Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Departamento de Matemática

MATA42 - Matemática Discreta - I

Aulas - Conjuntos

Definição, Operações e Cardinalidade

Professora: Isamara

Noção primitiva de Conjunto em 1874 por Georg Cantor

Chama-se CONJUNTO o grupamento num todo de objetos, bem definidos e discerníveis, de nossa percepção ou de nosso entendimento, chamados os *elementos* do conjunto.

Noção de Conjunto em 1935 por Nicolas Bourbaki

Um CONJUNTO é formado de *elementos* suscetíveis de possuírem certas **propriedades** e de terem em si, ou com *elementos* de outros conjuntos, certas *relações* .

Notações

Os CONJUNTOS serão denotados por letras maiúsculas:

$$A, B, C, \ldots, Z.$$

Os ELEMENTOS dos conjuntos serão denotados por letras minúsculas:

$$a, b, c, \ldots, z.$$

Representação dos Conjuntos

$$A = \{a, b, c, \ldots, z\}.$$

lê-se : " A é o CONJUNTO cujos *elementos* são $a, b, c, \ldots, z$" .

EXEMPLOS:

1. $M := \{$ Abril, Junho, Setembro, Novembro $\}$ "*Conjunto dos nomes dos meses com 30 dias*"
2. $V := \{$a, e, i, o, u$\}$ "*Conjunto das vogais*"
3. $E := \{ 0, 1, 2 \}$ "*Conjunto das raízes da equação:* $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$"
4. $L := \{$ m, c, a, o $\}$ "*Conjunto das letras da palavra* **macaco**"

Relação de Pertinência

- Se x é elemento de um conjunto A, escrevemos:

$$x \in A$$

lê-se: "x pertence ao conjunto A".

- Se x não é elemento de um conjunto A, escrevemos:

$$x \notin A$$

lê-se: "x não pertence ao conjunto A".

Relação de Pertinência

Observação:

- Podemos também indicar um *elemento* de um conjunto escrevendo:

$$A \ni x$$

lê-se: "A contém x".

- Se x não é elemento de um conjunto A, podemos também escrever:

$$A \not\ni x$$

lê-se: "A não contém x".

EXEMPLOS: Dado o CONJUNTO dos meses do ano com 30 dias

$$M := \{ \text{ Abril, Junho, Setembro, Novembro } \}$$

podemos afirmar,

- Abril $\in M$ ou $M \ni$ Abril
- Junho, Setembro $\in M$ ou $M \ni$ Junho, Setembro
- Julho $\notin M$ ou $M \not\ni$ Julho
- Janeiro, Agosto $\notin M$ ou $M \not\ni$ Janeiro, Agosto

Definição(Família de Conjuntos)

Um **conjunto** cujos **elementos** também são conjuntos denomina-se FAMÍLIA DE CONJUNTOS ou uma COLEÇÃO DE CONJUNTOS.

EXEMPLOS:

$A := \{\{$ Abril, Junho, Setembro, Novembro $\}, \{$ Janeiro, Março, Maio, Julho, Agosto, Outubro, Dezembro $\}\}$

Então, temos

- $\{$ Abril, Junho, Setembro, Novembro $\} \in A$
  $A \ni \{$ Abril, Junho, Setembro, Novembro $\}$
- $\{$ Janeiro, Março, Maio, Julho, Agosto, Outubro, Dezembro $\} \in A$
- Abril, Agosto $\notin A$
- $\{$ Fevereiro $\} \notin A$

DEFINIÇÃO:

Chama-se CONJUNTO UNIVERSO ou apenas **universo** de uma teoria o *conjunto* de todos os entes que são sempre considerados como *elementos* nessa teoria.
NOTAÇÃO: $\mathcal{U}$

EXEMPLOS:

- Conjunto de todos os meses do ano:
  $\mathcal{U} = \{$ Janeiro, Fevereiro, Março, Abril, Maio, Junho, Julho, Agosto, Setembro, Outubro, Novembro, Dezembro $\}$
- $\mathcal{U}$ é o conjunto de todos as pessoas matriculadas em 2023-1 no Componente Currilar MATA42 do DMAT-UFBa.
- ???

- Conjunto dos Números Naturais:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$$

- Conjunto dos Números Inteiros:

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

ou

$$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \ldots\}$$

Definindo um Conjunto num Universo

De forma usual, tem-se duas maneiras de DAR ou DEFINIR um **conjunto** num determinado **universo**:

(1) ENUMERANDO individualmente todos os elementos pertencentes ao conjunto obtendo-o na FORMA ANALÍTICA ou FORMA TABULAR
Neste caso, a **ordem** não importa .

EXEMPLOS:

- $M = \{$ Janeiro, Dezembro $\} = \{$ Dezembro, Janeiro $\}$
- $V = \{$ a, e, i, o, u $\} = \{$ o, a, e, i, u $\}$

Definindo um Conjunto num Universo

(2) ENUCIANDO um **critério de pertinência** que é satisfeito por todos os elementos do conjunto obtendo-o na FORMA SINTÉTICA ou FORMA CONSTRUTIVA.
critério de pertinência consiste em definir propriedades para os elementos.

$$\{x \mid x \in \mathcal{U} \text{ e } \psi(x)\};$$

$$\text{ou } \{x \in \mathcal{U} \mid \psi(x)\}; \text{ ou } \{x \mid \psi(x)\};$$

onde,
x é um elemento arbitrário do conjunto.
$\psi(x)$ é uma propriedade bem definida do elemento x.

Definindo um Conjunto num Universo

(2) FORMA SINTÉTICA ou FORMA CONSTRUTIVA.

EXEMPLOS:

- $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par } \}$
- $B := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 7\}$
- $C := \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq 10\}$
- ???

- CONJUNTO DOS RACIONAIS:
  $\mathbb{Q} := \{x \mid x = \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0\}$
  Notamos que todo $x \in \mathbb{Z}$ é também um número racional: $x = \frac{a}{1}; a = x$
- CONJUNTO DOS IRRACIONAIS:
  $\mathbb{I} := \{x \mid x \notin \mathbb{Q}\}$
  todos os números que não podem ser escritos como fração, como as RAÍZES NÃO EXATAS e as DÍZIMAS NÃO PERIÓDICAS.
- CONJUNTO DOS REAIS:
  $\mathbb{R} := \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \mathbb{I}\}$

- CONJUNTO DOS COMPLEXOS:
  $\mathbb{C} := \{z \mid z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}\}$
  Notamos que todo $x \in \mathbb{R}$ é também um número complexo: $x = a + 0.i$

Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}; z_1 = a + bi; z_2 = c + di; a; b; c; d \in \mathbb{R};\ i = \sqrt{-1}; i^2 = -1$

- Conjugado de z: $\overline{z} = a - bi$
- Adição: $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- Multiplicação: $z_1.z_2 = (a.c) + (a.di) + (bi.c) + (bi.di) =$
  $ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$
- Divisão: $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{(a+bi)}{(c+di)}\frac{(c-di)}{(c-di)} = \frac{ac - adi + bic - bdi^2}{cc - cdi + cdi - didi} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

- Conjunto dos Números Inteiros Não Negativos:
  $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\} = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq 0\}$;
- Conjunto dos Números Inteiros Não Positivos:
  $\mathbb{Z}_- := \{0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, \ldots\} = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq 0\}$;
- Conjunto dos Números Inteiros Positivos ou Negativos:
  $\mathbb{Z}^* := \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \ldots\} = \{x \in \mathbb{Z} | x \neq 0\}$;
- Conjunto dos Números Inteiros Positivos:
  $\mathbb{Z}_+^* := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\} = \{x \in \mathbb{Z} | x > 0\}$;
- Conjunto dos Números Inteiros Negativos:
  $\mathbb{Z}_-^* := \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, \ldots\} = \{x \in \mathbb{Z} | x < 0\}$;

- Conjunto dos Números Racionais Não Negativos:
  $\mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} | x \geq 0\}$;
- Conjunto dos Números Racionais Não Positivos:
  $\mathbb{Q}_- := \{x \in \mathbb{Q} | x \leq 0\}$;
- Conjunto dos Números Racionais Positivos ou Negativos:
  $\mathbb{Q}^* := \{x \in \mathbb{Q} | x \neq 0\}$;
- Conjunto dos Números Racionais Positivos:
  $\mathbb{Q}_+^* := \{x \in \mathbb{Q} | x > 0\}$;
- Conjunto dos Números Racionais Negativos:
  $\mathbb{Q}_-^* := \{x \in \mathbb{Q} | x < 0\}$;

- Conjunto dos Números Reais Não Negativos:
  $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\};$
- Conjunto dos Números Reais Não Positivos:
  $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\};$
- Conjunto dos Números Reais Positivos ou Negativos:
  $\mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\};$
- Conjunto dos Números Reais Positivos:
  $\mathbb{R}^*_+ := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\};$
- Conjunto dos Números Reais Negativos:
  $\mathbb{R}^*_- := \{x \in \mathbb{R} | x < 0\};$

DEFINIÇÃO:

Chama-se CONJUNTO UNITÁRIO todo conjunto A constituído de um único elemento, a.

NOTAÇÃO: $A = \{a\}$; onde a é um único elemento que determina o conjunto A.

EXEMPLOS:

1. $A := \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 = 3\} = \{2\}$;
2. $B := \{MATA42\}$
3. $C := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é divisor de } 1\} = \{1\}$

DEFINIÇÃO:

Dizemos que o conjunto de elementos que verificam uma condição impossível, ou seja, o conjunto que não possui elemento é o CONJUNTO VAZIO.

