UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA (UFBA)

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DISCIPLINA: MATA02 - CÁLCULO A

UNIDADE III - LISTA DE EXERCÍCIOS

Aproximações lineares e diferenciais

(1) Estime o valor dos seguintes números:

(a) $\sqrt{1,01}$ (b) $\sqrt{0,99}$ (c) $\ln(1,07)$ (d) $\sqrt[5]{0,95}$ (e) $\sqrt{4,0000000002}$ (f) $(1,97)^6$ (g) $\text{sen}\, 59^{\text{o}}$ (h) $\text{arctg}(1,002)$.

(2) Explique por que as seguintes aproximações são razoáveis: $\sec(0,08) \approx 1$ e $(1,01)^6 \approx 1,06$.

(3) A equação que governa o movimento de um pêndulo é dada por $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta = 0$, onde g é a aceleração da gravidade e l é o comprimento da haste. Para pequenas amplitudes, é razóavel aproximar esta equação por $\theta'' = -\dfrac{g}{l}\theta$? Por que?

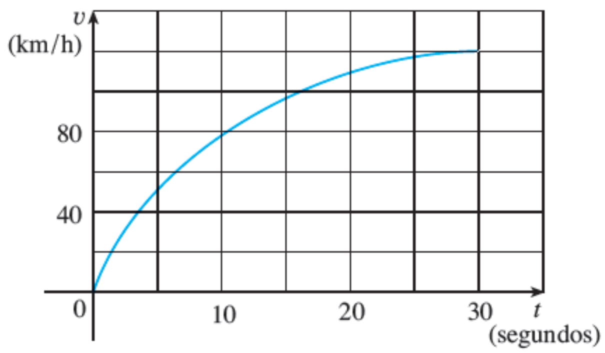
(4) Estabeleça as seguintes regras para se trabalhar com diferenciais, sendo u e v funções de x:

(a) $d(u+v) = du + dv$

(b) $d(uv) = udv + vdu$.

Introdução às integrais e o Teorema Fundamental do Cálculo

(1) O gráfico da velocidade de um carro em aceleração a partir do repouso até uma velocidade de 120 km/h em um período de 30 segundos é mostrado na figura abaixo:



Utilize *somas de Riemann* para estimar a distância (velocidade $\times$ tempo) percorrida durante esse período.

(2) Expresse os limites seguintes como uma integral definida no intervalo dado:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^3 + x_i \operatorname{sen}(x_i)\right)\Delta x, \quad [0,\pi]$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^*}\,\Delta x, \quad [1,4].$

(3) Calcule as integrais a seguir interpretando cada uma em termos de áreas:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^3 (x-1)\,dx.$

(4) Dado que $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{x}\,dx = \frac{38}{3}$, calcule $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{y}\,dy$ e $\displaystyle\int_9^4 \sqrt{x}\,dx.$

(5) Sabendo que $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,dx = 17$ e $\displaystyle\int_0^{8} f(x)\,dx = 12$, calcule $\displaystyle\int_8^{10} f(x)\,dx.$

(6) Use a 1ª parte do T.F.C. para calcular a derivada das seguintes funções:

(a) $\displaystyle f(x) = \int_1^x \ln t\,dt$ (c) $\displaystyle F(x) = \int_x^2 \cos\left(s^2\right)ds$ (e) $\displaystyle G(x) = \int_1^{x^4} \sec(t)\,dt$

(b) $\displaystyle g(y) = \int_2^y t^2 \operatorname{sen} t\,dt$ (d) $\displaystyle y = \int_3^{\sqrt{x}} \frac{\cos t}{t}\,dt$ (f) $\displaystyle z = \int_{\operatorname{tg} x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{2+t^4}}\,dt.$

(7) Uma importante função presente na teoria física de difração das ondas de luz, que também é aplicada no planejamento de auto-estradas, é a *função de Fresnel* $\displaystyle F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt.$ Calcule $F''(x)$.

