UFBa - IME - DMAT —- Matemática Discreta I(MATA42) - Profa: Isamara

Lista de Exercícios.3 - Lógica Matemática

---

1. Prove que

(a) $A \subseteq B$ se e somente se $A - B = \emptyset$.

Tem-se que mostrar:

(i) Se $(A \subseteq B)$ então $(A - B) = \emptyset$ e (ii) Se $(A - B) = \emptyset$ então $(A \subseteq B)$

(i) Supondo $(A \subseteq B)$; tem-se que se $x \in A$ então $x \in B$.

Por definição, a operação $(A - B) = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

Portanto, para $(A \subseteq B)$ não existe $x \in A$ e $x \notin B$. Logo, o conjunto $(A - B) = \emptyset$.

(ii) Supondo $(A - B) = \emptyset$, tem-se que não existe $x \in A$ e $x \notin B$.

Ou seja, se $x \in A$ então $x \in B$. Portanto, $A \subseteq B$.

(b) $A \subseteq B$ se e somente se $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Tem-se que mostrar:

(i) Se $(A \subseteq B)$ então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ e (ii) Se $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ então $(A \subseteq B)$.

(i) Por hipótese, tem-se que $(A \subseteq B)$ então todo elemento x em A é também um elemento em B: $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Supondo $X \in P(A) \Rightarrow X \subseteq A$. Mas, $X \subseteq A \Rightarrow (x \in X \Rightarrow x \in A)$.

Assim, $X \subseteq A \wedge A \subseteq B \Rightarrow X \subseteq B$, ou seja, os subconjuntos de A serão também subconjuntos de B.

Como por definição, o conjunto das partes do conjunto B contém todos os subconjuntos de B: $\mathcal{P}(B) = \{Y \mid Y \subseteq B\}$, então $X \in \mathcal{P}(B)$.

Logo, o conjunto das partes de A é um subconjunto do conjunto das partes de B: $\mathcal{P}(B) \supseteq \mathcal{P}(A)$.

(ii) Por definição: $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ e $\mathcal{P}(B) = \{Y \mid Y \subseteq B\}$; onde, X e Y representam conjuntos formados por elementos de A e B, respectivamente: $X \subseteq A \Rightarrow (x \in X \Rightarrow x \in A)$ e $Y \subseteq B \Rightarrow (y \in Y \Rightarrow y \in B)$.

Agora, considerando a hipótese que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, tem-se que

$X \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(B)$, ou seja, os subconjuntos de A são subconjuntos de B: $X \subseteq B \Rightarrow (x \in X \Rightarrow x \in B)$.

Como os subconjuntos de A são formados por elementos de A e, estes subconjuntos são também de B deduz-se que os elementos de A são também elementos de B: $x \in A \Rightarrow x \in B$. Portanto, por definição da relação de inclusão entre conjuntos, conclui-se que $(A \subseteq B)$.

---

2. Classifique as FÓRMULAS BEM FORMADAS em TAUTOLOGIA, CONTRADIÇÃO, CONTINGÊNCIA.

(a) $P \oplus Q \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$

(**Justifique suas respostas utilizando uma** TABELA-VERDADE **completa.**)

P	Q	$P \oplus Q$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$	$P \oplus Q \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$
V	V	F	V	V	F	F	V
V	F	V	V	F	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	V	F	V

A fbf é uma TAUTOLOGIA porque na última coluna da tabela os valores lógicos são todos iguais a V.

(b) $P \rightarrow Q \vee R \leftrightarrow (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$.

(**Justifique suas respostas indicando as** EQUIVALÊNCIAS LÓGICAS **utilizadas.**)

$P \rightarrow Q \vee R \Leftrightarrow$ (Condicional)$\neg P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow$ (Idempotência da Disjunção)$(\neg P \vee \neg P) \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow$ (Associativa e Comutativa da Disj.)$(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R) \Leftrightarrow$ (Condicional)$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$.

(c) $P \rightarrow Q \wedge R \leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$.

(**Justifique suas respostas identificando as** EQUIVALÊNCIAS LÓGICAS **utilizadas.**)

$P \rightarrow Q \wedge R \Leftrightarrow$ (Condicional)$\neg P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow$ (Idempotência da Disjunção)$(\neg P \vee \neg P) \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow$ (Dist. da Disj. em relação união)$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \Leftrightarrow$ (Condicional)$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$.

Conseguimos deduzir uma fbf a partir de outra fbf utilizando as leis de equivalÃªncias.