NOTAÇÃO: $\emptyset$ ou $\{\}$.

EXEMPLOS:

1. $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x = x + 1\} = \emptyset$;
2. $B := \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq x\} = \emptyset$
3. $C := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$

Axioma da Extensionalidade

Dois conjuntos A e B dizem-se IGUAIS se, e somente se, todo elemento que pertence a um deles também pertence ao outro.
NOTAÇÃO: $A = B$.
Caso contrário, dizem-se que A e B são DIFERENTES.
NOTAÇÃO: $A \neq B$.

EXEMPLOS:

1. $A := \{1, 3, 5\}$ e $B := \{3, 3, 1, 5, 1, 5\}$; $A = B$
2. $A := \{a\}$ e $B := \{a, b\}$; $A \neq B$
3. $A := \{a, \{a\}\}$ e $B := \{a\}$; $A \neq B$
4. $A := \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x < 9\}$ e $B := \{x \in \mathbb{N} \mid 6 \leq x \leq 8\}$; $A = B$

PROPRIEDADES: Dados A, B e C conjuntos quaisquer em $\mathcal{U}$.

(i) REFLEXIVA: $A = A$

(ii) SIMÉTRICA: Se $A = B$ então $B = A$

(iii) TRANSITIVA: Se $A = B$ e $B = C$ então $A = C$

DEFINIÇÃO: Relação de Inclusão

Diz-se que um conjunto A está CONTIDO num conjunto B se, e somente se, todo elemento de A também é um elemento de B.
(Se $x \in A$ então $x \in B$).
NOTAÇÃO: $A \subseteq B$. lê-se: "A **está contido** em B".

OBSERVAÇÃO: Neste caso, podemos escrever;
$B \supseteq A$.
lê-se: B contém A.

DEFINIÇÃO: Subconjunto ou Parte

Diz-se que um conjunto A é SUBCONJUNTO ou PARTE de conjunto B se, e somente se, A está CONTIDO em B.

Observação:

Se existe pelo menos um elemento de A que **não** pertença a B, então A não está contido em B.
Consequentemente, A não é subconjunto(parte) de B.

Notação: $A \not\subseteq B$; lê-se: "A **não está contido** em B".

Ou seja, B **não** contém A. Notação: $B \not\supseteq A$

PROPRIEDADES: Dados A, B e C conjuntos quaisquer em $\mathcal{U}$.

(i) REFLEXIVA: $A \subseteq A$
O conjunto A é chamado de PARTE CHEIA de A

(ii) TRANSITIVA: Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$

(iii) ANTI-SIMÉTRICA: Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A = B$

(iv) O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto A: $\emptyset \subseteq A$.
O conjunto vazio é SUBCONJUNTO(PARTE) de A denomidado PARTE VAZIA de A

(v) A está contido em $\mathcal{U}$; ou seja, $A \subseteq \mathcal{U}$.

Observação: A PARTE CHEIA e a PARTE VAZIA de um conjunto dizem-se as PARTES TRIVIAIS (SUBCONJUNTOS TRIVIAIS) desse conjunto.

Definição: Subconjunto Próprio

Sejam os conjuntos A e B. Diz-se que A é um SUBCONJUNTO PRÓPRIO de B se, e somente se, A está contido em B mas $A \neq B$ e $A \neq \emptyset$.
NOTAÇÃO(Relação de Inclusão): $A \subset B$; lê-se: " A está contido propriamente em B ou $B \supset A$ lê-se: " B contém propriamente A

OBSERVAÇÃO: Note que todos os elementos de A pertencem ao B; porém, existe pelo menos um elemento em B que não pertence ao A.

EXEMPLOS:

1. $A := \{1,3,5\}$ e $B := \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 8\}$; $A \subset B$ ou $B \supset A$
2. $A := \{a, \{a\}\}$ e $B := \{a\}$; $B \subset A$ ou $A \supset B$
3. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$
4. Seja $A := \{x \mid x$ é um inteiro positivo $\}$; $\mathbb{N} \subseteq A$.

Observação: Dado o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ pode-se afirmar que

- $\{a, b, c, d\}$ e $\emptyset$ são as PARTES TRIVIAIS de A.
- $\{a, c\} \subset A$; SUBCONJUNTO PRÓPRIO de A.
- $a, c \in A$.

DEFINIÇÃO:

Dois conjuntos A e B dizem-se COMPARÁVEIS se um dos conjuntos está contido no outro.

EXEMPLOS:

1. Os conjuntos $A := \{1, 3, 5\}$ e $B := \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 8\}$ são comparáveis; pois $A \subset B$
2. $A := \{a, \{a\}\}$ e $B := \{a\}$ são comparáveis; pois $B \subset A$
3. $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ não são comparáveis pois $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{I}$ e $\mathbb{I} \not\subset \mathbb{Q}$
4. Seja $A := \{x \mid x \text{ é um inteiro positivo }\}$; $\mathbb{N} \subseteq A$; logo, os conjuntos A e $\mathbb{N}$ são comparáveis.

Questão.1: Escreva, sob forma simbólica, os seguintes conjuntos:

(a) Conjunto dos números $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$

(b) Conjunto dos números $\{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$

(c) Conjunto das letras da palavra " universidade "

Questão.2: Verifique se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas:

(a) $\{1\} \in A = \{1, 2, 3, 4\}$

(b) $3, 4 \in B = \{3, 4, 5\}$

(c) $\emptyset \in \mathbb{Z}$

(d) $\{\emptyset\} \in C = \{\{\emptyset\}\}$

Questão.3: Definir, pela enumeração dos seus elementos, os seguintes conjuntos:

(a) Conjunto de todos os números primos menores que 10.
(b) Conjunto de todos os meses que terminam com a letra " o ".
(c) Conjunto de todos os múltiplos de 5 menores ou iguais a 20.
(d) Conjunto de todos os divisores de 30.

Questão.4: Sendo $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, represente sob *forma tabular* os seguintes conjuntos:

(a) $\{x \in A \mid x^2 \in A\}$

(b) $\{x \in A \mid x \text{ é múltiplo de } 2\}$

(c) $\{x \in A \mid x + 1 \text{ é primo }\}$

(d) $\{x \in A \mid x \text{ é ímpar }\}$

Questão.5: Represente sob *forma sintética* os seguintes conjuntos:

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(b) $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

(c) $C = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$

(d) $D = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

Questão.6: Ache um conjunto igual aos seguintes conjuntos:

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 6 \text{ e } x \neq 3\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10 \text{ e } x = 2n + 1; n \in \mathbb{N}\}$

(c) $C = \{x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \leq 5\}$

(d) $D = \{3x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \leq 7\}$

Questão.7: Sejam os conjuntos:
$A = \{2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 5, 6, 7\}, C = \{5, 6, 7\}, D = \{2, 4\}$ e
$\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Verifique quais as seguintes sentenças são falsas.

(a) $A \subset B$

(b) $D \supseteq A$

(c) $C \subset B \subset \mathcal{U}$

(d) $B \not\supset D$

Questão.8: Sejam os conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ divide } x\}$,
B$=$ $\{$ x $\in \mathbb{N} \mid x$ é múltiplo de 5$\}$,
C$=\{$ x $\in \mathbb{N} \mid x$ é par $\}$,
D$=\{$ 10, 20, 30, 40, $\ldots\}$.
Verifique quais destes conjuntos são comparáveis.

Questão.1: Escreva, sob forma simbólica, os seguintes conjuntos:

(a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2y - 1; y \in \mathbb{N}\}$

(b) $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ é número primo $\}$

(c) { u, n, i, v, e, r, s, d, a }

Questão.2:

(a) $\{1\} \in A = \{1, 2, 3, 4\}$ (F)

(b) $3, 4 \in B = \{3, 4, 5\}$ (V)

(c) $\emptyset \in \mathbb{Z}$ (F)

(d) $\{\emptyset\} \in C = \{\{\emptyset\}\}$ (V)

Questão.3:

(a) $\{2, 3, 5, 7\}$

(b) { janeiro, fevereiro, março, maio, junho, julho, agosto, setembro, outubro, novembro, dezembro }

(c) $\{5, 10, 15, 20\}$

(d) $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

Questão.4: $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

(a) $\{2\}$

(b) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

(c) $\{2, 4, 6, 10\}$

(d) $\{\}$

Questão.5:

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2y; y \in \mathbb{N}\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2y - 1; y \in \mathbb{N}\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3y; y \in \mathbb{N}\}$

Questão.6:

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 5 \text{ e } x \neq 3\}$
(b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \nmid x \text{ e } 1 < x < 11\}$
(c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x = y^2 + 1; y = 1, 2, 3, 4, 5\}$
(d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \mid x \text{ e } x < 8\}$

Questão.7: Sejam os conjuntos:
$A = \{2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 5, 6, 7\}, C = \{5, 6, 7\}, D = \{2, 4\}$ e
$\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Verifique quais as seguintes sentenças são falsas.

(a) $A \subset B$ (F)
(b) $D \supseteq A$ (F)
(c) $C \subset B \subset \mathcal{U}$ (V)
(d) $B \not\supset D$ (V)

Questão.8: Sejam os conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ divide } x\}$,
B $= \{$ x $\in \mathbb{N} \mid x$ é múltiplo de 5$\}$,
C $= \{$ x $\in \mathbb{N} \mid x$ é par $\}$,
D $= \{$ 10, 20, 30, 40, $\ldots\}$.
Verifique quais destes conjuntos são comparáveis.

