Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Departamento de Matemática

MATA42 - Matemática Discreta I

Aulas - Produto Cartesiano e Relações

Definição e Propriedades

Professora: Isamara

DEFINIÇÃO: (Par Ordenado)

Dados dois elementos, a e b, denomina-se PAR ORDENADO, um terceiro elemento que se indica por (a, b) respeitando a ordem que os elementos a e b aparecem; ou seja, a é o primeiro elemento(ou primeira coordenada) do par e b é o segundo (ou segunda coordenada).

OBSERVAÇÃO.1: Em geral, $(a, b) \neq (b, a)$.

DEFINIÇÃO: (Igualdade Pares Ordenados)

Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) dizem-se iguais se e somente se $a = c$ e $b = d$.
Isto é, $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$.

OBSERVAÇÃO.2: $(a, b) = (b, a) \Leftrightarrow a = b$.
. (a, a) é denominado "PAR ORDENADO IDÊNTICO .

Definição: (Produto Cartesiano)

Sejam os conjuntos não vazios $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Chama-se Produto Cartesiano (ou Produto Cruzado) de A por B ao conjunto de todos os pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$.
Notação: $A \times B$ lê-se: " A por B ", " A vezes B " ou " A cartesiano B ".
$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$

Exemplos:

Sejam $A := \{1, 2, 3\}$ e $B := \{4, 5\}$. Então;
$A \times B := \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$
$B \times A := \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$
$A \times A := \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
$B \times B := \{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$
Note que para $A \neq B$ tem-se que $A \times B \neq B \times A$. Ou seja, não é válida a **propriedade comutativa**.

Diagrama Cartesiano

Exemplos:

$A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$.

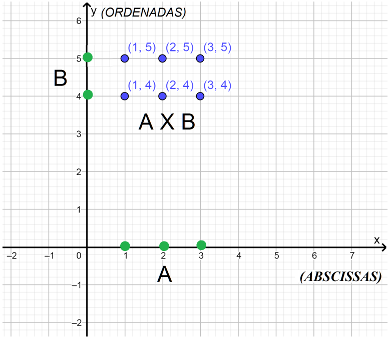
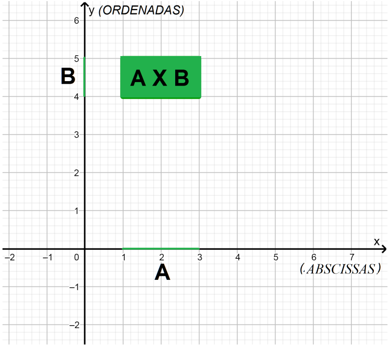


Diagrama Cartesiano

Exemplos:

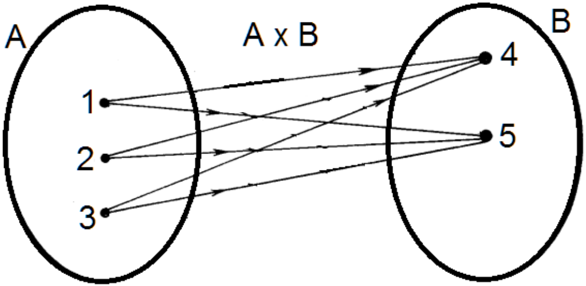
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x \leq 5\}$



Representação - Diagrama Sagital

Exemplos:

1. $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$.



Representação - Tabela

Exemplos:

1. $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$.

A \ B	4	5
1	(1,4)	(1,5)
2	(2,4)	(2,5)
3	(3,4)	(3,5)

Observação.3:

Seja o conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Então,
$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.
D]: Sabemos que $A \times \emptyset := \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in \emptyset\}$; porém, o conjunto $\emptyset$ não possui elementos, então não existe o elemento b em $\emptyset$; portanto $A \times \emptyset = \emptyset$.

Sejam os conjuntos $A, B, C, D \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

(i) Distributividade do Produto Cartesiano em relação à interseção:
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
Dem:
$A \times (B \cap C) = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B \cap C\} = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } (y \in B \text{ e } y \in C)\} = \{(x, y) \mid (x \in A \text{ e } y \in B) \text{ e } (x \in A \text{ e } y \in C)\} = \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B \text{ e } (x, y) \in A \times C\} = (A \times B) \cap (A \times C).\Box$

(ii) Distributividade do Produto Cartesiano em relação à união:
$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(iii) Distributividade do Produto Cartesiano em relação à diferença:
$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

(iv) Distributividade do Produto Cartesiano em relação à diferença simétrica:
$A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$.

(v) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

DEFINIÇÃO: (Produto Cartesiano com n conjuntos)

Sejam os conjuntos não vazios $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$; $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$. Chama-se PRODUTO CARTESIANO dos n conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$, pela **ordem** em que estão escritos, ao conjunto de todas as **n-uplas** $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ tais que $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, x_n \in A_n$.
NOTAÇÃO: $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ ou $\prod_{i=1}^{n} A_i$
Os conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são denominados FATORES DO PRODUTO CARTESIANO, sendo A_i o i-ésimo fator; $\forall i = 1, \cdots, n$.
$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, x_n \in A_n\}$

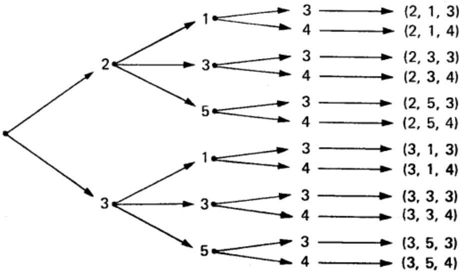
Note que a CARDINALIDADE do produto cartesiano é obtida pelo produto das respectivas cardinalidades:

$$\#(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \#(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = \#A_1 \times \#A_2 \times \cdots \times \#A_n$$

EXEMPLO: (Produto Cartesiano com 3 conjuntos)

Sejam os conjuntos $A_1 = \{2, 3\}, A_2 = \{1, 3, 5\}, A_3 = \{3, 4\}$.
$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, x_3 \in A_3\}$

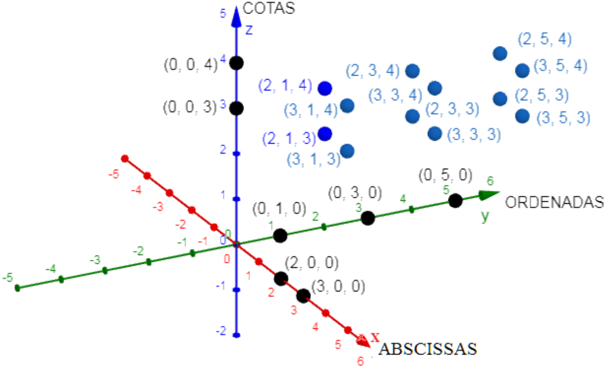
DIAGRAMA DA ÁRVORE do produto cartesiano: $A_1 \times A_2 \times A_3$:



$\#(\prod_{i=1}^{3} A_i) = \#(A_1 \times A_2 \times A_3) = \#A_1 \times \#A_2 \times \#A_n = 2x3x2 = 12$

Diagrama Cartesiano

Exemplos: $A_1 = \{2, 3\}, A_2 = \{1, 3, 5\}, A_3 = \{3, 4\}$.
$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, x_3 \in A_3\}$.



Relações

DEFINIÇÃO: (Relações)

Sejam os conjuntos $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO (binária) de A para B(ou de A em B) se e somente se $\mathcal{R} \subseteq A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$.
Podemos denotar por $x\mathcal{R}y$ o par $(x, y) \in \mathcal{R}$
(lê-se: x *está* $\mathcal{R}$*-relacionado a* y ou x *erre* y)
Caso contrário, se o par $(x, y) \notin \mathcal{R}$ denota-se $x \not\mathcal{R} y$ e lê-se: x *não erre* y

EXEMPLO:

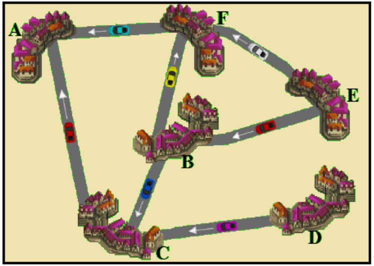
Sejam $A := \{2, 4\}$ e $B := \{3, 5\}$.
Então; $A \times B := \{(2, 3), (2, 5), (4, 3), (4, 5)\}$
e seja, a relação $\mathcal{R} \subseteq A \times B$; $\mathcal{R} := \{(2, 3), (4, 5)\}$

$\mathcal{R} \subseteq A \times B : \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$

Relações

Exemplo: (Aplicação)

Seja o conjunto das cidades de um determinado estado; e seja $\mathcal{R}$ uma relação, definida neste conjunto, que representa a existência de estrada da cidade x para y.
$\mathcal{R} := \{(x, y) \mid x$ é a cidade de origem da estrada com destino para a cidade $y\}$.



$\mathcal{R}$	A	B	C	D	E	F
A						
B			X			X
C	X					
D			X			
E		X				X
F	X					

$\mathcal{R} := \{(B, C), (B, F), (C, A), (D, C), (E, B), (E, F), (F, A)\}$.
Note que, por exemplo, os pares $(A, B), (C, D) \notin \mathcal{R}$ pois $A \not\mathcal{R} B$ e $C \not\mathcal{R} D$.

Definição: (Domínio e Imagem)

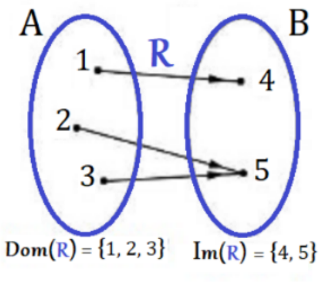
Sejam os conjuntos $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ e $\mathcal{R}$ uma relação em $A \times B$.
Dizemos que;

(i) O Domínio de $\mathcal{R}$ é o conjunto;
$Dom(\mathcal{R}) := \{x \in A \mid (x, y) \in \mathcal{R}$ para algum $y \in B\}$.

(ii) A Imagem de $\mathcal{R}$ é o conjunto;
$Im(\mathcal{R}) := \{y \in B \mid (x, y) \in \mathcal{R}$ para algum $x \in A\}$.

Observação.6: Os conjuntos $Dom(\mathcal{R})$ e $Im(\mathcal{R})$ são subconjuntos de A e B, respectivamente; ou seja, $Dom(\mathcal{R}) \subseteq A$ e $Im(\mathcal{R}) \subseteq B$;
onde B é o contra-domínio da relação.

Exemplo:
Sejam $A := \{1, 2, 3\}$ e $B := \{4, 5\}$.
Então; $A \times B := \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$
e seja, a relação $\mathcal{R} \subseteq A \times B$; $\mathcal{R} := \{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\}$
Pela representação no diagrama sagital, temos:



OBSERVAÇÃO.5:

Seja o conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma ENDORELAÇÃO ou (Auto-relação) em A se e somente se $\mathcal{R} \subseteq A \times A := \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in A\}$.

EXEMPLO:

Seja $A := \{1, 2, 3\}$, Então;
$A \times A := \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$
e seja, a relação $\mathcal{R} \subseteq A \times A$; tal que, $\mathcal{R} := \{(x, y) \mid x > y\} = \{(2,1),(3,1),(3,2)\}$
Neste caso, o conjunto domínio $Dom(\mathcal{R}) = \{2, 3\}$ e o conjunto imagem $Im(\mathcal{R}) = \{1, 2\}$.

Definição.1: (Relação Reflexiva)

Seja $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO REFLEXIVA se e somente se

$$\forall x \in A; (x, x) \in \mathcal{R};$$

ou seja, $\nexists x$ tal que $x \in A \wedge (x, x) \notin \mathcal{R}$.

EXEMPLO: $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$
Seja $A := \{1, 2, 3\}$.
Então; a relação $\mathcal{R} \subseteq A \times A$; $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3)\}$ é reflexiva.
Enquanto que a relação $\mathcal{S} \subseteq A \times A$; $\mathcal{S} = \{(1, 1), (2, 2), (1, 3)\}$ não é reflexiva.

DEFINIÇÃO.2: (Relação Irreflexiva)

Seja $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO IRREFLEXIVA se e somente se

$$\forall x \in A; (x, x) \notin \mathcal{R}$$

ou seja, $\nexists x$ tal que $x \in A \wedge (x, x) \in \mathcal{R}$.

EXEMPLO: $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \mid \ x \neq y\}$
Seja $A := \{1, 2, 3\}$.
Então; a relação $\mathcal{R} \subseteq A \times A$; $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}$ é irreflexiva.
Enquanto que a relação $\mathcal{S} \subseteq A \times A$; $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, 3)\}$ não é reflexiva e nem irreflexiva.

Relações - Propriedades

OBSERVAÇÃO.7:

Uma relação $\mathcal{R}$ REFLEXIVA não pode ser ao mesmo tempo IRREFLEXIVA. Todavia, se uma relação $\mathcal{R}$ não é REFLEXIVA não podemos afirmar que esta é IRREFLEXIVA; do mesmo modo, se uma relação $\mathcal{R}$ não é IRREFLEXIVA não podemos afirmar que esta é REFLEXIVA.

DEFINIÇÃO.3: (Relação Simétrica)

Seja $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO SIMÉTRICA se e somente se

$$\forall x, y \in A; (x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R};$$

ou seja, $\nexists x, y$ tais que $x, y \in A \wedge (x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, x) \notin \mathcal{R}$.

EXEMPLO: $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$
Seja $A := \{1, 3\}$.
Então; a relação $\mathcal{R} \subseteq A \times A$; $\mathcal{R} = \{(1, 1), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$ é simétrica.
Enquanto que a relação $\mathcal{S} \subseteq A \times A$; $\mathcal{S} = \{(1, 1), (3, 3), (1, 3)\}$ não é simétrica.

Relações - Propriedades

OBSERVAÇÃO.8:

Uma relação $\mathcal{R}$ que não é **simétrica** é **assimétrica**.
$\mathcal{R}$ é uma relação ASSIMÉTRICA em A se e somente se

$$(\exists x, y \in A)((x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, x) \notin \mathcal{R}),$$

isto é, se existir pelo menos um par ordenado $(x, y) \in \mathcal{R}$ então o seu inverso $(y, x) \notin \mathcal{R}$.

EXEMPLO:

Seja $A = \{1, 2\}$ e as seguintes relações em A:

- $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2)\}$ "reflexiva e simétrica" ;
- $\mathcal{S} = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2)\}$ "reflexiva e assimétrica" ;
- $\mathcal{T} = \{(2, 1), (1, 2)\}$ "irreflexiva e simétrica".

DEFINIÇÃO.4: (Relação Anti-Simétrica)

Seja $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO ANTI-SIMÉTRICA se e somente se

$$\forall x, y \in A; (x, y) \in \mathcal{R} \text{ e } (y, x) \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y;$$

ou seja, $\nexists x, y$ tais que $x, y \in A \wedge (x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, x) \in \mathcal{R} \wedge x \neq y$.

EXEMPLO: $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y\}$
Seja $A = \{1, 2\}$ e as seguintes relações em A:

- $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2)\}$ "reflexiva, simétrica e anti-simétrica" ;
- $\mathcal{S} = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2)\}$ "reflexiva, assimétrica e anti-simétrica" ;
- $\mathcal{T} = \{(2, 1), (1, 2)\}$ "irreflexiva, simétrica e não é anti-simétrica".

Relações - Propriedades

OBSERVAÇÃO.9:

Os termos "**simétrico**" e "**anti-simétrico**" não são opostos. Porém, o termo "**assimétrico**" é oposto ao "**simétrico**". Então, uma relação $\mathcal{R}$ simétrica pode ser anti-simétrica, mas não pode ser assimétrica.

EXEMPLO: $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$
Neste caso, $\mathcal{R}$ é SIMÉTRICA e ANTI-SIMÉTRICA ao mesmo tempo.

DEFINIÇÃO.5: (Relação Transitiva)

Seja $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO TRANSITIVA se e somente se

$$\forall x, y, z \in A; (x, y) \in \mathcal{R} \text{ e } (y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R};$$

ou seja, $\nexists x, y, z$ tais que $x, y, z \in A \wedge (x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{R} \wedge (x, z) \notin \mathcal{R}$.

EXEMPLO: $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$
Seja $A = \{1, 2\}$ e as seguintes relações em A:

- $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2)\}$ "reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva" ;
- $\mathcal{S} = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2)\}$ "reflexiva, assimétrica, anti-simétrica e transitiva." ;
- $\mathcal{T} = \{(2, 1), (1, 2)\}$ "irreflexiva, simétrica, não é anti-simétrica e nem transitiva".
- $\mathcal{L} = \{(1, 1), (2, 2), (2, 1), (1, 2)\}$ "reflexiva, simétrica, não é anti-simétrica e é transitiva".
- $\mathcal{O} = \{(2, 1)\}$ "irreflexiva, assimétrica, anti-simétrica e transitiva".

DEFINIÇÃO.6: (Relação Total)

Seja $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO TOTAL(CONECTADA) se e somente se

$$\forall x, y \in A; (x, y) \in \mathcal{R} \text{ ou } (y, x) \in \mathcal{R};$$

ou seja, $\nexists x, y$ tais que $x, y \in A \wedge (x, y) \notin \mathcal{R} \wedge (y, x) \notin \mathcal{R}$.

EXEMPLO: $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$
Seja $A = \{3, 5, 7\}$.
Então; a relação $\mathcal{R} \subseteq A \times A$; $\mathcal{R} = \{(3, 3), (5, 5), (7, 7), (3, 5), (3, 7), (5, 7), \}$ é Total.
Enquanto que a relação $\mathcal{S} \subseteq A \times A$;
$\mathcal{S} = \{(3, 3), (5, 5), (3, 5), (3, 7), (5, 7)\}$ não é Total.

Relações - Propriedades

Relação Total

EXEMPLOS: Seja $A = \{1, 2\}$ e as seguintes relações em A:

- $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2)\}$ "reflexiva, simétrica, anti-simétrica, transitiva e não é Total";
- $\mathcal{S} = \{(1,1),(2,2),(1,2)\}$ "reflexiva, assimétrica, anti-simétrica, transitiva e é total."
- $\mathcal{T} = \{(2,1),(1,2)\}$ "irreflexiva, simétrica, não é anti-simétrica, nem transitiva e nem é total.".
- $\mathcal{L} = \{(1,1),(2,2),(2,1),(1,2)\}$ "reflexiva, simétrica, não é anti-simétrica, é transitiva e total".
- $\mathcal{O} = \{(2,1)\}$ "irreflexiva, assimétrica, anti-simétrica, transitiva e não é total".

