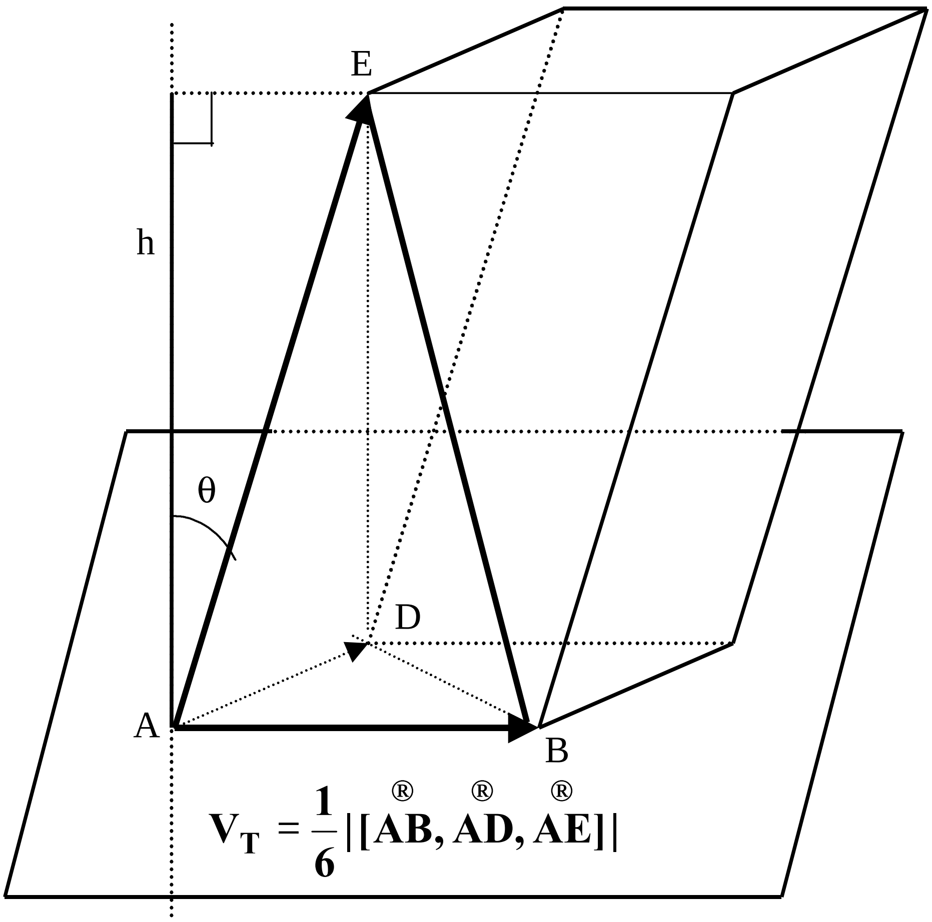
Cálculo



Vetorial

Instituto de Matemática – UFBA

1999

CAPÍTULO I - VETORES

1.1 Segmentos orientados

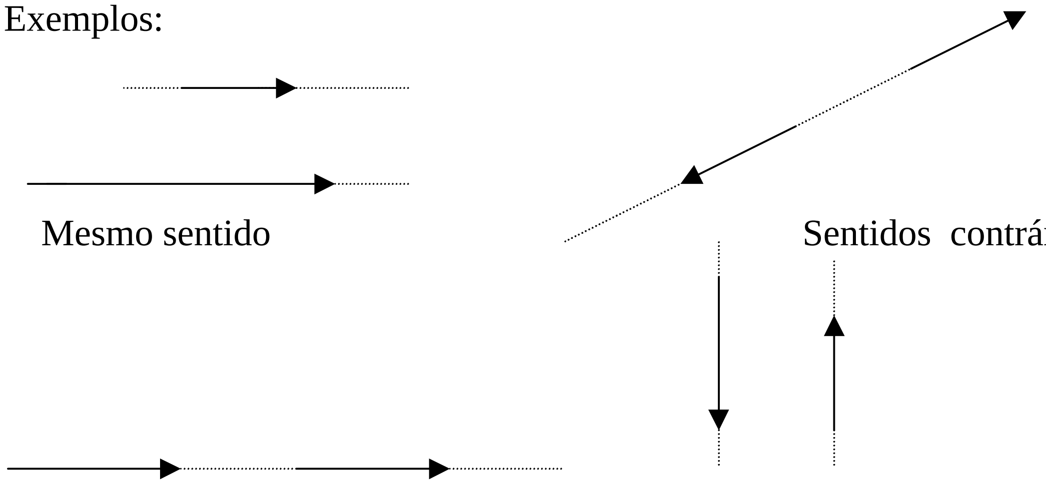
Consideremos uma reta r e sejam A e B dois pontos de r.

Ao segmento de reta AB, podemos associar um sentido : o sentido de A para B, ou o sentido de B para A. Escrevemos $\overline{AB}$ para representar o segmento de reta AB associado com o sentido de A para B. Dizemos que $\overline{AB}$ é o **segmento orientado de origem A e extremidade B** e $\overline{BA}$ é o segmento orientado de origem B e extremidade A. Chamamos $\overline{BA}$, **oposto** de $\overline{AB}$. Se A = B, dizemos que o segmento orientado $\overline{AB} = \overline{BA}$ é o **segmento nulo,** e escrevemos $\overline{AA}$ = O. Na reta r está representado graficamente $\overline{AB}$.

Fixada uma unidade de comprimento, a cada segmento orientado, podemos associar um número real não negativo, seu comprimento, que é a sua **medida** em relação àquela unidade. A medida do segmento $\overline{AB}$, indicamos por $\mathbf{med(\overline{AB})}$**.** Os segmentos nulos têm medida igual a zero. É claro que $\text{med}(\overline{AB}) = \text{med}(\overline{BA})$.

Dados dois segmentos orientados não nulos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, dizemos que eles têm **mesma direção**, se as retas suportes destes segmentos são paralelas ou coincidentes. Só podemos comparar os **sentidos** de dois segmentos orientados, se eles têm a mesma direção. Dois segmentos orientados opostos têm sentidos contrários.

Exemplos:



Mesmo sentido

Sentidos contrários

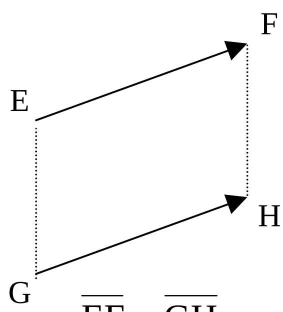
1.2 Equipolência

Definição: O segmento orientado $\overline{AB}$ é equipolente ao segmento orientado $\overline{CD}$, se ambos são segmentos nulos, ou se têm mesma medida e mesmo sentido.

Indicamos: $\overline{AB} \sim \overline{CD}$.

Exemplos:

$\overline{AA} \sim \overline{BB}$ $\quad$ $\overline{AB} \sim \overline{CD}$



$\overline{EF} \sim \overline{GH}$

Propriedades:

1. $\overline{AB} \sim \overline{AB}$ (reflexiva).
2. Se $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ então $\overline{CD} \sim \overline{AB}$ (simétrica).
3. Se $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ e $\overline{CD} \sim \overline{EF}$ então $\overline{AB} \sim \overline{EF}$ (transitiva).

4. Dados um segmento orientado $\overline{AB}$ e um ponto C, existe um único ponto D tal que $\overline{AB} \sim \overline{CD}$.
5. Se $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ então $\overline{BA} \sim \overline{DC}$.
6. Se $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ então $\overline{AC} \sim \overline{BD}$.

Essas propriedades são de fácil verificação.

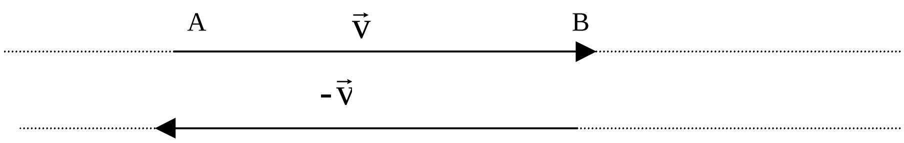
1.3 Vetores

Definição: Chamamos **vetor determinado por um segmento orientado $\overline{\mathbf{AB}}$**, ao conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a $\overline{AB}$.

O vetor determinado por $\overline{AB}$, indicamos por $\overrightarrow{AB}$.

Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ **são iguais** se, e somente se $\overline{AB} \sim \overline{CD}$. Um mesmo vetor $\overrightarrow{AB}$ é determinado por uma infinidade de segmentos orientados, que são chamados **representantes** desse vetor, e que são todos equipolentes entre si. Em particular, os segmentos nulos são representantes de um único vetor, que chamamos **vetor nulo**, e indicamos por $\vec{\mathbf{o}}$.

Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, chamamos o vetor $\overrightarrow{BA}$ **oposto** de $\overrightarrow{AB}$ e indicamos por $-\overrightarrow{AB}$ ou $-\vec{v}$.



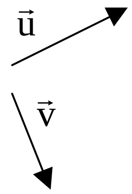
Decorre da propriedade 6 de 1.2 a implicação:

Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ então $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Dado um vetor $\vec{u}$, todos os seus representantes têm a mesma medida. Essa medida denominamos **módulo** do vetor $\vec{u}$, e indicamos por $|\vec{u}|$. Dizemos que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ não nulos têm **mesma direção** (**mesmo sentido**), se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm mesma direção (mesmo sentido).

Um vetor $\vec{u}$ é **unitário** se $|\vec{u}| = 1$. Chamamos **versor** de um vetor não nulo $\vec{u}$, o vetor unitário que tem mesmo sentido de $\vec{u}$, e indicamos por $\vec{u}°$.

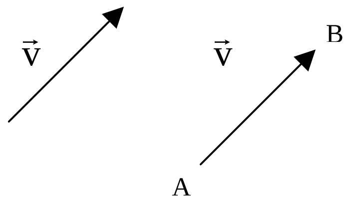
Dizemos que dois vetores não nulos são **ortogonais,** se podem ser representados por segmentos orientados ortogonais, e indicamos por $\vec{u} \perp \vec{v}$.



Convencionamos que o vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor do espaço.

1.4 Soma de um ponto com um vetor

Definição: Dados um ponto A e um vetor $\vec{v}$, existe um único ponto B tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$. O ponto B chamamos **soma do ponto A com o vetor** $\vec{v}$.



Indicamos a soma $A + (\vec{v})$, simplesmente por $A + \vec{v}$.

Propriedades:
1. $A + \vec{o} = A$.
2. $(A - \vec{v}) + \vec{v} = A$.
3. Se $A + \vec{v} = B + \vec{v}$, então $A = B$.
4. Se $A + \vec{u} = A + \vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{v}$.
5. $\boxed{A + \overrightarrow{AB} = B.}$ importante

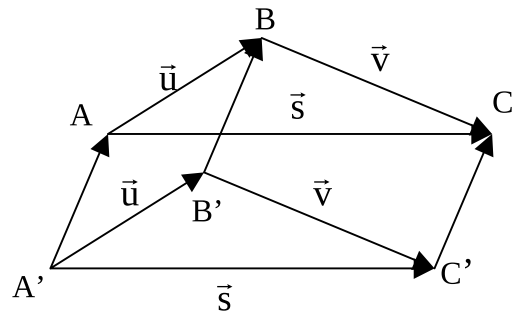
Essas propriedades são verificadas facilmente.