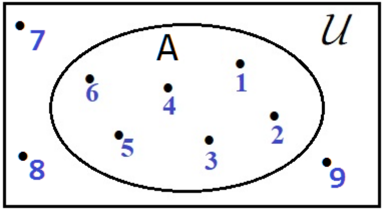
Temos, por definição, que dois conjuntos A e B são ditos comparáveis se, e somente se, $A \subseteq B$ ou $A \supseteq B$.
Verificando a relação de inclusão entre os conjuntos A, B, C, D:
$A \supseteq C$ e $A \subseteq C$, ou seja, $A = C$;
$A \supset D$, $D \subset C$ e , $D \subset B$;
Portanto, os conjuntos A e C são comparáveis, A e D , C e D; D e B.

- John Venn foi um matemático e lógico inglês do século XIX (1834 - 1923).
- Venn fez contribuições importantes para **Lógica Matemática**, **Teoria da Probabiliade** e **Filosofia da Ciência**.
- Venn formou em matemática (1857) e foi nomeado professor (1862) na Universidade de Cambridge.
- Em 1880 surgem os **Diagramas de Venn** no trabalho de John Venn: *Da representação mecânica e diagramática de proposições e raciocínios* .
- Os Diagramas de Venn são também conhecidos como *Diagramas de Euler-Venn* . O próprio Venn os chamava de *Círculos Eulerianos* fazendo referência aos Círculos de matemático suiço Leonhard Euler(1707 - 1783).
- Em 1881 publicou *Symbolic Logic*(*Lógica Simbólica*).
- Em 1888 publicou *Logic of Chance*(*A Lógica de Chance*) influenciando fortemente o desenvolvimento da Estatística.
- Em 1889 publicou *The Principles of Empirical Logic* (*Os Princípios da Lógica Empírica*).

Podemos utilizar os DIAGRAMAS DE VENN a fim de representar, graficamente, os conjuntos e as operações entre os conjuntos.

EXEMPLO.1:

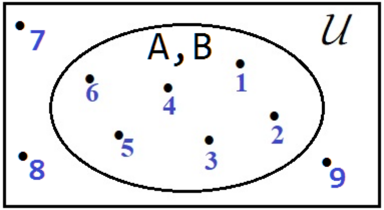
Seja $A \subset \mathcal{U}$; $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $\mathcal{U} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.



Podemos utilizar os Diagramas de Venn a fim de representar, graficamente, os conjuntos e as operações entre os conjuntos.

Exemplo.2: Igualdade dos Conjuntos

Sejam $A, B \subset \mathcal{U}$; $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B := \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$ e $\mathcal{U} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.



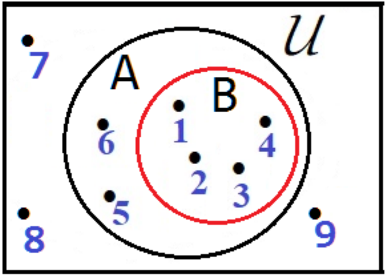
Neste exemplo,

$$A = B; isto é, B \subseteq A \text{ e } A \subseteq B.$$

Exemplo.3: Relação de Inclusão

Sejam $A, B \subset \mathcal{U}$; $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B := \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{U} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

.



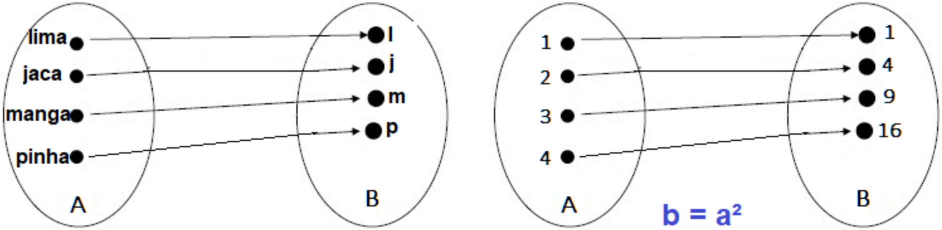
Neste exemplo,

$$B \subset A \subset \mathcal{U}.$$

DEFINIÇÃO: Correspondência Unívoca

Dados dois conjuntos A e B diz-se que uma CORRESPONDÊNCIA entre os elementos de A e B é UNÍVOCA de A para B, se a todo elemento de A corresponder um único elemento de B.

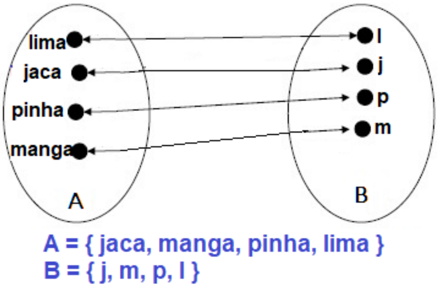
EXEMPLOS:

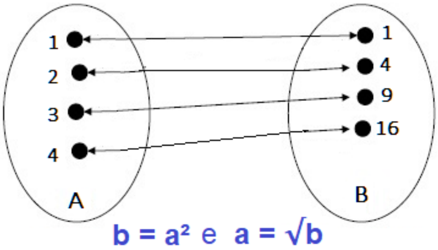


DEFINIÇÃO: Correspondência Biunívoca

Dados dois conjuntos A e B diz-se que uma CORRESPONDÊNCIA entre os elementos de A e B é BIUNÍVOCA se for **unívoca** de A para B como de B para A.

EXEMPLOS:



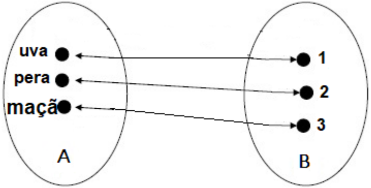


Definição: Conjunto Finito

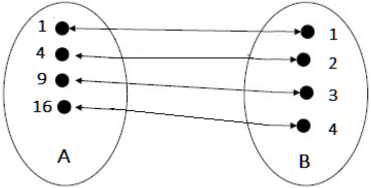
Diz-se que um conjunto A que contém $n \in \mathbb{N}$ elementos é FINITO se pode estabelecer uma **correspondência biunívoca** entre os elementos dos conjuntos:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \text{ e } \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Caso contrário, diz-se que o conjunto A é INFINITO.



A = {maçã, pera, uva} e B = {1, 2, 3}



A = {1, 4, 9, 16} e B = {1, 2, 3, 4}

DEFINIÇÃO: Cardinalidade

Diz-se que a CARDINALIDADE de A é o número de elementos de A.
Se existem exatamente $n \in \mathbb{N}$ elementos distintos em A, diz-se que a CARDINALIDADE de A é n.
NOTAÇÃO: $|A|$ ou $\#A$ ou $card(A)$ ou $n(A)$.

EXEMPLOS:

- $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$; $|A| = 9$
- $|\emptyset| = 0$
- $A := \{x \mid x \text{ é uma vogal } \}$; $\#A = 5$
- $A = \{\emptyset\}$; $n(A) = 1$

Definição: Conjunto das Partes

Diz-se Conjunto das Partes(Conjunto Potência) de um conjunto A, o conjunto cujos elementos são *todas as partes de A*, incluindo as **triviais**.
Notação: $\mathcal{P}(A)$.

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

Exemplo:

- $A := \{1, 2, 3\}$
  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

- Observação: Se $\#A = n$ então seu conjunto potência, $\mathcal{P}(A)$, também é um conjunto **finito** com 2^n elementos.

Exemplos:

- $A := \{1, 2, 3\}; |A| = 3$
  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
  $|\mathcal{P}(A)| = 2^3 = 8$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
  $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 2^0 = 1$
- $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
  $|\mathcal{P}(\{\emptyset\})| = 2^1 = 2$
- $\mathcal{P}(\{b\}) = \{\emptyset, \{b\}\}$
  $|\mathcal{P}(\{\ b\})| = 2^1 = 2$

DEFINIÇÃO: Complementar Relativo

Seja $A \subseteq B$ $(A \in \mathcal{P}(B))$. Diz-se que o COMPLEMENTAR DE A RELATIVO a B é o conjunto de todos os elementos de B que não pertencem a A.
O conjunto B é denominado CONJUNTO DE REFERÊNCIA ou REFERENCIAL.
NOTAÇÃO: C_B^A.

$$C_B^A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}$$

EXEMPLOS:
Sejam $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\}$ e $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n; n = 1, 2, 3, 4, 5\}$
$A \subset B$:

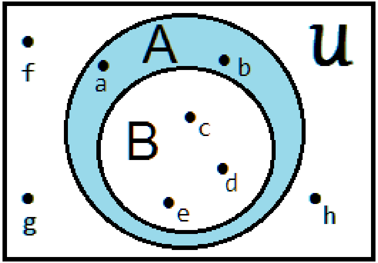
$$C_B^A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n - 1; n = 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Exemplos: Complementar Relativo

Sejam $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$; $A := \{a, b, c, d, e\}$, $B := \{c, d, e\}$, $\mathcal{U} := \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

Neste exemplo,

$$B \subset A \subset \mathcal{U} \text{ e } C_A^B = \{a, b\}.$$

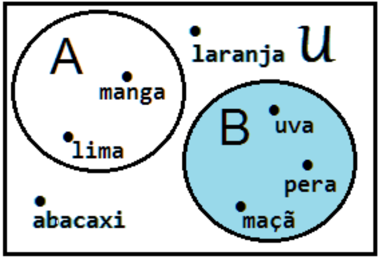


EXEMPLOS: Complementar Relativo

Sejam $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$; $A := \{manga, lima\}$, $B := \{uva, pera, mac\tilde{a}\}$,
$\mathcal{U} := \{laranja, manga, lima, abacaxi, uva, pera, mac\tilde{a}\}$.