Relações - Propriedades

OBSERVAÇÃO.10:

Se uma relação $\mathcal{R}$ é **total** então será **reflexiva**. Ou seja, uma relação ser **total** é condição suficiente para que ela seja **reflexiva**, mas não é necessário que ela seja **total** para ser **reflexiva**.
No entanto, a relação ser **reflexiva** é condição necessária para que ela seja **total**.
Em outras palavras, é necessário que ela seja **reflexiva** para que seja **total**.

EXEMPLO:

$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$ é **total** portanto é também **reflexiva**.
$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < y\}$ não é **reflexiva** então também não é **total**.
$\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$ é **reflexiva** mas não é **total**.

DEFINIÇÃO.7: (Relação de Equivalência)

Seja $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA se e somente se $\mathcal{R}$ é REFLEXIVA, SIMÉTRICA e TRANSITIVA.

EXEMPLOS:

1. RELAÇÃO DE IGUALDADE
   $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y\}$
2. RELAÇÃO IDENTIDADE
   $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$; X é um conjunto não vazio.
   $\Delta_{\mathbb{N}} = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{N}\}$
3. RELAÇÃO UNIVERSAL
   $\nabla_X = X \times X$; X é um conjunto não vazio.
   $\nabla_{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Observação.11:

Seja o conjunto $A \neq \emptyset$ e consideremos $\mathcal{R} = \emptyset$ uma relação **vazia** em A; visto que $\emptyset \subset A \times A$.

Podemos então dizer que $\mathcal{R}$ é uma relação SIMÉTRICA, ANTI-SIMÉTRICA, TRANSITIVA e IRREFLEXIVA, mas $\mathcal{R}$ não é TOTAL e nem REFLEXIVA, consequentemente, também não é RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA.

Verifique as relações binárias nos itens abaixo e classifique-as em REFLEXIVAS, IRREFLEXIVAS, SIMÉTRICAS, ASSIMÉTRICAS, ANTI-SIMÉTRICAS, TRANSITIVAS, CONECTADAS, EQUIVALÊNCIAS.

1. Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \text{ é par }\}$.
2. Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ divide } y\}$.
3. Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y^2\}$.

Relações - Propriedades - Exercícios

Exercícios: Verifique as relações binárias nos itens abaixo e classifique-as em *reflexivas*, *irreflexivas*, *simétricas*, *assimétricas*, *anti-simétricas*, *transitivas*, *conectadas*, *equivalências*.

1. Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \text{ é par } \}$.
2. Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ divide } y\}$.
3. Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y^2\}$.

Relações - Propriedades - Exercícios(Respostas)

(1) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \text{ é par } \} \Rightarrow x + y = 2k; k \in \mathbb{N}$

- Reflexiva: $\mathcal{R}$ é reflexiva; pois $\forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + x = 2x \Rightarrow (x, x) \in \mathcal{R}$. Portanto, $\mathcal{R}$ não é irreflexiva.
- Simétrica: $\mathcal{R}$ é simétrica e, consequentemente não é assimétrica.
  $x + y = 2k; k \in \mathbb{N} \Rightarrow y + x = 2k$ (pela propriedade comutativa da soma no conjunto dos naturais); assim, $\forall x, y \in \mathbb{N}, (x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$.
- Anti-simétrica: $\mathcal{R}$ não é anti-simétrica; pois,
  $\exists x, y \in \mathbb{N}$ tais que $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, x) \in \mathcal{R}$ e $x \neq y$.

Relações - Propriedades - Exercícios(Respostas)

(1) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \text{ é par } \} \Rightarrow x + y = 2k; k \in \mathbb{N}$

- Transitiva: $\mathcal{R}$ é transitiva.
  $\forall x, y, z \in \mathbb{N}; (x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow x + y = 2k; k \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 2k - y;$ (1) e
  $(y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow y + z = 2m; m \in \mathbb{N} \Rightarrow z = 2m - y;$ (2), Efetuando $x + z$, utilizando (1) e (2);
  $x + z = 2k - y + 2m - y = 2k + 2m - 2y = 2(k + m - y)$; fazendo:
  $n = (k + m - y) \in \mathbb{N} \Rightarrow x + z = 2n; n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$.

- total: $\mathcal{R}$ não é total; pois, para $x = 2a$ e
  $y = 2b + 1; a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y = 2a + 2b + 1 = 2(a + b) + 1; (a + b) \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y$ é ímpar.
  Portanto, $\exists x, y \in \mathbb{N}$ tais que $(x, y) \notin \mathcal{R}$ e $(y, x) \notin \mathcal{R}$.

- Equivalência: $\mathcal{R}$ é reflexiva, simétrica e transitiva. Logo, $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

Relações - Propriedades - Exercícios (Respostas)

(2) Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \mid \ x \ divide \ y\} \Rightarrow x \mid y \Rightarrow y = kx; k \in \mathbb{N}$

- Reflexiva: $\mathcal{R}$ é reflexiva; pois $\forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 1.x; 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow (x, x) \in \mathcal{R}$. Portanto, $\mathcal{R}$ não é irreflexiva.
- Simétrica: $\mathcal{R}$ não é simétrica e, consequentemente é assimétrica.
  $y = kx; k \in \mathbb{N} \Rightarrow x = y/k \Rightarrow y \not| x \Rightarrow (y, x) \notin \mathcal{R}$; assim, $\exists x, y \in \mathbb{N}$ tais que $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, x) \notin \mathcal{R}$.
- Anti-simétrica: $\mathcal{R}$ é anti-simétrica; pois,
  $\forall x, y \in \mathbb{N}$ tais que $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, x) \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y$;
  ou seja, $y = kx; k \in \mathbb{N}$ para $x = y \Rightarrow x = kx; k = 1 \Rightarrow x \mid x$.

Relações - Propriedades - Exercícios (Respostas)

(2) Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ } divide \text{ } y\} \Rightarrow x \mid y \Rightarrow y = kx; k \in \mathbb{N}$

- Transitiva: $\mathcal{R}$ é transitiva.
  $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$ tais que $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow y = kx; k \in \mathbb{N};$ (1) e $(y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow z = my; m \in \mathbb{N};$ (2), substituindo (1) em (2); $z = m(kx) \Rightarrow z = (mk)x; (mk) \in \mathbb{N} \Rightarrow x \mid z \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$.

- total: $\mathcal{R}$ não é total; pois,
  $\exists x, y \in \mathbb{N}$ tais que $(x, y) \notin \mathcal{R}$ e $(y, x) \notin \mathcal{R}$.
  Tomemos como contra-exemplo um número natural primo que, por definição, possui apenas os divisores "1" e ele próprio.

- Equivalência: $\mathcal{R}$ é reflexiva e transitiva, mas não é simétrica. Logo, $\mathcal{R}$ não é uma relação de equivalência.

Relações - Propriedades - Exercícios (Respostas)

(3) Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y^2\} \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$;

- Reflexiva: $\mathcal{R}$ não é reflexiva; pois $\forall x > 1; x \neq x^2$; assim, $\exists x \in \mathbb{N}$ tal que $(x, x) \notin \mathcal{R}$.
  Contudo, $\mathcal{R}$ também não é irreflexiva; $\exists x \in \mathbb{N}; (x, x) \in \mathcal{R}$.

- Simétrica: $\mathcal{R}$ não é simétrica e, consequentemente é assimétrica.
  $x = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x} \Rightarrow y \neq x^2 \Rightarrow (y, x) \notin \mathcal{R}$; assim,
  $\exists x, y \in \mathbb{N}$ tais que $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, x) \notin \mathcal{R}$.

- Anti-simétrica: $\mathcal{R}$ é anti-simétrica; pois,
  $\forall x, y \in \mathbb{N}$ tais que $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, x) \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y$.

Relações - Propriedades - Exercícios (Respostas)

(3) Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y^2\} \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$;

- Transitiva: $\mathcal{R}$ não é transitiva.
  $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$ tais que $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$; (1) e $(y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow y = z^2$; (2).
  Substituindo (1) em (2); $\pm\sqrt{x} = z^2 \Rightarrow (\pm\sqrt{x})^2 = (z^2)^2 \Rightarrow x = z^4 \Rightarrow (x, z) \notin \mathcal{R}$.
- total: $\mathcal{R}$ não é total; pois,
  $\exists x, y \in \mathbb{N}$ tais que, $(x, y) \notin \mathcal{R}$ e $(y, x) \notin \mathcal{R}$.
  Nestes casos, podemos tomar como contra-exemplo o número natural primo que por propriedade não é o quadrado de nenhum outro número natural.
- Equivalência: $\mathcal{R}$ não é reflexiva, não é simétrica e nem transitiva; logo, $\mathcal{R}$ não é uma relação de equivalência.

Relações - Propriedades - Exercícios

Exercícios: Seja $A = \{1, 2\}$. Verifique as relações binárias abaixo definidas em A, e justifique cada classificação.

(1) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2)\}$

- reflexiva: $\forall x \in A, (x, x) \in \mathcal{R}$,
- simétrica:$(1, 1) \in \mathcal{R} \Rightarrow (1, 1) \in \mathcal{R}$; $(2, 2) \in \mathcal{R} \Rightarrow (2, 2) \in \mathcal{R}$;
- anti-simétrica: $(1, 1) \in \mathcal{R} e (1, 1) \in \mathcal{R} \Rightarrow 1 = 1$,
  $(2, 2) \in \mathcal{R} e (2, 2) \in \mathcal{R} \Rightarrow 2 = 2$,
- transitiva: $(1, 1) \in \mathcal{R} e (1, 1) \in \mathcal{R} \Rightarrow (1, 1) \in \mathcal{R}$; $(2, 2) \in \mathcal{R} e (2, 2) \in \mathcal{R} \Rightarrow (2, 2) \in \mathcal{R}$,
- não é total: $(1, 2) \notin \mathcal{R} e (2, 1) \notin \mathcal{R}$;
- é de equivalência: $\mathcal{R}$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

Relações - Propriedades - Exercícios

(2) $\mathcal{S} = \{(1,1),(2,2),(1,2)\}$

- reflexiva: $\forall x \in A, (x,x) \in \mathcal{S}$,
- assimétrica: pois não é simétrica ($(1,2) \in \mathcal{S}$ mas, $(2,1) \notin \mathcal{S}$),
- anti-simétrica: por definição, temos que verificar o antecedente na condicional $(1,2) \in \mathcal{S}$ e $(2,1) \in \mathcal{S}$ mas, $(2,1) \notin \mathcal{S}$; logo, satisfaz à definição ;
- transitiva: $(1,1) \in \mathcal{S}$ e $(1,2) \in \mathcal{S} \Rightarrow (1,2) \in \mathcal{S}$ e $(1,2) \in \mathcal{S}$ e $(2,2) \in \mathcal{S} \Rightarrow (1,2) \in \mathcal{S}$,
- total: pois $\forall x, y \in A; (x,y) \in \mathcal{S}$ ou $(y,x) \in \mathcal{S}$.
- $\mathcal{S}$ não é de equivalência porque não é simétrica.

Relações - Propriedades - Exercícios

(3) $\mathcal{T} = \{(2,1),(1,2)\}$

- irreflexiva: $\forall x{\in}A; (x,x){\notin}\mathcal{T}$,
- simétrica: $(1,2){\in}\mathcal{T}{\Rightarrow}(2,1){\in}\mathcal{T}$,
- não é anti-simétrica: pois, $(1,2){\in}\mathcal{T}$ e $(2,1){\in}\mathcal{T}$ porém $1 \neq 2$,
- não é transitiva: pois, $(1,2){\in}\mathcal{T}$ e $(2,1){\in}\mathcal{T}$, mas $(1,1){\notin}\mathcal{T}$ e $(2,1){\in}\mathcal{T}$ e $(1,2){\in}\mathcal{T}$, mas $(2,2){\notin}\mathcal{T}$
- não é total: pois $\exists x,y{\in}A; (x,y){\notin}\mathcal{T}$ e $(y,x){\notin}\mathcal{T}$.
- $\mathcal{T}$ não é de equivalência pois não é reflexiva e nem transitiva.

Relações - Propriedades - Exercícios

(4) $\mathcal{L} = \{(1,1),(2,2),(2,1),(1,2)\}$

- reflexiva: $\forall x \in A; (x,x) \in \mathcal{L}$,
- simétrica: $(1,2) \in \mathcal{L} \Rightarrow (2,1) \in \mathcal{L}$,
- não é anti-simétrica: pois, $(1,2) \in \mathcal{L}$ e $(2,1) \in \mathcal{L}$ porém $1 \neq 2$,
- transitiva: $(1,2) \in \mathcal{L}$ e $(2,1) \in \mathcal{L} \Rightarrow (1,1) \in \mathcal{L}$ e $(2,1) \in \mathcal{L}$ e $(1,2) \in \mathcal{L} \Rightarrow (2,2) \in \mathcal{L}$
- total: $\forall x, y \in A; (x,y) \in \mathcal{L}$ ou $(y,x) \in \mathcal{L}$.
- $\mathcal{L}$ é de equivalência pois é reflexiva, simétrica e transitiva.

Relações - Propriedades - Exercícios

(5) $\mathcal{O} = \{(2,1)\}$

- irreflexiva: $\forall x \in A; (x,x) \notin \mathcal{O}$,
- assimétrica: pois $(2,1) \in \mathcal{O}$ mas, $(1,2) \notin \mathcal{O}$,
- anti-simétrica: pois, $(2,1) \in \mathcal{O}$ e $(1,2) \notin \mathcal{O}$ então não precisamos ter a tese: $1 = 2$,
- transitiva: $(2,1) \in \mathcal{O}$ e $(1,2) \notin \mathcal{O}$ logo, não precisamos ter : $(2,2) \in \mathcal{O}$,
- não é total: pois os pares $(1,1) \notin \mathcal{O}$ e $(2,2) \notin \mathcal{O}$.
- $\mathcal{O}$ não é de equivalência pois não é reflexiva e nem simétrica.

Classifique as relações nos itens abaixo em REFLEXIVAS, IRREFLEXIVAS, SIMÉTRICAS, ASSIMÉTRICAS, ANTI-SIMÉTRICAS, TRANSITIVAS, CONECTADAS, EQUIVALÊNCIAS.

1. Sejam $A =$ Conjunto das cidades de um determinado estado; e
$\mathcal{C} = \{(x, y) \in A \mid x$ é a cidade de origem da estrada com destino para a cidade $y\}$.
$\mathcal{C} = \{(B, C), (B, F), (C, A), (D, C), (E, B), (E, F), (F, A)\}$.
2. Sejam $A =$ Conjunto dos Alunos de MATA42 sentados na sala 207 do PAFI; e
$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x \textit{ senta na mesma fila de } y\}$.
3. Sejam $A =$ Conjunto dos Moradores do bairro Ondina; e
$\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times A \mid x \textit{ mora ao lado de } y\}$.
4. Sejam $A =$ Conjunto dos funcionários da empresa XYZ; e
$\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times A \mid x \textit{ trabalha mais horas que } y\}$.

Relações - Propriedades

Exercícios (Respostas)

1. Seja $A =$ Conjunto das cidades de um determinado estado; e
   $\mathcal{C} = \{(B, C), (B, F), (C, A), (D, C), (E, B), (E, F), (F, A)\}$.
   $\mathcal{C}$ é irreflexiva, assimétrica, anti-simétrica.
   $\mathcal{C}$ não é : reflexiva, simétrica, transitiva, conectada, equivalência.
2. Sejam $A =$ Conjunto dos Alunos de MATA42 sentados na sala 207 do PAFI; e
   $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x \textit{ senta na mesma fila de } y\}$.
   $\mathcal{R}$ é reflexiva, simétrica, transitiva, equivalência.
   $\mathcal{R}$ não é : irreflexiva, assimétrica, anti-simétrica, conectada.
3. Sejam $A =$ Conjunto dos Moradores do bairro Ondina; e
   $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times A \mid x \textit{ mora ao lado de } y\}$.
   $\mathcal{T}$ é irreflexiva, simétrica.
   $\mathcal{T}$ não é: reflexiva, assimétrica, anti-simétrica, conectada, transitiva, equivalência.
4. Sejam $A =$ Conjunto dos funcionários da empresa XYZ; e
   $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times A \mid x \textit{ trabalha mais horas que } y\}$.
   $\mathcal{S}$ é irreflexiva, assimétrica, anti-simétrica, transitiva.
   $\mathcal{S}$ não é reflexiva, simétrica, conectada, equivalência.

Relações - Propriedades

OBSERVAÇÃO:
$\mathcal{R}$ é uma relação assimétrica em A se e somente se $(\exists x, y \in A)((x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, x) \notin \mathcal{R})$, ou seja, se existir pelo menos um par ordenado $(x, y) \in \mathcal{R}$ o seu inverso $(y, x) \notin \mathcal{R}$.
Enquanto que, $\mathcal{R}$ é uma relação anti-simétrica em A se e somente se
$(\forall x, y \in A)(((x, y) \in \mathcal{R}) \wedge ((y, x) \in \mathcal{R})) \Rightarrow x = y \Leftrightarrow$
$(\forall x, y \in A)(x \neq y) \Rightarrow (((x, y) \notin \mathcal{R}) \vee ((y, x) \notin \mathcal{R}))$.
Portanto, Se $\mathcal{R}$ é uma relação ASSIMÉTRICA em A não podemos concluir que $\mathcal{R}$ é ANTI-SIMÉTRICA.

Exercícios: Sejam as seguintes relações em $A = \mathbb{N}$:
$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \geq y\}$; e $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$.
Determine as seguintes relações resultantes das operações entre as relações: $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$.

- $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} =?$
- $\mathcal{R} \cup \mathcal{S} =?$
- $\mathcal{R} - \mathcal{S} =?$
- $\mathcal{S} - \mathcal{R} =?$
- $\mathcal{S} \Delta \mathcal{R} =?$

Exercícios: Sejam as seguintes relações em $A = \mathbb{N}$: $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \mid \ x \geq y\}$; e $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \mid \ x \leq y\}$.

Determine as seguintes relações resultantes das operações entre as relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$:

- $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \mid \ x \geq y \text{ e } x \leq y\} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \mid \ x = y\} = \Delta_{\mathbb{N}}$
- $\mathcal{R} \cup \mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \mid \ x \geq y \text{ ou } x \leq y\} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \nabla_{\mathbb{N}}$
- $\mathcal{R} - \mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \mid \ x > y\}$
- $\mathcal{S} - \mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \mid \ x < y\}$
- $\mathcal{S} \Delta \mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \mid \ x < y \text{ ou } x > y\} =$

$\{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \mid \ x \neq y\}$

Definição: (Relação Inversa ou Relação Dual ou Relação Oposta)

Sejam os conjuntos $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, e $\mathcal{R}$ uma relação de A para B. Então, a relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$ de $\mathcal{R}$ é uma relação de B para A tal que $y\mathcal{R}^{-1}x$ se e somente se $x\mathcal{R}y$, ou seja, $\mathcal{R}^{-1} := \{(y,x) \mid (x,y) \in \mathcal{R}\} \subseteq B \times A$.