(8) Use a 2ª parte do T.F.C. para calcular a integral, ou explique por que ela não existe:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} x^5\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^4 (1+3y-y^2)\,dy$ (i) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sec(x)\operatorname{tg}(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_2^8 (4x+3)\,dx$ (f) $\displaystyle\int_3^3 \sqrt{x^5+2}\,dx$ (j) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 6} 8e^s\,ds$

(c) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_{-4}^{2} \frac{2}{x^6}\,dx$ (k) $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx$

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{t^4}\,dt$ (h) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen} t\,dt$ (l) $\displaystyle\int_1^{2018} \frac{1}{s}\,ds.$

(9) Considere a função $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } -\pi \le x \le 0 \\ \operatorname{sen} x, & \text{se } 0 < x \le \pi \end{cases}$. Calcule $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$

(10) Seja $\displaystyle F(x) = \int_2^{2x} \frac{1}{\ln t}\,dt.$

(a) Determine $F'\left(\dfrac{e}{2}\right)$;

(b) F é crescente ou decrescente?

(c) O que podemos dizer sobre a concavidade de seu gráfico?

(d) **Desafio:** Esboce o gráfico de F.

(11) Ache a primitiva $F(x)$ de $f(x) = x^3 - 3e^x$ que satisfaz a condição $F(0) = 2$.

(12) Utilize o T.F.C para calcular as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^2 (t^2 + 3t - 1)\ dt$

(b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+x}{x^3}\ dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{7}{1+t^2}\ dt$

(e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\ dx$

(f) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{sen} r + \operatorname{sen} 2r)\ dr$

(h) $\displaystyle\int_0^2 2^z\ dz$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \cosh s\ ds.$

(13) Calcule as seguintes integrais indefinidas:

(a) $\displaystyle\int 3\ dx$

(b) $\displaystyle\int (ax + b)\ dx$

(c) $\displaystyle\int \left(3\sqrt[5]{x^2} + 3\right)\ dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x}\ dx$

(e) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 5x\ dx$

(f) $\displaystyle\int \left(5e^{7t} + e^{-t} + \cos 7t\right)\ dt.$

(14) Desenhe o conjunto A e calcule a sua área:

(a) A é a região compreendida entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2$, com $0 \leq x \leq 2$;

(b) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 1,\ x = 4,\ y = 0$ e por $y = \sqrt{x}$;

(c) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ 0 \leq x \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq y \leq |\operatorname{sen} x|\right\}$;

(d) A é o conjunto do plano limitado pelo eixo x, pelo gráfico de $y = x^3 - x$, sendo $-1 \leq x \leq 1$;

(e) A é a região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 2 - |x|$.

(15) Determine a função $y = y(x),\ x \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = e^{-x}$, $y'(0) = 0$ e $y(0) = 1$.

(16) A mecânica quântica prevê que a força F entre duas moléculas de gás separadas por uma distância x é dada por

$$F = -\frac{A}{x^7} + \frac{B}{x^{13}},$$

onde A e B são constantes reais. A energia potencial V das moléculas de gás satisfaz a *equação diferencial* (equação envolvendo derivadas) $F = -\dfrac{dV}{dx}$. Além disso, $V \longrightarrow 0$ quando $x \longrightarrow \infty$. Com base nessas informações, encontre uma fórmula para V em função de x.

(17) Para $x \geq 0$, definimos uma nova função $F(x)$ da seguinte forma: $F(x)$ é a área sob o gráfico da função $f(t) = \dfrac{1}{t+1}$, de 0 até x.

(a) Para x e h positivos, faça um esboço da região representada por $F(x+h) - F(x)$;

(b) Usando seu esboço, verifique que

$$h \cdot f(x) > F(x+h) - F(x) > h \cdot f(x+h).$$

(c) Usando o item anterior, determine $F'(x)$ através de um limite.