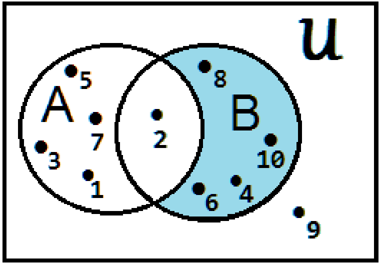
Neste exemplo,

$B \subset \mathcal{U}, A \subset \mathcal{U}$ e Notem que o conjunto $\{uva, pera, mac\tilde{a}\}$ não representa C_B^A pois $, A \not\subseteq B$



Exemplos: Complementar Relativo
Sejam $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$; $A := \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B := \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $\mathcal{U} := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 11\}$.
Neste exemplo,

$B \subset \mathcal{U}, A \subset \mathcal{U}$ e Notem que o conjunto $\{4, 6, 8, 10\}$ não representa C_B^A pois ,$A \not\subseteq B$.



DEFINIÇÃO:Complementar Relativo

Sejam $\mathcal{U}$ conjunto universo e $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Diz-se que o conjunto

$$\{x \mid x \in \mathcal{U} \text{ e } x \notin A\}$$

é o COMPLEMENTO DE A RELATIVO A $\mathcal{U}$ ou apenas COMPLEMENTAR de A.
NOTAÇÃO: $C_{\mathcal{U}}^{A}$ ou A' ou A^c ou $\sim A$ ou $\overline{A}$.

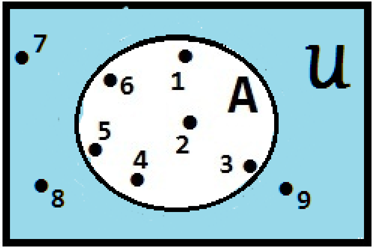
EXEMPLOS:

1. Sejam $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ e $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 15\}$ então $C_{\mathcal{U}}^{A} := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 15\}$
2. Sejam $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2y;\ \text{para algum } y \in \mathbb{N}\}$, e
   $B := \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2y - 1;\ \text{para algum } y \in \mathbb{N}\}$,
   então $\sim A = B$ e $\sim B = A$;

Exemplos: Complementar

Sejam $A \subset \mathcal{U}$; $A := \{1,2,3,4,5,6\}$ $\mathcal{U} := \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

$$C_{\mathcal{U}}^{A} = \{7,8,9\}$$

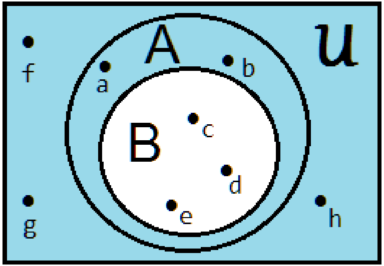


Exemplos: Complementar

Sejam $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$; $A := \{a, b, c, d, e\}$, $B := \{c, d, e\}$, $\mathcal{U} := \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

Neste exemplo,

$$B \subset A \subset \mathcal{U} \text{ e } B' = \{a, b, f, g, h\}.$$

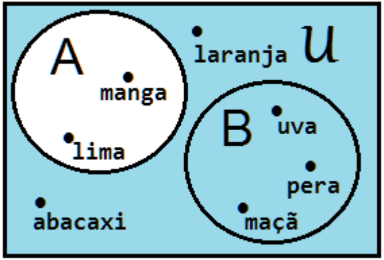


Exemplos: Complementar

Sejam $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$; $A := \{manga, lima\}$, $B := \{uva, pera, mac\tilde{a}\}$,
$\mathcal{U} := \{laranja, manga, lima, abacaxi, uva, pera, mac\tilde{a}\}$.

Neste exemplo,

$$B \subset \mathcal{U}, A \subset \mathcal{U} \text{ e } A' = \{laranja, abacaxi, uva, pera, mac\tilde{a}\}.$$



Teoria de Conjuntos - Representação Gráfica

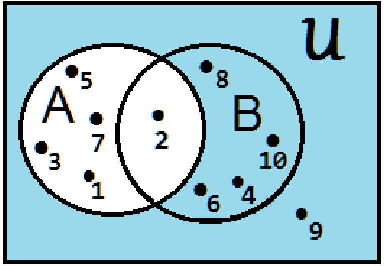
Diagrama de Venn

Exemplos: Complementar

Sejam $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$; $A := \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B := \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $\mathcal{U} := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 11\}$.

Neste exemplo,

$$B \subset \mathcal{U}, A \subset \mathcal{U} \text{ e } \sim A = \{4, 6, 8, 9, 10\}.$$



Sejam o conjunto universo $\mathcal{U}$ e $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Então;

(i) $\sim (\sim A) = A$

$C_{\mathcal{U}}^{C_{\mathcal{U}}^{A}} = \{x \mid x \in \mathcal{U} \text{ e } x \notin C_{\mathcal{U}}^{A}\} = \{x \mid x \in \mathcal{U} \text{ e } x \in A\} = \{x \mid x \in A\} = A$

(ii) $\sim \emptyset = \mathcal{U}$

$C_{\mathcal{U}}^{\emptyset} = \{x \mid x \in \mathcal{U} \text{ e } x \notin \emptyset\} = \{x \mid x \in \mathcal{U}\} = \mathcal{U}$

(iii) $\sim \mathcal{U} = \emptyset$

$C_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}} = \{x \mid x \in \mathcal{U} \text{ e } x \notin \mathcal{U}\} = \emptyset$

(iv) Se $A \subseteq B$ então $C_{\mathcal{U}}^{B} \subseteq C_{\mathcal{U}}^{A}$ e, Se $C_{\mathcal{U}}^{B} \subseteq C_{\mathcal{U}}^{A}$ então $A \subseteq B$.

Supondo que$A \subseteq B$, ou seja, se $x \in A$ então $x \in B$.

E, considerando, por definição: $C_{\mathcal{U}}^{B} = \{x \mid x \in \mathcal{U} \text{ e } x \notin B\}$ então $x \in \mathcal{U}$ e $x \notin A = C_{\mathcal{U}}^{A}$. Ou seja, se $x \in C_{\mathcal{U}}^{B}$ então $x \in C_{\mathcal{U}}^{A}$. Portanto, $C_{\mathcal{U}}^{A} \supseteq C_{\mathcal{U}}^{B}$.

Agora, supondo $C_{\mathcal{U}}^{A} \supseteq C_{\mathcal{U}}^{B}$.

Se $x \in A$ então $x \notin C_{\mathcal{U}}^{A}$. Se $x \notin C_{\mathcal{U}}^{A}$ então $x \notin C_{\mathcal{U}}^{B}$. Portanto, $x \in B$. Concluindo que $A \subseteq B$.

DEFINIÇÃO:

Chama-se **interseção** de dois conjuntos A e B ao conjunto de todos os elementos que pertencem simultaneamente a A e a B.
NOTAÇÃO: $A \cap B$.

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \textbf{ e } x \in B\}$$

lê-se: "A INTERSECÇÃO B" ou "A INTER B".

EXEMPLOS:

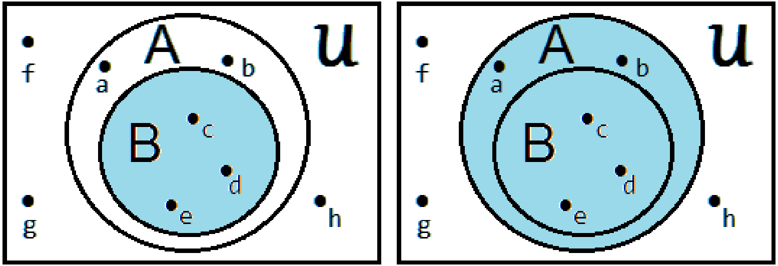
1. Sejam $A := \{0, 1, 4, 6\}$ e $B := \{1, 3, 4, 5\}$ então $(A \cap B) := \{1, 4\}$
2. Sejam $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 15\}$ e $B := \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 20\}$ então $(A \cap B) := \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 15\}$

Exemplos: Intersecção

Sejam $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$; $A := \{a, b, c, d, e\}$, $B := \{c, d, e\}$, $\mathcal{U} := \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

Neste exemplo,

$$B \subset A \subset \mathcal{U} \text{ então } A \cap B = B \text{ e } A \cap \mathcal{U} = A$$



Definição: Conjuntos Disjuntos

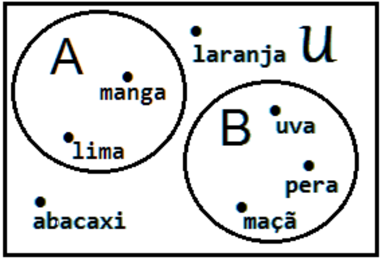
Dois conjuntos A e B dizem-se DISJUNTOS se, e somente se, não têm elementos comuns, $A \cap B = \emptyset$.
Caso contrário, diz-se que A e B SE CORTAM (ou SE INTERCEPTAM).
Notação: $A \between B$.
lê-se: "A INTERCEPTA B" ou "A CORTA B".

Exemplos: Interseção - Conjuntos Disjuntos

Sejam $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$; $A :=$ { manga, lima }, $B :=$ { uva, pera, maçã },
$\mathcal{U} :=$ { laranja, manga, lima, abacaxi, uva, pera, maçã } .

