CAPÍTULO

7 Técnicas Avançadas de Contagem

Muitos problemas de contagem não podem ser resolvidos facilmente utilizando os métodos discutidos no Capítulo 5. Um desses problemas é: Quantas cadeias de bits de extensão n não contêm dois zeros consecutivos? Para resolver esse problema, considere a_n como o número de cadeias de extensão n. Um argumento pode ser dado que mostre que $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Esta equação é chamada de relação de recorrência e as condições iniciais $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$ determinam a seqüência $\{a_n\}$. Além disso, uma fórmula explícita pode ser encontrada para a_n a partir da equação que relaciona os termos da seqüência. Como veremos, uma técnica semelhante pode ser usada para resolver muitos tipos de problemas de contagem.

Veremos também que muitos problemas de contagem podem ser resolvidos utilizando séries de potências, chamadas de funções geradas, nas quais os coeficientes de potência x representam os termos da seqüência em que estamos interessados. Além de resolver problemas de contagem, seremos também capazes de usar a geração de funções para resolver relações de recorrência e para demonstrar identidades combinatórias.

Muitos outros tipos de problemas de contagem não podem ser resolvidos usando as técnicas discutidas no Capítulo 5, tais como: Quantas maneiras de determinar sete funções a três empregados, para que cada empregado exerça pelo menos uma função, são possíveis? Quantos números primos existem menores que 1 000? Ambos podem ser resolvidos contando o número de elementos da união dos conjuntos. Vamos desenvolver uma técnica, chamada de princípio da inclusão-exclusão, que conta o número de elementos da união de conjuntos, e mostraremos como esse princípio pode ser usado para resolver problemas de contagem.

As técnicas estudadas neste capítulo, ao lado das técnicas básicas do Capítulo 5, podem ser usadas para resolver muitos problemas de contagem.

7.1 Relações de Recorrência

Introdução

O número de bactérias em uma colônia dobra a cada hora. Se uma colônia se inicia com cinco bactérias, quantas existirão em n horas? Para resolver este problema, considere a_n como o número de bactérias ao final das n horas. Como o número de bactérias dobra a cada hora, a relação $a_n = 2a_{n-1}$ é mantida sempre que n for um número inteiro positivo. Essa relação, juntamente com a condição inicial $a_0 = 5$, determina unicamente a_n para todos os números inteiros não negativos n. Podemos encontrar uma fórmula para a_n a partir dessa informação.

Alguns dos problemas de contagem que não podem ser resolvidos com as técnicas descritas no Capítulo 5, podem ser resolvidos encontrando relações, chamadas de relações de recorrência, entre os termos de uma seqüência, como foi feito com o problema que envolve bactérias. Estudaremos uma variedade de problemas de contagem que podem ser moldados usando relações de recorrência. Vamos desenvolver, nesta seção e na Seção 7.2, métodos para encontrar fórmulas explícitas para os termos da seqüência que satisfazem determinados tipos de relações de recorrência.

Relações de Recorrência

Auto-avaliação

No Capítulo 4, discutimos como as seqüências podem ser definidas recursivamente. Lembre-se que a definição recursiva de uma seqüência especifica um ou mais termos iniciais e uma regra para determinar os termos subseqüentes a partir daqueles que os precedem. Uma regra deste último tipo (se for ou não parte de uma definição recursiva) é chamada de **relação de recorrência.** Essas relações podem ser usadas no estudo e na resolução de problemas de contagem.

DEFINIÇÃO 1 Uma *relação de recorrência* para a seqüência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa a_n em termos de um ou mais termos prévios da seqüência, ou seja, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, para todos os números inteiros n com $n \geq n_0$, em que n_0 é um número inteiro não negativo. Uma seqüência é chamada de *solução* de uma relação de recorrência se seus termos satisfizerem a relação de recorrência.

Há uma importante conexão entre as relações de recursão e as de recorrência as quais exploraremos mais à frente neste capítulo. Um algoritmo recursivo fornece a solução de um problema de tamanho n em termos das soluções de uma ou mais instâncias do mesmo problema em tamanho menor. Conseqüentemente, quando analisamos a complexidade de um algoritmo recursivo, obtemos uma relação de recorrência que expressa o número de operações necessárias para resolver um problema de tamanho n em termos do número de operações necessárias para resolver o problema para uma ou mais instâncias de tamanho menor.

EXEMPLO 1 Considere $\{a_n\}$ como uma seqüência que satisfaz a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$, e suponha que $a_0 = 3$ e $a_1 = 5$. Quais os valores de a_2 e a_3?

Solução: Vemos, a partir da relação de recorrência, que $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$ e $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$. Podemos encontrar a_4, a_5 e cada termo subseqüente da mesma forma. ◄

EXEMPLO 2 Determine se a seqüência $\{a_n\}$, em que $a_n = 3n$ para todo número inteiro não negativo n, é uma solução da relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$. Responda a mesma questão para $a_n = 2^n$ e $a_n = 5$.

Solução: Suponha que $a_n = 3n$ para todo número inteiro não negativo n. Então, para $n \geq 2$, vemos que $2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n-1)] - 3(n-2) = 3n = a_n$. Assim, $\{a_n\}$, em que $a_n = 3n$, é a solução da relação de recorrência.

Suponha que $a_n = 2^n$ para todo número inteiro não negativo n. Note que $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ e $a_2 = 4$. Como $2a_1 - a_0 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \neq a_2$, vemos que $\{a_n\}$, em que $a_n = 2^n$, não é uma solução da relação de recorrência.

Suponha que $a_n = 5$ para todo número inteiro não negativo n. Então, para $n \geq 2$, vemos que $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2 \cdot 5 - 5 = 5 = a_n$. Assim $\{a_n\}$, em que $a_n = 5$, é uma solução para a relação de recorrência. ◄

As **condições iniciais** para uma seqüência especificam os termos que precedem o primeiro termo em que a relação de recorrência surte efeito. Como ocorre no Exemplo 1, $a_0 = 3$ e $a_1 = 5$ são as condições iniciais. A relação de recorrência e as condições iniciais determinam unicamente uma seqüência. Este é o caso, pois uma relação de recorrência, com as condições iniciais, fornece uma definição recursiva da seqüência. Qualquer termo da seqüência pode ser encontrado, a partir das condições iniciais, usando a relação de recorrência um número suficiente de vezes. Entretanto, há maneiras melhores de computar os termos de determinadas classes de seqüências definidas por relações de recorrência e condições iniciais. Discutiremos esses métodos nesta seção e na 7.2.

Modelos com Relações de Recorrência

Podemos usar as relações de recorrência como modelo para uma grande variedade de problemas, como encontrar os juros compostos, contar coelhos em uma ilha, determinar o número de movimentos no quebra-cabeça Torre de Hanói e contar as cadeias de bits com determinadas propriedades.

EXEMPLO 3 **Juros Compostos** Suponha que uma pessoa deposite R$ 10.000,00 em uma poupança com uma taxa de 11% ao ano, com taxa de juros compostos anual. Que valor terá na poupança depois de 30 anos?

Exemplos Extras

Solução: Para resolver esse problema, considere P_n como a quantia na poupança depois de n anos. Como a quantia na poupança depois de n anos é igual à quantia na poupança depois de $n-1$ anos mais os juros do n-ésimo ano, podemos ver que a seqüência $\{P_n\}$ satisfaz a relação de recorrência

$$P_n = P_{n-1} + 0{,}11P_{n-1} = (1{,}11)P_{n-1}.$$

A condição inicial é $P_0 = 10.000$.

Podemos usar uma aproximação repetida para encontrar a fórmula para P_n. Note que

$$\begin{aligned}
P_1 &= (1{,}11)P_0 \\
P_2 &= (1{,}11)P_1 = (1{,}11)^2 P_0 \\
P_3 &= (1{,}11)P_2 = (1{,}11)^3 P_0 \\
&\vdots \\
P_n &= (1{,}11)P_{n-1} = (1{,}11)^n P_0.
\end{aligned}$$

Quando inserimos a condição inicial $P_0 = 10.000$, é obtida a fórmula $P_n = (1{,}11)^n 10.000$.

Podemos usar a indução matemática para estabelecer sua validade. Que a fórmula é válida para $n = 0$ é uma conseqüência da condição inicial. Agora, assuma que $P_n = (1{,}11)^n 10.000$. Então, a partir da relação de recorrência e da hipótese indutiva,

$$P_{n+1} = (1{,}11)P_n = (1{,}11)(1{,}11)^n 10.000 = (1{,}11)^{n+1} 10.000.$$

Isto mostra que a fórmula explícita para P_n é válida.

Inserir $n = 30$ na fórmula $P_n = (1{,}11)^n 10.000$ mostra que depois de 30 anos, a poupança terá

$$P_{30} = (1{,}11)^{30} 10.000 = \text{R\$ } 228.922{,}97.$$ ◀

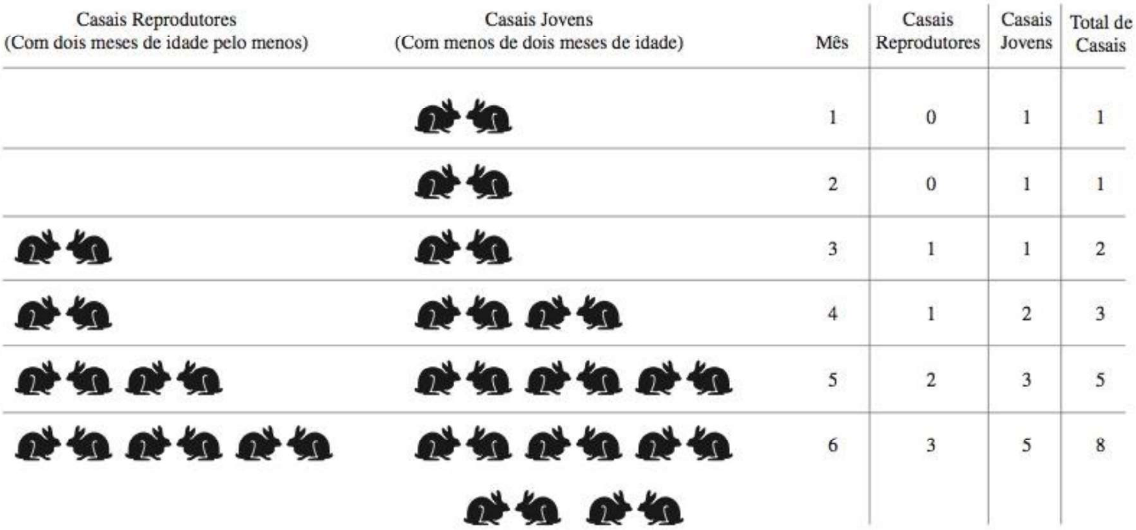
O Exemplo 4 mostra como a população de coelhos em uma ilha pode ser modelada usando uma relação de recorrência.

EXEMPLO 4 **Coelhos e os Números de Fibonacci** Considere este problema, proposto originalmente por Leonardo Pisano, também conhecido como Fibonacci, no século XIII, em seu livro *Liber abaci*. Um jovem casal de coelhos é colocado em uma ilha. Um casal de coelhos não procria até que eles tenham dois meses de idade. Depois que eles completam dois meses de idade, cada casal de coelhos produz outro casal todo mês, como mostra a Figura 1. Encontre a relação de recorrência para o número de casais de coelhos na ilha depois de n meses, supondo que nenhum coelho morra.

Links

Solução: Utilize f_n para o número de casais de coelhos depois de n meses. Mostraremos que f_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, são os termos da seqüência de Fibonacci.

A população de coelhos pode ser modelada usando uma relação de recorrência. Ao final do primeiro mês, o número de casais de coelhos na ilha é de $f_1 = 1$. Como este casal não procria durante o segundo mês, $f_2 = 1$ também. Para encontrar o número de casais depois de n meses, adicione o número do mês anterior na ilha, f_{n-1}, ao número de pares recém-nascidos, que é igual a f_{n-2}, porque cada par recém-nascido surge a partir de um casal com, pelo menos, dois meses de idade.



Casais Reprodutores (Com dois meses de idade pelo menos)	Casais Jovens (Com menos de dois meses de idade)	Mês	Casais Reprodutores	Casais Jovens	Total de Casais
		1	0	1	1
		2	0	1	1
		3	1	1	2
		4	1	2	3
		5	2	3	5
		6	3	5	8

FIGURA 1 Coelhos na Ilha.

Conseqüentemente, a seqüência $\{f_n\}$ satisfaz a relação de recorrência

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

para $n \geq 3$ junto com as condições iniciais $f_1 = 1$ e $f_2 = 1$. Como essa relação de recorrência e as condições iniciais determinam esta seqüência, que é única, o número de casais de coelhos na ilha depois de n meses é dado pelo n-ésimo número de Fibonacci. ◄

Demo

O Exemplo 5 envolve um famoso quebra-cabeça.

EXEMPLO 5 **A Torre de Hanói** Um quebra-cabeça popular do final do século XIX, inventado pelo matemático francês Édouard Lucas, chamado de Torre de Hanói, consiste em três pinos colocados sobre um tabuleiro junto com discos de tamanhos diferentes. Inicialmente, esses discos estão colocados no primeiro pino em ordem crescente de tamanho, de cima para baixo (como mostra a Figura 2). As regras do quebra-cabeça permitem que os discos sejam movidos um de cada vez a partir do primeiro pino para outro, contanto que nenhum disco seja colocado acima de um

Links

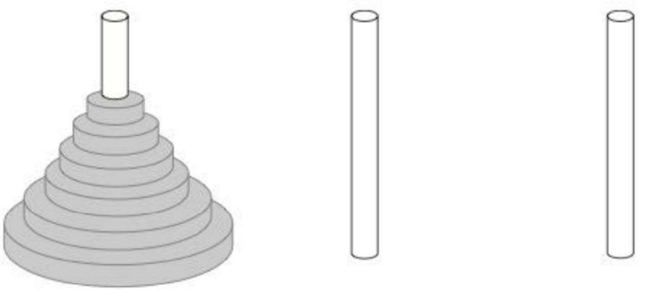


FIGURA 2 Posição Inicial na Torre de Hanói.

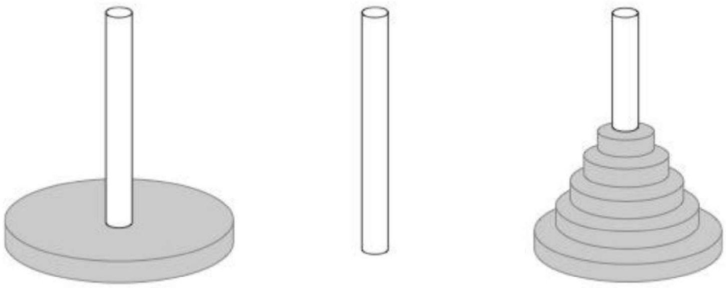


FIGURA 3 Uma Posição Intermediária na Torre de Hanói.

disco menor. O objetivo deste jogo é ter todos os discos no segundo pino em ordem crescente de tamanho.

Considere H_n como o número de movimentos necessários para resolver o quebra-cabeça Torre de Hanói com n discos. Crie uma relação de recorrência para a seqüência $\{H_n\}$.

