CAPÍTULO

4 Indução e Recursão

Muitas proposições matemáticas afirmam que uma propriedade é verdadeira para todos os números inteiros positivos. Alguns exemplos dessas proposições são: para todo número inteiro positivo n: $n! \leq n^n$, $n^3 - n$ é divisível por 3; um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos e a soma dos primeiros n números inteiros positivos é $n\,(n + 1)/2$. Um dos objetivos principais deste capítulo, e do livro, é dar ao estudante um entendimento da indução matemática, que é utilizada para demonstrar resultados desse tipo.

As demonstrações com o uso da indução matemática têm duas partes. Primeiro, elas mostram que a proposição é verdadeira para o número inteiro positivo 1. Segundo, elas mostram que se a proposição for verdadeira para um número inteiro positivo, então deve ser mantida para o número inteiro seguinte. A indução matemática baseia-se na regra de inferência, que nos diz que se $P(1)$ e $\forall k(P(k) \rightarrow P(k+1))$ são verdadeiras para o domínio dos números inteiros positivos, então $\forall P(n)$ é verdadeira. A indução matemática pode ser usada para demonstrar diversos resultados. Entender como ler e construir demonstrações por indução matemática é a chave para aprender matemática discreta.

Nos capítulos 2 e 3, definimos conjuntos e funções, ou seja, descrevemos os conjuntos listando seus elementos ou dando propriedades que caracterizassem seus elementos. Fornecemos fórmulas para os valores das funções. Há outra maneira importante de definir esses objetos, baseando-se em indução matemática. Para definir as funções, alguns termos iniciais são especificados e uma regra é dada para encontrar os valores subseqüentes a partir daqueles já conhecidos. Os conjuntos podem ser definidos listando-se alguns de seus elementos e dando-se regras para a construção de elementos a partir daqueles já conhecidos como pertencendo ao conjunto. Essas definições, chamadas de *definições recursivas*, são usadas pela matemática discreta e pela ciência da computação. Uma vez que definimos um conjunto recursivamente, podemos usar um método de demonstração chamado de indução estrutural, ou recursão, para mostrar os resultados sobre esse conjunto.

Quando um procedimento é específico para a resolução de um problema, ele deve *sempre* resolver o problema corretamente. Apenas testar para ver se o resultado obtido para um conjunto com valores de entrada é correto não mostra se o procedimento trabalha sempre corretamente. A exatidão de um procedimento apenas pode ser garantida demonstrando-se que ele sempre fornece o resultado correto. A seção final deste capítulo contém uma introdução sobre as técnicas de verificação de programas. Esta é uma técnica formal para verificar se um procedimento está correto. A verificação de programas serve como base para a tentativa de demonstrar de modo mecânico que os programas estão corretos.

4.1 Indução Matemática

Introdução

Suponha que tenhamos uma escada infinita, como mostrada na Figura 1, e queremos saber se podemos alcançar todos os degraus dessa escada. Sabemos duas coisas:

1. Podemos alcançar o primeiro degrau da escada.
2. Se pudermos alcançar um determinado degrau da escada, então poderemos alcançar o próximo degrau.

Podemos concluir que nós podemos alcançar todos os degraus? Por (1), sabemos que podemos alcançar o primeiro degrau da escada. Além disso, como podemos alcançar o primeiro, por (2), podemos também alcançar o segundo degrau, que é o próximo degrau depois do primeiro. Aplicando (2) novamente, como podemos alcançar o segundo degrau, podemos também alcançar o terceiro. Continuando dessa maneira, podemos mostrar que será possível alcançar o quarto degrau, o quinto degrau, e assim por diante. Por exemplo, depois de usar 100 vezes (2), sabemos

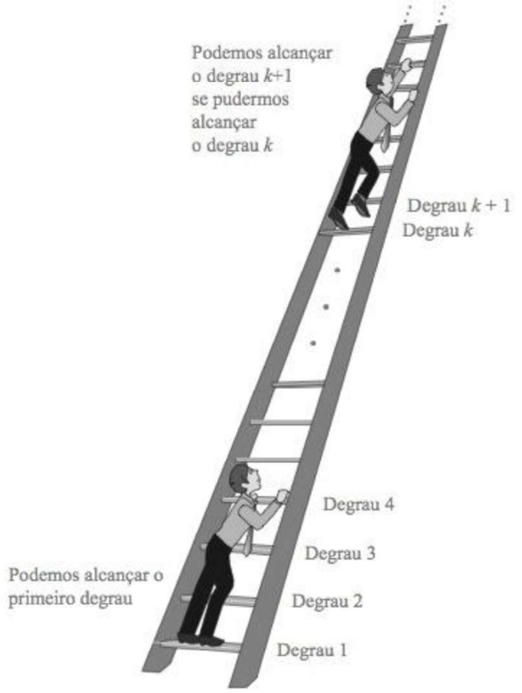


FIGURA 1 Subindo uma Escada Infinita.

que poderemos alcançar o 101º degrau. Mas podemos concluir que é possível alcançar todos os degraus dessa escada infinita? A resposta é sim, às vezes podemos fazer essa verificação usando uma importante técnica de demonstração chamada de **indução matemática**. Ou seja, podemos mostrar que $P(n)$ é verdadeira para todo número inteiro positivo n, em que $P(n)$ é a proposição que afirma que podemos alcançar o n-ésimo degrau da escada.

A indução matemática é uma técnica de demonstração extremamente importante que pode utilizada para apresentar declarações desse tipo. Como veremos nesta seção e nas subseqüentes, a indução matemática é muito usada para demonstrar resultados sobre diversos objetos discretos. Por exemplo, ela é aplicada para demonstrar resultados sobre complexidade de algoritmos, exatidão de certos tipos de programas, teoremas sobre grafos e árvores, assim como várias identidades e inequações.

Nesta seção, descreveremos como a indução matemática pode ser usada e por que é uma técnica de demonstração válida. É extremamente importante notar que a indução matemática pode ser utilizada apenas para demonstrar resultados obtidos de outras formas. Ela *não* é um instrumento para descobrir fórmulas ou teoremas.

Indução Matemática

Auto-avaliação

Em geral, a indução matemática* pode ser usada para demonstrar proposições que afirmam que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n, em que $P(n)$ é uma função proposicional. Uma demonstração por indução matemática tem duas partes, um **passo base**, em que mostramos que $P(1)$ é verdadeira, e um **passo de indução**, em que mostramos que para todos os números inteiros k, se $P(k)$ for verdadeira, então $P(k + 1)$ é verdadeira.

* Infelizmente, usar a terminologia "indução matemática" entra em confronto com a terminologia usada para descrever diferentes tipos de argumentos. Em lógica, o **argumento dedutivo** usa regras de inferência para construir as conclusões a partir de premissas, enquanto o **argumento indutivo** obtém conclusões apenas apoiado, não assegurado, em evidências. As demonstrações matemáticas, que incluem argumentos que usam a indução matemática, são dedutivas, não indutivas.

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA Para demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros n, em que $P(n)$ é uma função proposicional, completamos dois passos:

PASSO BASE: Verificamos que $P(1)$ é verdadeira.

PASSO DE INDUÇÃO: Mostramos que a proposição condicional $P(k) \rightarrow P(k+1)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos k.

Para completar o passo de indução de uma demonstração que utiliza o princípio da indução matemática, assumimos que $P(k)$ seja verdadeira para um número inteiro positivo k arbitrário e mostramos, sob hipótese, que $P(k+1)$ deve ser também verdadeira. A hipótese de que $P(k)$ é verdadeira é chamada de **hipótese indutiva**. Uma vez completados os dois passos da demonstração por indução matemática, mostramos que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos, ou seja, evidenciamos que $\forall n\, P(n)$ é verdadeira onde esta quantificação tem como domínio o conjunto dos números inteiros positivos. No passo de indução, mostramos que $\forall k(P(k) \rightarrow P(k+1))$ é verdadeira onde novamente o domínio é o conjunto dos números inteiros positivos.

Expressa como uma regra de inferência, essa técnica de demonstração pode ser declarada como

$$[P(1) \wedge \forall\, k(P(k) \rightarrow P(k+1))] \rightarrow \forall\, n\, P(n),$$

em que o domínio é o conjunto dos números inteiros positivos. Como a indução matemática é uma importante técnica, é válido explicar em detalhes os passos de uma demonstração que usa essa técnica. A primeira coisa que fazemos ao demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n é mostrar que $P(1)$ é verdadeira. Ou seja, devemos evidenciar que a proposição obtida quando n é substituído por 1 em $P(n)$ é verdadeira. Então, devemos evidenciar que $P(k) \rightarrow P(k+1)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos k. Para demonstrar que essa proposição condicional é verdadeira para todo número inteiro positivo k, precisamos evidenciar que $P(k+1)$ não pode ser falsa quando $P(k)$ é verdadeira. Isso pode ser feito assumindo-se que $P(k)$ é verdadeira e mostrando que, *a partir dessa hipótese*, $P(k+1)$ deve também ser verdadeira.

Lembre-se: Em uma demonstração por indução matemática *não* assumimos que $P(k)$ seja verdadeira para todos os números inteiros positivos! Apenas mostramos que *se assumimos* que $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ também é verdadeira. Assim, uma demonstração por indução matemática não pode ser vista como um caso de usar o que se quer demonstrar, ou um argumento circular.

Quando usamos a indução matemática para demonstrar um teorema, primeiro mostramos que $P(1)$ é verdadeira. Então, sabemos que $P(2)$ é verdadeira, porque $P(1)$ implica $P(2)$. Assim, sabemos que $P(3)$ é verdadeira, porque $P(2)$ implica $P(3)$. Continuando nessa linha, vemos que $P(n)$ é verdadeira para todo número inteiro positivo n.

MANEIRAS DE LEMBRAR COMO A INDUÇÃO MATEMÁTICA FUNCIONA Pensar em uma escada infinita e nas regras para alcançar os degraus pode ajudá-lo a lembrar como a indução matemática funciona. Note que as proposições (1) e (2) para a escada infinita são exatamente o passo base e o de indução, respectivamente, da demonstração de que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n, em que $P(n)$ é a proposição que afirma que podemos alcançar o n-ésimo degrau da escada. Conseqüentemente, podemos invocar a indução matemática para concluir que podemos alcançar todos os degraus.

Links

NOTA HISTÓRICA O primeiro uso conhecido da indução matemática é o trabalho do matemático Francesco Maurolico (1494–1575), no século XVI. Maurolico escreveu exaustivamente sobre os trabalhos de matemáticos clássicos e fez muitas contribuições em geometria e ótica. Em seu livro, *Arithmeticorum Libri Duo,* Maurolico apresentou várias propriedades de números inteiros juntamente com as demonstrações dessas propriedades. Para demonstrar algumas dessas propriedades, ele desenvolveu o método de indução matemática. Seu primeiro uso da indução matemática em seu livro foi para demonstrar que a soma dos primeiros n números inteiros positivos e ímpares é igual a n^2.

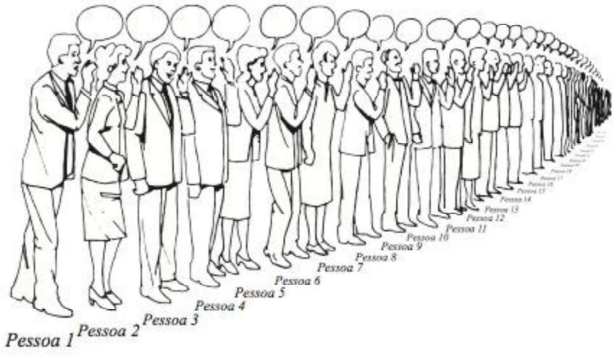


FIGURA 2 Pessoas Contando Segredos.

Além da escada infinita, muitas outras ilustrações úteis da indução matemática podem ajudá-lo a lembrar como esse princípio funciona. Uma delas contém uma fila de pessoas, a pessoa um, a pessoa dois, e assim por diante. Um segredo é contado à pessoa um e cada pessoa conta o segredo à próxima da fila, se a pessoa anterior ouvi-lo. Considere $P(n)$ como a proposição: a pessoa n sabe o segredo. Então $P(1)$ é verdadeira, porque o segredo é contado à pessoa um; $P(2)$ é verdadeira, porque a pessoa um conta o segredo à pessoa dois; $P(3)$ é verdadeira, porque a pessoa dois conta o segredo à terceira pessoa, e assim por diante. Pelo princípio da indução matemática, cada pessoa da fila ouve o segredo. Isso é ilustrado na Figura 2. (Assumimos que cada pessoa repassa o segredo, sem mudá-lo, para a próxima pessoa, o que geralmente não é verdade na vida real.)

Outra maneira de ilustrar o princípio da indução matemática é considerar uma fila infinita de dominós, marcados a partir de $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, em que cada dominó está em pé. Considere $P(n)$ como a proposição: o dominó n caiu. Se o primeiro dominó cair, considerando-se que $P(1)$ seja verdadeira, e se, sempre que o k-ésimo dominó cair, o $(k+1)$-ésimo dominó também vai cair, ou seja, se $P(k) \rightarrow P(k+1)$ for verdadeira para todo número inteiro positivo k —, então todos os dominós vão cair. Isso é ilustrado na Figura 3.

Exemplos de Demonstrações por Indução Matemática

Muitos teoremas afirmam que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n, em que $P(n)$ é uma função proposicional, tal como a proposição de que $1 + 2 + \cdots + n = n\,(n+1)/2$ para todo número inteiro positivo n ou a proposição $n \leq 2^n$ para todos os números inteiros positivos n.

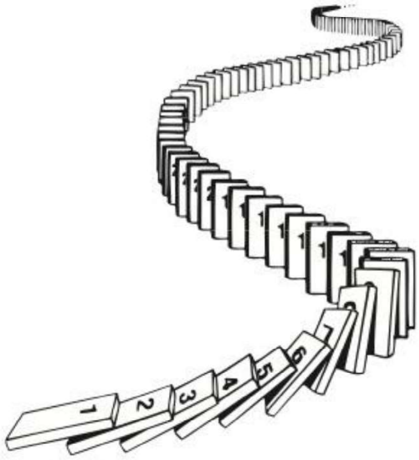


FIGURA 3 Ilustrando a Indução Matemática com o Uso de Dominós.

A indução matemática é uma técnica para demonstrar teoremas desse tipo. Em outras palavras, ela pode ser utilizada para demonstrar proposições na forma $\forall n\, P(n)$, em que o domínio é o conjunto dos números inteiros positivos. Pode ser usada também para demonstrar diversos teoremas, sendo cada um deles uma proposição nessa forma.

Usaremos vários exemplos para ilustrar como os teoremas são demonstrados aplicando-se a indução matemática. Os teoremas que vamos demonstrar incluem fórmulas de somatório, inequações, identidades para combinações de conjuntos, resultados de divisibilidade, teoremas sobre algoritmos e alguns outros resultados criativos. Nas seções posteriores, vamos empregar a indução matemática para demonstrar muitos outros tipos de resultados, incluindo exatidão de programas de computação e algoritmos. Esta pode ser utilizada para demonstrar vários teoremas, não apenas fórmulas de somatório, inequações e outros tipos de exemplos que ilustramos aqui. Note que há muitas oportunidades para erro nas demonstrações por indução. Vamos descrever algumas demonstrações incorretas por indução matemática no final desta seção e nos exercícios.

Links

DEMONSTRAÇÃO DE FÓRMULAS DE SOMATÓRIO Comecemos usando a indução matemática para demonstrar muitas fórmulas de somatório diferentes. Como veremos, ela é particularmente apropriada para demonstrar que essas fórmulas são válidas. Entretanto, as fórmulas de somatório podem ser demonstradas de outras maneiras. Isso não é surpreendente porque existem normalmente maneiras diferentes para demonstrar um teorema. A maior desvantagem do uso da indução matemática é que ela não pode ser utilizada para encontrar uma fórmula de somatório, ou seja, é necessário ter a fórmula antes de começar a prová-la com a indução matemática. Começamos utilizando-a para demonstrar uma fórmula para a soma dos n menores números inteiros positivos.

EXEMPLO 1 Mostre que se n for um número inteiro positivo, então

Exemplos Extras

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solução: Considere $P(n)$ como a proposição que afirma que a soma dos primeiros n números inteiros positivos é $n\,(n + 1)/2$. Devemos fazer duas coisas para demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ou seja, precisamos mostrar que $P(1)$ é verdadeira e que a proposição condicional $P(k)$ implica que $P(k + 1)$ é verdadeira para $k = 1, 2, 3, \ldots$.

PASSO BASE: $P(1)$ é verdadeira, pois $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

PASSO DE INDUÇÃO: Para a hipótese indutiva, assumimos que $P(k)$ é verdadeira para um número inteiro positivo arbitrário k, ou seja, assumimos que

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Considerando essa hipótese, devemos mostrar que $P(k + 1)$ é verdadeira, ou seja, que

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

também é verdadeira. Quando adicionamos $k + 1$ nos dois lados da equação em $P(k)$, obtemos

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Esta última equação mostra que $P(k+1)$ é verdadeira, considerando a hipótese de que $P(k)$ seja verdadeira. Isso completa o passo de indução.

Completamos os passos base e de indução. Assim, pela indução matemática, sabemos que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n, ou seja, demonstramos que $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ para todos os números inteiros positivos n. ◄

Como notamos, a indução matemática não é um instrumento para encontrar teoremas sobre todos os números inteiros positivos. Em vez disso, é um método de demonstração de resultados, uma vez conjecturados. No Exemplo 2, usando a indução matemática para demonstrar uma fórmula de somatório, vamos formular e então demonstrar uma conjectura.

EXEMPLO 2 Conjecture uma fórmula para a soma dos primeiros n números inteiros positivos e ímpares. Então, demonstre sua conjectura usando a indução matemática.

Solução: As somas dos primeiros n números inteiros positivos e ímpares para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ são

$$1 = 1, \qquad 1 + 3 = 4, \qquad 1 + 3 + 5 = 9,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16, \qquad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

A partir desses valores, é razoável conjecturar que a soma dos primeiros n números inteiros positivos e ímpares é n^2, ou seja, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$. Precisamos de um método para *demonstrar* que esta *conjectura* está correta, se de fato ela estiver.

Considere $P(n)$ como a proposição: a soma dos primeiros n números inteiros positivos e ímpares é n^2. Nossa conjectura é que $P(n)$ seja verdadeira para todos os números inteiros positivos. Para usar a indução matemática com o intuito de demonstrar essa conjectura, devemos primeiro completar o passo base; ou seja, devemos mostrar que $P(1)$ é verdadeira. Então, iremos para o passo de indução; ou seja, devemos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira quando assumimos que $P(k)$ seja verdadeira. Tentaremos agora completar esses dois passos.

PASSO BASE: $P(1)$ declara que a soma do primeiro número inteiro positivo ímpar é 1^2. Isso é verdadeiro porque a soma do primeiro número inteiro positivo e ímpar é 1. O passo base está completo.

PASSO DE INDUÇÃO: Para completar o passo de indução, devemos mostrar que a proposição $P(k) \to P(k+1)$ é verdadeira para todo número inteiro positivo k. Para fazer isso, primeiro assumimos a hipótese indutiva. A hipótese indutiva é a proposição: $P(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2.$$

[Note que o k-ésimo número inteiro positivo e ímpar é $(2k-1)$, pois este inteiro é obtido pela adição de 2 em um total de $k-1$ vezes 1.] Para mostrar que $\forall k(P(k) \to P(k+1))$ é verdadeira, devemos mostrar que se $P(k)$ for verdadeira (a hipótese indutiva), então, $P(k+1)$ é verdadeira. Note que $P(k+1)$ é a proposição de que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2.$$

Então, assumindo que $P(k)$ seja verdadeira, temos que

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) &= [1 + 3 + \cdots + (2k-1)] + (2k+1) \\ &= k^2 + (2k+1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2. \end{aligned}$$

Isso mostra que $P(k+1)$ resulta de $P(k)$. Note que usamos a hipótese indutiva $P(k)$ na segunda equação para substituir a soma dos primeiros k números inteiros positivos e ímpares por k^2.