Conclui-se então que a fbf é uma TAUTOLOGIA.

---

3. Mostre que:

(**Justifique suas respostas indicando as propriedades das operações em conjuntos utilizadas em cada item.**)

(a) $A\Delta B = C_{(A\cup B)}^{(A\cap B)}$.

$A\Delta B =$ (Def. Diferença Simétrica)$(A-B)\cup(B-A) =$ (Def. Diferença)$(A\cap B')\cup(B\cap A') =$ (Prop.Dist. União em rel. a inters.)$[(A\cap B')\cup B]\cap[(A\cap B')\cup A'] = [(A\cup B)\cap(B'\cup B)]\cap[(A\cup A')\cap(B'\cup A')] =$ (Complemento)$[(A\cup B)\cap(\mathcal{U})]\cap[(\mathcal{U})\cap(B'\cup A')] =$ (Elem. Neutro da Inters.)$(A\cup B)\cap(B'\cup A') =$ (Leis de De Morgan)$(A\cup B)\cap(A\cap B)' =$ (Def. Diferença)$(A\cup B)-(A\cap B) =$ (Def. Complemento Relativo)$C_{A\cup B}^{(A\cap B)}$.

(b) $(A\cap B)\cap(A\Delta B) = \emptyset$.

$(A\cap B)\cap(A\Delta B) =$ (Def. Diferença Simétrica)$(A\cap B)\cap((A-B)\cup(B-A)) =$ (Def. Diferença)$(A\cap B)\cap(\ (A\cap B')\cup(B\cap A')\ ) =$ (Dist. inters. em relação união)$(\ (A\cap B)\cap(A\cap B')\ )\cup(\ (A\cap B)\cap(B\cap A')\ ) =$ (Comutativa e Associativa)

$(\ (A\cap A)\cap(B\cap B')\ )\cup(\ (B\cap B)\cap(A\cap A')\ ) =$ (Idempotência inters.)$(\ A\cap(B\cap B')\ )\cup(\ B\cap(A\cap A')\ ) =$ (Complemento)$(\ A\cap\emptyset\ )\cup(\ B\cap\emptyset\ ) =$ (Elemento Absorvente)$\emptyset\cup\emptyset =$ (Idempotência união)$\emptyset$.

(c) $A\Delta B = A'\Delta B'$.

$(A\Delta B) =$ (Def. Diferença Simétrica)$(A-B)\cup(B-A) =$ (Def. Diferença)$(A\cap B')\cup(B\cap A') =$ (Comutativa int.)$(B'\cap A)\cup(A'\cap B) =$ (Comutativa união)$(A'\cap B)\cup(B'\cap A) =$ (Complementar)$(A'\cap(B')')\cup(B'\cap(A')') =$ (Def. Diferença)$(A'-B')\cup(B'-A') =$ (diferença simétrica)$A'\Delta B'$.

---

4. Um posto de vacinação recebeu 1000 doses de vacinas para aplicação (considere que cada dose é utilizada para vacinar uma única pessoa). Supondo que a meta deste posto seja vacinar 600 pessoas idosas, 450 pessoas com doenças graves e 400 pessoas profissionais da área de saúde. Sabendo-se que destas pessoas 150 são profissionais idosos da área de saúde, 200 são pessoas idosas com doenças graves, 150 são profissionais da área de saúde e com doenças graves e 100 são profissionais idosos da área de saúde e com doenças graves. Utilizando as operações entre conjuntos, verifique se o posto conseguirá cumprir a meta de vacinação.

   $A = \{x \mid x \text{ é uma pessoa idosa}\}; \#A = 600$

   $B = \{x \mid x \text{ é uma pessoa com doença grave}\}; \#B = 450$

   $C = \{x \mid x \text{ é uma pessoa profissional da área de saúde}\}; \#C = 400$

   $\#(A \cap C) = 150; \#(A \cap B) = 200; \#(B \cap C) = 150; \#(A \cap B \cap C) = 100.$

   Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão:

   $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - (\#(A \cap C) + \#(A \cap B) + \#(B \cap C)) + \#(A \cap B \cap C)$

   $\#(A \cup B \cup C) = 600 + 450 + 400 - (150 + 200 + 150) + 100 = 1050.$

   Para o posto cumprir a meta de vacinação seriam necessárias 1050 doses. Todavia, o posto recebeu apenas 1000 doses. Portanto, 50 pessoas não serão vacinadas.