Neste exemplo,

$$B \subset \mathcal{U}, A \subset \mathcal{U} \text{ e } A \cap B = \{\}.$$

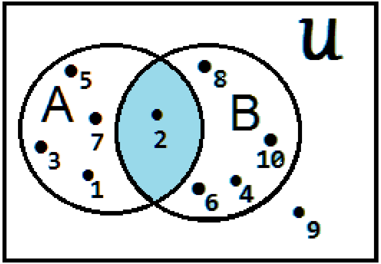


Exemplos: Interseção - Conjuntos que se Cortam

Sejam $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$; $A := \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B := \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $\mathcal{U} := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 11\}$.

Neste exemplo,

$$A \cap B = \{2\} \neq \emptyset, \text{ isto é }, A \between B.$$



Sejam os conjuntos $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Então;

(i) $(A \cap B) \subseteq A$ e $(A \cap B) \subseteq B$
Se $x \in A \cap B$ então $x \in A$ e $x \in B$. Logo, todo elemento de $A \cap B$ é também um elemento de A . Portanto, $A \cap B \subseteq A$.
E, todo elemento de $A \cap B$ é também um elemento de B . Portanto, $A \cap B \subseteq B$.

(ii) $(A \subseteq B)$ se, e somente se, $(A \cap B) = A$.
Se $(A \subseteq B)$ então $(A \cap B) = A$ e Se $(A \cap B) = A$ então $(A \subseteq B)$
Supondo $(A \subseteq B)$; tem-se que se $x \in A$ então $x \in A$ e $x \in B$.
Se $x \in A$ e $x \in B$ então $x \in A \cap B$. Portanto, $A \subseteq A \cap B$.
Por (i): $A \cap B \subseteq A$. Logo, pela propriedade **anti-simétrica** da inclusão entre conjuntos, segue-se que $(A \cap B) = A$
Agora, vamos provar que Se $(A \cap B) = A$ então $(A \subseteq B)$
Supondo que $(A \cap B) = A$ e pela propriedade (i): $A \cap B \subseteq B$ e, portanto, $A \subseteq B$.

Sejam os conjuntos $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Então;

(iii) $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$ se, e somente se $C \subseteq (A \cap B)$

Se $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$ então $C \subseteq (A \cap B)$, e

Se $C \subseteq (A \cap B)$ então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$

Supondo que $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$ então se $x \in C$ segue que $x \in A$ e $x \in B$.

consequentemente, $x \in A \cap B$ e; portanto, $C \subseteq A \cap B$.

Agora, supondo $C \subseteq A \cap B$ e utilizando a propriedade (i) :

Se $C \subseteq A \cap B$ e $A \cap B \subseteq A$ então $C \subseteq A$.

Se $C \subseteq A \cap B$ e $A \cap B \subseteq B$ então $C \subseteq B$.

(iv) Se $A \subseteq B$ então $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$

Se $x \in A$ então $x \in B$.

Supondo que $x \in A \cap C$ segue que $x \in A$ e $x \in C$ e, portanto, $x \in B$ e $x \in C$.

Logo, Se $x \in A \cap C$ tem-se que $x \in (B \cap C)$.

Concluindo que $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$

Sejam os conjuntos $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Então;

(v) Idempotente: $A \cap A = A$
$A \subseteq A$, portanto $A \cap A = A$.

(vi) $A \cap \emptyset = \emptyset$
$\emptyset \subseteq A$, portanto $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(vii) Elemento Neutro: $A \cap \mathcal{U} = A$
$A \subseteq \mathcal{U}$, portanto $A \cap \mathcal{U} = A$.

(viii) $A \cap A' = \emptyset$
Se $x \in A$, então $x \notin A'$; portanto, $(A \cap A') = \emptyset$.

(ix) Comutativa: $A \cap B = B \cap A$
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\} = \{x \mid x \in B \text{ e } x \in A\} = B \cap A$.

(x) Associativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$(A \cap B) \cap C = \{x \mid x \in A \cap B \text{ e } x \in C\} = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B \text{ e } x \in C\} =$
$\{x \mid x \in A \text{ e } x \in B \cap C\} = A \cap (B \cap C)$

DEFINIÇÃO: Intersecção - Família de Conjuntos

Chama-se INTERSECÇÃO DOS n CONJUNTOS $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ao conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a todos esses n conjuntos.
$\{x \mid x \in A_1 \textbf{ e } x \in A_2 \textbf{ e } , \ldots , \textbf{ e } x \in A_n\}$

NOTAÇÃO:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

ou

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Ou seja;

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_i; i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Exemplos:

1. Sejam $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ e $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ então

$$(A \cap B) = \emptyset, (A \cap C) = \{2\}, (B \cap C) = \{1, 3, 5, 7\} = B \text{ e } (A \cap B \cap C) = \emptyset$$

2. Sejam os conjuntos $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 17\}$, $A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 10 < x < 20\}$ e $A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$
então

$$\bigcap_{i=1}^{3} A_i = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 17 \text{ e } 10 < x < 20 \text{ e } x \geq -3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 10 < x \leq 17\}$$

3. $(\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}) = \mathbb{N}$; pois, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
e $(\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} \cap \mathbb{I}) = \emptyset$; pois, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ mas, $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{I}$

DEFINIÇÃO: Reunião ou União

Chama-se REUNIÃO ou UNIÃO de dois conjuntos A e B ao conjunto de **todos os elementos que pertencem a A ou a B**.

NOTAÇÃO: $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

EXEMPLOS:

1. Sejam $A := \{2,4,6\}$ e $B := \{1,3,5\}$ então $(A \cup B) := \{1,2,3,4,5,6\}$
2. Sejam $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$ e $B := \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 20\}$ então $(A \cup B) := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7 \text{ ou } 10 < x < 20\}$
3. Sejam $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par }\}$ e $B := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar }\}$ então $(A \cup B) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par ou } x \text{ é ímpar }\} = \mathbb{N}$
4. Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z}_+ \mid x = 5y; y \in \mathbb{Z}_+\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z}_+ \mid 10 \mid x\}$ então $(A \cup B) = \{x \in \mathbb{Z}_+ \mid x = 5y; y \in \mathbb{Z}_+ \text{ ou } 10 \mid x\} = A$

Sejam os conjuntos $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Então;

(i) $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$
Se $x \in A$ então $x \in A \cup B$. Logo, todo elemento de A é também um elemento de $A \cup B$. Portanto, $A \subseteq A \cup B$.
E, todo elemento de B é também um elemento de $A \cup B$. Portanto, $B \subseteq A \cup B$.

(ii) $(A \subseteq B)$ se, e somente se, $(A \cup B) = B$.
Se $(A \subseteq B)$ então $(A \cup B) = B$ e Se $(A \cup B) = B$ então $(A \subseteq B)$
Supondo $(A \subseteq B)$.
Se $x \in A \cup B$ então $x \in A$ ou $x \in B$; mas, por suposição, $(A \subseteq B)$ então, $x \in B$.
Portanto, $A \cup B \subseteq B$ e pela propriedade (i) $B \subseteq A \cup B$, segue-se que $A \cup B = B$.
Agora, vamos provar que Se $(A \cup B) = B$ então $(A \subseteq B)$
Supondo que $(A \cup B) = B$ e pela propriedade (i): $A \subseteq A \cup B$; portanto, $A \subseteq B$.

Sejam os conjuntos $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Então;

(iii) $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$ se, e somente se $(A \cup B) \subseteq C$
Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$ então $(A \cup B) \subseteq C$
e , Se $(A \cup B) \subseteq C$ então $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$
Supondo que $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$.
então se $x \in A \cup B$ segue que $x \in C$ ou $x \in B$; mas, por suposição, se $x \in A$
então $x \in C$ e se $x \in B$ então $x \in C$.
Logo, se $x \in A \cup B$ então $x \in C$. Portanto, $A \cup B \subseteq C$.
Agora, supondo $(A \cup B) \subseteq C$ e pela a propriedade (i) :
$A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$. Segue que $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$.
Se $C \subseteq A \cap B$ e $A \cap B \subseteq B$ então $C \subseteq B$.

Sejam os conjuntos $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Então;

(iv) Se $A \subseteq B$ então $(A \cup C) \subseteq (B \cup C)$
Se $x \in A$ então $x \in B$.
Supondo que $x \in A \cup C$ segue que $x \in A$ ou $x \in C$ e, portanto, $x \in B$ ou $x \in C$.
Logo, Se $x \in A \cup C$ tem-se que $x \in (B \cup C)$.
Concluindo que $(A \cup C) \subseteq (B \cup C)$

(v) Idempotente: $A \cup A = A$
$A \subseteq A$, portanto $A \cup A = A$.

Sejam os conjuntos $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Então;

(vi) ELEMENTO NEUTRO: $A \cup \emptyset = A$
$\emptyset \subseteq A$, portanto $A \cup \emptyset = A$.

(vii) $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
$A \subseteq \mathcal{U}$, portanto $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

(viii) $A \cup A' = \mathcal{U}$
Se $x \in A \cup A'$, então $x \in \mathcal{U}$; logo $A \cup A' \subseteq \mathcal{U}$.
E, se $x \in \mathcal{U}$ então $x \in A$ ou $x \in A'$; portanto, $\mathcal{U} \subseteq A \cup A'$.
Assim, como $A \cup A' \subseteq \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \subseteq A \cup A'$, Conclui-se que $A \cup A' = \mathcal{U}$.

(ix) COMUTATIVA: $A \cup B = B \cup A$
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} = \{x \mid x \in B \text{ ou } x \in A\} = B \cup A$.