Solução: Comece com n discos no pino 1. Podemos transferir $n - 1$ discos, seguindo as regras do jogo, para o pino 3 usando H_{n-1} movimentos (veja a Figura 3 que mostra os pinos e os discos nesta fase). Mantemos o maior disco fixo durante esses movimentos. Então, usamos um movimento para transferir o maior disco para o segundo pino. Podemos transferir os $n - 1$ discos do pino 3 para o pino 2 usando H_{n-1} movimentos adicionais, colocando-os em cima do disco maior, o qual sempre se mantém fixo no fundo do pino 2. Além disso, é fácil ver que o problema não pode ser resolvido usando um número menor de passos. Isto mostra que

$$H_n = 2H_{n-1} + 1.$$

A condição inicial é $H_1 = 1$, porque um disco pode ser transferido do pino 1 para o pino 2, de acordo com as regras do jogo, com um movimento.

Podemos usar um método iterativo para resolver esta relação de recorrência. Note que

$$\begin{aligned}
H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\
&= 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2H_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
&\vdots \\
&= 2^{n-1}H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 \\
&= 2^n - 1.
\end{aligned}$$

Usamos a relação de recorrência repetidamente para expressar H_n a partir dos termos anteriores da seqüência. Na penúltima equação, a condição inicial $H_1 = 1$ foi usada. A última equação baseia-se na fórmula para a soma dos termos em uma série geométrica, que pode ser encontrada no Teorema 1 da Seção 2.4.

O método iterativo produziu a solução para a relação de recorrência $H_n = 2H_{n-1} + 1$ com a condição inicial $H_1 = 1$. Esta fórmula pode ser demonstrada usando a indução matemática. Isso foi deixado para o leitor como exercício no final da seção.

A lenda criada para acompanhar o quebra-cabeça diz que, em uma torre em Hanói, macacos transferem 64 discos de ouro do primeiro pino para o seguinte, de acordo com as regras do jogo. A lenda conta que o mundo acabará quando eles terminarem o quebra-cabeça. Quanto tempo depois que os macacos começaram, o mundo acabará, se os macacos demoram um segundo para movimentar um disco?

A partir da fórmula explícita, os macacos necessitam de

$$2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$$

movimentos para transferir os discos. Executando um movimento por segundo, os macacos vão demorar mais de 500 bilhões de anos para completar a transferência, assim o mundo sobreviverá ainda um pouco mais. ◄

Links

Lembre-se: Muitas pessoas têm estudado variações do quebra-cabeça original Torre de Hanói, discutido no Exemplo 5. Algumas variantes usam mais pinos, outras permitem que os discos sejam do mesmo tamanho e outras ainda restringem os tipos permitidos de movimento de discos. Uma das variações mais antigas e interessantes é o **Reve's puzzle***, proposto em 1907 por Henry Dudeney, em seu livro *The Canterbury Puzzles*. O *Reve's puzzle* envolve peregrinos desafiados pelo Governador a mover uma pilha de queijos de diversos tamanhos a partir do primeiro de quatro bancos para outro banco sem colocar um queijo em cima de outro de menor diâmetro. O *Reve's puzzle*, expresso em termos de pinos e discos, segue as mesmas regras do quebra-cabeça Torre de Hanói, exceto pelas quatro pilhas usadas. Você pode achar isso surpreendente, mas ninguém foi capaz de estabelecer um número mínimo de movimentos necessários para resolver este problema para n discos. Entretanto, há uma conjectura, agora com mais de 50 anos, de que o número mínimo de movimentos necessários é igual ao número de movimentos usados por um algoritmo criado por Frame e Stewart em 1939. (Veja os exercícios 54 a 61 no final desta seção e também [St94] para mais informações.)

O Exemplo 6 ilustra como as relações de recorrência podem ser usadas para contar cadeias de bits de diferentes extensões que têm uma determinada propriedade.

EXEMPLO 6 Encontre uma relação de recorrência e dê as condições iniciais para o número de cadeias de bits de extensão n que não têm dois 0s consecutivos. Quantas dessas cadeias têm extensão cinco?

Solução: Considere a_n como o número de cadeias de bits de extensão n que não têm dois zeros consecutivos. Para obter uma relação de recorrência para $\{a_n\}$, note que, pela regra da soma, o número de cadeias de bits de extensão n que não têm dois zeros consecutivos é igual ao número dessas cadeias que terminam em 0 mais o número de cadeias que terminam em 1. Assumiremos que $n \geq 3$, para que a cadeia tenha pelo menos três bits.

As cadeias de bits de extensão n que terminam em 1 e que não têm dois 0s consecutivos são, precisamente, as cadeias de bits de extensão $n - 1$ sem nenhum 0 consecutivo e com um 1 adicionado ao final. Conseqüentemente, há a_{n-1} cadeias desse tipo.

As cadeias de bits de extensão n que terminam em 0 e que não têm dois 0s consecutivos devem ter 1 como seu $(n - 1)$-ésimo bit; se não, elas poderiam terminar em um par de 0s. Temos, então, que as cadeias de bits de extensão n que terminam em 0 e que não têm dois 0s consecutivos são precisamente as cadeias de bits de extensão $n - 2$ sem nenhum 0 consecutivo e com o par 10 adicionado ao final. Conseqüentemente, há a_{n-2} cadeias de bits desse tipo.

Concluímos, como mostra a Figura 4, que

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

para $n \geq 3$.

As condições iniciais são $a_1 = 2$, porque ambas as cadeias de bits de extensão um, 0 e 1, não têm 0s consecutivos, e $a_2 = 3$, porque as cadeias de bits válidas de extensão dois são 01, 10 e 11.

---

* *Reve* normalmente é escrito como *reeve*, que é uma palavra arcaica para *governor* – governador.

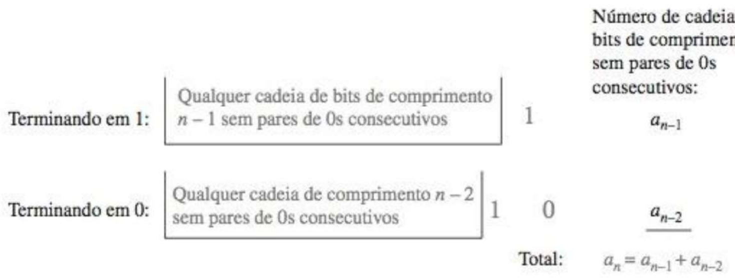


FIGURA 4 Contagem de Cadeias de Bits de Extensão n sem Dois 0s Consecutivos.

Para obter a_5, usamos a relação de recorrência três vezes para encontrar

$$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5,$$
$$a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8,$$
$$a_5 = a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13.$$

◄

Lembre-se: $\{a_n\}$ satisfaz a mesma relação de recorrência da seqüência de Fibonacci. Como $a_1 = f_3$ e $a_2 = f_4$, temos que $a_n = f_{n+2}$.

O Exemplo 7 mostra como uma relação de recorrência pode ser utilizada para modelar o número de códigos que estão disponíveis usando determinados registros de validade.

EXEMPLO 7 **Enumeração de Códigos** Um sistema computacional considera uma cadeia de dígitos decimais como um código válido se ela contém um número par de dígitos 0. Por exemplo, 1230407869 é válido, enquanto 120987045608 não é válido. Considere a_n como o número de códigos de n dígitos válidos. Encontre uma relação de recorrência para a_n.

Solução: Note que $a_1 = 9$ porque há 10 cadeias de um dígito, e apenas uma, a cadeia 0, não é válida. Uma relação de recorrência pode ser derivada para esta seqüência considerando como uma cadeia válida de n dígitos pode ser obtida a partir de $n - 1$ dígitos. Há duas maneiras de formar uma cadeia válida com n dígitos a partir de uma cadeia com um dígito a menos.

Primeiro, uma cadeia válida com n dígitos pode ser obtida adicionando uma cadeia válida de $n - 1$ dígitos com um dígito diferente de 0. Essa adição pode ser feita de nove maneiras. Assim, uma cadeia válida com n dígitos pode ser formada de $9a_{n-1}$ maneiras.

Em segundo lugar, uma cadeia válida de n dígitos pode ser obtida adicionando um 0 à cadeia de extensão $n - 1$, que não é válida. (Isso produz uma cadeia com um número par de dígitos 0, porque a cadeia inválida de extensão $n - 1$ tem um número ímpar de dígitos 0.) O número de maneiras como isto pode ser feito é igual ao número de cadeias inválidas de $(n - 1)$ dígitos. Como há 10^{n-1} cadeias de extensão $n - 1$ e as a_{n-1} são válidas, há $10^{n-1} - a_{n-1}$ cadeias de n dígitos válidas obtidas acrescentando um 0 a uma cadeia inválida de extensão $n - 1$.

Como todas as cadeias válidas de extensão n são produzidas a partir dessas duas maneiras, temos que há

$$\begin{aligned} a_n &= 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) \\ &= 8a_{n-1} + 10^{n-1} \end{aligned}$$

cadeias válidas de extensão n. ◄

O Exemplo 8 estabelece uma relação de recorrência que aparece em diversos contextos.

EXEMPLO 8 Encontre uma relação de recorrência para C_n, o número de maneiras de colocar entre parênteses o produto de $n + 1$ números, $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$, para especificar a ordem de multiplicação. Por exemplo, $C_3 = 5$, pois há cinco maneiras de colocar entre parênteses $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ para determinar a ordem de multiplicação:

$$((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot x_3 \qquad (x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot x_3 \qquad (x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3)$$
$$x_0 \cdot ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \qquad x_0 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)).$$

Solução: Para desenvolver uma relação de recorrência para C_n, notamos que sempre que inserimos os parênteses no produto $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$, um operador "·" permanece fora de todos os parênteses, ou seja, o operador para a realização da multiplicação final. [Por exemplo, em $(x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot x_3$, é o último "·" que permanece fora dos parênteses, enquanto em $(x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3)$ é o segundo "·".] Este operador final aparece entre dois desses $n + 1$ números, digamos, x_k e x_{k+1}. Há C_kC_{n-k-1} maneiras de inserir os parênteses para determinar a ordem dos $n + 1$ números para serem multiplicados quando o operador final aparecer entre x_k e x_{k+1}, pois há C_k maneiras de inserir parênteses no produto $x_0 \cdot x_1 \cdot \cdots \cdot x_k$ para determinar quais desses $k + 1$ números serão multiplicados e C_{n-k-1} maneiras de inserir os parênteses no produto $x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdot \cdots \cdot x_n$ para determinar a ordem na qual esses $n - k$ números serão multiplicados. Como este operador final pode aparecer entre quaisquer dois desses $n + 1$ números, temos que

$$\begin{aligned} C_n &= C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_kC_{n-k-1}. \end{aligned}$$

Note que as condições iniciais são $C_0 = 1$ e $C_1 = 1$. Esta relação de recorrência pode ser resolvida usando o método de construção de funções, que será discutido na Seção 7.4. Podemos mostrar que $C_n = C(2n, n)/(n + 1)$. (Veja o Exercício 41 no final daquela seção.) ◀

Links

A seqüência $\{C_n\}$ é a seqüência de **números de Catalan.** Essa seqüência aparece como solução de muitos problemas diferentes de contagem além deste aqui considerado (para obter detalhes veja o capítulo sobre números de Catalan em [MiRo91] ou em [Ro84a]).

Exercícios

1. Encontre os primeiros cinco termos da seqüência definida pelas relações de recorrência e pelas condições iniciais abaixo.

a) $a_n = 6a_{n-1}$, $a_0 = 2$
b) $a_n = a_{n-1}^2$, $a_1 = 2$
c) $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$
d) $a_n = na_{n-1} + n^2a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$
e) $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$

2. Encontre os primeiros seis termos da seqüência definida pelas relações de recorrência e pelas condições iniciais abaixo.

a) $a_n = -2a_{n-1}$, $a_0 = -1$
b) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = -1$
c) $a_n = 3a_{n-1}^2$, $a_0 = 1$
d) $a_n = na_{n-1} + a_{n-2}^2$, $a_0 = -1$, $a_1 = 0$
e) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$

3. Considere $a_n = 2^n + 5 \cdot 3^n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

a) Encontre a_0, a_1, a_2, a_3 e a_4.
b) Mostre que $a_2 = 5a_1 - 6a_0$, $a_3 = 5a_2 - 6a_1$ e $a_4 = 5a_3 - 6a_2$.
c) Mostre que $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ para todos os números inteiros n com $n \geq 2$.

4. Mostre que a seqüência $\{a_n\}$ é uma solução da relação de recorrência $a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2}$, se

a) $a_n = 0$.
b) $a_n = 1$.
c) $a_n = (-4)^n$.
d) $a_n = 2(-4)^n + 3$.

5. A seqüência $\{a_n\}$ é uma solução da relação de recorrência $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$, se

a) $a_n = 0$?
b) $a_n = 1$?
c) $a_n = 2^n$?
d) $a_n = 4^n$?
e) $a_n = n4^n$?
f) $a_n = 2 \cdot 4^n + 3n4^n$?
g) $a_n = (-4)^n$?
h) $a_n = n^24^n$?

6. Para cada uma das seqüências abaixo, encontre uma relação de recorrência que satisfaça a respectiva seqüência. (As respostas não são únicas, pois há um número infinito de relações de recorrência que satisfazem qualquer seqüência.)

a) $a_n = 3$ **b)** $a_n = 2n$
c) $a_n = 2n + 3$ **d)** $a_n = 5^n$
e) $a_n = n^2$ **f)** $a_n = n^2 + n$
g) $a_n = n + (-1)^n$ **h)** $a_n = n!$

7. Mostre que a seqüência $\{a_n\}$ é uma solução da relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2n - 9$, se

a) $a_n = -n + 2$.
b) $a_n = 5(-1)^n - n + 2$.
c) $a_n = 3(-1)^n + 2^n - n + 2$.
d) $a_n = 7 \cdot 2^n - n + 2$.

8. Encontre a solução para cada uma das relações de recorrência abaixo com as condições iniciais dadas. Use uma aproximação iterativa, como a exibida no Exemplo 5.

a) $a_n = -a_{n-1}$, $a_0 = 5$
b) $a_n = a_{n-1} + 3$, $a_0 = 1$
c) $a_n = a_{n-1} - n$, $a_0 = 4$
d) $a_n = 2a_{n-1} - 3$, $a_0 = -1$
e) $a_n = (n + 1)a_{n-1}$, $a_0 = 2$
f) $a_n = 2na_{n-1}$, $a_0 = 3$
g) $a_n = -a_{n-1} + n - 1$, $a_0 = 7$

9. Encontre a solução para cada uma das relações de recorrência e as condições iniciais abaixo. Use um método iterativo, como o apresentado no Exemplo 5.

a) $a_n = 3a_{n-1}$, $a_0 = 2$
b) $a_n = a_{n-1} + 2$, $a_0 = 3$
c) $a_n = a_{n-1} + n$, $a_0 = 1$
d) $a_n = a_{n-1} + 2n + 3$, $a_0 = 4$
e) $a_n = 2a_{n-1} - 1$, $a_0 = 1$
f) $a_n = 3a_{n-1} + 1$, $a_0 = 1$
g) $a_n = na_{n-1}$, $a_0 = 5$
h) $a_n = 2na_{n-1}$, $a_0 = 1$

10. Uma pessoa deposita R$ 1.000,00 em uma poupança que rende 9% de juros compostos por ano.

a) Encontre uma relação de recorrência para a quantia na poupança ao final de n anos.
b) Encontre uma fórmula explícita para a quantia na poupança ao final de n anos.
c) Quanto haverá na poupança depois de 100 anos?