1.5 Adição de vetores

Definição: Consideremos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e um ponto qualquer A. Sejam $B = A + \vec{u}$ e $C = B + \vec{v}$. O vetor $\vec{s} = \overrightarrow{AC}$ é chamado **vetor soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$** e indicamos por $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.

Observemos que o vetor $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ independe do ponto A. De fato, se considerarmos outro ponto A' obteremos $B' = A' + \vec{u}$ e $C' = B' + \vec{v}$.

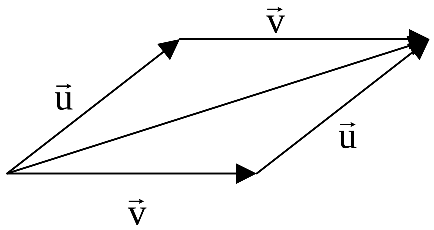
Assim, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$.



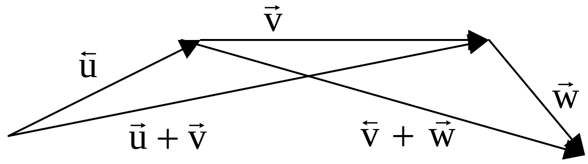
Usando a propriedade 1 de 1.3 , concluímos que :
$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ e $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$. Daí, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$ e portanto $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Propriedades:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutativa).



2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
(associativa)



3. $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$ (elemento neutro).
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$ (elemento oposto).

Indicamos o vetor $\vec{u} + (-\vec{v})$ por $\vec{u} - \vec{v}$. Notemos que $\vec{u} - \vec{v} \neq \vec{v} - \vec{u}$.

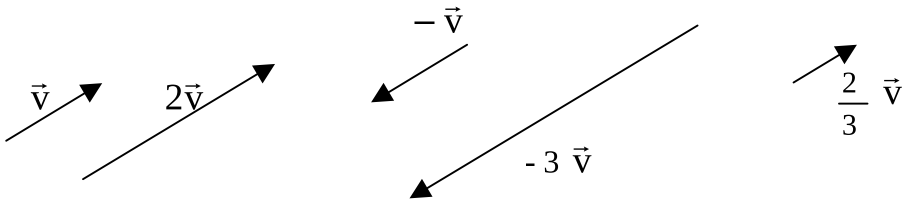
1.6 Produto de um número real por um vetor

Definição: Dados $a \in R^*$ e $\vec{v} \neq \vec{o}$, chamamos **produto de a por** $\vec{v}$, o vetor $\vec{\mathbf{w}} = \mathbf{a}\vec{\mathbf{v}}$, que satisfaz às condições abaixo:

1. $|\vec{w}| = |a||\vec{v}|$.
2. A direção de $\vec{w}$ é a mesma da $\vec{v}$.
3. O sentido de $\vec{w}$ é igual ao de $\vec{v}$ se $a > 0$, e contrário ao de $\vec{v}$ se $a < 0$.

Se $a = 0$ ou $\vec{v} = \vec{o}$, o produto $a\vec{v}$ é o vetor nulo.

Exemplos:



Se $a \neq 0$, o produto $\frac{1}{a}\vec{v}$ é indicado por $\frac{\vec{v}}{a}$. Se $\vec{v} \neq \vec{o}$, é fácil mostrar que $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ é o versor de $\vec{v}$, ou seja $\vec{v}^{\circ} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ e portanto $\vec{v} = |\vec{v}|\vec{v}^{\circ}$.

Propriedades:

1. $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$.
2. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.
3. $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$.
4. $1\vec{v} = \vec{v}$.

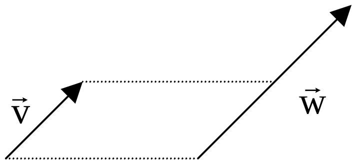
Nas propriedades acima, $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ são vetores quaisquer, **a** e **b** são números reais.

1.7 Combinação linear

Definição 1: Dados n vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ e n escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$, chamamos o vetor $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n$, de **combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ com coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$.**

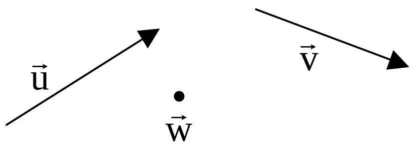
Nos exemplos 1, 2 e 3 a seguir, escrevemos $\vec{w}$ como combinação linear dos vetores dados.

Exemplo 1:



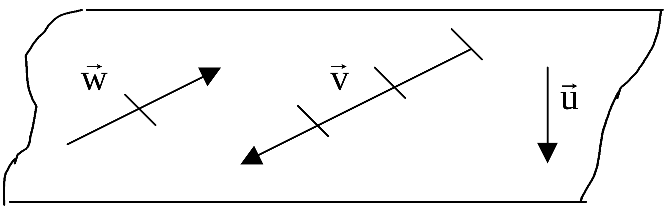
Neste exemplo, $\vec{w} = 2\vec{v}$.

Exemplo 2:



Como $\vec{w} = \vec{o} = 0\vec{u} + 0\vec{v}$, dizemos que $\vec{o}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com coeficientes zeros.

Exemplo 3:



Observando a figura ao lado, podemos escrever :

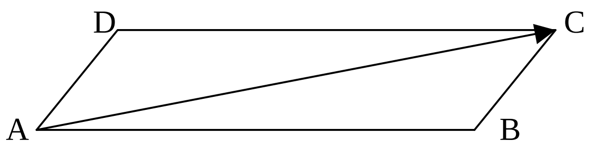
$$\vec{w} = -\frac{2}{3}\vec{v} + 0\vec{u}.$$

Assim, $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com coeficientes $-\dfrac{2}{3}$ e 0.

Note que, o vetor $\vec{u}$ não pode ser escrito como combinação linear de $\vec{w}$ e $\vec{v}$.

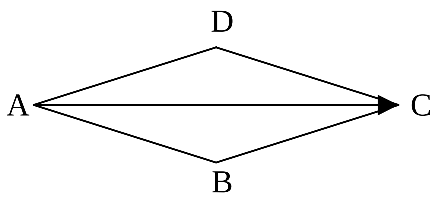
Exemplo 4:

Consideremos um paralelogramo ABCD.

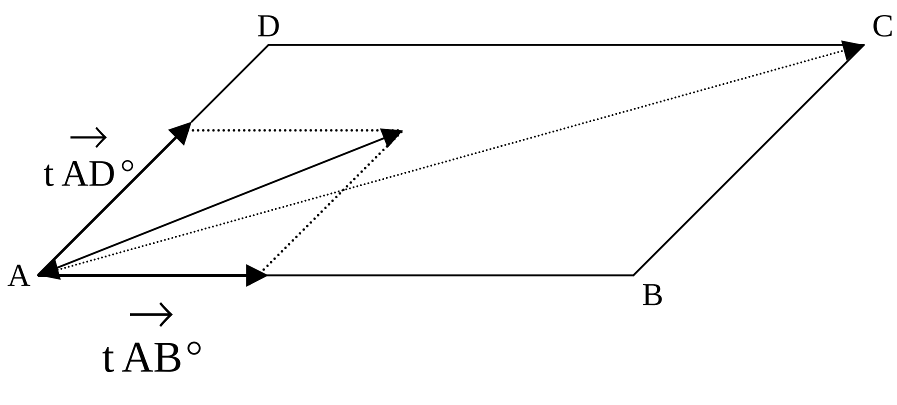


Observemos que o vetor $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ possui a mesma direção que a diagonal AC.

Se $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$, este paralelogramo será um losango. Sabemos que em um losango ABCD, a bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$ contém a diagonal AC. Assim, o vetor $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ possuirá também a mesma direção da bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$.

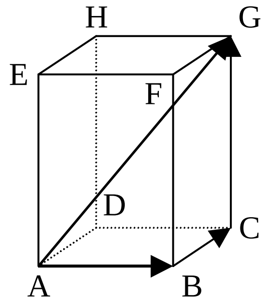


No caso de $|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{AD}|$, o vetor $\overrightarrow{AC}$ não possui a mesma direção da bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$. Para conseguirmos um vetor que possua a mesma direção da bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$, basta tomarmos o vetor $\vec{v} = t\,\overrightarrow{AB^\circ} + t\,\overrightarrow{AD^\circ}$, $t \in R^*$.



Exemplo 5:

Observando o paralelepípedo ao lado, podemos escrever:



$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$$

Dizemos então que $\overrightarrow{AG}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CG}$. Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$, podemos também escrever:

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

Assim, podemos também dizer que $\overrightarrow{AG}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$.

Definição 2: Dizemos que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ são **colineares (paralelos)**, se possuem representantes em uma mesma reta. Neste caso indicamos $\vec{v}_1 // \vec{v}_2 // \vec{v}_3, \ldots, // \vec{v}_n$.

No exemplo 1, temos $\vec{u} // \vec{w}$, e no exemplo 2 temos $\vec{w} // \vec{u}$ e $\vec{w} // \vec{v}$, embora $\vec{u}$ **e** $\vec{v}$ não sejam paralelos.

Definição 3: Dizemos que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ são **coplanares**, se possuem representantes em um mesmo plano.

Observamos que a colinearidade de vetores é um caso particular da coplanaridade de vetores.

Nos exemplos de 1 a 4, os vetores envolvidos são coplanares.

Propriedades:

1. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se, e somente se, podemos escrever um deles como combinação linear do outro.

Prova: "$\Rightarrow$" Começaremos considerando os seguintes casos:

1) $\vec{u} = \vec{o} = \vec{v}$; $\vec{u} = t\vec{v}$, $t \in IR$

2) $\vec{u} = \vec{o}$ e $\vec{v} \neq \vec{o}$; temos $\vec{u} = 0\vec{v}$

3. $\vec{u} \neq \vec{o}$ e $\vec{v} \neq \vec{o}$. Como $\vec{u} // \vec{v}$, temos $\vec{u}^{o} = \pm\ \vec{v}^{o}$. Daí, $|\vec{u}|\vec{u}^{o} = \pm|\vec{u}|\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, ou seja, $\vec{u} = \pm\dfrac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}\vec{v}$. Assim, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido podemos escrever $\vec{u} = \dfrac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}\vec{v}$. E se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários temos $\vec{u} = -\dfrac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}\vec{v}$.

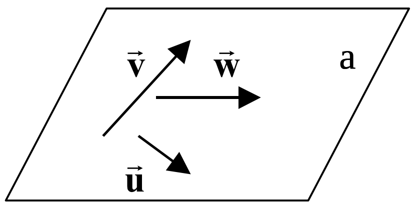
Por outro lado, suponhamos que podemos escrever $\vec{u}$ como combinação linear de $\vec{v}$, ou seja, $\vec{u} = t\,\vec{v}$. Pela definição de produto de um número real por vetor, temos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção, logo são paralelos.

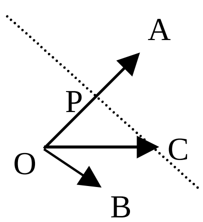
2. Os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares se, e somente se, podemos escrever um deles como combinação linear dos outros.

Prova: Suponhamos que $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares, temos então os seguintes casos:

1) Um deles sendo o vetor nulo, digamos $\vec{u} = \vec{o}$.
   Podemos escrever: $\vec{u} = 0\vec{v} + 0\vec{w}$.
2) Dois deles são paralelos, digamos $\vec{u} // \vec{v}$ e $\vec{v} \neq \vec{o}$.
   Podemos escrever: $\vec{u} = m\vec{v} = m\vec{v} + 0\vec{w}$, $m \in IR$.
3) Quaisquer dois desses vetores não paralelos.

