Geometria Analítica - Semana 3
Produto Escalar

Professor: Victor M. Cunha

Instituto de Matemática
e Estatística (IME) - UFBA

Abril 2022

Sumário

- Dados os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ e o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}
\vec{u} + \vec{v} &= (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) + (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) \\
&= (u_1 + v_1)\vec{i} + (u_2 + v_2)\vec{j} + (u_3 + v_3)\vec{k} \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\
\alpha\vec{u} &= \alpha(u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) \\
&= (\alpha u_1)\vec{i} + (\alpha u_2)\vec{j} + (\alpha u_3)\vec{k} \\
&= (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)
\end{aligned}$$

- Note que as expressões algébricas para a soma e o produto por escalar a partir das coordenadas dos vetores são consequência das propriedades da soma e produto.
- Interpretando as coordenadas como as componentes na base canônica, estas fórmulas ficam claras.

Operações em uma Base Qualquer

$$\vec{u} = u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2} + u_3\vec{e_3}$$
$$\vec{v} = v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2} + v_3\vec{e_3}$$

$$\vec{u}+\vec{v} = (u_1+v_1)\vec{e_1} + (u_2+v_2)\vec{e_2} + (u_3+v_3)\vec{e_3}$$

- Nestas igualdades, no entanto, não há nada de especial em relação à base canônica.
- De fato, dada uma base qualquer $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e_3}\}$, temos:

$$(u_1, u_2, u_3)_E + (v_1, v_2, v_3)_E = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)_E$$
$$\alpha(u_1, u_2, u_3)_E = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)_E$$

- Ou seja, estas expressões para a soma de vetores e produto por escalar são válidas em qualquer base.
- Isto vem da representação de vetores como combinação linear dos vetores da base e das propriedades operatórias.

- Um conjunto de vetores $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ é dito *Linearmente Independente*, ou *L.I.*, se nenhum deles for combinação linear dos outros.
- Podemos pensar que cada vetor traz alguma 'informação nova' ao conjunto, não temos 'redundância' em relação à combinações lineares.
- Uma forma mais direta de representar independência linear é que o conjunto $\mathcal{U}$ é *L.I.* se a equação

$$\sum_{\text{ß}=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{u}_n = \vec{0}$$

  apresenta apenas a solução trivial $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
- Um conjunto de vetores que não é *L.I.* é dito *Linearmente Dependente*, ou *L.D.*

- No plano, um par de vetores é *L.I.* se eles não são colineares (um não é múltiplo do outro).
- Algebricamente, sendo $\vec{u} = (u_1.u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, eles são *L.I.* se a única solução para:

$$\begin{cases} v_1\alpha_1 + u_1\alpha_2 = 0 \\ v_2\alpha_1 + u_2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

  for $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
- No espaço, um trio de vetores é *L.I.* se eles não são coplanares.
- Algebricamente, sendo $\vec{u} = (u_1.u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, eles são *L.I.* se a única solução para:

$$\begin{cases} v_1\alpha_1 + u_1\alpha_2 + w_1\alpha_3 = 0 \\ v_2\alpha_1 + u_2\alpha_2 + w_2\alpha_3 = 0 \\ v_3\alpha_1 + u_3\alpha_2 + w_3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

  for $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

- Mostre que no plano um conjunto de 3 ou mais vetores é sempre *L.D.*
- Considere a base $\mathcal{E} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$, onde $\vec{e_1} = (1, 2)$ e $\vec{e_2} = (2, -2)$.
  - Mostre que encontrar as coordenadas de $\vec{v} = (v_1, v_2)$ na base $\mathcal{E}$ equivale à solucionar a equação $E\alpha = v$, onde:
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
  - Esta equação sempre admite uma solução? Esta solução é única?
- Sejam $\{\vec{e}_1 \ldots, \vec{e}_n\}$ um conjunto de vetores *L.I.*. Mostre que se $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ e $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ então $\alpha_i = \beta_i$, $\forall i = 1 \ldots n$.
- Considere os vetores $\vec{f_1} = (2, -3)$ e $\vec{f_2} = (-4, 6)$. Dado $\vec{v} = (v_1, v_2)$, mostre que representar $\vec{v}$ como uma combinação linear de $\vec{f_1}$ e $\vec{f_2}$ equivale a resolver uma equação da forma $F\alpha = v$. O que podemos dizer da matriz F?