Técnica de integração: mudança de variáveis

(1) Suponha f contínua em $[-1,1]$. Calcule $\displaystyle\int_0^1 f(2x-1)\;dx$, sabendo que $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\;dx = 5$.

(2) Calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^5}\;dx$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^0 t^2\sqrt{1+t^3}\;dt$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^5}\;dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^0 x^2 e^{x^3}\;dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+2x^2}\;dx$

(f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3s}{1+s^2}\;ds$

(g) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\;dx$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\;ds$

(i) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^3(x^2+3)^{10}\;dx$

(j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}(x)\cos^2(x)\;dx$

(k) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}^2(x)\;dx$

(l) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3(x)\;dx$

(m) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3(y)\;dy$

(n) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(z)\operatorname{sen}^5(z)\;dz.$

(3) Mostre que, para todo $a \neq 0$, vale a expressão: $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$

(4) Calcule, utilizando mudança de variáveis, as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{3x-2}\;dx$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5(x)\cos(x)\;dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{3x}{5+6x^2}\;dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+4x^2)^2}\;dx$

(e) $\displaystyle\int e^x\sqrt{1+e^x}\;dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\;dx$

(g) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\sqrt{\cos x}\;dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{1+9x^2}\;dx$

(i) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3(t)\sec^2(t)\;dt$

(j) $\displaystyle\int \frac{\sec^2(x)}{3+2\operatorname{tg}(x)}\;dx$

(k) $\displaystyle\int \left(x+\frac{3}{x-2}\right)\;dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x+1}\;dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\;dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\;dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{\sqrt{1-4x^2}}\;dx$

(p) $\displaystyle\int \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}\;dt$

(q) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\;dx$

(r) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-(x+1)^2}}\;dx$

(s) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\cos(\ln x)\;dx$

(t) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^8}\;dx$

(u) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\sqrt{5+\operatorname{sen}^2(x)}\;dx.$

(5) Num cálculo com integrais, um estudante desenvolveu o seguinte raciocínio: fazendo a mudança de variável $u = \dfrac{1}{x}$ na integral $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$, obtemos

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = -\int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^2} = -I,$$

concluindo daí que $I = 0$. Por outro lado, $I = \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(-1) = \dfrac{\pi}{4} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Com isso, ele concluiu que $0 = \dfrac{\pi}{2}$. Afinal, onde é que está o erro?

(6) Mostre que a área de um círculo de raio $r > 0$ é dada por πr^2.

(7) Utilizando mudança de variável, calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{1-4x^2}\ dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ dx$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{x-x^2}\ dx$

(d) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\ dx$

(e) $\displaystyle\int \operatorname{sen}\theta(\cos\theta+5)^7\ d\theta$

(f) $\displaystyle\int \sqrt{9-(x-1)^2}\ dx$

(g) $\displaystyle\int \sqrt{9-4x^2}\ dx$

(h) $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+2x+2}\ dx$

(i) $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+2x+3}\ dx$.

(8) Calcule a área da região elíptica $E = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$, sendo $a, b > 0$.

(9) A função *logaritmo natural* é a função definida por

$$\ln x = \log_e x = \int_1^x \frac{1}{t}\ dt, \quad \text{sendo} \quad x > 0.$$

Utilize o *Teorema Fundamental do Cálculo* para verificar as seguintes propriedades:

(a) $\ln 1 = 0$;

(b) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

(c) $\ln(a\cdot b) = \ln(a)+\ln(b),\ \forall\ a,b>0$;

(d) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a)-\ln(b),\ \forall\ a,b>0$.

Técnica de integração: integração por partes

(1) Calcule:

(a) $\displaystyle\int xe^x\ dx$

(b) $\displaystyle\int x\operatorname{sen}x\ dx$

(c) $\displaystyle\int x^2e^x\ dx$

(d) $\displaystyle\int x\ln x\ dx$

(e) $\displaystyle\int \ln x\ dx$

(f) $\displaystyle\int x^2\ln x\ dx$

(g) $\displaystyle\int x\sec^2 x\ dx$

(h) $\displaystyle\int xe^{2x}\ dx$

(i) $\displaystyle\int e^x\cos x\ dx$

(j) $\displaystyle\int e^{-2x}\operatorname{sen}x\ dx$

(k) $\displaystyle\int e^{-x}\cos(2x)\ dx$

(l) $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}x\ dx$.