Vamos considerar a figura ao lado, onde *a* é um plano que contém representantes dos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.





Tomemos $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$. Tracemos pelo ponto C uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{OB} = \vec{u}$, que intercepta a reta OA no ponto P. Assim podemos escrever: $\vec{w} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}$.

Como $\overrightarrow{OP} // \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{PC} // \overrightarrow{OB}$ temos: $\vec{w} = m\vec{v} + n\vec{u}$, $m,n \in IR$.

Por outro lado, suponhamos que $\vec{w} = m\vec{v} + n\vec{u}$, $n, m \in IR$. Assim, pela definição de adição de vetores, temos que $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

1.8 Dependência linear

Definição 1: Dizemos que um vetor $\vec{v}$ é **linearmente dependente**, se $\vec{v} = \vec{o}$.

Definição 2: Dizemos que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **linearmente dependentes** se eles são paralelos.

Definição 3: Dizemos que três vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são **linearmente dependentes** se eles são coplanares.

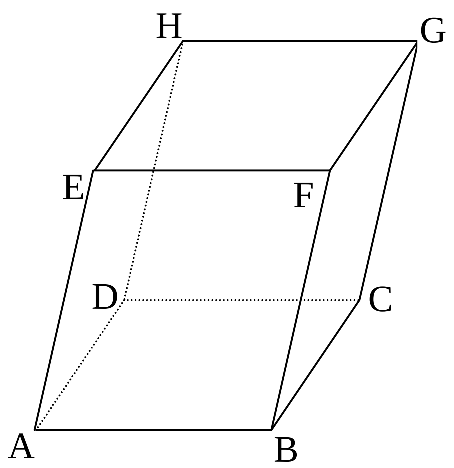
estão presentes no mesmo plano. Assim não possuem componente em direção perpendicular ao plano

Definição 4: Dizemos que mais de três vetores do espaço ($\mathbf{IR}^3$), são sempre **linearmente dependentes.**

Quando os vetores do espaço não são **linearmente dependentes** (LD), dizemos que eles são **linearmente independentes** (LI).

Exemplos:

Considerando o paralelepípedo de arestas AB, AD e AE, temos:



1) $\overrightarrow{AB}$ é LI.   2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ é LD.

3) $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$ são LI.

4) $\overrightarrow{AB}$ e $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ são LD.

5) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$ são LI..

6) $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ são LD.

7) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{FF}$ são LD.

8) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF}$ $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AG}$ são LD.

Propriedades:

1. Se um vetor $\vec{v}$ é LI, então dado $\vec{u} // \vec{v}$, temos que existe um único escalar m tal que $\vec{u} = m\vec{v}$.

Prova: Como $\vec{v}$ é LI, temos pela prova da propriedade 1 de 1.7, que $\vec{u} = m\vec{v}$ e m é único.

2. Se dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são LI, então dado $\vec{v}$ coplanar com $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, temos que existe um único par de escalares (m, n), tal que $\vec{v} = m\vec{v}_1 + nv_2$.

Prova: Como $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são coplanares e, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são LI, temos pela prova da propriedade 2 de 1.7, que $\vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2$.

Para mostrar que esses escalares são únicos, vamos supor que existam m'e n', tais que : $\vec{v} = m'\vec{v}_1 + n'\vec{v}_2$. Então $(m - m')\vec{v}_1 + (n - n')\vec{v}_2 = \vec{o}$. Se $m - m' \neq 0$, podemos escrever $\vec{v}_1 = -\dfrac{(n - n')}{(m - m')}\vec{v}_2$. Daí, $\vec{v}_1 // \vec{v}_2$, o que contradiz o fato de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ serem LI. Logo, $m - m' = 0$, ou seja, $m = m'$.

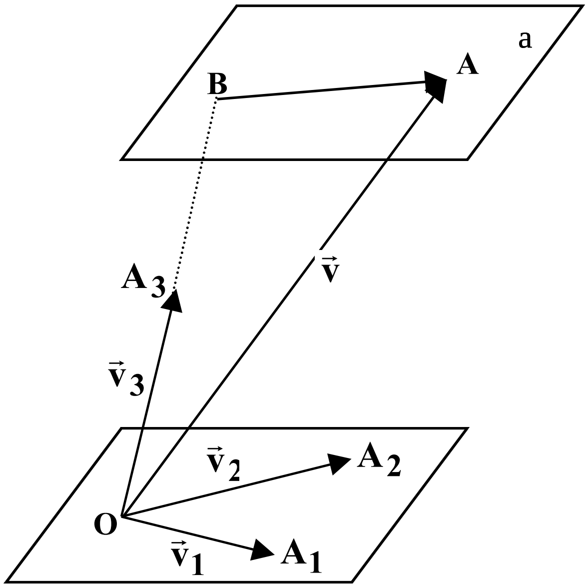
Analogamente podemos mostrar que $n = n'$.

3. Se três vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são LI, então dado um vetor $\vec{v}$ qualquer, temos que existe único terno de escalares (m, n, p), tal que $\vec{v} = m\vec{v}_1 + nv_2 + p\vec{v}_3$.

Prova: Suponhamos que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são LI, temos então os seguintes casos:

1) $\vec{v} = \vec{o}$. Podemos escrever: $\vec{v} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$.
2) $\vec{v}$ paralelo a um dos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, digamos $\vec{v} // \vec{v}_1$. Então podemos escrever: $\vec{v} = m\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$.
3) $\vec{v}$ coplanar com dois dos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, digamos $\vec{v}, \vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são coplanares. Assim temos: $\vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$.

4) $\vec{v}$ não é coplanar com quaisquer dois dos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$. Vamos considerar a figura a seguir, onde α é o plano paralelo ao plano OA_1A_2 passando pelo ponto A. Seja B é o ponto de interseção da reta OA_3 com o plano α.



Temos então:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}.$$

Como $\overrightarrow{OB} // \vec{v}_3$ e $\overrightarrow{BA}$ é coplanar com $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, temos:

$$\overrightarrow{OB} = p\vec{v}_3,\ \overrightarrow{BA} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2.$$

Logo $\vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 + p\vec{v}_3$.

Para mostrarmos que esses escalares são únicos, vamos supor que $\vec{v} = m'\vec{v}_1 + n'\vec{v}_2 + p'\vec{v}_3$. Então temos:

$$(m - m')\vec{v}_1 + (n - n')\vec{v}_2 + (p - p')\vec{v}_3 = \vec{o}.$$

Se $m - m' \neq 0$, podemos escrever:

$$\vec{v}_1 = -\frac{n - n'}{m - m'}\vec{v}_2 - \frac{p - p'}{m - m'}\vec{v}_3,$$

ou seja, $\vec{v}_1$ é coplanar com $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$. O que contradiz o fato de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ serem LI. Logo $m - m' = 0$, ou seja, $m = m'$.

Analogamente podemos mostrar que **n = n¢ e p = p¢**.

1.9 Base – Coordenadas de vetor

Definição 1: Dado um vetor $\vec{v}$ LI, dizemos que $\{\vec{v}\}$ é uma **base para o conjunto de vetores paralelos a** $\vec{v}$.

Definição 2: Dados dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ LI, dizemos que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ **é uma base para o conjunto de vetores coplanares com $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$**

Definição 3: Dados três vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ LI, dizemos que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ **é uma base para o conjunto de vetores do espaço (IR^3).**

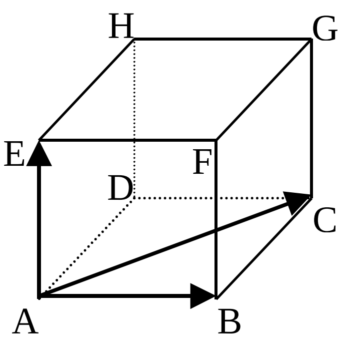
Definição 4: Dizemos que uma **base é ortogonal**, quando seus vetores são dois a dois ortogonais.

Definição 5: Dizemos que uma **base é ortonormal**, se ela for ortogonal e seus vetores unitários.

Costumamos representar uma base ortonormal por $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Fixada uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ do espaço, pela propriedade 3 de 1.8, para todo vetor $\vec{v}$, temos $\vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 + p\vec{v}_3$, onde m, n e p são únicos. Dizemos que $m\vec{v}_1, n\vec{v}_2$ **e** $p\vec{v}_3$ são as **componentes de $\vec{v}$ na direção dos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$**, respectivamente. Os escalares **m, n** e **p** são **as coordenadas de $\vec{v}$** em relação à base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.
Geralmente, representamos o vetor $\vec{v}$ através de suas coordenadas, ou seja, $\vec{v} = (m, n, p)$.

Exemplo 1:



Consideremos o cubo ao lado e fixemos a base $\{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AE}\}$. Podemos escrever:

1. $\vec{AB} = 1\vec{AB} + 0\vec{AC} + 0\vec{AE}$, daí $\vec{AB} = (1,0,0)$.
Analogamente, $\vec{AC} = (0,1,0)$ e $\vec{AE} = (0,0,1)$.

Podemos concluir então que, dada uma base qualquer $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, as coordenadas desses vetores em relação a esta base são:

$$\vec{v}_1 = (1,0,0),\quad \vec{v}_2 = (0,1,0) \text{ e } \vec{v}_3 = (0,0,1).$$

2. $\vec{AF} = 1\vec{AB} + 0\vec{AC} + 1\vec{AE}$, daí $\vec{AF} = (1,0,1)$.

Observamos que se a base considerada for $\{\vec{AB}, \vec{AE}, \vec{AC}\}$, temos $\vec{AF} = (1,1,0)$.

3. $\vec{AG} = 0\vec{AB} + 1\vec{AC} + 1\vec{AE}$, daí $\vec{AG} = (0,1,1)$.

Exemplo 2:

Consideremos $\vec{v} = (-1,1,1)$ em relação base $\{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AE}\}$ do exemplo anterior. Assim, $\vec{v} = -\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AE} = \vec{AH}$.

Analogamente ao que foi feito para o conjunto dos vetores no espaço, podemos fazer para conjuntos de vetores coplanares e colineares. Assim, um vetor num conjunto de vetores coplanares tem duas coordenadas e um vetor num conjunto de vetores colineares tem uma coordenada.

Propriedades:

Seja $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ uma base do espaço. Consideremos os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, representados através de suas coordenadas em relação a esta base.

1. Se $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ e $t \in$ IR então:

a) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$ e $a_3 = b_3$.

b) $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$.

c) $t\,\vec{u} = (t\,a_1, t\,a_2, t\,a_3)$.

Prova: a) Como $\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$ e $\vec{v} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + b_3\vec{v}_3$, temos:

$$(a_1 - b_1)\vec{v}_1 + (a_2 - b_2)\vec{v}_2 + (a_3 - b_3)\vec{v}_3 = \vec{o}$$

Daí, $\vec{o} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$.

Logo, $a_1 - b_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0$ e $a_3 - b_3 = 0$.

De maneira análoga podemos mostrar os itens b) e c).

Observamos que os vetores $\vec{u} = (0, 0, 0)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ são LD, visto que o vetor nulo é paralelo a todo vetor do espaço.