11. Suponha que o número de bactérias em uma colônia triplique a cada hora.

a) Encontre uma relação de recorrência para o número de bactérias depois que se passaram n horas.
b) Se 100 bactérias são usadas para iniciar uma nova colônia, quantas bactérias haverá na colônia em 10 horas?

12. Suponha que a população mundial em 2002 era de 6,2 bilhões e cresce com uma taxa de 1,3% ao ano.

a) Encontre uma relação de recorrência para a população mundial n anos depois de 2002.
b) Encontre uma fórmula explícita para a população mundial n anos depois de 2002.
c) Qual a estimativa da população mundial em 2022?

13. Uma indústria automobilística fabrica carros com uma taxa crescente. No primeiro mês, apenas um carro é fabricado; no segundo mês, dois carros são fabricados, e assim por diante, com n carros fabricados no n-ésimo mês.

a) Encontre uma relação de recorrência para o número de carros produzidos nos primeiros n meses nessa fábrica.
b) Quantos carros são produzidos no primeiro ano?
c) Encontre uma fórmula explícita para o número de carros produzidos nos primeiros n meses por essa fábrica.

14. Um empregado é contratado por uma companhia em 1999 com um salário anual inicial de R$ 50.000,00. Todos os anos esse empregado recebe um aumento de R$ 1.000,00 mais 5% do salário do ano anterior.

a) Encontre uma relação de recorrência para o salário desse empregado n anos depois de 1999.
b) Qual o salário desse empregado em 2007?
c) Encontre uma fórmula explícita para o salário desse empregado n anos depois de 1999.

15. Encontre uma relação de recorrência para o balanço $B(k)$ ao final de k meses de um empréstimo de R$ 5.000,00 com uma taxa de 7%, se for feito um pagamento de R$ 100,00 todo mês. [*Dica:* Expresse $B(k)$ em termos de $B(k - 1)$; os juros mensais são de $(0{,}07/12)B(k - 1)$.]

16. a) Encontre uma relação de recorrência para o balanço $B(k)$ ao final de k meses de um empréstimo com taxa de r se for feito um pagamento P todo mês. [*Dica:* Expresse $B(k)$ em termos de $B(k - 1)$ e note que a taxa de juros mensal é de $r/12$.]
b) Determine qual pagamento mensal P deve ser feito para que o empréstimo seja quitado em T meses.

17. Use a indução matemática para verificar a fórmula derivada no Exemplo 5 para o número de movimentos necessários para completar a Torre de Hanói.

18. a) Encontre uma relação de recorrência para o número de permutações de um conjunto com n elementos.
b) Use essa relação de recorrência para encontrar o número de permutações de um conjunto com n elementos usando a iteração.

19. Uma máquina de vender livros aceita apenas moedas de um real e notas de R$ 1,00 e R$ 5,00.

a) Encontre uma relação de recorrência para o número de maneiras de depositar n reais na máquina, sendo relevante a ordem na qual as moedas e as cédulas são depositadas.
b) Quais são as condições iniciais?
c) De quantas maneiras é possível depositar R$ 10,00 para comprar um livro?

20. Um país usa como moedas correntes os valores de 1 peso, 2 pesos, 5 pesos e 10 pesos e notas de 5 pesos, 10 pesos, 20 pesos, 50 pesos e 100 pesos. Encontre uma relação de recorrência para o número de maneiras de pagar uma conta de n pesos, sendo relevante a ordem em que as moedas e as cédulas são postas.

21. De quantas maneiras é possível pagar uma conta de 17 pesos usando as moedas correntes descritas no Exercício 20, sendo relevante a ordem em que as moedas e as cédulas são postas?

***22.** **a)** Encontre uma relação de recorrência para o número de seqüências estritamente crescentes de números inteiros positivos que têm o número 1 como seu primeiro termo e n como seu último termo, em que n é um número inteiro positivo, ou seja, seqüências $a_1, a_2, \ldots, a_k$, em que $a_1 = 1$, $a_k = n$ e $a_j < a_{j+1}$ para $j = 1, 2, \ldots, k-1$.
b) Quais são as condições iniciais?
c) Quantas seqüências do tipo descrito em (a) são possíveis quando n é um número inteiro positivo com $n \geq 2$?

23. **a)** Encontre uma relação de recorrência para o número de cadeias de bits de extensão n que contenham um par de 0s consecutivos.
b) Quais são as condições iniciais?
c) Quantas cadeias de bits de extensão sete contêm dois 0s consecutivos?

24. **a)** Encontre uma relação de recorrência para o número de cadeias de bits de extensão n que contenham três 0s consecutivos.
b) Quais são as condições iniciais?
c) Quantas cadeias de bits de extensão sete contêm três 0s consecutivos?

25. **a)** Encontre uma relação de recorrência para o número de cadeias de bits de extensão n que não contenham três 0s consecutivos.
b) Quais são as condições iniciais?
c) Quantas cadeias de bits de extensão sete não contêm três 0s consecutivos?

***26.** **a)** Encontre uma relação de recorrência para o número de cadeias de bits que contenham a seqüência 01.
b) Quais são as condições iniciais?
c) Quantas cadeias de bits de extensão sete contêm a seqüência 01?

27. **a)** Encontre uma relação de recorrência para o número de maneiras de subir n degraus se a pessoa que estiver subindo as escadas pode subir um ou dois degraus por vez.
b) Quais são as condições iniciais?
c) De quantas maneiras essa pessoa pode subir em um avião com oito degraus?

28. **a)** Encontre uma relação de recorrência para o número de maneiras de subir n degraus se a pessoa que estiver subindo as escadas pode subir um, dois ou três degraus por vez.
b) Quais são as condições iniciais?
c) De quantas maneiras essa pessoa pode subir em um avião com oito degraus?

Uma cadeia que contém apenas 0s, 1s e 2s é chamada de **cadeia ternária.**

29. **a)** Encontre uma relação de recorrência para o número de cadeias ternárias que não contenham dois 0s consecutivos.
b) Quais são as condições iniciais?
c) Quantas cadeias ternárias de extensão seis não contêm dois 0s consecutivos?

30. **a)** Encontre uma relação de recorrência para o número de cadeias ternárias que contenham dois 0s consecutivos.
b) Quais são as condições iniciais?
c) Quantas cadeias ternárias de extensão seis contêm dois 0s consecutivos?

***31.** **a)** Encontre uma relação de recorrência para o número de cadeias ternárias que não contenham dois 0s consecutivos ou dois 1s consecutivos.
b) Quais são as condições iniciais?
c) Quantas cadeias ternárias de extensão seis não contêm dois 0s consecutivos ou dois 1s consecutivos?

***32.** **a)** Encontre uma relação de recorrência para o número de cadeias ternárias que contenham ou dois 0s consecutivos ou dois 1s consecutivos.
b) Quais são as condições iniciais?
c) Quantas cadeias ternárias de extensão seis contêm dois 0s consecutivos ou dois 1s consecutivos?

***33.** **a)** Encontre uma relação de recorrência para o número de cadeias ternárias que não contenham símbolos iguais consecutivos.
b) Quais são as condições iniciais?
c) Quantas cadeias ternárias de extensão seis não contêm símbolos iguais consecutivos?

****34.** **a)** Encontre uma relação de recorrência para o número de cadeias ternárias que contenham dois símbolos iguais consecutivos.
b) Quais são as condições iniciais?
c) Quantas cadeias ternárias de extensão seis contêm símbolos iguais consecutivos?

35. Mensagens são transmitidas por meio de um canal de comunicação que usa dois sinais. A transmissão de um sinal requer 1 microssegundo e a transmissão do outro sinal requer 2 microssegundos.
a) Encontre uma relação de recorrência para o número de mensagens diferentes que consistem em seqüências desses dois sinais, em que cada sinal na mensagem é seguido imediatamente pelo próximo sinal, que pode ser enviado em n microssegundos.
b) Quais são as condições iniciais?
c) Quantas mensagens diferentes podem ser enviadas em 10 microssegundos usando esses dois sinais?

36. Um motorista de ônibus paga todos os pedágios apenas com moedas de 5 e 10 centavos, inserindo uma moeda de cada vez no coletor automático.
a) Encontre uma relação de recorrência para o número de maneiras diferentes de o motorista poder pagar um pedágio de n centavos (em que a ordem na qual cada moeda é usada é relevante).
b) De quantas maneiras diferentes o motorista pode pagar um pedágio de 45 centavos?

37. **a)** Encontre uma relação de recorrência que satisfaça R_n, em que R_n é o número de regiões em que um plano é dividido em n linhas, se duas linhas não podem ser paralelas e três dessas linhas não podem passar pelo mesmo ponto.
b) Encontre R_n usando a iteração.

***38.** **a)** Encontre uma relação de recorrência que satisfaça R_n, em que R_n é o número de regiões em que uma superfície de uma esfera é dividida por n círculos perfeitos (que são intersecções da esfera e de planos que passam pelo centro da esfera), se três dos círculos perfeitos não passam pelo mesmo ponto.
b) Encontre R_n usando a iteração.

***39.** **a)** Encontre uma relação de recorrência que satisfaça S_n, em que S_n é o número de regiões em que o espaço tridimensional é dividido por n planos, se sempre três desses planos encontram-se em um mesmo ponto, mas quatro desses planos não passam pelo mesmo ponto.

b) Encontre S_n usando a iteração.

40. Encontre uma relação de recorrência para o número de cadeias de bits de extensão n com um número par de 0s.

41. Quantas cadeias de bits de extensão sete contêm um número par de 0s?

42. **a)** Encontre uma relação de recorrência para o número de maneiras de cobrir completamente um tabuleiro de damas de $2 \times n$ com dominós 1×2. [*Dica:* Considere separadamente a cobertura quando a posição no canto superior direito do tabuleiro estiver coberta com um dominó posicionado horizontalmente e quando estiver coberta com um dominó posicionado verticalmente.]

b) Quais são as condições iniciais para a relação de recorrência do item (a)?

c) De quantas maneiras é possível cobrir completamente um tabuleiro de damas de 2×17 com dominós 1×2?

43. **a)** Encontre uma relação de recorrência para o número de maneiras de cobrir uma calçada com ladrilhos de ardósia, se os ladrilhos são vermelhos, verdes ou cinza, a fim de que dois ladrilhos vermelhos não sejam adjacentes e que ladrilhos da mesma cor sejam considerados indistinguíveis.

b) Quais são as condições iniciais para a relação de recorrência do item (a)?

c) De quantas maneiras é possível cobrir uma calçada com sete ladrilhos como descrito no item (a)?

44. Mostre que os números de Fibonacci satisfazem a relação de recorrência $f_n = 5f_{n-4} + 3f_{n-5}$ para $n = 5, 6, 7, \ldots$, junto com as condições iniciais $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2$ e $f_4 = 3$. Use essa relação de recorrência para mostrar que f_{5n} é divisível por 5, para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

***45.** Considere $S(m,n)$ como o número de funções sobrejetivas de um conjunto com m elementos em um conjunto com n elementos. Mostre que $S(m,n)$ satisfaz a relação de recorrência

$$S(m,n) = n^m - \sum_{k=1}^{n-1} C(n,k)S(m,k)$$

sempre que $m \geq n$ e $n > 1$, com a condição inicial $S(m, 1) = 1$.

46. **a)** Descreva todas as maneiras nas quais os parênteses podem ser colocados no produto $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ para determinar a ordem de multiplicação.

b) Use a relação de recorrência desenvolvida no Exemplo 8 para calcular C_4, o número de maneiras de colocar parênteses no produto de cinco números para determinar a ordem de multiplicação. Verifique se você listou o número correto de maneiras no item (a).

c) Confira seu resultado do item (b) encontrando C_4, usando a fórmula fechada para C_n mencionada na solução do Exemplo 8.

47. **a)** Use a relação de recorrência desenvolvida no Exemplo 8 para determinar C_5, o número de maneiras de colocar parênteses no produto de seis números para determinar a ordem de multiplicação.

b) Confira seu resultado com a fórmula fechada para C_5 mencionada na solução do Exemplo 8.

***48.** No quebra-cabeça Torre de Hanói, suponha que nosso objetivo seja transferir todos os n discos do pino 1 para o pino 3, mas sem mover um disco diretamente do pino 1 para o 3. Cada movimento deve envolver o pino 2. Como sempre, não podemos colocar um disco maior em cima de um menor.

a) Encontre uma relação de recorrência para o número de movimentos necessários para resolver o problema para n discos com essa restrição adicionada.

b) Resolva esta relação de recorrência a fim de encontrar uma fórmula para o número de movimentos necessários para resolver o problema para n discos.

c) Quantos arranjos são possíveis dos n discos nos três pinos para que nenhum disco maior fique em cima de um menor?

d) Mostre que todo arranjo permitido dos n discos aparece na solução desta variante do problema.

Os exercícios 49 a 53 tratam de uma variação do **problema de Josefo**, descrito por Graham, Knuth e Patashnik em [GrKnPa94]. Esse problema baseia-se no registro do historiador Flavio Josefo, que fazia parte de um grupo de 14 judeus rebeldes que foram pegos em uma caverna por uma armadilha dos romanos durante a Guerra entre Judeus e Romanos no século I. Os rebeldes preferiram suicidar-se a ser capturados; eles decidiram formar um círculo e eliminar as pessoas iterativamente ao longo do círculo, matando sempre o terceiro rebelde vivo à esquerda. Entretanto, Josefo e outro rebelde não queriam ser mortos dessa maneira; eles determinaram as posições onde deveriam permanecer para serem as últimas duas pessoas vivas. A variação que consideramos começa com n pessoas, numeradas de 1 a n, mantidas em um círculo. Em cada etapa, a segunda pessoa à esquerda que estiver viva é eliminada até que reste uma. Indicamos o número de sobreviventes por $J(n)$.

49. Determine o valor de $J(n)$ para cada número inteiro n com $1 \leq n \leq 16$.

50. Use os valores que você encontrou no Exercício 49 para presumir uma fórmula para $J(n)$. [*Dica:* Escreva $n = 2^m + k$, em que m é um número inteiro não negativo e k é um número inteiro não negativo menor que 2^m.]

51. Mostre que $J(n)$ satisfaz a relação de recorrência $J(2n) = 2J(n) - 1$ e $J(2n + 1) = 2J(n) + 1$, para $n \geq 1$ e $J(1) = 1$.

52. Use a indução matemática para demonstrar a fórmula que você presumiu no Exercício 50, usando a relação de recorrência do Exercício 51.