Notação: $\mathcal{R}^{-1}$ ou $\widetilde{\mathcal{R}}$

Exemplo:

1. Seja $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ divide } y\}$ então,
   $\mathcal{R}^{-1} = \{(y,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y \text{ é múltiplo de } x\}$.
2. Sejam $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e
   $\mathcal{R} = \{(x,y) \in A \times A \mid x = y + 1\} = \{(2,1),(3,2)(4,3)(5,4)(6,5)(7,6)\}$ então,
   $\mathcal{R}^{-1} = \{(1,2),(2,3)(3,4)(4,5)(5,6)(6,7)\}$
   $\mathcal{R}^{-1} = \{(y,x) \in A \times A \mid y = x - 1\}$.

Relações - Inversa

Lema:

Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ relações em A. Então,

1. $\widetilde{\widetilde{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$
2. $\widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} = \widetilde{\mathcal{R}} \cup \widetilde{\mathcal{S}}$

D]:

1. $\widetilde{\widetilde{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$

   Por definição, temos que $y\mathcal{R}^{-1}x$ se e somente se $x\mathcal{R}y$;
   do mesmo modo, se quisermos a inversa da inversa;
   $x(\mathcal{R}^{-1})^{-1}y$ se e somente se $y\mathcal{R}^{-1}x$;
   logo, $x(\mathcal{R}^{-1})^{-1}y = x\mathcal{R}y$.

D]: 2. $\widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} = \widetilde{\mathcal{R}} \cup \widetilde{\mathcal{S}}$

Vamos mostrar que: (i) $\widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} \subseteq \widetilde{\mathcal{R}} \cup \widetilde{\mathcal{S}}$, e

(ii) $\widetilde{\mathcal{R}} \cup \widetilde{\mathcal{S}} \subseteq \widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$.

(i) $\widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} \subseteq \widetilde{\mathcal{R}} \cup \widetilde{\mathcal{S}}$.

$(y, x) \in \widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} \Rightarrow (x, y) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$; portanto, $(x, y) \in \mathcal{R}$ ou $(x, y) \in \mathcal{S}$.

$(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \widetilde{\mathcal{R}}$ ou $(x, y) \in \mathcal{S} \Rightarrow (y, x) \in \widetilde{\mathcal{S}}$. Logo, $(y, x) \in \widetilde{\mathcal{R}} \cup \widetilde{\mathcal{S}}$; e, consequentemente, $\widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} \subseteq \widetilde{\mathcal{R}} \cup \widetilde{\mathcal{S}}$.

(ii) $\widetilde{\mathcal{R}} \cup \widetilde{\mathcal{S}} \subseteq \widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$.

$(y, x) \in \widetilde{\mathcal{R}} \cup \widetilde{\mathcal{S}} \Rightarrow (y, x) \in \widetilde{\mathcal{R}}$ ou $(y, x) \in \widetilde{\mathcal{S}}$.

$(y, x) \in \widetilde{\mathcal{R}} \Rightarrow (x, y) \in \mathcal{R}$ ou $(y, x) \in \widetilde{\mathcal{S}} \Rightarrow (x, y) \in \mathcal{S} \Rightarrow (x, y) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \Rightarrow (y, x) \in \widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$.

Logo, $\widetilde{\mathcal{R}} \cup \widetilde{\mathcal{S}} \subseteq \widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$.

Assim, por (i) e (ii) temos que $\widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} = \widetilde{\mathcal{R}} \cup \widetilde{\mathcal{S}}$.

Relações - Inversa - Exercícios

Exercícios:

1. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e as relações $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x < y + 1\}$ e $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times A \mid x \text{ divide } y + 1\}$.
   Determine as relações $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, e as inversas $\mathcal{R}^{-1}$, $\mathcal{S}^{-1}$.

Respostas:

$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x < y + 1\} = \{(1,1), (1,2)(1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$

$\mathcal{R}^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (2,2), (3,2), (3,3)\}$

$\mathcal{R}^{-1} = \{(x, y) \in A \times A \mid y < x + 1\}$

$\mathcal{S} = \{(1,1), (1,2)(1,3), (2,1), (2,3), (3,2)\}$

$\mathcal{S}^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (1,2), (3,2), (2,3)\}$

$\mathcal{S}^{-1} = \{(x, y) \in A \times A \mid x + 1 \text{ é múltiplo de } y\}$.

Relação Complementar

Definição: (Relação Complementar)

Seja $\mathcal{R}$ uma relação em A. Denotamos por $\overline{\mathcal{R}}$ e denominamos relação complementar de $\mathcal{R}$ a seguinte relação em A:

$$\overline{\mathcal{R}} := \{(x, y) \mid (x, y) \notin \mathcal{R}\}.$$

Observação: $\overline{\overline{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$

Exemplos:

1. Seja $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x < y\}$ em $\mathbb{N}$ então,
   $\overline{\mathcal{R}} = \{(x, y) \mid x \geq y\}$
2. $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \text{ divide } y\}$ em $\mathbb{N}$ então,
   $\overline{\mathcal{R}} = \{(x, y) \mid x \text{ não divide } y\}$

Definição: (Relação Composta)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, e sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ relações em A. Indicamos por $\mathcal{S}o\mathcal{R}$ e denominamos composição da relação $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ a seguinte relação:
$\mathcal{S}o\mathcal{R} := \{(x, z) \mid x, z \in A \wedge \exists y \in A\ ((x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{S})\}$.

RoS = {(x,z) | x,z e A ^ Ey e A ((x,y) e S ^ (y,z) e R

Exemplo:

1. Sejam as relações $\mathcal{R} = \{(1, 2), (3, 4), (2, 2)\}$ e $\mathcal{S} = \{(4, 2), (2, 5), (3, 1), (1, 3)\}$ então, $\mathcal{S}o\mathcal{R} := \{(1, 5), (3, 2), (2, 5)\}$;
$\mathcal{R}o\mathcal{S} := \{(4, 2), (3, 2), (1, 4)\}$;
$\mathcal{R}o\mathcal{R} := \{(1, 2), (2, 2)\}$;
$\mathcal{S}o\mathcal{S} := \{(4, 5), (3, 3), (1, 1)\}$.

Relações - Potência

Definição: (Relação - Potência)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, e seja $\mathcal{R}$ uma relação em A. Indicamos por $\mathcal{R}^m$; $m \in \mathbb{N}$ e denominamos m -ésima potência da relação $\mathcal{R}$ a seguinte relação:
$\mathcal{R}^m := \mathcal{R} o \mathcal{R}^{m-1}$; $m > 1$ e $\mathcal{R}^1 := \mathcal{R}$.

Exemplo: Sejam $A := \{x, y, z\}$ e as relações em A;

1. $\mathcal{R} = \{(x, y), (x, z), (z, y)\}$; então, $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} o \mathcal{R} = \{(x, y)\}$;
   $\mathcal{R}^3 = \mathcal{R} o \mathcal{R}^2 = \emptyset$; assim, $\forall m \geq 3, \mathcal{R}^m = \emptyset$.
2. $\mathcal{S} = \{(x, y), (y, z), (z, x)\}$,
   $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S} o \mathcal{S} = \{(x, z), (y, x), (z, y)\} = \mathcal{S}^{-1}$;
   $\mathcal{S}^3 = \mathcal{S} o \mathcal{S}^2 = \{(x, x), (y, y), (z, z)\} = \Delta_A$;
   $\mathcal{S}^4 = \mathcal{S} o \mathcal{S}^3 = \{(x, y), (y, z), (z, x)\} = \mathcal{S}$;
   $\mathcal{S}^5 = \mathcal{S} o \mathcal{S}^4 = \mathcal{S}^2$; $\mathcal{S}^6 = \mathcal{S} o \mathcal{S}^5 = \mathcal{S}^3$; $\mathcal{S}^7 = \mathcal{S} o \mathcal{S}^6 = \mathcal{S}^4$; $\mathcal{S}^8 = \mathcal{S} o \mathcal{S}^7 = \mathcal{S}^2$; $\cdots$
   Observação: Neste caso, notemos que as potências da relação $\mathcal{S}$ repetem-se em um ciclo para $m \geq 5$.

Relações - Propriedades

PROPRIEDADES:

Seja $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A. Então,

1. $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO REFLEXIVA $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}^{-1}$ é REFLEXIVA.
2. $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO REFLEXIVA $\Leftrightarrow$ $\overline{\mathcal{R}}$ é IRREFLEXIVA.
3. $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO SIMÉTRICA $\Leftrightarrow \mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.
4. $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO ANTISIMÉTRICA e REFLEXIVA $\Leftrightarrow \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} = \Delta_A$.

Exercícios: Mostre as propriedades acima.

Relações - Fecho

DEFINIÇÃO: (Fecho Reflexivo de uma Relação)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, e seja a RELAÇÃO $\mathcal{R}$ em A. Indicamos por $ref(\mathcal{R})$ e denominamos FECHO REFLEXIVO DA RELAÇÃO $\mathcal{R}$ a seguinte relação em A: $ref(\mathcal{R}) := \mathcal{R} \cup \Delta_A$; Δ_A é a relação IDENTIDADE em A.

Observação: Notemos que $ref(\mathcal{R})$ é a menor relação reflexiva contendo a relação $\mathcal{R}$.

Exemplo:

1. $\mathcal{R} = \{(x,y),(x,z),(z,y)\}$ em $A = \{x,y,z\}$;
   $ref(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \Delta_A = \{(x,y),(x,z),(z,y),(x,x),(y,y),(z,z)\}$
2. $\mathcal{S} = \{(x,y),(y,z),(z,x)\}$ em $A = \{x,y,z\}$;
   $ref(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \cup \Delta_A = \{(x,y),(y,z),(z,x),(x,x),(y,y),(z,z)\}$

Relações - Fecho

DEFINIÇÃO: (Fecho Simétrico de uma Relação)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, e seja a $\mathcal{R}$ RELAÇÃO em A. Indicamos por $sim(\mathcal{R})$ ~~e denominamos~~ FECHO SIMÉTRICO DA RELAÇÃO $\mathcal{R}$ a seguinte relação em A: $sim(\mathcal{R}) := \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$.

Observação: Notemos que $sim(\mathcal{R})$ é a ~~menor relação simétrica~~ contendo a relação $\mathcal{R}$; ou seja, $sim(\mathcal{R})$ é uma relação simétrica e qualquer outra relação simétrica contendo $\mathcal{R}$, contém $sim(\mathcal{R})$.

Exemplo:

1. $\mathcal{R} = \{(x,y),(x,z),(z,y)\}$ em $A = \{x,y,z\}$;
   $sim(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} = \{(x,y),(x,z),(z,y),(y,x),(z,x),(y,z)\}$
2. $\mathcal{S} = \{(x,y),(y,z),(z,x)\}$ em $A = \{x,y,z\}$;
   $sim(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1} = \{(x,y),(y,z),(z,x),(y,x),(z,y),(x,z)\}$

Relações - Fecho

Definição: (Fecho Transitivo de uma Relação)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, e seja a RELAÇÃO $\mathcal{R}$ em A. Indicamos por $tra(\mathcal{R})$ e denominamos FECHO TRANSITIVO DA RELAÇÃO $\mathcal{R}$ a seguinte relação em A: $tra(\mathcal{R}) := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{R}^m$.

Observação: Notemos que $tra(\mathcal{R})$ é a menor relação transitiva contendo a relação $\mathcal{R}$; isto é, $tra(\mathcal{R})$ é uma relação transitiva e qualquer outra relação transitiva contendo $\mathcal{R}$, contém $tra(\mathcal{R})$.

Exemplo:

1. $\mathcal{R} = \{(x, y), (x, z), (z, y)\}$ em $A = \{x, y, z\}$;
   $tra(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$, pois $\mathcal{R}$ já é uma relação transitiva.
2. $\mathcal{S} = \{(x, y), (y, z), (z, x)\}$ em $A = \{x, y, z\}$;
   $tra(\mathcal{S}) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{S}^m = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^2 \cup \mathcal{S}^3 \cup \mathcal{S}^4 \cup \cdots = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^2 \cup \mathcal{S}^3 = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1} \cup \Delta_A = \nabla_A$.

Exercícios:

Determine os fechos reflexivo, simétrico e transitivo das relações abaixo:

(a) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ em $A = \{1,2,3\}$;

$ref(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \Delta_A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2),(2,2),(3,3)\}$;
$sim(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2),(2,3)\}$;
$\mathcal{R}^2 = \{(1,1),(1,2),(3,1),(2,1),(2,2)\}$;
$\mathcal{R}^3 = \mathcal{R} o \mathcal{R}^2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\} = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2$;
$\mathcal{R}^4 = \mathcal{R} o \mathcal{R}^3 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\} = \mathcal{R}^3$;
$\mathcal{R}^5 = \mathcal{R} o \mathcal{R}^4 = \mathcal{R}^3; \cdots;$
assim, $tra(\mathcal{R}) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{R}^m = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 = \mathcal{R}^3$.

(b) $\mathcal{S} = \{(x,y) \mid x > y\}$ em $\mathbb{N}$,
$ref(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \cup \Delta_{\mathbb{N}} = \{(x,y) \mid x \geq y\}$,
$sim(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1} = \{(x,y) \mid x > y \vee y > x\} = \nabla_{\mathbb{N}} - \Delta_{\mathbb{N}}$,
$tra(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

Relação de Congruência

Definição:(Congruência)

Sejam os inteiros x, y, q, seja o inteiro positivo d, e seja o inteiro não-negativo r. Vamos definir $x := d.q + r;\ 0 \leq r < d$; isto é, q é o QUOCIENTE e r é o RESTO da divisão de x por d: $r = x - d.q$.

Dizemos que "x é CONGRUENTE MÓDULO d ao y" se e somente se o resto r da divisão por d é igual ($r_x = x - d.q_x$ e $r_y = y - d.q_y$ onde $r_x = r_y = r$). Assim, $\exists k \in \mathbb{Z} \mid x - y = d.k$.

Notação: $x \equiv y (mod\ d)$ ou $x\ mod\ d = y\ mod\ d$ ou $x \equiv_d y$

Exemplos:

- $20 \equiv_3 17$; pois
  $20\ mod\ 3 = 17\ mod\ 3 \Rightarrow 20 - 17 = 3.k;\ k \in \mathbb{Z}$
- $22 \equiv_3 19$; pois
  $22\ mod\ 3 = 19\ mod\ 3 \Rightarrow 22 - 19 = 3.k;\ k \in \mathbb{Z}$

Relação de Congruência

Exemplo: Seja a um inteiro positivo maior que 1. Mostre que a relação $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \equiv y (mod\ a)\}$ é uma relação de equivalência no conjunto dos inteiros.

- Reflexiva: $x \equiv x(mod\ a)$; pois, $x\ mod\ a = x\ mod\ a \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - x = k.a$.
- Simétrica: $x \equiv y(mod\ a) \Rightarrow y \equiv x(mod\ a)$; pois,
  $x\ mod\ a = y\ mod\ a \Rightarrow y\ mod\ a = x\ mod\ a \Rightarrow$
  $\exists k, m \in \mathbb{Z} : x - y = k.a$ e $y - x = m.a$.
- Transitiva: $x \equiv y(mod\ a)$ e $y \equiv z(mod\ a) \Rightarrow x \equiv z(mod\ a)$; pois,
  $x\ mod\ a = y\ mod\ a$ e $y\ mod\ a = z\ mod\ a \Rightarrow x\ mod\ a = z\ mod\ a$
  $\Rightarrow \exists k, m \in \mathbb{Z} : x - y = k.a$ e $y - z = m.a$
  $\Rightarrow x - (m.a + z) = k.a \Rightarrow x - z = (k + m).a; (k + m) \in \mathbb{Z}$.

Logo, $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência pois é simultaneamente, reflexiva, simétrica e transitiva.

Relação de Equivalência: (Exemplos)

1. A relação de igualdade $\Delta_{\mathbb{R}} = \mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$ é uma relação de equivalência.
2. A relação de "*equivalência lógica* $\Leftrightarrow$" é uma relação de equivalência.
3. A relação em $\mathbb{Z}$ denominada "CONGRUÊNCIA MÓDULO 3":
$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \equiv_3 y\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}; x - y = 3k\}$, é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$; ou seja, $\mathcal{R}$ é simultaneamente reflexiva, simétrica e transitiva:
   - (i) reflexiva: $x - x = 0 = 3k; k = 0$; assim, $x \equiv_3 x$;
   - (ii) simétrica: para $x \equiv_3 y \Leftrightarrow x - y = 3k$; multiplicando a equação por (-1):
     $y - x = 3(-k) \Leftrightarrow y \equiv_3 x$;
   - (iii) transitiva: para $x \equiv_3 y \Leftrightarrow x - y = 3k$;
     e para $y \equiv_3 z \Leftrightarrow y - z = 3m \Rightarrow y = z + 3m$;
     substituindo em $x \equiv_3 y$: $x - (z + 3m) = 3k \Rightarrow x - z = 3(k - m)$; $\Leftrightarrow x \equiv_3 z$.

Relação de Equivalência - Classe de Equivalência

Definição: (Classe de Equivalência)

Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência em A e seja $x \in A$.
Dizemos que o conjunto $[x]_{\mathcal{R}} := \{y \in A \mid x\mathcal{R}y\}$
é a CLASSE DE EQUIVALÊNCIA de x em $\mathcal{R}$.

NOTAÇÃO: $[x]_{\mathcal{R}}$, $\bar{x}$, ou $x/\mathcal{R}$.

Exemplos:

1. Para a relação de igualdade "$=$", temos que para $x \in \mathbb{N}$, a classe $[x]_{=} := \{x\}$
2. Para a relação de "CONGRUÊNCIA MÓDULO 3, $\equiv_3$", temos as classes:
   $[0]_{\equiv_3} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}; (0 - y = 3k; k \in \mathbb{Z})$
   $[1]_{\equiv_3} = \{\ldots, -5, -2, +1, +4, \ldots\}; (1 - y = 3k; k \in \mathbb{Z})$ e
   $[2]_{\equiv_3} = \{\ldots, -4, -1, +2, +5, \ldots\}; (2 - y = 3k; k \in \mathbb{Z})$.

Note que paramos na classe $[2]_{\equiv_3}$ porque as próximas serão repetições das anteriores, i.é,
$[3]_{\equiv_3} = [0]_{\equiv_3}; [4]_{\equiv_3} = [1]_{\equiv_3}, \ldots$.