Completamos o passo base e o de indução, ou seja, mostramos que $P(1)$ é verdadeira e a proposição condicional $P(k) \to P(k+1)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos k. Conseqüentemente, pelo princípio da indução matemática, podemos concluir que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n. Ou seja, sabemos que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ para todos os números inteiros positivos n. ◀

Às vezes, precisamos mostrar que $P(n)$ é verdadeira para $n = b, b+1, b+2, \ldots$, em que b é um número inteiro diferente de 1. Podemos usar a indução matemática para fazer isso mudando o passo base. Por exemplo, considere o Exemplo 3, que afirma que a fórmula do somatório é válida para todos os números inteiros não negativos, assim, precisamos demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

EXEMPLO 3 Use a indução matemática para mostrar que

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

para todos os números inteiros não negativos n.

Solução: Considere $P(n)$ como a proposição de que $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para o número inteiro n.

PASSO BASE: $P(0)$ é verdadeira, porque $2^0 = 1 = 2^1 - 1$. Isso completa a etapa de base.

PASSO DE INDUÇÃO: Para a hipótese indutiva, assumimos que $P(k)$ é verdadeira, ou seja, assumimos que

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1.$$

Para realizar o passo de indução usando essa hipótese, devemos mostrar que quando assumimos que $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é também verdadeira, ou seja, devemos mostrar que

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$$

assumindo a hipótese indutiva $P(k)$. Considerando-se essa hipótese de $P(k)$, vemos que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k) + 2^k \\ &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1. \end{aligned}$$

Note que usamos a hipótese indutiva na segunda equação nessa seqüência de equações para substituir $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k$ por $2^{k+1} - 1$. Completamos o passo de indução.

Como completamos o passo base e o de indução pela indução matemática, sabemos que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros não negativos n, ou seja, $1 + 2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todos os números inteiros não negativos n. ◀

No Exemplo 3, no passo base, mostramos que $P(0)$ é verdadeira, porque o teorema que queríamos demonstrar estava na forma $\forall n\, P(n)$, em que o domínio era o conjunto de todos os números inteiros não negativos. Como esse exemplo demonstra, para usar a indução matemática para mostrar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n = b, b+1, b+2, \ldots$, em que b é um número inteiro diferente de 1, mostramos que $P(b)$ é verdadeira (no passo base) e, então, mostramos que a proposição condicional $P(k) \to P(k+1)$ é verdadeira para $k = b, b+1, b+2, \ldots$ (no passo de indução). Note que b pode ser negativo, zero ou positivo. Seguindo com a analogia do dominó que usamos anteriormente, imagine que começamos derrubando o b-ésimo dominó (no passo base), e quando cada um dos dominós cai, empurra o próximo dominó (no passo de indução). Deixamos para o leitor mostrar que essa forma de indução é válida (veja o Exercício 79).

A fórmula dada no Exemplo 3 é um caso especial de resultado geral para a soma dos termos de uma progressão geométrica (Teorema 1 da Seção 2.4). Usaremos a indução matemática para fornecer uma demonstração alternativa dessa fórmula.

EXEMPLO 4 **Somas de Progressões Geométricas** Use a indução matemática para demonstrar essa fórmula para a soma de um número finito de termos de uma progressão geométrica:

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} \qquad \text{quando } r \neq 1,$$

em que n é um número inteiro não negativo.

Solução: Para demonstrar essa fórmula usando a indução matemática, considere $P(n)$ como a proposição: a soma dos primeiros $n + 1$ termos de uma progressão geométrica nesta fórmula está correta.

PASSO BASE: $P(0)$ é verdadeira, porque

$$\frac{ar^{0+1} - a}{r - 1} = \frac{ar - a}{r - 1} = \frac{a(r - 1)}{r - 1} = a.$$

PASSO DE INDUÇÃO: A hipótese indutiva é que a proposição $P(k)$ seja verdadeira, em que k é um número inteiro não negativo, ou seja, $P(k)$ é a proposição que

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^k = \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1}.$$

Para completar o passo de indução, devemos mostrar que se $P(k)$ for verdadeira, então $P(k + 1)$ é também verdadeira. Para mostrarmos que este é o caso, primeiro adicionamos ar^{k+1} aos dois lados da equação declarada por $P(k)$. Verificamos que

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^k + ar^{k+1} = \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} + ar^{k+1}.$$

Reescrevendo o lado direito dessa equação, temos que

$$\begin{aligned}\frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} + ar^{k+1} &= \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} + \frac{ar^{k+2} - ar^{k+1}}{r - 1}\\ &= \frac{ar^{k+2} - a}{r - 1}.\end{aligned}$$

Combinando essas duas últimas equações, temos

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^k + ar^{k+1} = \frac{ar^{k+2} - a}{r - 1}.$$

Isso mostra que se a hipótese indutiva $P(k)$ for verdadeira, então $P(k + 1)$ deverá também ser verdadeira. Isso completa o argumento indutivo.

Completamos o passo base e o de indução; então, pela indução matemática, $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros não negativos n. Isso mostra que a fórmula para a soma dos termos de uma progressão geométrica está correta. ◀

Como mencionado anteriormente, a fórmula do Exemplo 3 é o caso da fórmula do Exemplo 4 com $a = 1$ e $r = 2$. O leitor deve verificar que colocar esses valores para a e r na fórmula geral dá a mesma fórmula que a do Exemplo 3.

DEMONSTRANDO INEQUAÇÕES A indução matemática pode ser usada para demonstrar que diversas inequações são verdadeiras para todos os números inteiros positivos maiores que um determinado número inteiro positivo, como ilustram os exemplos 5 a 7.

EXEMPLO 5 Use a indução matemática para demonstrar a inequação

Exemplos Extras

$$n < 2^n$$

para todos os números inteiros positivos n.

Solução: Considere $P(n)$ como a proposição $n < 2^n$.

PASSO BASE: $P(1)$ é verdadeira, porque $1 < 2^1 = 2$. Isso completa o passo base.

PASSO DE INDUÇÃO: Primeiro, assumimos a hipótese indutiva de que $P(k)$ é verdadeira para o número inteiro positivo k, ou seja, a hipótese indutiva $P(k)$ é a proposição de que $k < 2^k$. Para completar o passo de indução, precisamos mostrar que, se $P(k)$ for verdadeira, então $P(k + 1)$, que é a proposição de que $k + 1 < 2^{k+1}$, é verdadeira. Ou seja, precisamos mostrar que se $k < 2^k$, então $k + 1 < 2^{k+1}$. Para mostrar que esta proposição condicional é verdadeira para o número inteiro positivo k, primeiro adicionamos 1 aos dois lados de $k < 2^k$, e então notamos que $1 \leq 2^k$. Isso nos diz que

$$k + 1 < 2^k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Isso mostra que $P(k + 1)$ é verdadeira, ou seja, que $k + 1 < 2^{k+1}$, com base na hipótese de que $P(k)$ seja verdadeira. O passo de indução está completo.

Assim, como completamos o passo base e o de indução, pelo princípio da indução matemática mostramos que $n < 2^n$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n. ◀

EXEMPLO 6 Use a indução matemática para demonstrar que $2^n < n!$ para todo número inteiro positivo n com $n \geq 4$. (Note que essa inequação é falsa para $n = 1, 2$ e 3.)

Solução: Considere $P(n)$ como a proposição: $2^n < n!$.

PASSO BASE: Para demonstrar a inequação para $n \geq 4$ é necessário que o passo base seja $P(4)$. Note que $P(4)$ é verdadeira, porque $2^4 = 16 < 24 = 4!$

PASSO DE INDUÇÃO: Para este passo, assumimos que $P(k)$ seja verdadeira para o número inteiro positivo k com $k \geq 4$. Ou seja, assumimos que $2^k < k!$ para o número inteiro positivo k com $k \geq 4$. Devemos mostrar que, considerando-se essa hipótese, $P(k + 1)$ também é verdadeira, ou seja, devemos mostrar que se $2^k < k!$ para o número inteiro positivo k, em que $k \geq 4$, então $2^{k+1} < (k + 1)!$. Temos que

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k && \text{pela definição de expoente} \\ &< 2 \cdot k! && \text{pela hipótese indutiva} \\ &< (k+1)k! && \text{pois } 2 < k + 1 \\ &= (k+1)! && \text{pela definição de função fatorial.} \end{aligned}$$

Isso mostra que $P(k + 1)$ é verdadeira quando $P(k)$ é verdadeira, o que completa o passo de indução da demonstração.

Completamos o passo base e o de indução. Assim, pela indução matemática, $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros n com $n \geq 4$, ou seja, demonstramos que $2^n < n!$ é verdadeira para todos os números inteiros n com $n \geq 4$. ◀

Uma inequação importante para a soma dos recíprocos de um conjunto de números inteiros positivos será demonstrada no Exemplo 7.

EXEMPLO 7 **Uma Inequação para os Números Harmônicos** Os **números harmônicos** H_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$, são definidos por

$$H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{j}.$$

Por exemplo,

$$H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}.$$

Use a indução matemática para mostrar que

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2},$$

sempre que n for um número inteiro não negativo.

Solução: Para realizar a demonstração, considere $P(n)$ como a proposição de que $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

PASSO BASE: $P(0)$ é verdadeira, porque $H_{2^0} = H_1 = 1 \geq 1 + \frac{0}{2}$.

PASSO DE INDUÇÃO: A hipótese indutiva é a proposição de que $P(k)$ seja verdadeira, ou seja, $H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$, em que k é um número inteiro não negativo. Devemos mostrar que, se $P(k)$ for verdadeira, então $P(k + 1)$, que afirma que $H_{2^{k+1}} \geq 1 + \frac{k+1}{2}$, também é verdadeira. Então, assumindo a hipótese indutiva, temos que

$$\begin{aligned}
H_{2^{k+1}} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} && \text{pela definição de número harmônico} \\
&= H_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} && \text{pela definição do } 2^k\text{-ésimo número harmônico} \\
&\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} && \text{pela hipótese indutiva} \\
&\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} && \text{porque há } 2^k \text{ termos, cada um} \geq 1/2^{k+1} \\
&\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2} && \text{cancelando um fator comum de } 2^k \text{ no segundo termo} \\
&= 1 + \frac{k+1}{2}.
\end{aligned}$$

Isso conclui o passo de indução da demonstração.

Completamos o passo base e o de indução. Assim, pela indução matemática, $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros não negativos, ou seja, a inequação $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ para números harmônicos é válida para todos os números inteiros não negativos n. ◀

Lembre-se: A inequação estabelecida aqui mostra que a **série harmônica**

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

é uma série infinita divergente. Este é um importante exemplo no estudo de séries infinitas.

DEMONSTRANDO RESULTADOS DE DIVISIBILIDADE A indução matemática pode ser utilizada para demonstrar resultados de divisibilidade de números inteiros. Embora esses resultados sejam geralmente fáceis de ser demonstrados por meio de resultados básicos em teoria dos números, é interessante ver como demonstrar resultados usando indução matemática, como ilustra o Exemplo 8.

EXEMPLO 8 Use a indução matemática para demonstrar que $n^3 - n$ é divisível por 3 sempre que n for um número inteiro positivo.

Exemplos Extras

Solução: Para construir a demonstração, considere $P(n)$ como a proposição: "$n^3 - n$ é divisível por 3."

PASSO BASE: A proposição $P(1)$ é verdadeira porque $1^3 - 1 = 0$ é divisível por 3. Isso completa o passo base.

PASSO DE INDUÇÃO: Para a hipótese indutiva, assumimos que $P(k)$ seja verdadeira; ou seja, assumimos que $k^3 - k$ seja divisível por 3. Para completar este passo, devemos mostrar que quando assumimos a hipótese indutiva, temos que $P(k + 1)$, ou seja, a proposição: $(k + 1)^3 - (k + 1)$ é divisível por 3, é também verdadeira. Logo, devemos mostrar que $(k + 1)^3 - (k + 1)$ é divisível por 3. Note que

$$\begin{aligned}(k + 1)^3 - (k + 1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k + 1)\\ &= (k^3 - k) + 3(k^2 + k).\end{aligned}$$

Como ambos os termos dessa soma são divisíveis por 3 (o primeiro pela hipótese indutiva e o segundo porque é 3 vezes um número inteiro), temos que $(k + 1)^3 - (k + 1)$ é também divisível por 3. Isso completa o passo de indução.

Como nós completamos o passo base e o de indução, pelo princípio de indução matemática sabemos que $n^3 - n$ é divisível por 3 sempre que n for um número inteiro positivo. ◀

DEMONSTRANDO RESULTADOS DE CONJUNTOS A indução matemática pode ser utilizada para demonstrar muitos resultados de conjuntos. Em particular, no Exemplo 9 demonstramos uma fórmula para o número de subconjuntos de um conjunto finito, e no Exemplo 10 estabelecemos uma identidade de conjuntos.

EXEMPLO 9 **O Número de Subconjuntos de um Conjunto Finito** Use a indução matemática para mostrar que se S for um conjunto finito com n elementos em que n é um número inteiro não negativo, então S tem 2^n subconjuntos. (Vamos demonstrar esse resultado diretamente de muitas maneiras no Capítulo 5.)

Solução: Considere $P(n)$ como a proposição de que um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos.

PASSO BASE: $P(0)$ é verdadeira, porque um conjunto com zero elementos, o conjunto vazio, tem exatamente $2^0 = 1$ subconjunto, ou seja, ele mesmo.

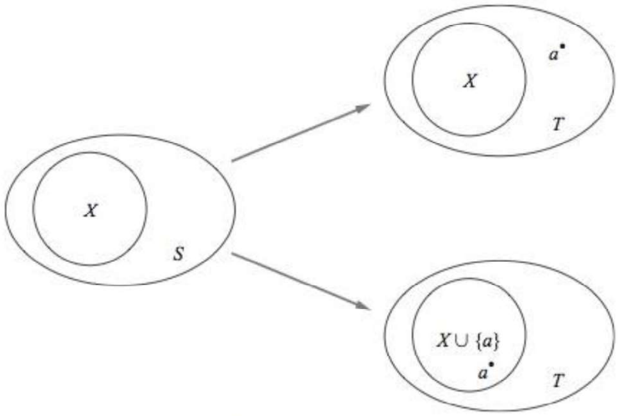


FIGURA 4 Construindo Subconjuntos de um Conjunto com $k + 1$ Elementos. Aqui, $T = S \cup \{a\}$.

PASSO DE INDUÇÃO: Para a hipótese indutiva, assumimos que $P(k)$ seja verdadeira para o número inteiro não negativo k, ou seja, assumimos que todo conjunto com k elementos tem 2^k subconjuntos. Devemos mostrar que, considerando essa hipótese, $P(k + 1)$, que é a proposição: todo conjunto com $k + 1$ elementos tem 2^{k+1} subconjuntos, deve também ser verdadeira. Para mostrar isso, considere T como um conjunto com $k + 1$ elementos. Então, é possível escrever $T = S \cup \{a\}$, em que a é um dos elementos de T e $S = T - \{a\}$ (e, assim, $|S| = k$). Os subconjuntos de T podem ser obtidos da seguinte maneira. Para cada subconjunto X de S há exatamente dois subconjuntos de T, ou seja, X e $X \cup \{a\}$. (Conforme ilustrado na Figura 4.) Estes constituem todos os subconjuntos de T e todos são distintos. Como há 2^k subconjuntos de S, há $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ subconjuntos de T. Isso finaliza o argumento indutivo.

Como completamos o passo base e o de indução, pela indução matemática temos que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros não negativos n, ou seja, demonstramos que um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos sempre que n for um número inteiro não negativo. ◀

EXEMPLO 10 Use a indução matemática para demonstrar a seguinte generalização de uma das leis de De Morgan:

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$$

sempre que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem subconjuntos de um conjunto universo U e $n \geq 2$.

Solução: Considere $P(n)$ como a identidade para n conjuntos.

PASSO BASE: A proposição $P(2)$ afirma que $\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$. Esta é uma das leis de De Morgan, demonstrada na Seção 2.2.

PASSO DE INDUÇÃO: A hipótese indutiva é a proposição de que $P(k)$ seja verdadeira, em que k é um número inteiro com $k \geq 2$; ou seja, é a proposição de que

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{k} A_j} = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j}$$

sempre que $A_1, A_2, \ldots, A_k$ forem subconjuntos do conjunto universo U. Para realizar o passo de indução, precisamos mostrar que esta hipótese implica que $P(k + 1)$ é verdadeira, ou seja, precisamos mostrar que se esta igualdade é verdadeira para todo grupo k subconjuntos de U, então devemos também ter como verdadeira para todo grupo de $k+1$ subconjuntos de U. Suponha que $A_1, A_2, \ldots, A_k$, A_{k+1} sejam subconjuntos de U. Quando a hipótese indutiva é assumida como verdadeira, temos que

$$\begin{aligned}
\overline{\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j} &= \overline{\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right) \cap A_{k+1}} && \text{pela definição de intersecção} \\
&= \overline{\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right)} \cup \overline{A_{k+1}} && \text{pela lei de De Morgan (em que dois conjuntos são } \textstyle\bigcap_{j=1}^{k} A_j \text{ e } A_{k+1}\text{)} \\
&= \left(\bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j}\right) \cup \overline{A_{k+1}} && \text{pela hipótese indutiva} \\
&= \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{A_j} && \text{pela definição de união.}
\end{aligned}$$

Isso completa o passo de indução.

Como completamos o passo base e o de indução, pela indução matemática sabemos que $P(n)$ é verdadeira sempre que n for um número inteiro positivo, $n \geq 2$. Ou seja, sabemos que

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$$

sempre que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem subconjuntos de um conjunto universo U e $n \geq 2$. ◀

DEMONSTRANDO RESULTADOS SOBRE ALGORITMOS Agora, fornecemos um exemplo (um pouco mais difícil que os exemplos anteriores) que ilustra uma das muitas maneiras de a indução matemática ser utilizada no estudo de algoritmos. Mostraremos que ela pode ser utilizada para demonstrar que um algoritmo "voraz" fornece uma solução ideal. (Para uma introdução sobre algoritmos "vorazes", veja a Seção 3.1.)

EXEMPLO 11 Suponha que exista um grupo de palestras com tempos pré-agendados. Gostaríamos de marcar quantas reuniões forem possíveis no salão de conferências principal. Como podemos organizar essas reuniões? Uma maneira é usar um algoritmo voraz para organizar um subconjunto com m palestras $t_1, t_2, \ldots, t_m$ na sala de conferências principal. Suponha que a reunião t_j comece no tempo b_j e termine no tempo e_j. (Duas reuniões não podem ocorrer no mesmo horário, mas uma pode começar ao mesmo tempo em que outra termine.) Assumimos que as reuniões são listadas em ordem de final de tempo não decrescente, de modo que $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_m$. O algoritmo voraz trabalha selecionando em cada passo uma reunião que termine antes entre todas aquelas que começaram depois que todas as agendadas terminaram. Note que uma reunião que comece e termine antes é sempre selecionada em primeiro lugar pelo algoritmo. Mostraremos que este algoritmo voraz é ótimo no sentido de que sempre organiza o maior número de reuniões possíveis na sala de conferências principal. Para demonstrar suas qualidades, usamos a indução matemática na variável n, o número de reuniões agendadas pelo algoritmo. Consideremos $P(n)$ como a proposição: se o algoritmo voraz agenda n reuniões, então não é possível agendar mais que n reuniões.