53. Determine $J(100)$, $J(1.000)$ e $J(10.000)$ a partir da sua fórmula para $J(n)$.

Os exercícios 54 a 61 envolvem o *Reve's puzzle*, a variação do quebra-cabeça Torre de Hanói com quatro pinos e n discos. Antes de apresentar os exercícios, descreveremos o algoritmo de Frame–Stewart para movimentar os discos do pino 1 para o pino 4 a fim de que nenhum disco maior seja colocado em cima de um menor. Esse algoritmo, dado como entrada o número de discos n, depende da escolha de um número inteiro k, com $1 \leq k \leq n$. Quando há apenas um disco, movimenta-se ele do pino 1 para o 4 e pára. Para $n > 1$, o algoritmo procede recursivamente, usando três passos. Movimenta-se recursivamente a pilha dos $n - k$ discos menores do pino 1 para o 2, usando-se todos os quatro pinos. Então, movimenta-se a pilha dos k discos maiores do pino 1 para o 4, usando-se o algoritmo dos três pinos da Torre de Hanói sem usar o pino dos $n - k$ discos menores. Por fim, movimenta-se recursivamente os menores $n - k$ discos para o pino 4, usando-se os quatro pinos. Frame e Stewart mostraram que para produzir o menor número de movimentos usando o seu algoritmo, k deve ser o menor número inteiro, tal que n não exceda $t_k = k(k + 1)/2$, o k-ésimo número triangular, ou seja, $t_{k-1} < n \leq t_k$. A hipótese modificada, conhecida como **conjectura de Frame,** é a de que esse algoritmo usa o menor número de movimentos necessários para resolver o problema, não importando como os discos são movimentados.

54. Mostre que o *Reve's puzzle* com três discos pode ser resolvido usando cinco, e não menos, movimentos.

55. Mostre que o *Reve's puzzle* com quatro discos pode ser resolvido usando nove, e não menos, movimentos.

56. Descreva os movimentos feitos pelo algoritmo de Frame–Stewart, com k escolhido para que seja usado o menor número de movimentos necessários, para

a) 5 discos.

b) 6 discos.

c) 7 discos.

d) 8 discos.

***57.** Mostre que, se $R(n)$ for o número de movimentos usados pelo algoritmo de Frame–Stewart para resolver o *Reve's puzzle* com n discos, em que k é o menor número inteiro escolhido com $n \leq k(k + 1)/2$, então $R(n)$ satisfaz a relação de recorrência $R(n) = 2R(n - k) + 2^k - 1$, com $R(0) = 0$ e $R(1) = 1$.

***58.** Mostre que se k for escolhido sob as condições do Exercício 57, então $R(n) - R(n - 1) = 2^{k-1}$.

***59.** Mostre que se k for escolhido sob as condições do Exercício 57, então $R(n) = \sum_{i=1}^{k} i2^{i-1} - (t_k - n)2^{k-1}$.

***60.** Use o Exercício 59 para dar um limite superior no número de movimentos necessários para resolver o *Reve's puzzle* para todos os números inteiros n com $1 \leq n \leq 25$.

***61.** Mostre que $R(n)$ é $O(\sqrt{n}\,2^{\sqrt{2n}})$.

Considere $\{a_n\}$ como uma seqüência de números reais. As **diferenças atrasadas** dessa seqüência são definidas recursivamente como mostradas a seguir. A **primeira diferença** ∇a_n é

$$\nabla a_n = a_n - a_{n-1}.$$

A **$(k+1)$-ésima diferença** $\nabla^{k+1} a_n$ é obtida a partir de $\nabla^k a_n$ por

$$\nabla^{k+1} a_n = \nabla^k a_n - \nabla^k a_{n-1}.$$

62. Encontre ∇a_n para a seqüência $\{a_n\}$, em que

a) $a_n = 4$. **b)** $a_n = 2n$.

c) $a_n = n^2$. **d)** $a_n = 2^n$.

63. Encontre $\nabla^2 a_n$ para a seqüência no Exercício 62.

64. Mostre que $a_{n-1} = a_n - \nabla a_n$.

65. Mostre que $a_{n-2} = a_n - 2\nabla a_n + \nabla^2 a_n$.

***66.** Demonstre que a_{n-k} pode ser expresso em termos de a_n, $\nabla a_n, \nabla^2 a_n, \ldots, \nabla^k a_n$.

67. Expresse a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ em termos de a_n, ∇a_n e $\nabla^2 a_n$.

68. Mostre que qualquer relação de recorrência para a seqüência $\{a_n\}$ pode ser escrita em termos de $a_n, \nabla a_n, \nabla^2 a_n, \ldots$. A equação resultante que envolve as seqüências e suas diferenças é chamada de **equação de diferença.**

7.2 Resolvendo Relações de Recorrência Lineares

Introdução

Links

Uma grande variedade de relações de recorrência ocorre em modelos. Algumas dessas relações podem ser resolvidas usando iteração ou outra técnica direta. Entretanto, uma importante classe de relações de recorrência pode ser resolvida explicitamente de maneira sistemática. Estas são as relações de recorrência que expressam os termos de uma seqüência como combinações lineares de termos anteriores.

DEFINIÇÃO 1 Uma *relação de recorrência linear e homogênea de grau k com coeficientes constantes* é uma relação de recorrência na forma

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

em que $c_1, c_2, \ldots, c_k$ são números reais e $c_k \neq 0$.

A relação de recorrência na definição é **linear**, pois o lado direito é a soma dos termos anteriores da seqüência multiplicados por uma função de n. A relação de recorrência é **homogênea**, pois nenhum termo aparece sem estar multiplicado por a_j. Os coeficientes dos termos da seqüência são todos **constantes,** em vez de funções que dependem de n. O **grau** é k, pois a_n é expresso em termos dos k termos anteriores da seqüência.

Como conseqüência do segundo princípio da indução matemática, temos que uma seqüência, ao satisfazer a relação de recorrência na definição, é determinada unicamente por essa relação de recorrência e pelas k condições iniciais

$$a_0 = C_0,\ a_1 = C_1,\ \ldots,\ a_{k-1} = C_{k-1}.$$

EXEMPLO 1 A relação de recorrência $P_n = (1{,}11)P_{n-1}$ é uma relação de recorrência linear e homogênea de grau um. A relação de recorrência $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ é uma relação de recorrência linear e homogênea de grau dois. A relação de recorrência $a_n = a_{n-5}$ é uma relação de recorrência linear e homogênea de grau cinco. ◀

O Exemplo 2 apresenta algumas relações de recorrência que não são relações de recorrência lineares e homogêneas com coeficientes constantes.

EXEMPLO 2 A relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$ não é linear. A relação de recorrência $H_n = 2H_{n-1} + 1$ não é homogênea. A relação de recorrência $B_n = nB_{n-1}$ não tem coeficientes constantes. ◀

Relações de recorrência lineares e homogêneas são estudadas por dois motivos. Primeiro, elas geralmente aparecem em modelos para resolução de problemas; segundo, elas podem ser resolvidas sistematicamente, isto é, há um método para resolvê-las.

Resolvendo Relações de Recorrência Lineares e Homogêneas com Coeficientes Constantes

O método básico para resolver relações de recorrência lineares e homogêneas é procurar por soluções na forma $a_n = r^n$, em que r é uma constante. Note que $a_n = r^n$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}$ se e somente se

$$r^n = c_1r^{n-1} + c_2r^{n-2} + \cdots + c_kr^{n-k}.$$

Quando ambos os lados dessa equação são divididos por r^{n-k} e o lado direito é subtraído do lado esquerdo, obtemos a equação

$$r^k - c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} - \cdots - c_{k-1}r - c_k = 0.$$

Conseqüentemente, a seqüência $\{a_n\}$ com $a_n = r^n$ é uma solução se e somente se r for uma solução desta última equação, a qual chamamos de **equação característica** da relação de recorrência. As soluções dessa equação são chamadas de **raízes características** da relação de recorrência. Como veremos, essas raízes características podem ser usadas para fornecer uma fórmula explícita para todas as soluções da relação de recorrência.

Desenvolveremos primeiramente resultados que envolvem relações de recorrência lineares e homogêneas com coeficientes constantes de grau dois. Então, serão verificados resultados gerais nos quais o grau pode ser maior que dois. Como as demonstrações necessárias para estabelecer os resultados nos casos gerais são mais complicadas, elas não serão trabalhadas neste texto.

Voltaremos agora nossa atenção para as relações de recorrência lineares e homogêneas de grau dois. Primeiro, considere o caso em que existem duas raízes características distintas.

TEOREMA 1 Considere c_1 e c_2 como números reais. Suponha que $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ tenha duas raízes distintas r_1 e r_2. Então, a seqüência $\{a_n\}$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ se e somente se $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, em que α_1 e α_2 são constantes.

Demonstração: Devemos completar duas etapas para demonstrar este teorema. Primeiro, devemos demonstrar que se r_1 e r_2 forem as raízes da equação característica e α_1 e α_2 forem constantes, então a seqüência $\{a_n\}$ com $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ é uma solução da relação de recorrência. Em segundo lugar, devemos demonstrar que se a seqüência $\{a_n\}$ for uma solução, então $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ para constantes como α_1 e α_2.

Agora, mostraremos que se $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, então a seqüência $\{a_n\}$ é uma solução da relação de recorrência. Como r_1 e r_2 são raízes de $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$, temos que $r_1^2 = c_1 r_1 + c_2$, $r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$.

A partir dessas equações, vemos que

$$\begin{aligned}
c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\
&= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \\
&= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\
&= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \\
&= a_n.
\end{aligned}$$

Isto nos demonstra que a seqüência $\{a_n\}$, com $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, é uma solução da relação de recorrência.

Para demonstrar que toda solução $\{a_n\}$ da relação de recorrência $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ tem $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, para algum par de constantes α_1 e α_2, suponha que $\{a_n\}$ seja uma solução para a relação de recorrência e as condições iniciais $a_0 = C_0$ e $a_1 = C_1$ sejam mantidas. Mostraremos que há constantes α_1 e α_2, tal que a seqüência $\{a_n\}$, com $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, satisfaz essas mesmas condições iniciais. Isso requer que

$$\begin{aligned}
a_0 &= C_0 = \alpha_1 + \alpha_2, \\
a_1 &= C_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2.
\end{aligned}$$

Podemos resolver essas duas equações para α_1 e α_2. A partir da primeira equação, temos que $\alpha_2 = C_0 - \alpha_1$. Inserindo essa expressão na segunda equação, temos

$$C_1 = \alpha_1 r_1 + (C_0 - \alpha_1) r_2.$$

Assim,

$$C_1 = \alpha_1(r_1 - r_2) + C_0 r_2.$$

Isto nos mostra que

$$\alpha_1 = \frac{C_1 - C_0 r_2}{r_1 - r_2}$$

e

$$\alpha_2 = C_0 - \alpha_1 = C_0 - \frac{C_1 - C_0 r_2}{r_1 - r_2} = \frac{C_0 r_1 - C_1}{r_1 - r_2},$$

em que essas expressões para α_1 e α_2 dependem do fato de que $r_1 \neq r_2$. (Quando $r_1 = r_2$, esse teorema não é verdadeiro.) Assim, com esses valores para α_1 e α_2, a seqüência $\{a_n\}$ com $\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ satisfaz as duas condições iniciais.

Sabemos que $\{a_n\}$ e $\{\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n\}$ são, ambas, soluções para a relação de recorrência $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ e satisfazem as condições iniciais quando $n = 0$ e $n = 1$. Como há uma única solução para a relação de recorrência linear e homogênea de grau dois com duas condições iniciais, temos que as duas soluções são idênticas, ou seja, $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, para todo número inteiro n não negativo. Completamos, dessa maneira, a demonstração evidenciando que a solução da relação de recorrência linear e homogênea com coeficientes constantes de grau dois deve ter a forma $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, com α_1 e α_2 constantes. $\lhd$

As raízes características de uma relação de recorrência linear e homogênea com coeficientes constantes podem ser números complexos. O Teorema 1 ainda se aplica a este caso (o que também ocorre com os teoremas subseqüentes desta seção). As relações de recorrência com raízes características complexas não serão discutidas neste texto. Os leitores familiarizados com os números complexos podem desejar resolver os exercícios 38 e 39 no final desta seção.

Os exemplos 3 e 4 mostram como utilizar o Teorema 1 para resolver as relações de recorrência.

EXEMPLO 3 Qual é a solução da relação de recorrência

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

com $a_0 = 2$ e $a_1 = 7$?

Exemplos Extras

Solução: O Teorema 1 pode ser utilizado para resolver este problema. A equação característica da relação de recorrência é $r^2 - r - 2 = 0$. Suas raízes são $r = 2$ e $r = -1$. Assim, a seqüência $\{a_n\}$ é uma solução da relação de recorrência se e somente se

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n,$$

para constantes como α_1 e α_2. A partir das condições iniciais, temos que

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2,$$
$$a_1 = 7 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-1).$$

Resolvendo essas duas equações, temos que $\alpha_1 = 3$ e $\alpha_2 = -1$. Assim, a solução para a relação de recorrência e condições iniciais é a seqüência $\{a_n\}$, com

$$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n.$$ ◀

EXEMPLO 4 Encontre uma fórmula explícita para a seqüência de Fibonacci.

Solução: Lembre-se que a seqüência de números de Fibonacci satisfaz a relação de recorrência $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, bem como as condições iniciais $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$. As raízes da equação característica $r^2 - r - 1 = 0$ são $r_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ e $r_2 = (1 - \sqrt{5})/2$. Portanto, a partir do Teorema 1, temos que os números de Fibonacci são dados por

$$f_n = \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

para constantes como α_1 e α_2. As condições iniciais $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$ podem ser utilizadas para encontrar essas constantes. Temos

$$f_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$
$$f_1 = \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1.$$

A solução dessas equações, simultaneamente para α_1 e α_2, é

$$\alpha_1 = 1/\sqrt{5}, \qquad \alpha_2 = -1/\sqrt{5}.$$

Conseqüentemente, os números de Fibonacci são dados por

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

◀

O Teorema 1 não se aplica quando há uma raiz característica de multiplicidade dois. Se isso ocorrer, então $a_n = nr_0^n$ é a segunda solução para a relação de recorrência quando r_0 for uma raiz de multiplicidade dois da equação característica. O Teorema 2 mostra como trabalhar com este caso.

TEOREMA 2 Considere c_1 e c_2 como números reais com $c_2 \neq 0$. Suponha que $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ tenha apenas uma raiz r_0. Uma seqüência $\{a_n\}$ é uma solução da relação de recorrência $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ se e somente se $a_n = \alpha_1 r_0{}^n + \alpha_2 n r_0{}^n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, em que α_1 e α_2 são constantes.

A demonstração do Teorema 2 foi deixada como exercício no final desta seção. O Exemplo 5 ilustra o uso desse teorema.

EXEMPLO 5 Qual é a solução da relação de recorrência

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

com condições iniciais $a_0 = 1$ e $a_1 = 6$?