(x) ASSOCIATIVA: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cup B) \cup C = \{x \mid x \in A \cup B \text{ ou } x \in C\} = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \text{ ou } x \in C\} =$
$\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \cup C\} = A \cup (B \cup C)$

Sejam os conjuntos $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Então;

(xi) DISTRIBUTIVA DA INTERSEÇÃO COM RELAÇÃO À UNIÃO:
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cap (B \cup C) = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B \cup C\} = \{x \mid x \in A \text{ e } (x \in B \text{ ou } x \in C)\} = \{x \mid (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } x \in C)\} = \{x \mid x \in (A \cap B) \text{ ou } x \in (A \cap C)\} = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(xii) DISTRIBUTIVA DA UNIÃO COM RELAÇÃO À INTERSEÇÃO :
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cup (B \cap C) = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \cap C\} = \{x \mid x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ e } x \in C)\} = \{x \mid (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ e } (x \in A \text{ ou } x \in C)\} = \{x \mid x \in (A \cup B) \text{ e } x \in (A \cup C)\} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(xiii) LEIS DE ABSORÇÃO: $A \cup (A \cap B) = A$ e $A \cap (A \cup B) = A$
Supondo que $A \subseteq (A \cup B)$ então $A \cap (A \cup B) = A$;
E, supondo que $(A \cap B) \subseteq A$ então $A \cup (A \cap B) = A$.

Sejam os conjuntos $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Então;

(xiv) Leis de De Morgan: $(A \cap B)' = A' \cup B'$ e $(A \cup B)' = A' \cap B'$
$(A \cap B)' = \{x | x \in \mathcal{U} \text{ e } x \notin A \cap B\} = \{x | x \in \mathcal{U} \text{ e } (x \notin A \text{ ou } x \notin B)\} = \{x | (x \in \mathcal{U} \text{ e } x \notin A) \text{ ou } (x \in \mathcal{U} \text{ e } x \notin B)\} = \{x | (x \in A') \text{ ou } (x \in B')\} == A' \cup B'$;
$(A \cup B)' = \{x | x \in \mathcal{U} \text{ e } x \notin A \cup B\} = \{x | x \in \mathcal{U} \text{ e } (x \notin A \text{ e } x \notin B)\} = \{x | (x \in \mathcal{U} \text{ e } x \notin A) \text{ e } (x \in \mathcal{U} \text{ e } x \notin B)\} = \{x | (x \in A') \text{ e } (x \in B')\} == A' \cap B'$.

Definição: União - Família de Conjuntos

Chama-se união dos n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ao conjunto dos elementos que pertencem a, pelo menos, um desses n conjuntos.

$\{x \mid x \in A_1 \text{ ou } x \in A_2 \text{ ou } , \ldots , \text{ ou } x \in A_n\}$

Notação:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

ou

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Exemplos:

1. Sejam $A = \{2,4,6\}$, $B = \{1,3,5,7\}$ e $C = \{1,2,3,5,7\}$ então $(A \cup B) = \{1,2,3,4,5,6,7\}, (A \cup C) = \{1,2,3,4,5,6,7\}, (B \cup C) = \{1,2,3,5,7\} = C$ e $(A \cup B \cup C) = (A \cup C) = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
2. Sejam os conjuntos $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 17\}$, $A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 10 < x < 20\}$ e $A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$
   então
   $$\bigcap_{i=1}^{3} A_i = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 17 \text{ ou } 10 < x < 20 \text{ ou } x \geq -3\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq -3\} = A_3$$
3. $(\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$; pois, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
   e $(\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}) = (\mathbb{Q} \cup \mathbb{I})$; pois, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ mas, $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{I}$

EXERCÍCIOS:

(1) Sejam os conjuntos $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$; tais que:

$$A \cap B = \{b, c\}, C_{\mathcal{U}}^{A} = \{d, e, f, g\}, C_{\mathcal{U}}^{B} = \{a, e, f\}$$

Determine os elementos dos conjuntos $A, B, \mathcal{U}$.

(2) Sejam os conjuntos não-vazios $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.
Construir os diagramas de Venn em cada item abaixo.

(a) $A \subset B, C \subset B, A \cap C = \emptyset$
(b) $A \subset C, B \cap C = \emptyset$
(c) $A \subset (B \cap C), B \subset C, A \neq C$

(3) Prove que

$$\text{Se } A \subseteq B \text{ e } C \subseteq D, \text{ então } (A \cap C) \subseteq (B \cap D).$$

Exercícios:

(4) Demonstre:

(a) Se $A \cap B = \emptyset$ então $A \cap B^{'} = A$

(b) $A^{'} \subseteq B^{'}$ se, e somente se, $A \cap B = B$

(5) Sejam os conjuntos $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$; tais que:

$$A \cup B = \{1, 3, 8, 9\}, C_{\mathcal{U}}^{A} = \{4, 6, 9\}, C_{\mathcal{U}}^{B} = \{3, 4, 6\}$$

Determine os elementos dos conjuntos $A, B, \mathcal{U}$.

(6) Sejam os conjuntos $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$; tais que:

$$A \cap B = \{2, 4\}, A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}, A \cap C = \{2, 3\}, A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$$

Determine os elementos dos conjuntos A, B, C.

Exercícios:

(7) Sejam os conjuntos não-vazios $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.
Construir os diagramas de Venn em cada item abaixo.

(a) $A \cup (A^{'} \cap B) = A \cup B$
(b) $A \cap (A^{'} \cup B) = A \cap B$

(8) Verifique, utilizando as propriedades, as igualdades apresentadas nos itens abaixo:

(a) $A \cap B \cap A^{'} = \emptyset$
(b) $(A \cup B)^{'} \cup (A^{'} \cap B) = A^{'}$
(c) $[(A \cap B) \cup (A \cap B^{'})] \cap (A^{'} \cup B) = A \cap B$

EXERCÍCIOS:

(9) Simplifique, utilizando as propriedades, as seguintes expressões :

(a) $(A \cup B) \cap (A \cup B^{'})$
(b) $(\mathcal{U} \cup B) \cap (A \cup \emptyset)$
(c) $(A \cup B) \cap (A \cup B^{'})$
(d) $(A \cup B) \cap (A \cup B^{'})$

(10) Demonstre as fórmulas abaixo, utilizando as propriedades:

(a) $(A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (C \cup D)$
(b) $(A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (C \cap D)$

(11) Prove que

$$\text{Se } A \subseteq B \text{ e } C \subseteq D, \text{ então } (A \cup C) \subseteq (B \cup D).$$

EXERCÍCIOS:

(12) Demonstre:

(a) Se $A \cap B = \emptyset$ então $A \cup B^{'} = B^{'}$

(b) $A^{'} \subseteq B^{'}$ se, e somente se, $A \cup B = A$

(c) $A \cup B = A \cap B$ se, e somente se , $A = B$

(13) Escreva a DUAL de cada expressão abaixo:
(Na expressão DUAL à original trocamos $\emptyset$ por $\mathcal{U}$ e as operações $\subseteq$ por $\supseteq$, $\cap$ por $\cup$ e vice versa, mantendo a igualdade.)

(a) $(A \cap U) \cap (\emptyset \cup A^{'}) = \emptyset$

(b) $(A \cup U) \cap (\emptyset \cap A) = \emptyset$

DEFINIÇÃO:

Chama-se DIFERENÇA entre os conjuntos A e B ao **conjunto de todos os elementos de A que não pertencem a B.**

Notação: $A - B$ **ou** $A \backslash B$.

lê-se: "A menos B" ou diferença entre A e B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \textbf{ e } x \notin B\}$$

Note que:

- Se $A \subseteq B$ então $C_B^A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\} = B - A$. Ou seja, a DIFERENÇA entre B e A é o COMPLEMENTO DE A RELATIVO AO B.
  Do mesmo modo, a DIFERENÇA entre $\mathcal{U}$ e A é o COMPLEMENTAR de A:

$$A' = C_{\mathcal{U}}^A = \mathcal{U} - A = \{x \mid x \in \mathcal{U} \text{ e } x \notin A\}$$

- $B - A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\} = \{x \mid x \in B \text{ e } x \in A'\} = B \cap A'$.

