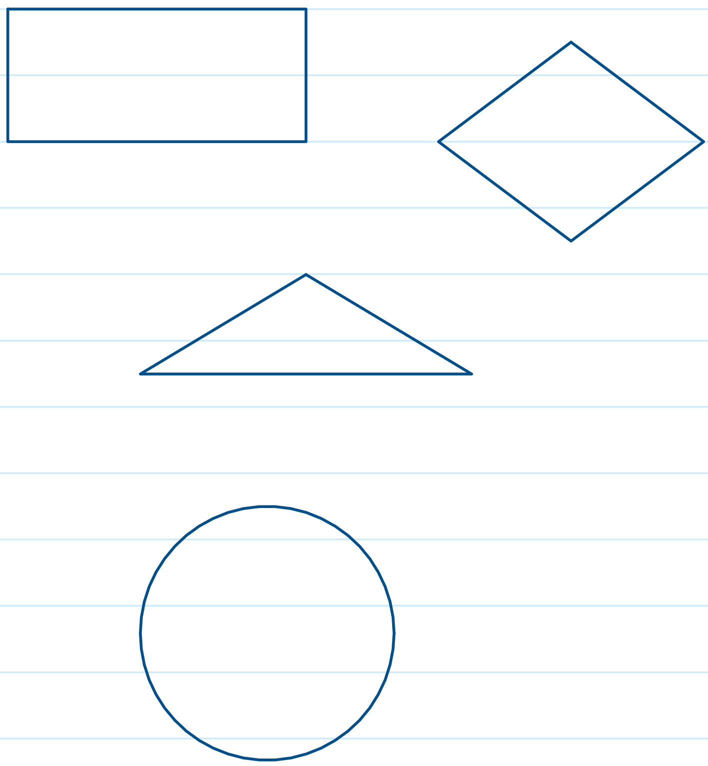
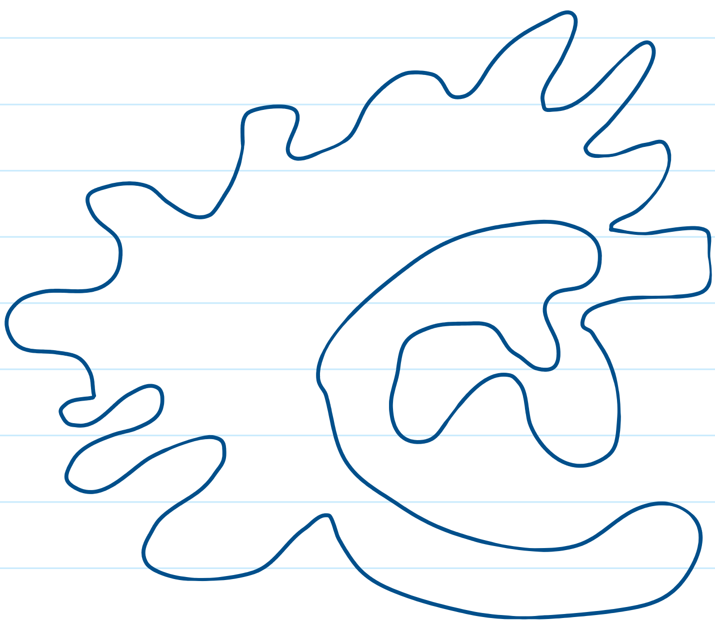
A integral definida

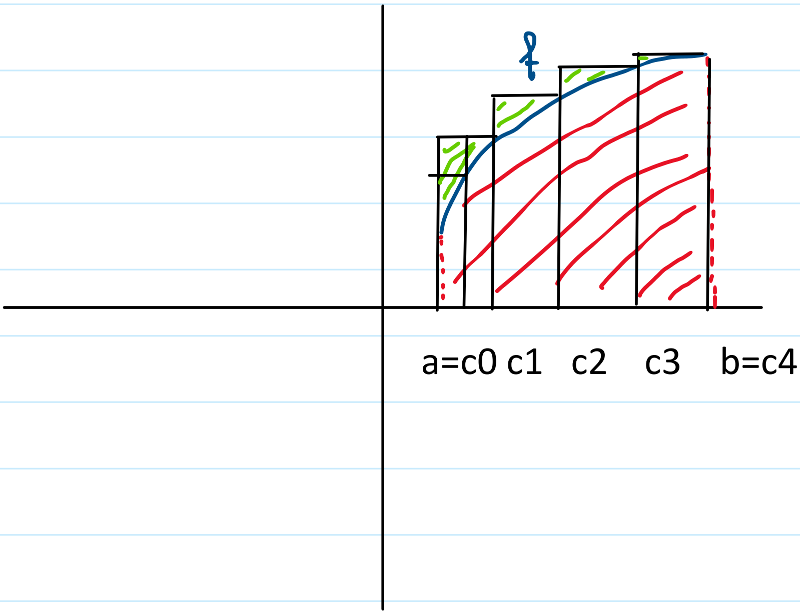
O conceito de integral definida surge da tentativa de atribuir um valor numérico para a área de uma dada região plana. Sabemos que para figuras regulares o cálculo da área pode ser mais conhecido/simplificado.