Solução: A única raiz de $r^2 - 6r + 9 = 0$ é $r = 3$. Assim, a solução para essa relação de recorrência é

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$$

para constantes como α_1 e α_2. Usando as condições iniciais, temos que

$$a_0 = 1 = \alpha_1,$$
$$a_1 = 6 = \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3.$$

Resolvendo essas duas equações, temos que $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 1$. Conseqüentemente, a solução para essa relação de recorrência com essas condições iniciais é

$$a_n = 3^n + n3^n.$$

◀

Vamos agora expressar o resultado universal sobre a solução das relações de recorrência lineares e homogêneas com coeficientes constantes, nas quais o grau pode ser maior que dois, considerando a hipótese de que a equação característica tenha raízes distintas. A demonstração desse resultado foi proposta como exercício para o leitor.

TEOREMA 3 Considere $c_1, c_2, \ldots, c_k$ como números reais. Suponha que a equação característica

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$$

tenha k raízes distintas $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Então, a seqüência $\{a_n\}$ é uma solução para a relação de recorrência

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

se e somente se

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$, em que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são constantes.

Ilustramos o uso do teorema acima com o Exemplo 6.

EXEMPLO 6 Encontre a solução para a relação de recorrência

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

com as condições iniciais $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ e $a_2 = 15$.

Solução: O polinômio característico dessa relação de recorrência é

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6.$$

As raízes características são $r = 1$, $r = 2$ e $r = 3$, pois $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = (r-1)(r-2)(r-3)$. Assim, as soluções para essa relação de recorrência encontram-se na forma

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n.$$

Para encontrar as constantes α_1, α_2 e α_3, utilizamos as condições iniciais. Estas nos fornecem

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ a_1 &= 5 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3, \\ a_2 &= 15 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 9. \end{aligned}$$

Quando este sistema de equações é resolvido em α_1, α_2 e α_3, encontramos $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ e $\alpha_3 = 2$. Assim, a única solução para essa relação de recorrência com essas condições iniciais é a seqüência $\{a_n\}$, com

$$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n.$$ ◀

Expressaremos agora o resultado mais geral sobre relações de recorrência lineares e homogêneas com coeficientes constantes, que permitem que a equação característica tenha raízes múltiplas. O ponto principal é que para cada raiz r da equação característica, a solução geral tem uma soma da forma $P(n)r^n$, em que $P(n)$ é um polinômio de grau $m-1$, sendo m a multiplicidade dessa raiz. Deixaremos a demonstração desse resultado como um exercício desafiador para o leitor.

TEOREMA 4 Considere $c_1, c_2, \ldots, c_k$ como números reais. Suponha que a equação característica

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$$

tenha t raízes distintas $r_1, r_2, \ldots, r_t$ com multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_t$, respectivamente, sendo $m_i \geq 1$ para $i = 1, 2, \ldots, t$ e $m_1 + m_2 + \cdots + m_t = k$. Então, a seqüência $\{a_n\}$ é uma solução para a relação de recorrência

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

se e somente se

$$\begin{aligned} a_n = {} & (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \cdots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n \\ & + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \cdots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}) r_2^n \\ & + \cdots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \cdots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}) r_t^n \end{aligned}$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$, em que $\alpha_{i,j}$ são constantes para $1 \leq i \leq t$ e $0 \leq j \leq m_i - 1$.

O Exemplo 7 ilustra como o Teorema 4 é utilizado para encontrar a forma generalizada de solução de uma relação de recorrência linear e homogênea quando a equação característica tem diversas raízes repetidas.

EXEMPLO 7 Suponha que as raízes da equação característica de uma relação de recorrência linear e homogênea sejam 2, 2, 2, 5, 5 e 9 (ou seja, há três raízes, a raiz 2 de multiplicidade três, a raiz 5 de multiplicidade dois e a raiz 9 de multiplicidade um). Qual é a forma da solução geral?

Solução: A partir do Teorema 4, a forma geral da solução é

$$(\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \alpha_{1,2} n^2) 2^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n) 5^n + \alpha_{3,0} 9^n.$$ ◀

Ilustraremos agora o uso do Teorema 4 na resolução de uma relação de recorrência linear e homogênea com coeficientes constantes quando a equação característica tem uma raiz de multiplicidade três.

EXEMPLO 8 Encontre a solução para a relação de recorrência

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$$

com condições iniciais $a_0 = 1$, $a_1 = -2$ e $a_2 = -1$.

Solução: A equação característica dessa relação de recorrência é

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0.$$

Como $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r + 1)^3$, há uma única raiz $r = -1$ de multiplicidade três na equação característica. A partir do Teorema 4, as soluções dessa relação de recorrência encontram-se na forma

$$a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}n(-1)^n + \alpha_{1,2}n^2(-1)^n.$$

Para encontrar as constantes $\alpha_{1,0}$, $\alpha_{1,1}$ e $\alpha_{1,2}$, usamos as condições iniciais. Ou seja,

$$a_0 = 1 = \alpha_{1,0},$$
$$a_1 = -2 = -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2},$$
$$a_2 = -1 = \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2}.$$

A solução desse sistema de equações é $\alpha_{1,0} = 1$, $\alpha_{1,1} = 3$ e $\alpha_{1,2} = -2$. Assim, a solução única para essa relação de recorrência e condições iniciais é a seqüência $\{a_n\}$, com

$$a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n.$$ ◀

Relações de Recorrência Lineares e Heterogêneas com Coeficientes Constantes

Vimos até agora como resolver relações de recorrência lineares e homogêneas com coeficientes constantes. Contudo, queremos saber se há uma técnica relativamente simples para resolver uma relação de recorrência linear, mas não homogênea, com coeficientes constantes, tal como $a_n = 3a_{n-1} + 2n$. Veremos que a resposta é afirmativa para determinadas famílias de relações de recorrência.

A relação de recorrência $a_n = 3a_{n-1} + 2n$ é um exemplo de **relação de recorrência linear e heterogênea com coeficientes constantes,** ou seja, uma relação de recorrência cuja forma é

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} + F(n),$$

em que $c_1, c_2, \ldots, c_k$ são números reais e $F(n)$ é uma função não nula dependente apenas de n. A relação de recorrência

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}$$

é chamada de **relação de recorrência homogênea associada.** Ela desenvolve um importante papel na solução da relação de recorrência heterogênea.

EXEMPLO 9 Cada relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 2^n$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$, $a_n = 3a_{n-1} + n3^n$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + n!$ é linear e heterogênea com coeficientes constantes. As relações de recorrência associadas lineares e homogêneas são $a_n = a_{n-1}$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_n = 3a_{n-1}$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, respectivamente. ◀

A questão principal das relações de recorrência lineares e heterogêneas com coeficientes constantes é que toda solução é a soma de uma solução particular com uma solução da relação de recorrência associada linear e homogênea, como mostra o Teorema 5.

TEOREMA 5 Se $\{a_n^{(p)}\}$ é uma solução particular para a relação de recorrência linear e heterogênea com coeficientes constantes

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} + F(n),$$

então, toda solução se apresenta sob a forma de $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$, em que $\{a_n^{(h)}\}$ é uma solução para a relação de recorrência associada homogênea

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}.$$

Demonstração: Como $\{a_n^{(p)}\}$ é uma solução particular para a relação de recorrência heterogênea, sabemos que

$$a_n^{(p)} = c_1a_{n-1}^{(p)} + c_2a_{n-2}^{(p)} + \cdots + c_ka_{n-k}^{(p)} + F(n).$$

Suponha agora que $\{b_n\}$ seja uma segunda solução para a relação de recorrência heterogênea, sendo

$$b_n = c_1b_{n-1} + c_2b_{n-2} + \cdots + c_kb_{n-k} + F(n).$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, temos que

$$b_n - a_n^{(p)} = c_1(b_{n-1} - a_{n-1}^{(p)}) + c_2(b_{n-2} - a_{n-2}^{(p)}) + \cdots + c_k(b_{n-k} - a_{n-k}^{(p)}).$$

Portanto, $\{b_n - a_n^{(p)}\}$ é uma solução para a relação de recorrência associada linear e homogênea, ou seja, $\{a_n^{(h)}\}$. Conseqüentemente, $b_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$ para todo n. $\triangleleft$

A partir do Teorema 5, vemos que a chave para resolver as relações de recorrência heterogêneas com coeficientes constantes é encontrar uma solução particular. Então, toda solução será a soma desta com uma solução da relação de recorrência associada homogênea. Embora não haja nenhum método que generalize uma solução que seja válida para toda função $F(n)$, existem técnicas que funcionam para determinados tipos de funções $F(n)$, tais como polinômios e potências de constantes. Isso será ilustrado nos exemplos 10 e 11.

EXEMPLO 10 Encontre todas as soluções para a relação de recorrência $a_n = 3a_{n-1} + 2n$. Qual é a solução com $a_1 = 3$?

Solução: Para resolver essa relação de recorrência linear e heterogênea com coeficientes constantes, precisamos encontrar sua relação de recorrência associada linear e homogênea e uma solução particular para essa equação heterogênea. A equação associada linear e homogênea é $a_n = 3a_{n-1}$. Suas soluções são $a_n^{(h)} = \alpha 3^n$, em que α é uma constante.

Encontraremos agora uma solução particular. Como $F(n) = 2n$ é um polinômio de grau um em n, uma solução razoável é uma função linear em n, suponhamos $p_n = cn + d$, em que c e d são constantes. Para determinar se há muitas soluções com esta forma, suponha que $p_n = cn + d$ seja uma solução. Então, a equação $a_n = 3a_{n-1} + 2n$ passa a ser $cn + d = 3(c(n - 1) + d) + 2n$. Simplificando e reorganizando os termos dados, temos $(2 + 2c)n + (2d - 3c) = 0$. Temos que $cn + d$ é uma solução se e somente se $2 + 2c = 0$ e $2d - 3c = 0$. Isso nos mostra que $cn + d$ é uma solução se e somente se $c = -1$ e $d = -3/2$. Conseqüentemente, $a_n^{(p)} = -n - 3/2$ é uma solução particular.

A partir do Teorema 5, todas as soluções têm a forma

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = -n - \frac{3}{2} + \alpha \cdot 3^n,$$

em que α é uma constante.

Para encontrar a solução com $a_1 = 3$, considere $n = 1$ na fórmula que obtivemos para a solução geral. Encontramos que $3 = -1 - 3/2 + 3\alpha$, o qual implica $\alpha = 11/6$. A solução que procurávamos é $a_n = -n - 3/2 + (11/6)3^n$. ◀

EXEMPLO 11 Encontre todas as soluções para a relação de recorrência

Exemplos Extras

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n.$$

Solução: Esta é uma relação de recorrência linear e heterogênea. As soluções de sua relação de recorrência associada homogênea

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

são $a_n^{(h)} = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot 2^n$, em que α_1 e α_2 são constantes. Como $F(n) = 7^n$, uma solução razoável seria $a_n^{(p)} = C \cdot 7^n$, em que C é uma constante. Substituindo os termos desta seqüência na relação de recorrência temos $C \cdot 7^n = 5C \cdot 7^{n-1} - 6C \cdot 7^{n-2} + 7^n$. Simplificando a equação por 7^{n-2}, temos $49C = 35C - 6C + 49$, o que implica $20C = 49$ ou $C = 49/20$.
Assim, $a_n^{(p)} = (49/20)7^n$ é uma solução particular. A partir do Teorema 5, todas as soluções estão na forma

$$a_n = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot 2^n + (49/20)7^n.$$ ◀

Nos exemplos 10 e 11, propusemos uma hipótese didática de que existiam soluções de uma determinada forma. Em ambos os casos, fomos capazes de encontrar essas soluções. Isto não foi por acaso. Sempre que $F(n)$ for o produto de um polinômio em n e a n-ésima potência de uma constante, sabemos exatamente qual forma a solução terá, como afirmado no Teorema 6. Deixaremos a demonstração do Teorema 6 como um exercício desafiador para o leitor.

TEOREMA 6 Suponha que $\{a_n\}$ satisfaça a relação de recorrência linear e heterogênea

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} + F(n),$$

em que $c_1, c_2, \ldots, c_k$ são números reais, e

$$F(n) = (b_tn^t + b_{t-1}n^{t-1} + \cdots + b_1n + b_0)s^n,$$

em que $b_0, b_1, \ldots, b_t$ e s são também números reais. Quando s não for uma raiz da equação característica da relação de recorrência associada linear e homogênea, haverá uma solução particular na forma

$$(p_tn^t + p_{t-1}n^{t-1} + \cdots + p_1n + p_0)s^n.$$

Quando s for uma raiz dessa equação característica e sua multiplicidade for m, haverá uma solução particular na forma

$$n^m(p_tn^t + p_{t-1}n^{t-1} + \cdots + p_1n + p_0)s^n.$$

Note que, neste caso, quando s é uma raiz de multiplicidade m para a equação característica da relação de recorrência associada linear e homogênea, o fator n^m assegura que a solução proposta não será uma solução para a relação de recorrência associada linear e homogênea.

A seguir, fornecemos o Exemplo 12 para ilustrar a forma de uma solução particular dada pelo Teorema 6.

EXEMPLO 12 Qual a forma de uma solução particular da relação de recorrência linear e heterogênea $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + F(n)$, quando $F(n) = 3^n$, $F(n) = n3^n$, $F(n) = n^2 2^n$ e $F(n) = (n^2 + 1)3^n$?

Solução: A relação de recorrência associada linear e homogênea é $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$. Sua equação característica, $r^2 - 6r + 9 = (r - 3)^2 = 0$, tem apenas uma raiz, 3, de multiplicidade dois. Para aplicar o Teorema 6, com $F(n)$ na forma $P(n)s^n$, em que $P(n)$ é um polinômio e s é uma constante, precisamos avaliar se s é uma raiz dessa equação característica.

Como $s = 3$ é uma raiz com multiplicidade $m = 2$, mas $s = 2$ não é uma raiz, o Teorema 6 nos diz que uma solução particular tem a forma $p_0 n^2 3^n$ se $F(n) = 3^n$; $n^2(p_1 n + p_0)3^n$ se $F(n) = n3^n$; $(p_2 n^2 + p_1 n + p_0)2^n$ se $F(n) = n^2 2^n$ e $n^2(p_2 n^2 + p_1 n + p_0)3^n$ se $F(n) = (n^2 + 1)3^n$. ◄

Devemos ser cuidadosos quando $s = 1$ ao resolver as relações de recorrência que são abrangidas pelo Teorema 6. Em particular, para aplicar esse teorema com $F(n) = b_t n_t + b_{t-1} n_{t-1} + \cdots + b_1 n + b_0$, o parâmetro s assume o valor $s = 1$ (mesmo quando o termo 1^n não aparece explicitamente). A partir do teorema, a forma da solução depende de 1 ser uma raiz da equação característica da relação de recorrência associada linear e homogênea. Isso será ilustrado no Exemplo 13, que mostra como o Teorema 6 pode ser utilizado para encontrar uma fórmula para a soma dos primeiros n números inteiros positivos.

EXEMPLO 13 Considere a_n como a soma dos primeiros n números inteiros positivos, para que

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k.$$

Note que a_n satisfaz a relação de recorrência linear e heterogênea

$$a_n = a_{n-1} + n.$$

(Para obter a_n, a soma dos primeiros n números inteiros positivos, a partir de a_{n-1}, a soma dos primeiros $n - 1$ números inteiros positivos, adicionamos n.) Note que a condição inicial é $a_1 = 1$.

