Taxas de variação

Hoje veremos uma das interpretações da noção de derivadas no contexto da modelagem de fenômenos "reais" (físicos).

Se $y = f(t)$ é uma função de t, então $\frac{dy}{dt}(t)$ (ou $f'(t)$) poderá ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a t. Mais especificamente, estamos nos referindo à taxa de variação instantânea de f no instante t.

Vejamos:

Se fazemos a variável t ir de

t_1 a t_2, a variação em t será:

$$\Delta t = t_2 - t_1 .$$

De maneira análoga, ao fazermos t variar estaremos ocasionando uma consequente variação em $y = f(t)$:

$$\Delta y = f(t_2) - f(t_1) .$$

O quociente dessas diferenças nos dará a chamada taxa média de variação de y com respeito a t, no intervalo $[t_1, t_2]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Para obtermos a taxa instantânea de variação num dado instante t_1, basta aplicarmos o limite quando $\Delta t \to 0$:

$$\frac{dy}{dt}(t_1) = f'(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Sempre que $y = f(t)$ tiver uma interpretação "física" em alguma das ciências dentro da Matemática Aplicada, a sua derivada $\left(\frac{dy}{dt}(t) = f'(t)\right)$ será interpretada como a taxa de variação da grandeza $f(t)$.

Vejamos alguns exemplos:

1) Física do movimento de um objeto pontual:

$s = s(t) \to$ posição de uma partícula no instante t.

Nesse caso, a velocidade da partícula é definida como sendo a taxa instantânea de variação da posição:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}(t).$$

Analogamente, a aceleração da partícula é definida como sendo a taxa instantânea de variação da velocidade:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

Suponhamos que $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$.

(t medido em segundos e s em metros)

1- Determine a velocidade no instante t.

2- Qual a velocidade após 2 s? E após 4 s?

3- Quando a particula estará em repouso?

4- Quando a partícula estará se movendo para frente? (sentido positivo).

5- Determine a distância total percorrida nos primeiros 5 segundos.

6- Encontre a aceleração no instante t, e para $t = 5$ s.

7- Quando a particula estará acelerando? Quando estará freando?

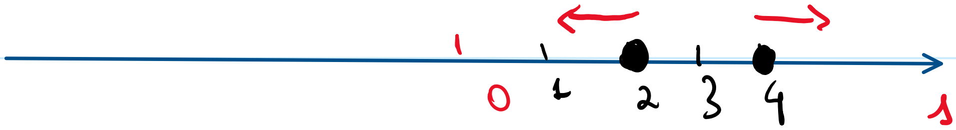
8- Esboce um gráfico para s, v e a.

8 – Esboce um gráfico para s, v e a.

Respostas:

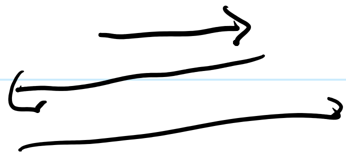
1– $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$

2) $v(2) = \underline{\underline{-3}}$ m/s , $v(4) = \underline{\underline{9}}$ m/s



$s(2) = 2$

$s(4) = 4$



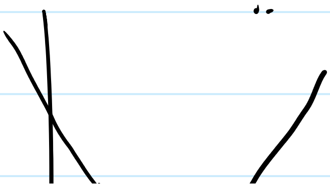
3) $v(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \end{cases}$

$s(3) = 0$

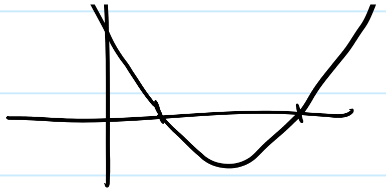
4) Movimento para frente se

$v(t) > 0.$

$\therefore \; 3t^2 - 12t + 9 = 3 \cdot (t-1) \cdot (t-3) > 0$



$\Rightarrow 0 < t < 1$ ou $t > 3.$



$\Rightarrow 0 < t < 1$ ou $t > 3$.

5) $D = s(1) - s(0) + |s(3) - s(1)|$

$+ s(5) - s(3) = 4 + 4 + 20$

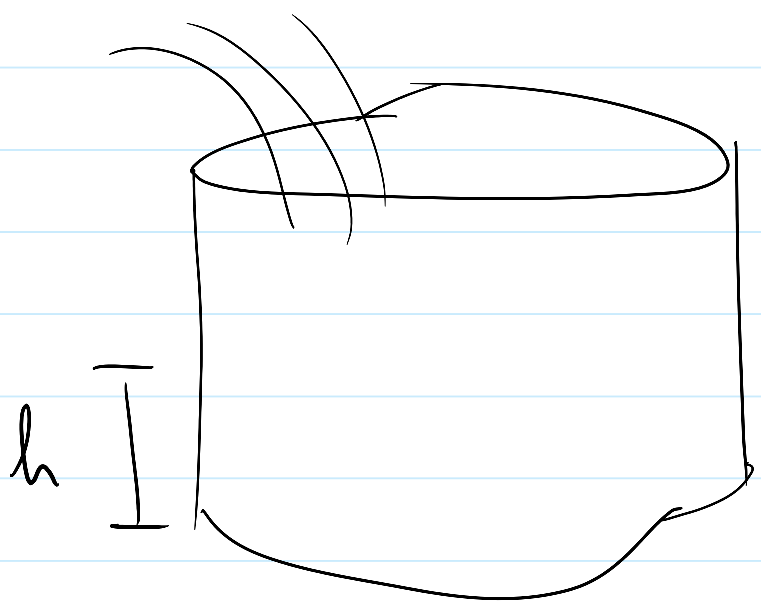
$= 28$ m.

6) $a(t) = 6t - 12$

$a(5) = 18 \ m/s^2$

7) Aceleração: $t > 2$

Freio: $t < 2$



$V \nearrow \qquad V \sim h$

$$\frac{dV}{dt} \qquad V = V(h)$$

$$V = V(t)$$

$$h = h(t)$$

$$V = V(h(t))$$