- Dados os vetores $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, o produto escalar entre u e v é definido por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

- Exemplos:
  - Qual o produto escalar entre $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ e $\vec{v} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$?
  - Dados $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (2, \alpha)$, encontrar α tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Para vetores no espaço, a definição é análoga. Dados $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, o produto escalar entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definido por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

- Exemplos: Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, 1)$ e $\vec{v} = (2, 0, -1)$, calcular:
  - $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$
  - $\vec{u} \cdot \vec{0}$ e $\vec{u} \cdot \vec{j}$.
  - $\vec{u} \cdot \vec{u}$ e $\vec{v} \cdot \vec{v}$.

Comutatividade $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Bilinearidade

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \qquad \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$$
$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}, \qquad (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Módulo Para todo $\vec{u} \neq \vec{0}$, temos:

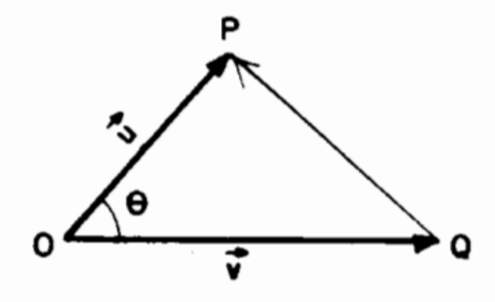
$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|u\|^2 > 0,$$

caso $\vec{u} = \vec{0}$, temos $\vec{0} \cdot \vec{0} = 0$.

- Dados $\vec{u} = (3, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 1)$, calcular:
  - $\vec{u} \cdot \vec{u}$, $\vec{v} \cdot \vec{v}$ e $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
  - $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.
  - $\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.
- Sabendo que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 2$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, calcular $(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v})$.
- Dado o vetor $\vec{u} = (2, 1)$, encontre um vetor unitário $\hat{v}$ tal que $\vec{u} \cdot \hat{v} = 0$.
- Mostre que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- Mostre que $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

- Veremos agora como interpretar geometricamente o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Dados dois vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$, temos pela lei dos cossenos no triângulo POQ:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,cos\,\theta$$



- Por outro lado, usando as propriedades do produto escalar, temos:

$$\begin{aligned}\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

- Comparando as duas equações, uma obtida geometricamente e a outra algebricamente, temos:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,cos\,\theta$$

- Logo, o produto escalar também é dado pelo produto dos módulos dos vetores pelo cosseno do ângulo formado entre eles.
- Na prática, esta equação é mais utilizada para calcular o ângulo formado entre dois vetores:

$$cos\,\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

- Note que se o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo, temos:

$$0 \leq \theta < \pi/2 \;\Leftrightarrow\; \vec{u} \cdot \vec{v} > 0$$

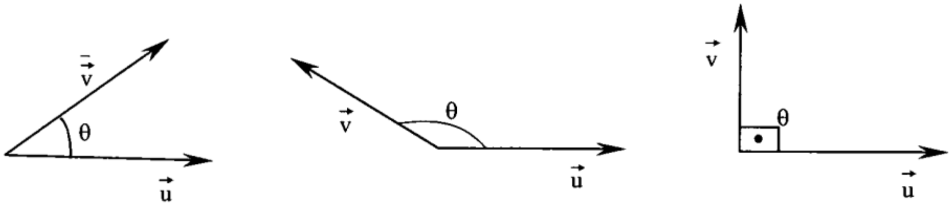
- Caso ele seja obtuso, temos:

$$\pi/2 < \theta \leq \pi \;\Leftrightarrow\; \vec{u} \cdot \vec{v} < 0$$

- Finalmente, caso os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam perpendiculares, temos:

$$\theta = \pi/2 \;\Leftrightarrow\; \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

- Logo, uma forma de verificar perpendicularidade é ver se temos $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.



- Note que, como $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$, faz sentido considerar o vetor nulo como perpendicular a qualquer outro vetor.
- Temos também a desigualdade de Schwarz, dada por:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$$

que pode ser provada geometricamente por $|cos\, \theta| < 1$ ou algebricamente a partir de $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|u\| + \|v\|$.

- Sabendo que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $120°$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ e $\|\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v}\|$.
- Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 2)$.
- Prove que o triângulo de vértices $A(2, 3, 1)$, $B(2, 1, -1)$ e $C(2, 2, -2)$ é retângulo.
- Mostre que as diagonais de um losango são perpendiculares entre si.
- Dados $\vec{u} = (x, y)$ e $\vec{v} = (1, 2)$, qual equação deve ser satisfeita por x e y tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$?
- Determinar um vetor ortogonal aos vetores $\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$.
- Dado $\vec{u} = (2, 1, 2)$, encontrar os ângulos formados entre $\vec{u}$ e os eixos e planos coordenados.