(2) Calcule $\displaystyle\int e^{-st}\operatorname{sen}t\ dt$, sendo $s>0$ constante.

(3) Calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\ dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \ln t\ dt$

(c) $\displaystyle\int_0^\pi x^3\cos\left(x^2\right)\ dx$

(d) $\displaystyle\int_0^x t^2e^{-st}\ dt$, sendo $s\neq 0$.

(4) Suponha f'' contínua em $[a, b]$. Verifique que:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b (b-t)f''(t)\ dt.$$

Técnica de integração: frações parciais

(1) Calcule:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}\ dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-5x+6}\ dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}\ dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-1}\ dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{5x^2+1}{x-1}\ dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x-1)^2}\ dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+1}{x^2-2x-3}\ dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-2)^3}\ dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-x}\ dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x}\ dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\ dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}\ dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^3-2x^2-x+2}\ dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{x^5+3}{x^3-4x}\ dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2-2x}\ dx.$

(2) Determine $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{x-3}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}.$$

(3) Utilize o exercício anterior para calcular $\displaystyle\int \frac{x-3}{(x-1)^2(x+2)^2}\ dx.$

(4) Calcule as seguintes integrais indefinidas:

(a) $\displaystyle\int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}\ dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x^2+4}{x^3-8}\ dx.$

Outras técnicas de integração

(1) Calcule $\displaystyle\int \operatorname{sen}(6x)\cos(x)\ dx$, utilizando a igualdade $\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)]$.

(2) Prove as seguintes identidades:

$$\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right] \quad \text{e} \quad \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right].$$

Em seguida, utilize-as para calcular as integrais:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(3x)\ dx$

(b) $\displaystyle\int \cos(5x)\cos(x)\ dx.$

(3) Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Calcule $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\ dx.$

(4) Seja n um número natural, com $n \geq 2$. Verifique as seguintes *fórmulas de recorrência*:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n(x)\; dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\; dx$;

(b) $\displaystyle\int \cos^n(x)\; dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}(x)\operatorname{sen}(x) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\; dx$.

(5) Utilize as fórmulas de recorrência para calcular as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4(x)\; dx$ (b) $\displaystyle\int \cos^5(x)\; dx$.

(6) Utilize a mudança de variável $u = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ para calcular as integrais seguintes:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}\; dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{2\operatorname{tg} x}{2 + 3\cos x}\; dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + \operatorname{sen} x}\; dx$.

Integrais impróprias

(1) Determine quais das integrais abaixo são impróprias. Por quê?

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{tg} x\; dx$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - x - 2}$ (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^3}\; dx$.

(2) Esboce a região $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}\ ;\ x \leq 1,\ 0 \leq y \leq e^x\}$ e calcule o valor de sua área.

(3) Determine se cada integral é convergente ou divergente. Avalie aquelas que são convergentes.

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)^2}\; dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\; dx$ (c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\; dx$ (d) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^4}\; dx$.

(4) Se $f(t)$ é uma função contínua para $t \geq 0$, a *Transformada de Laplace* de f é a função F dada por

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\; dt,$$

cujo domínio é o conjunto de todos os números s para os quais a integral converge. Calcule a Transformada de Laplace da função $f(t) = t$.

(5) Verifique os seguintes itens:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\; dx$ é divergente;

(b) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} x\; dx = 0$;

(c) A seguinte definição está correta? Justifique!