PASSO BASE: Suponha que o algoritmo voraz gerencie a organização de apenas uma reunião, t_1, na sala de conferências principal. Isso significa que todas as outras reuniões não podem começar depois de e_1, o tempo final de t_1. Por outro lado, a primeira dessas reuniões é a primeira das reuniões em ordem não decrescente de tempo de término que pode ser adicionada. Assim, no tempo e_1 cada uma das reuniões restantes precisa usar a sala de conferências porque todas começam em e_1, ou antes, e terminam depois de e_1. Temos que duas reuniões não podem ser marcadas, pois ambas precisam usar a sala no tempo e_1. Isso mostra que $P(1)$ é verdadeira e completa o passo base.

PASSO DE INDUÇÃO: A hipótese indutiva é de que $P(k)$ é verdadeira, em que k é um número inteiro positivo, ou seja, que o algoritmo voraz sempre marca o máximo de reuniões possível quando seleciona k reuniões, em que k é um número inteiro positivo, dado qualquer conjunto de reuniões, não importando o seu tamanho. Devemos mostrar que $P(k+1)$, assumindo a hipótese de que $P(k)$ é verdadeira, ou seja, devemos mostrar que, sob essa hipótese, o algoritmo voraz sempre marca o maior número de reuniões possível quando seleciona $k+1$ reuniões.

Agora suponha que o algoritmo selecionou $k+1$ reuniões. Nosso primeiro passo para completar o passo de indução é mostrar que há um horário que inclui o máximo de reuniões possível que contenha t_1, uma reunião com o primeiro horário de término. Isso é fácil porque um horário que comece com a reunião t_i na lista, em que $i > 1$, pode ser trocado até que a reunião t_1 substitua t_i. Para verificar isso, note que como $e_1 \leq e_i$, todas as reuniões que foram marcadas a partir de t_i podem ainda ser marcadas.

Uma vez incluída a reunião t_1, a idéia de organizar as reuniões para que sejam marcadas quantas forem possíveis é reduzida para marcar quantas forem possíveis e que comecem em e_1 ou depois dela. Assim, se marcarmos quantas reuniões forem possíveis, o horário diferente de t_1 é um horário ideal das reuniões originais que começam quando t_1 tenha terminado. Como o algoritmo voraz organiza k reuniões quando ele cria esse horário, podemos aplicar a hipótese indutiva para concluir que ele organizou o máximo de reuniões possível. Temos que o algoritmo voraz organizou o maior número de reuniões possível, $k+1$, quando produziu o horário com $k+1$ reuniões, assim $P(k+1)$ é verdadeira. Isso completa o passo de indução.

Completamos o passo base e o de indução. Assim, pela indução matemática sabemos que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n. Isso completa a demonstração das qualidades desse algoritmo, ou seja, demonstramos que quando ele organiza n reuniões, sendo n um número inteiro positivo, então não é possível marcar mais que n reuniões. ◀

USOS CRIATIVOS DE INDUÇÃO MATEMÁTICA A indução matemática pode normalmente ser utilizada de maneiras inesperadas. Vamos ilustrar dois usos particularmente inteligentes de indução matemática, o primeiro relativo a sobreviventes em uma guerra de tortas e o segundo relacionado à construção do ladrilhamento de um tabuleiro de damas.

EXEMPLO 12 **Exemplos Extras**

Guerra de Tortas Um número ímpar de pessoas está em um campo com distâncias distintas entre eles. Ao mesmo tempo, cada pessoa joga uma torta em seu vizinho mais próximo, acertando essa pessoa. Use a indução matemática para mostrar que há pelo menos um sobrevivente, ou seja, pelo menos uma pessoa que não é acertada por uma torta. (Este problema foi introduzido por [Ca79]. Note que este resultado é falso quando há um número par de pessoas; veja o Exercício 71.)

Solução: Considere $P(n)$ como a proposição de que há um sobrevivente sempre que $2n+1$ pessoas estiverem paradas em um campo com distâncias diferentes entre elas e cada pessoa joga uma torta em seu vizinho mais próximo. Para demonstrar esse resultado, mostraremos que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n. Isso ocorre porque temos n execuções sobre todos os números inteiros positivos, $2n+1$ execuções sobre todos os números inteiros ímpares maiores que ou iguais a 3. Note que uma pessoa não pode ser atingida em uma guerra de tortas porque não há ninguém mais para jogar a torta.

PASSO BASE: Quando $n = 1$, há $2n+1 = 3$ pessoas na guerra de tortas. Dessas três pessoas, suponha que o par mais próximo seja A e B, e C seja a terceira pessoa. Como a distância entre os pares de pessoas é diferente, a distância entre A e C e a distância entre B e C são diferentes da distância entre A e B e maiores que ela. Temos que A joga a torta em B e B joga a torta em A, enquanto C joga a torta em A ou B, que são os mais próximos. Assim, C não é atingido por nenhuma torta. Isso mostra que pelo menos uma das três pessoas não é atingida por uma torta, completando o passo base.

PASSO DE INDUÇÃO: Para este passo, assuma que $P(k)$ seja verdadeira, ou seja, assuma que haja pelo menos um sobrevivente sempre que $2k + 1$ pessoas estejam paradas em um campo com distâncias distintas entre elas e que cada uma joga uma torta em seu vizinho mais próximo. Devemos mostrar que se a hipótese indutiva $P(k)$ for verdadeira, então $P(k + 1)$, a proposição que afirma que há pelo menos um sobrevivente sempre que $2(k + 1) + 1 = 2k + 3$ pessoas estejam paradas em um campo com distâncias diferentes entre si e cada uma joga uma torta em seu vizinho mais próximo, é também verdadeira.

Então, suponha que tenhamos $2(k + 1) + 1 = 2k + 3$ pessoas em um campo com distâncias diferentes entre os pares de pessoas. Considere A e B como o par mais próximo de pessoas nesse grupo de $2k + 3$ pessoas. Quando cada uma delas joga uma torta na pessoa mais próxima, A e B jogam as tortas entre si. Se alguém mais jogar uma torta em A ou B, então pelo menos três tortas serão jogadas em A e B e no máximo $(2k + 3) - 3 = 2k$ tortas são jogadas nas $2k + 1$ pessoas restantes. Isso garante que pelo menos uma pessoa será sobrevivente, pois se cada uma dessas $2k + 1$ pessoas foram atingidas por pelo menos uma torta, um total de pelo menos $2k + 1$ tortas foram jogadas nelas. (O argumento utilizado nesse último passo é um exemplo do princípio da casa dos pombos que será discutido mais à frente, na Seção 5.2.)

Para completar o passo de indução, suponha que ninguém mais jogue uma torta em A ou B. Além de A e B, existem $2k + 1$ pessoas. Como a distância entre os pares dessas pessoas são todas diferentes, podemos usar a hipótese indutiva para concluir que há pelo menos um sobrevivente S quando essas $2k + 1$ pessoas jogam as tortas em seus respectivos vizinhos mais próximos. Além disso, S também não é atingido pela torta jogada ou por A ou por B, porque A e B jogam suas tortas neles mesmos, então S é um sobrevivente, pois não é atingido por qualquer uma das tortas jogadas por essas $2k + 3$ pessoas. Isso completa o passo de indução e a demonstração de que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n.

Completamos o passo base e o de indução. Assim, pela indução matemática, temos que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n. Concluímos que sempre que um número ímpar de pessoas localizadas em um campo com distâncias diferentes entre si joga uma torta cada uma em seu vizinho mais próximo, existe pelo menos um sobrevivente. ◀

Links

Na Seção 1.7, discutimos o ladrilhamento de tabuleiros de damas com poliominós. O Exemplo 13 ilustra como a indução matemática pode ser utilizada para demonstrar o preenchimento de tabuleiros de damas com triominós à direita, em forma de "L".

EXEMPLO 13 Considere n como um número inteiro positivo. Mostre que todo tabuleiro de damas $2^n \times 2^n$ com um quadrado removido pode ser ladrilhado com triominós, peças que cobrem três quadrados de uma vez, como mostrado na Figura 5.

FIGURA 5 Ladrilhamento com Triominó à Direita.

Solução: Considere $P(n)$ como a proposição de que todo tabuleiro de damas $2^n \times 2^n$ com um quadrado removido pode ser ladrilhado com triominós à direita. Podemos usar a indução matemática para demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n.

PASSO BASE: $P(1)$ é verdadeira, porque cada um dos quatro tabuleiros de damas 2×2 com um quadrado removido pode ser ladrilhado com um triominó à direita, como mostrado na Figura 6.

PASSO DE INDUÇÃO: A hipótese indutiva é a suposição de que $P(k)$ seja verdadeira para um número inteiro positivo k; ou seja, é a hipótese de que todo tabuleiro de damas $2^k \times 2^k$ com um quadrado removido possa ser ladrilhado com triominós à direita. Deve ser mostrado que,

FIGURA 6 Ladrilhamento de Tabuleiros de Damas 2×2 com um Quadrado Removido.

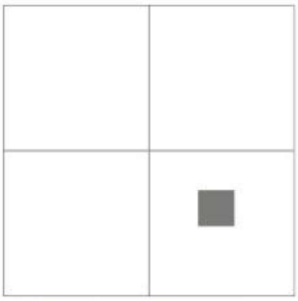


FIGURA 7 Dividindo um Tabuleiro de Damas $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ em Quatro Tabuleiros $2^k \times 2^k$.

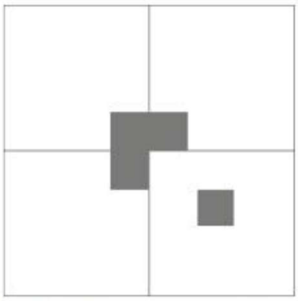


FIGURA 8 Ladrilhando um Tabuleiro de Damas $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ com Um Quadrado Removido.

considerando-se esta hipótese indutiva, $P(k+1)$ deve ser também verdadeira; ou seja, qualquer tabuleiro $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ com um quadrado removido pode ser ladrilhado com triominós à direita.

Para verificar isso, considere um tabuleiro de damas $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ com um quadrado removido. Divida esse tabuleiro em quatro tabuleiros de tamanho $2^k \times 2^k$, dividindo-o pela metade em ambas as direções. Isso está ilustrado na Figura 7. Nenhum quadrado foi removido de três dos quatro tabuleiros. O quarto tabuleiro $2^k \times 2^k$ teve um quadrado removido, assim, pela hipótese indutiva, ele pode ser ladrilhado com triominós à direita. Então, remova temporariamente o quadrado de cada um dos outros três tabuleiros $2^k \times 2^k$ que está no centro do tabuleiro original, separando uma de suas extremidades, como mostrado na Figura 8. Pela hipótese indutiva, cada um desses três tabuleiros $2^k \times 2^k$ com um quadrado removido pode ser ladrilhado, e o mesmo ocorre com os três quadrados que foram removidos temporariamente. Assim, o tabuleiro inteiro $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ pode ser preenchido com triominós.

Completamos o passo base e o de indução. Assim, pela indução matemática, $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n. Isso mostra que podemos ladrilhar todo tabuleiro $2^n \times 2^n$, em que n é um número inteiro positivo, com um quadrado removido, usando triominós à direita.

Por que a Indução Matemática é Válida

Por que a indução matemática é uma técnica de demonstração válida? A razão vem da propriedade de boa ordenação listada no Apêndice 1 como um axioma para o conjunto dos números inteiros positivos. Suponha que saibamos que $P(1)$ seja verdadeira e que a proposição $P(k) \to P(k+1)$ seja verdadeira para todos os números inteiros positivos k. Para mostrar que $P(n)$ deve ser verdadeira para todos os números inteiros positivos n, assuma que há pelo menos um número inteiro positivo para o qual $P(n)$ seja falsa. Então, o conjunto S dos números inteiros positivos para o qual $P(n)$ seja falsa não é vazio. Assim, pela propriedade de boa ordenação, S tem pelo menos um elemento, que será indicado por m. Sabemos que m não pode ser 1, porque $P(1)$ é verdadeira. Como m é positivo e maior que 1, $m-1$ é um número inteiro positivo. Além disso, como $m-1$ é menor que m, ele não está em S, assim $P(m-1)$ deve ser verdadeira. Como a proposição condicional $P(m-1) \to P(m)$ também é verdadeira, é o caso de $P(m)$ ser verdadeira. Isso contradiz a escolha de m. Assim, $P(n)$ deve ser verdadeira para todo número inteiro positivo n.

Erros em Demonstrações que Utilizam a Indução Matemática

Como em todo método de demonstração, existem muitas oportunidades para se cometer erros. Em toda demonstração que utilize a indução matemática, devemos completar um passo base e um de indução corretos.

Note que às vezes é difícil localizar o erro em uma demonstração falsa por indução matemática, como ilustra o Exemplo 14.

EXEMPLO 14 Encontre o erro nesta "demonstração" de uma afirmação claramente falsa de que todo conjunto de retas em um plano, não paralelas duas a duas, encontram-se em um ponto comum.

"Demonstração": Considere $P(n)$ como a proposição que afirma que todo conjunto de n retas no plano, as quais não são paralelas duas a duas, encontram-se em um ponto comum. Vamos demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos $n \geq 2$.

PASSO BASE: A proposição $P(2)$ é verdadeira, pois duas retas quaisquer no plano que não são paralelas encontram-se em um ponto comum (pela definição de retas paralelas).

PASSO DE INDUÇÃO: A hipótese indutiva é a proposição que afirma que $P(k)$ é verdadeira para todo número inteiro k, ou seja, é a hipótese de que todo conjunto com k retas no plano, das quais duas delas não são paralelas, encontram-se em um ponto comum. Para completar o passo de indução, devemos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k + 1)$ deve ser verdadeira também, ou seja, devemos mostrar que se todo conjunto de k retas no plano, das quais duas delas não são paralelas, encontram-se em um ponto comum, então todo conjunto de $k + 1$ retas no plano, das quais duas delas não são paralelas, encontram-se em um ponto comum. Assim, considere um conjunto de $k + 1$ retas distintas no plano. Pela hipótese indutiva, as k primeiras dessas retas encontram-se em um ponto comum p_1. Além disso, pela hipótese indutiva, as k últimas dessas retas encontram-se em um ponto comum p_2. Mostraremos que p_1 e p_2 devem ser o mesmo ponto. Se p_1 e p_2 fossem pontos diferentes, todas as retas com ambos deveriam ser a mesma reta porque dois pontos determinam uma reta. Isso contradiz nossa hipótese de que todas essas retas são distintas. Assim, p_1 e p_2 são o mesmo ponto. Concluímos que o ponto $p_1 = p_2$ para todas as $k + 1$ retas. Mostramos que $P(k + 1)$ é verdadeira, assumindo que $P(k)$ seja verdadeira, ou seja, mostramos que se assumimos que todas as retas distintas k, $k \geq 2$, encontram-se em um mesmo ponto, então todas as retas distintas $k + 1$ encontram-se em um ponto comum. Isso completa o passo de indução.

Completamos o passo base e o de indução e supostamente temos uma demonstração correta por indução matemática.

Solução: Examinando esta suposta demonstração por indução matemática, parece-nos que tudo está em ordem. Entretanto, há um erro particularmente sutil. Olhando com cuidado para o passo de indução, vemos que esse passo requer que $k \geq 3$. Não podemos mostrar que $P(2)$ implica $P(3)$. Quando $k = 2$, nosso objetivo é mostrar que três retas distintas quaisquer encontram-se em um ponto comum. As primeiras duas retas encontram-se em um ponto comum p_1, e as duas outras retas devem encontrar-se em um ponto comum p_2. Mas nesse caso, p_1 e p_2 não precisam ser o mesmo ponto, porque apenas a segunda reta é comum a ambos os conjuntos de retas. Aqui é onde o passo de indução falha. ◄

Exercícios

1. Há "infinitas" estações em uma rota de trem. Suponha que o trem pare na primeira estação e que, se ele pára em uma estação, pára também na próxima. Mostre que o trem pára em todas as estações.

2. Suponha que você saiba que um jogador de golfe acerta o primeiro buraco de uma seqüência com um número infinito de buracos, e que, se esse jogador acertar um buraco, então acertará o próximo também. Demonstre que esse jogador acerta todos os buracos da seqüência.

Use a indução matemática nos exercícios 3 a 17 para demonstrar as fórmulas de somatório.

3. Considere $P(n)$ como a proposição de que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$ para todo número inteiro positivo n.

a) Qual é a proposição $P(1)$?

b) Mostre que $P(1)$ é verdadeira, completando o passo base da demonstração.

c) Qual é a hipótese indutiva?

d) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?

e) Complete o passo de indução.

f) Explique por que esses passos mostram que esta fórmula é verdadeira sempre que n for um número inteiro positivo.

4. Considere $P(n)$ como a proposição de que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (n(n + 1)/2)^2$ para o número inteiro positivo n.

a) Qual é a proposição $P(1)$?

b) Mostre que $P(1)$ é verdadeira, completando o passo base da demonstração.
c) Qual é a hipótese indutiva?
d) O que você precisa demonstrar no passo de indução?
e) Complete o passo de indução.
f) Explique por que esses passos mostram que esta fórmula é verdadeira sempre que n for um número inteiro positivo.

5. Demonstre que $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n + 1)^2 = (n + 1)(2n + 1)(2n + 3)/3$ sempre que n for um número inteiro não negativo.

6. Demonstre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$ sempre que n for um número inteiro positivo.

7. Demonstre que $3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \cdots + 3 \cdot 5^n = 3(5^{n+1} - 1)/4$ sempre que n for um número inteiro não negativo.

8. Demonstre que $2 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 7^2 - \cdots + 2(-7)^n = (1 - (-7)^{n+1})/4$ sempre que n for um número inteiro não negativo.

9. a) Encontre uma fórmula para a soma dos primeiros n números inteiros positivos e pares.
b) Demonstre a fórmula que você conjecturou no item (a).

10. a) Encontre uma fórmula para

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

examinando os valores dessa expressão para pequenos valores de n.
b) Demonstre a fórmula que você conjecturou no item (a).

11. a) Encontre uma fórmula para

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

examinando os valores dessa expressão para pequenos valores de n.
b) Demonstre a fórmula que você conjecturou no item (a).

12. Demonstre que

$$\sum_{j=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^j = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3 \cdot 2^n}$$

sempre que n for um número inteiro não negativo.

13. Demonstre que $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}n(n + 1)/2$ sempre que n for um número inteiro positivo.

14. Demonstre que, para todo número inteiro positivo n, $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n - 1)2^{n+1} + 2$.

15. Demonstre que, para todo número inteiro positivo n, $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n + 1) = n(n + 1)(n + 2)/3$.

16. Demonstre que, para todo número inteiro positivo n,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1)(n + 2) = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)/4.$$

17. Demonstreque $\sum_{j=1}^{n} j^4 = n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)/30$ sempre que n for um número inteiro positivo.

Use a indução matemática para demonstrar as inequações nos exercícios 18 a 30.

18. Considere $P(n)$ como a proposição de que $n! < n^n$, em que n é um número inteiro maior que 1.
a) Qual é a proposição $P(2)$?
b) Mostre que $P(2)$ é verdadeira, completando o passo base da demonstração.
c) Qual é a hipótese indutiva?
d) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?
e) Complete o passo de indução.
f) Explique por que esses passos mostram que a inequação é verdadeira sempre que n for um número inteiro maior que 1.

19. Considere $P(n)$ como a proposição de que

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n},$$

em que n é um número inteiro maior que 1.
a) Qual é a proposição $P(2)$?
b) Mostre que $P(2)$ é verdadeira, completando o passo base da demonstração.
c) Qual é a hipótese indutiva?
d) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?
e) Complete o passo de indução.
f) Explique por que esses passos mostram que a inequação é verdadeira sempre que n for um número inteiro maior que 1.

20. Demonstre que $3^n < n!$ se n for um número inteiro maior que 6.

21. Demonstre que $2^n > n^2$ se n for um número inteiro maior que 4.

22. Para quais números inteiros não negativos n é $n^2 \leq n!$? Demonstre sua resposta.

23. Para quais números inteiros não negativos n é $2n + 3 \leq 2^n$? Demonstre sua resposta.

24. Demonstre que $1/(2n) \leq [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)]/(2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n)$ sempre que n for um número inteiro positivo.