O que fazer para calcular a área da figura abaixo:



Por incrível que possa parecer, nossa estratégia será usar integração para encontrar o valor numérico desta área, conforme veremos a seguir:



Suponha que a região para a qual estamos procurando o valor numérico da área seja delimitada pelo gráfico de uma função f como na figura acima. Por simplicidade, suporemos nesse momento que $f(t) \geq 0, \forall t$.

No caso da figura acima, estamos buscando exaurir a área da região original por meio de figuras conhecidas (retângulos), para as quais já sabemos calcular a área. No caso do primeiro retângulo visto acima, sua área pode ser dada por:

$$A_{R_1} = f(c_1) \cdot (c_1 - c_0) = f(c_1) \cdot \Delta_{c_1}$$

Esse fenômeno pode ser observado nos outros retângulos também:

$$A_{R_i} = f(c_i) \cdot (c_i - c_{i-1}) = f(c_i) \cdot \Delta_{c_i}, \forall i$$

Podemos dizer que a área da figura original será aproximada pela soma da área dos retângulos R_i. A aproximação realizada gera um erro, o qual será tanto menor quanto maior a quantidade de retângulos.

Dessa forma, se chamarmos de A à área da figura original, podemos dizer que:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} A_{R_i} = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta_{c_i}$$

No limite, fazendo o tamanho das bases dos retângulos tender a zero (e, por consequência, fazendo a quantidade de retângulos tender a infinito), teremos o valor exato da área:

$$A = \lim_{\max \Delta_{c_i} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta_{c_i}$$

Um matemático chamado Riemann demonstrou que existe uma relação muito interessante entre o limite dado anteriormente e a integral indefinida:

Suponhamos que a função f em questão possui primitiva F. Se o limite que determina a área acima existir, então:

$$A = F(b) - F(a)$$

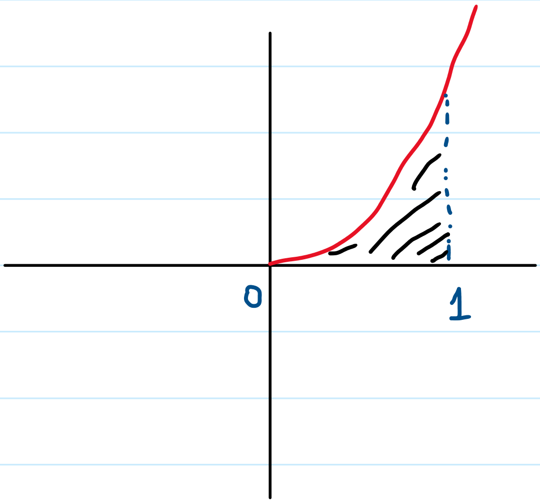
Notação:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Vejamos alguns exemplos:

1)

Determine a área abaixo do gráfico da função $f(t) = t^2$, compreendida no intervalo que vai de 0 a 1.



Pelo que foi exposto acima, temos que a área da figura em questão será por:

$$A = \int_0^1 t^2 dt = F(1) - F(0) = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Vejamos a seguir algumas propriedades importantes das integrais definidas:

1)

$$\int_a^a f(t)dt = 0$$

2)

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

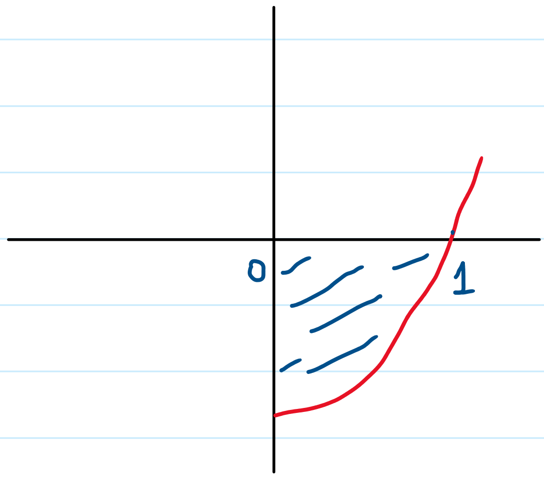
3)
Considere $c \in (a, b)$. Então:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

4) Obs.: É importante se atentar ao fato de que a construção acima foi realizada para funções não negativas. Se estivermos realizando a integral definida de uma função num intervalo de integração onde a mesma é negativa, devemos ter consciência de que o resultado encontrado corresponderá à integral definida mas não corresponderá ao valor numérico da área na região considerada.