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\; dx := \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\; dx.$$

Exercícios diversos sobre integrais

(1) Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^4 |x-3|\ dx$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^2 (|x|+1)\ dx$ (c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x^4+x^2+1}\ dx.$

(2) Calcule:

(a) $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen} x}\cos x\ dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{e^t}{1+e^{2t}}\ dt$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\ dx$

(d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2\theta\ d\theta$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{y^2+6y+8}\ dy$

(f) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+6x+10}\ dx$

(g) $\displaystyle\int e^{3z}\cos(2z)\ dz$

(h) $\displaystyle\int x^3\operatorname{tg}(x^4)\ dx$

(i) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\cos(\cos x)\ dx$

(j) $\displaystyle\int \sqrt{\cos(3t)}\operatorname{sen}(3t)\ dt$

(k) $\displaystyle\int (2x+1)e^{x^2}e^x\ dx$

(l) $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\ dx.$

Algumas aplicações da integral

(1) Uma partícula de massa m desloca-se sobre o eixo x com função de posição $x=x(t)$, em que $x(t)$ é suposta derivável até a segunda ordem em $[t_0,t_1]$. Suponha que a componente, na direção do deslocamento, da *força resultante* $\vec{F}$ que atua sobre a partícula seja $f(x)$, com f contínua em $[x_0,x_1]$, em que $x_0=x(t_0)$ e $x_1=x(t_1)$. Sabendo que o *trabalho* τ realizado por $\vec{F}(x)=f(x)\vec{i}$ de x_0 a x_1 é dado por $\tau=\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} f(x)\ dx$, verifique que

$$\tau=\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2},$$

ou seja, τ é a *variação da energia cinética*, onde v_0 e v_1 são as velocidades nos instantes t_0 e t_1, respectivamente.

(2) Seja f contínua em $[a,b]$, com $f(x)\geq 0$ em $[a,b]$. Denote por A a região do plano limitado pelas retas $x=a$, $x=b$, pelo eixo x e pelo gráfico de $y=f(x)$. O *volume* V do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto A, é dado por

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\ dx.$$

Calcule V nas seguintes situações:

(a) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ 1\leq x\leq 2,\ \dfrac{1}{x}\leq y\leq x\right\}.$

(b) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ 0\leq x\leq 1,\ \sqrt{x}\leq y\leq 3\right\}.$

(c) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x^2+(y-2)^2\leq 1\right\}.$

(3) Suponha $f(x) \geq 0$ e contínua em $[a, b]$, com $a > 0$, e considere o conjunto

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\right\}.$$

O *volume* V do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto A, é o número

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x) \, dx.$$

Utilize tal fórmula, conhecida como o *método das cascas cilíndricas*, para calcular o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, dos seguintes conjuntos:

(a) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \geq 0, \ x^2 \leq y \leq 4\right\}$.

(b) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leq x \leq \pi, \ 0 \leq y \leq \operatorname{sen} x\right\}$.

(4) Calcule, de duas formas diferentes, o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq \dfrac{x^2}{2} + 1 \text{ e } y \geq x^2 - 1\right\}$.

(5) Calcule o volume do sólido cuja base é o semicírculo $x^2 + y^2 \leq r^2$, $y \geq 0$, e cujas secções perpendiculares ao eixo x são triângulos equiláteros.

(6) Calcule o volume do sólido cuja base é o quadrado de vértices $(0, 0), (1, 1), (0, 1)$ e $(1, 0)$ e cujas secções perpendiculares ao eixo x são triângulos isósceles de altura $x - x^2$.

(7) Considere a superfície S obtida pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico de uma função f, com derivada contínua e $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Sabendo que a *área* da superfície S é dada por

$$\text{Área}(S) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx,$$

calcule a área das superfícies geradas pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$.

(b) $f(x) = x^2$, com $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$.

(8) Seja f uma função com derivada contínua em $[a, b]$. Pode ser provado, pelo teorema do valor médio, que o *comprimento* L da curva $y = f(x)$ é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

Com base nestas informações, calcule o comprimento da curva $y = \dfrac{x^2}{2}$, entre $x = 0$ e $x = 1$.