***25.** Demonstre que, se $h > -1$, então $1 + nh \leq (1 + h)^n$ para todos os números inteiros não negativos n. Isso é chamado de **inequação de Bernoulli.**

***26.** Suponha que a e b sejam números reais com $0 < b < a$. Demonstre que se n for um número inteiro positivo, então $a^n - b^n \leq na^{n-1}(a - b)$.

***27.** Demonstre que para todo número inteiro positivo n,

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

28. Demonstre que $n^2 - 7n + 12$ é não negativo sempre que n for um número inteiro com $n \geq 3$.

Nos exercícios 29 e 30, H_n indica o n-ésimo número harmônico.

***29.** Demonstre que $H_{2^n} \leq 1 + n$ sempre que n for um número inteiro não negativo.

***30.** Demonstre que $H_1 + H_2 + \cdots + H_n = (n + 1)H_n - n$.

Use a indução matemática nos exercícios 31 a 37 para demonstrar os fatos de divisibilidade.

31. Demonstre que 2 divide $n^2 + n$ sempre que n for um número inteiro positivo.

32. Demonstre que 3 divide $n^3 + 2n$ sempre que n for um número inteiro positivo.

33. Demonstre que 5 divide $n^5 - n$ sempre que n for um número inteiro não negativo.

34. Demonstre que 6 divide $n^3 - n$ sempre que n for um número inteiro não negativo.

***35.** Demonstre que $n^2 - 1$ é divisível por 8 sempre que n for um número inteiro positivo e ímpar.

***36.** Demonstre que 21 divide $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ sempre que n for um número inteiro positivo.

***37.** Demonstre que, se n for um número inteiro positivo, então 133 divide $11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

Use a indução matemática nos exercícios 38 a 46 para demonstrar os resultados de conjuntos.

38. Demonstre que, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forem conjuntos, tal que $A_j \subseteq B_j$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, então

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_j.$$

39. Demonstre que, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forem conjuntos, tal que $A_j \subseteq B_j$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, então

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} B_j.$$

40. Demonstre que, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e B forem conjuntos, então

$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \cup B = (A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \cap \cdots \cap (A_n \cup B).$$

41. Demonstre que, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e B forem conjuntos, então

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B).$$

42. Demonstre que, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e B forem conjuntos, então

$$(A_1 - B) \cap (A_2 - B) \cap \cdots \cap (A_n - B) = (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) - B.$$

43. Demonstre que, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem subconjuntos de um conjunto universo U, então

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}.$$

44. Demonstre que, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e B forem conjuntos, então

$$(A_1 - B) \cup (A_2 - B) \cup \cdots \cup (A_n - B) = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) - B.$$

45. Demonstre que um conjunto com n elementos tem $n(n-1)/2$ subconjuntos com dois elementos sempre que n for um número inteiro maior que, ou igual a 2.

***46.** Demonstre que um conjunto com n elementos tem $n(n-1)(n-2)/6$ subconjuntos com três elementos sempre que n for um número inteiro maior que ou igual a 3.

Os exercícios 47 a 49 apresentam demonstrações incorretas com o uso da indução matemática. Você precisará identificar um erro de argumento em cada exercício.

47. O que está errado nesta "demonstração" de que todos os cavalos são da mesma cor?

Considere $P(n)$ como a proposição de que todos os cavalos em um conjunto de n cavalos são da mesma cor.

Passo base: Certamente, $P(1)$ é verdadeira.

Passo de Indução: Assuma que $P(k)$ seja verdadeira, assim, todos os cavalos em qualquer conjunto de k cavalos são da mesma cor. Considere quaisquer $k + 1$ cavalos; numere-os como $1, 2, 3, \ldots, k, k+1$. Agora, os primeiros k desses cavalos devem ter a mesma cor, e os últimos k cavalos devem ser também da mesma cor. Como o conjunto dos primeiros k cavalos e o conjunto dos últimos k cavalos, todos os $k + 1$ cavalos devem ser da mesma cor. Isso mostra que $P(k + 1)$ é verdadeira e termina a demonstração por indução.

48. O que está errado nesta "demonstração"?

"Teorema" Para todo número inteiro positivo n, $\sum_{i=1}^{n} i = (n + \frac{1}{2})^2/2$.

Passo base: A formula é verdadeira para $n = 1$.

Passo de indução: Suponha que $\sum_{i=1}^{n} i = (n + \frac{1}{2})^2/2$. Então, $\sum_{i=1}^{n+1} i = (\sum_{i=1}^{n} i) + (n + 1)$. Pela hipótese indutiva, $\sum_{i=1}^{n+1} i = (n + \frac{1}{2})^2/2 + n + 1 = (n^2 + n + \frac{1}{4})/2 + n + 1 = (n^2 + 3n + \frac{9}{4})/2 = (n + \frac{3}{2})^2/2 = [(n + 1) + \frac{1}{2}]^2/2$, completando o passo de indução.

49. O que está errado nesta "demonstração"?

"Teorema" Para todo número inteiro positivo n, se x e y forem números inteiros positivos com $\max(x, y) = n$, então $x = y$.

Passo base: Suponha que $n = 1$. Se $\max(x, y) = 1$ e x e y forem números inteiros positivos, temos $x = 1$ e $y = 1$.

Passo de indução: Considere k como um número inteiro positivo. Assuma que sempre que $\max(x, y) = k$ e x e y forem números inteiros positivos, então $x = y$. Agora, considere $\max(x, y) = k + 1$, em que x e y são números inteiros positivos. Então, $\max(x - 1, y - 1) = k$, assim, pela hipótese indutiva, $x - 1 = y - 1$. Temos que $x = y$, completando o passo de indução.

50. Use a indução matemática para mostrar que em um conjunto de $n + 1$ números inteiros positivos, não excedentes a $2n$, há pelo menos um número inteiro que divide outro número inteiro do conjunto.

***51.** Um cavalo em um tabuleiro de xadrez pode se mover um espaço na horizontal (em qualquer direção) e dois espaços na vertical (em qualquer direção), ou dois espaços na horizontal (em qualquer direção) e um espaço na vertical (em qualquer direção). Suponha que tenhamos um tabuleiro de xadrez infinito, feito com todos quadrados (m, n), em que m e n são números inteiros não negativos. Use a indução matemática para mostrar que um cavalo que começa em (0, 0) pode visitar todos os quadrados usando uma seqüência finita de movimentos. [*Dica:* Use a indução na variável $s = m + n$.]

52. Suponha que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

em que a e b são números reais. Mostre que

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$

para todo número inteiro positivo n.

53. (*Requer cálculo*) Use a indução matemática para demonstrar que a derivada de $f(x) = x^n$ é igual a nx^{n-1} sempre que n for um número inteiro positivo. (Para o passo de indução, use a regra do produto para derivadas.)

54. Suponha que **A** e **B** sejam matrizes quadradas com a propriedade $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Mostre que $\mathbf{AB}^n = \mathbf{B}^n\mathbf{A}$ para todo número inteiro positivo n.

55. Suponha que m seja um número inteiro positivo. Use a indução matemática para demonstrar que se a e b forem números inteiros com $a \equiv b \pmod{m}$, então $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ sempre que k for um número inteiro não negativo.

56. Use a indução matemática para mostrar que $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ é equivalente a $\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n$ sempre que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ forem proposições.

***57.** Mostre que $[(p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge \cdots \wedge (p_{n-1} \to p_n)] \to [(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_{n-1}) \to p_n]$ é uma tautologia sempre que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ forem proposições, em que $n \geq 2$.

***58.** Mostre que n retas separam o plano em $(n^2 + n + 2)/2$ regiões, considerando que nenhuma dessas duas retas são paralelas e que nenhuma dessas três retas passam por um ponto comum.

****59.** Considere $a_1, a_2, \ldots, a_n$ como números reais positivos. A **média aritmética** desses números é definida por $A = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$, e a **média geométrica** desses números é definida por $G = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$. Use a indução matemática para demonstrar que $A \geq G$.

60. Use a indução matemática para demonstrar o Lema 2 da Seção 3.6, que estabelece que se p é um número primo e $P \mid a_1 a_2 \cdots a_n$, em que a_i é um número inteiro para $i = 1, 2, 3, \cdots, n$, então $p \mid a_i$ para algum número inteiro i.

61. Mostre que se n for um número inteiro positivo, então

$$\sum_{\{a_1,\ldots,a_k\}\subseteq\{1,2,\ldots,n\}} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_k} = n.$$

(Aqui, a soma é sobre todos os subconjuntos não vazios do conjunto dos n menores números inteiros positivos.)

***62.** Use a propriedade da boa ordenação para mostrar que a seguinte forma da indução matemática é um método de demonstração válido: $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n.

Passo Base: $P(1)$ e $P(2)$ são verdadeiras.
Passo de indução: Para cada número inteiro positivo k, se $P(k)$ e $P(k+1)$ forem verdadeiras, então $P(k+2)$ é verdadeira.

63. Mostre que, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem conjuntos em que $n \geq 2$, e para todos os pares de números inteiros i e j com $1 \leq i < j \leq n$, ou A_i é um subconjunto de A_j ou A_j é um subconjunto de A_i, então existe um número inteiro i, $1 \leq i \leq n$, tal que A_i é um subconjunto de A_j para todos os números inteiros j com $1 \leq j \leq n$.

***64.** Um convidado em uma festa é uma **celebridade** se essa pessoa for conhecida por todos os outros convidados, mas não conhecer nenhum deles. Existe no máximo uma celebridade em uma festa, pois, se tiverem duas, elas deveriam conhecer uma a outra. Determinada festa não pode ter celebridades. Sua tarefa é encontrar a celebridade, se ela existir, levantando apenas um tipo de questão — perguntando aos convidados se eles conhecem um segundo convidado. Todos devem responder à questão sem mentir, ou seja, se Alice e Bob forem duas pessoas na festa, você pode perguntar a Alice se ela conhece Bob, e ela deve dizer a verdade. Use a indução matemática para mostrar que se existirem n pessoas na festa, então você pode encontrar a celebridade, se houver uma, com $3(n-1)$ perguntas. [*Dica:* Primeiro faça uma questão para eliminar uma pessoa como celebridade. Então, use a hipótese indutiva para identificar uma celebridade em potencial. Por fim, faça mais duas questões para determinar se aquela pessoa é realmente uma celebridade.]

Suponha que haja n pessoas em um grupo, cada uma ciente de um escândalo que ninguém mais no grupo sabe. Essas pessoas comunicam-se por telefone; quando duas pessoas do grupo conversam, elas compartilham informações sobre todos os escândalos que cada uma sabe. Por exemplo, na primeira chamada, duas pessoas compartilham informações, assim, no final desta chamada, cada uma dessas pessoas sabe sobre dois escândalos. O **problema da fofoca** pergunta por $G(n)$, o número mínimo de ligações telefônicas que são necessárias para que todas as n pessoas saibam sobre todos os escândalos. Os exercícios 65 a 67 trabalham com o problema da fofoca.

65. Encontre $G(1)$, $G(2)$, $G(3)$ e $G(4)$.

66. Use a indução matemática para demonstrar que $G(n) \leq 2n - 4$ para $n \geq 4$. [*Dica:* No passo de indução, coloque uma nova pessoa que liga para determinada pessoa no começo e no final.]

****67.** Demonstre que $G(n) = 2n - 4$ para $n \geq 4$.

***68.** Mostre que é possível organizar os números $1, 2, \ldots, n$ em uma linha para que a média de dois desses números nunca apareça entre eles. [*Dica:* Mostre que é suficiente demonstrar esse fato quando n é uma potência de 2. Então, use a indução matemática para demonstrar o resultado quando n for uma potência de 2.]

***69.** Mostre que se $I_1, I_2, \ldots, I_n$ for um grupo de intervalos abertos de números reais, $n \geq 2$, e cada par de intervalos tiver uma intersecção não vazia, ou seja, $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ sempre que $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$, então a intersecção de todos esses conjuntos é não vazia, ou seja, $I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n \neq \emptyset$. (Lembre-se de que um **intervalo aberto** é o conjunto dos números reais x com $a < x < b$, em que a e b são números reais com $a < b$.)

Às vezes não podemos usar a indução matemática para demonstrar um resultado que acreditamos ser verdadeiro, mas podemos usá-la para demonstrar um resultado mais forte. Como a hipótese indutiva de um resultado mais forte fornece mais do que trabalhar com ele, esse processo é chamado de **carga indutiva.** Podemos usar a carga indutiva no Exercício 70.

70. Suponha que queiramos demonstrar que

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$$

para todos os números inteiros positivos n.

a) Mostre que, se tentarmos demonstrar esta inequação usando a indução matemática, o passo base será válido, mas o de indução não.

b) Mostre que a indução matemática pode ser utilizada para demonstrar a inequação forte

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

para todos os números inteiros maiores que 1, que, junto com a verificação do caso em que $n = 1$, estabelece a inequação mais fraca que originariamente tentamos demonstrar usando a indução matemática.

71. Considere n como um número inteiro positivo par. Mostre que, quando n pessoas ficam paradas em um campo com distâncias diferentes entre elas e cada uma joga uma torta no seu vizinho mais próximo, é possível que todos sejam atingidos por uma torta.

72. Ladrilhe com triominós à direita um tabuleiro de damas 4×4 com um quadrado removido na parte superior esquerda.

73. Ladrilhe com triominós à direita um tabuleiro de damas 8×8 com um quadrado removido na parte superior esquerda.

74. Demonstre ou negue que todos os tabuleiros de damas nos tamanhos a seguir podem ser completamente preenchidos com triominós à direita sempre que n for um número inteiro positivo.

a) 3×2^n. **b)** 6×2^n.
c) $3^n \times 3^n$. **d)** $6^n \times 6^n$.

***75.** Mostre que um tabuleiro de damas $2^n \times 2^n \times 2^n$ tridimensional, em que falta um cubo $1 \times 1 \times 1$, pode ser completamente preenchido com cubos $2 \times 2 \times 2$, considerando-se que um cubo $1 \times 1 \times 1$ tenha sido removido.

***76.** Mostre que um tabuleiro de damas $n \times n$ com um quadrado removido pode ser completamente preenchido com triominós, se $n > 5$, n for ímpar e $3 \nmid n$.

77. Mostre que um tabuleiro de damas 5×5 com um quadrado do canto removido pode ser ladrilhado com triominós.

***78.** Encontre um tabuleiro de damas 5×5 com um quadrado removido que não pode ser ladrilhado com triominós. Demonstre que esse preenchimento não existe para esse tipo de tabuleiro.

☞**79.** Use o princípio da indução matemática para mostrar que $P(n)$ é verdadeira, para $n = b, b + 1, b + 2, \ldots$, em que b é um número inteiro, se $P(b)$ for verdadeira e a proposição condicional $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ for verdadeira para todos os números inteiros positivos k com $k \geq b$.

4.2 Indução Completa e Boa Ordenação

Introdução

Na Seção 4.1, introduzimos a indução matemática e mostramos como usá-la para demonstrar vários teoremas. Nesta seção, vamos introduzir outra forma de indução matemática, chamada de **indução completa**, que geralmente pode ser utilizada quando não podemos demonstrar facilmente um resultado com a indução matemática. O passo base de uma demonstração por indução completa é o mesmo de uma demonstração por indução matemática, ou seja, em uma demonstração por indução completa em que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n, o passo base mostra que $P(1)$ é verdadeira. Entretanto, os passos de indução nos dois métodos são diferentes. Em uma demonstração por indução matemática, o passo de indução mostra que se a hipótese indutiva $P(k)$ for verdadeira, então $P(k + 1)$ será também verdadeira. Em uma demonstração por indução completa, o passo de indução mostra que se $P(j)$ for verdadeira para todos os números inteiros positivos j não excedentes a k, então $P(k + 1)$ é verdadeira, ou seja, para a hipótese indutiva, assumimos que $P(j)$ seja verdadeira para $j = 1, 2, \ldots, k$.

A validade da indução matemática e da indução completa seguem da propriedade da boa ordenação, descrita no Apêndice 1. De fato, a indução matemática, a indução completa e a boa ordenação são princípios equivalentes, ou seja, a validade de cada um deles pode ser demonstrada a partir de cada um dos outros dois. Isso significa que uma demonstração que usa um desses princípios pode ser reescrita como uma demonstração que usa os outros dois princípios. Por isso, às vezes é mais fácil demonstrar um resultado usando a indução completa em vez da indução matemática; às vezes é mais fácil usar a boa ordenação em vez de usar essas duas outras formas de indução. Nesta seção daremos alguns exemplos da utilização da propriedade da boa ordenação para demonstrar teoremas.

Indução Completa

Antes de ilustrarmos como usar a indução completa, vamos estabelecer este princípio novamente.

INDUÇÃO COMPLETA Para demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n, em que $P(n)$ é uma função proposicional, completamos dois passos:

PASSO BASE: Verificamos que a proposição $P(1)$ é verdadeira.

PASSO DE INDUÇÃO: Mostramos que a proposição condicional $[P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)] \rightarrow P(k+1)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos k.

Note que quando usamos a indução completa para demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n, nossa hipótese indutiva é de que $P(j)$ seja verdadeira para $j = 1, 2, \ldots, k$, ou seja, a hipótese indutiva inclui todas as k proposições $P(1), P(2), \ldots, P(k)$. Como podemos usar todas as k proposições $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ para demonstrar $P(k+1)$, em vez de apenas usar a proposição $P(k)$, como na demonstração por indução matemática, a indução completa é uma técnica de demonstração mais flexível. Você pode ficar surpreso pelo fato de a indução matemática e a completa serem equivalentes, ou seja, cada uma pode ser mostrada como uma técnica de demonstração válida, assumindo que a outra é válida. Em particular, qualquer demonstração que use a indução matemática também pode ser considerada como uma demonstração por indução completa, porque a hipótese indutiva de uma demonstração por indução matemática é parte da hipótese indutiva em uma demonstração por indução completa. Ou seja, se podemos completar a etapa indutiva de uma demonstração usando a indução matemática ao mostrar que $P(k+1)$ segue de $P(k)$ para todo número inteiro positivo k, então temos também que $P(k+1)$ segue de todas as proposições $P(1), P(2), \ldots, P(k)$, porque assumimos que não apenas $P(k)$ é verdadeira, mas também que as $k-1$ proposições $P(1), P(2), \ldots, P(k-1)$ são verdadeiras. Entretanto, é muito mais difícil converter uma demonstração por indução completa em uma demonstração que use o princípio da indução matemática. (Veja o Exercício 42.)

A indução completa às vezes é chamada de **segundo princípio da indução matemática** ou **indução forte.** Quando a terminologia "indução completa" é utilizada, o princípio da indução matemática é chamado de **indução incompleta**, um termo técnico escolhido de modo infeliz porque não há nada de incompleto no princípio da indução matemática; além disso, ela é uma técnica de demonstração válida.

INDUÇÃO COMPLETA E A ESCADA INFINITA Para melhor entender a indução completa, considere a escada infinita da Seção 4.1. A indução completa nos diz que podemos alcançar todos os degraus se

1. pudermos atingir o primeiro degrau e
2. para todo número inteiro k, se pudermos alcançar todos os primeiros k degraus, então podemos alcançar o $(k+1)$-ésimo degrau.

Ou seja, se $P(n)$ for a proposição que afirma que podemos alcançar o n-ésimo degrau da escada, pela indução completa, sabemos que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n, pois (1) nos diz que $P(1)$ é verdadeira, completando o passo base, e (2) nos diz que $P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)$ implica $P(k+1)$, completando o passo de indução.

O Exemplo 1 ilustra como a indução completa pode nos ajudar a demonstrar um resultado que não pode ser facilmente demonstrado com o princípio da indução matemática.