Exemplos:

1)



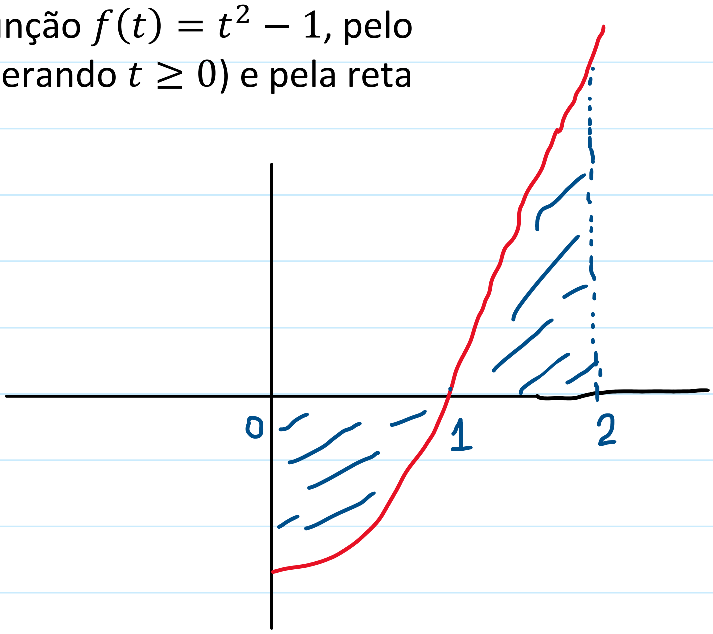
$$\int_0^1 t^2 - 1dt = \left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} - 1\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 0\right)$$
$$= -\frac{2}{3}$$

Perceba que se modificarmos a pergunta para: Encontre o valor numérico da área da região plana delimitada pelo gráfico da função $f(t) = t^2 - 1$, pelo eixo Ot e pelo eixo Oy (considerando $t \geq 0$), então teremos que adaptar o resultado encontrado pelo cálculo da integral acima:

$$A = \int_0^1 |t^2 - 1| dt = \int_0^1 -t^2 + 1 dt = \cdots = \frac{2}{3}$$

2)

Encontre o valor numérico da área da região plana delimitada pelo gráfico da função $f(t) = t^2 - 1$, pelo eixo Ot, pelo eixo Oy (considerando $t \geq 0$) e pela reta vertical $t = 2$:



Nesse caso, não poderemos usar o valor de $\int_0^2 t^2 - 1dt$ para obter o valor numérico da área:

$$\int_0^2 t^2 - 1dt = \left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 0\right) = \frac{2}{3}$$

Mas:

$$\int_0^1 t^2 - 1dt = \left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} - 1\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 0\right)$$

$$= -\frac{2}{3}$$

e

$$\int_1^2 t^2 - 1dt = \left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$$

Concluímos, então, que a área da região em questão possui valor numérico igual a $\frac{6}{3} = 2$.

Em outras palavras, para calcular esta área, podemos usar a expressão:

$$A = \int_0^2 |t^2 - 1|dt = \int_0^1 -t^2 + 1dt + \int_1^2 t^2 - 1dt$$

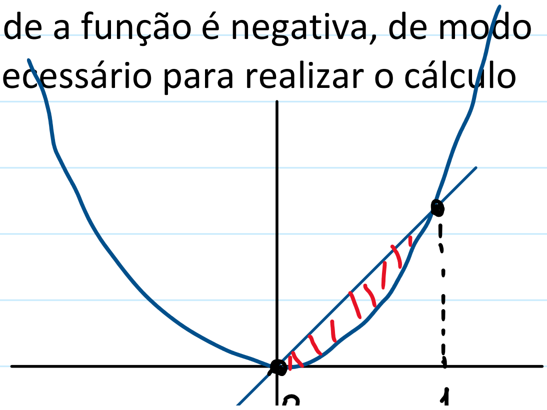
$$\neq \left|\int_0^2 t^2 - 1dt\right|$$

3)

Calcule a área da região delimita pelos gráficos das funções $f(t) = t$ e $g(t) = t^2$.

Passos:

Calcular os pontos de interseção dos gráficos
Compreender quais são os limites de integração
Identificar as regiões onde a função é negativa, de modo a compensar onde for necessário para realizar o cálculo da área.



$$A = \int_0^1 t - t^2 dt = ?$$

$$A = \int_0^1 t - t^2 dt = ?$$