EXEMPLOS:

1. Sejam $A := \{0, 1, 4, 5, 6\}$ e $B := \{1, 3, 5\}$ então $(A \backslash B) := \{0, 4, 6\}$
2. Sejam $A := \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x \leq 20\}$ e $B := \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 20\}$ então $(A \backslash B) := \{10, 20\}$
3. $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}_-$

OBSERVE QUE:

A DIFERENÇA ENTRE CONJUNTOS não é uma operação **comutativa**. Ou seja,

$$A - B \neq B - A$$

EXEMPLOS:

1. Sejam $A := \{0, 1, 4, 5, 6\}$ e $B := \{1, 3, 5\}$ então $(A \backslash B) := \{0, 4, 6\}$ e, $(B \backslash A) := \{3\}$
2. Sejam $A := \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x \leq 20\}$ e $B := \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 20\}$ então $(A \backslash B) := \{10, 20\}$ e,
   $(B \backslash A) := \emptyset$
3. $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{-}$. Enquanto que
   $\mathbb{N} - \mathbb{Z} = \emptyset$

PROPRIEDADES:

(i) $A - \emptyset = A$ e $\emptyset - A = \emptyset$

D]:

$A - \emptyset = A \cap \emptyset' = A \cap \mathcal{U} = A.$

$\emptyset - A = \emptyset \cap A' = \emptyset.$

(ii) $A - \mathcal{U} = \emptyset$ e $\mathcal{U} - A = A'$

D]:

$A - \mathcal{U} = A \cap \mathcal{U}' = A \cap \emptyset = \emptyset.$

$\mathcal{U} - A = \mathcal{U} \cap A' = A'.$

(iii) $A - A = \emptyset$

D]:

$A - A = A \cap A' = \emptyset$

PROPRIEDADES:

(iv) $A - A' = A$

D]:

$A - A' = A \cap (A')' == A \cap A = A$

(v) $(A - B)' = A' \cup B$

D]:

$(A - B)' = (A \cap B')' = (A)' \cup (B')' = A' \cup B$

(vi) $A - B = B' - A'$

D]:

$A - B = A \cap B' = (B)' \cap A = B' \cap (A')' = B' - A'$

PROPRIEDADES:

(vii) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$ e $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

D]:

$(A - B) - C = (A \cap B') \cap C' = A \cap (B' \cap C') = A \cap (B \cup C)' = A - (B \cup C)$
e $A - (B - C) = A \cap (B \cap C')' = A \cap (B' \cup (C')') = A \cap (B' \cup C) =$
$(A \cap B') \cup (A \cap C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

(viii) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$ e $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

D]:

$A \cup (B - C) = A \cup (B \cap C') = (A \cup B) \cap (A \cup C') = (A \cup B) \cap (A' \cap (C')')' =$
$(A \cup B) - (A' \cap C) = (A \cup B) - (C \cap A') = (A \cup B) - (C - A)$
e $A \cap (B - C) = A \cap (B \cap C') = (A \cap B) \cap C' = [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C'] =$
$(A \cap B) \cap (A' \cup C') = (A \cap B) \cap (A \cap C)' = (A \cap B) - (A \cap C)$

Note que $[(A \cap B) \cap A'] = \emptyset$ e $\emptyset \cup [(A \cap B) \cap C'] = [(A \cap B) \cap C']$. Assim, a igualdade é mantida.

PROPRIEDADES:

(ix) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ e $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

D]:

A $\cap(B' \cap C') = (A \cap B') \cap (A \cap C') = (A - B) \cap (A - C)$

e

$A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C') = (A \cap B') \cup (A \cap C') = (A - B) \cup (A - C)$

Notas:

- Na propriedade (viii) tem-se a DISTRIBUTIVA em relação à interseção mas o mesmo não acontece em relação à união.
- Na propriedade (ix) não vale a DISTRIBUTIVA em relação à interseção e nem em relação à união.
  Todavia, nota-se que a DISTRIBUTIVIDADE acontece com a troca das operações interseção por união e vice-versa.

PROPRIEDADES:

(x) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ e $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

D]:

(A - C) $\cup (B - C)$

e

(A - C) $\cap (B - C)$

Nota:

Na propriedade (x) é válida a propriedade DISTRIBUTIVA em relação à interseção e à união. O que comprova, comparando com a propriedade (ix), que a propriedade **comutativa** não é válida na operação DIFERENÇA.

(xi) $A - (A - B) = A \cap B$ e $(A - B) - B = A - B$

D]:

$A - (A - B) = A \cap (A \cap B')' = A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$

e $(A - B) - B = (A \cap B') \cap B' = A \cap (B' \cap B') = A \cap B' = A - B$

DEFINIÇÃO:

Chama-se DIFERENÇA SIMÉTRICA dos conjuntos A e B ao **conjunto de todos os elementos que pertencem a um e somente a um dos conjuntos** A e B.

NOTAÇÃO: $A \Delta B$

lê-se: " DIFERENÇA SIMÉTRICA de A e B "

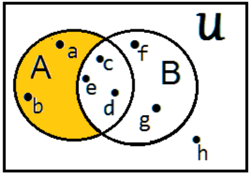
$$A \Delta B = \{x \mid (x \in A \text{ e } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ e } x \notin A)\} = \{(A - B) \cup (B - A)\}$$

Teoria de Conjuntos

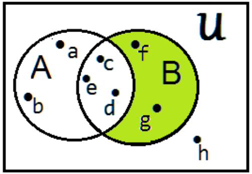
Diagrama de Venn - Diferença Simétrica

Exemplos: Sejam $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$; $A := \{a, b, c, d, e\}$, $B := \{c, d, e, f, g\}$, $\mathcal{U} := \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

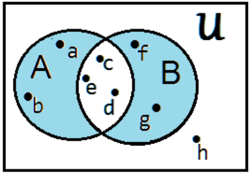
$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{a, b\} \cup \{f, g\} = \{a, b, f, g\}$$



A - B



B - A



AΔB

Note que $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = C_{A \cup B}^{(A \cap B)}$

Note que $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = C_{A \cup B}^{(A \cap B)}$

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B') \cup (B \cap A') = [(A \cap B') \cup B] \cap [(A \cap B') \cup A'] =$
$[(A \cup B) \cap (B' \cup B)] \cap [(A \cup A') \cap (B' \cup A')] = [(A \cup B) \cap (\mathcal{U})] \cap [(\mathcal{U}) \cap (B' \cup A')] =$
$(A \cup B) \cap (B' \cup A') = (A \cup B) \cap (A \cap B)' = (A \cup B) - (A \cap B) = C_{A \cup B}^{(A \cap B)}$

Exemplos:

1. Sejam $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 5\}$ e $B := \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\}$ então
   $(A \backslash B) := \{x \in \mathbb{N} \mid x > 10\}$
   $(B \backslash A) := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$
   $(A \Delta B) := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5 \text{ ou } x > 10\}$
2. Sejam $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2y;\text{ para algum } y \in \mathbb{N}\}$ e $B := \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2y - 1;$ para algum $y \in \mathbb{N}\}$
   então $(A \backslash B) := A$
   $(B \backslash A) := B$
   $(A \Delta B) := A \cup B = \mathbb{N}$
3. $\mathbb{Z} \Delta \mathbb{N} = \mathbb{Z}_-$; $\mathbb{Z}_+ \Delta \mathbb{N} = \{0\}$ e $\mathbb{Z}_- \Delta \mathbb{N} = \mathbb{Z}_- \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}$
4. $\mathbb{Z}_- \, \Delta \, \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}^*$

Sejam $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

(i) $A \Delta A = \emptyset$

$A \Delta A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \emptyset$

(ii) $A \Delta \emptyset = A$

$A \Delta \emptyset = (A \cup \emptyset) - (\emptyset \cap A) = A \cup \emptyset = A$

(iii) $A \Delta \mathcal{U} = A'$

$A \Delta \mathcal{U} = (A \cup \mathcal{U}) - (\mathcal{U} \cap A) = \mathcal{U} - A = A'$

(iv) $A \Delta A' = \mathcal{U}$

$A \Delta A' = (A \cup A') - (A \cap A') = \mathcal{U} \cup \emptyset = \mathcal{U}$

Sejam $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

(v) COMUTATIVA: $A\Delta B = B\Delta A$

$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (B \cup A) - (B \cap A) = (B\Delta A)$

(vi) $(A\Delta B)' = (A \cap B) \cup (A' \cap B')$

$(A\Delta B)' = ((A - B) \cup (B - A))' = (A - B)' \cap (B - A)' = (A \cap B')' \cap (B \cap A')' =$
$(A' \cup B) \cap (B' \cup A) = ((A' \cup B) \cap B') \cup ((A' \cup B) \cap A) =$
$((A' \cap B') \cup (B \cap B')) \cup ((A' \cap A) \cup (B \cap A)) =$
$((A' \cap B') \cup (\emptyset)) \cup ((\emptyset) \cup (B \cap A)) = (A' \cap B') \cup (B \cap A) = (B \cap A) \cup (A' \cap B')$

(vii) ASSOCIATIVA: $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

$(A\Delta B)\Delta C = \{x \mid (x \in (A\Delta B)$ e $x \notin C)$ ou $(x \notin (A\Delta B)$ e $x \in C)\}$; mas ,

$(A\ \Delta B) = \{x \mid (x \in A$ e $x \notin B)$ ou $(x \notin A$ e $x \in B)\}$;

então ,

{ x — (($(x \in A$ e $x \notin B)$ ou $(x \notin A$ e $x \in B))$ e $x \notin C)$ ou $(((x \notin A$ ou $x \in B)$ e $(x \in A$ e $x \notin B))$ e $x \in C)\}$.

Portanto,

$(x \in A$ e $x \in B$ e $x \in C)$ ou $(x \in A$ e $x \notin B$ e $x \notin C)$ ou $(x \notin A$ e $x \in B$ e $x \notin C)$ ou $(x \notin A$ e $x \notin B$ e $x \in C)$

$A\Delta(B\Delta C) = \{x \mid (x \in A$ e $x \notin (B\Delta C))$ ou $(x \notin A$ e $x \in (B\Delta C))\}$; mas ,

$(B\ \Delta C) = \{x \mid (x \in B$ e $x \notin C)$ ou $(x \notin B$ e $x \in C)\}$; então ,$\{x \mid (x \notin A$ e $((x \in B$ e $x \notin C)$ ou $(x \notin B$ e $x \in C)))$ ou $(x \in A$ e $((x \notin B$ ou $x \in C)$ e $(x \in B$ e $x \notin C)))\}$.