EXEMPLO 1 Suponha que nós podemos alcançar o primeiro e o segundo degraus de uma escada infinita e sabemos que se pudermos alcançar um degrau, então podemos alcançar dois degraus acima. Podemos demonstrar que é possível alcançar todos os degraus usando o princípio da indução matemática? Podemos demonstrar que é possível alcançar todos os degraus usando o princípio da indução completa?

Solução: Primeiro, tentamos demonstrar esse resultado pelo princípio da indução matemática.

PASSO BASE: O passo base dessa demonstração é válido; aqui, simplesmente é verificado que nós podemos alcançar o primeiro degrau.

TENTATIVA DE PASSO DE INDUÇÃO: A hipótese indutiva é a proposição que afirma que podemos alcançar o k-ésimo degrau da escada. Para completar o passo de indução, precisamos mostrar que se assumirmos a hipótese indutiva para o número inteiro positivo k, ou seja, se assumirmos que podemos alcançar o k-ésimo degrau, então podemos mostrar que é possível alcançar o $(k + 1)$-ésimo degrau da escada. Entretanto, não existe uma forma óbvia de completar esse passo de indução, porque não sabemos a partir da informação dada se é possível alcançar o $(k + 1)$-ésimo degrau a partir do k-ésimo degrau. Além disso, sabemos apenas que se podemos alcançar um degrau, podemos alcançar também dois degraus acima.

Agora, considere uma demonstração que usa a indução completa.

PASSO BASE: O passo base é igual ao primeiro; aqui, simplesmente, é verificado que podemos alcançar o primeiro degrau.

PASSO DE INDUÇÃO: A hipótese indutiva afirma que podemos alcançar cada um dos primeiros k degraus. Para completá-la, precisamos mostrar que se assumirmos que a hipótese indutiva é verdadeira, ou seja, se pudermos alcançar cada um dos primeiros k degraus, então podemos alcançar o $(k + 1)$-ésimo degrau. Nós já sabemos que é possível alcançar o segundo degrau. Podemos completar o passo de indução notando que enquanto $k > 2$, será possível alcançar o $(k + 1)$-ésimo degrau a partir do $(k - 1)$-ésimo degrau, porque sabemos que podemos subir dois degraus a partir daquele em que nos encontramos. Isso completa o passo de indução e termina a demonstração por indução completa.

Demonstramos que se podemos alcançar os dois primeiros degraus de uma escada infinita e para todo número inteiro k, se pudermos alcançar todos os primeiros k degraus, então podemos alcançar o $(k + 1)$-ésimo degrau e, assim, alcançar todos os degraus da escada. ◀

Exemplos de Demonstrações com o Uso da Indução Completa

Agora que temos a indução matemática e a indução completa, como decidir qual método aplicar em determinada situação? Embora não haja uma resposta direta, podemos fornecer alguns pontos úteis. Na prática, você deve usar a indução matemática quando conseguir uma demonstração direta de $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ para todos os números inteiros k. Este é o caso de todas as demonstrações nos exemplos da Seção 4.1. Em geral, você deve restringir o uso do princípio da indução matemática para esses casos. A menos que veja claramente que o passo de indução de uma demonstração por indução matemática é válido, você deve tentar uma demonstração por indução completa. Ou seja, use a indução completa, e não a matemática, quando perceber como demonstrar que $P(k + 1)$ é verdadeira a partir da hipótese que afirma que $P(j)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos j, não excedentes a k, mas não perceber como demonstrar que $P(k + 1)$ é conseqüência apenas de $P(k)$. Lembre-se disso ao examinar as demonstrações desta seção. Para cada uma dessas demonstrações, pense por que a indução completa funciona melhor que a indução matemática.

Vamos ilustrar como a indução completa é emprega nos exemplos 2 a 5, nos quais demonstraremos vários resultados diferentes. Fique atento particularmente ao passo de indução em cada um desses exemplos, onde mostramos um resultado $P(k + 1)$, considerando a hipótese de que $P(j)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos j não excedentes a k, em que $P(n)$ é uma função proposicional.

Começamos com um dos usos mais importantes da indução completa, a parte do Teorema Fundamental da Aritmética que nos diz que todo número inteiro positivo pode ser escrito como o produto de números primos.

EXEMPLO 2 Mostre que se n for um número inteiro maior que 1, então n pode ser escrito como o produto de números primos.

Exemplos Extras

Solução: Considere $P(n)$ como a proposição: n pode ser escrito como o produto de números primos.

PASSO BASE: $P(2)$ é verdadeira, porque 2 pode ser escrito como o produto de um número primo, ele mesmo. [Note que $P(2)$ é o primeiro caso que precisamos estabelecer.]

PASSO DE INDUÇÃO: A hipótese indutiva estabelece que $P(j)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos j com $j \leq k$, ou seja, a hipótese de que j possa ser escrito como o produto de números primos sempre que j for um número inteiro positivo, ao menos 2 e não excedendo a k. Para completar o passo de indução, devemos mostrar que $P(k + 1)$ é verdadeira, considerando esta hipótese, ou seja, que $k + 1$ é o produto de números primos.

Há dois casos a serem considerados, quando $k + 1$ é primo e quando $k + 1$ é composto. Se $k + 1$ for primo, imediatamente vemos que $P(k + 1)$ é verdadeira. Por outro lado, $k + 1$ é composto, e pode ser escrito como o produto de dois números inteiros positivos a e b com $2 \leq a \leq b < k + 1$. Pela hipótese indutiva, a e b podem ser escritos como o produto de números primos. Assim, se $k + 1$ for composto, ele pode ser escrito como o produto de números primos, quais sejam, aqueles primos obtidos na fatoração de a e aqueles na fatoração de b. ◄

Lembre-se: Como é possível pensar em 1 como o produto *vazio* de primos, poderíamos ter começado a demonstração do Exemplo 2 com $P(1)$ como o passo base. Escolhemos não fazer isso porque muitas pessoas acham esse procedimento confuso.

O Exemplo 2 completa a demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética, que afirma que todo número inteiro não negativo pode ser escrito unicamente como o produto de números inteiros em ordem não decrescente. Mostramos na Seção 3.5 que um número inteiro tem no máximo uma fatoração em números primos. O Exemplo mostra que existe pelo menos uma fatoração para todos os inteiros.

Agora, mostraremos que a indução completa pode ser utilizada para demonstrar que um jogador tem uma estratégia para ganhar em um jogo.

EXEMPLO 3 Considere um jogo em que dois jogadores alternam-se para remover qualquer número positivo de cartas que eles pegam a partir de dois montes de cartas de baralho. O jogador que tirar a última carta, ganha o jogo. Mostre que se duas pilhas contêm o mesmo número de cartas inicialmente, o segundo jogador sempre ganha o jogo, ou tem uma estratégia para isso.

Solução: Considere n como o número de cartas em cada pilha. Vamos usar a indução completa para demonstrar $P(n)$, a proposição que afirma que o segundo jogador pode vencer quando houver inicialmente n cartas em cada monte.

PASSO BASE: Quando $n = 1$, o primeiro jogador tem apenas uma escolha, remover uma carta de um monte, deixando um monte com apenas uma carta, que o segundo jogador pode retirar para vencer o jogo.

PASSO DE INDUÇÃO: A hipótese indutiva é a proposição: $P(j)$ é verdadeira para todo j com $1 \leq j \leq k$, ou seja, a hipótese de que o segundo jogador pode vencer sempre que houver j cartas, em que $1 \leq j \leq k$ em cada um dos dois montes no início do jogo. Precisamos mostrar que $P(k + 1)$ é verdadeira, ou seja, que o segundo jogador pode vencer quando há inicialmente $k + 1$ cartas em cada monte, considerando a hipótese que $P(j)$ é verdadeira para $j = 1, 2, \ldots, k$. Então, suponha que haja $k + 1$ cartas em cada um dos dois montes no início do jogo e que o primeiro jogador retira r cartas $(1 \leq r \leq k)$ a partir de um dos montes, deixando $k + 1 - r$ cartas nesse monte. Ao remover o mesmo número de cartas do outro monte, o segundo jogador cria a situação em que há dois montes, cada um com $k + 1 - r$ cartas. Como $1 \leq k + 1 - r \leq k$, o segundo jogador sempre vence pela hipótese indutiva. Completamos a demonstração notando que se o primeiro jogador remover todas as $k + 1$ cartas de um dos montes, o segundo jogador pode vencer removendo todas as cartas restantes. ◄

Usar o princípio da indução matemática, em vez da indução completa, para demonstrar os resultados dos exemplos 2 e 3 é muito difícil. Entretanto, como mostra o Exemplo 4, alguns resultados podem ser demonstrados usando-se o princípio da indução matemática ou o da indução completa.

Antes de apresentarmos o Exemplo 4, note que podemos modificar a indução completa para lidar com várias situações. Em particular, podemos adaptá-la para lidar com casos em que o passo de indução é válido apenas para números inteiros maiores que determinado inteiro. Considere b como um número inteiro e j como outro número inteiro positivo. A forma da indução completa que precisamos nos diz que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros n com $n \geq b$ se pudermos completar as duas etapas abaixo:

PASSO BASE: Verificamos que as proposições $P(b), P(b+1), \cdots, P(b+j)$ são verdadeiras.

PASSO DE INDUÇÃO: Mostramos que $[P(\mathrm{b}) \wedge P(b+1) \wedge \cdots \wedge P(k)] \rightarrow P(k+1)$ é verdadeira para todo número inteiro positivo $k \geq b+j$.

Vamos usar essa forma alternativa de demonstração por indução completa no Exemplo 4. No Exercício 28, mostraremos que essa forma alternativa é equivalente à indução completa.

EXEMPLO 4 Demonstre que qualquer valor de postagem maior que ou igual a 12 centavos pode ser obtido usando-se apenas selos de 4 e 5 centavos.

Solução: Vamos demonstrar este resultado usando o princípio da indução matemática e depois, o da indução completa. Considere $P(n)$ como a proposição que afirma que a postagem de n centavos pode ser feita usando-se selos de 4 e 5 centavos.

Começamos usando o princípio de indução matemática.

PASSO BASE: A postagem de 12 centavos pode ser feita usando-se três selos de 4 centavos.

PASSO DE INDUÇÃO: A hipótese indutiva é a proposição que afirma que $P(k)$ é verdadeira. Ou seja, considerando-se esta hipótese, a postagem de k centavos pode ser feita usando-se selos de 4 e 5 centavos. Para completar o passo de indução, precisamos mostrar que quando assumimos que $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é também verdadeira em que $k \geq 12$, ou seja, precisamos mostrar que se pudermos fazer a postagem de k centavos, então faremos a postagem de $k+1$ centavos. Para isso, suponha que pelo menos um selo de 4 centavos foi usado para a postagem de k centavos. Então, podemos substituir este selo por um de 5 centavos para a postagem de $k+1$ centavos. Mas, se nenhum selo de 4 centavos tiver sido utilizado, podemos fazer a postagem de k centavos usando apenas selos de 5 centavos. Além disso, como $k \geq 12$, precisamos de pelo menos três selos de 5 centavos para formar a postagem de k centavos. Assim, podemos substituir os três selos de 5 centavos por quatro selos de 4 centavos para fazer a postagem de $k+1$ centavos. Isso completa a etapa indutiva.

Como nós completamos o passo base e o de indução, sabemos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 12$. Ou seja, podemos fazer postagens de n centavos, em que $n \geq 12$, usando apenas selos de 4 e 5 centavos.

Agora, usaremos a indução completa para demonstrar o mesmo resultado. Nesta demonstração, no passo base, mostraremos que $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$ e $P(15)$ são verdadeiras, ou seja, que a postagem de 12, 13, 14 ou 15 centavos pode ser feita usando apenas selos de 4 e 5 centavos. No passo de indução mostraremos como conseguir postagens de $k+1$ centavos para $k \geq 15$ a partir de postagens de $k-3$ centavos.

PASSO BASE: Podemos formar postagens de 12, 13, 14 e 15 centavos usando três selos de 4 centavos, dois selos de 4 centavos e um selo de 5 centavos, um selo de 4 centavos e dois de 5 centavos, e três selos de 5 centavos, respectivamente. Isso mostra que $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$ e $P(15)$ são verdadeiras e completa o passo base.

PASSO DE INDUÇÃO: A hipótese indutiva é a proposição: $P(j)$ é verdadeira para $12 \leq j \leq k$, em que k é um número inteiro com $k \geq 15$. Ou seja, assumimos que podemos fazer postagens de j centavos, em que $12 \leq j \leq k$. Para completar o passo de indução, precisamos mostrar que, considerando-se esta hipótese, $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, podemos fazer a postagem de $k+1$ centavos. Usando a hipótese indutiva, podemos assumir que $P(k-3)$ é verdadeira, porque $k-3 \geq 12$, ou seja, podemos fazer postagens de $k-3$ centavos usando apenas selos de 4 e 5 centavos. Para fazer a postagem de $k+1$ centavos, precisamos apenas adicionar outro selo de 4 centavos aos selos que usamos para fazer a postagem de $k-3$ centavos. Ou seja, mostramos que se a hipótese indutiva for verdadeira, então $P(k+1)$ será também verdadeira. Isso completa o passo de indução.

Como completamos o passo base e o de indução da demonstração por indução completa, sabemos, por esta indução, que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros n com $n \geq 12$. Ou seja, sabemos que toda postagem de n centavos, em que n é ao menos 12, pode ser feita com selos de 4 e 5 centavos.

(Existem outras maneiras de abordar este problema além desta aqui descrita. Você pode encontrar uma solução que não usa a indução matemática?) ◀

Usando a Indução Completa na Geometria Computacional

Nosso próximo exemplo de indução completa virá da **geometria computacional**, a parte da matemática discreta que estuda os problemas de computação que envolvem objetos geométricos. A geometria computacional é muito utilizada em gráficos, jogos de computador, robótica, cálculo científico e em muitas outras áreas. Antes de apresentarmos este assunto, vamos introduzir alguns termos, possivelmente familiares, de estudos anteriores sobre geometria.

Um **polígono** é uma figura geométrica fechada que consiste em uma seqüência de segmentos de retas $s_1, s_2, \ldots, s_n$, chamados de **lados.** Cada par de lados consecutivos, s_i e s_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, assim como o último lado s_n com o primeiro lado s_1, de um polígono encontram-se em um ponto comum, chamado de **vértice.** Um polígono é chamado de **simples** se não houver intersecção entre dois lados não consecutivos. Todo polígono simples divide o plano em duas regiões: seu **interior**, que são os pontos localizados dentro da curva, e o seu **exterior**, que são os pontos de fora da curva. Este fato é surpreendentemente complicado de ser demonstrado. É um caso especial do famoso Teorema da Curva de Jordan, que nos diz que toda curva simples divide o plano em duas regiões; veja [Or00] para mais exemplos.

Um polígono é chamado de **convexo** se todo segmento de reta que ligar dois pontos em seu interior estiver totalmente dentro do polígono. (Um polígono que não é convexo é chamado de **não convexo.**) A Figura 1 mostra alguns polígonos; (a) e (b) são convexos, mas (c) e (d) não. A **diagonal** de um polígono simples é um segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos, e uma diagonal é chamada de **diagonal interna** se ela estiver totalmente dentro do polígono, exceto pelos seus pontos extremos. Por exemplo, no polígono (d), o segmento de reta que liga a e f é uma diagonal interna, mas o segmento de reta que liga a e d é uma diagonal que não é interna.

Uma das operações mais básicas da geometria computacional envolve a divisão de um polígono simples em triângulos, adicionando-se diagonais que não se cruzam. Este processo é chamado de **triangulação.**

Note que um polígono simples pode ter muitas triangulações diferentes, como mostra a Figura 2. Talvez o fato mais básico na geometria computacional seja aquele que afirma que é possível triangular todo polígono simples, como afirma o Teorema 1. Além disso, esse teorema nos diz que toda triangulação de um polígono simples com n lados inclui $n - 2$ triângulos.

TEOREMA 1 Um polígono simples com n lados, em que n é um número inteiro com $n \geq 3$, pode ser triangulado em $n - 2$ triângulos.

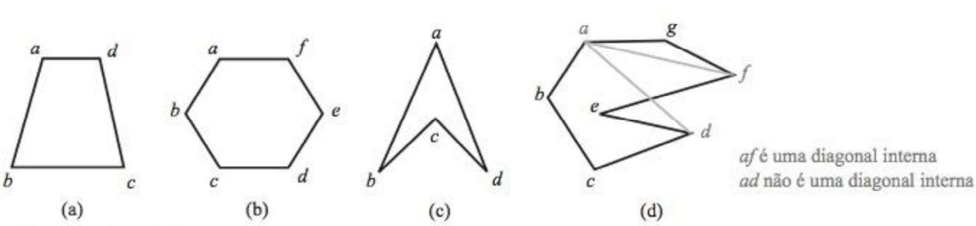
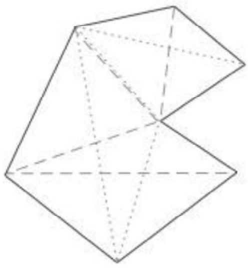


FIGURA 1 **Polígonos Convexos e Não Convexos.**



Duas triangulações diferentes de um polígono simples com sete lados em cinco triângulos, mostrados com linhas pontilhadas e tracejadas, respectivamente

FIGURA 2 Triangulações de um Polígono.

Parece óbvio que devemos ser capazes de fazer a triangulação de um polígono simples a partir de adições sucessivas de diagonais internas. Conseqüentemente, uma demonstração por indução completa parece promissora. Entretanto, essa demonstração requer este lema crucial.

LEMA 1 Todo polígono simples tem uma diagonal interna.

Embora o Lema 1 pareça ser simples, é surpreendentemente difícil de ser demonstrado. Nos últimos 30 anos, várias demonstrações incorretas que pensava-se estarem corretas, eram vistas comumente em artigos e livros. Demonstraremos o Lema 1 depois de demonstrar o Teorema 1. Não é incomum demonstrar um teorema que está pendente para depois demonstrar um lema importante.

Demonstração (do Teorema 1): Vamos demonstrar este resultado usando a indução completa. Considere $T(n)$ como a proposição que afirma que todo polígono simples com n lados pode ser triangulado em $n - 2$ triângulos.

PASSO BASE: $T(3)$ é verdadeira porque um polígono simples com três lados é um triângulo. Não precisamos adicionar nenhuma diagonal para triangular um triângulo; ele já esta triangulado em um triângulo, ele mesmo.

PASSO DE INDUÇÃO: Para a hipótese indutiva, assumimos que $T(j)$ seja verdadeira para todos os números inteiros j com $3 \leq j \leq k$. Ou seja, assumimos que podemos triangular um polígono simples com j lados em $j - 2$ triângulos sempre que $3 \leq j \leq k$. Para completar o ponto de indução, devemos mostrar que quando assumimos a hipótese indutiva, $P(k + 1)$ é verdadeira, ou seja, que todo polígono simples com $k + 1$ lados pode ser triangulado em $(k + 1) - 2 = k - 1$ triângulos.

Então, suponha que tenhamos um polígono simples P com $k + 1$ lados. Pelo Lema 1, P tem uma diagonal interna ab. Agora, ab divide P em dois polígonos simples Q, com s lados, e R, com t lados. Os lados de Q e R são os lados de P, junto com o lado ab, que é um lado tanto de Q quanto de R. Note que $3 \leq s \leq k$ e $3 \leq t \leq k$, pois Q e R têm pelo menos um lado a menos que P(uma vez que cada um desses lados é formado por P apagando pelo menos dois lados e substituindo-os pela diagonal ab). Além disso, o número de lados de P é dois a menos que a soma dos números de lados de Q e o número de lados de R, pois cada lado de P é um lado de Q ou de R, mas não de ambos, e a diagonal ab é um lado tanto de Q quanto de R, mas não de P. Ou seja, $k + 1 = s + t - 2$.