A relação de recorrência associada linear e homogênea para a_n é

$$a_n = a_{n-1}.$$

As soluções para essa relação de recorrência homogênea são dadas por $a_n^{(h)} = c(1)^n = c$, em que c é uma constante. Para encontrar todas as soluções para $a_n = a_{n-1} + n$, precisamos encontrar apenas uma única solução. A partir do Teorema 6, como $F(n) = n = n \cdot (1)^n$ e $s = 1$ é uma raiz de grau um da equação característica das relações de recorrência associadas lineares e homogêneas, há uma solução particular na forma de $n(p_1 n + p_0) = p_1 n^2 + p_0 n$.

Inserindo essa relação na relação de recorrência, temos $p_1 n^2 + p_0 n = p_1(n - 1)^2 + p_0(n - 1) + n$. Simplificando, vemos que $n(2p_1 - 1) + (p_0 - p_1) = 0$, o que significa que $2p_1 - 1 = 0$ e $p_0 - p_1 = 0$, então $p_0 = p_1 = 1/2$. Assim,

$$a_n^{(p)} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

é uma solução particular. Portanto, todas as soluções da relação de recorrência original $a_n = a_{n-1} + n$ são dadas por $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c + n(n+1)/2$. Como $a_1 = 1$, temos $1 = a_1 = c + 1 \cdot 2/2 = c + 1$, assim, $c = 0$. Temos que $a_n = n(n+1)/2$. (Esta é a mesma fórmula dada na Tabela 2 da Seção 2.4, derivada anteriormente.) ◀

Exercícios

1. Determine quais das relações abaixo são relações de recorrência lineares e homogêneas com coeficientes constantes. Encontre também seus respectivos graus.

a) $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 5a_{n-3}$
b) $a_n = 2na_{n-1} + a_{n-2}$
c) $a_n = a_{n-1} + a_{n-4}$
d) $a_n = a_{n-1} + 2$
e) $a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-2}$
f) $a_n = a_{n-2}$
g) $a_n = a_{n-1} + n$

2. Determine quais das relações abaixo são relações de recorrência lineares e homogêneas com coeficientes constantes. Encontre também seus respectivos graus.

a) $a_n = 3a_{n-2}$
b) $a_n = 3$
c) $a_n = a_{n-1}^2$
d) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-3}$
e) $a_n = a_{n-1}/n$
f) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n + 3$
g) $a_n = 4a_{n-2} + 5a_{n-4} + 9a_{n-7}$

3. Resolva as relações de recorrência abaixo com as condições iniciais dadas.

a) $a_n = 2a_{n-1}$ para $n \geq 1$, $a_0 = 3$
b) $a_n = a_{n-1}$ para $n \geq 1$, $a_0 = 2$
c) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ para $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$
d) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ para $n \geq 2$, $a_0 = 6$, $a_1 = 8$
e) $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ para $n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$
f) $a_n = 4a_{n-2}$ para $n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 4$
g) $a_n = a_{n-2}/4$ para $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

4. Resolva as relações de recorrência abaixo com as condições iniciais dadas.

a) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ para $n \geq 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$
b) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ para $n \geq 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$
c) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$ para $n \geq 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 10$
d) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n \geq 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 1$
e) $a_n = a_{n-2}$ para $n \geq 2$, $a_0 = 5$, $a_1 = -1$
f) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ para $n \geq 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = -3$
g) $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n$ para $n \geq 0$, $a_0 = 2$, $a_1 = 8$

5. Quantas mensagens diferentes podem ser transmitidas em n microssegundos, usando os dois sinais descritos no Exercício 35 da Seção 7.1?

6. Quantas mensagens diferentes podem ser transmitidas em n microssegundos, usando três sinais diferentes, se um sinal requer 1 microssegundo para a transmissão e os outros dois sinais, 2 microssegundos cada um para a transmissão, e um sinal na mensagem é seguido imediatamente pelo próximo sinal?

7. De quantas maneiras um tabuleiro retangular de damas $2 \times n$ pode ser ladrilhado, usando peças de 1×2 e 2×2?

8. Um modelo para o número de lagostas capturadas por ano baseia-se na hipótese de que o número de lagostas pescadas em um ano é a média do número da pesca dos dois anos anteriores.

a) Encontre uma relação de recorrência para $\{L_n\}$, em que L_n é o número de lagostas capturadas em n anos, seguindo a hipótese para este modelo.
b) Encontre L_n se 100 000 lagostas foram capturadas no ano 1 e 300 000 no ano 2.

9. Um depósito de R$ 100.000,00 é feito em um fundo de investimentos no começo do ano. No último dia do ano, dois dividendos são ganhos. O primeiro dividendo é 20% da quantia no fundo durante aquele ano. O segundo dividendo é 45% da quantia no fundo no ano anterior.

a) Encontre uma relação de recorrência para $\{P_n\}$, em que P_n é a quantia no fundo ao final de n anos, se não houver nenhum saque.
b) Qual é a quantia no fundo depois de n anos se não houver nenhum saque?

***10.** Demonstre o Teorema 2.

11. Os **números de Lucas** satisfazem a relação de recorrência

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2},$$

e as condições iniciais $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$.

a) Mostre que $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$ para $n = 2, 3, \ldots$, em que f_n é o n-ésimo número de Fibonacci.
b) Encontre uma fórmula explícita para os números de Lucas.

12. Encontre a solução para $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ para $n = 3, 4, 5, \ldots$, com $a_0 = 3$, $a_1 = 6$ e $a_2 = 0$.

13. Encontre a solução para $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$, com $a_0 = 9$, $a_1 = 10$ e $a_2 = 32$.

14. Encontre a solução para $a_n = 5a_{n-2} - 4a_{n-4}$, com $a_0 = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$ e $a_3 = 8$.

15. Encontre a solução para $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$, com $a_0 = 7$, $a_1 = -4$ e $a_2 = 8$.

***16.** Demonstre o Teorema 3.

17. Demonstre a identidade abaixo relacionada aos números de Fibonacci e aos coeficientes binomiais:

$$f_{n+1} = C(n, 0) + C(n-1, 1) + \cdots + C(n-k, k),$$

em que n é um número inteiro positivo e $k = \lfloor n/2 \rfloor$. [*Dica:* Considere $a_n = C(n, 0) + C(n-1, 1) + \cdots + C(n-k, k)$. Mostre que a seqüência $\{a_n\}$ satisfaz a mesma relação de recorrência e as condições iniciais da seqüência dos números de Fibonacci.]

18. Resolva a relação de recorrência $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$, com $a_0 = -5$, $a_1 = 4$ e $a_2 = 88$.

19. Resolva a relação de recorrência $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$, com $a_0 = 5$, $a_1 = -9$ e $a_2 = 15$.

20. Encontre a forma geral das soluções da relação de recorrência $a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4}$.

21. Qual é a forma geral das soluções de uma relação de recorrência linear e homogênea, se sua equação característica tem as raízes $1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, 3, 3, -4$?

22. Qual é a forma geral das soluções de uma relação de recorrência linear e homogênea, se sua equação característica tem as raízes $-1, -1, -1, 2, 2, 5, 5, 7$?

23. Considere a seguinte relação de recorrência linear e heterogênea $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$.

a) Mostre que $a_n = -2^{n+1}$ é uma solução dessa relação de recorrência.

b) Use o Teorema 5 para encontrar todas as soluções dessa relação de recorrência.

c) Encontre a solução para $a_0 = 1$.

24. Considere a seguinte relação de recorrência linear e heterogênea $a_n = 2a_{n-1} + 2^n$.

a) Mostre que $a_n = n2^n$ é uma solução dessa relação de recorrência.

b) Use o Teorema 5 para encontrar todas as soluções dessa relação de recorrência.

c) Encontre a solução para $a_0 = 2$.

25. a) Determine os valores das constantes A e B, tal que $a_n = An + B$ é uma solução da relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$.

b) Use o Teorema 5 para encontrar todas as soluções dessa relação de recorrência.

c) Encontre a solução para essa relação de recorrência para $a_0 = 4$.

26. Qual é a forma geral de uma solução particular garantida pelo Teorema 6 para a relação de recorrência linear e heterogênea $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + F(n)$, se

a) $F(n) = n^2$?

b) $F(n) = 2^n$?

c) $F(n) = n2^n$?

d) $F(n) = (-2)^n$?

e) $F(n) = n^2 2^n$?

f) $F(n) = n^3(-2)^n$?

g) $F(n) = 3$?

27. Qual é a forma geral de uma solução particular garantida pelo Teorema 6 para a relação de recorrência linear e heterogênea $a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4} + F(n)$, se

a) $F(n) = n^3$?

b) $F(n) = (-2)^n$?

c) $F(n) = n2^n$?

d) $F(n) = n^2 4^n$?

e) $F(n) = (n^2 - 2)(-2)^n$?

f) $F(n) = n^4 2^n$?

g) $F(n) = 2$?

28. a) Encontre todas as soluções para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} + 2n^2$.

b) Encontre a solução para a relação de recorrência do item (a) com a condição inicial $a_1 = 4$.

29. a) Encontre todas as soluções para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} + 3^n$.

b) Encontre a solução para a relação de recorrência do item (a) com a condição inicial $a_1 = 5$.

30. a) Encontre todas as soluções para a relação de recorrência $a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 42 \cdot 4^n$.

b) Encontre a solução dessa relação de recorrência com $a_1 = 56$ e $a_2 = 278$.

31. Encontre todas as soluções para a relação de recorrência $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$. [*Dica:* Procure por uma solução particular na forma $qn2^n + p_1 n + p_2$, em que q, p_1 e p_2 são constantes.]

32. Encontre a solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} + 3 \cdot 2^n$.

33. Encontre todas as soluções para a relação de recorrência $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + (n+1)2^n$.

34. Encontre todas as soluções para a relação de recorrência $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3} + n4^n$, com $a_0 = -2$, $a_1 = 0$ e $a_2 = 5$.

35. Encontre a solução para a relação de recorrência $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 2^n + n + 3$, com $a_0 = 1$ e $a_1 = 4$.

36. Considere a_n como a soma dos primeiros n quadrados perfeitos, ou seja, $a_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$. Mostre que a seqüência $\{a_n\}$ satisfaz a relação de recorrência linear e heterogênea $a_n = a_{n-1} + n^2$ e a condição inicial $a_1 = 1$. Use o Teorema 6 para determinar uma fórmula para a_n, resolvendo esta relação de recorrência.

37. Considere a_n como a soma dos primeiros n números triangulares, ou seja, $a_n = \sum_{k=1}^{n} t_k$, em que $t_k = k(k+1)/2$. Mostre que $\{a_n\}$ satisfaz a relação de recorrência linear e heterogênea $a_n = a_{n-1} + n(n+1)/2$ e a condição inicial $a_1 = 1$. Use o Teorema 6 para determinar uma fórmula para a_n, resolvendo esta relação de recorrência.

38. a) Encontre as raízes características da relação de recorrência linear e homogênea $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$. (*Nota:* Estão incluídos números complexos.)

b) Encontre a solução para a relação de recorrência do item (a) com $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$.

***39. a)** Encontre as raízes características da relação de recorrência linear e homogênea $a_n = a_{n-4}$. (*Nota:* Incluem números complexos.)

b) Encontre a solução da relação de recorrência do item (a), com $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$ e $a_3 = 1$.

***40.** Resolva as relações de recorrência simultâneas

$$a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}$$

$$b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$$

com $a_0 = 1$ e $b_0 = 2$.

***41. a)** Utilize a fórmula encontrada no Exemplo 4 para f_n, o n-ésimo número de Fibonacci, para mostrar que f_n é o número inteiro mais próximo de

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

b) Determine para qual n, f_n é maior que

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

e para qual n, f_n é menor que

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

42. Mostre que se $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = s$ e $a_1 = t$, em que s e t são constantes, então $a_n = s f_{n-1} + t f_n$ para todos os números inteiros positivos n.

43. Expresse a solução da relação de recorrência linear e heterogênea $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$ para $n \geq 2$, em que $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, em termos de números de Fibonacci. [*Dica:* onsidere $b_n = a_n + 1$ e aplique o Exercício 42 para a seqüência b_n.]

***44.** (*Requer álgebra linear*) Considere $\mathbf{A}_n$ como a matriz $n \times n$ com 2s em sua diagonal principal, 1s em todas as posições próximas à diagonal e 0s nos lugares restantes. Encontre uma relação de recorrência para d_n, o determinante de $\mathbf{A}_n$. Resolva esta relação de recorrência para encontrar uma fórmula para d_n.

45. Suponha que cada par de espécies geneticamente modificadas de coelhos deixados em uma ilha reproduz dois novos pares de coelhos no primeiro mês de idade e seis novos pares de coelhos nos próximos meses. Nenhum dos coelhos morre ou foge da ilha.

a) Encontre a relação de recorrência para o número de pares de coelhos na ilha depois de n meses que um casal recém-nascido é deixado na ilha.

b) A partir da resolução da relação de recorrência do item (a), determine o número de pares de coelhos na ilha depois de n meses que um par é deixado na ilha.

46. Suponha que haja inicialmente um casal de bode e cabra em uma ilha. O número de animais dobra todo ano por reprodução natural e alguns animais são colocados ou removidos todo ano.

a) Construa uma relação de recorrência para o número de cabras/bodes na ilha no início do n-ésimo ano, assumindo que, durante cada ano, 100 animais são adicionados à ilha.

b) Resolva a relação de recorrência do item (a) para encontrar o número de cabras/bodes na ilha no início do n-ésimo ano.

c) Construa uma relação de recorrência para o número de cabras/bodes na ilha no início do n-ésimo ano, assumindo que n animais são retirados durante o n-ésimo ano, para todo $n \geq 3$.

d) Resolva a relação de recorrência do item (c) para o número de cabras/bodes na ilha no início do n-ésimo ano.

47. Uma funcionária nova em uma grande indústria de softwares tem um salário inicial de R$ 50.000,00 por ano e é prometido a ela que ao final de cada ano seu salário irá dobrar, com um valor adicional de R$ 10.000,00 para cada ano que ela permanecer na fábrica.

a) Construa uma relação de recorrência para o salário da funcionária no seu n-ésimo ano de emprego.

b) Resolva esta relação de recorrência para encontrar o valor do seu salário ao final do n-ésimo ano de emprego.

Algumas relações de recorrência lineares que não possuem coeficientes constantes podem ser resolvidas de forma sistemática. Esse é o caso das relações de recorrência com a forma $f(n)a_n = g(n)a_{n-1} + h(n)$. Os exercícios 48 a 50 mostram esta questão.

***48. a)** Mostre que a relação de recorrência

$$f(n)a_n = g(n)a_{n-1} + h(n),$$

para $n \geq 1$ e com $a_0 = C$, pode ser reduzida à relação de recorrência na forma

$$b_n = b_{n-1} + Q(n)h(n),$$

em que $b_n = g(n+1)Q(n+1)a_n$, com

$$Q(n) = (f(1)f(2)\cdots f(n-1))/(g(1)g(2)\cdots g(n)).$$

b) Utilize o item (a) para resolver a relação de recorrência original e obter

$$a_n = \frac{C + \sum_{i=1}^{n} Q(i)h(i)}{g(n+1)Q(n+1)}.$$

***49.** Utilize o Exercício 48 para resolver a relação de recorrência $(n+1)a_n = (n+3)a_{n-1} + n$, para $n \geq 1$, com $a_0 = 1$.