Neste caso, obtém-se também ,

$(x \in A$ e $x \in B$ e $x \in C)$ ou $(x \in A$ e $x \notin B$ e $x \notin C)$ ou $(x \notin A$ e $x \in B$ e $x \notin C)$ ou $(x \notin A$ e $x \notin B$ e $x \in C)$

Consequentemente, $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Sejam $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

(viii) Distributiva da interseção em relação à Diferença Simétrica:
$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$
$A \cap (B \Delta C) = A \cap ((B \cup C) - (B \cap C)) = (A \cap (B \cup C)) - (A \cap (B \cap C)) =$
$(A \cap (B \cup C)) \cap (A \cap (B \cap C))' = (A \cap (B \cup C)) \cap (A' \cup (B' \cup C')) =$
$((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cap ((A' \cup B') \cup (A' \cup C')) = ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cap ((A \cap B) \cap (A \cap C))' =$
$((A \cap B) \cup (A \cap C)) - ((A \cap B) \cap (A \cap C)) = ((A \cap B) \Delta (A \cap C))$

(ix) $A \cup (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A' \cap B \cap C)$
$A \cup (B \Delta C) = A \cup ((B \cup C) - (B \cap C)) = (A \cup (B \cup C)) - ((B \cap C) - A) =$
$(A \cup B \cup C) - ((B \cap C) \cap A') = (A \cup B \cup C) - (A' \cap B \cap C)$

Sejam $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

(x) $(A\Delta B) - C = (A \cap C')\Delta(B \cap C')$ e $A - (B\Delta C) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C')$

$(A\Delta B) - C = (A\Delta B) \cap C' = C' \cap (A\Delta B) = (C' \cap A)\Delta(C' \cap B) = (A \cap C')\Delta(B \cap C')$

e;

$A - (B\Delta C) = A \cap (B\Delta C)' = A \cap ((B \cap C) \cup (B' \cap C')) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C')$

Questão.1: Sejam os conjuntos: $A = \{0, 1, 3, 4\}, B = \{2, 3, 4, 5\}, C = \{4, 5\}$, D=$\{5, 6, 7\}$.*Determine* :

(a) $(A \cup C) \cap B$

(b) $(B \cap C) \cup D$

(c) $(B - A) \cap C$

(d) $(B - C) \cup (A \cap B)$

(e) $(B \Delta C)$

(f) $(A \Delta D)$

(g) $\mathcal{P}(C)$

(h) $\mathcal{P}(D)$

Questão.2: Sejam os conjuntos: $A = \{2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 5, 6, 7\}, C = \{5, 6, 7\}, D = \{2, 4\}$.
Determine as seguintes relações entre os conjuntos:

(a) $(A \cap B) \cup C =$

(b) $(C \cup D) \cap B =$

(c) $(A \cap D) \cup (A \cap C) =$

(d) $(C \cap D) \cup A =$

(e) $(B \backslash A) \cup D =$

(f) $B - (C \cup D) =$

(g) $B - (A - D) =$

(h) $A - (D \cap A) =$

(i) $(A \backslash D) \cup (B \backslash C) =$

Questão.3: Demonstrar:

(a) $(A - B) \subseteq A$ e $(A - B) \subseteq (A \cup B)$
(b) $(A = B)$ se, e somente se $A - B = B - A$
(c) $(A \subseteq B)$ se, e somente se $A - B = \emptyset$
(d) $(A \cap B) = \emptyset$ se, e somente se $A - B = A$
(e) Se $(A \subseteq B)$ e $C = B - A$, então $A = B - C$
(f) Se $(A \cap B) = \emptyset$ e $(A \cup B) = C$, então $A = C - B$
(g) $(A - B) \cap B = \emptyset$
(h) $(A - B) \cup B = A \cup B$
(i) $(A \cup B) - B = A - B$

Questão.4: Demonstrar:

(a) $A \Delta B = A' \Delta B'$

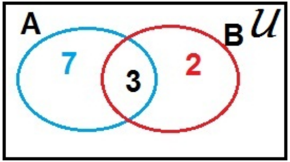
(b) $(A \cap B) \cap (A \Delta B) = \emptyset$

(c) Se $A \Delta C = B \Delta C$, então $A = B$

(d) $A \Delta B = \emptyset$ se e somente se $A = B$

Questão.5: Sejam os conjuntos A e B, tais que $\#A = 10, \#(A \cap B) = 3$ e $\#(A \cup B) = 12$. Determine $\#B$ utilizando o Diagrama de Venn.

Questão.5: Sejam os conjuntos A e B, tais que $\#A = 10, \#(A \cap B) = 3$ e $\#(A \cup B) = 12$. Determine $\#B$.



Logo, $\#B = 5$.

Sejam A e B conjuntos finitos tais que $A \cap B = \emptyset$; isto é, são CONJUNTOS DISJUNTOS. Verificamos que o "número total" de elementos que pertencem a A ou a B, ou seja, a $A \cup B$ é dado por:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B.$$

Princípio da Inclusão e Exclusão

Sejam A e B conjuntos finitos. Então, quando unimos os elementos de A com os de B, INCLUIMOS alguns elementos que pertencem a ambos os conjuntos. Desta forma, para obtermos $\#(A \cup B)$ precisamos EXCLUÍ-los. Assim,

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

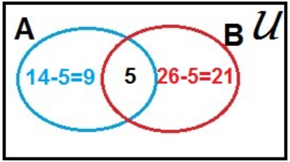
Exemplo.1: Um repórter entrevista 35 pessoas que optam pela CONDIÇÃO.1, CONDIÇÃO.2 ou ambos e conclui que 14 entrevistados optaram pela CONDIÇÃO.1, 26 pela CONDIÇÃO.2. Quantos entrevistados escolheram ambos?

Exemplo.1:

Resolução:

A =pessoas que optam pela CONDIÇÃO.1
B = pessoas que optam pela CONDIÇÃO.2
Então, $\#(A \cup B) = 35$.
Como, $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$
$35 = 14 + 26 - \#(A \cap B)$
$\#(A \cap B) = 5$.
Portanto, 5 pessoas optaram pelas CONDIÇÕES.1 e 2.

Visualizando no Diagrama de Venn :

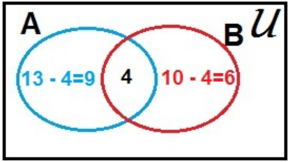


Exemplo.2: Todos os convidados de uma festa BEBEM CAFÉ e/ou BEBEM CHÁ. 13 convidados BEBEM CAFÉ, 10 BEBEM CHÁ e 4 BEBEM CAFÉ E CHÁ. Quantas pessoas tem na festa?

Resolução:

A =pessoas que BEBEM CAFÉ
B =pessoas que BEBEM CHÁ
Como, $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$
$\#(A \cup B) = 13 + 10 - 4$
$\#(A \cup B) = 19$ pessoas estão na festa.

Visualizando no Diagrama de Venn :



PROPOSIÇÃO:

Sejam A, B e C conjuntos finitos, então
$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$.

Demonstração:

$$\#(A \cup B \cup C) = \#(A \cup (B \cup C)) = \#A + \#(B \cup C) - \#(A \cap (B \cup C)) =$$
$$\#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - \#[(A \cap B) \cup (A \cap C)] =$$
$$\#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - [\#(A \cap B) + \#(A \cap C) - \#((A \cap B) \cap (A \cap C))] =$$
$$\#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) + \#(A \cap B \cap C). \blacksquare$$

Exemplo.3: O controle de qualidade em uma fábrica verificou 47 pe com DEFEITOS DE PINTURA, DEFEITOS DE EMBALAGEM e/ou DEFEITOS NA PARTE ELETRÔNICA.

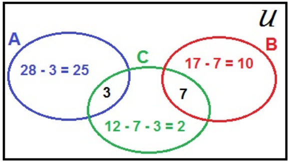
Dessas peças, 28 tinham defeitos de pintura, 17 tinham defeitos na embalagem, 12 tinham defeitos na parte eletrônica, 7 tinham defeitos na embalagem e na parte eletrônica, 3 tinham defeitos de pintura e na parte eletrônica mas nenhuma tinha defeitos de pintura e na embalagem.

Alguma peça tinha os três defeitos?

Exemplo.3:

Resolução:

A = DEFEITOS DE PINTURA
B = DEFEITOS DE EMBALAGEM
C = DEFEITOS NA PARTE ELETRÔNICA
Então; $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$;
$47 = 28 + 17 + 12 - 0 - 3 - 7 + \#(A \cap B \cap C)$;
$\#(A \cap B \cap C) = 0$. Logo, nenhuma peça apresentou os três defeitos ao mesmo tempo.
Visualizando no Diagrama de Venn :

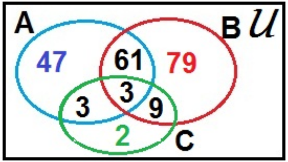


Exemplo.4: Uma quitanda vende BROCÓLIS, CENOURA, QUIABO. Em determinado dia, a quitanda atendeu 204 pessoas.
Se 114 pessoas compraram brocólis, 152 compraram cenouras, 17 compraram quiabos, 64 compraram brocólis e cenouras, 12 compraram cenouras e quiabos e 3 compraram os três. Quantas pessoas compraram brocólis e quiabos?

Exemplo.4:

Resolução:

$A =$ pessoas que compraram BROCÓLIS
$B =$ pessoas que compraram CENOURAS
$C =$ pessoas que compraram QUIABOS
Então; $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$;
$204 = 114 + 152 + 17 - 64 - \#(A \cap C) - 12 + 3$;
$\#(A \cap C) = 6$ pessoas compraram brocólis e quiabos.
Visualizando no Diagrama de Venn :



PROPOSIÇÃO:

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ CONJUNTOS FINITOS, então

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |\bigcap_{i=1}^{n} A_i|.$$