2. Sejam $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ vetores não nulos. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD se, e somente se, existe um $t \in IR$ tal que :

$$\begin{aligned} a_1 &= t\, b_1 \\ a_2 &= t\, b_2 \\ a_3 &= t\, b_3 \end{aligned}$$

Prova: Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD, então $\vec{u} \,//\, \vec{v}$. Como $\vec{v}$ é LI, podemos escrever: $\vec{u} = t\,\vec{v}$, ou seja,

$$\begin{aligned} a_1 &= t\, b_1 \\ a_2 &= t\, b_2 \\ a_3 &= t\, b_3. \end{aligned}$$

Por outro lado, se existe $t \in IR$, tal que

$$\begin{aligned} a_1 &= t\, b_1 \\ a_2 &= t\, b_2 \\ a_3 &= t\, b_3 \end{aligned}$$

então $\vec{u} = t\,\vec{v}$. Logo $\vec{u} \,//\, \vec{v}$ e portanto $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD.

3. Três vetores $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$ são LD se, e somente se,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

⇒ LD existe combinação linear dois a dois!

Esta propriedades pode ser demonstrada através de propriedades de determinantes.

Concluímos que se t não existe na propriedade 2, ou se Δ é diferente de zero, na propriedade 3, temos que os vetores considerados nessas propriedades são LI.

1.10 Sistemas de coordenadas cartesianas

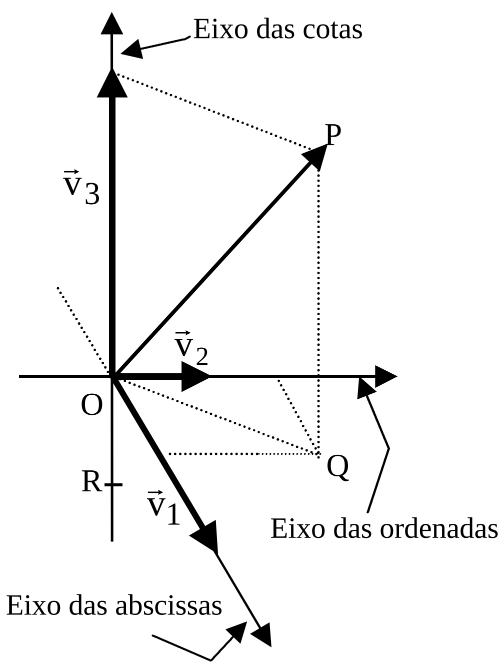
Definição 1: Um sistema de coordenadas cartesianas no espaço é um conjunto formado por um ponto O e uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Indicamos um sistema de coordenadas cartesianas no espaço por $\boldsymbol{\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}}$.

O ponto O é chamado **origem do sistema** e os eixos que passam por O e tem as direções de $\boldsymbol{\vec{v}_1}$, $\boldsymbol{\vec{v}_2}$ **e** $\boldsymbol{\vec{v}_3}$, respectivamente, são chamados de **eixo das abscissas**, **eixo das ordenadas** e **eixo das cotas**.

Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas $\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e seja P um ponto arbitrário do espaço. Chamamos **coordenadas do ponto P em relação ao sistema** $\boldsymbol{\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}}$, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$, ou seja, se $\overrightarrow{OP} = (a_1, a_2, a_3)$, então $P(a_1, a_2, a_3)$. Os números a_1, a_2, a_3 são denominados **abscissa, ordenada e cota do ponto P**, respectivamente.

Exemplo 1:



Na figura ao lado, temos:

1. $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3$,

ou seja, $\overrightarrow{OP} = \left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$ e daí, $P\left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$.

2. $\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{1}{2}, 2, 0\right)$, daí, $Q\left(\frac{1}{2}, 2, 0\right)$.

3. $\overrightarrow{OR} = \left(0, 0, -\frac{2}{3}\right)$, daí, $R = \left(0, 0, -\frac{2}{3}\right)$.

4. $\overrightarrow{OO} = (0,0,0)$, daí $O(0,0,0)$.

Propriedades:

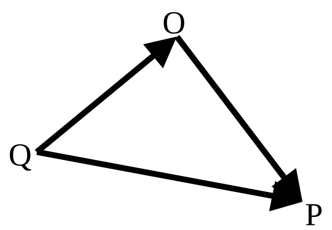
Fixado um sistema de coordenadas $\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e dados $\vec{v} = (a, b, c)$, $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$, temos as seguintes propriedades:

1. $\overrightarrow{QP} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$.

2. $P + \vec{v} = A(x_1 + a, y_1 + b, z_1 + c)$.

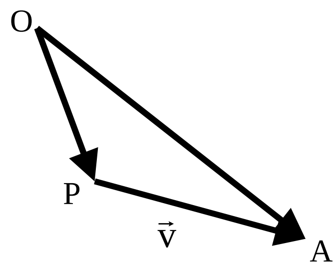
3. O ponto médio de PQ é o ponto $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Prova:

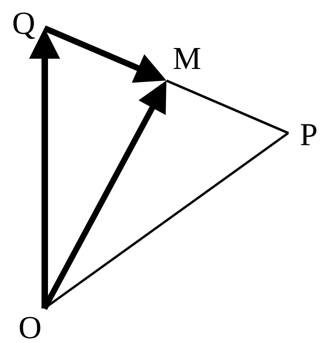


1. Para demonstrarmos esta propriedade, escrevemos o vetor $\overrightarrow{QP}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{OP}$, ou seja,

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP} = (-x_2, -y_2, -z_2) + (x_1, y_1, z_1) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$



2. Utilizando a definição de soma de um ponto com um vetor, temos que $\overrightarrow{PA} = \vec{v}$. Assim, o vetor $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = (x_1 + a, y_1 + b, z_1 + c)$. Logo, $A(x_1 + a, y_1 + b, z_1 + c)$.



3. Podemos demonstrar a propriedade 3 escrevendo $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{OQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QP}$.

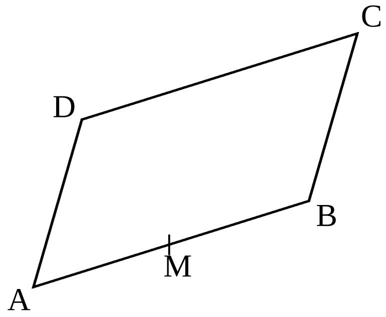
Representando os vetores $\overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{QP}$ através de suas coordenadas, obtemos:

$$\overrightarrow{OM} = (x_1, y_1, z_1) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Logo, $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Exemplo 2:

Consideremos o paralelogramo ABCD, onde $A(1,0,2)$, $B(1,-1,2)$, $C(0,2,-2)$. Desejamos determinar as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, do vértice D e do ponto médio de AB.



Aplicando as propriedades anteriores temos:

$\overrightarrow{AB} = (1-1, -1-0, 2-2) = (0,-1,0)$,

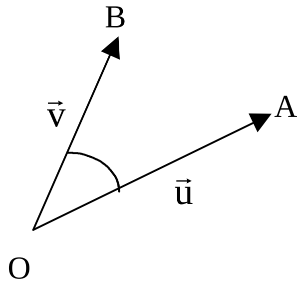
$\overrightarrow{BC} = (-1,3,-4)$,

$D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = (0,3,-2)$ e o ponto médio de AB é $M(1, -1/2, 2)$.

CAPÍTULO II – PRODUTOS

2.1 Produto escalar

Definição 1: Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, e escolhido um ponto O qualquer, podemos escrever: $A = O + \vec{u}$ e $B = O + \vec{v}$**.**
Chamamos **ângulo de $\vec{u}$ e $\vec{v}$** a medida do ângulo $A\hat{O}B$ determinado pelas semi-retas OA e OB.



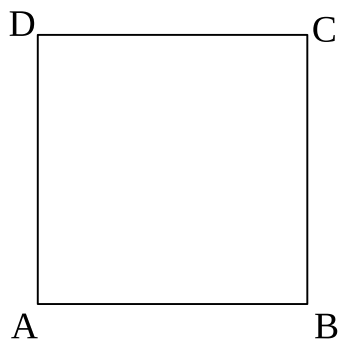
Indicamos $A\hat{O}B = (\vec{u}, \vec{v})$, onde $0 \le (\vec{u}, \vec{v}) \le \pi$.

Observemos que se $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido e se $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, estes vetores têm sentidos contrários.

Definição 2: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos. **O produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$,** indicado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é o número real $\mathbf{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v})}$**.**
Se um dos vetores for nulo temos $\mathbf{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$**.**

Exemplo 1

Considerando o quadrado seguinte, cujo lado mede 2u, temos:

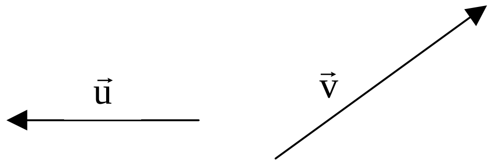


1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}|\ |\overrightarrow{BC}| \cos 90^{o} = 0.$

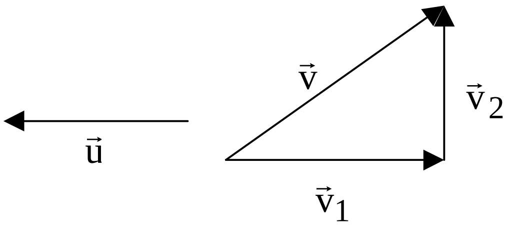
2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\ |\overrightarrow{AC}| \cos 45^{o} = 2.2\sqrt{2}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4.$

3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AB}|\ |\overrightarrow{CD}| \cos 180^{o} = -4.$

Definição 3: Sejam $\vec{u}$ um vetor não nulo e $\vec{v}$ um vetor qualquer.



O vetor $\vec{v}$ se exprime de maneira única na forma $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, onde $\vec{v}_1$ é paralelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}_2$ é ortogonal a $\vec{u}$.

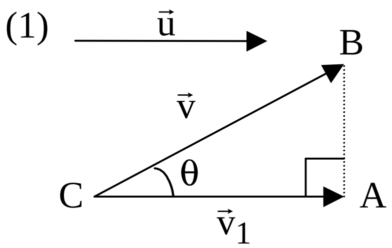


Chamamos o vetor $\vec{v}_1$, **de projeção de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$.**

Indicamos $\mathbf{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{v}_1$.

Interpretação geométrica do produto escalar

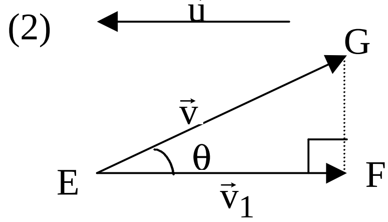
Se $\vec{v}$ é um vetor qualquer e $\vec{u}$ um vetor unitário, então $\vec{v}_1 = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{u}$. De fato, como $\vec{v}_1 \,//\, \vec{u}$, temos $\vec{v}_1 = t\,\vec{u}$. Basta mostra que $\vec{v}\cdot\vec{u} = t$. Para isso, consideremos os casos a seguir:



Em (1) o ângulo $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ é agudo. Nesse caso, temos t > 0, e daí $|\vec{v}_1| = |t||\vec{u}| = t$. Por outro lado, como o triâmgulo ABC é retângulo em A, podemos escrever:

$$t = |\vec{v}_1| = |\vec{v}|\cos\theta = |\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta = \vec{v}\cdot\vec{u}.$$

Em (2) o ângulo $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ é obtuso. Nesse caso, temos t < 0, e daí $|\vec{v}_1| = |t||\vec{u}| = -t$. Além disso, o ângulo $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi - \theta$. Considerando então o triângulo retângulo EFG, temos:



$$t = -|\vec{v}_1| = -|\vec{v}|\cos\theta = -|\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta = |\vec{v}||\vec{u}|\cos(\pi-\theta) = \vec{v}\cdot\vec{u}.$$

Se $0 \neq |\vec{u}|$, temos $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \text{proj}_{\vec{u}^{o}}\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{u}^{o})\vec{u}^{o}$. Chamamos $\vec{v}\cdot\vec{u}^{o}$, **a medida algébrica da projeção de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$** e indicamos **med alg proj$_{\vec{u}}$ $\vec{v}$**.

