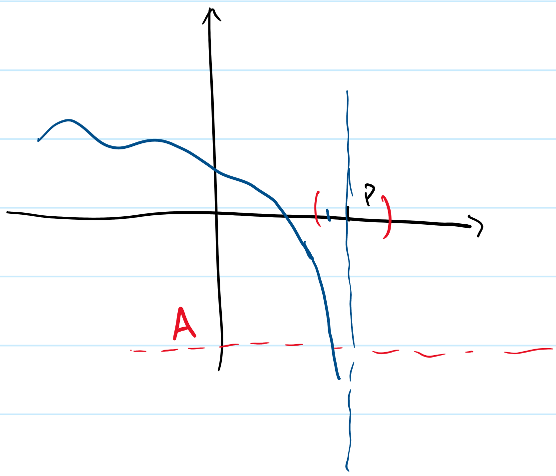
Limites infinitos X Limites no infinito

Definição: Dizemos que o limite de uma função é $-\infty$ quando t tende a $\underline{p}$ se:

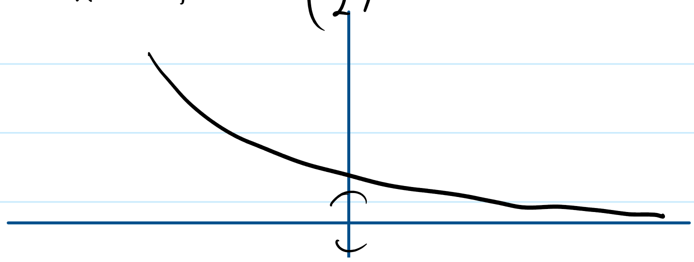
$$\forall A < 0, \; \exists \delta > 0 \text{ t.q. }$$
$$0 < |t - p| < \delta \implies f(t) < A.$$

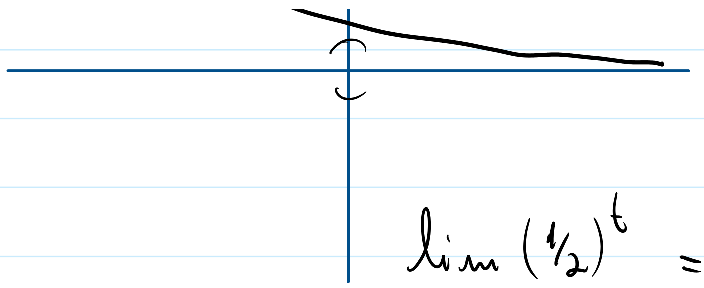


Limites no infinito

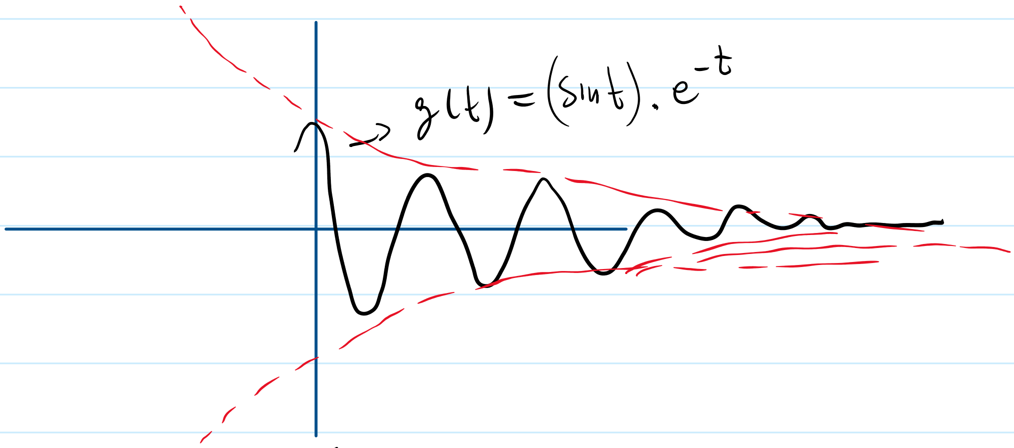
$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = L.$$

Ex.: $f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$





$$\lim_{t \to +\infty} (1/2)^t = 0$$



$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = 0$$

Definição: Dizemos que $\lim_{t \to +\infty} f(t) = L$ se

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists B > 0$ t.q.

$t > B \implies |f(t) - L| < \varepsilon$.

Obs.: É possível considerarmos $\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.