(9) O *centro de massa* (x_c, y_c) de uma região da forma $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a \leq x \leq b, \ f(x) \leq y \leq g(x)\right\}$, onde f e g são funções contínuas em $[a, b]$ e tais que $f(x) \leq g(x)$ em $[a, b]$, é dado por

$$x_c = \frac{\displaystyle\int_a^b x[g(x) - f(x)] \, dx}{\text{Área}(A)} \quad \text{e} \quad y_c = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b [g(x) - f(x)][g(x) + f(x)] \, dx}{\text{Área}(A)}.$$

Com tais informações, encontre o centro de massa da figura limitada pela reta $y = 1$ e pela parábola $y = x^2$.

GABARITO

Aproximações lineares e diferenciais

(1) (b) $\sqrt{0,99} \approx 0,995$, (g) $\operatorname{sen} 59^{\text{o}} \approx 0,857$;

Introdução às integrais e o Teorema Fundamental do Cálculo

(2) (a) $\displaystyle\int_0^{\pi} (x^3 + x \operatorname{sen} x)\, dx$; **(3)** (a) $\dfrac{\pi}{4}$, (b) $\dfrac{3}{2}$; **(4)** $\dfrac{38}{3}$ e $-\dfrac{38}{3}$; **(5)** 5; **(6)** (a) $\ln x$, (b) $g'(y) = y^2 \operatorname{sen} y$, (c) $-\cos(x^2)$, (d) $\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2x}$, (e) $4x^3 \sec(x^4)$; **(7)** $F''(x) = \pi x \cos\left(\dfrac{\pi x^2}{2}\right)$; **(8)** (a) $\dfrac{364}{3}$, (b) 138, (c) $\dfrac{16}{3}$, (d) $\dfrac{7}{8}$, (e) $\dfrac{20}{3}$, (f) 0, (g) não existe, (h) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$, (i) não existe, (j) 24, (k) 2, (l) $\ln(2018)$.

(11) $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - 3e^x + 5$.

(12)

(a) $\dfrac{20}{3}$ (b) 2 (c) $\dfrac{7}{8}$ (d) $\dfrac{7\pi}{4}$ (e) $\dfrac{20}{3}$ (f) $\dfrac{\pi}{6}$ (g) $\dfrac{5}{4}$ (h) $\dfrac{3}{\ln 2}$ (i) $\dfrac{e^2-1}{2e}$.

(13) (a) $3x + C$, (b) $\dfrac{ax^2}{2} + bx + C$, (c) $\dfrac{15}{7}\sqrt[5]{x^7} + 3x + C$, (d) $\dfrac{x^2}{2} + \ln|x| + C$, (e) $-\dfrac{1}{5}\cos(5x) + C$, (f) $\dfrac{5}{7}e^{7t} - e^{-t} + \dfrac{\operatorname{sen} 7t}{7} + C$; **(14)** (a) 1, (b) $\dfrac{14}{3}$, (c) 4, (d) $\dfrac{1}{2}$, (e) $\dfrac{7}{3}$; **(15)** $y = e^{-x} + x$.

Técnica de integração: mudança de variáveis

(1) $\dfrac{5}{2}$; **(2)** (a) $\dfrac{15}{64}$, (b) $\dfrac{2}{9}$, (c) $\dfrac{11}{192}$, (d) $\dfrac{1}{3}(1 - e^{-1})$, (e) $\dfrac{3\sqrt{3}-1}{6}$, (f) $\dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$, (g) $\dfrac{8}{3}$, (h) $\sqrt{2} - 1$, (i) 0, (j) $\dfrac{7}{24}$, (k) $\dfrac{11}{24}$, (l) $\dfrac{11}{24}$, (m) $\dfrac{11}{24}$, (n) $\dfrac{1}{384}$.