Exemplo 2:

Dados $\vec{u} \neq \vec{o}$, $|\vec{v}| = 6$ e $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^o$, temos que :

$$\text{med alg proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}^{o} = |\vec{v}||\vec{u}^{o}|\cos 60^o = 6.1.\frac{1}{2} = 3.$$

Daí, $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = 3\vec{u}^{o}$.

Exemplo 3:

Dados $\vec{a} \neq \vec{o}$, $|\vec{b}| = 8$ e $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$, temos que :

$$\text{med alg proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}^\circ = |\vec{b}||\vec{a}^\circ|\cos 120^\circ = 8\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

Daí, $\text{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = -4\vec{a}^\circ$

Propriedades do produto escalar

1. $\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}$.

2. $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

3. $\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2$.

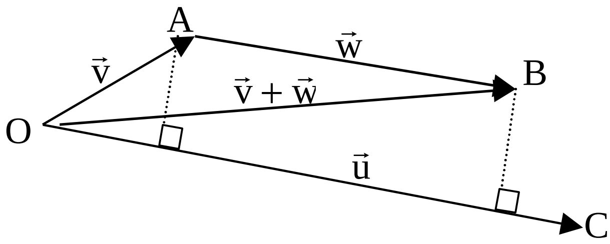
4. $t(\vec{v}.\vec{u}) = (t\,\vec{v}).\vec{u} = \vec{v}(t\,\vec{u})$.

5. $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$.

Nas propriedades acima, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores quaisquer, e t é um número real.

As quatro primeiras propriedades decorrem diretamente da definição do produto escalar. Faremos a seguir a prova da propriedade 5.

Se um dos vetores for nulo, a verificação é imediata. Consideremos, na figura ao lado, os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não nulos e os pontos O, A, B e C tais que:



$$A = O + \vec{v}, \quad B = A + \vec{w} \ \text{ e } \ C = O + \vec{u}.$$

Inicialmente observamos que:

$$\text{med alg proj}_{\vec{u}}(\vec{v}+\vec{w}) = \text{med alg proj}_{\vec{u}}\vec{v} + \text{med alg proj}_{\vec{u}}\vec{w}\,.$$

Ou seja, $(\vec{v}+\vec{w}).\vec{u}° = \vec{v}.\vec{u}° + \vec{w}.\vec{u}°$.

Daí, $(\vec{v}+\vec{w}).(|\vec{u}|\vec{u}°) = \vec{v}.(|\vec{u}|\vec{u}°) + \vec{w}.(|\vec{u}|\vec{u}°)$.

Então, $(\vec{v}+\vec{w}).\vec{u} = \vec{v}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{u}$.

Pela propriedade 1, temos: $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$.

Expressão cartesiana do produto escalar

Fixada uma base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, temos:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})\,.\,(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$
$$= (x_1x_2)\vec{i}\cdot\vec{i} + (x_1y_2)\vec{i}\cdot\vec{j} + (x_1z_2)\vec{i}\cdot\vec{k} + (y_1x_2)\vec{j}\cdot\vec{i} + (y_1y_2)\vec{j}\cdot\vec{j} + (y_1z_2)\vec{j}\cdot\vec{k} +$$
$$+ (z_1x_2)\vec{k}\cdot\vec{i} + (z_1y_2)\vec{k}\cdot\vec{j} + (z_1z_2)\vec{k}\cdot\vec{k}$$

Como $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma base ortonormal, seus vetores satisfazem às relações:

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1.$$

Assim, a expressão acima se reduz a:

$$\boldsymbol{\vec{u} \times \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

Observamos então que:

1) $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2$. Daí, $\mathbf{|\vec{u}| = \sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2}}$

2) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$, ou seja,

$$\mathbf{\vec{u} \wedge \vec{v}\ \hat{U}\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0}$$

Daqui em diante, o sistema considerado será o ortonormal, exceto quando se explicitar o contrário.

Exemplo 4:

Dados os vetores $\vec{u} = (1,2,2)$ e $\vec{v} = (2,0,2)$, temos:

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 0 + 4 = 6.$

2) $|\vec{u}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3.$

3) $\vec{u}° = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \dfrac{1}{3}(1,2,2) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right).$

4) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{6}{3.2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, logo, $(\vec{u}, \vec{v}) = 45°.$

5) $\vec{u} \perp \vec{w}$, sendo $\vec{w} = (0,2,-2)$, pois $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0.$

6) $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{u}°)\vec{u}° = \left[(2,02) \cdot \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)\right]\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right) =$

$= 2\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

7) med alg $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = 2$.

Cossenos diretores de um vetor

Fixada uma base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, chamamos **cossenos diretores de um vetor** $\boldsymbol{\vec{v} \neq \vec{0}}$**,** os cossenos dos ângulos que $\vec{v}$ forma com os vetores desta base.

Considerando $\vec{v} = (x, y, z)$, $\alpha = (\vec{v}, \vec{i})$, $\beta = (\vec{v}, \vec{j})$, e $\gamma = (\vec{v}, \vec{k})$, temos:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{|\vec{v}||\vec{i}|} = \frac{x}{|\vec{v}|}, \quad \cos\beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{|\vec{v}||\vec{j}|} = \frac{y}{|\vec{v}|} \quad \text{e} \quad \cos\gamma = \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{|\vec{v}||\vec{k}|} = \frac{z}{|\vec{v}|}.$$

Como $\vec{v}^{\circ} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, segue daí que , $\boldsymbol{\vec{v}^{\circ} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)}$.

Daí, $\boldsymbol{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$.

Chamamos $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ **ângulo diretores de** $\vec{v}$.

Exemplo 5:

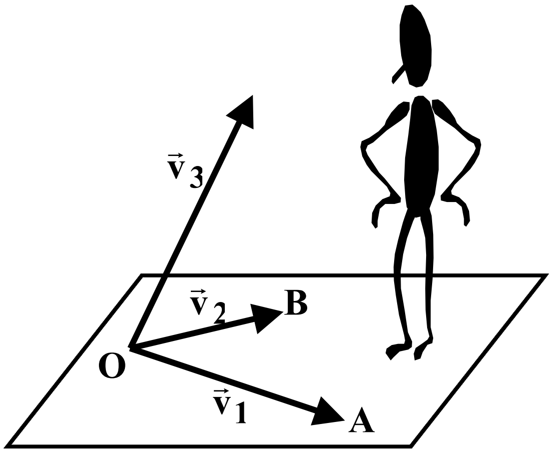
Dados $\cos(\vec{v}, \vec{i}) = \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\vec{v}, \vec{j}) = \cos\beta = 0$, $(\vec{v}, \vec{k})$ obtuso e $|\vec{v}| = 5$, temos:

1) $\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 - \dfrac{1}{2} - 0 = \dfrac{1}{2}$. Logo, $\cos\gamma = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

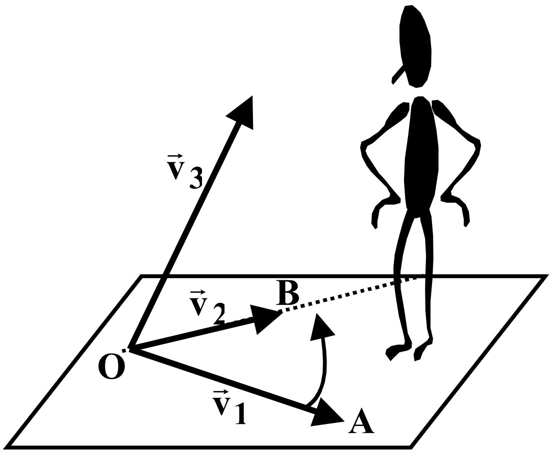
2) $\vec{v} = |\vec{v}|\,\vec{v}^{\circ} = 5\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}, 0, -\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

2.2 Produto Vetorial

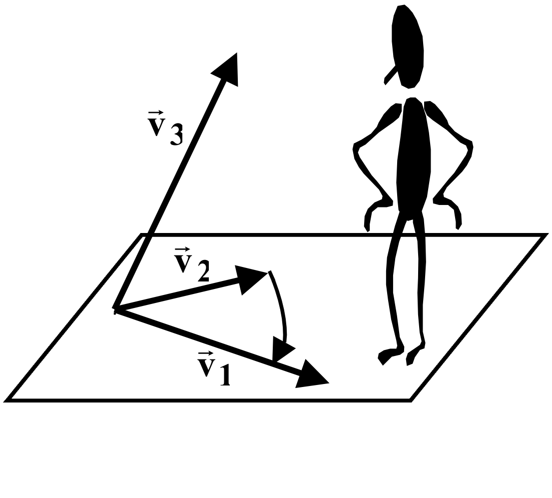
Para definirmos o produto vetorial entre dois vetores é indispensável distinguirmos o que são **bases positivas** e **bases negativas**. Para isso, consideremos uma base do espaço $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e um observador. Este observador deve estar com os pés em um plano que contém representantes de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ (os dois primeiros vetores da base), de modo que $\vec{v}_3$ (o terceiro vetor da base), esteja dirigido para os seus olhos. Neste plano, sejam $\overrightarrow{OA} = \vec{v}_1$ e $\overrightarrow{OB} = \vec{v}_2$.

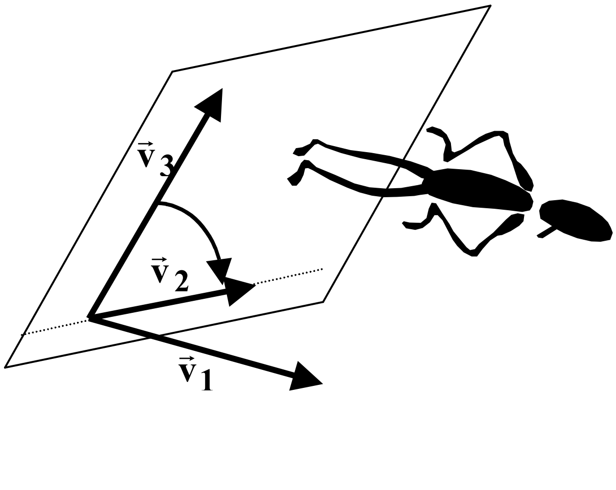


Consideremos agora, a rotação de menor ângulo em torno de O, que torna o vetor $\vec{v}_1$(o primeiro vetor da base) com mesmo sentido do vetor $\vec{v}_2$(o segundo vetor da base). Se esta rotação for no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, dizemos que a base é **positiva**. Caso contrário, dizemos que a base é **negativa**. Assim, a base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, ilustrada ao lado, é positiva.



