a função $(f o g)(a) = (f o g)(-a)$; $\forall a \in \mathbb{Z}$.

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas as afirmações (1) e (2) são corretas.
(b) Apenas as afirmações (3) e (4) são corretas.
(c) Apenas as afirmações (1), (2) e (3) são corretas.
(d) Apenas as afirmações (2), (3) e (4) são corretas.
(e) Nenhuma das alternativas anteriores.

(1),(2) $f:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$

(a) $f(x) = x - 1$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x_1) = x_1 - 1; f(x_2) = x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ é injetiva.

$\forall y \in \mathbb{Z}; y = f(x).$

$y = f(x) = x - 1 \Rightarrow x = y + 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

Logo, $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z}; y = f(x) \Rightarrow f$ é sobrejetiva.

(1),(2) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

(b) $f(x) = x^2 + 1$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x_1) = x_1^2 + 1; f(x_2) = x_2^2 + 1 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1$

$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow f$ não é injetiva.

$\forall y \in \mathbb{Z}; y = f(x)$.

$y = f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow x = \sqrt{y - 1} \Rightarrow y \in \mathbb{Z}_+$

Logo, $\forall y \in \mathbb{Z}_+, \exists x \in \mathbb{Z}; y = f(x) \Rightarrow f$ não é sobrejetiva.

Exercícios - Funções

(1),(2) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

(c) $f(x) = x^3$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x_1) = x_1^3; f(x_2) = x_2^3 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ é injetiva.

$\forall y \in \mathbb{Z}; y = f(x)$.

$y = f(x) = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y \in \mathbb{Z}$

Logo, $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z}; y = f(x) \Rightarrow f$ é sobrejetiva.

(1),(2) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

(d) $f(x) = 2x^2$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x_1) = 2x_1^2; f(x_2) = 2x_2^2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1^2 = 2x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow f$ não é injetiva.

$\forall y \in \mathbb{Z}; y = f(x)$.

$y = f(x) = 2x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}y} \Rightarrow y \in \mathbb{Z}; y \geq 0$

Logo, $\forall y \in \mathbb{Z}; y \geq 0, \exists x \in \mathbb{Z}; y = f(x) \Rightarrow f$ não é sobrejetiva.

Exercícios - Funções

(4) Verifique se as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas abaixo são bijetoras.

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = 3x - 4$
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) = 3x_1 - 4; f(x_2) = 3x_2 - 4 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 4 = 3x_2 - 4$
$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ é injetiva.
$\forall y \in \mathbb{R}; y = f(x)$.
$y = f(x) = 3x - 4 \Rightarrow x = \frac{(y+4)}{3} \Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}; y = f(x) \Rightarrow f$ é sobrejetiva. $\Rightarrow f$ também é bijetiva.

(4) Verifique se as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas abaixo são bijetoras.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = -3x^2 + 7$
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) = -3x_1^2 + 7;\ f(x_2) = -3x_2^2 + 7 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -3x_1^2 + 7 = -3x_2^2 + 7$
$\Rightarrow -3x_1^2 = -3x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow f$ não é injetiva $\Rightarrow f$ também não é bijetiva.

Exercícios - Funções

(4) Verifique se as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas abaixo são bijetoras.

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};\ f(x) = \frac{(x+1)}{(x+2)}$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) = \frac{(x_1+1)}{(x_1+2)}; f(x_2) = \frac{(x_2+1)}{(x_2+2)} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{(x_1+1)}{(x_1+2)} = \frac{(x_2+1)}{(x_2+2)}$

$\Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 2) = (x_1 + 2)(x_2 + 1)$

$\Rightarrow x_1 x_2 + 2x_1 + x_2 + 2 = x_1 x_2 + x_1 + 2x_2 + 2$

$\Rightarrow 2x_1 + x_2 = x_1 + 2x_2$

$\Rightarrow 2x_1 - x_1 = 2x_2 - x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ é injetiva.

$\forall y \in \mathbb{R}; y = f(x)$.

$y = f(x) = \frac{(x+1)}{(x+2)} \Rightarrow y(x + 2) = x + 1 \Rightarrow yx + 2y - x = 1 \Rightarrow x(y - 1) = 1 - 2y$

$\Rightarrow x = \frac{1-2y}{y-1} \Rightarrow \forall y \in \mathbb{R} - \{1\}, \exists x \in \mathbb{R}; y = f(x) \Rightarrow f$ não é sobrejetiva. $\Rightarrow f$ também não é bijetiva.

(4) Verifique se as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas abaixo são bijetoras.

(d) $f(x) = x^5 + 1$ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^5 + 1$
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x_1) = x_1^5 + 1; f(x_2) = x_2^5 + 1 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^5 + 1 = x_2^5 + 1$
$\Rightarrow x_1^5 = x_2^5 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ é injetiva.
$\forall y \in \mathbb{R}; y = f(x)$.
$y = f(x) = x^5 + 1 \Rightarrow y = x^5 + 1 \Rightarrow x^5 = y - 1 \Rightarrow x = \sqrt[5]{y-1}; \exists x \in \mathbb{R}; y = f(x) \Rightarrow$
f é sobrejetiva. $\Rightarrow f$ também é bijetiva.