50. Podemos mostrar que o número médio de comparações feitas pelo algoritmo *quick sort* (descrito no preâmbulo do Exercício 50 da Seção 4.4), ao selecionar n elementos de forma aleatória, satisfaz a relação de recorrência

$$C_n = n + 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k$$

para $n = 1, 2, \ldots$, com a condição inicial $C_0 = 0$.

a) Mostre que $\{C_n\}$ também satisfaz a relação de recorrência $nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2n$ para $n = 1, 2, \ldots$.

b) Utilize o Exercício 48 para resolver a relação de recorrência do item (a) para encontrar uma fórmula explícita para C_n.

****51.** Demonstre o Teorema 4.

****52.** Demonstre o Teorema 6.

53. Resolva a relação de recorrência $T(n) = nT^2(n/2)$ com a condição inicial $T(1) = 6$. [*Dica:* Considere $n = 2^k$ e então substitua $a_k = \log T(2^k)$ para obter uma relação de recorrência linear e heterogênea.]

de. **29.** $1/100$ **31.** $E(X)/a = \sum_r (r/a) \cdot p(X = r) \geq \sum_{r \geq a} 1 \cdot p(X = r) = p(X \geq a)$ **33. a)** $10/11$ **b)** 0,9984 **35. a)** Cada uma das $n!$ permutações ocorre com probabilidade $1/n!$, de modo que $E(X)$ é a média sobre todas estas permutações do número de comparações. **b)** Mesmo que o algoritmo continue por $n - 1$ rodadas, X será no máximo $n(n - 1)/2$. Segue da fórmula para o valor esperado que $E(X) \leq n(n - 1)/2$. **c)** O algoritmo prossegue pela comparação de elementos adjacentes e então trocando-os, se necessário. Logo, a única maneira pela qual elementos invertidos podem se tornar não invertidos é eles serem comparados e então trocados. **d)** Como $X(P) \geq I(P)$ para todo P, segue da definição de valor esperado que $E(X) \geq E(I)$. **e)** Esta soma conta 1 para toda ocorrência de inversão. **f)** Isto segue do Teorema 3. **g)** Pelo Teorema 2 com $n = 1$, o valor esperado de $I_{j,k}$ é a probabilidade de que a_k preceda a_j na permutação. Isto é claramente $1/2$ por simetria. **h)** A soma na parte (f) consiste em $C(n, 2) = n(n - 1)/2$ termos, cada um dos quais igual a $1/2$, de modo que a soma é $n(n - 1)/4$. **i)** Da parte (a) e da parte (b) sabemos que $E(X)$, o objeto de interesse, é no máximo $n(n - 1)/2$, e da parte (d) e da parte (h) sabemos que $E(X)$ é no mínimo $n(n - 1)/4$, ambos dos quais são $\Theta(n^2)$. **37.** 1 **39.** $V(X + Y) = E((X + Y)^2) - E(X + Y)^2 = E(X^2 + 2XY + Y^2) - [E(X) + E(Y)]^2 = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2 = E(X^2) - E(X)^2 + 2[E(XY) - E(X)E(Y)] + E(Y^2) - E(Y)^2 = V(X) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) + V(Y)$ **41.** $[(n - 1)/n]^m$ **43.** $(n - 1)^m/n^{m-1}$

Exercícios Complementares

1. $1/109.668$ **3. a)** $1/C(52, 13)$ **b)** $4/C(52, 13)$ **c)** $2.944.656/C(52, 13)$ **d)** $35.335.872/C(52, 13)$ **5. a)** $9/2$ **b)** $21/4$ **7. a)** 9 **b)** $21/2$ **9. a)** 8 **b)** $49/6$ **11. a)** $n/2^{n-1}$ **b)** $p(1 - p)^{k-1}$, em que $p = n/2^{n-1}$ **c)** $2^{n-1}/n$ **13.** $\frac{(m-1)(n-1)+\mathrm{mdc}(m,n)-1}{mn-1}$ **15. a)** $2/3$ **b)** $2/3$ **17.** $1/32$ **19. a)** A probabilidade de alguém ganhar 2^n reais é $1/2^n$, pois isso ocorre precisamente quando o jogador tira $n - 1$ coroas seguidas por uma cara. O valor esperado dos ganhos é, portanto, 2^n vezes $1/2^n$ quando n vai 1 para infinito. Como cada um destes termos é 1, a soma é infinita. Em outras palavras, a pessoa deve estar disposta a apostar qualquer quantia de dinheiro e esperar ganhar a longo prazo. **b)** R$ 9, R$ 9 **21. a)** $1/3$ quando $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$; $1/12$ quando $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ **b)** 1 quando $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$; $3/4$ quando $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ **23. a)** $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)\,p(E_2)$, $p(E_1 \cap E_3) = p(E_1)\,p(E_3)$, $p(E_2 \cap E_3) = p(E_2)\,p(E_3)$, $p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p(E_1)\,p(E_2)\,p(E_3)$ **b)** Sim. **c)** Sim; sim. **d)** Sim; não. **e)** $2^n - n - 1$ **25.** $V(aX + b) = E((aX + b)^2) - E(aX + b)^2 = E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - [aE(X) + b]^2 = E(a^2X^2) + E(2abX) + E(b^2) - [a^2E(X)^2 + 2abE(X) + b^2] = a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2E(X)^2 - 2abE(X) - b^2 = a^2[E(X^2) - E(X)^2] = a^2V(X)$ **27.** Para contar todo elemento do espaço amostral exatamente uma vez, devemos incluir todo elemento em cada um dos conjuntos e então eliminar a contagem dupla dos elementos nas intersecções. Logo, $p(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m) = p(E_1) + p(E_2) + \cdots + p(E_m) - p(E_1 \cap E_2) - p(E_1 \cap E_3) - \cdots - p(E_1 \cap E_m) - p(E_2 \cap E_3) - p(E_2 \cap E_4) - \cdots - p(E_2 \cap E_m) - \cdots - p(E_{m-1} \cap E_m) = qm - (m(m - 1)/2)r$, pois estão sendo subtraídos $C(m, 2)$ termos. Mas $p(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m) = 1$, de modo que temos $qm - [m(m - 1)/2]r = 1$. Como $r \geq 0$, esta equação nos diz que $qm \geq 1$, de modo que $q \geq 1/m$. Como $q \leq 1$, esta equação também implica que $[m(m - 1)/2]r = qm - 1 \leq m - 1$, de onde segue que $r \leq 2/m$. **29. a)** Compramos cartas até termos conseguido uma de cada tipo. Isto significa que compramos X cartas no total. Por outro lado, isto também significa que compramos X_0 cartas até tirarmos o primeiro tipo que conseguimos, e então compramos mais X_1 cartas até tirarmos o segundo tipo que conseguimos, e assim por diante. Logo, X é a soma dos X_j's. **b)** Uma vez que j tipos distintos tenham sido obtidos, existem $n - j$ novos tipos disponíveis de um total de n tipos disponíveis. Como é igualmente provável obtermos cada tipo, a probabilidade de sucesso na próxima compra (tirar um novo tipo) é $(n - j)/n$. **c)** Isto segue imediatamente da definição de distribuição geométrica, da definição de X_j e da parte (b). **d)** Da parte (c) segue que $E(X_j) = n/(n - j)$. Assim, pela linearidade do valor esperado e pela parte (a), temos $E(X) = E(X_0) + E(X_1) + \cdots + E(X_{n-1}) = \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \cdots + \frac{n}{1} = n(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{1})$. **e)** Cerca de 224,46 **31.** $24 \cdot 13^4/(52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49)$

CAPÍTULO 7

Seção 7.1

1. a) 2, 12, 72, 432, 2592 **b)** 2, 4, 16, 256, 65, 536 **c)** 1, 2, 5, 11, 26 **d)** 1, 1, 6, 27, 204 **e)** 1, 2, 0, 1, 3 **3. a)** 6, 17, 49, 143, 421 **b)** $49 = 5 \cdot 17 - 6 \cdot 6$, $143 = 5 \cdot 49 - 6 \cdot 17$, $421 = 5 \cdot 143 - 6 \cdot 49$ **c)** $5a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5(2^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1}) - 6(2^{n-2} + 5 \cdot 3^{n-2}) = 2^{n-2}(10 - 6) + 3^{n-2}(75 - 30) = 2^{n-2} \cdot 4 + 3^{n-2} \cdot 9 \cdot 5 = 2^n + 3^n \cdot 5 = a_n$ **5. a)** Sim **b)** Não **c)** Não **d)** Sim **e)** Sim **f)** Sim **g)** Não **h)** Não **7. a)** $a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2n - 9 = -(n - 1) + 2 + 2[-(n - 2) + 2] + 2n - 9 = -n + 2 = a_n$ **b)** $a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2n - 9 = 5(-1)^{n-1} - (n - 1) + 2 + 2[5(-1)^{n-2} - (n - 2) + 2] + 2n - 9 = 5(-1)^{n-2}(-1 + 2) - n + 2 = a_n$ **c)** $a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2n - 9 = 3(-1)^{n-1} + 2^{n-1} - (n - 1) + 2 + 2[3(-1)^{n-2} + 2^{n-2} - (n - 2) + 2] + 2n - 9 = 3(-1)^{n-2}(-1 + 2) + 2^{n-2}(2 + 2) - n + 2 = a_n$ **d)** $a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2n - 9 = 7 \cdot 2^{n-1} - (n - 1) + 2 + 2[7 \cdot 2^{n-2} - (n - 2) + 2] + 2n - 9 = 2^{n-2}(7 \cdot 2 + 2 \cdot 7) - n + 2 = a_n$ **9. a)** $a_n = 2 \cdot 3^n$ **b)** $a_n = 2n + 3$ **c)** $a_n = 1 + n(n + 1)/2$ **d)** $a_n = n^2 + 4n + 4$ **e)** $a_n = 1$ **f)** $a_n = (3^{n+1} - 1)/2$ **g)** $a_n = 5n!$ **h)** $a_n = 2^n n!$ **11. a)** $a_n = 3a_{n-1}$ **b)** 5.904.900 **13. a)** $a_n = n + a_{n-1}$, $a_0 = 0$ **b)** $a_{12} = 78$ **c)** $a_n = n(n + 1)/2$ **15.** $B(k) = [1 + (0{,}07/12)]B(k - 1) - 100$, com $B(0) = 5000$ **17.** Seja $P(n)$ a afirmação "$H_n = 2^n - 1$." *Passo base:* $P(1)$ é verdadeira, pois $H_1 = 1$. *Passo de indução:* Suponha que $H_n = 2^n - 1$. Então, como $H_{n+1} = 2H_n + 1$, segue que $H_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$. **19.** **a)** $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-5}$ para $n \geq 5$ **b)** $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_3 = 8$, $a_4 = 16$ **c)** 1217 **21.** 9494 **23.** **a)** $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$ para $n \geq 2$ **b)** $a_0 = 0, a_1 = 0$ **c)** 94 **25.** **a)** $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ para $n \geq 3$ **b)** $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4$ **c)** 81 **27.** **a)** $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$ **b)** $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ **c)** 34 **29.** **a)** $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $n \geq 2$ **b)** $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ **c)** 448 **31.** **a)** $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$ **b)** $a_0 = 1, a_1 = 3$ **c)** 239 **33.** **a)** $a_n = 2a_{n-1}$ para $n \geq 2$ **b)** $a_1 = 3$ **c)** 96 **35.** **a)** $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$ **b)** $a_0 = 1, a_1 = 1$ **c)** 89 **37.** **a)** $R_n = n + R_{n-1}$, $R_0 = 1$ **b)** $R_n = n(n + 1)/2 + 1$ **39.** **a)** $S_n = S_{n-1} + (n^2 - n + 2)/2$, $S_0 = 1$ **b)** $S_n = (n^3 + 5n + 6)/6$ **41.** 64 **43.** **a)** $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ **b)** $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ **c)** 1224 **45.** Claramente, $S(m, 1) = 1$ para $m \geq 1$. Se $m \geq n$, então uma função que não seja sobrejetiva do conjunto com m elementos para o conjunto com n elementos pode ser especificada escolhendo o tamanho da imagem, que é um inteiro entre 1 e $n - 1$ inclusive, escolhendo os elementos da imagem, o que pode ser feito de $C(n, k)$ maneiras, e escolhendo uma função sobrejetiva na imagem, o que pode ser feito de $S(m, k)$ maneiras. Portanto, existem $\sum_{k=1}^{n-1} C(n, k)S(m, k)$ funções que não são sobrejetivas. Contudo, existem n^m funções no total, de modo que $S(m, n) = n^m - \sum_{k=1}^{n-1} C(n, k)S(m, k)$. **47.** **a)** $C_5 = C_0C_4 + C_1C_3 + C_2C_2 + C_3C_1 + C_4C_0 = 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42$ **b)** $C(10, 5)/6 = 42$ **49.** $J(1) = 1$, $J(2) = 1, J(3) = 3, J(4) = 1, J(5) = 3, J(6) = 5, J(7) = 7$, $J(8) = 1, J(9) = 3, J(10) = 5, J(11) = 7, J(12) = 9, J(13) = 11, J(14) = 13, J(15) = 15, J(16) = 1$ **51.** Primeiro, suponha que o número de pessoas seja par, digamos $2n$. Depois de dar a volta no círculo uma vez e retornar para a primeira pessoa, como as pessoas nas posições com números pares foram eliminadas, restam exatamente n pessoas e a pessoa atualmente na posição i é a pessoa que estava originalmente na posição $2i - 1$. Portanto, o sobrevivente [originalmente na posição $J(2n)$] está agora na posição $J(n)$; esta era a pessoa que estava na posição $2J(n) - 1$. Portanto, $J(2n) = 2J(n) - 1$. Analogamente, quando existe um número ímpar de pessoas, digamos $2n + 1$, então depois de dar uma volta no círculo uma vez e então eliminar a pessoa 1, restam n pessoas e a pessoa atualmente na posição i é a pessoa que estava na posição $2i + 1$. Portanto, o sobrevivente será o jogador que ocupa atualmente a posição $J(n)$, ou seja, a pessoa que estava originalmente na posição $2J(n) + 1$. Assim, $J(2n + 1) = 2J(n) + 1$. O caso base é $J(1) = 1$. **53.** 73.977.3617 **55.** Estes nove movimentos resolvem o quebra-cabeça: mova o disco 1 do pino 1 para o pino 2; mova o disco 2 do pino 1 para o pino 3; mova o disco 1 do pino 2 para o pino 3; mova o disco 3 do pino 1 para o pino 2; mova o disco 4 do pino 1 para o pino 4; mova o disco 3 do pino 2 para o pino 4; mova o disco 1 do pino 3 para o pino 2; mova o disco 2 do pino 3 para o pino 4; mova o disco 1 do pino 2 para o pino 4. Para ver que pelo menos nove movimentos são necessários, observe primeiro que pelo menos sete movimentos são necessários, não importando quantos pinos estejam presentes: três para desempilhar os discos, um para mover o maior disco 4 e três outros movimentos para empilhá-los novamente. São necessários pelo menos mais dois movimentos, pois, para mover o disco 4 do pino 1 para o pino 4, os outros três discos precisam estar nos pinos 2 e 3, de modo que pelo menos um movimento é necessário para empilhá-los de novo e um movimento para desempilhá-los. **57.** O caso base é obvio. Se $n > 1$, o algoritmo consiste em três estágios. No primeiro estágio, pela hipótese de indução, são usados $R(n - k)$ movimentos para transferir os $n - k$ menores discos para o pino 2. Então, utilizando o algoritmo usual da Torre de Hanói para três pinos, precisamos $2^k - 1$ movimentos para transferir o resto dos discos (os k maiores discos) para o pino 4, evitando o pino 2. Então, novamente pela hipótese de indução, precisamos de $R(n - k)$ movimentos para transferir os $n - k$ menores discos para o pino 4; todos os pinos estão disponíveis para isso, pois os maiores discos, agora no pino 4, não interferem. Isto demonstra a relação de recorrência. **59.** Primeiro observe que $R(n) = \sum_{j=1}^{n}[R(j) - R(j - 1)]$ [o que segue do fato de a soma ser telescópica e $R(0) = 0$]. Pelo Exercício 58, essa é a soma de $2^{k'-1}$ para este intervalo de valores de j. Portanto, a soma é $\sum_{i=1}^{k} i2^{i-1}$, exceto que se n não for um número triangular, então os últimos poucos valores quando $i = k$ estão faltando, e isto é o que o último termo na expressão dada representa. **61.** Pelo Exercício 59, $R(n)$ não é maior que $\sum_{i=1}^{k} i2^{i-1}$. Pode ser mostrado que esta soma é igual a $(k + 1)2^k - 2^{k+1} + 1$, de modo que ela não é maior que $(k + 1)2^k$. Como $n > k(k - 1)/2$, a fórmula quadrática pode ser usada para mostrar que $k < 1 + \sqrt{2n}$ para todo $n > 1$. Portanto, $R(n)$ é limitado superiormente por $(1 + \sqrt{2n} + 1)2^{1+\sqrt{2n}} < 8\sqrt{n}2^{\sqrt{2n}}$ para todo $n > 2$. Desse modo, $R(n)$ é $O(\sqrt{n}2^{\sqrt{2n}})$. **63.** **a)** 0 **b)** 0 **c)** 2 **d)** $2^{n-1} - 2^{n-2}$ **65.** $a_n - 2\nabla a_n + \nabla^2 a_n = a_n - 2(a_n - a_{n-1}) + (\nabla a_n - \nabla a_{n-1}) = -a_n + 2a_{n-1} + [(a_n - a_{n-1}) - (a_{n-1} - a_{n-2})] = -a_n + 2a_{n-1} + (a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}) = a_{n-2}$ **67.** $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = (a_n - \nabla a_n) + (a_n - 2\nabla a_n + \nabla^2 a_n) = 2a_n - 3\nabla a_n + \nabla^2 a_n$, ou $a_n = 3\nabla a_n - \nabla^2 a_n$