Pela hipótese indutiva, como $3 \leq s \leq k$ e $3 \leq t \leq k$, podemos triangular Q e R em $s - 2$ e $t - 2$ triângulos, respectivamente. Agora, note que essas triangulações juntas produzem uma triangulação de P. (Cada diagonal adicionada para triangular um desses polígonos menores é também uma diagonal de P.) Conseqüentemente, podemos triangular P em um total de $(s - 2) + (t - 2) = s + t - 4 = (k + 1) - 2$ triângulos. Isso completa a demonstração por indução completa, ou seja, mostramos que todo polígono simples com n lados, em que $n \geq 3$, pode ser triangulado em $n - 2$ triângulos. ◁

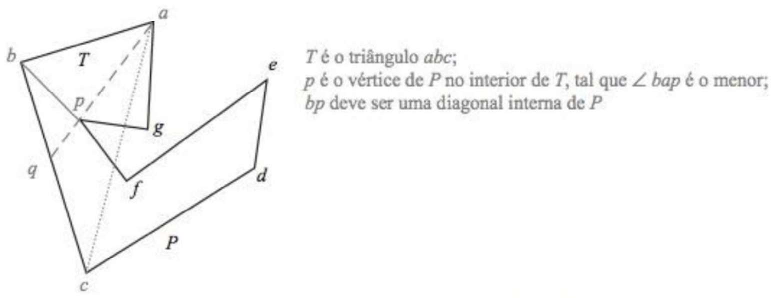


FIGURA 3 **Construindo uma Diagonal Interna de um Polígono Simples.**

Retomaremos agora nossa demonstração do Lema 1. Apresentaremos uma demonstração publicada por Chung-Wu Ho [Ho75]. Note que embora essa demonstração possa ser omitida sem perda de continuidade, mostraremos como pode ser difícil demonstrar um resultado que parece ser um pouco óbvio.

Demonstração: Suponha que P seja um polígono simples em um plano. Além disso, suponha que b seja o ponto de P ou do interior de P com a menor coordenada y entre os vértices com a menor coordenada x. Então, b deve ser um vértice de P, pois se for um ponto interno, deverá ter um vértice de P com a menor coordenada x. Dois outros vértices consecutivos a b: a e c, formam um ângulo b. Daqui temos que o ângulo no interior de P formado por ab e bc deve ser menor que 180 graus (caso contrário, deveriam haver pontos de P com coordenadas x menores que b).

Agora, considere T como o triângulo Δabc. Se não existirem vértices de P sobre ou no interior de T, podemos ligar a e c para obter uma diagonal interna. Por outro lado, se houver vértices de P no interior de T, encontraremos um vértice p de P sobre ou no interior de T, tal que bp é uma diagonal interna. (Esta é a parte genial. Ho notou que em muitas demonstrações publicadas sobre esse lema, um vértice p era encontrado, tal que bp não era necessariamente uma diagonal interna de P. Veja o Exercício 21.) A chave é selecionar um vértice p, tal que o ângulo $\angle bap$ seja o menor. Para isso, note que o raio que começa em a e passa por p atinge o segmento de reta bc em um ponto, digamos q. Temos, então, que o triângulo Δbaq não pode conter nenhum vértice de P em seu interior. Assim, podemos ligar b e p para produzir uma diagonal interna de P. A Figura 3 ilustra como localizar este vértice p. $\triangleleft$

Demonstrações com o Uso da Propriedade da Boa Ordenação

A validade dos princípios da indução matemática e da indução completa é obtida a partir de um axioma fundamental do conjunto de números inteiros, a **propriedade da boa ordenação** (veja o Apêndice 1). Ela estabelece que todo conjunto não vazio de números inteiros não negativos tem pelo menos um menor elemento. Vamos mostrar como a propriedade da boa ordenação pode ser utilizada diretamente nas demonstrações. Além disso, podemos mostrar que ela, o princípio da indução matemática e a indução completa são todos equivalentes, ou seja, dada qualquer uma dessas três técnicas de demonstração, sua validade pode ser mostrada a partir da validade das outras duas técnicas. Na Seção 4.1 mostramos que o princípio da indução matemática é dado a partir da propriedade da boa ordenação. As outras partes dessa equivalência serão deixadas para os exercícios 31, 42 e 43, no final desta seção.

A PROPRIEDADE DA BOA ORDENAÇÃO Todo conjunto não vazio de números inteiros não negativos tem pelo menos um menor elemento.

A propriedade da boa ordenação pode ser usada diretamente em demonstrações.

EXEMPLO 5 Use a propriedade da boa ordenação para demonstrar o algoritmo de divisão. Lembre-se de que o algoritmo de divisão afirma que se a for um número inteiro e d for um número inteiro positivo, então existem números inteiros q e r com $0 \leq r < d$ e $a = dq + r$.

Exemplos Extras

Solução: Considere S como o conjunto de números inteiros não negativos na forma $a - dq$, em que q é um número inteiro. Este conjunto não é vazio, pois $-dq$ pode ser tão grande quanto desejar (considerando q como um número inteiro negativo com valor absoluto alto). Pela propriedade da boa ordenação, S tem um menor elemento $r = a - dq_0$.

O número inteiro r não é negativo. É também o caso de que $r < d$. Se ele não for, então terá um elemento não negativo menor em S, ou seja, $a - d\,(q_0 + 1)$. Para isso, suponha que $r \geq d$. Como $a = dq_0 + r$, temos que $a - d\,(q_0 + 1) = (a - dq_0) - d = r - d \geq 0$. Conseqüentemente, existem números inteiros q e r com $0 \leq r < d$. A demonstração de que q e r são únicos é deixada como exercício para o leitor. ◀

EXEMPLO 6 Em um torneio Round-robin, cada jogador joga com outro jogador apenas uma vez e cada jogada tem um vencedor e um perdedor. Dizemos que os jogadores $p_1, p_2, \ldots, p_m$ formam um *ciclo* se p_1 bater p_2, p_2 bater $p_3, \ldots, p_{m-1}$ bater p_m e p_m bater p_1. Use o princípio da boa ordenação para mostrar que se houver um ciclo de extensão m ($m \geq 3$) entre os jogadores em um torneio Round-robin, deverá haver um ciclo de três desses jogadores.

Solução: Assumimos que não haja ciclos de três jogadores. Como há pelo menos um ciclo no torneio todos contra todos, o conjunto de todos os números inteiros positivos n para o qual existe um ciclo de extensão n não é vazio. Pela propriedade da boa ordenação, este conjunto de números inteiros positivos tem pelo menos um elemento k, que por hipótese deve ser maior que três. Conseqüentemente, há um ciclo de jogadores $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ e não há ciclos menores.

Como não há ciclos de três jogadores, sabemos que $k > 3$. Considere os três primeiros elementos desse ciclo, p_1, p_2 e p_3. Há duas possibilidades de jogadas entre p_1 e p_3. Se p_3 bater p_1, temos que p_1, p_2, p_3 é um ciclo de extensão três, contradizendo nossa hipótese de que não há ciclos de três jogadores. Conseqüentemente, deverá haver o caso em que p_1 bate p_3. Isso significa que podemos omitir p_2 do ciclo $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ para obter o ciclo $p_1, p_3, p_4, \ldots, p_k$ de extensão $k - 1$, contradizendo a hipótese de que o menor ciclo tem extensão k. Concluímos que deve haver um ciclo de extensão três. ◀

Exercícios

1. Use a indução completa para mostrar que se você puder correr um ou dois quilômetros, e se uma vez que tenha corrido determinado número de quilômetros, puder sempre correr dois quilômetros a mais, então você pode correr qualquer número de quilômetros.
2. Use a indução completa para mostrar que todos os dominós caem em um arranjo infinito de dominós se soubermos que os três primeiros caem e que quando um dominó cai, aquele que fica três posições a frente também cai.
3. Considere $P(n)$ como a proposição que afirma que uma postagem de n centavos pode ser feita usando-se apenas selos de 3 e 5 centavos. Os itens deste exercício formam uma demonstração por indução completa de que $P(n)$ é verdadeira para $n \geq 8$.
   a) Mostre que as proposições $P(8)$, $P(9)$ e $P(10)$ são verdadeiras, completando o passo base da demonstração.
   b) Qual é a hipótese indutiva da demonstração?
   c) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?
   d) Complete o passo de indução para $k \geq 10$.
   e) Explique por que esses passos mostram que esta proposição é verdadeira sempre que $n \geq 8$.
4. Considere $P(n)$ como a proposição que afirma que uma postagem de n centavos pode ser feita usando-se apenas selos de 4 e 7 centavos. Os itens deste exercício formam uma demonstração por indução completa de que $P(n)$ é verdadeira para $n \geq 18$.
   a) Mostre que as proposições $P(18)$, $P(19)$, $P(20)$ e $P(21)$ são verdadeiras, completando o passo base da demonstração.
   b) Qual é a hipótese indutiva da demonstração?
   c) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?
   d) Complete a etapa indutiva para $k \geq 21$.
   e) Explique por que esses passos mostram que a proposição é verdadeira sempre que $n \geq 18$.
5. **a)** Determine quais postagens podem ser feitas usando-se apenas selos de 4 e 11 centavos.
   b) Demonstre sua resposta de (a) usando o princípio da indução matemática. Certifique-se de afirmar explicitamente sua hipótese indutiva no passo de indução.
   c) Demonstre sua resposta de (a) usando a indução completa. Em que a hipótese indutiva dessa demonstração difere da demonstração usada com indução matemática?
6. **a)** Determine quais postagens podem ser feitas usando-se apenas selos de 3 e 10 centavos.

b) Demonstre sua resposta de (a) usando o princípio da indução matemática. Certifique-se de afirmar explicitamente sua hipótese indutiva no passo de indução.

c) Demonstre sua resposta de (a) usando a indução completa. Em que difere a hipótese indutiva dessa demonstração da demonstração usada com indução matemática?

7. Qual a quantia de dinheiro que pode ser reunida usando apenas notas de \$ 2 e \$ 5? Demonstre sua resposta usando a indução completa.

8. Suponha que uma loja ofereça vales-presente nos valores de \$ 25 e \$ 40. Determine quais valores você pode juntar usando estes vales-presente. Demonstre sua resposta usando a indução completa.

***9.** Use a indução completa para demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional. [*Dica:* Considere $P(n)$ como a proposição de que $\sqrt{2} \neq n/b$ para qualquer número inteiro positivo b.]

10. Assuma que uma barra de chocolate tenha n quadrados organizados em formato retangular. A barra, com um pedaço retangular a menos que a barra original, pode ser quebrada na horizontal ou na vertical separando-se os quadrados. Admitindo que apenas um pedaço pode ser quebrado de cada vez, quantas vezes você deve quebrar a barra sucessivamente em n quadrados separados? Use a indução completa para demonstrar sua resposta.

11. Considere esta variação do jogo de Nim. O jogo começa com n jogadas. Dois jogadores podem remover as cartas uma, duas ou três de cada vez. O jogador que remover a última carta, perde. Use a indução completa para mostrar que se cada jogador jogar com a melhor estratégia possível, o primeiro vence, se $n = 4j$, $4j + 2$ ou $4j + 3$ para qualquer número inteiro não negativo j, e o segundo jogador vence no outro caso possível, quando $n = 4j + 1$ para qualquer número inteiro não negativo j.

12. Use a indução completa para mostrar que todo número inteiro positivo n pode ser escrito como uma soma de potências distintas de dois, ou seja, como uma soma de um subconjunto de números inteiros $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, e assim por diante. [*Dica:* Para o passo de indução, considere separadamente o caso em que $k + 1$ é par e em que ele é ímpar. Quando for par, note que $(k + 1)/2$ é um número inteiro.]

***13.** Um quebra-cabeça é montado por junções sucessivas de peças que se organizam em blocos. Um movimento é feito cada vez que uma peça é adicionada a um bloco, ou quando dois blocos são agrupados. Use a indução completa para demonstrar que não importa como os movimentos são realizados, são necessários $n - 1$ movimentos para montar um quebra-cabeça com n peças.

14. Suponha que você comece com uma pilha de n pedras e divida-a em n pilhas com uma pedra cada, separando, sucessivamente, uma pilha de pedras em duas menores. Cada vez que você faz a divisão, multiplica o número de pedras em cada uma das pilhas menores formadas; para que elas tenham r e s pedras, respectivamente, você computa rs. Mostre que não importa como você separa as pilhas, a soma dos produtos computados em cada etapa é igual a $n(n - 1)/2$.

15. Prove que o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora para o jogo Chomp, introduzido no Exemplo 12 da Seção 1.7, se o quadro inicial for quadrado. [*Dica:* Use a indução completa para mostrar que esta estratégia funciona. Para o primeiro movimento, o primeiro jogador mastiga todos os biscoitos, exceto aqueles da esquerda e da margem superior. Nos movimentos subseqüentes, depois que o segundo jogador mastigar os biscoitos do topo ou da extrema esquerda, o primeiro jogador mastiga os biscoitos nas mesmas posições relativas da esquerda ou da margem superior, respectivamente.]

***16.** Demonstre que o primeiro jogador tem uma estratégia para ganhar o jogo Chomp, introduzido no Exemplo 12 da Seção 1.7, se o quadro inicial tiver dois quadrados de largura, ou seja, um quadro de $2 \times n$. [*Dica:* Use a indução completa. O primeiro movimento do primeiro jogador deve ser mastigar o biscoito na linha inferior da extremidade direita.]

17. Use a indução completa para mostrar que se um polígono simples com pelo menos quatro lados for triangulado, então pelo menos dois desses triângulos da triangulação têm dois lados que delimitam o exterior do polígono.

***18.** Use a indução completa para mostrar que quando um polígono convexo P com vértices consecutivos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ é triangulado em $n - 2$ triângulos, os $n - 2$ triângulos podem ser numerados em $1, 2, \ldots, n - 2$ para que v_i seja um vértice do triângulo i, para $i = 1, 2, \ldots, n - 2$.

***19.** O **teorema de Pick** diz que a área de um polígono simples P no plano com vértices que são todos pontos reticulados (isto é, com coordenadas inteiras) é igual a $I(P) + B(P)/2 - 1$, em que $I(P)$ e $B(P)$ são os números de pontos reticulados no interior de P e na borda de P, respectivamente. Use a indução completa sobre o número de vértices de P para demonstrar o teorema de Pick. [*Dica:* Para o passo base, primeiro demonstre o teorema para retângulos, depois para triângulos retos e finalmente para todos os triângulos, notando que a área de um triângulo é a área de um retângulo que contém a área de no máximo três triângulos subtraída. Para o passo de indução, utilize o Lema 1.]

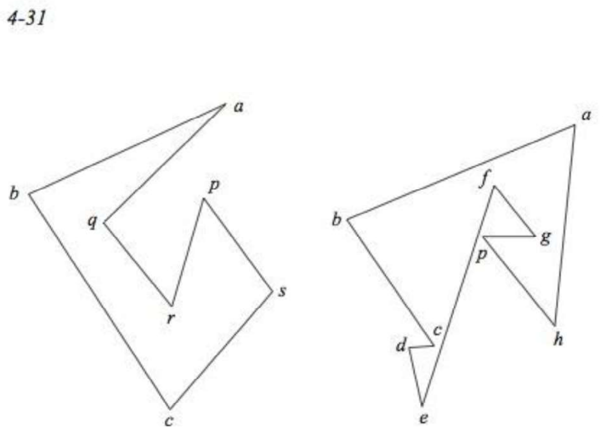
****20.** Suponha que P seja um polígono simples com vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ listados como vértices consecutivos que estão ligados por um lado, e v_1 e v_n estão ligados por outro lado. Um vértice v_i é chamado de **orelha** se o segmento de reta que liga dois vértices adjacentes a v_i for uma diagonal interna do polígono simples. Duas orelhas v_i e v_j são chamadas de **não sobrepostas** se os interiores dos triângulos com vértices v_i e seus dois vértices adjacentes e v_j e seus dois vértices adjacentes não se cruzarem. Demonstre que todo polígono simples com pelo menos quatro vértices tem pelo menos duas orelhas não sobrepostas.

21. Na demonstração do Lema 1, mencionamos que muitos métodos incorretos para encontrar um vértice p, tal que o segmento de reta bp seja uma diagonal interna de P, têm sido publicados. Este exercício apresenta algumas maneiras incorretas p que foram escolhidas nessas demonstrações. Mostre, considerando um dos polígonos desenhados aqui, que para cada uma dessas escolhas de p, o segmento de reta bp não é necessariamente uma diagonal interna de P.

a) p é o vértice de P, tal que o ângulo $\angle abp$ é o menor.

b) p é o vértice de P com a menor coordenada x (diferente de b).

c) p é o vértice de P mais próximo de b.



Os exercícios 22 e 23 apresentam exemplos que mostram como a carga indutiva pode ser utilizada para demonstrar resultados em geometria computacional.

***22.** Considere $P(n)$ como a proposição que afirma que quando as diagonais que não se cruzam são desenhadas em um polígono convexo com n lados, pelo menos dois vértices do polígono não são pontos finais de qualquer uma dessas diagonais.

a) Mostre que quando tentamos demonstrar $P(n)$ para todos os números inteiros n com $n \geq 3$ usando a indução completa, o passo de indução não se sustenta.

b) Mostre que podemos demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros n com $n \geq 3$, demonstrando pela indução completa a asserção forte $Q(n)$, para $n \geq 4$, em que $Q(n)$ afirma que sempre que diagonais que não se cruzam são desenhadas dentro de um polígono convexo com n lados, pelo menos dois vértices *não adjacentes* não são pontos finais de qualquer uma dessas diagonais.

23. Considere $E(n)$ como a proposição que afirma que em uma triangulação de um polígono simples de n lados, pelo menos um dos triângulos da triangulação tem dois lados que delimitam o exterior do polígono.

a) Explique onde uma demonstração que usa a indução completa de que $E(n)$ seja verdadeira para todos os números inteiros $n \geq 4$ é executada com dificuldade.

b) Mostre que podemos demonstrar que $E(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros $n \geq 4$, demonstrando, pela indução completa, que a proposição forte $T(n)$ para todos os números inteiros $n \geq 4$, que afirma que em toda triangulação de um polígono simples, pelo menos dois triângulos da triangulação têm dois lados que delimitam o exterior do polígono.

***24.** Uma tarefa estável, definida no preâmbulo do Exercício 58 da Seção 3.1, é chamada de **ideal para os pretendentes** se não houver tarefas estáveis nas quais um pretendente é colocado em frente de uma pretendente de sua preferência na tarefa estável. Use a indução completa para mostrar que o algoritmo de aceitação produz uma tarefa estável que é ideal para os pretendentes.

25. Suponha que $P(n)$ seja uma função proposicional. Determine se para cada número inteiro positivo n, a proposição $P(n)$ deve ser verdadeira, e justifique sua resposta, se

a) $p(1)$ for verdadeira; para todos os números inteiros positivos n, se $P(n)$ for verdadeira, então $P(n+2)$ é verdadeira.

b) $P(1)$ e $P(2)$ forem verdadeiros; para todos os números inteiros positivos n, se $P(n)$ e $P(n+1)$ forem verdadeiras, então $P(n+2)$ é verdadeira.

c) $P(1)$ for verdadeira; para todos os números inteiros positivos n, se $P(n)$ for verdadeira, então $P(2n)$ é verdadeira.

d $P(1)$ for verdadeira; para todos os números inteiros positivos n, se $P(n)$ for verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira.

26. Suponha que $P(n)$ seja uma função proposicional. Determine se para todo número inteiro não negativo n, a proposição $P(n)$ deve ser verdadeira se

a) $P(0)$ for verdadeira; para todos os números inteiros não negativos n, se $P(n)$ for verdadeira, então $P(n+2)$ é verdadeira.

b) $P(0)$ for verdadeira; para todos os números inteiros não negativos n, se $P(n)$ for verdadeira, então $P(n+3)$ é verdadeira.

c) $P(0)$ e $P(1)$ forem verdadeiras; para todos os números inteiros não negativos n, se $P(n)$ e $P(n+1)$ forem verdadeiras, então $P(n+2)$ é verdadeira.

d) $P(0)$ for verdadeira; para todos os números inteiros não negativos n, se $P(n)$ for verdadeira, então $P(n+2)$ e $P(n+3)$ são verdadeiras.