Exemplos:

$f(t) = 2t$

$f(t) = 3^t$

$a < b$

$\log_{1/2} b < \log_{1/2} a$

$t > A$

$\Downarrow$

$-\varepsilon < \left(\frac{1}{2}\right)^t - 0 < \varepsilon$

Exercício:

$\left(\frac{1}{2}\right)^t < \varepsilon$

$-\varepsilon < \left(\frac{1}{2}\right)^t < \varepsilon$

Exercício:

Demonstre que: $\to \lim\limits_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^t = 0$

$\log_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^t > \log_{1/2} \varepsilon$

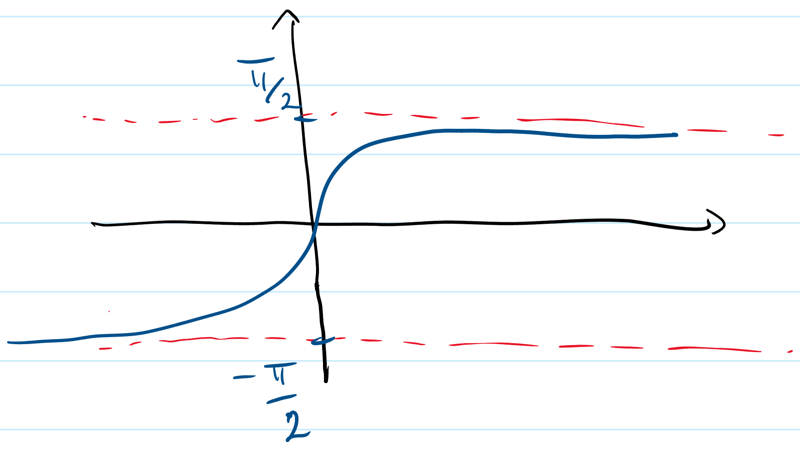
$\to \lim\limits_{t \to +\infty} t^2 = +\infty$

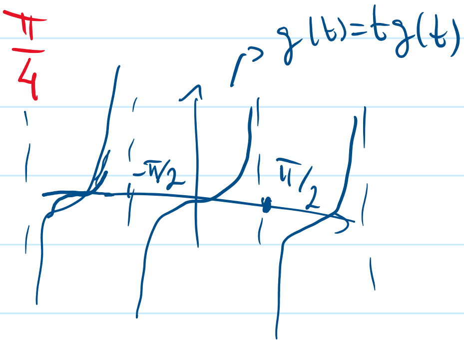
$t > \log_{1/2} \varepsilon$

Obs.: Em geral o caso $\lim\limits_{t \to p} f(t) = \pm\infty$ está associado à existência de uma reta assínto- ta vertical para o gráfico de f no ponto $t = p$.

Além disto, o caso $\lim\limits_{t \to \pm\infty} f(t) = L$ está associado à existência de uma reta assíntota horizontal para o gráfico de f de equação $y = L$.

Ex.: $f(t) = \text{arctg}(t)$ $f(1) = \frac{\pi}{4}$





$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{arctg}(t) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{t \to -\infty} \operatorname{arctg}(t) = -\pi/2$$

Vamos estudar agora algumas propriedades de limites infinitos / limites no infinito.

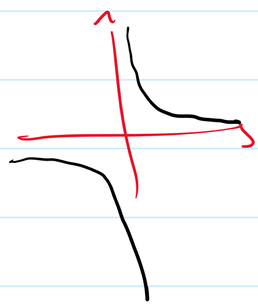
1- As seguintes funções elementares têm seus limites como segue abaixo:

a) $$\lim_{t \to +\infty} t = +\infty$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} t^2 = +\infty$$

b) $$\lim_{t \to +\infty} \sqrt{t} = +\infty$$

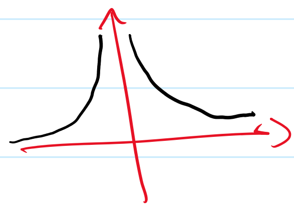
c) $\nexists \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}$, pois



$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} = +\infty \neq -\infty = \lim_{t \to 0^-} \frac{1}{t}$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{t} = 0$$

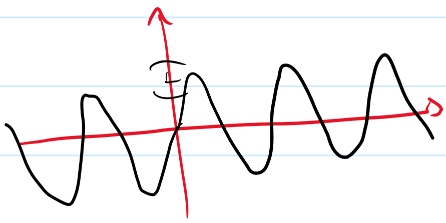
$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} = +\infty \ , \quad \lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{t^2} = 0$$



d) $$\lim_{t \to +\infty} a^t = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a > 1 \\ 0, & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{t \to -\infty} a^t = \begin{cases} 0, & \text{se } a > 1 \\ +\infty, & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

e) $\nexists \lim_{t \to +\infty} \sin t$



Desafio: Forneça um exemplo de uma função que satisfaz:

$\nexists \lim_{t \to 0^+} f(t)$.

$\infty - \infty$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\sqrt{t+1} - t}{t^2 + 3} \quad \infty$$