Relação de Equivalência - Conjunto Quociente

DEFINIÇÃO: (Conjunto Quociente)

Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência em A.
Dizemos que o conjunto $[A]_{\mathcal{R}} := \{[x]_{\mathcal{R}} \mid x \in A\}$
é o CONJUNTO QUOCIENTE de A por $\mathcal{R}$.
NOTAÇÃO: $[A]_{\mathcal{R}}$, $\bar{A}$, ou $A/\mathcal{R}$.

Exemplos:

1. Para a relação de igualdade "$=$", temos que para $x \in \mathbb{N}$, a classe $[\mathbb{N}]_{=} := \{\{x\} \mid x \in \mathbb{N}\}$; pois, $[x]_{=} := \{x\}$. Note que $\bigcup_{x \in \mathbb{N}} \{x\} = \mathbb{N}$; e ainda, esses conjuntos são disjuntos.

2. Para a relação de "CONGRUÊNCIA MÓDULO $3, \equiv_3$", temos que o conjunto quociente contém apenas três elementos:
$[\mathbb{Z}]_{\equiv_3} = \{[0]_{\equiv_3}, [1]_{\equiv_3}, [2]_{\equiv_3}\}$.
Obs: Denotamos por $[\mathbb{Z}]_{\equiv_3}$ ou $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, ou simplesmente, $\mathbb{Z}_3$.
Note que $[0]_{\equiv_3} \cup [1]_{\equiv_3} \cup [2]_{\equiv_3} = \mathbb{Z}$; e ainda, esses conjuntos são disjuntos.

Relação de Equivalência - Propriedades

Lema:

1. $\forall x \in A, x \in [x]_{\mathcal{R}}$. Assim, $[x]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.
2. $\forall x, y \in A$, se $x\mathcal{R}y$, então $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$.
3. $\forall x, y \in A$, se $\neg(x\mathcal{R}y)$, então $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.

DEFINIÇÃO: (Partição)

Sejam A um conjunto e $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ uma família de subconjuntos não vazios de A.

1. Dizemos que o conjunto $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ é uma COBERTURA de A se e somente se $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = A$.
2. Dizemos que o conjunto $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ é uma PARTIÇÃO de A se e somente se $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ é uma cobertura de A e os elementos da família são 2 a 2 disjuntos, ou seja, para quaisquer $i, j \in \mathcal{I}; i \neq j$, temos que $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Exercícios

1. $[\mathbb{N}]_= = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{N}\}$ é uma partição de $\mathbb{N}$, pois é uma cobertura de $\mathbb{N}$: $\bigcup_{x\in\mathbb{N}}\{x\} = \mathbb{N}$ e; $\forall y \in \mathbb{N}; y \neq x, \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$.
2. $[\mathbb{Z}]_{\equiv_3} = \{[0]_{\equiv_3}, [1]_{\equiv_3}, [2]_{\equiv_3}\}$ é uma partição de $\mathbb{Z}$; pois é uma cobertura de $\mathbb{Z}$:
$[0]_{\equiv_3} \cup [1]_{\equiv_3} \cup [2]_{\equiv_3} = \mathbb{Z}$; e;
$[0]_{\equiv_3} \cap [1]_{\equiv_3} = \emptyset$; $[0]_{\equiv_3} \cap [2]_{\equiv_3} = \emptyset$; $[1]_{\equiv_3} \cap [2]_{\equiv_3} = \emptyset$.
3. Quais são as classes de equivalência correspondentes à relação de congruência módulo 5 em $\mathbb{Z}$? E qual é o conjunto quociente?
    1. $[0]_{\equiv_5} = \{\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}$
    $[1]_{\equiv_5} = \{\dots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots\}$
    $[2]_{\equiv_5} = \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots\}$
    $[3]_{\equiv_5} = \{\dots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots\}$
    $[4]_{\equiv_5} = \{\dots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots\}$
    2. $[\mathbb{Z}]_{\equiv_5} = \{[0]_{\equiv_5}, [1]_{\equiv_5}, [2]_{\equiv_5}, [3]_{\equiv_5}, [4]_{\equiv_5}\}$.

Relação de Equivalência em A - Partição em A

Proposição : (RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA e PARTIÇÃO)

Seja A um conjunto não-vazio. Então, toda relação de equivalência em A determina uma partição em A e, toda partição em A determina uma relação de equivalência em A.

Exemplos:

1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e a seguinte partição em A; $\mathcal{P} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$, então pela proposição acima determinamos uma relação de equivalência em A:
$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (4, 5), (5, 4)\}$

2. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e a seguinte relação de equivalência em A;
$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\}$,
vamos determinar as classes de equivalência:
$[1]_{\mathcal{R}} = \{1, 2\}$; $[2]_{\mathcal{R}} = \{1, 2\}$; $[3]_{\mathcal{R}} = \{3, 4\}$; e $[4]_{\mathcal{R}} = \{3, 4\}$;
a partição de A determinada por esta relação : $\mathcal{P} = \{[1]_{\mathcal{R}}, [3]_{\mathcal{R}}\} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$
Note que $\mathcal{P} = [A]_{\mathcal{R}}$; com, $[1]_{\mathcal{R}} \cup [3]_{\mathcal{R}} = A$ e $[1]_{\mathcal{R}} \cap [3]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.

Matrizes Revisão

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}^*$. Dizemos que uma MATRIZ de ORDEM $m \times n$ é uma **tabela** com $m.n$ elementos dispostos em m LINHAS e n COLUNAS.

Notação:

$$A_{m\times n} = (a_{ij})_{1\leq i\leq m; 1\leq j\leq n}$$

onde, a_{ij} representa o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz.

$$\mathbf{A_{m\times n}} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{ll} \to & i = 1 \\ \to & i = 2 \\ & \vdots \\ \to & i\text{-ésima} \\ & \vdots \\ \to & i = m \\ & \text{LINHAS} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ j = 1 & j = 2 & \ldots & j\text{-ésima} & \ldots & j = n & \text{COLUNAS} \end{array}$$

Matrizes Revisão

Motivação - Problema.1

Problema.1: Alunos x Notas de Provas em MATA07

Alunos	1ªnota	2ªnota	3ªnota	
João	5	5	5	Linha.1
Maria	3	4	8	Linha.2
Ana	8	3	7	Linha.3
Pedro	6	8	10	Linha.4
	Coluna.1	Coluna.2	Coluna.3	

- Qual o total de pontos de cada aluno?
- Qual a média aritmética de cada aluno?
- Qual a média ponderada de cada aluno?

Podemos representar entre COLCHETES ou PARÊNTESES as informações da TABELA respeitando a ordem das informações nas LINHAS e COLUNAS.

$$\begin{array}{c} \\ \text{João} \\ \text{Maria} \\ \text{Ana} \\ \text{Pedro} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1^a\text{NOTA} & 2^a\text{NOTA} & 3^a\text{NOTA} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 8 & 3 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \text{Coluna.1} & \text{Coluna.2} & \text{Coluna.3} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{Linha.1} \\ \text{Linha.2} \\ \text{Linha.3} \\ \text{Linha.4} \\ \\ \end{array}$$

Informações da TABELA entre COLCHETES ou PARÊNTESES respeitando a ordem das informações nas LINHAS e COLUNAS.

$$A_{4\times 3} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 8 & 3 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Linha.1} \\ \text{Linha.2} \\ \text{Linha.3} \\ \text{Linha.4} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \text{Coluna.1} & \text{Coluna.2} & \text{Coluna.3} \end{array} & \end{array}$$

$\boxed{A_{4\times 3} \text{ é a MATRIZ com 4 linhas e 3 colunas que representa o Problema.1.}}$

Dizemos que A é uma MATRIZ QUADRADA se, e somente se, $m = n$.
NOTAÇÃO: A_n.

$$\mathbf{A_5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Seja

$$\mathbf{A_n} = \begin{bmatrix} cyan a_{11} & a_{12} = 0 & \cdots & a_{1i} = 0 & \cdots & a_{1n} = 0 \\ a_{21} = 0 & cyan a_{22} & \cdots & a_{2i} = 0 & \cdots & a_{2n} = 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} = 0 & a_{i2} = 0 & \cdots & cyan a_{ii} & \cdots & a_{in} = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} = 0 & a_{n2} = 0 & \cdots & a_{ni} = 0 & \cdots & cyan a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dizemos que a MATRIZ QUADRADA $\mathbf{A_n}$ é uma MATRIZ DIAGONAL se, e somente se,

$$a_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j.$$

Observe que na DIAGONAL PRINCIPAL $a_{ii} \in \mathbb{R}; \forall i = 1, \ldots, n$.

Matrizes Diagonais

Matriz Identidade

Em casos particulares de matrizes DIAGONAIS definidas do seguinte modo:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ 1; & i = j \end{cases}$$

$$A_n = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

denominamos MATRIZ IDENTIDADE de orem n e denotamos I_n.

Sejam $A_{m\times n}$ e $C_{n\times m}$. Dizemos que a matriz C é a TRANSPOSTA da matriz A se, e somente se,

$$c_{ji} = a_{ij}; \quad \forall i = 1, \ldots, m; \forall j = 1, \ldots, n.$$

Notação: $C = A^t$

$$C_{n\times m} = A^t_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} = c_{11} & \cdots & a_{i1} = c_{1i} & \cdots & a_{m1} = c_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1j} = c_{j1} & \cdots & a_{ij} = c_{ji} & \cdots & a_{mj} = c_{jm} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} = c_{n1} & \cdots & a_{in} = c_{ni} & \cdots & a_{mn} = c_{nm} \end{bmatrix}$$

EXEMPLO:

$$A_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

e,

$$C_{4\times 3} = A^t = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 8 & 3 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;

$$\mathbf{A_n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} = a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} = a_{1i} & a_{i2} = a_{2i} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} = a_{1n} & a_{n2} = a_{2n} & \cdots & a_{ni} = a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dizemos que a MATRIZ QUADRADA $\mathbf{A_n}$ é uma MATRIZ SIMÉTRICA se, e somente se,

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ para } \forall i, j = 1, \ldots, n;$$

ou seja, $A = A^t$.

EXEMPLO: Seja a matriz

$$\mathbf{A_5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$A_5 = A^t$.
Logo, A_5 é uma matriz simétrica.

Matrizes Revisão - Operações

Produto - Definição

Sejam $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$, $C_{m\times p}$. Dizemos que a matriz C é o PRODUTO das matrizes A e B se, e somente se,

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk}; \forall i = 1, \ldots, m; \forall j = 1, \ldots, n; \forall k = 1, \ldots, p.$$

Notação: $C = AB$

Note que o produto $A_{m\times n}B_{n\times p}$, **nesta ordem**, só é possível se,
o número de COLUNAS de A for igual ao número de LINHAS de B.

Matrizes Revisão - Operações

Produto - Definição

$$\mathbf{A}_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \mathbf{B}_{\mathbf{n}\times\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{j1} & \cdots & b_{jk} & \cdots & b_{jp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{m}\times\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ik} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{c_{11} = a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1j}b_{j1} + \ldots + a_{1n}b_{n1}}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \ldots + a_{ij}b_{jk} + \ldots + a_{in}b_{nk}}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{c_{mp} = a_{m1}b_{1p} + \ldots + a_{mj}b_{jp} + \ldots + a_{mn}b_{np}}$$

Matrizes Revisão - Operações

Produto - Exemplo.1

$$A_{3\times 4}B_{4\times 2} = C_{3\times 2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -10 & -12 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{-5 = (2)(-1) + (1)(-2) + (-3)(0) + (-1)(1)}$$

$$\boxed{6 = (2)(3) + (1)(-2) + (-3)(-1) + (-1)(2)}$$

$$\boxed{-10 = (-1)(-1) + (5)(-2) + (-3)(0) + (-1)(1)}$$

$$\boxed{-12 = (-1)(3) + (5)(-2) + (-3)(-1) + (-1)(2)}$$

$$\boxed{5 = (0)(-1) + (-1)(-2) + (2)(0) + (3)(1)}$$

$$\boxed{6 = (0)(3) + (-1)(-2) + (2)(-1) + (3)(2)}$$

Relações - Representação Matricial

Produto - Exemplo.2

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Então, a matriz

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} (1.1)+(0.1)+(1.1) & (1.0)+(0.0)+(1.1) & (1.1)+(0.0)+(1.0) \\ (1.1)+(0.1)+(0.1) & (1.0)+(0.0)+(0.1) & (1.1)+(0.0)+(0.0) \\ (1.1)+(1.1)+(0.1) & (1.0)+(1.0)+(0.1) & (1.1)+(1.0)+(0.0) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (1)+(0)+(1) & (0)+(0)+(1) & (1)+(0)+(0) \\ (1)+(0)+(0) & (0)+(0)+(0) & (1)+(0)+(0) \\ (1)+(1)+(0) & (0)+(0)+(0) & (1)+(0)+(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DEFINIÇÃO:(PRODUTO BOOLEANO)
Sejam as matrizes booleanas $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{n\times p} = (b_{jk})$.
O PRODUTO BOOLEANO entre A e B é obtido do seguinte modo:
$A_{m\times n} \otimes B_{n\times p} = C_{m\times p} = (c_{ik}) = \bigvee_{j=1}^{n}(a_{ij} \wedge b_{jk}); \forall i = 1, \cdots, m; \forall k = 1, \cdots, p$.
EXEMPLO:

Seja a matriz booleana $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Então, a matriz

$$A^2 = A \otimes A = \begin{bmatrix} (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 0) \\ (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(0\wedge 0) \\ (1\wedge 1)\vee(1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 0) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (1)\vee(0)\vee(1) & (0)\vee(0)\vee(1) & (1)\vee(0)\vee(0) \\ (1)\vee(0)\vee(0) & (0)\vee(0)\vee(0) & (1)\vee(0)\vee(0) \\ (1)\vee(1)\vee(0) & (0)\vee(0)\vee(0) & (1)\vee(0)\vee(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DEFINIÇÃO:(Matriz de Adjacência)

Seja o conjunto $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, e $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A.

Seja $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ uma matriz quadrada de ordem n, cujos elementos $(m_{ij}), \forall i = 1, \cdots, n; \forall j = 1, \cdots, n$

são obtidos do seguinte modo $(m_{ij}) = \begin{cases} 1; & \text{se} \quad (x_i, x_j) \in \mathcal{R} \\ 0; & \text{se} \quad (x_i, x_j) \notin \mathcal{R} \end{cases}$

A matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ é denominada "MATRIZ DE ADJACÊNCIA de $\mathcal{R}$".

EXEMPLO.1: Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x > y\}$ em A então, para $\mathcal{R} = \{(2, 1), (3, 2), (3, 1)\}$.

Assim,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \mathcal{M}_{\mathcal{R}} = & \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x > y\} = \{(2, 1), (3, 2), (3, 1)\}$.
Então, a Relação Inversa é dada por;
$\mathcal{R}^{-1} = \{(x, y) \in A \times A \mid x < y\} = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$;
e, a Relação Complementar;
$\overline{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq y\} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$.
Agora, construindo as matrizes que representam as relações, temos,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{t}; \text{ e,}$$

$$\mathcal{M}_{\overline{\mathcal{R}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 + \mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{t}.$$

Relações - Representação Matricial

PROPRIEDADES: Matriz de Adjacência

Seja o conjunto $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, e $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A; e, seja a "MATRIZ DE ADJACÊNCIA" $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = (m_{ij}) = \begin{cases} 1; \text{ se } (x_i, x_j) \in \mathcal{R} \\ 0; \text{ se } (x_i, x_j) \notin \mathcal{R} \end{cases}$; $\forall i = 1, \cdots, n$ e $\forall j = 1, \cdots, n$ então,

- "*Matriz de Adjacência*" da RELAÇÃO COMPLEMENTAR $\overline{\mathcal{R}}$
  $\mathcal{M}_{\overline{\mathcal{R}}} = (m_{ij}) = \begin{cases} 0; \text{ se } (x_i, x_j) \in \mathcal{R} \\ 1; \text{ se } (x_i, x_j) \notin \mathcal{R} \end{cases}$
- "*Matriz de Adjacência*" da RELAÇÃO INVERSA $\mathcal{R}^{-1}$
  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}^{-1}} = \mathcal{M}^{t}_{\mathcal{R}}$

Relações - Representação Matricial

EXEMPLO.2

Seja $\mathcal{R}$ uma relação em $A = \{1, 2, 3\}$ e seja a sua Matriz de Adjacência

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{ então; } \mathcal{R} = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3)\}$$

Note que;

$$\mathcal{M}_{\overline{\mathcal{R}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \text{ e,}$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}};$$

ou seja, $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$; e, $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{t} \Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ é matriz simétrica.

Relações - Representação Matricial

RELAÇÃO REFLEXIVA

- *Matriz de Adjacência* de uma RELAÇÃO REFLEXIVA,
  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = (m_{ij}) = \begin{cases} 1; & \text{se } i = j \\ 0 \text{ ou } 1; & \text{se } i \neq j \end{cases}$
  EXEMPLO: Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e
  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq y\} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3), (1,3)\}$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- *Matriz de Adjacência* de uma RELAÇÃO IRREFLEXIVA.

  $$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = (m_{ij}) = \begin{cases} 0; & \text{se } i = j \\ 0 \text{ ou } 1; & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

  EXEMPLO: Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e

  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x < y\} = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\};$

  $$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- *Matriz de Adjacência* de uma RELAÇÃO SIMÉTRICA.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = (m_{ij}) = \begin{cases} 0 \text{ ou } 1; & \text{se } i = j \\ (m_{ji}); & \text{se } i \neq j \end{cases};$$

ou seja,

$\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ é uma "*Matriz Simétrica*" $\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{t}$.