27. Mostre que, se a proposição $P(n)$ for verdadeira para infinitos números inteiros positivos n e $P(n+1) \rightarrow P(n)$ for verdadeira para todos os números inteiros positivos n, então $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n.

28. Considere b como um número inteiro dado e j como um número inteiro positivo dado. Mostre que, se $P(b), P(b+1), \ldots, P(b+j)$ forem verdadeiras e $[P(b) \wedge P(b+1) \wedge \cdots \wedge P(k)] \rightarrow P(k+1)$ for verdadeira para todo número inteiro positivo $k \geq b+j$, então $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros n com $n \geq b$.

29. O que há de errado com esta "demonstração" por indução completa?

"Teorema" Para todo número inteiro não negativo n, $5n = 0$.
Passo Base: $5 \cdot 0 = 0$.
Passo de Indução: Suponha que $5j = 0$ para todos os números inteiros não negativos j com $0 \leq j \leq k$. Escreva $k+1 = i+j$, em que i e j são números naturais menores que $k+1$. Pela hipótese indutiva, $5(k+1) = 5(i+j) = 5i + 5j = 0 + 0 = 0$.

***30.** Encontre a falha na seguinte "demonstração" de que $a^n = 1$ para todos os números inteiros não negativos n, sempre que a for um número real diferente de zero.
Passo Base: $a^0 = 1$ é verdadeira pela definição de a^0.
Passo de Indução: Assuma que $a^j = 1$ para todos os números inteiros não negativos j com $j \leq k$. Então, note que

$$a^{k+1} = \frac{a^k \cdot a^k}{a^{k-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

***31.** Mostre que a indução completa é um método de demonstração válido, indicando que ela se sustenta a partir da propriedade da boa ordenação.

32. Encontre a falha na seguinte "demonstração" de que toda postagem de três centavos ou mais pode ser feita usando-se apenas selos de três e quatro centavos.

Passo Base: Podemos fazer postagens de três centavos com apenas um selo de três centavos, e podemos fazer postagens de quatro centavos usando apenas um selo de quatro centavos.

Passo de Indução: Assuma que podemos fazer postagens de j centavos para todos os números inteiros não negativos j com $j \leq k$ usando apenas selos de três e quatro centavos. Então, podemos fazer postagens de $k+1$ centavos substituindo um selo de três centavos por um selo de quatro centavos ou substituindo dois selos de quatro centavos por três selos de três centavos.

33. Mostre que podemos demonstrar que $P(n, k)$ é verdadeira para todos os pares de números inteiros positivos n e k, se mostrarmos que

a) $P(1, 1)$ é verdadeira e $P(n, k) \rightarrow [P(n+1, k) \wedge P(n, k+1)]$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n e k.

b) $P(1, k)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos k, e $P(n, k) \rightarrow P(n+1, k)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n e k.

c) $P(n, 1)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n, e $P(n, k) \rightarrow P(n, k+1)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n e k.

34. Demonstre que $\sum_{j=1}^{n} j(j+1)(j+2)\cdots(j+k-1) = n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)/(k+1)$ para todos os números inteiros positivos k e n. [*Dica*: Use a técnica utilizada no Exercício 33.]

***35.** Mostre que, se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forem n números reais distintos, exatamente $n - 1$ multiplicações são utilizadas para computar os produtos desses n números, não importando quantos parênteses são inseridos em seus produtos. [*Dica:* Use a indução completa e considere a última multiplicação.]

***36.** A propriedade de boa ordenação pode ser utilizada para mostrar que há um único máximo divisor comum de dois números inteiros positivos. Considere a e b como números inteiros positivos, e considere S como o conjunto dos números inteiros positivos na forma $as + bt$, em que s e t são números inteiros.

a) Mostre que S não é vazio.

b) Use a propriedade da boa ordenação para mostrar que S tem um menor elemento c.

c) Mostre que se d for um divisor comum de a e b, então d é um divisor de c.

d) Mostre que $c \mid a$ e $c \mid b$. [*Dica:* Primeiro, assuma que $c \nmid a$. Então, $a = qc + r$, em que $0 < r < c$. Mostre que $r \in S$, contradizendo a escolha por c.]

e) Conclua a partir dos itens (c) e (d) que o máximo divisor comum de a e b existe. Termine a demonstração mostrando que este máximo divisor comum é único.

37. Considere a como um número inteiro e d como um número inteiro positivo. Mostre que os inteiros q e r com $a = dq + r$ e $0 \leq r < d$, que foram mostrados como existentes no Exemplo 5, são únicos.

38. Use a indução matemática para mostrar que um tabuleiro de damas retangular com um número par de células e dois quadrados faltando, um branco e um preto, pode ser preenchido por dominós.

****39.** Você pode usar a propriedade da boa ordenação para demonstrar a proposição: "Todo número inteiro positivo pode ser descrito usando não mais que quinze palavras em inglês"? Assuma que as palavras venham de determinado dicionário de língua inglesa. [*Dica:* Suponha que existam números inteiros positivos que não podem ser descritos usando não mais que quinze palavras em inglês. Pela boa ordenação, *o menor número inteiro positivo que não pode ser descrito usando não mais que quinze palavras em inglês* deveria então existir.]

40. Use a propriedade da boa ordenação para mostrar que se x e y forem números reais com $x < y$, então existe um número racional r com $x < r < y$. [*Dica:* Use a propriedade de Arquimedes, dada no Apêndice 1, para encontrar um número inteiro positivo A com $A > 1/(y - x)$. Então, mostre que existe um número racional r com denominador A entre x e y, procurando os números $\lfloor x \rfloor + j/A$, em que j é um número inteiro positivo.]

***41.** Mostre que a propriedade da boa ordenação pode ser demonstrada quando o princípio da indução matemática for tido como axioma.

***42.** Mostre que o princípio da indução matemática e a indução completa são equivalentes, ou seja, cada um pode ser mostrado como válido a partir do outro.

***43.** Mostre que podemos demonstrar a propriedade da boa ordenação quando tomamos o princípio da indução matemática ou o da indução completa como um axioma em vez de tomar a propriedade da boa ordenação como um axioma.

4.3 Definições Recursivas e Indução Estrutural

Introdução

Às vezes é difícil definir um objeto explicitamente. Entretanto, pode ser fácil defini-lo em termos dele próprio. Esse processo é chamado de **recursão.** Por exemplo, a ilustração mostrada na Figura 1 é produzida recursivamente. Primeiro, é dada uma ilustração. Então, é realizado um processo de sobreposições de sucessivas centralizações de fotos menores sobre a ilustração anterior.

Podemos usar a recursão para definir seqüências, funções e conjuntos. Nas discussões anteriores, especificamos os termos de uma seqüência que usa uma fórmula explícita. Por exemplo, a seqüência de potências de 2 é dada por $a_n = 2^n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Entretanto, esta seqüência pode também ser definida dando-se o primeiro termo da seqüência, ou seja, $a_0 = 1$ e uma regra para encontrar um termo a partir do anterior, ou seja, $a_{n+1} = 2a_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Quando definimos uma seqüência *recursivamente*, especificando como os seus termos são

algoritmo recursivo: o algoritmo que funciona reduzindo um problema ao mesmo problema, só que com entradas menores.

merge sort: o algoritmo de ordenação que organiza uma lista separando-a em duas, ordenando cada uma das duas listas resultantes e unindo os resultados em uma lista ordenada.

iteração: o procedimento que se baseia no uso da repetição das operações em um laço.

exatidão de programas: a verificação de que um procedimento sempre produz um resultado correto.

laço invariável: a propriedade que permanece verdadeira durante cada passagem por comandos de um laço.

asserção inicial: a proposição que especifica as propriedades dos valores de entrada de um programa.

asserção final: a proposição que especifica as propriedades que os valores de saída devem ter se o programa funcionar corretamente.

Questões de Revisão

1. a) Você pode usar o princípio da indução matemática a fim de encontrar uma fórmula para a soma dos primeiros n termos de uma seqüência?

b) Você pode usar o princípio da indução matemática a fim de determinar se uma fórmula dada para a soma dos primeiros n termos de uma seqüência está correta?

c) Encontre uma fórmula para a soma dos primeiros n números inteiros positivos e pares e demonstre-a usando a indução matemática.

2. a) Para quais números inteiros positivos n é $11n + 17 \leq 2^n$?

b) Demonstre a conjectura que você formulou no item (a) usando a indução matemática.

3. a) Quais valores de postagem podem ser formados usando-se apenas selos de 5 e 9 centavos?

b) Demonstre a conjectura que você formulou usando a indução matemática.

c) Demonstre a conjectura que você formulou usando a indução completa.

d) Encontre uma demonstração para a sua conjectura que seja diferente daquelas que você construiu nos itens (b) e (c).

4. Dê dois exemplos diferentes de demonstrações que usem a indução completa.

5. a) Estabeleça a propriedade da boa ordenação para o conjunto dos números inteiros positivos.

b) Use essa propriedade para mostrar que todo número inteiro positivo pode ser escrito como o produto de números primos.

6. a) Explique por que uma função é bem definida se ela for definida recursivamente, especificando $f(1)$ e uma regra para encontrar $f(n)$ a partir de $f(n-1)$.

b) Forneça uma definição recursiva da função $f(n) = (n+1)!$.

7. a) Dê uma definição recursiva dos números de Fibonacci.

b) Mostre que $f_n > \alpha^{n-2}$ sempre que $n \geq 3$, em que f_n é o n-ésimo termo da seqüência de Fibonacci e $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$.

8. a) Explique por que uma seqüência a_n é bem definida se ela for definida recursivamente especificando a_1 e a_2 e uma regra para encontrar a_n a partir de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ para $n = 3, 4, 5, \ldots$.

b) Encontre o valor de a_n se $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1$, para $n = 3, 4, 5, \ldots$.

9. Dê dois exemplos de como as fórmulas bem formadas são definidas recursivamente para diferentes conjuntos de elementos e operadores.

10. a) Dê uma definição recursiva da extensão de uma cadeia.

b) Use a definição recursiva do item (a) e a indução estrutural para demonstrar que $l(xy) = l(x) + l(y)$.

11. a) O que é um algoritmo recursivo?

b) Descreva um algoritmo recursivo para a computação da soma dos n números em uma seqüência.

12. Descreva um algoritmo recursivo para a computação do máximo divisor comum de dois números inteiros positivos.

13. a) Descreva o algoritmo merge sort.

b) Use o algoritmo merge sort para colocar a lista 4, 10, 1, 5, 3, 8, 7, 2, 6, 9 em ordem crescente.

c) Dê uma estimativa O grande para o número de comparações usadas pela merge sort.

14. a) Testar um programa de computação para ver se ele produz uma saída correta para determinados valores de entrada verifica que o programa sempre produz as saídas corretas?

b) Mostrar que um programa de computação é parcialmente correto em relação à asserção inicial e à final verifica que ele sempre produz as saídas corretas? Se não, o que mais é necessário?

15. Quais técnicas você pode usar para mostrar que um programa de computação longo é parcialmente correto em relação à asserção inicial e à final?

16. O que é um laço invariável? Como ele é usado?

Exercícios Complementares

1. Use a indução matemática para mostrar que $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$ sempre que n for um número inteiro positivo.

2. Use a indução matemática para mostrar que $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n+1)^3 + (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$ sempre que n for um número inteiro positivo.

3. Use a indução matemática para mostrar que $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1$ sempre que n for um número inteiro positivo.

4. Use a indução matemática para mostrar que

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

sempre que n for um número inteiro positivo.

5. Mostre que

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

sempre que n for um número inteiro positivo.

6. Use a indução matemática para demonstrar que $2^n > n^2 + n$ sempre que n for um número inteiro maior que 4.

7. Use a indução matemática para mostrar que $2^n > n^3$ sempre que n for um número inteiro maior que 9.

8. Encontre um número inteiro N, tal que $2^n > n^4$ sempre que n for maior que N. Demonstre que seu resultado está correto usando a indução matemática.

9. Use a indução matemática para demonstrar que $a - b$ é um fator de $a^n - b^n$ sempre que n for um número inteiro positivo.

10. Use a indução matemática para demonstrar que 9 divide $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ sempre que n for um número inteiro não negativo.

11. Use a indução matemática para demonstrar esta fórmula para a soma dos termos de uma progressão aritmética.

$$a + (a+d) + \cdots + (a+nd) = (n+1)(2a+nd)/2$$

12. Suponha que $a_j \equiv b_j \pmod{m}$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Use a indução matemática para demonstrar que

a) $\sum_{j=1}^{n} a_j \equiv \sum_{j=1}^{n} b_j \pmod{m}$.

b) $\prod_{j=1}^{n} a_j \equiv \prod_{j=1}^{n} b_j \pmod{m}$.

13. Mostre que se n for um número inteiro positivo, então

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+4}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}.$$

14. Para quais números inteiros positivos n é $n + 6 < (n^2 - 8n)/16$? Demonstre sua resposta usando a indução matemática.

15. (*Requer cálculo*) Suponha que $f(x) = e^x$ e $g(x) = xe^x$. Use a indução matemática juntamente com a regra do produto e o fato de que $f'(x) = e^x$ para demonstrar que $g^{(n)}(x) = (x+n)e^x$ sempre que n for um número inteiro positivo.

16. (*Requer cálculo*) Suponha que $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{cx}$, em que c é uma constante. Use a indução matemática juntamente com a regra da cadeia e o fato de que $f'(x) = e^x$ para demonstrar que $g^{(n)} = c^n e^{cx}$ sempre que n for um número inteiro positivo.

***17.** Determine quais números de Fibonacci são pares e use uma forma da indução matemática para demonstrar sua conjectura.

***18.** Determine quais números de Fibonacci são divisíveis por 3. Use uma forma da indução matemática para demonstrar sua conjectura.

***19.** Demonstre que $f_k f_n + f_{k+1} f_{n+1} = f_{n+k+1}$ para todos os números inteiros não negativos n, em que k é um número inteiro não negativo e f_i indica o i-ésimo número de Fibonacci.

A seqüência dos **números de Lucas** é definida por $l_0 = 2$, $l_1 = 1$ e $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$.

20. Mostre que $f_n + f_{n+2} = l_{n+1}$ sempre que n for um número inteiro positivo, em que f_i e l_i são o i-ésimo número de Fibonacci e o i-ésimo número de Lucas, respectivamente.

21. Mostre que $l_0^2 + l_1^2 + \ldots + l_n^2 = l_n l_{n+1} + 2$ sempre que n for um número inteiro não negativo e l_i for o i-ésimo número de Lucas.

***22.** Use a indução matemática para mostrar que o produto de quaisquer n números inteiros positivos consecutivos é divisível por $n!$. [*Dica:* Use a identidade $m(m+1) \cdots (m+n-1)/n! = (m-1)m(m+1) \cdots (m+n-2)/n! + m(m+1) \cdots (m+n-2)/(n-1)!$.]

23. Use a indução matemática para mostrar que $(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i \operatorname{sen} nx$ sempre que n for um número inteiro positivo. (Aqui, i é a raiz quadrada de -1.) [*Dica:* Use a identidade $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ e $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$.]

***24.** Use a indução matemática para mostrar que $\sum_{j=1}^{n} \cos jx = \cos[(n+1)x/2] \operatorname{sen}(nx/2)/\operatorname{sen}(x/2)$ sempre que n for um número inteiro positivo e $\operatorname{sen}(x/2) \neq 0$.

25. Use a indução matemática para demonstrar que $\sum_{j=1}^{n} j^2 2^j = n^2 2^{n+1} - n 2^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} - 6$ para todo número inteiro positivo n.

26. (*Requer cálculo*) Suponha que a seqüência $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ é definida recursivamente por $x_1 = 0$ e $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$.

a) Use a indução matemática para mostrar que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$, ou seja, a seqüência $\{x_n\}$ é monotonicamente crescente.

b) Use a indução matemática para demonstrar que $x_n < 3$ para $n = 1, 2, \ldots$.

c) Mostre que $\lim_{n \to \infty} x_n = 3$.

27. Mostre que se n for um número inteiro positivo com $n \geq 2$, então

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2 - 1} = \frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}.$$

28. Use a indução matemática para demonstrar o Teorema 1 da Seção 3.6, ou seja, mostre que se b for um número inteiro positivo, $b > 1$, e n for um número inteiro positivo, então n pode ser expresso unicamente na forma $n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0$.

***29.** Um **ponto reticulado** no plano é um ponto (x, y) em que x e y são números inteiros. Use a indução matemática para mostrar que pelo menos $n + 1$ linhas retas são necessárias para garantir que todo ponto reticulado (x, y) com $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq n$ pertencem a essas linhas retas.

30. (*Requer cálculo*) Use a indução matemática e a regra do produto para mostrar que se n for um número inteiro positivo e $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ forem funções diferenciáveis, então

$$\frac{(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x))'}{f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}.$$

31. (*Requer matéria da Seção 3.7*) Suponha que $\mathbf{B} = \mathbf{MAM}^{-1}$, em que $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são matrizes $n \times n$ e $\mathbf{M}$ é inversível. Mostre que $\mathbf{B}^k = \mathbf{MA}^k\mathbf{M}^{-1}$ para todos os números inteiros positivos k.

32. Use a indução matemática para mostrar que se você desenhar linhas no plano, precisará apenas de duas cores para colorir as regiões formadas, para que duas regiões que têm uma fronteira comum não apresentem a mesma cor.

33. Mostre que $n!$ pode ser representado como a soma de n de seus divisores positivos distintos, sempre que $n \geq 3$. [*Dica:* Use a carga indutiva. Primeiro tente demonstrar este resultado usando a indução matemática. Examinando onde sua demonstração falhou, encontre uma proposição forte que você pode demonstrar facilmente usando a indução matemática.]

***34.** Use a indução matemática para demonstrar que se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forem números reais positivos com $n \geq 2$, então

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \geq \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right)\cdots\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_n}\right)\left(x_n + \frac{1}{x_1}\right)$$

35. Use a indução matemática para demonstrar que se n pessoas estiverem paradas em uma fila, em que n é um número inteiro positivo, e se a primeira pessoa da fila for uma mulher e a última for um homem, então em algum lugar da fila há uma mulher diretamente na frente de um homem.

***36.** Suponha que para cada par de cidades em um país, há uma estrada direta conectando-as em uma direção ou na outra. Use a indução matemática para mostrar que há uma cidade que pode ser alcançada a partir de qualquer outra cidade ou diretamente ou através de outra cidade.

37. Use a indução matemática para mostrar que quando n círculos dividem o plano em regiões, essas regiões podem ser coloridas com duas cores diferentes, tal que nenhuma região com margens comuns sejam coloridas com a mesma cor.

***38.** Suponha que em um grupo de carros em uma pista circular exista combustível suficiente para um carro completar a volta. Use a indução matemática para mostrar que há um carro no grupo que pode completar uma volta obtendo o combustível dos carros enquanto ele atravessa a pista.