(4)

(a) $\dfrac{2}{9}\sqrt{(3x-2)^3} + C$

(b) $\dfrac{1}{6}\operatorname{sen}^6(x) + C$

(c) $\dfrac{1}{4}\ln(5 + 6x^2) + C$

(d) $-\dfrac{1}{8(1+4x^2)} + C$

(e) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+e^x)^3} + C$

(f) $\dfrac{1}{\cos x} + C$

(g) $-\dfrac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x} + C$

(h) $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(3x) + C$

(i) $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 t + C$

(j) $\dfrac{1}{2}\ln|3 + 2\operatorname{tg} x| + C$

(k) $\dfrac{x^2}{2} + 3\ln|x-2| + C$

(l) $2x + \ln|x+1| + C$

(m) $\dfrac{(x+1)^2}{2} - 2(x+1) + \ln|x+1| + C$

(n) $-\dfrac{1}{\ln x} + C$

(o) $-\dfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + \dfrac{3}{2}\operatorname{arcsen}(2x) + C$

(p) $\operatorname{arcsen}(e^t) + C$

(q) $\text{arcsen}(\ln x) + C$

(r) $2\,\text{arcsen}(x+1) + C$

(s) $\text{sen}(\ln x) + C$

(t) $\dfrac{1}{4}\,\text{arctg}(x^4) + C$

(u) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(5+\text{sen}^2 x)^3} + C.$

(7) (a) $\dfrac{1}{4}\left[\text{arcsen}(2x) + 2x\sqrt{1-4x^2}\right] + K$, (b) $\text{arcsen}\left(\dfrac{x}{2}\right) + K$, (d) $\dfrac{1}{8}\left[\text{arcsen}\, x - \dfrac{1}{4}\,\text{sen}(4\,\text{arcsen}\, x)\right] + K$, (g) $\dfrac{9}{4}\left[\text{arcsen}\left(\dfrac{2x}{3}\right) + \dfrac{1}{2}\,\text{sen}\left(2\,\text{arcsen}\left(\dfrac{2x}{3}\right)\right)\right] + K$, (i) $2\,\text{arcsen}\left(\dfrac{x-1}{2}\right) + \left(\dfrac{x-1}{2}\right)\sqrt{4-(x-1)^2} + K$;

(8) πab;

(9) (c) Divida o intervalo de integração em $[1, ab] = [1, a] \cup [a, ab]$ e faça a mudança de variável $u = \dfrac{t}{a}$; (d) Use o item (c) e faça a mudança de variável $v = bt$.

Técnica de integração: integração por partes

(1)

(a) $(x-1)e^x + K$

(b) $-x\cos x + \text{sen}\, x + K$

(c) $e^x(x^2 - 2x + 2) + K$

(d) $\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x - \dfrac{1}{2}\right) + K$

(e) $x(\ln x - 1) + K$

(f) $\dfrac{1}{3}x^3\left(\ln x - \dfrac{1}{3}\right) + K$

(g) $x\,\text{tg}\, x + \ln|\cos x| + K$

(h) $\dfrac{1}{2}e^{2x}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + K$

(i) $\dfrac{1}{2}e^x(\text{sen}\, x + \cos x) + K.$

(2) $-\dfrac{e^{-st}}{1+s^2}(\cos t + s\,\text{sen}\, t) + K$; **(3)** (a) 1, (b) $2\ln 2 - 1$, (d) $-\dfrac{1}{s}x^2e^{-sx} - \dfrac{2}{s^2}xe^{-sx} - \dfrac{2}{s^3}e^{-sx} + \dfrac{2}{s^3}$.