EXEMPLO: Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e

$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y \text{ é ímpar}\} = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\}$;

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{t}.$$

- *Matriz de Adjacência* de uma RELAÇÃO ASSIMÉTRICA
  Para que a matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ seja de uma relação assimétrica, temos que
  $\exists (m_{ij}) \neq (m_{ji})$; para $i \neq j$; ou seja,
  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ não é uma "*Matriz Simétrica*".
  EXEMPLO: Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e
  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x \text{ divide } y\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$;

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- *Matriz de Adjacência* de uma RELAÇÃO ANTI-SIMÉTRICA

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = (m_{ij}) = \begin{cases} 0 \text{ ou } 1; & \text{se } i = j \\ 0 \text{ ou } 1; & \text{se } (m_{ji} = 0) \wedge (i \neq j) \\ 0; & \text{se } (m_{ji} = 1) \wedge (i \neq j) \end{cases}$$

EXEMPLO: Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y^2\} = \{(1, 1), (4, 2)\}$;

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- *Matriz de Adjacência* de uma RELAÇÃO TRANSITIVA

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = (m_{ik}) = \begin{cases} 1; & \text{se } (m_{ij}) = (m_{jk}) = 1; \forall i, j, k \\ 0; & \text{se } (m_{ij}) = (m_{jk}) = 0; \forall (i = j) \vee (j = k) \\ 0 \text{ ou } 1; & \text{se } (m_{ij}) = (m_{jk}) = 0; \forall (i \neq j) \wedge (j \neq k) \\ 0 \text{ ou } 1; & \text{se } (m_{ij}) \neq (m_{jk}); \quad \forall i, j, k \end{cases}$$

ou seja,

$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}^2}$

EXEMPLO: Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e

$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y \text{ é par}\} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\};$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- *Matriz de Adjacência* de uma RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = (m_{ik}) = \begin{cases} 1; & \text{se } i = k \\ m_{ki}; & \text{se } i \neq k \\ 1; & \text{se } (m_{ij}) = (m_{jk}) = 1; \forall i, j, k \end{cases}$$

EXEMPLO: Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e
$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y \text{ é par}\} = \{(1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3)\};$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- *Matriz de Adjacência* da RELAÇÃO INTERSECÇÃO $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$,
  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}\cap\mathcal{S}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}} \wedge \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$
- *Matriz de Adjacência* da RELAÇÃO UNIÃO $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$,
  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}} \vee \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$
- *Matriz de Adjacência* da RELAÇÃO COMPOSTA $\mathcal{R} o \mathcal{S}$,
  $\mathcal{M}_{\mathcal{R} o \mathcal{S}} = \mathcal{M}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$
- "*Matriz de Adjacência*" da RELAÇÃO POTÊNCIA $\mathcal{R}^n$; $n \geq 2$
  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}^n} = \underbrace{\mathcal{M}_{\mathcal{R}} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{R}}}_{n-fatores}$

Representação Matricial

Operações entre Relações

EXEMPLO: Sejam as matrizes $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- $\mathcal{M}_{\mathcal{R}\cap\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0\wedge 1 & 0\wedge 1 & 0\wedge 0 \\ 1\wedge 0 & 0\wedge 1 & 0\wedge 1 \\ 1\wedge 0 & 1\wedge 1 & 0\wedge 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- $\mathcal{M}_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0\vee 1 & 0\vee 1 & 0\vee 0 \\ 1\vee 0 & 0\vee 1 & 0\vee 1 \\ 1\vee 0 & 1\vee 1 & 0\vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

  $\otimes = ?$ produto booleano!

- $\mathcal{M}_{\mathcal{R}\circ\mathcal{S}} = \mathcal{M}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $\mathcal{M}_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\otimes 1 & 0\otimes 1 & 0\otimes 0 \\ 1\otimes 0 & 0\otimes 1 & 0\times 1 \\ 1\otimes 0 & 1\otimes 1 & 0\otimes 0 \end{bmatrix}$

Operações entre Relações - Representação Matricial

OBSERVAÇÕES

1. Na RELAÇÃO COMPOSTA temos a propriedade associativa

$$\mathcal{T} o (\mathcal{R} o \mathcal{S}) = (\mathcal{T} o \mathcal{R}) o \mathcal{S}$$

então,
$\mathcal{M}_{\mathcal{T} o (\mathcal{R} o \mathcal{S})} = \mathcal{M}_{(\mathcal{R} o \mathcal{S})} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{T}} =$
$(\mathcal{M}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{R}}) \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{T}} = \mathcal{M}_{\mathcal{S}} \otimes (\mathcal{M}_{\mathcal{R}} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{T}}) = \mathcal{M}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{M}_{(\mathcal{T} o \mathcal{R})} = \mathcal{M}_{(\mathcal{T} o \mathcal{R}) o \mathcal{S}}.$

2. Na inversa da RELAÇÃO COMPOSTA temos

$$(\mathcal{R} o \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{S}^{-1} o \mathcal{R}^{-1}$$

então,

$$\mathcal{M}_{(\mathcal{R} o \mathcal{S})^{-1}} = (\mathcal{M}_{(\mathcal{R} o \mathcal{S})})^{t} = (\mathcal{M}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{R}})^{t} = (\mathcal{M}_{\mathcal{R}})^{t} \otimes (\mathcal{M}_{\mathcal{S}})^{t} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}^{-1}} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{S}^{-1}} = \mathcal{M}_{(\mathcal{S}^{-1} o \mathcal{R}^{-1})}$$

Relações - Exercícios

Seja $A = \{3, 4, 6, 7\}$ e seja uma relação $\mathcal{R}$ em A definida em cada item abaixo.

(i) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq y\}$

(ii) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y = 10\}$

(iii) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y \geq 10\}$

(iv) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y + 1\}$

(a) Classifique cada relação em reflexiva, irreflexiva, assimétrica, simétrica, anti-simétrica, transitiva, conectada, equivalência.

(b) Determine para cada relação; os fechos $ref(\mathcal{R})$, $sim(\mathcal{R})$, e $tra(\mathcal{R})$.

(c) Determine para cada relação; as relações $\mathcal{R}^{-1}$, $\overline{\mathcal{R}}$, $\mathcal{R} o \mathcal{R}^{-1}$, e $\mathcal{R} o \overline{\mathcal{R}}$.

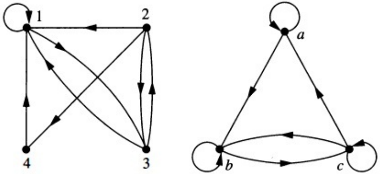
(d) Ache, se possível, uma partição de A determinada por cada relação.

(e) Represente cada relação dos itens (i),(ii),(iii),(iv),(b) e (c) por matriz de adjacência.

Definição: (Grafo Orientado ou Digrafo)

Um Grafo Orientado ou Digrafo consiste em um conjunto $\mathcal{V}$ de vértices(nós) e um conjunto E de arestas que são os arcos direcionados conectando os vértices. Notação: $G(\mathcal{V}, E)$

Exemplos:



Representação de uma Relação por Grafos

Uma Relação $\mathcal{R}$ em um conjunto $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ pode ser representada por um GRAFO ORIENTADO: $G(\mathcal{V}, E)$.

- Cada elemento do conjunto A é representado por um PONTO(nó), e
- Cada par ordenado $(x_i, x_j) \in \mathcal{R}$ é representado utilizando um ARCO com sua direção indicada por uma SETA de x_i para x_j; onde,
  x_i é denominado VÉRTICE INICIAL e x_j é o VÉRTICE FINAL deste arco.

OBSERVAÇÃO: Um par ordenado $(x_i, x_i) \in \mathcal{R}$ é representado por um ARCO DIRECIONADO que sai de x_i e retorna para x_i. Denominamos este arco de LOOP.

PROBLEMA.2: VÔOS ENTRE CIDADES

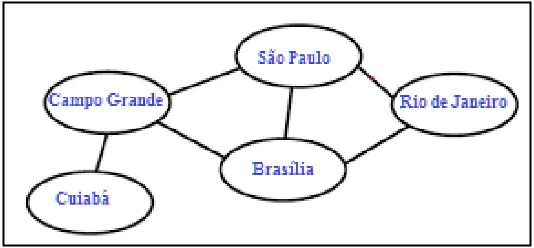


Figura: Grafo G(V,N) - Vôos entre Cidades

A MATRIZ DE ADJACÊNCIA associada ao grafo acima $G(V,N)$ é definida por;

$$a_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{se existirem vôos (}\textbf{arestas}\text{) entre as cidades(}\textbf{vértices}\text{) } i \text{ e } j \\ 0; & \text{caso contrário} \end{cases}$$

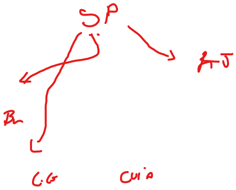
Grafo - Aplicação

Exemplo - Problema.2

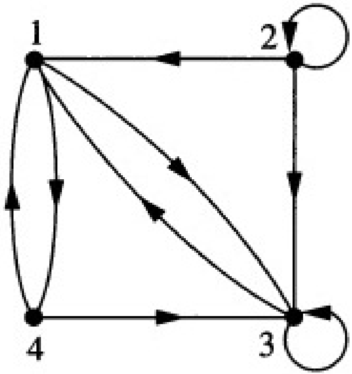
Cidades	São Paulo	R. de Janeiro	Brasília	C. Grande	Cuiabá	
São Paulo	0	1	1	1	0	Linha.1
R. de Janeiro	1	0	1	0	0	Linha.2
Brasília	1	1	0	1	0	Linha.3
C. Grande	1	0	1	0	1	Linha.4
Cuiabá	0	0	0	1	0	Linha.5
	Coluna.1	Coluna.2	Coluna.3	Coluna.4	Coluna.5	

A Matriz de Adjacência associada ao problema;

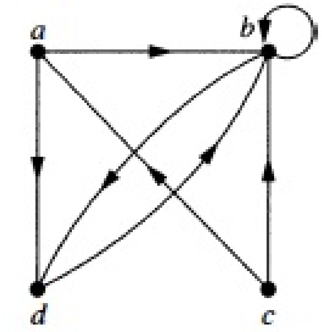
$$\mathbf{A_5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



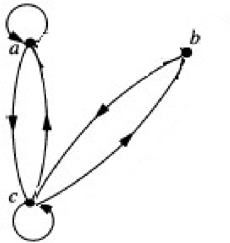
Exemplo.1: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e
$\mathcal{R} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 3)\}$



EXEMPLO.2: $A = \{a, b, c, d\}$ e
$\mathcal{S} = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b), (d, b)\}$

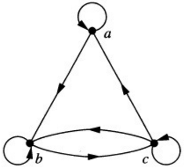


EXEMPLO.3: $A = \{a, b, c, d\}$ e
$\mathcal{T} = \{(a, a), (a, c), (b, c), (c, c), (c, a), (c, b)\}$



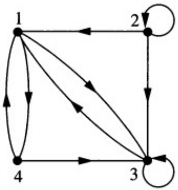
Relação REFLEXIVA - Grafo

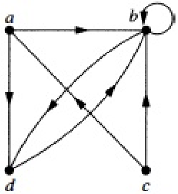
O Grafo de uma relação $\mathcal{R}$ REFLEXIVA é identificado pela "existência do LOOP em todos os nós".

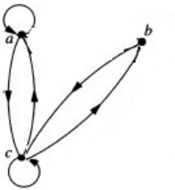


$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c), (c, a), (c, b)\}$$

Exemplo.1: $\mathcal{R}$ Exemplo.2: $\mathcal{S}$ Exemplo.3: $\mathcal{T}$



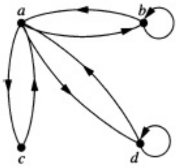




Observação: Verificando o Grafo das relações $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$; é fácil ver que elas não são reflexivas, porque não tem o loop em todos os nós.
E, também não são irreflexivas, pois têm ao menos um loop nos nós.

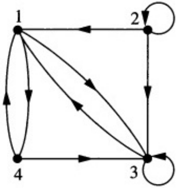
Relação SIMÉTRICA - Grafo

O Grafo de uma relação $\mathcal{R}$ SIMÉTRICA é identificado quando "sempre que houver um arco saindo de um determinado nó para um destino, deve existir outro que retorna ao nó saindo do mesmo destino".

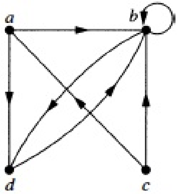


$\mathcal{R} = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, a), (c, a), (d, d), (d, a)\}$

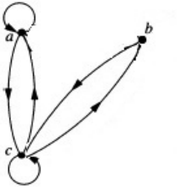
EXEMPLO.1: $\mathcal{R}$



EXEMPLO.2: $\mathcal{S}$



EXEMPLO.3: $\mathcal{T}$



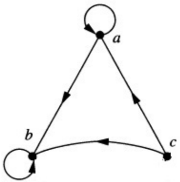
OBSERVAÇÃO: Verificando o Grafo das relações $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$; notamos que apenas a relação $\mathcal{T}$ é SIMÉTRICA pois "sempre que um arco sai de um nó x_i para um destino x_j, existe outro que retorna ao nó x_i saindo daquele destino x_j. Enquanto que nas relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ existem arcos que não retornam à mesma origem, por isso, não são SIMÉTRICAS.

$\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são ASSIMÉTRICAS.

As relações $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$; também não são ANTI-SIMÉTRICAS pois existe ao menos " um arco saindo do nó x_i para um destino x_j, e retornando do nó x_j para x_i sendo $i \neq j$.

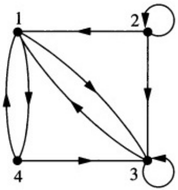
Relação TRANSITIVA - Grafo

O Grafo de uma relação $\mathcal{R}$ TRANSITIVA é identificado quando "sempre que houver um arco direcionado do nó x_i para x_j e um arco de x_j para x_k deve existir um arco direcionado de x_i para x_k".

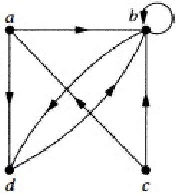


$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (c, a), (c, b), (b, b)\}$$

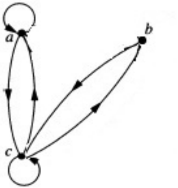
EXEMPLO.1:$\mathcal{R}$



EXEMPLO.2:$\mathcal{S}$



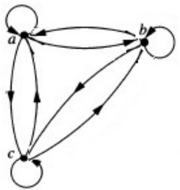
EXEMPLO.3: $\mathcal{T}$



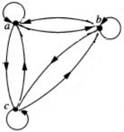
OBSERVAÇÃO: Verificando o Grafo das relações $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$; temos que não são TRANSITIVAS porque nem todos os arcos dos nós x_i para x_j e de x_j para x_k garantem a existência do arco de x_i para x_k.

Relação EQUIVALÊNCIA - Grafo

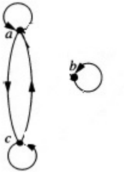
O Grafo de uma relação $\mathcal{R}$ de EQUIVALÊNCIA é identificado quando "satisfaz às condições dos grafos da relação REFLEXIVA, SIMÉTRICA e TRANSITIVA, simultaneamente".



OBSERVAÇÃO: A relação de equivalência deste exemplo é também CONECTADA.

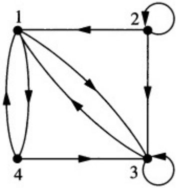


Contudo, nem toda relação de EQUIVALÊNCIA será CONECTADA; por exemplo:

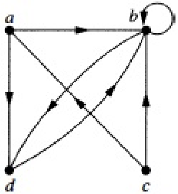


Notamos que existem elementos em A que não estão relacionados. Por exemplo: $a \not\mathcal{R} b$ e $b \not\mathcal{R} c$.

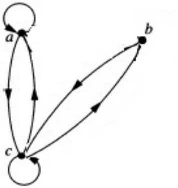
Exemplo.1:$\mathcal{R}$



Exemplo.2:$\mathcal{S}$

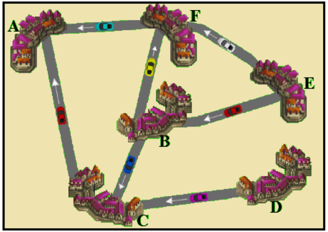


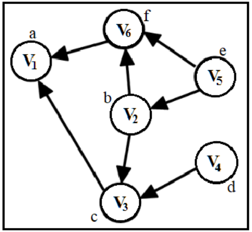
Exemplo.3: $\mathcal{T}$



Observação: Verificando o Grafo das relações $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$; temos que não são de equivalências porque não são ao mesmo tempo reflexivas, simétricas e transitivas.

EXEMPLO - CIDADES - Grafo





O Grafo do problema acima representa a relação $\mathcal{R}$ no conjunto das cidades $A = \{a, b, c, d, e, f\}$:
$\mathcal{R} = \{(b, c), (b, f), (c, a), (d, c), (e, b), (e, f), (f, a)\}$
A relação $\mathcal{R}$ é IRREFLEXIVA, ASSIMÉTRICA, ANTI-SIMÉTRICA, não é TRANSITIVA, não é EQUIVALÊNCIA, e não é CONECTADA.

(1) Seja uma relação $\mathcal{R}$ representada por $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique se $\mathcal{R}$ é REFLEXIVA, SIMÉTRICA, ANTI-SIMÉTRICA, TRANSITIVA, CONECTADA.

(2) Seja uma relação $\mathcal{R}$ em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ representada pela matriz de adjacência $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$. Represente cada relação abaixo por DIGRAFOS.

(a) $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Relações - Exercícios

(3) Seja $A = \{3,4,6,7\}$ e seja uma relação $\mathcal{R}$ em A definida em cada item abaixo.

(i) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in A \times A \mid x \leq y\}$
(ii) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in A \times A \mid x + y = 10\}$
(iii) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in A \times A \mid x + y \geq 10\}$
(iv) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in A \times A \mid x = y + 1\}$

(a) Classifique cada relação em reflexiva, irreflexiva, assimétrica, simétrica, anti-simétrica, TRANSITIVA, conectada, EQUIVALÊNCIA. (JUSTIFIQUE AS SUAS RESPOSTAS)
(b) Determine para cada relação; os fechos $ref(\mathcal{R})$, $sim(\mathcal{R})$, e $tra(\mathcal{R})$.
(c) Determine para cada relação; as relações $\mathcal{R}^{-1}$, $\overline{\mathcal{R}}$, $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$, e $\mathcal{R} \circ \overline{\mathcal{R}}$.
(d) Ache, se possível, uma partição de A determinada por cada relação.
(e) Represente cada relação dos itens (i),(ii),(iii),(iv),(b) e (c) por uma matriz de adjacência; e também por um digrafo.

Relação - Ordem Parcial

Definição: (Relação de Ordem Parcial)

Seja a RELAÇÃO $\mathcal{R}$ sobre o conjunto $A \neq \emptyset$. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO DE ORDEM PARCIAL (ou PARCIALMENTE ORDENADA) se e somente se $\mathcal{R}$ é *reflexiva*, *anti-simétrica* e *transitiva*, simultaneamente.
Notação: $x \preceq y$ (ou, de forma equivalente, $y \succeq x$)
lê-se: x precede ou é igual a y (ou, de forma equivalente, y sucede ou é igual a x)

Dizemos ainda que A é um CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO (**POSET**- *Partially Ordered Set*) pela relação $\mathcal{R}$.
Notação: $(A, \preceq)$

Relação - Ordem Parcial

EXEMPLOS: As relações definidas abaixo são *reflexivas*, *anti-simétricas* e *transitivas*; isto é, são RELAÇÕES DE ORDEM PARCIAL.

1. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$
2. $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \mid y\}$
3. Seja $\mathcal{P}(A)$ o conjunto de todos os subconjuntos de A.
   $\mathcal{T} = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid X \subseteq Y\}$

OBSERVAÇÃO: No exemplo.2 se $A = \mathbb{Z}$, a relação $\mathcal{S}$ **não** seria *anti-simétricas* (por exemplo: $2 | -2$ e $-2 | 2$ mas $2 \neq -2$) e, consequentemente, não seria de ORDEM PARCIAL.

Relação - Ordem Parcial Estrita

Definição: (Relação de Ordem Parcial Estrita)

Dada uma relação de ordem parcial $\preceq^A$, designa-se por $\prec^A$ a relação definida:
$\forall x, y \in A; x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y \wedge x \neq y$,
dita relação de ordem ESTRITA " associada a ", ou " induzida por ", $\preceq^A$.
Notação: $x \prec y$ (ou $y \succ x$)
lê-se: " x **precede estritamente** y " (ou, de forma equivalente, y sucede estritamente x)

OBSERVAÇÃO:

- $\mathcal{R}$ é uma relação de ORDEM PARCIAL, em **sentido lato** (ou **ordem parcial lata**), se e somente se $\mathcal{R}$ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.
- $\mathcal{R}$ é uma relação de ORDEM PARCIAL, em **sentido estrito** (ou **ordem parcial estrita**), se e somente se $\mathcal{R}$ é irreflexiva e transitiva.
  Note que, neste caso, $\mathcal{R}$ também será assimétrica.

Relação - Ordem Parcial Estrita

EXEMPLOS: As relações definidas abaixo são *irreflexivas*, e *transitivas*;

1. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x > y\}$
2. $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < y\}$
3. Seja $\mathcal{P}(A)$ o conjunto de todos os subconjuntos de A.
   $\mathcal{T} = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid X \subset Y\}$

Definição:(Relação de Ordem Lexcográfica)

Sejam A e B conjuntos PARCIALMENTE ORDENADOS e $\prec^A$ e $\prec^B$ suas relações de ordem estrita.
Dizemos que a relação de ordem $\prec$ é uma relação de ORDEM LEXICOGRÁFICA(ou "DICIONÁRIO") sobre $A \times B$ se e somente se
$(\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B)((a_1, b_1) \prec (a_2, b_2)) \Rightarrow (a_1 \prec^A a_2) \vee ((a_1 = a_2) \wedge (b_1 \prec^B b_2))$.

OBSERVAÇÃO:
A RELAÇÃO DE ORDEM LEXCOGRÁFICA pode ser estendida no produto cartesiano de n conjuntos PARCIALMENTE ORDENADOS:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\mathcal{U});$$

onde, $\prec^{A_1}, \prec^{A_2}, \ldots, \prec^{A_n}$ são suas relações de ordem estrita, respectivamente.
Esta relação $\prec$ é uma relação de ORDEM LEXICOGRÁFICA sobre $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ se e somente se
$(\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n), (a_1', a_2', \ldots, a_n') \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n); ((a_1, a_2, \ldots, a_n) \prec (a_1', a_2', \ldots, a_n')) \Rightarrow (a_1 \prec^{A_1} a_1') \vee ((a_1 = a_1') \wedge (a_2 \prec^{A_2} a_2')) \vee \cdots \vee ((a_1 = a_1', \ldots, a_{n-1} = a_{n-1}') \wedge (a_n \prec^{A_n} a_n'))$.

EXEMPLOS: Seja o conjunto do alfabeto comum, ordenado na forma usual:
$A = \{a, b, c, d, e, \ldots, z\}$.
Então, neste caso, o produto cartesiano: $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \ \ vezes}$ pode representar o conjunto de todas as palavras de comprimento n.
Ao definirmos uma relação de ordem lexicográfica em A^n (ou seja, uma relação n-ária) como sendo a "ordem de precedência das palavras numa lista de ordem alfabética"; temos uma palavra $p_1 \prec p_2$.
Por exemplo, as palavras;
$p_1 = (l, i, v, r, e)$ e $p_2 = (l, i, v, r, o)$; *livre* $\prec$ *livro*
$p_1 = (f, i, r, m, a)$ e $p_2 = (f, o, r, m, a)$; *firme* $\prec$ *forma*
$p_1 = (b, a, r, r, o)$ e $p_2 = (c, a, r, r, o)$; *barro* $\prec$ *carro*

Relação - Quasi-Ordem

Definição: (Relação de Quasi-Ordem)

Seja a relação $\mathcal{R}$ sobre o conjunto $A \neq \emptyset$. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma relação de quasi-ordem (ou relação de pré-ordem) se e somente se $\mathcal{R}$ é *reflexiva* e *transitiva*, simultaneamente.

Exemplos: As relações definidas abaixo são *reflexivas* e *transitivas*; isto é, são relações de quasi-ordem .

1. $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \mid y\}$
2. Seja $\mathcal{P}(A)$ o conjunto de todos os subconjuntos de A.
   $\mathcal{T} = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid X \subseteq Y\}$

Relação - Ordem Total

Definição: (Relação de Ordem Total)

Seja a RELAÇÃO $\mathcal{R}$ sobre o conjunto $A \neq \emptyset$. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO DE ORDEM TOTAL se e somente se $\mathcal{R}$ é *reflexiva*, *anti-simétrica*, *transitiva* e *total*, simultaneamente.

EXEMPLOS:

1. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq y\}$
2. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$
3. Seja $\mathcal{P}(A)$ o conjunto de todos os subconjuntos de A.
   $\mathcal{T} = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid X \subseteq Y\}$, onde $A = \{x\}$ é um conjunto **unitário**.

Relação - Ordem Parcial e Total

OBSERVAÇÃO:

- O termo PARCIAL é utilizado porque nem todos os elementos do conjunto A estão relacionados, isto é, pode haver pares ordenados **incomparáveis**.
- Se todos os pares ordenados da *relação de ordem parcial* são **comparáveis**; dizemos que a relação é de ORDEM TOTAL (ou ORDEM LINEAR);
- Se a relação sobre A é de ORDEM TOTAL (ou ORDEM LINEAR) então A é dito ser TOTALMENTE ORDENADO (ou ORDENADO LINEARMENTE); ou ainda, dizemos que A é uma "CADEIA".
- Toda relação de ordem total é também de ordem parcial. Todavia, a recíproca não é verdadeira.

Relação - Ordem Parcial e Total

EXEMPLOS:

1. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$; $(A, \leq)$ é um POSET totalmente ordenado, pois podemos comparar todos os seus elementos. A é uma CADEIA .
2. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq y\}$; $(A, \geq)$ é um POSET totalmente ordenado, pois podemos comparar todos os seus elementos. A é uma CADEIA .
3. $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \mid y\}$; $(A, \mid)$ é um POSET mas **não** é totalmente ordenado. **Nem todos os elementos estão relacionados**.
4. Seja $\mathcal{P}(A)$ o conjunto de todos os subconjuntos de A.
   $\mathcal{T} = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid X \subseteq Y\}$
   $(A, \subseteq)$ é um POSET mas **não** é totalmente ordenado.
   Nem todos os elementos estão relacionados, exceto se A for um conjunto unitário :
   $\mathcal{P}(A) = \{\ \emptyset, \{x\}\ \} \Rightarrow \mathcal{T} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{x\}), (\{x\}, \{x\})\}$.

Relação de Ordem - Diagrama de Hasse

Diagrama de Hasse (Matemático Alemão Helmut Hasse - (1898 - 1979))

Definição: (Diagrama de Hasse)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, e seja a RELAÇÃO **finita** $\mathcal{R}$ em A; tais que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO DE ORDEM PARCIAL e $(A, \mathcal{R})$ um POSET.

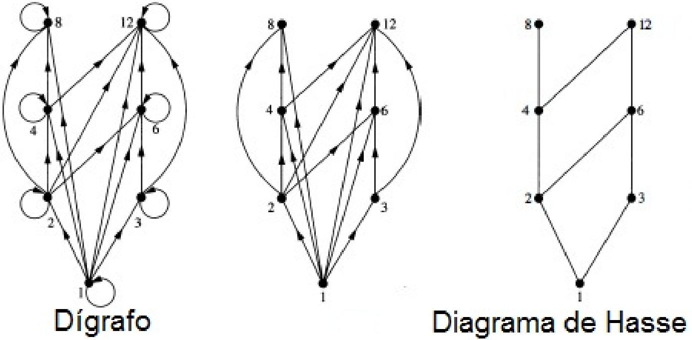
Podemos representar esta relação por um DIAGRAMA DE HASSE.

O DIAGRAMA DE HASSE é um diagrama sagital de $\mathcal{R}$ simplificado construído do seguinte modo:

1. Representam-se os elementos de A por pontos(ou pequenos círculos); e estes pontos também representam implicitamente os pares ordenados idênticos $(x_i, x_i) \in \mathcal{R}$
2. Representa-se por segmentos de reta interligando os pares ordenados $(x_i, x_j) \in \mathcal{R}$ e $(x_j, x_k) \in \mathcal{R}$, mas a transitividade representada por $(x_i, x_k) \in \mathcal{R}$ fica subentendida.
3. O diagrama é construído de baixo para cima orientando os pares ordenados de modo a respeitar a precedência entre os seus elementos.

Relação de Ordem - Diagrama de Hasse

Exemplo: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x \mid y\}$;
$(A, \mid)$ é parcialmente ordenado(poset).



Relação de Ordem - Diagrama de Hasse

EXEMPLOS: Seja $A = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid x \subseteq y\}$

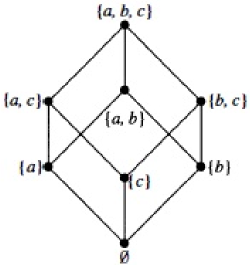


Diagrama de Hasse de

$(\{a,b,c\}, \subseteq)$

Definição:(ELEMENTO MINIMAL)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Se A for um conjunto PARCIALMENTE ORDENADO pela relação $\mathcal{R}$, um ELEMENTO MINIMAL de A é qualquer elemento $y \in A$ tal que $\forall a \in A, a\mathcal{R}y \Rightarrow a = y$; isto é, $a \preceq y \Rightarrow a = y$.

Definição:(ELEMENTO MAXIMAL)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Se A for um conjunto PARCIALMENTE ORDENADO pela relação $\mathcal{R}$, um ELEMENTO MAXIMAL de A é qualquer elemento $x \in A$ tal que $\forall a \in A, x\mathcal{R}a \Rightarrow a = x$; isto é, $x \preceq a \Rightarrow a = x$.

OBSERVAÇÃO:

- Não existe elemento que **sucede** um elemento maximal, nem há elemento que **precede** um elemento minimal.
- O poset $(A, \mathcal{R})$ pode ter mais de um elemento minimal e/ou maximal.

EXEMPLOS :

1. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$
elemento MINIMAL$=1$; e, elemento MAXIMAL: não tem $(\forall n \in \mathbb{N}, n < n + 1)$.
2. Sejam o conjunto $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, e $\mathcal{S} = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x \leq y\}$
elemento MINIMAL$=0$; e, elemento MAXIMAL $=1$.
3. $\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$,
elemento MINIMAL$=$ não tem; e, elemento MAXIMAL: não tem.
4. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ um conjunto parcialmente ordenado pela relação
$\mathcal{R} = \{(1, 3), (1, 4), (1, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 3), (4, 4), (5, 6), (5, 5), (6, 6)\}$,
elementos MINIMAIS$= \{1, 2, 5\}$ (observe que não existem pares tais que $(a, 2)$; $a \neq 2$ para podermos comparar a precedência; o mesmo ocorre para o 1 e 5);
elementos MAXIMAIS $= \{4, 6\}$. (não existem pares tais que $(4, a)$; $a \neq 4$ e $(6, a)$; $a \neq 6$)

Conjunto Parcialmente Ordenado - Elementos Minimal e Maximal

EXEMPLO: Sejam $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$ um conjunto parcialmente ordenado pela relação $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \mid x \mid y\} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 10), (2, 12), (2, 20), (4, 4), (4, 12), (4, 20), (5, 5), (5, 10), (5, 20), (5, 25), (10, 10), (10, 20), (12, 12), (20, 20), (25, 25)\}$

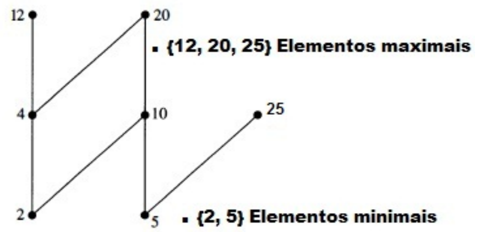


Diagrama de Hasse

Definição: (MÍNIMO)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Se A for um conjunto PARCIALMENTE ORDENADO pela relação $\mathcal{R}$, dizemos que **o** ELEMENTO MÍNIMO(ou MENOR ELEMENTO, ou PRIMEIRO ELEMENTO) de A é o elemento c tal que $\forall x \in A, c\mathcal{R}x$; isto é, $c \preceq x$ (ou seja, todos os elementos de A são *sucessores* ou iguais ao c).

Definição: (MÁXIMO)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Se A for um conjunto PARCIALMENTE ORDENADO pela relação $\mathcal{R}$, dizemos que **o** ELEMENTO MÁXIMO(ou MAIOR ELEMENTO, ou ÚLTIMO ELEMENTO) de A é o elemento b tal que $\forall x \in A, x\mathcal{R}b$; isto é, $x \preceq b$ (ou seja, todos os elementos de A são *precedentes* ou iguais ao b).

OBSERVAÇÃO:

- Se existe apenas um elemento maximal então este será **o máximo** de A.
- Se existe apenas um elemento minimal então este será **o mínimo** de A.
- Se A admite **mínimo** denota-se por $min(A)$ e se A admite **máximo** denota-se por $max(A)$.
- Se A admite **mínimo** então é único e se A admite **máximo** então é único.
- Se E é um subconjunto de A, $E \subseteq A$, então $min(E) \succeq min(A)$ e $max(E) \preceq max(A)$.

Máximo e Mínimo

Exemplos: Seja o poset $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$: $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$.
O elemento máximo : $\{0,1,2\}$
(note que nenhum outro subconjunto o contém; e, ele contém todos os outros.)
O elemento mínimo : $\emptyset$
(todos os outros sunconjuntos o contém; e, ele não contém outro conjunto diferente dele).

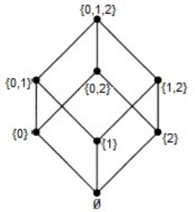


Diagrama de Hasse de
$(P(\{0,1,2\}), \subseteq)$

Máximo e Mínimo

EXEMPLO: Sejam $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$ e a relação $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \mid x \mid y\}$ sobre A.

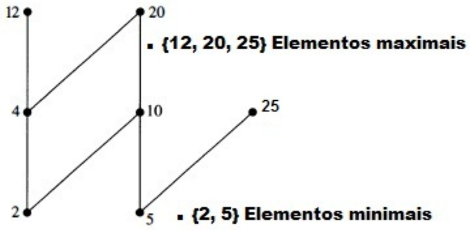


Diagrama de Hasse

elementos MINIMAIS$= 2, 5$; elementos MAXIMAIS $= 12, 20, 25$;
porém, *A* não admite MÍNIMO e nem MÁXIMO !

EXEMPLOS :

1. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$
$min(A)$ = elemento MINIMAL= 1;
e, $\forall E \subseteq \mathbb{N}$, E admite mínimo.
MÁXIMO: não tem $(\forall n \in \mathbb{N}, n < n + 1)$.
$\forall E \subseteq \mathbb{N}$, E admite máximo se for FINITO.

2. Sejam o conjunto $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, e $\mathcal{S} = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x \leq y\}$
$min(A)$ = elemento MINIMAL= 0; e, $max(A)$ =elemento MAXIMAL = 1.

3. $\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$,
elemento MINIMAL= não tem; e, elemento MAXIMAL: não tem.
$\mathbb{R}$ não admite mínimo e nem máximo.

Definição: (MINORANTE)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ um conjunto PARCIALMENTE ORDENADO pela relação $\preceq$; e seja $E \neq \emptyset$; $E \subseteq A$ dizemos que um ELEMENTO MINORANTE (ou COTA INFERIOR) de E é o elemento $\alpha \in A$ tal que $\forall x \in E; \alpha \preceq x$ (Ou seja, qualquer elemento $\alpha \in A$ tal que todos os elementos de E são *sucessores* ou iguais ao α).

Diz-se ainda que E é MINORADO, ou LIMITADO INFERIORMENTE (em A) se e somente se E tiver pelo menos um minorante em A : $\exists \alpha \in A \ (\forall x \in E, \alpha \preceq x)$.
Se $\alpha \in E$ então α é **o mínimo** de E.

Definição: (MAJORANTE)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ um conjunto PARCIALMENTE ORDENADO pela relação $\preceq$; e seja $E \neq \emptyset$; $E \subseteq A$ dizemos que um ELEMENTO MAJORANTE (ou COTA SUPERIOR) de E é o elemento $\beta \in A$ tal que $\forall x \in E; x \preceq \beta$ (Ou seja, qualquer elemento $\beta \in A$ tal que todos os elementos de E são *precedentes* ou iguais ao β).

Diz-se ainda que E é MAJORADO, ou LIMITADO SUPERIORMENTE (em A) se e somente se E tiver pelo menos um majorante em A : $\exists\alpha \in A\ (\forall x \in E, x \preceq \alpha)$.
Se $\beta \in E$ então β é **o máximo** de E.
OBSERVAÇÃO: Diz-se ainda que E é LIMITADO (em A) se e somente se E é MINORADO e MAJORADO em A , isto é,

$$\exists\alpha \in A,\ \exists\beta \in A\ (\forall x \in E, \alpha \preceq x \preceq \beta).$$

Conjunto Parcialmente Ordenado

Minorante e Majorante

EXEMPLO: Seja o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ parcialmente ordenado pela relação, $\mathcal{R}$ apresentada no Diagrama de Hasse abaixo; e seja $E = \{b, d, e\}$.

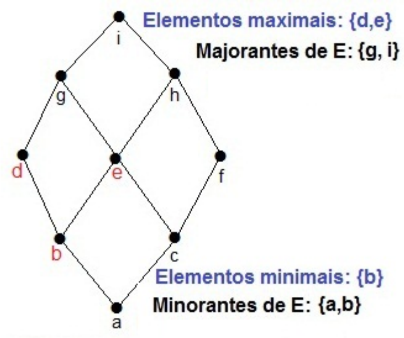


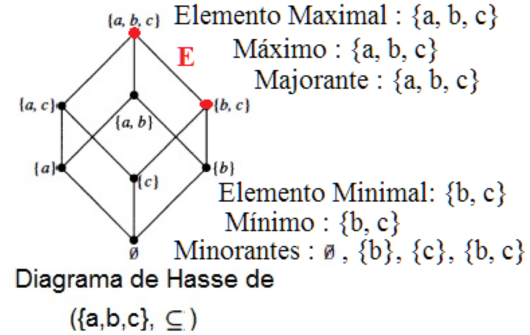
Diagrama de Hasse

Note que E não admite *máximo* e o $min(E) = b$ (b é também um minorante de E).