Seção 7.2

1. **a)** Grau3 **b)** Não. **c)** Grau4 **d)** Não. **e)** Não. **f)** Grau 2 **g)** Não. **3.** **a)** $a_n = 3 \cdot 2^n$ **b)** $a_n = 2$ **c)** $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$ **d)** $a_n = 6 \cdot 2^n - 2 \cdot n2^n$ **e)** $a_n = n(-2)^{n-1}$ **f)** $a_n = 2^n - (-2)^n$ **g)** $a_n = (1/2)^{n+1} - (-1/2)^{n+1}$ **5.** $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ **7.** $[2^{n+1} + (-1)^n]/3$ **9.** **a)** $P_n = 1{,}2P_{n-1} + 0{,}45P_{n-2}$, $P_0 = 100.000$, $P_1 = 120.000$ **b)** $P_n = (250.000/3)(3/2)^n + (50.000/3)(-3/10)^n$ **11.** **a)** *Passo base:* Para $n = 1$, temos $1 = 0 + 1$, e, para $n = 2$, temos $3 = 1 + 2$. *Passo de indução:* Suponha que seja verdade para $k \leq n$. Então, $L_{n+1} = L_n + L_{n-1} = f_{n-1} + f_{n+1} + f_{n-2} + f_n = (f_{n-1} + f_{n-2}) + (f_{n+1} + f_n) = f_n + f_{n+2}$. **b)** $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ **13.** $a_n = 8(-1)^n - 3(-2)^n + 4 \cdot 3^n$ **15.** $a_n = 5 + 3(-2)^n - 3^n$ **17.** Seja $a_n = C(n, 0) + C(n - 1, 1) + \cdots + C(n - k, k)$, em que $k = \lfloor n/2 \rfloor$. Primeiro, suponha que n seja par, de modo que $k = n/2$, e o último termo é $C(k, k)$. Pela Identidade de Pascal, temos $a_n = 1 + C(n - 2, 0) + C(n - 2, 1) + C(n - 3, 1) + C(n - 3, 2) + \cdots + C(n - k, k - 2) + C(n - k, k - 1) + 1 = 1 + C(n - 2, 1) + C(n - 3, 2) + \cdots + C(n - k, k - 1) + C(n - 2, 0) + C(n - 3, 1) + \cdots + C(n - k, k$

$-2)+1=a_{n-1}+a_{n-2}$, pois $\lfloor(n-1)/2\rfloor=k-1=\lfloor(n-2)/2\rfloor$. Um cálculo semelhante funciona quando n for ímpar. Portanto, $\{a_n\}$ satisfaz a relação de recorrência $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ para todo inteiro positivo n, $n\geq 2$. Além disso, $a_1=C(1,0)=1$ e $a_2=C(2,0)+C(1,1)=2$, que são f_2 e f_3. Segue que $a_n=f_{n+1}$ para todo inteiro positivo n. **19.** $a_n=(n^2+3n+5)(-1)^n$ **21.** $(a_{1,0}+a_{1,1}n+a_{1,2}n^2+a_{1,3}n^3)+(a_{2,0}+a_{2,1}n+a_{2,2}n^2)(-2)^n+(a_{3,0}+a_{3,1}n)3^n+a_{4,0}(-4)^n$ **23. a)** $3a_{n-1}+2^n=3(-2)^n+2^n=2^n(-3+1)=-2^{n+1}=a_n$ **b)** $a_n=\alpha 3^n-2^{n+1}$ **c)** $a_n=3^{n+1}-2^{n+1}$ **25. a)** $A=-1, B=-7$ **b)** $a_n=\alpha 2^n-n-7$ **c)** $a_n=11\cdot 2^n-n-7$ **27. a)** $p_3n^3+p_2n^2+p_1n+p_0$ **b)** $n^2p_0(-2)^n$ **c)** $n^2(p_1n+p_0)2^n$ **d)** $(p_2n^2+p_1n+p_0)4^n$ **e)** $n^2(p_2n^2+p_1n+p_0)(-2)^n$ **f)** $n^2(p_4n^4+p_3n^3+p_2n^2+p_1n+p_0)2^n$ **g)** p_0 **29. a)** $a_n=\alpha 2^n+3^{n+1}$ **b)** $a_n=-2\cdot 2^n+3^{n+1}$ **31.** $a_n=\alpha 2^n+\beta 3^n-n\cdot 2^{n+1}+3n/2+21/4$ **33.** $a_n=(\alpha+\beta n+n^2+n^3/6)2^n$ **35.** $a_n=-4\cdot 2^n-n^2/4-5n/2+1/8+(39/8)3^n$ **37.** $a_n=n(n+1)(n+2)/6$ **39. a)** $1, -1, i, -i$ **b)** $a_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{2+i}{4}i^n+\frac{2-i}{4}(-i)^n$ **41. a)** Usando a fórmula para f_n, vemos que $\left|f_n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right|<1/\sqrt{5}<1/2$. Isto significa que f_n é o inteiro mais próximo de $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. **b)** Menor quando n for par; maior quando n for ímpar **43.** $a_n=f_{n-1}+2f_n-1$ **45. a)** $a_n=3a_{n-1}+4a_{n-2}$, $a_0=2$, $a_1=6$ **b)** $a_n=[4^{n+1}+(-1)^n]/5$ **47. a)** $a_n=2a_{n+1}+(n-1)10.000$ **b)** $a_n=70.000\cdot 2^{n-1}-10.000n-10.000$ **49.** $a_n=5n^2/12+13n/12+1$ **51.** Veja Capítulo 11, Seção 5, em [Ma93]. **53.** $6^n\cdot 4^{n-1}/n$

Seção 7.3

1. 14 **3.** O primeiro passo é $(1110)_2(1010)_2=(2^4+2^2)(11)_2\,(10)_2+2^2[(11)_2-(10)_2][(10)_2-(10)_2]+(2^2+1)(10)_2\cdot(10)_2$. O produto é $(10001100)_2$. **5.** $C=50,665C+729=33.979$ **7. a)** 2 **b)** 4 **c)** 7 **9. a)** 79 **b)** 48.829 **c)** 30.517.579 **11.** $O(\log n)$ **13.** $O(n^{\log_3 2})$ **15.** 5 **17. a)** *Passo base:* Se a seqüência tiver apenas um elemento, então a única pessoa na lista é a vencedora. *Passo recursivo:* Divida a lista em duas partes — a primeira metade e a segunda metade — tão igualmente quanto possível. Aplique o algoritmo recursivamente a cada metade para acabar com, no máximo, dois nomes. Então, percorra a lista toda para contar o número de ocorrências de cada um destes nomes para decidir qual, se um deles for, é o vencedor. **b)** $O(n \log n)$ **19. a)** $f(n)=f(n/2)+2$ **b)** $O(\log n)$ **21. a)** 7 **b)** $O(\log n)$ **23. a)**

```
procedure maior soma(a_1, ..., a_n)
    melhor := 0 {subseqüência vazia tem soma 0}
    for i := 1 to n
    begin
      soma := 0
      for j := i + 1 to n
      begin
       soma := soma + a_j
       if soma > melhor then melhor := soma
      end
    end
    {melhor é a maior soma possível de números na lista}
```

b) $O(n^2)$ **c)** Dividimos a lista na primeira metade e na segunda metade e aplicamos o algoritmo recursivamente para encontrar a maior soma de termos consecutivos em cada metade. A maior soma de termos consecutivos na seqüência toda ou é um destes dois números ou é a soma de uma seqüência de termos consecutivos que atravessa a metade da lista. Para encontrar a maior soma possível de uma seqüência de termos consecutivos que atravessam a metade da lista, começamos no meio e nos movemos para frente para encontrar a maior soma possível na segunda metade da lista, e nos movemos para trás para encontrar a maior soma possível na primeira metade da lista; a soma procurada é a soma destas duas quantidades. A resposta final é então a maior entre esta soma e as duas respostas obtidas recursivamente. O caso base é que a maior soma de uma seqüência de um termo é a maior entre este número e 0. **d)** 11, 9, 14 **e)** $S(n)=2S(n/2)+n$, $C(n)=2C(n/2)+n+2$, $S(1)=0$, $C(1)=1$ **f)** $O(n\log n)$, melhor que $O(n^2)$ **25.** (1, 6) e (3, 6) à distância 2 **27.** O algoritmo é essencialmente o mesmo que o algoritmo dado no Exemplo 12. A faixa central ainda tem largura $2d$, mas precisamos considerar apenas duas caixas de tamanho $d\times d$, em vez de oito caixas de tamanho $(d/2)\times(d/2)$. A relação de recorrência é a mesma do Exemplo 12, exceto que o coeficiente 7 é substituído por 1. **29.** Com $k=\log_b n$, segue que $f(n)=a^kf(1)+\sum_{j=0}^{k-1}a^jc(n/b^j)^d=a^kf(1)+\sum_{j=0}^{k-1}cn^d=a^kf(1)+kcn^d=a^{\log_b n}f(1)+c(\log_b n)n^d=n^{\log_b a}f(1)+cn^d\log_b n=n^df(1)+cn^d\log_b n$. **31.** Seja $k=\log_b n$, em que n é uma potência de b. *Passo base:* Se $n=1$ e $k=0$, então $c_1n^d+c_2n^{\log_b a}=c_1+c_2=b^dc/(b^d-a)+f(1)+b^dc/(a-b^d)=f(1)$. *Passo de indução:* Suponha que seja verdadeira para k, em que $n=b^k$. Então, para $n=b^{k+1}$, $f(n)=af(n/b)+cn^d=a\{[b^dc/(b^d-a)](n/b)^d+[f(1)+b^dc/(a-b^d)]\cdot(n/b)^{\log_b a}\}+cn^d=b^dc/(b^d-a)n^da/b^d+[f(1)+b^dc/(a-b^d)]n^{\log_b a}+cn^d=n^d[ac/(b^d-a)+c(b^d-a)/(b^d-a)]+[f(1)+b^dc/(a-b^dc)]n^{\log_b a}=[b^dc/(b^d-a)]n^d+[f(1)+b^dc/(a-b^d)]n^{\log_b a}$. **33.** Se $a>b^d$, então $\log_b a>d$, de modo que o segundo termo domina, fornecendo $O(n^{\log_b a})$. **35.** $O(^{\log_4 5})$ **37.** $O(n^3)$

Seção 7.4

1. $f(x)=2(x^6-1)/(x-1)$ **3. a)** $f(x)=2x(1-x^6)/(1-x)$ **b)** $x^3/(1-x)$ **c)** $x/(1-x^3)$ **d)** $2/(1-2x)$ **e)** $(1+x)^7$ **f)** $2/(1+x)$ **g)** $[1/(1-x)]-x^2$ **h)** $x^3/(1-x)^2$ **5. a)** $5/(1-x)$ **b)** $1/(1-3x)$ **c)** $2x^3/(1-x)$ **d)** $(3-x)/(1-x)^2$ **e)** $(1+x)^8$ **f)** $1/(1-x)^5$ **7. a)** $a_0=-64$, $a_1=144$, $a_2=-108$, $a_3=27$ e $a_n=0$ para todo $n\geq 4$ **b)** Os únicos coeficientes não nulos são $a_0=1$, $a_3=3$, $a_6=3$, $a_9=1$. **c)** $a_n=5^n$ **d)** $a_n=(-3)^{n-3}$ para $n\geq 3$, e $a_0=a_1=a_2=0$ **e)** $a_0=8$, $a_1=3$, $a_2=2$, $a_n=0$ para n ímpar maior que 2 e $a_n=1$ para n par maior que 2 **f)** $a_n=1$ se n for um múltiplo positivo de 4, $a_n=-1$ se $n<4$ e $an=0$ nos outros casos **g)** $a_n=n-1$ para $n\geq 2$ e $a_0=a_1=0$ **h)** $a_n=2^{n+1}/n!$ **9. a)** 6 **b)** 3 **c)** 9 **d)** 0 **e)** 5 **11. a)** 1024 **b)** 11 **c)** 66 **d)** 292.864 **e)** 20.412 **13.** 10 **15.** 50 **17.** 20 **19.** $f(x)=1/[(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})]$