Exercícios - Funções

(5) Verifique se as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas abaixo são bijetoras.

(a) $f(x) = 2x + 1$ R] (Sim)
(b) $f(x) = x^2 + 1$ R] (Não)
(c) $f(x) = x^3$ R] (Sim)
(d) $f(x) = \frac{(x^2+1)}{(x^2+2)}$ R] (Não)

(6) Determine, se possível, a inversa das funções do exercício anterior.

(a) $f(x) = 2x + 1$
Temos que $f o f^{-1} = f^{-1} o f = \mathcal{I}_{\mathbb{R}}$
$\Rightarrow f(f^{-1}(y)) = \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(y) \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow 2x + 1 = y \Rightarrow x = \frac{(y-1)}{2}$
$\Rightarrow f^{-1}(y) = x \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{(y-1)}{2}$

(c) $f(x) = x^3$
$f(f^{-1}(y)) = \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(y) \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow x^3 = y \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$
$\Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

(7) Sejam as funções $g : A \rightarrow B$ e $f : B \rightarrow C$.

(a) Mostre que se as funções f e g são funções injetivas, então $f o g$ também é injetiva.

D] Sejam $x, y \in A$; $(f o g)(x) = (f o g)(y) \Rightarrow f(g(x)) = f(g(y))$.
Como f é injetiva $\Rightarrow g(x) = g(y)$.
E ainda, g é injetiva $\Rightarrow x = y$.
Logo, $f o g$ também é injetiva.

(7) Sejam as funções $g : A \rightarrow B$ e $f : B \rightarrow C$.

(b) Mostre que se as funções f e g são funções sobrejetivas, então $f o g$ também é sobrejetiva.

D] Temos que f é sobrejetiva $\Rightarrow \forall y \in C, \exists x \in B; f(x) = y$.
E, por hipótese, g também é sobrejetiva $\Rightarrow \forall x \in B, \exists z \in A; g(z) = x$.
Portanto, $\forall y \in C \Rightarrow y = f(x) = f(g(z)) = f o g(z) \Rightarrow \exists z \in A; f o g(z) = y$.
Logo, $f o g : A \rightarrow C$ também é sobrejetiva.

(8) Sejam as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x + 2$. Determine,

(a) $f o g$ e $g o f$

R] $(f o g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2 + 1 = x^2 + 2x + 4 + 1 = x^2 + 2x + 5$

$(g o f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = x^2 + 1 + 2 = x^2 + 3$

(b) $f + g$ e $f.g$

R] $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 1 + x + 2 = x^2 + x + 3$

$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x^2+1).(x+2) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

(9) Sejam as funções $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$; onde a, b, c, d são constantes. Verifique para quais valores das constantes temos que $f o g = g o f$.

R] $f o g = g o f \Rightarrow f(g(x)) = g(f(x)) \Rightarrow f(cx + d) = g(ax + b)$
$\Rightarrow a(cx + d) + b = c(ax + b) + d \Rightarrow a(cx) + (ad) + b = c(ax) + (cb) + d$
$\Rightarrow ac(x) + (ad + b) = ca(x) + (cb + d) \Rightarrow (ad + b) = (d + cb) \Rightarrow d(a - 1) = b(c - 1)$
$\Rightarrow d = \frac{b(c-1)}{(a-1)}; a \neq 1; \forall c, b.$

(10) Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax + b$, com a, b constantes; $a \neq 0$. Mostre que f é invertível e, em seguida, ache a sua inversa.

D] Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax + b$, com a, b constantes; $a \neq 0$.

(i) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) = a(x_1) + b$ e $f(x_2) = a(x_2) + b$;

supondo que f não seja injetiva; $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$; $f(x_1) = f(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$

$\Rightarrow a(x_1) + b = a(x_2) + b \Rightarrow a(x_1) + b - b = a(x_2) + b - b \Rightarrow a(x_1) = a(x_2)$ e por hipótese $a \neq 0 \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}$; $\frac{1}{a}a(x_1) = \frac{1}{a}a(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ absurdo! Logo, f é injetiva.

Ou seja, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

(ii) Supondo que f seja sobrejetiva

$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}; y = f(x) \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a}$; $a \neq 0$.

então, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = f(\frac{(y-b)}{a})$; $a \neq 0 \Rightarrow f(x) = a(\frac{(y-b)}{a}) + b$; $a \neq 0 \Rightarrow f(x) = (y - b) + b$ $\Rightarrow f(x) = y$. Logo, f é sobrejetiva! Ou seja, $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}; y = f(x)$.

Por (i) e (ii), temos que f é bijetora $\Rightarrow f$ é invertível!

(10) Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = ax + b$, com a, b constantes; $a \neq 0$. Mostre que f é invertível e, em seguida, ache a sua inversa.

R] Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = ax + b$, com a, b constantes; $a \neq 0$.
então, $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f^{-1}(y) = x$.
Temos que $f o f^{-1} = f^{-1} o f = \mathcal{I}_{\mathbb{R}}$
$\Rightarrow f(f^{-1}(y)) = \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(y) \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow ax + b = y \Rightarrow x = \frac{(y-b)}{a}$; $a \neq 0$
$\Rightarrow f^{-1}(y) = x \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{(y-b)}{a}$; $a \neq 0$

(11) Sejam as funções invertíveis $f : A \to B$ e $g : C \to A$. Mostre que a composta $f o g$ é invertível e $(f o g)^{-1} = g^{-1} o f^{-1}$.

D] Sejam as funções $f : A \to B$ e $g : C \to A$.
Na questão (7), Mostramos que se as funções f e g são funções injetivas, então $f o g$ também é injetiva. E ainda, se as funções f e g são funções sobrejetivas, então $f o g$ também é sobrejetiva. Portanto, $f o g$ sendo bijetiva possui inversa.
$f : A \to B; f(a) = b \Rightarrow f^{-1} : B \to A; f^{-1}(b) = a.$
$g : C \to A; g(c) = a \Rightarrow g^{-1} : A \to C; g^{-1}(a) = c.$
$(f o g) : C \to B; (f o g)(c) = b; \Rightarrow (f o g)^{-1} : B \to C; \ (f o g)^{-1}(b) = c$
Então, $(f o g)^{-1}(b) = c = g^{-1}(a) = g^{-1}(f^{-1}(b)) = (g^{-1} o f^{-1})(b)$.
Logo, $(f o g)^{-1} = g^{-1} o f^{-1}$.

Exerccios - Funções

(12) Respostas RESPOSTA (b)
Sejam as funções $f : A \rightarrow B$ tal que $f(x) = x - 5$ e $g : C \rightarrow D$ tal que $g(x) = x^4 + 4$. Então, podemos afirmar que

(1.) A função f é BIJETORA se for definida em $A = B = \mathbb{N}$ mas não será se for definida em $A = B = \mathbb{Z}$.
(F)
$f(x) = x - 5$
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x_1) = x_1 - 5; f(x_2) = x_2 - 5 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 5 = x_2 - 5 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ é injetiva.
$\forall y \in \mathbb{Z}; y = f(x)$.
$y = f(x) = x - 5 \Rightarrow x = y + 5 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$
Logo, $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z}; y = f(x) \Rightarrow f$ é sobrejetiva.
Conclusão: f é bijetora em $\mathbb{Z}$ portanto também em $\mathbb{N}$.

Sejam as funções $f : A \to B$ tal que $f(x) = x - 5$ e $g : C \to D$ tal que $g(x) = x^4 + 4$. Então, podemos afirmar que

(2.) A função g é BIJETORA se for definida em $C = \mathbb{N}$ e $D = \mathbb{N}^*$ mas não será se for definida em $C = D = \mathbb{Z}$.
(F)
$g(x) = x^4 + 4$
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow g(x_1) = x_1^4 + 4; g(x_2) = x_2^4 + 4 \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$
$\Rightarrow x_1^4 + 4 = x_2^4 + 4 \Rightarrow x_1^4 = x_2^4 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow f$ não é injetiva em $\mathbb{Z}$ mas será em $\mathbb{N}$.
$\forall y \in \mathbb{Z}; y = f(x)$.
$y = g(x) = x^4 + 4 \Rightarrow y - 4 = x^4 \Rightarrow x = \sqrt[4]{y-4} \Rightarrow y \geq 4$
$\forall y \in \mathbb{Z}_+ - 0, 1, 2, 3, \exists x \in \mathbb{Z}; y = g(x) \Rightarrow g$ é sobrejetiva.
Conclusão: g não é sobrejetiva em $\mathbb{Z}$ e nem $\mathbb{N}$ pois $y \geq 4$.

Sejam as funções $f: A \rightarrow B$ tal que $f(x) = x - 5$ e $g: C \rightarrow D$ tal que $g(x) = x^4 + 4$. Então, podemos afirmar que

(3.) A função $(f+g)(1) + (f+g)(-1) = 0$ para $A = B = C = D = \mathbb{Z}$.
(V)
$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x-5) + (x^4+4) = x^4 + x - 1 \Rightarrow (f+g)(1) = 1^4 + 1 - 1 = 1; (f+g)(-1) = (-1)^4 - 1 - 1 = -1 \Rightarrow (f+g)(1) + (f+g)(-1) = 0$

(4.) Sejam $A = B = C = D = \mathbb{Z}$. A função $(fg)(a) = (fg)(-a);\ \forall a \in \mathbb{Z}$.
(V)
$(fg)(x) = f(g(x)) = f(x^4+4) = (x^4+4) - 5 = x^4 - 1 \Rightarrow (fg)(a) = a^4 - 1; (fg)(-a) = (-a)^4 - 1 \Rightarrow (fg)(a) = (fg)(-a) = a^4 - 1; \forall a \in \mathbb{Z}$