Conjunto Parcialmente Ordenado

Minorante e Majorante

EXEMPLO: Seja o conjunto $A = \{a, b, c\}$ e o poset $(P(A), \subseteq)$ e seja $E = \{\ \{b, c\}, \{a, b, c\}\ \} \subset P(A)$.



Definição: (Ínfimo)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ um conjunto PARCIALMENTE ORDENADO pela relação $\preceq$; e seja $E \neq \emptyset$; $E \subseteq A$, denotamos por $inf(E)$ e denominamos ÍNFIMO (ou LIMITANTE INFERIOR, ou MAIOR COTA INFERIOR ou EXTREMO INFERIOR) de E o elemento $\epsilon \in A$ tal que ϵ é o *maior* de todos os minorantes de E (diz-se "maior" considerando a precedência entre os minorantes, isto é, todos os minorantes de E são *precedentes* ou iguais ao ϵ) :
$\forall x \in E(\epsilon \preceq x) \ \wedge \ \forall \alpha \in A(\alpha \preceq x \Rightarrow \alpha \preceq \epsilon)$

OBSERVAÇÃO:

- Se o ínfimo de E existe, então é único.
- Se E admite mínimo então $min(E) = inf(E)$.

Definição: (SUPREMO)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ um conjunto PARCIALMENTE ORDENADO pela relação $\preceq$; e seja $E \neq \emptyset$; $E \subseteq A$, denotamos por $sup(E)$ e denominamos SUPREMO (ou LIMITANTE SUPERIOR ou MENOR COTA SUPERIOR ou EXTREMO SUPERIOR) de E o elemento $s \in A$ tal que s é o *menor* de todos os majorantes de E (diz-se "menor" considerando a precedência entre os majorantes, ou seja, todos os majorantes de E são *sucessores* ou iguais ao s) :
$\forall x \in E(x \preceq \epsilon) \ \wedge \ \forall \alpha \in A(x \preceq \alpha \Rightarrow \epsilon \preceq \alpha)$.

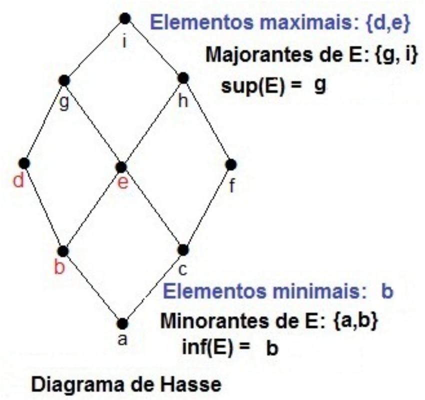
OBSERVAÇÃO:

- Se o supremo de E existe, então é único.
- Se E admite máximo então $max(E) = sup(E)$.

Conjunto Parcialmente Ordenado - Ínfimo e Supremo

Exemplo

Seja o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ parcialmente ordenado pela relação, $\mathcal{R}$ apresentada no Diagrama de Hasse abaixo; e seja $E = \{b, d, e\}$.



Conjunto Parcialmente Ordenado - Ínfimo e Supremo

Exemplo

Seja o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ parcialmente ordenado pela relação, $\mathcal{R}$ apresentada no Diagrama de Hasse abaixo; e seja $E = \{b, c, d, e\}$.

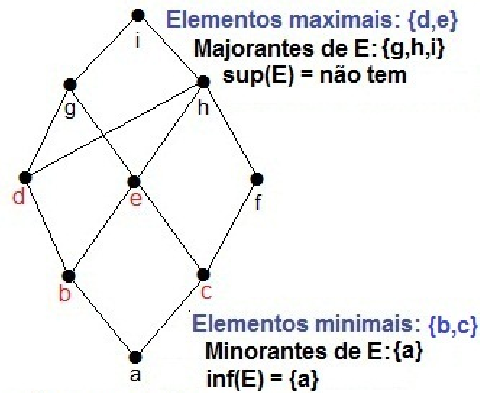


Diagrama de Hasse

Conjunto Parcialmente Ordenado

Exemplo

Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ parcialmente ordenado pela relação, $\mathcal{R}$ apresentada no Diagrama de Hasse abaixo; e seja $E = \{3, 4, 5, 6\}$.

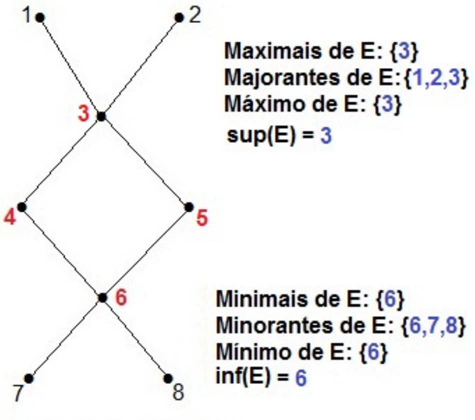


Diagrama de Hasse

Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ parcialmente ordenado pela relação, $\mathcal{R}$ apresentada no Diagrama de Hasse abaixo; e seja $E = \{4, 5, 6, 7\}$.

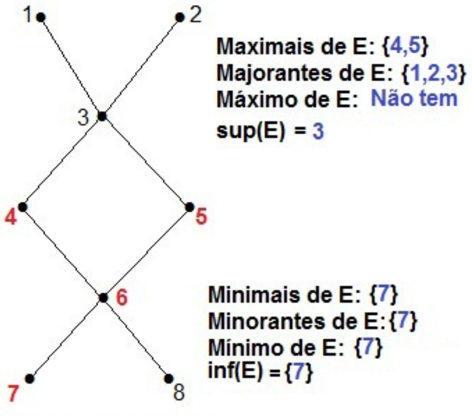
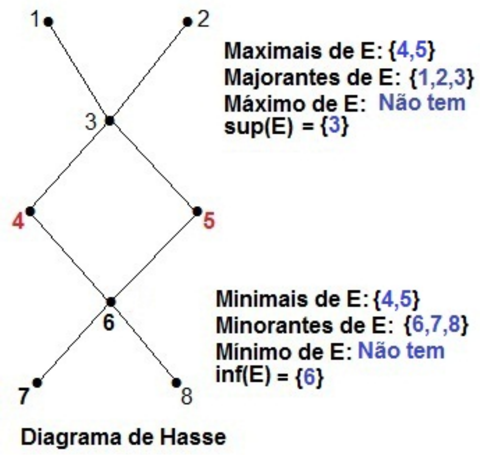


Diagrama de Hasse

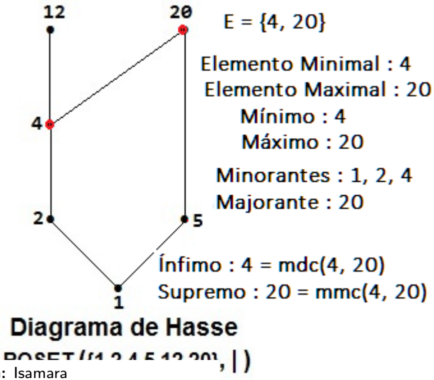
Conjunto Parcialmente Ordenado

Exemplo

Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ parcialmente ordenado pela relação, $\mathcal{R}$ apresentada no Diagrama de Hasse abaixo; e seja $E = \{4, 5\}$.



EXEMPLO: Seja $E = \{n_1, n_2\} \subset \mathbb{N}; (\mathbb{N}, \mid); n_1 \neq n_2$.
Minorantes de E: todo **divisor comum** de n_1 e n_2.
Majorantes de E: todo **múltiplo comum** de n_1 e n_2.
O ínfimo de E : $mdc(n_1, n_2)$
O supremo de E : $mmc(n_1, n_2)$



EXEMPLO: Seja o conjunto $A = \{a, b, c\}$ e o poset $(P(A), \subseteq)$ e seja $E = \{\ \{b, c\}, \{a, b, c\}\ \} \subset P(A)$.

$\forall E \subseteq P(A), E$ admite como MINORANTE a **interseção** dos seus elementos e como MAJORANTE a **união**.

$\forall E \subseteq P(A), E$ admite o ínfimo como sendo a **interseção** dos seus elementos e como SUPREMO a **união**.

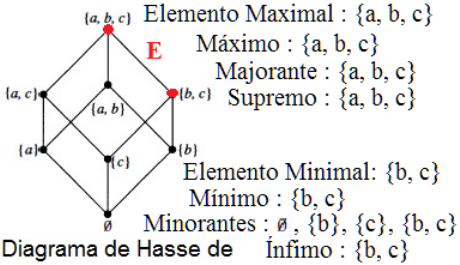


Diagrama de Hasse de

$(\{a,b,c\}, \subseteq)$

Definição: (Reticulados)

Um poset $(A, \mathcal{R})$ é chamado um Reticulado se e somente se todo subconjunto de A com dois elementos $\{x, y\}$ tem tanto ínfimo como supremo em A.

Observação: o $\mathbf{inf}(\{x, y\}) = x \wedge y$ e o $\mathbf{sup}(\{x, y\}) = x \vee y$.

Conjunto Parcialmente Ordenado

Exemplos - Reticulados

1. Seja $\mathcal{R} = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid X \subseteq Y\}$, e sejam dois subconjuntos quaisquer de A: A_1 e A_2. Então, o $\textbf{sup}(\{A_1, A_2\}) = A_1 \cup A_2$ e o $\textbf{inf}(\{A_1, A_2\}) = A_1 \cap A_2$.
2. Seja $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \mid y\}$.
   Então, o $\textbf{sup}(\{x, y\}) = x \vee y = mmc(x, y)$ e o $\textbf{inf}(\{x, y\}) = x \wedge y = mdc(x, y)$

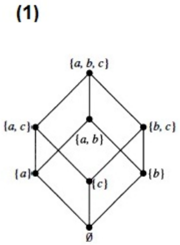


Diagrama de Hasse
A = {a,b,c}
(**P(A)** , ⊆) é um ***Reticulado***

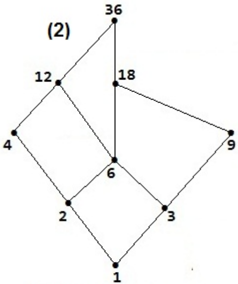


Diagrama de Hasse
A = {1,2,3,4,6,9,12,18,36}
(A, |) é um ***Reticulado***

Relação de Ordem Parcial - Relação Inversa

Teorema: (Relação Inversa - Ordem Parcial)

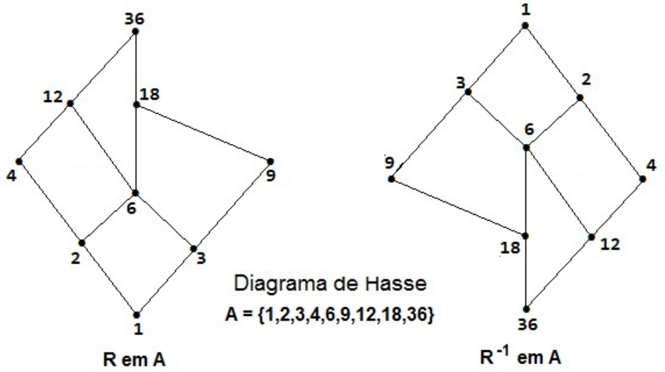
Sejam $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, e $\mathcal{R}$ em A uma relação de ordem parcial. Então, $\mathcal{R}^{-1}$ é uma RELAÇÃO DE ORDEM PARCIAL em A; ou seja, $\mathcal{R}^{-1}$ é *reflexiva*, *anti-simétrica* e *transitiva*, simultaneamente. $\mathcal{R}^{-1}$ é também denominada ORDEM OPOSTA de $\mathcal{R}$.

EXEMPLO: Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ o conjunto dos divisores positivos de 36 parcialmente ordenado por $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x \mid y\}$ então,
$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in A \times A \mid y \text{ é múltiplo de } x\}$

Relação de Ordem Parcial - Relação Inversa

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ o conjunto dos divisores positivos de 36 parcialmente ordenado por $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x \mid y\}$ então, $\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in A \times A \mid y$ é múltiplo de $x\}$



Ordenação Topológica ou Linearização

Definição:(Ordenação Topológica ou Linearização)

Seja A um conjunto finito não vazio PARCIALMENTE ORDENADO, $(A, \preceq)$. Denominamos "Ordenação Topológica(ou Linearização)" a construção de uma ordem total(linear) a partir do POSET $(A, \preceq)$.

Lema: Todo POSET não vazio $(A, \preceq)$ tem, pelo menos, um elemento minimal.

Ordenação Topológica (ou Linearização): Seja A um poset com n elementos. Construimos uma ordem total compatível com o poset $(A, \preceq)$ do seguinte modo,

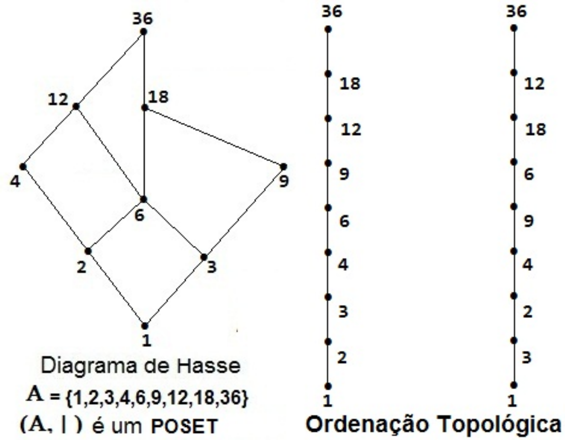
1. Primeiro escolhemos um elemento minimal a_1; este existe pelo lema acima.
2. Agora $(A - \{a_1\}, \preceq)$ continua sendo um poset. Se $A - \{a_1\}$ for não vazio então podemos escolher um minimal a_2 deste poset.
3. Ainda temos um poset $(A - \{a_1, a_2\}, \preceq)$ do qual podemos remover um outro minimal, se este conjunto não for vazio.

   Repetimos o processo de remover minimais enquanto sobrar elementos. Como A é finito, o processo termina; e, obtemos uma **sequência de minimais** formando uma ordem total(linear):

   $a_1 \prec a_2 \prec a_3 \prec \ldots \prec a_n$

Conjunto Parcialmente Ordenado

Exemplo - Linearização



Conjunto Parcialmente Ordenado - Linearização

Exercício: Determine uma ordem total(linear) compatível para o poset $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, \mid)$.

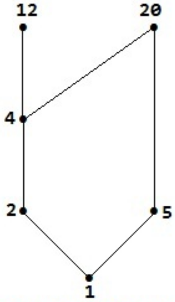
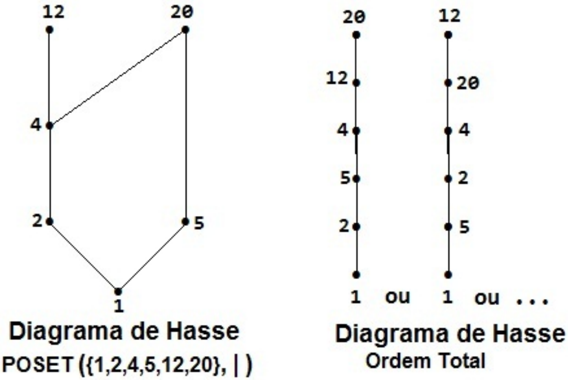


Diagrama de Hasse

POSET ({1,2,4,5,12,20}, |)

Conjunto Parcialmente Ordenado - Linearização

Exercício: Determine uma ordem total(linear) compatível para o poset $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, \mid)$.



Conjunto Bem Ordenado

Definição: (Conjunto Bem Ordenado)

Diz-se que o conjunto A é Bem Ordenado se e somente se A é ordenado e todo subconjunto não vazio de A admite mínimo.

Observação:

- O conjunto vazio é considerado Bem Ordenado.
- Todo subconjunto de um conjunto Bem Ordenado é também Bem Ordenado.
- Todo conjunto Bem Ordenado é Totalmente Ordenado.
  Todavia, um conjunto Totalmente Ordenado não é necessariamente Bem Ordenado.

Exemplo : O conjunto dos naturais $\mathbb{N}$ é Bem Ordenado, mas os conjuntos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ não o são.

(Q.1) Sejam os conjuntos $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Verifique se as relações abaixo são de ORDEM PARCIAL e/ou de ORDEM TOTAL. (Justifique suas respostas)

(a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x\}$.
(b) $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x + 1\}$.
(c) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times A \mid y^2 = x^2\}$.
(d) $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = (x - 1)^2 - 1\}$.
(e) $\mathcal{L} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2\}$.

(Q.2) Desenhe o **diagrama de Hasse** das relações de ordem da questão $Q.1$.

(Q.3) Identifique o DOMÍNIO, o CONTRADOMÍNIO e a IMAGEM das relações da questão $Q.1$.

(Q.4) Desenhe o **diagrama sagital** das relações da questão $Q.1$.

(Q.5) Considerando as relações definidas nos itens da Q1, Determine as relações :

(a) $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$
(b) $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$
(c) $\mathcal{S} \circ \mathcal{V}$
(d) $\mathcal{V} \circ \mathcal{S}$
(e) $\mathcal{T} \circ \mathcal{L}$

(Q.6) Considerando as relações definidas nos itens da Q1, Determine as relações inversas :

(a) $\mathcal{R}^{-1}$
(b) $\mathcal{S}^{-1}$
(c) $\mathcal{V}^{-1}$
(d) $\mathcal{T}^{-1}$
(e) $\mathcal{L}^{-1}$
(f) $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}$

(Q.1) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} = [-3, 3] \subset \mathbb{Z}$.
Nos itens abaixo, vamos considerar as definições: "Uma relação de ORDEM PARCIAL deve assumir as propriedades reflexiva, anti-simétrica e transitiva". "Uma relação de ORDEM TOTAL é uma relação de ordem parcial e **conectada**".

(a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x\} = \{(-3, -3), (-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.
Relação de ORDEM PARCIAL: $\mathcal{R}$ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Todavia, $\mathcal{R}$ não é de ORDEM TOTAL porque não é conectada.

(b) $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x+1\} = \{(-3, -2), (-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$.
Relação $\mathcal{S}$ apesar de ser anti-simétrica, não é reflexiva, transitiva e nem conectada. Portanto, não é de ORDEM PARCIAL e nem de ORDEM TOTAL.