Técnica de integração: frações parciais

(1)

(a) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right| + C$

(b) $-2\ln|x-2| + 3\ln|x-3| + C$

(c) $\dfrac{1}{2}\ln|x^2-4| + C$

(d) $\ln|x^2-1| + \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C$

(e) $6\ln|x-1| + 10(x-1) + \dfrac{5}{2}(x-1)^2 + C$

(f) $\ln|x-1| - \dfrac{4}{x-1} + C$

(g) $x + \dfrac{1}{4}\ln|x+1| + \dfrac{19}{4}\ln|x-3| + C$

(h) $\ln|x-2| - \dfrac{4}{x-2} - \dfrac{5}{2(x-2)^2} + C$

(i) $-3\ln|x| + 4\ln|x-1| + C$

(j) $x - \ln|x| + 3\ln|x-1| + C$

(k) $\ln|\text{sec}x + \text{tg}\, x| + C$

(l) $-\dfrac{1}{6}\ln|x| + \dfrac{3}{10}\ln|x-2| - \dfrac{2}{15}\ln|x+3| + C$

(m) $-2\ln|x-1| + \dfrac{1}{3}\ln|x+1| + \dfrac{5}{3}\ln|x-2| + C$

(n) $\dfrac{x^3}{3} + 4x - \dfrac{3}{4}\ln|x| + \dfrac{35}{8}\ln|x-2| - \dfrac{29}{8}\ln|x+2| + C.$

(2) $A = \dfrac{7}{27}, B = -\dfrac{2}{9}, C = -\dfrac{7}{27}$ e $D = -\dfrac{5}{9}$; **(3)** $\dfrac{7}{27}\ln|x-1| + \dfrac{6}{27(x-1)} - \dfrac{7}{27}\ln|x+2| + \dfrac{15}{27(x+2)} + K.$

(4)

(a) $2\ln|x-1| + \ln(x^2+6x+10) + \operatorname{arctg}(x+3) + K$

(b) $\ln|x-2| + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+4) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + K.$

$\boxed{\textbf{Outras técnicas de integração}}$

(1) $-\dfrac{1}{14}\cos(7x) - \dfrac{1}{10}\cos(5x) + C$; **(2)** *(a)* $-\dfrac{1}{10}\operatorname{sen}(5x) + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x + K$, *(b)* $\dfrac{1}{12}\operatorname{sen}(6x) + \dfrac{1}{8}\operatorname{sen}(4x) + K$; **(3)** 0 se $m \neq n$ e π se $m = n$; **(4)** Utilize Integração por partes; **(5)** *(a)* $\dfrac{3x}{8} - \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + \dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{32} + K$, *(b)* $\dfrac{1}{5}\cos^4 x \operatorname{sen} x + \dfrac{4}{15}\cos^2 x \operatorname{sen} x + \dfrac{8}{15}\operatorname{sen} x + K$;

(6) *(a)* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 1 + \sqrt{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 1 - \sqrt{2}}\right| + K$, *(b)* $\ln|2\sec(x) + 3| + K$.

$\boxed{\textbf{Integrais impróprias}}$

(2) e; **(3)** *(a)* $\dfrac{1}{12}$, *(b)* 1, *(c)* $2\sqrt{3}$, *(d)* Divergente; **(4)** $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$, para $s > 0$.

$\boxed{\textbf{Exercícios diversos sobre integrais}}$

(1) *(a)* 5, *(c)* 0.

$\boxed{\textbf{Algumas aplicações da integral}}$

(1) Aplique a *Lei de Newton* $f(x(t)) = ma(t)$, em que $a(t)$ é a aceleração no instante t.

(2) *(a)* $\dfrac{11\pi}{6}$, *(b)* $\dfrac{17\pi}{2}$, *(c)* $4\pi^2$; **(3)** *(a)* 8π, *(b)* $2\pi^2$; **(4)** $\dfrac{7\pi}{2}$; **(5)** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}r^3$ (*Dica*: integre a área $A(x)$ da interseção do sólido com o plano perpendicular a x no ponto de abscissa x); **(6)** $\dfrac{1}{12}$;

(7) *(a)* $2\pi\left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right]$, *(b)* $\dfrac{\pi}{32}\left[3\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}+1)\right]$; **(8)** $\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right]$; **(9)** $\left(0, \dfrac{2}{5}\right)$.

`Última atualização: 11/02/2019`