- Uma base é dita ortonormal se os vetores da base forem ortogonais entre si e tiverem norma unitária.
- Sendo assim, dada uma base ortonormal $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, temos:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{aligned}$$

- Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E$ e $\vec{u} = (v_1, v_2, v_3)_E$. Temos:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) \cdot (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) \\ &= (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) \cdot (v_1\vec{e}_1) + (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) \cdot (v_2\vec{e}_2) \\ &\qquad + (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) \cdot (v_3\vec{e}_3) \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \end{aligned}$$

- Ou seja, o cálculo do produto escalar que definimos a partir da base canônica é válido em qualquer base ortonormal.

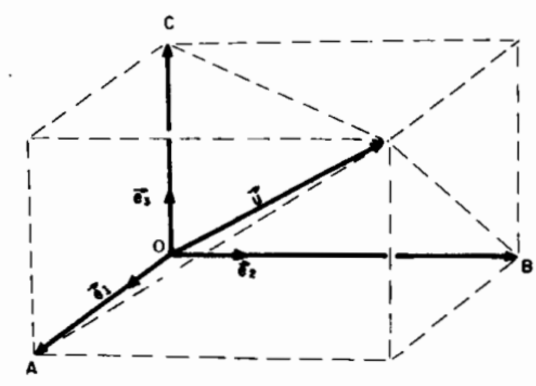
- Na verdade, poderíamos ter feito o contrário, definido o produto escalar a partir de suas propriedades de comutatividade e bilinearidade.
- Deste modo, ao dizermos que a base canônica é ortonormal, a expressão $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ aparece como consequência.

- Dada uma base ortonormal $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E$, note que temos também:

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_1 = u_1 \qquad \vec{u} \cdot \vec{e}_2 = u_2 \qquad \vec{u} \cdot \vec{e}_3 = u_3$$

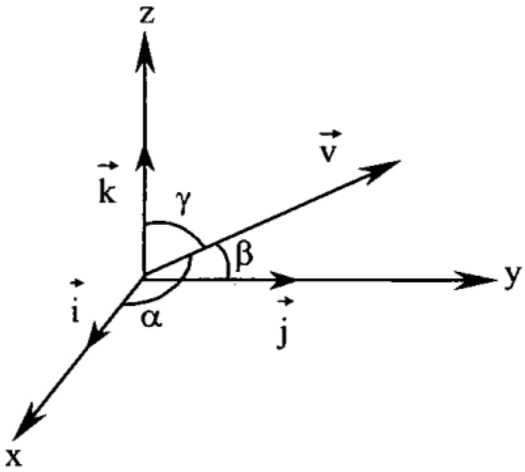
- Ou seja, as componentes de um vetor em uma base ortonormal são dadas pelos produtos escalares deste vetor com os vetores da base.
- Esta conveniência que as bases ortonormais apresentam em relação ao produto escalar explica a importância delas.

- Geometricamente, podemos interpretar o fato de que $\vec{u} \cdot \vec{e}_i = u_i$ a partir da projeção ortogonal do vetor $\vec{u}$ em relação à $\vec{e}_i$



- Note que se temos uma base ortonormal, a projeção de $\vec{u}$ na direção de $\vec{e}_i$ é dada por $proj_{\vec{e}_1}\vec{u} = u_i\vec{e}_i$.

- Dado o vetor $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, Os ângulos diretores de $\vec{v}$ são os ângulos α, β e γ que $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente.



- Note que, pela interpretação geométrica do produto escalar, temos:

$$cos\,\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{\|\vec{v}\|\left\|\vec{i}\right\|} = \frac{v_1}{\|\vec{v}\|} \qquad cos\,\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{\|\vec{v}\|\left\|\vec{j}\right\|} = \frac{v_2}{\|\vec{v}\|} \qquad cos\,\gamma = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{\|\vec{v}\|\left\|\vec{k}\right\|} = \frac{v_3}{\|\vec{v}\|}$$

- Portanto:

$$\vec{v} = \|\vec{v}\|\left(cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma\right)$$

  e o versor de $\vec{v}$ é dado por:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma\right)$$