(c) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times A \mid y^2 = x^2\} = \{(-3, -3), (-3, 3), (3, -3), (3, 3), (-2, -2), (-2, 2), (2, -2), (2, 2), (-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1), (0, 0)\}$.
Relação $\mathcal{S}$ apesar de ser reflexiva e transitiva, não é anti-simétrica e nem conectada. Portanto, não é de ORDEM PARCIAL e nem de ORDEM TOTAL.

(Q.1) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

(d) $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = (x-1)^2 - 1\} = \{(-1, 3), (0, 0), (1, -1), (2, 0), (3, 3)\}$.
Relação $\mathcal{V}$ apesar de ser anti-simétrica não é reflexiva, transitiva e nem conectada.
Portanto, não é de ORDEM PARCIAL e nem de ORDEM TOTAL.

(e) $\mathcal{L} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2\}\{(-3, 2), (-2, 2), (-1, 2), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$.
Relação $\mathcal{V}$ apesar de ser anti-simétrica e transitiva, não é reflexiva e nem conectada.
Portanto, não é de ORDEM PARCIAL e nem de ORDEM TOTAL.

(Q.3) Identifique o DOMÍNIO, o CONTRA DOMÍNIO e a IMAGEM das relações da questão $Q.1$.

(a) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in A \times A \mid y = x\} =$
$\{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$.
$D(\mathcal{R}) = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\} = A$
$Im(\mathcal{R}) = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\} = A$

(b) $\mathcal{S} = \{(x,y) \in A \times A \mid y = x+1\} = \{(-3,-2),(-2,-1),(-1,0),(0,1),(1,2),(2,3)\}$.
$D(\mathcal{S}) = \{-3,-2,-1,0,1,2\} \subset A$
$Im(\mathcal{S}) = \{-2,-1,0,1,2,3\} \subset A$

(c) $\mathcal{T} = \{(x,y) \in A \times A \mid y^2 = x^2\} =$
$\{(-3,-3),(-3,3),(3,-3),(3,3),(-2,-2),(-2,2),(2,-2),(2,2),$
$(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1),(0,0)\}$.
$D(\mathcal{T}) = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\} = A$
$Im(\mathcal{T}) = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\} = A$

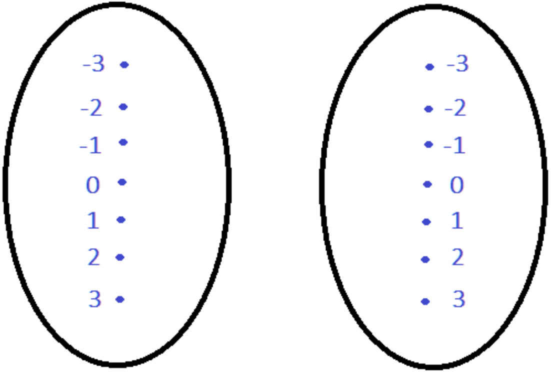
(Q.3) Identifique o DOMÍNIO, o CONTRA DOMÍNIO e a IMAGEM das relações da questão $Q.1$.

(d) $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = (x - 1)^2 - 1\} = \{(-1, 3), (0, 0), (1, -1), (2, 0), (3, 3)\}$.
$D(\mathcal{V}) = \{-1, 0, 1, 2, 3\} \subset A$
$Im(\mathcal{V}) = \{-1, 0, 3\} \subset A$

(e) $\mathcal{L} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2\} = \{(-3, 2), (-2, 2), (-1, 2), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$.
$D(\mathcal{L}) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} = A$
$Im(\mathcal{L}) = \{2\} \subset A$
Para todas as relações acima, o contra domínio é o conjunto A, onde $A \supseteq Im(\mathcal{R})$.

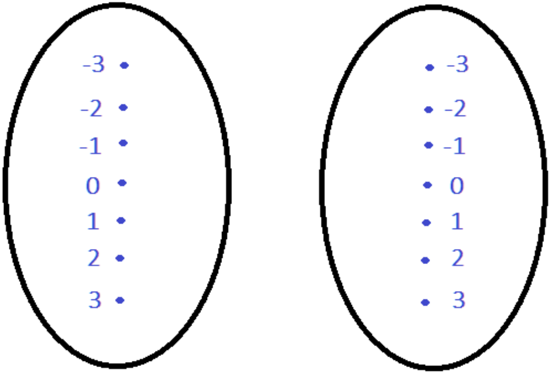
(Q.4) Desenhe o **diagrama sagital** das relações da questão $Q.1$.

(a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x\} =$
$\{(-3, -3), (-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.



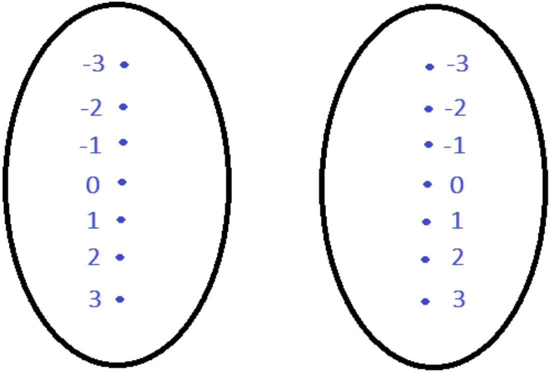
(Q.4) Desenhe o **diagrama sagital** das relações da questão $Q.1$.

(b) $\mathcal{S} = \{(x,y) \in A \times A \mid y = x+1\} = \{(-3,-2),(-2,-1),(-1,0),(0,1),(1,2),(2,3)\}$.



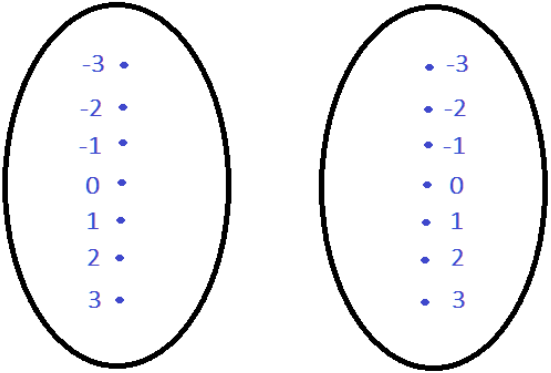
(Q.4) Desenhe o **diagrama sagital** das relações da questão $Q.1$.

(c) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times A \mid y^2 = x^2\} =$
$\{(-3,-3),(-3,3),(3,-3),(3,3),(-2,-2),(-2,2),(2,-2),(2,2),$
$(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1),(0,0)\}$.



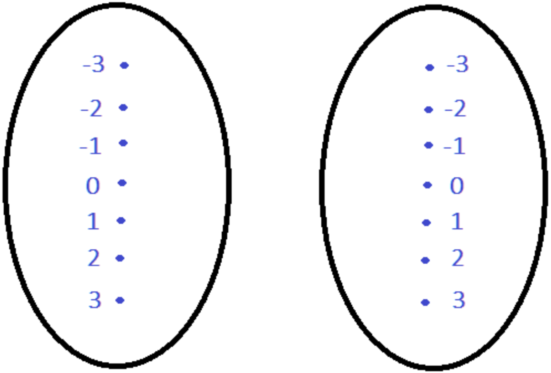
(Q.4) Desenhe o **diagrama sagital** das relações da questão $Q.1$.

(d) $\mathcal{V} = \{(x,y) \in A \times A \mid y = (x-1)^2 - 1\} = \{(-1,3),(0,0),(1,-1),(2,0),(3,3)\}$.



(Q.4) Desenhe o **diagrama sagital** das relações da questão $Q.1$.

(e) $\mathcal{L} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2\} = \{(-3, 2), (-2, 2), (-1, 2), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$.



(Q.5) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x\} = \{(-3, -3), (-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.
$\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x + 1\} = \{(-3, -2), (-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$.

(a) $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(-3, -2), (-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\} = \mathcal{S}$.

(b) $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$

Note que a relação identidade é o elemento neutro na composição entre as relações: $\mathcal{R} \circ \Delta_A = \Delta_A \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}, \forall \mathcal{R}$.

(Q.5) $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x + 1\} =$
$\{(-3, -2), (-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$.
$\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = (x - 1)^2 - 1\} = \{(-1, 3), (0, 0), (1, -1), (2, 0), (3, 3)\}$.

(c) $\mathcal{S} \circ \mathcal{V} = \{(0, 1), (1, 0), (2, 1)\}$

(d) $\mathcal{V} \circ \mathcal{S} = \{(-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)\}$

(Q.5) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times A \mid y^2 = x^2\} =$
$\{(-3,-3), (-3,3), (3,-3), (3,3), (-2,-2), (-2,2), (2,-2), (2,2),$
$(-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1), (0,0)\}.$
$\mathcal{L} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2\} =$
$\{(-3,2), (-2,2), (-1,2), (0,2), (1,2), (2,2), (3,2)\}.$

(e) $\mathcal{T} \circ \mathcal{L} = \{(-3,-2), (-3,2), (-2,-2), (-2,2), (-1,-2), (-1,2),$
$(0,-2), (0,2), (1,-2), (1,2), (2,-2), (2,2), (3,-2), (3,2)\}$

(Q.5) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x\}$.

$\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x + 1\}$.

(a) $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, z) \in A \times A \mid (x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{S}\}$

$= \{(x, z) \in A \times A \mid y = x \ \wedge \ z = y + 1\} = \{(x, z) \in A \times A \mid z = x + 1\} = \mathcal{S}$

(b) $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(x, z) \in A \times A \mid (x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{R}\}$

$= \{(x, z) \in A \times A \mid y = x \ \wedge \ z = y\} = \{(x, z) \in A \times A \mid z = x\} = \mathcal{R}$

Note que a m-ésima potência; $m \in \mathbb{N}$, da RELAÇÃO IDENTIDADE é igual a RELAÇÃO IDENTIDADE:

$\mathcal{R}^m = \mathcal{R} \circ \ldots \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}$, para $\mathcal{R} = \Delta_A$.

(Q.5) $\mathcal{S} = \{(x,y) \in A \times A \;\mid\; y = x+1\}.$

$\mathcal{V} = \{(x,y) \in A \times A \;\mid\; y = (x-1)^2 - 1\}.$

(c) $\mathcal{S} \circ \mathcal{V} = \{(x,z) \in A \times A \;\mid\; (x,y) \in \mathcal{V} \;\wedge\; (y,z) \in \mathcal{S}\}$

$= \{(x,z) \in A \times A \;\mid\; y = (x-1)^2 - 1 \;\wedge\; z = y+1\}$

$= \{(x,z) \in A \times A \;\mid\; z = (x-1)^2 - 1 + 1\} = \{(x,z) \in A \times A \;\mid\; z = (x-1)^2\}$

(d) $\mathcal{V} \circ \mathcal{S} = \{(x,z) \in A \times A \;\mid\; (x,y) \in \mathcal{S} \;\wedge\; (y,z) \in \mathcal{V}\}$

$= \{(x,z) \in A \times A \;\mid\; y = x+1 \;\wedge\; z = (y-1)^2 - 1\}$

$= \{(x,z) \in A \times A \;\mid\; z = (x+1-1)^2 - 1\} = \{(x,z) \in A \times A \;\mid\; z = x^2 - 1\}$

(Q.5) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times A \mid y^2 = x^2\}$.
$\mathcal{L} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2\}$.

(e) $\mathcal{T} \circ \mathcal{L} = \{(x, z) \in A \times A \mid (x, y) \in \mathcal{L} \wedge (y, z) \in \mathcal{T}\}$
$= \{(x, z) \in A \times A \mid y = 2 \wedge z^2 = y^2\} = \{(x, z) \in A \times A \mid z^2 = (2)^2\}$
$= \{(x, z) \in A \times A \mid z^2 = 4\} = \{(x, z) \in A \times A \mid z = \pm 2\}$

Note que, por definição da raiz quadrada: $\sqrt{y^2} = |y|$,
$z^2 = y^2 \Rightarrow z = \sqrt{y^2} = |y| = \pm y$.

Seja $x \in \mathbb{R}$. Diz-se que o MÓDULO(ou VALOR ABSOLUTO) de x denotado por $|x|$ é definido do seguinte modo

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } \; x \geq 0 \\ -x, & \text{se } \; x < 0 \end{cases}$$

Assim, $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = max\{-x, x\}$.
Consequentemente, $|x| = max\{-x, x\} \Rightarrow -x \leq |x| \wedge x \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.
Agora, voltando ao exercício, tem-se por definição da raiz quadrada: $\sqrt{x}; x \geq 0 \Rightarrow x = y^2$
$\sqrt{y^2} = z, z \geq 0 \Rightarrow z^2 = y^2 \Rightarrow z^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (z - y)(z + y) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{Se } z - y = 0 \Rightarrow z = y \Rightarrow y \geq 0 \\ \text{Se } z + y = 0 \Rightarrow z = -y \Rightarrow -y \geq 0 \Rightarrow y \leq 0 \end{cases}$$

Portanto, $\sqrt{y^2} = z = |y| = \pm y$

Exemplos:

- $\sqrt{25} = \pm 5$
- $\sqrt{x-3} \Rightarrow x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$
- $|2x-10| = 6 \Rightarrow (2x - 10 = 6) \ \vee \ (2x - 10 = -6) \Rightarrow x = 8 \ \vee \ x = 2 \Rightarrow S = \{2, 8\}.$
- $|2x-10| \geq 6 \Rightarrow (2x - 10 \geq 6) \ \vee \ (2x - 10 \leq -6) \Rightarrow x \geq 8 \ \vee \ x \leq 2 \Rightarrow S =]-\infty, 2] \ \cup \ [8, +\infty[.$
- $|2x-10| < 6 \Rightarrow -6 < 2x - 10 < 6 \Rightarrow 2 < x < 8 \Rightarrow S =]2, 8[.$

Relações

Observação: Módulo de um número real

Propriedades:

- $|x.y| = |x|.|y|$
  Note que
  $|x.y| = \sqrt{(x.y)^2} = \sqrt{(x^2.y^2)} = \sqrt{x^2}.\sqrt{y^2} = |x|.|y|$
- $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$
  Note que
  $|\frac{x}{y}| = \sqrt{(\frac{x}{y})^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|}$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x - y| \leq |x| + |y|$
- $|x| - |y| \leq |x - y|$

(Q.6) (a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x\}$.
$\mathcal{R}^{-1} = \{(-3, -3), (-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\} =$
$\{(y, x) \in A \times A \mid x = y\} = \mathcal{R}$.

(b) $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x + 1\} = \{(-3, -2), (-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$.
$\mathcal{S}^{-1} = \{(-2, -3), (-1, -2), (0, -1), (1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$
$\mathcal{S}^{-1} = \{(y, x) \in A \times A \mid x = y - 1\}$

(c) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times A \mid y^2 = x^2\}$.
$\mathcal{T}^{-1} = \{(-3, -3), (-3, 3), (3, -3), (3, 3), (-2, -2), (-2, 2), (2, -2), (2, 2),$
$(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1), (0, 0)\} = \mathcal{T} = \{(y, x) \in A \times A \mid x^2 = y^2\}$.

(Q.6) (d) $\mathcal{V} = \{(x,y)\in A\times A \mid y=(x-1)^2-1\} = \{(-1,3),(0,0),(1,-1),(2,0),(3,3)\}$.
$\mathcal{V}^{-1} = \{(3,-1),(0,0),(-1,1),(0,2),(3,3)\} = \{(y,x)\in A\times A \mid x=\pm(\sqrt{y+1})+1\}$.

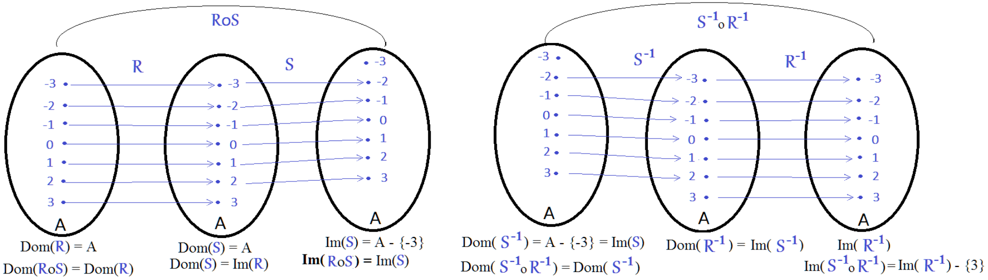
(e) $\mathcal{L} = \{(x,y)\in A\times A \mid y=2\} = \{(-3,2),(-2,2),(-1,2),(0,2),(1,2),(2,2),(3,2)\}$.
$\mathcal{L}^{-1} = \{(2,-3),(2,-2),(2,-1),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3)\}$
$\mathcal{L}^{-1} = \{(y,x)\in A\times A \mid y=2\}$.

(f) Por propriedade da inversa da composição entre relações, tem-se
$(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})^{-1} = (\mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{S}^{-1}) = \{(z,x)\in A\times A \mid (z,y)\in\mathcal{S}^{-1}\wedge(y,x)\in\mathcal{R}^{-1}\}$
$= \{(z,x)\in A\times A \mid y=z-1 \wedge x=y\} = \{(z,x)\in A\times A \mid x=z-1\} = \mathcal{S}^{-1}$

Ou, considerando o resultado da Q.4(a):
$(\mathcal{S}\circ\mathcal{R}) = \mathcal{S} \Rightarrow (\mathcal{S}\circ\mathcal{R})^{-1} = \mathcal{S}^{-1}\ \{(y,x)\in A\times A \mid x=y-1\}$

Note que $\mathcal{R}^{-1}$ é uma relação de identidade. Assim, $(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})^{-1} = (\mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{S}^{-1}) = \mathcal{S}^{-1}$

(Q.6) (f) $(\mathcal{S}\circ\mathcal{R}) = \mathcal{S} \Rightarrow (\mathcal{S}\circ\mathcal{R})^{-1} = \mathcal{S}^{-1}\ \{(y,x)\in A\times A \ \mid \ x = y-1\}$



(Q.7) Sejam os conjuntos $A = B = \mathbb{R}$. Determine o domínio, a imagem e o contradomínio das seguintes relações

(a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$.
(b) $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = -x + 1\}$.
(c) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = |x|\}$.
(d) $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \sqrt{(x-1)^2}\}$.
(e) $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \frac{1}{3x+3}\}$.
(f) $\mathcal{L} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \frac{1}{\sqrt{(x-4)^2}}\}$.

(Q.8) Faça a REPRESENTAÇÃO NO PLANO CARTESIANO das relações abaixo identificando o DOMÍNIO e a IMAGEM das relações.

(a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$.
(b) $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = -x + 1\}$.
(c) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = |x| + 2\}$.
(d) $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = (x - 1)^2\}$.