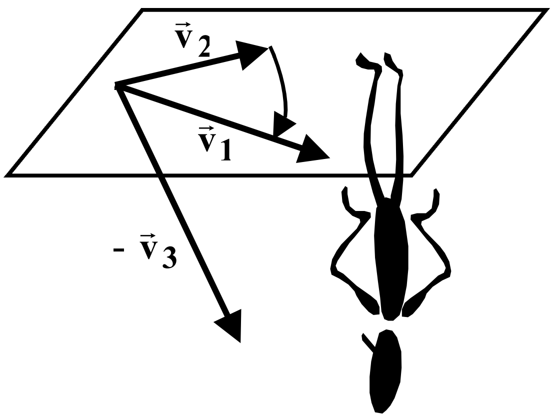
Observemos que as bases $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ e $\{\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1\}$ são negativas.





Chamamos atenção especial do leitor para o fato de que nem sempre o observador está no mesmo semi-espaço que nós. Consequentemente, o sentido da rotação que ele verá é contrário ao que nós vemos. Para ilustrar este fato, desenhe em uma folha de papel dois vetores LI com a mesma origem e considere uma rotação que torna um deles com mesmo sentido do outro. A folha de papel pode ser considerada com um plano, assim, a folha de papel divide o espaço em dois semi-espaços. Observemos então que, em um desses semi-espaços vemos esta rotação com um sentido. Se mudarmos de semi-espaço vemos esta rotação com um sentido contrário ao anterior.

A observação anterior é útil na identificação de bases positivas e negativas, quando o observador não está no mesmo semi-espaço que nós. Por exemplo, ao analizarmos a base $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1, -\vec{v}_3\}$ vemos a rotação no sentido horário, porém o observador, por estar no semi-espaço distinto do qual nos encontramos, vê esta rotação no sentido anti-horário e portanto esta base é positiva.

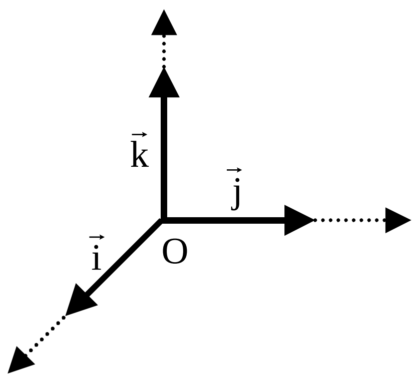


Exemplos

Consideremos o sistema $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ representado a seguir, temos que:

1. As bases $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, $\{\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}\}$ e $\{\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}\}$ são positivas.

2. As bases $\{\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}\}$, $\{\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}\}$ e $\{\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}\}$ são negativas.



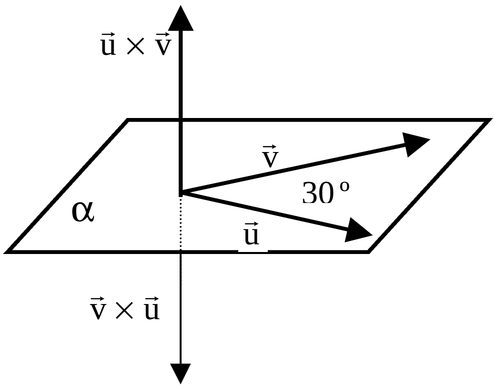
Definição: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não colineares. **O produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$**, indicado $\vec{u}\times\vec{v}$, é um vetor, tal que:

1. $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\,\mathrm{sen}(\vec{u},\vec{v})$;
2. A direção de $\vec{u}\times\vec{v}$ é ortogonal a um plano que contém representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
3. A base $\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}\}$ é positiva.

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares então $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{o}$.

Exemplo 2

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores com representantes no plano α, onde $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=\sqrt{3}$ e $(\vec{u},\vec{v})=30^{o}$. Temos:



$$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\,\mathrm{sen}\,30^{o} = 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

e

$$|\vec{v}\times\vec{u}| = |\vec{v}||\vec{u}|\,\mathrm{sen}\,30^{o} = \sqrt{3}\cdot 2\cdot\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

Assim, $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{v}\times\vec{u}|$, mas $\vec{u}\times\vec{v}$ e $\vec{v}\times\vec{u}$ são vetores opostos, como ilustra a figura.

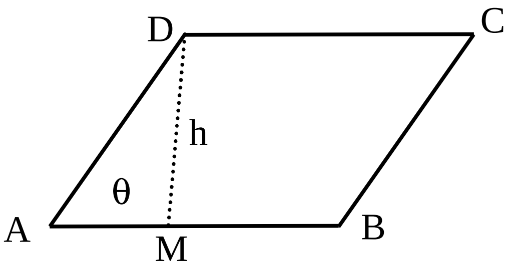
Exemplo 3

Dada a base ortonormal positiva $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, temos :

1. $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{o}$
2. $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$ e $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$
3. $\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$ e $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$

Interpretação geométrica do produto vetorial

Consideremos o paralelogramo ABCD, abaixo.



Sabemos que a área S desse paralelogramo é:
S = base × altura, ou seja $S = |\overrightarrow{AB}| \cdot h$.
Do triângulo AMD, temos:

$$h = |\overrightarrow{AD}| \cdot \operatorname{sen}\theta.$$

Daí segue que, $\boxed{S = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \operatorname{sen}\theta = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}$.

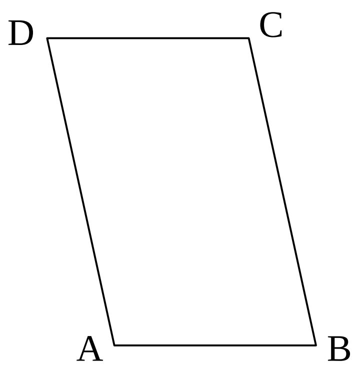
Observamos também que a área T do triângulo ABD é:

$$\boxed{T = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}{2}}$$

Exemplo 4:

Consideremos o paralelogramo ao lado, onde $A(1,1,0), B(0,1,2)$ e $C(4,1,0)$, temos:

$|\overrightarrow{AB}| = |(-1,0,2)| = \sqrt{5}$ e $|\overrightarrow{AD}| = |(4,0,-2)| = 2\sqrt{5}$



$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Segue daí que a área S do paralelogramo ABCD é:

$$S = \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{3}{5} = 6 \text{ u.a.}$$

Propriedades do produto vetorial

1. $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$.
2. $(t\,\vec{v})\times\vec{u} = \vec{v}\times(t\,\vec{u}) = t\,(\vec{v}\times\vec{u})$.
3. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$.

Nas propriedades acima, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores quaisquer e t um número real. As propriedades 1 e 2 decorrem diretamente da definição de produto vetorial, e a prova da propriedade 3 será feita no parágrafo seguinte.

Expressão cartesiana do produto vetorial

Fixada uma base ortonormal positiva $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$

$$= (x_1x_2)\,\vec{i}\times\vec{i} + (x_1y_2)\,\vec{i}\times\vec{j} + (x_1z_2)\,\vec{i}\times\vec{k} +$$

$$+ (y_1x_2)\,\vec{j}\times\vec{i} + (y_1y_2)\,\vec{j}\times\vec{j} + (y_1z_2)\,\vec{j}\times\vec{k} +$$

$$+ (z_1x_2)\,\vec{k}\times\vec{i} + (z_1y_2)\,\vec{k}\times\vec{j} + (z_1z_2)\,\vec{k}\times\vec{k}.$$

Podemos então escrever:

$$\vec{u}\times\vec{v} = (y_1z_2 - z_1y_2)\,\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\,\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\,\vec{k}.$$

A expressão acima pode ser dada sob a forma de um determinante "simbólico":

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Cálculo do produto vetorial

Fazer determinante [illegible]

Exemplo 5

Dados os vetores $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (3,1,2)$ e $\vec{w} = (2,4,6)$, temos:

1) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (4-3)\,\vec{i} - (2-9)\,\vec{j} + (1-6)\,\vec{k},$

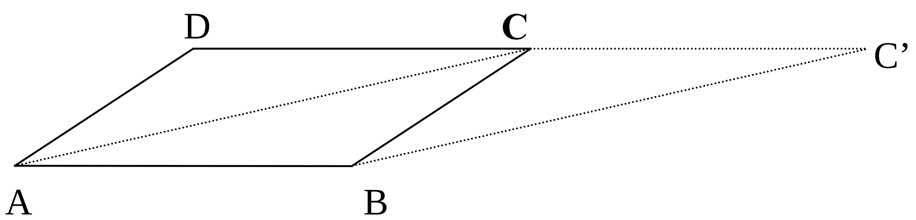
Daí, $\vec{u} \times \vec{v} = (1,7,-5)$.

2) $\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = (12-12)\,\vec{i} + (6-6)\,\vec{j} + (4-4)\,\vec{k}\,.$

Daí, $\vec{u} \times \vec{w} = (0,0,0) = \vec{o}$.

Exemplo 6

Consideremos, na figura a seguir, os paralelogramos ABCD e ABC’C.



Se S e S’ são as áreas dos paralelogramos ABCD e ABC’C, respectivamente. Temos:

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| \quad \text{e} \quad S' = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

Como

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} \times (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})| = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = |\vec{o} + \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|,$$

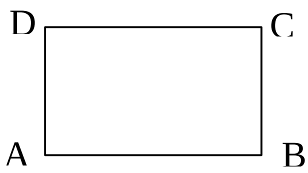
podemos concluir que: $S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = S'$.

Considerando T a área do triângulo ABC temos:

$$\boxed{T = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|}{2} = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC}|}{2}}$$

Exemplo 7:

Considerando S a área o retângulo ao lado, onde



$A(1,0,2), C(-2,3,3)$ e $\overrightarrow{AB}^{\circ} = (-1,0,0)$
temos:

$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ e $\overrightarrow{AC} = (-3,3,1)$.

Como $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$, temos que $\overrightarrow{AB} = \text{proj}_{\overrightarrow{AB}^{\circ}} \overrightarrow{AC} = (-3,0,0)$.

Daí $S = |(-3,3,1) \times (-3,0,0)| = |(\ 0,-3,\ 9\ )| = \sqrt{9+81} = 3\sqrt{10}.$

2.3 Produto Misto

Definição: Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores quaisquer. **O produto misto dos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$**, indicado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, é o número real $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

Exemplo 1:

Dados os vetores $\vec{u} = (1,0,2), \vec{v} = (-1,1,3)$ e $\vec{w} = (0,3,-2)$, temos:

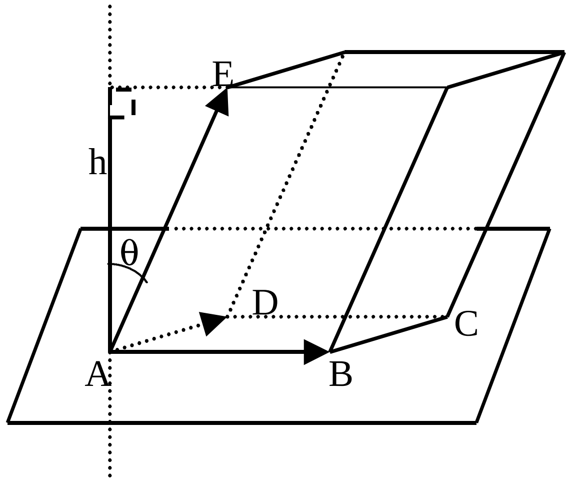
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [(1,0,2) \times (-1,1,3)] \cdot (0,3,-2) = (-2,-5,1) \cdot (0,3,-2) = -17$

$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [(-1,1,3) \times (1,0,2)] \cdot (0,3,-2) = (2,5,-1) \cdot (0,3,-2) = 17$.