- podemos interpretar os cossenos diretores como as coordenadas do versor na base canônica.
- Finalmente, como $\|\hat{v}\| = 1$, temos:

$$cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma = 1$$

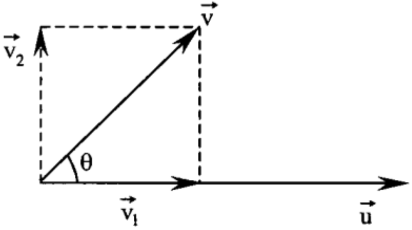
- Considere os vetores $\vec{e}_1 = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$, $\vec{e}_2 = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0)$ e $\vec{e}_3 = (0, 0, -1)$:
  - Mostre que $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é uma base ortonormal.
  - Encontre as componentes de $\vec{u} = (1, 2, 2)$ e $\vec{v} = (-3, 1, -1)$ na base E.
  - Calcule $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ e $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Calcule os ângulos diretores de $\vec{v} = (1, -1, 0)$.
- Os ângulos diretores de um vetor são α, $45°$ e $60°$. Determine α.
- Os vetores $\vec{e}_1 = (\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$ e $\vec{e}_2$ formam uma base ortonormal. Encontre $\vec{e}_2$.
- Os vetores $\vec{e}_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ formam uma base ortonormal. Encontre $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$, sabendo que $\vec{e}_2 \cdot \vec{k} = 0$.
- Sendo $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ortogonal, com $\|\vec{e}_1\| = 1$, $\|\vec{e}_2\| = 3$ e $\|\vec{e}_3\| = 2$, e dados $\vec{u} = (1, 2, 1)_E$ e $\vec{v} = (-2, 0, -1)_E$, calcule $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ e $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

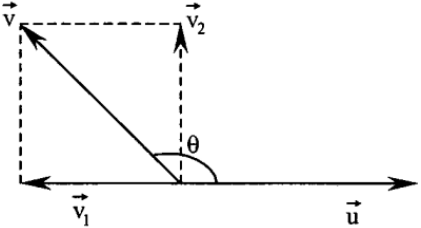
- Falamos rapidamente sobre projeções ortogonais no início do curso. Veremos agora como definir uma projeção ortogonal qualquer.
- Dados dois vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vamos decompor o vetor $\vec{v}$ em duas componentes: uma paralela e uma perpendicular à $\vec{u}$:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,$$

  onde $\vec{v}_1 // \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.
- Chamamos o vetor $\vec{v}_1$ da projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$:

$$\vec{v}_1 = proj_{\vec{u}}\,\vec{v}$$





- Note que como $\vec{v}_1 // \vec{u}$, temos $\vec{v}_1 = \alpha\vec{u}$. Deste modo, da perpendicularidade $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$, temos:

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 \cdot \vec{u} = (\vec{v} - \alpha\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{u} - \alpha(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 0 \end{aligned}$$

- Temos portanto $\alpha = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ e a projeção ortogonal pode ser calculada de modo simples a partir do produto escalar:

$$proj_{\vec{u}}\,\vec{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$$

- Em particular, se $\hat{u}$ for um vetor unitário, $\|\hat{u}\| = 1$ e a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\hat{u}$ é dada por:

$$proj_{\hat{u}}\,\vec{v} = (\vec{v}\cdot\hat{u})\hat{u}$$

- Note que isto é condizente com a interpretação geométrica do produto escalar: $\vec{v}\cdot\hat{u} = \|\vec{v}\|\, cos\,\theta$.

- Considere os vetores $\vec{u} = (-1, 0, 2)$ e $\vec{v} = (1, -1, 1)$. Calcule:
  - A projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.
  - A componente de $\vec{v}$ perpendicular à $\vec{u}$.
- Dados os vetores não-nulos $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{v}$, com $\vec{u}_1 // \vec{u}_2$. Mostre que $proj_{\vec{u}_1} \vec{v} = proj_{\vec{u}_2} \vec{v}$
- Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, com $\vec{u} \neq \vec{0}$, e o escalar α, mostre que:
  - $proj_{\vec{u}} (\vec{v} + \vec{w}) = proj_{\vec{u}} \vec{v} + proj_{\vec{u}} \vec{w}$.
  - $proj_{\vec{u}} (\alpha \vec{v}) = \alpha \, proj_{\vec{u}} \vec{v}$.
- Forme uma base ortonormal a partir da base $E = \{(1, 1), (-2, 1)\}$.
- Forme uma base ortonormal a partir da base $E = \{(3, 0, 4), (-2, 1, 1), (0, 1, -2)\}$.