Taxas relacionadas

$$y = f(u)$$

$$u = u(t) \to u'(t)$$

$$y(t) = f(u(t)) \Rightarrow y'(t) = f'(u(t)) \cdot u'(t)$$

Ideia: Calcular a taxa de variação de uma certa grandeza em termos da taxa de variação de outra grandeza relacionada (a qual pode ser medida mais facilmente).

Exemplos

1) Suponha que bombeamos ar para um balão esférico, de modo que seu volume aumenta a uma taxa de $100\ cm^3/s$. Quão rápido o raio do balão está aumentando quando o diâmetro for $50\ cm$?

Informações:

Informações:

Taxa de crescimento de ar: $100\ cm^3/s$

$$V = V(r) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V = V(t) \Rightarrow \frac{dV}{dt}(t) = 100\ cm^3/s$$

$$\frac{dr}{dt}(t) = ?$$

$$V(r) = \underbrace{V(r(t))} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot [r(t)]^3$$

$$\frac{dV}{dt}(t) = \frac{dV(r(t))}{dt} = \frac{dV}{dr}(r(t)) \cdot \frac{dr}{dt}(t)$$

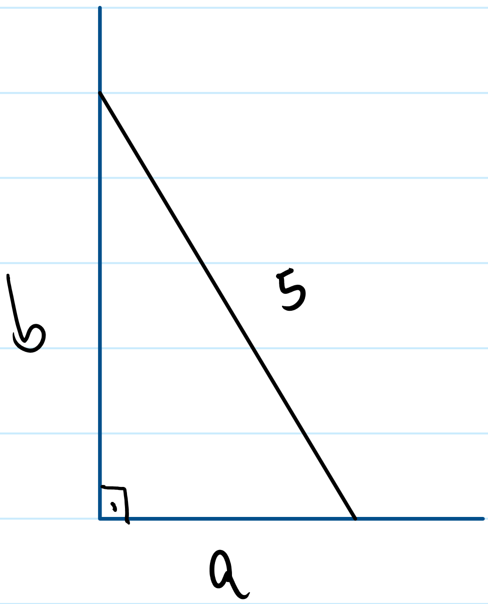
$$= 4 \cdot \pi (r(t))^2 \cdot \frac{dr}{dt}(t)$$

$$\therefore \frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot (25)^2} \cdot 100$$

$$\frac{d}{dt}(t) = \frac{\quad}{4\cdot\pi\cdot(25)^2}$$

$$= \frac{1}{25\pi} \cong 0{,}0127 \ cm/s$$

2) Uma escada com 5 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada desliza, afastando-se da parede a uma taxa de 1 m/s, quão rápido o topo da escada estará escorregando para baixo na parede, no momento em que a base da escada se encontra a $\underline{\underline{3}}$ m da parede?



$$a = a(t) \rightarrow \dot{a}(t) = 1 \ m/s$$

$$a^2 + b^2 = 25 \quad \therefore \quad b = b(a) = ?$$

$$a^2 + b^2 = 25 \quad \therefore \quad b = b(a) = ?$$

$$\rightarrow (a(t))^2 + (b(t))^2 = 25$$

Derivando com respeito a t:

$$2 \cdot \underline{a(t)} \cdot a'(t) + 2 \cdot \underline{b(t)} \cdot b'(t) = 0$$

$$\begin{cases} a = 3\,m \Rightarrow b = 4\,m \\ a'(t) = 1\,m/s \end{cases}$$

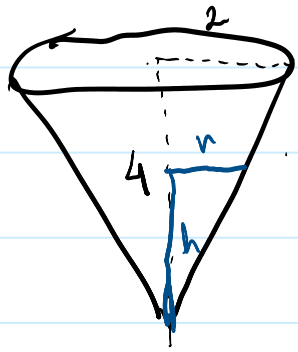
$$\therefore 2 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot b'(t) = 0$$

$$\therefore b'(t) = -\frac{3}{4}\,m/s$$

3) Um tanque de água possui o formato de uma cone circular invertido, com base de raio $r = 2\,m$ e altura $h = 4\,m$. Suponha que estamos bombeando água para o tanque numa taxa de $2\,m^3/min$. Encontre a taxa na qual o nível da água

Encontre a taxa na qual o nível da água está aumentando, quando a água estiver a 3 m de profundidade.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$$



$$\frac{h}{r} = \frac{4}{2} = 2$$

$$h = 2r$$

$$\therefore V = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{h^3}{4}$$

$$= \frac{\pi \cdot h^3}{12}$$

$$\frac{dV}{dt}(t) = 2 \ m^3/min$$

$$\frac{dV(h(t))}{dt} = \frac{dV}{dh}(h(t)) \cdot \frac{dh}{dt}(t)$$

$$= \frac{\pi}{12} \cdot 3 \cdot (h(t))^2 \cdot \frac{dh}{dt}(t)$$

$$2 = \frac{\pi}{12} \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot \frac{dh}{dt}(t)$$

$$\therefore \frac{dh}{dt}(t) = \frac{24}{27\pi} \text{ m/min}$$

$$= \frac{8}{9\pi} \text{ m/min.}$$

$$\cong 0{,}28 \text{ m/min}$$