Interpretação geométrica do produto misto

Seja o paralelepípedo de arestas AB, AD e AE. Sabemos que o volume V desse paralelepípedo é:

$$V = \text{área da base} \times \text{altura}.$$



Considerando a altura h desse paralelepípedo, em relação à base ABCD e aplicando nossos conhecimentos do cálculo vetorial podemos escrever: $V = |\vec{AB} \times \vec{AD}|\, h$.

Por outro lado, essa altura pode ser calculada como o módulo da projeção do vetor $\vec{AE}$ na direção do vetor $\vec{AB} \times \vec{AD}$, pois a direção deste vetor é ortogonal ao plano ABC. Assim podemos escrever:

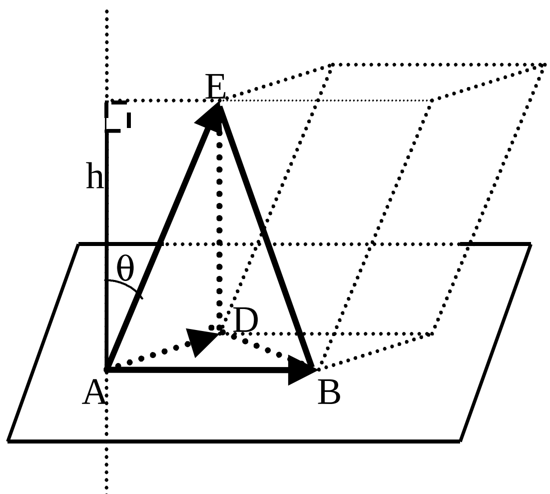
$$h = |\, \text{proj}_{(\vec{AB} \times \vec{AD})} \vec{AE}\, | = |\, \vec{AE} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AD})^{\circ}\, | = ||\vec{AE}| \cos\theta| = |\vec{AE}||\cos\theta|,$$

onde θ é o ângulo entre os vetores $\vec{AE}$ e $\vec{AB} \times \vec{AD}$.

Daí, $V = |\vec{AB} \times \vec{AD}||\vec{AE}||\cos\theta| = |(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AE}| = |[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}]|$, ou seja,

$$\boxed{V = |[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}]|}$$

Consideremos agora o tetraedro de arestas AB, AD e AE. Seja V_T o volume desse tetraedro, assim, $V_T = \frac{1}{3} \text{área da base} \times \text{altura}$.



Considerando a base ABD desse tetraedro, observemos que a altura relativa a essa base coincide com a altura do paralelepípedo anterior.

Daí podemos escrever:

$$V_T = \frac{1}{3}\left|\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\right|\,|\overrightarrow{AE}|\,|\cos\theta| = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AE}| = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}]|$$

Exemplo 2:

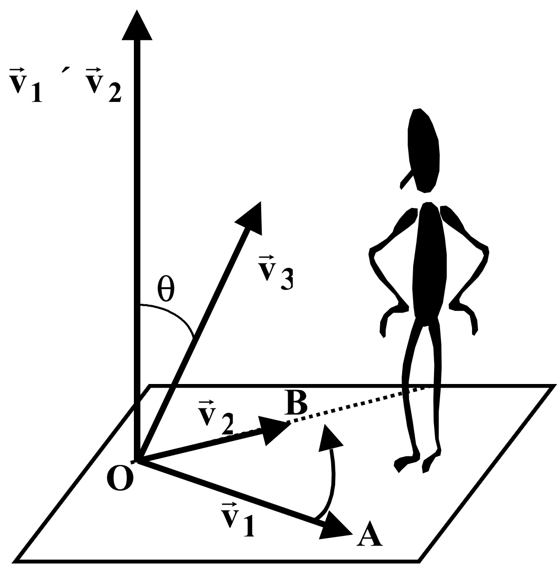
Consideremos o paralelepípedo de arestas OA, OB e OC, onde $\overrightarrow{OA}=(1,0,2)$, $\overrightarrow{OB}=(1,1,3)$ e $\overrightarrow{OC}=(2,1,0)$. O volume V deste paralelepípedo pode ser calculado como:

$$V = |[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]| = |(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}| = |(-2,-1,-1)\cdot(2,1,0)| = 5\ \text{u. v.}$$

E a altura do mesmo em relação à base OABD será:

$$h = |\operatorname{proj}_{\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}}\overrightarrow{OC}| = |(2,1,0)\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)| = \frac{5\sqrt{6}}{6}\ \text{u.c.}\ .$$

Observação: Consideremos uma base $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ do espaço. Pela definição do produto vetorial a base $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_1\times\vec{v}_2\}$ é positiva. Assim, se $\vec{v}_3$ estiver no mesmo semi-espaço que $\vec{v}_1\times\vec{v}_2$, em relação a um plano que contiver representantes de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, a base $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ será também positiva, já que o observador não muda de posição. Caso contrário a base $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ será negativa.



Podemos verificar se $\vec{v}_3$ está, ou não, no mesmo semi-espaço que $\vec{v}_1\times\vec{v}_2$, em relação a um plano que contiver representantes de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, através do

ângulo entre estes vetores. Ou seja, se este ângulo for agudo, então $\vec{v}_3$ está no mesmo semi-espaço que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, caso contrário, não.
Por outro lado, para determinarmos se o ângulo entre dois vetores é agudo ou obtuso, basta calcularmos o produto escalar entre eles. Assim, $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 > 0$, temos que o ângulo entre estes vetores é agudo, logo a base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ será positiva, caso contrário, a base será negativa.
Podemos então concluir que uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é positiva se o produto misto $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] > 0$ e será negativa se $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] < 0$.

Propriedades do produto misto

1. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

2. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v},]$.

3. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$.

4. $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

5. $[\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$.

6. $t\,[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [t\,\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, t\,\vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, t\,\vec{w}]$.

Nas propriedades acima, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores quaisquer, e t é um número real. Faremos a seguir suas provas:

1. "$\Rightarrow$" Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, então o volume do paralelepípedo cujas arestas são representantes de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, é zero. Assim, esse paralelepípedo é degenerado, e portanto, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

   "$\Leftarrow$" É imediata.

2. Temos que $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]| = |[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v},]|$, como volume de um mesmo paralelepípedo. Se $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são L D, então

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]| = |[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v},]| = 0$$

Se $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são L I, então as bases $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}, \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\}$ e $\{\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\}$ pertencem a mesma classe. Logo,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v},]$$

Nas provas das propriedades seguintes, usaremos as propriedades dos produtos escalar e vetorial já vistas.

3. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = -(\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w} = -[(\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$

2. $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Usaremos agora as propriedades acima para demonstrar a distributividade do produto vetorial em relação à adição de vetores, ou seja:

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} .$$

Mostraremos que : $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{u} \times \vec{w}) = \vec{o}$.

Considerando $\vec{a} = \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{u} \times \vec{w})$, temos:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{a} &= \vec{a} \cdot \{\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{u} \times \vec{w})\} \\
&= \vec{a} \cdot [\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})] - \vec{a} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{a} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) \\
&= (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} - (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot \vec{w} \\
&= (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{o}.
\end{aligned}$$

Portanto $\vec{a} = \vec{o}$.

5. $[\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = \{(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \times \vec{v}\} \cdot \vec{w} = \{\vec{u}_1 \times \vec{v} + \vec{u}_2 \times \vec{v}\} \cdot \vec{w} =$
$= (\vec{u}_1 \times \vec{v}) \cdot \vec{w} + (\vec{u}_2 \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + (\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$

6. $[t\,\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (t\,\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times t\,\vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, t\,\vec{v}, \vec{w}]$.

Analogamente podemos obter as outras igualdades.

Expressão cartesiana do produto misto

Fixada uma base ortornomal positiva $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, temos:

$$\begin{aligned}[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2,\ z_1 x_2 - x_1 z_2,\ x_1 y_2 - y_1 x_2) \cdot (x_3, y_3, z_3) \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2)\, x_3 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\, y_3 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\, z_3\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\, x_3 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\, y_3 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\, z_3.$$

A expressão acima pode ser dada sob a forma do determinante:

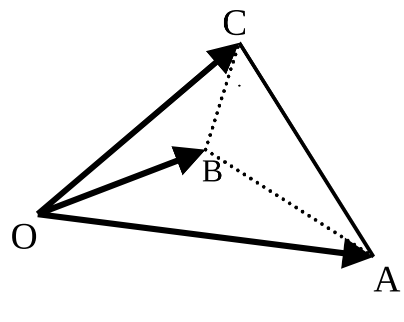
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Exemplo 3:

Do tetraedro de arestas OA, OB, e OC, sabemos que :

$\overrightarrow{OA} = (x,3,4)$, $\overrightarrow{OB} = (0,4,2)$ e $\overrightarrow{OC} = (1,3,2)$.

Calcule o valor de x, para que o volume desse tetraedro seja igual a 2 u. v.



Sabemos que o volume V_T do tetraedro é dado por:

$$V_T = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]|$$

Assim,

$$V_T = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |2x - 10|.$$

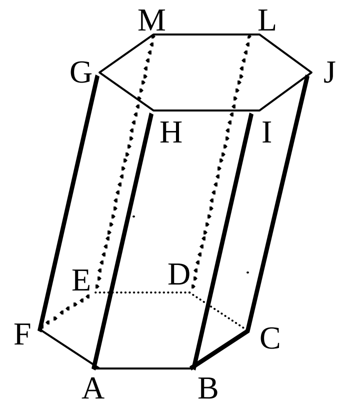
Como V_T = 2 u.v, temos: $\frac{1}{6} |2x - 10| = 2$.

Logo, x = 11 ou $x = -1$.

Exercícios

Sequência I

1. Considerando o prisma abaixo, cuja base é um hexágono regular, classifique em verdadeira ou falsa, as sentenças abaixo, justificando cada resposta.



a) $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{DI}$ é L.D.

b) $\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}$ são L.I.

c) $\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{MF}, \overrightarrow{FE}$ são L.I.

d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB}$ e $\overrightarrow{MF}$ são L.D.

e) $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{ED}$ e $\overrightarrow{MF}$ são L.D.

f) $\overrightarrow{GM}$ e $2\overrightarrow{AH}$ são coplanares.

g) $\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE}$ e $\overrightarrow{FM}$ são L.I.

h) $\overrightarrow{FM}$ pode ser escrito como combinação linear de $\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE}$ e $\overrightarrow{GM}$.

i) $\overrightarrow{MG}$ pode ser escrito como combinação linear de $\overrightarrow{GH}$.

j) $F = E + \overrightarrow{LM}$

l) $\overrightarrow{FA}^\circ = (2\overrightarrow{JI})^\circ$

m) $\overrightarrow{FE}^\circ + (2\overrightarrow{ML})^\circ = (\overrightarrow{FE} + 2\overrightarrow{ML})^\circ$

Nos exercícios de 2 a 5, considere os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = 5\vec{i} + 5\vec{j} - 2k$ e $\vec{w} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$.

2. Verifique se os vetores são L.D. em cada item abaixo:

a) $\vec{u}$ b) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ c) $\vec{o}$ d) $\vec{u}$ e $\vec{o}$ e) $\vec{u}$ e $(4,-2,4)$

f) $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ g) $\vec{u}, \vec{v}, (1,2,3)$ e $(2,1,4)$ h) $\vec{u}, \vec{v}$ e $(7,4,0)$.

3. Determine:

a) $2\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w}$.

b) as coordenadas do ponto B, onde $A = (1,0,-2)$ e $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

c) as coordenadas do ponto M, onde M é ponto médio do segmento AB, do item(b).

4. Escreva se possível:

a) $\vec{u}$ como combinação linear de $\vec{a} = (4,-2,4)$.

b) $\vec{u}$ como combinação linear de $\vec{o}$.

c) $\vec{o}$ como combinação linear de $\vec{u}$.

d) $\vec{v}$ como combinação linear de $\vec{u}$.

e) $\vec{u}$ como combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{a} = (4,-2,4)$.

f) $\vec{v}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{a} = (4,-2,4)$.

g) $\vec{v}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{w}$.

5. Determine:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e $\vec{u} \cdot \vec{w}$ b) $|\vec{u}|$ e $\vec{u}^{\circ}$ c) $(\vec{u}, \vec{v})$ e $(\vec{u}, \vec{w})$

d) Um vetor não nulo ortogonal a $\vec{v}$.

e) A projeção de $\vec{u}$ na direção de $\vec{v}$.

f) A projeção de $\vec{u}$ na direção de $\vec{w}$.

g) A medida algébrica da projeção de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$.

h) O versor de $\vec{b}$, onde $\vec{b} \,//\, \vec{u}$.

i) Um vetor paralelo a $\vec{u}$ e de módulo 9.

j) O vetor $\vec{c}$, sabendo que seus ângulos diretores são agudos, onde $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$ e $|\vec{c}| = |\vec{w}|$.

l) $\vec{v} \times \vec{w}$

m) Um vetor unitário ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

n) Uma base ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, onde $\vec{e}_1 \,//\, \vec{u}$.

o) Uma base positiva $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, onde $\vec{f}_1 = \vec{v}$.

p) O vetor $\vec{d}$, tal que $\vec{d} \times \vec{u} = \vec{o}$ e $\vec{d} \cdot \vec{v} = -2$.

q) A área do triângulo ABC, onde $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

r) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}]$

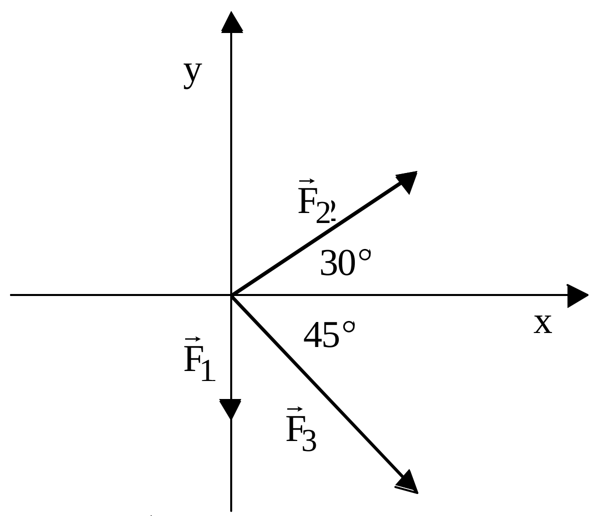
s) O volume do paralelepípedo de arestas AB, AC e AD, onde $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ e $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$.

Sequência II

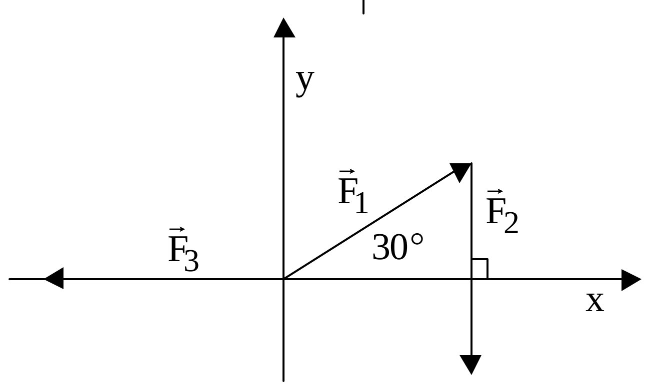
1. Sabendo que A(0,0,0), B(2,1,–2) e C(0,0,5) são vértices de um triângulo, determine um vetor que tem a direção da bissetriz do ângulo interno $B\hat{A}C$.

2. Determine a resultante das forças em cada item a seguir:

a) $|\vec{F}_1| = 80$ kgf
$|\vec{F}_2| = 150$ kgf
$|\vec{F}_3| = 180$ kgf



b) $|\vec{F}_1| = 120$kgf
$|\vec{F}_2| = 100$kgf
$|\vec{F}_3| = 120$kgf



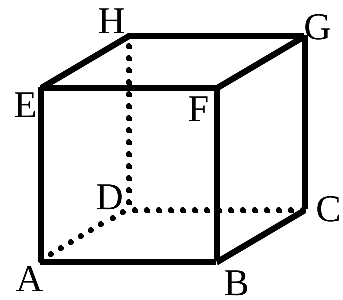
3. Exiba, se possível, os exemplos abaixo. Se impossível explique porque.

a) Uma base do espaço que contenha os vetores $(1,-2,3)$ e $(-2,4,6)$.

b) Três vetores L.I. que não formem uma base do espaço.

c) Um vetor não nulo, paralelo a $\vec{u} = (1,0,2)$ e ortogonal a $\vec{w} = (-1,2,3)$.

4. Do cubo ao lado, sabemos que: $A(2,1,0), B(2,4,0)$ e $\overrightarrow{AD}^{\circ} = (0,0,1)$. Determine as coordenadas:



a) do vetor $\overrightarrow{AC}$;

b) do ponto E;

c) do vetor $\overrightarrow{AL}$, sabendo que $\overrightarrow{FL} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.

d) do vetor $\overrightarrow{CG}$ em relação à base $\left\{ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE} \right\}$;

5. De um losango ABCD sabemos que $A(1,0,2)$, $B(2,-1,2)$ e a diagonal AC é paralela ao vetor $\vec{u} = (-1,2,2)$. Determine as coordenadas dos outros vértices.

6. Sabendo que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{w}| = 4$ e $(\vec{u}, \vec{w}) = 60°$, calcule:

a) $|\vec{u} + \vec{w}|$ b) $|\mathrm{proj}_{\vec{w}}\, \vec{u}|$ c) $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{w})$

7. Determine o vetor $\vec{v}$ sabendo que $|\vec{v}| = \sqrt{3}$ e que seus ângulos diretores são agudos e congruentes.

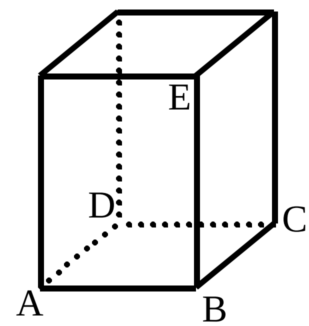
8. De um triângulo ABC, sabemos que $A(1,0,2)$, $B(3,1,1)$ e $\overrightarrow{AC}^{\circ} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$. Determine a altura do triângulo ABC em relação à base AC.

9. De um triângulo ABC, sabemos que: $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{AC}| = 3$ e $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3\sqrt{3}$. Determine a área deste triângulo.

10. Sejam AB, AD, e AE arestas de um paralelepípedo retângulo de volume 12 u.v. Sabemos que $A(0,0,0), C(4,1,0)$ e $\overrightarrow{AB}^{\circ} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

Determine: a) A área do base ABCD.
b) As coordenadas do vértice E.

11. Do paralelepípedo retângulo ao lado, temos:



a) $A(2,1,0)$, $C(3,2,0)$ e $|\vec{BE}| = 3$.

b) Dois dos ângulos diretores de $\vec{AB}$ são $\alpha = \gamma = 45°$.

Determine o volume deste paralelepípedo.

12. De um tetraedro ABCD sabemos que:

a) $A(4, 0, 3), B(-8, 4, 1), D(3, -1, 0)$ e $|\vec{AC}| = 2\sqrt{2}$.

b) Os ângulos diretores de $\vec{AC}$ são $\alpha = \gamma = 45°$.

Determine o volume deste tetraedro.

13. Dados os vetores $\vec{OA} = (1, y, 2)$, $\vec{OB} = (2, 0, 1)$ e $\vec{OC} = (0, 3, 1)$, determine o valor de y para que a altura do tetraedro OABC, em relação à base OBC, seja igual a $\frac{1}{7}$ u. c.

14. De um paralelepípedo de base ABCD sabemos que:

a) A(0 ,1 ,1), B(2, 0, 1) e C(-1, 1, 0) ;

b) Os ângulos diretores de $\vec{AE}$ são agudos e $\alpha = 60°$ e $\beta = 45°$.

Determine as coordenadas de vértice E, para que o volume deste paralelepípedo seja igual a $4\sqrt{2}$ u.v.

15. De um tetraedro ABCD, sabemos que:

a) A(0,0,0), D(1,5,t); $t \in IR$ e $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 8$;

b) $\vec{AB}° = (1,0,0)$ e $\vec{AC}° = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$;

c) o triângulo ABC é equilátero.

Determine as coordenadas do vértice D para que o volume deste tetraedro seja igual a $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ u.v.

RESPOSTAS

Sequência I

5. a) 1 e 0 b) 3 e $\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ c) $\text{arc}\cos\frac{\sqrt{6}}{54}$ e 90°

d) $\left(x, y, \frac{5x+5y}{2}\right)$; x, y $\in$ IR e $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ e) $\left(\frac{5}{54},\frac{5}{54},-\frac{1}{27}\right)$

f) (0,0,0) g) $\frac{1}{3}$ h) $\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ ou $\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$

i) (6,-3,6) ou (-6,3,-6) j) $\left(\frac{3\sqrt{5}}{2},\frac{3\sqrt{10}}{2},\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ l) (12,-6,15)

m) $\left(-\frac{8\sqrt{485}}{485},\frac{14\sqrt{485}}{485},\frac{15\sqrt{485}}{485}\right)$ ou $\left(\frac{8\sqrt{485}}{485},-\frac{14\sqrt{485}}{485},-\frac{15\sqrt{485}}{485}\right)$

p) $(-4,2,-4)$ q) $\frac{\sqrt{485}}{2}$ u.a. r) 15 s) 60 u.v.

Sequência II

1. $t\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$; $t \in$ IR *

2. a) $\vec{R} = \left(75\sqrt{3}+90\sqrt{2}, -5-90\sqrt{2}\right)$ b) $\vec{R} = \left(60\sqrt{3}-120,\ -40\right)$

4. a) $\vec{AC} = (0,3,3)$ b) E(5,1,0) c) $\vec{CG} = (0,0,1)$ d) $\vec{AL} = (3,2,0)$

5. $C\left(\frac{5}{3},-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$ e $D\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

6. a) $2\sqrt{7}$ b) 1 c) 8

7. $\vec{v} = (1,1,1)$ **8.** $h = \frac{\sqrt{22}}{2}$ u.c. **9.** $S = \frac{3}{2}$ u.a.

10. a) $S = 6\sqrt{2}$ u.a. b) $E\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ou $E\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

11. $V = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ u.v. **12.** $V = \frac{2}{3}$ u.v. **13.** $y = 4$ ou $y = 5$

14. $E\left(2,\ 2\sqrt{2}+1,\ 3\right)$ **15.** $D(1,5,2)$ ou $D(1,5,-2)$

☆