39. Mostre que se n for um número inteiro positivo, então

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1)\left(\sum_{k=j}^{n} 1/k\right) = n(n+1)/2.$$

40. Uma **unidade** ou **fração egípcia** é uma fração na forma $1/n$, em que n é um número inteiro positivo. Neste exercício, usaremos a indução completa para mostrar que um algoritmo "voraz" pode ser usado para expressar qualquer número racional p/q com $0 < p/q < 1$ como a soma de unidades de frações distintas. Em cada passo do algoritmo, encontramos o menor número inteiro positivo n, tal que $1/n$ possa ser adicionado à soma sem exceder p/q. Por exemplo, para expressar $5/7$, primeiro começamos somando com $1/2$. Como $5/7 - 1/2 = 3/14$, adicionamos $1/5$ à soma porque 5 é o menor número inteiro positivo k, tal que $1/k < 3/14$. Como $3/14 - 1/5 = 1/70$, o algoritmo termina, mostrando que $5/7 = 1/2 + 1/5 + 1/70$. Considere $T(p)$ como a proposição que afirma que este algoritmo termina para todos os números racionais p/q com $0 < p/q < 1$. Vamos demonstrar que o algoritmo sempre termina mostrando que $T(p)$ é válida para todos os números inteiros positivos p.

a) Mostre que o passo base $T(1)$ é válido.

b) Suponha que se $T(k)$ é válida para os números inteiros positivos k com $k < p$, ou seja, assuma que o algoritmo termina para todos os números racionais k/r, em que $1 \leq k < p$. Mostre que se começarmos com p/q e a fração $1/n$ for selecionada no primeiro passo do algoritmo, então $p/q = p'/q' + 1/n$, em que $p' = np - q$ e $q' = nq$. Depois de considerar o caso em que $p/q = 1/n$, use a hipótese indutiva para mostrar que o algoritmo voraz termina quando começar com p'/q' e complete o passo de indução.

A **função 91 de McCarthy** (definida por John McCarthy, um dos fundadores da inteligência artificial) é definida usando-se a regra

$$M(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{se } n > 100 \\ M(M(n+11)) & \text{se } n \leq 100 \end{cases}$$

para todos os números inteiros positivos n.

41. Usando sucessivamente a regra definida por $M(n)$, encontre

a) $M(102)$. **b)** $M(101)$. **c)** $M(99)$.
d) $M(97)$. **e)** $M(87)$. **f)** $M(76)$.

****42.** Mostre que a função $M(n)$ é uma função bem definida a partir do conjunto dos números inteiros positivos para o conjunto dos números inteiros positivos. [*Dica:* Demonstre que $M(n) = 91$ para todos os números inteiros positivos n com $n \leq 101$.]

43. A demonstração a seguir para

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n},$$

sempre que n for um número inteiro positivo é correta? Justifique sua resposta.

Passo base: O resultado é verdadeiro quando $n = 1$ porque

$$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1}.$$

Passo de indução: Assuma que o resultado seja verdadeiro para n. Então,

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}.$$

Assim, o resultado é verdadeiro para $n+1$ se for verdadeiro para n. Isso completa a demonstração.

CAPÍTULO 4

Seção 4.1

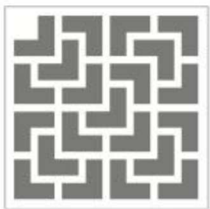
1. Seja $P(n)$ a afirmação de que o trem pára na estação n. *Passo base:* Nos foi dito que $P(1)$ é verdadeira. *Passo de indução:* Nos foi dito que $P(n)$ implica $P(n+1)$ para cada $n \geq 1$. Portanto, pelo princípio da indução matemática, $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n. **3. a)** $1^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3/6$ **b)** Ambos os lados de $P(1)$ mostrados na parte (a) são iguais a 1. **c)** $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = k(k+1)(2k+1)/6$ **d)** Para cada $k \geq 1$, que $P(k)$ implica $P(k+1)$; em outras palavras, que, supondo a hipótese de indução [veja a parte (c)], podemos mostrar que $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = (k+1)(k+2)(2k+3)/6$ **e)** $(1^2 + 2^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2 = [k(k+1)(2k+1)/6] + (k+1)^2 = [(k+1)/6][k(2k+1) + 6(k+1)] = [(k+1)/6](2k^2 + 7k + 6) = [(k+1)/6](k+2)(2k+3) = (k+1)(k+2)(2k+3)/6$ **f)** Completamos ambos, o passo base e o passo de indução, de modo que, pelo princípio da indução matemática, a afirmação é verdadeira para todo inteiro positivo n. **5.** Seja $P(n)$ a afirmação "$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2 = (n+1)(2n+1)(2n+3)/3$." *Passo base:* $P(0)$ é verdadeira porque $1^2 = 1 = (0+1)(2 \cdot 0 + 1)(2 \cdot 0 + 3)/3$. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então $1^2 + 3^2 + \cdots + (2k+1)^2 + [2(k+1)+1]^2 = (k+1)(2k+1)(2k+3)/3 + (2k+3)^2 = (2k+3)[(k+1)(2k+1)/3 + (2k+3)] = (2k+3)(2k^2 + 9k + 10)/3 = (2k+3)(2k+5)(k+2)/3 = [(k+1)+1][2(k+1)+1][2(k+1)+3]/3$. **7.** Seja $P(n)$ a afirmação "$\sum_{j=0}^{n} 3 \cdot 5^j = 3(5^{n+1} - 1)/4$". *Passo base:* $P(0)$ é verdadeira porque $\sum_{j=0}^{0} 3 \cdot 5^j = 3 = 3(5^1 - 1)/4$. *Passo de indução:* Suponha que $\sum_{j=0}^{k} 3 \cdot 5^j = 3(5^{k+1} - 1)/4$. Então $\sum_{j=0}^{k+1} 3 \cdot 5^j = (\sum_{j=0}^{k} 3 \cdot 5^j) + 3 \cdot 5^{k+1} = 3(5^{k+1} - 1)/4 + 3 \cdot 5^{k+1} = 3(5^{k+1} + 4 \cdot 5^{k+1} - 1)/4 = 3(5^{k+2} - 1)/4$. **9. a)** $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$ **b)** *Passo base:* $2 = 1 \cdot (1+1)$ é verdadeira. *Passo de indução:* Suponha que $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k+1)$. Então $(2 + 4 + 6 + \cdots + 2k) + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$. **11. a)** $\sum_{j=1}^{n} 1/2^j = (2^n - 1)/2^n$ **b)** *Passo base:* $P(1)$ é verdadeira porque $\frac{1}{2} = (2^1 - 1)/2^1$. *Passo de indução:* Suponha que $\sum_{j=1}^{k} 1/2^j = (2^k - 1)/2^k$. Então $\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j} = (\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j}) + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 2 + 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$. **13.** Seja $P(n)$ a afirmação "$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} n(n+1)/2$". *Passo base:* $P(1)$ é verdadeira porque $1^2 = 1 = (-1)^0 1^2$. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{k-1} k^2 + (-1)^k (k+1)^2 = (-1)^{k-1} k(k+1)/2 + (-1)^k (k+1)^2 = (-1)^k (k+1)[-k/2 + (k+1)] = (-1)^k (k+1)[(k/2) + 1] = (-1)^k (k+1)(k+2)/2$. **15.** Seja $P(n)$ a afirmação "$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$." *Passo base:* $P(1)$ é verdadeira porque $1 \cdot 2 = 2 = 1(1+1)(1+2)/3$. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = [k(k+1)(k+2)/3] + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)[(k/3) + 1] = (k+1)(k+2)(k+3)/3$. **17.** Seja $P(n)$ a afirmação $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)/30$. $P(1)$ é verdadeira porque $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5/30 = 1$. Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então $(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + k^4) + (k+1)^4 = k(k+1)(2k+1)(3k^2 + 3k - 1)/30 + (k+1)^4 = [(k+1)/30][k(2k+1)(3k^2 + 3k - 1) + 30(k+1)^3] = [(k+1)/30](6k^4 + 39k^3 + 91k^2 + 89k + 30) = [(k+1)/30](k+2)(2k+3)[3(k+1)^2 + 3(k+1) - 1]$. Isto mostra que $P(k+1)$ é verdadeira. **19. a)** $1 + \frac{1}{4} < 2 - \frac{1}{2}$ **b)** É verdadeira porque $5/4$ é menor que $6/4$. **c)** $1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$ **d)** Para cada $k \geq 2$, que $P(k)$ implica $P(k+1)$; em outras palavras, queremos mostrar que, supondo a hipótese de indução [veja a parte (c)], podemos mostrar que $1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$ **e)** $1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} = 2 - \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2}\right] = 2 - \left[\frac{k^2 + 2k + 1 - k}{k(k+1)^2}\right] = 2 - \frac{k^2 + k}{k(k+1)^2} - \frac{1}{k(k+1)^2} = 2 - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$
f) Completamos ambos, o passo base e o passo de indução, de modo que, pelo princípio da indução matemática, a afirmação é verdadeira para todo inteiro n maior que 1. **21.** Seja $P(n)$ a afirmação "$2^n > n^2$". *Passo base:* $P(5)$ é verdadeira porque $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira, ou seja, $2^k > k^2$. Então $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > k^2 + k^2 > k^2 + 4k \geq k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ porque $k > 4$. **23.** Por inspeção, encontramos que a desigualdade $2n + 3 \leq 2^n$ não é válida para $n = 0, 1, 2, 3$. Seja $P(n)$ a proposição de que esta desigualdade vale para o inteiro positivo n. $P(4)$, o caso base, é verdadeira porque $2 \cdot 4 + 3 = 11 \leq 16 = 2^4$. Para o passo de indução, suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então, pela hipótese de indução, $2(k+1) + 3 = (2k+3) + 2 < 2^k + 2$. Mas como $k \geq 1$, $2^k + 2 \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}$. Isto mostra que $P(k+1)$ é verdadeira. **25.** Seja $P(n)$ a afirmação "$1 + nh \leq (1+h)^n$, $h > -1$". *Passo base:* $P(0)$ é verdadeira porque $1 + 0 \cdot h = 1 \leq 1 = (1+h)^0$. *Passo de indução:* Suponha que $1 + kh \leq (1+h)^k$. Então, como $(1+h) > 0$, $(1+h)^{k+1} = (1+h)(1+h)^k \geq (1+h)(1+kh) = 1 + (k+1)h + kh^2 \geq 1 + (k+1)h$. **27.** Seja $P(n)$ a afirmação "$1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \cdots + 1/\sqrt{n} > 2(\sqrt{n+1} - 1$". *Passo base:* $P(1)$ é verdadeira porque $1 > 2(\sqrt{2} - 1)$. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então $1 + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{k} + 1/\sqrt{k+1} > 2(\sqrt{k+1} - 1) + 1/\sqrt{k+1}$. Se mostrarmos que $2(\sqrt{k+1} - 1) + 1/\sqrt{k+1} > 2(\sqrt{k+2} - 1)$, segue que $P(k+1)$ é verdadeira. Esta desigualdade é equivalente a $2(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) < 1/\sqrt{k+1}$, que é equivalente a $2(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}) < \sqrt{k+1}/\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}/\sqrt{k+1}$. Isto é equivalente a $2 < 1 + \sqrt{k+2}/\sqrt{k+1}$, que é claramente verdadeira. **29.** Seja $P(n)$ a afirmação "$H_{2^n} \leq 1 + n$". *Passo base:* $P(0)$ é verdadeira porque $H_{2^0} = H_1 = 1 \leq 1 + 0$. *Passo de indução:* Suponha que $H_{2^k} \leq 1 + k$. Então $H_{2^{k+1}} = H_{2^k} + \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{j} \leq 1 + k + 2^k \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) < 1 + k + 1 = 1 + (k + 1$. **31.** *Passo base:* $1^2 + 1 = 2$ é divisível por 2. *Passo de indução:* Suponha a hipótese de indução, de que $k^2 + k$ é divisível por 2. Então $(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = (k^2 + k) + 2(k+1)$, a soma de um múltiplo de 2 (pela hipótese de indução) e um múltiplo de 2 (por definição), logo, divisível por 2. **33.** Seja $P(n)$ a afirmação "*$n^5 - n$ é divisível por 5*". *Passo base:* $P(0)$ é verdadeira porque $0^5 - 0 = 0$ é divisível por 5. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira, isto é, $k^5 - 5$ é divisível por 5. Então $(k$

$+ 1)^5 - (k+1) = (k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) - (k + 1) = (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$ também é divisível por 5, porque ambos os termos nesta soma são divisíveis por 5. **35.** Seja $P(n)$ a proposição de que $(2n-1)^2 - 1$ é divisível por 8. O caso base $P(1)$ é verdadeiro porque $8 \mid 0$. Agora, suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Como $[(2(k+1) - 1]^2 - 1 = [(2k-1)^2 - 1] + 8k$, $P(k+1)$ é verdadeira porque ambos os termos no lado direito são divisíveis por 8. Isto mostra que $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n, de modo que $m^2 - 1$é divisível por 8 sempre que m for um inteiro positivo ímpar. **37.** *Passo base:* $11^{1+1} + 12^{2\cdot 1-1} = 121 + 12 = 133$. *Passo de indução:* Suponha válida a hipótese de indução, de que $11^{n+1} + 12^{2n-1}$é divisível por 133. Então, $11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1} = 11 \cdot 11^{n+1} + (11 + 133) \cdot 12^{2n-1} = 11(11^{n+1} + 12^{n-1}) + 133 \cdot 12^{2n-1}$. A expressão entre parênteses é divisível por 133 pela hipótese de indução, e, obviamente, o segundo termo é divisível por 133, de modo que a quantidade toda é divisível por 133, como desejado. **39.** *Passo base:* $A_1 \subseteq B_1$ implica tautologicamente que $\bigcap_{j=1}^{1} A_j \subseteq \bigcap_{j=1}^{1} B_j$. *Passo de indução:* Suponha válida a hipótese de indução de que, se $A_j \subseteq B_j$ for $j = 1, 2, ..., k$, então $\bigcap_{j=1}^{k} A_j \subseteq \bigcap_{j=1}^{k} B_j$. Queremos mostrar que, se $A_j \subseteq B_j$ para $j = 1, 2, ..., k+1$, então $\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j \subseteq \bigcap_{j=1}^{k+1} B_j$. Seja x um elemento arbitrário de $\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j = \left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right) \cap A_{k+1}$. Como $x \in \bigcap_{j=1}^{k} A_j$, sabemos pela hipótese de indução que $x \in \bigcap_{j=1}^{k} B_j$; como $x \in A_{k+1}$, sabemos do fato dado que $A_{k+1} \subseteq B_{k+1}$ que $x \in B_{k+1}$. Portanto, $x \in \left(\bigcap_{j=1}^{k} B_j\right) \bigcap B_{k+1} = \bigcap_{j=1}^{k+1} B_j$. **41.** Seja $P(n)$ a afirmação "$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$". *Passo base:* $P(1)$ é trivialmente verdadeira. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então, $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}) \cap B = [(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cup A_{k+1}] \cap B = [(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cap B] \cup (A_{k+1} \cap B) = [(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_k \cap B)] \cup (A_{k+1} \cap B) = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_k \cap B) \cup (A_{k+1} \cap B)$. **43.** Seja $P(n)$ a afirmação "$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$". *Passo base:* $P(1)$ é trivialmente verdadeira. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então, $\overline{\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j} = \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \cup A_{k+1}} = \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right)} \cap \overline{A_{k+1}} = \left(\bigcap_{j=1}^{k} \overline{A_j}\right) \cap \overline{A_{k+1}} = \bigcap_{j=1}^{k+1} \overline{A_j}$. **45.** Seja $P(n)$ a afirmação de que um conjunto com n elementos tem $n(n-1)/2$ subconjuntos de dois elementos. $P(2)$, o caso base, é verdadeira, porque um conjunto com dois elementos tem um subconjunto com dois elementos — ou seja, ele próprio — e $2(2-1)/2 = 1$. Agora, suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Seja S um conjunto com $k+1$ elementos. Escolha um elemento a em S e seja $T = S - \{a\}$. Um subconjunto de dois elementos de S ou contém a ou não. Aqueles subconjuntos que não contêm a são os subconjuntos de T com dois elementos; pela hipótese de indução, existem $k(k-1)/2$ destes. Existem k subconjuntos de S com dois elementos que contêm a, porque tal subconjunto contém a e um dos k elementos em T. Logo, existem $k(k-1)/2 + k = (k+1)k/2$ subconjuntos de dois elementos de S. Isto completa a demonstração por indução. **47.** Os dois conjuntos não se superpõem se $n + 1 = 2$. De fato, a afirmação condicional $P(1) \to P(2)$ é falsa. **49.** O erro está em aplicar a hipótese de indução para olhar o $\max(x-1, y-1)$, porque, embora x e y sejam inteiros positivos, $x - 1$ e $y - 1$ não precisam ser (um ou ambos poderiam ser 0). **51.** Usamos a notação (i, j) para indicar o quadrado na linha i e coluna j e indução em $i + j$ para mostrar que todo quadrado pode ser atingido por um cavalo. *Passo base:* Existem seis casos base, para os casos nos quais $i + j \leq 2$. O cavalo já está em $(0, 0)$ no começo, de modo que a seqüência vazia de movimentos atinge o quadrado. Para atingir $(1, 0)$, o cavalo se move $(0, 0) \to (2, 1) \to (0, 2) \to (1, 0)$. Analogamente, para atingir $(0, 1)$, o cavalo se move $(0, 0) \to (1, 2) \to (2, 0) \to (0, 1)$. Observe que o cavalo já atingiu $(2, 0)$ e $(0, 2)$ no processo. Para o último passo base, existe $(0, 0) \to (1, 2) \to (2, 0) \to (0, 1) \to (2, 2) \to (0, 3) \to (1, 1)$. *Passo de indução:* Suponha válida a hipótese de indução, de que o cavalo pode atingir qualquer quadrado (i, j) para o qual $i + j = k$, em que k é um inteiro maior que 1. Devemos mostrar que o cavalo pode atingir cada quadrado (i, j) quando $i + j = k + 1$. Como $k + 1 \geq 3$, pelo menos um entre i e j é pelo menos 2. Se $i \geq 2$, então, pela hipótese de indução, existe uma seqüência de movimentos que termina em $(i - 2, j + 1)$, porque $i - 2 + j + 1 = i + j - 1 = k$; de lá, é apenas um passo até (i, j); analogamente, se $j \geq 2$. **53.** *Passo base:* Os casos base $n = 0$ e $n = 1$ são verdadeiros porque a derivada de x^0 é 0 e a derivada de $x^1 = x$ é 1. *Passo de indução:* Usar a regra do produto, a hipótese de indução e o passo base mostra que $\frac{d}{dx}x^{k+1} = \frac{d}{dx}(x \cdot x^k) = x \cdot \frac{d}{dx}x^k + x^k \frac{d}{dx}x = x \cdot kx^{k-1} + x^k \cdot 1 = kx^k + x^k = (k+1)x^k$. **55.** *Passo base:* Para $k = 0$, $1 \equiv 1 \pmod{m}$. *Passo de indução:* Suponha que $a \equiv b \pmod{m}$ e $a^k \equiv b^k \pmod{m}$; devemos mostrar que $a^{k+1} \equiv b^{k+1} \pmod{m}$. Pelo Teorema 5 da Seção 3.4, $a \cdot a^k \equiv b \cdot b^k \pmod{m}$, o que, por definição, diz que $a^{k+1} \equiv b^{k+1} \pmod{m}$. **57.** Seja $P(n)$ a afirmação "$[(p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge \cdots \wedge (p_{n-1} \to p_n)] \to [(p_1 \wedge \cdots \wedge p_{n-1}) \to p_n]$". *Passo base:* $P(2)$ é verdadeira porque $(p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_2)$ é uma tautologia. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Para mostrar que $[(p_1 \to p_2) \wedge \cdots \wedge (p_{k-1} \to p_k) \wedge (p_k \to p_{k+1})] \to [(p_1 \wedge \cdots \wedge p_{k-1} \wedge p_k) \to p_{k+1}]$ é uma tautologia, suponha que a hipótese desta afirmação condicional seja verdadeira. Como ambas as hipóteses e $P(k)$ são verdadeiras, segue que $(p_1 \wedge \cdots \wedge p_{k-1}) \to p_k$ é verdadeira. Como isto é verdade, e como $p_k \to p_{k+1}$ é verdadeira (é parte da hipótese), segue por silogismo hipotético que $(p_1 \wedge \cdots \wedge p_{k-1}) \to p_{k+1}$ é verdadeira. A afirmação mais fraca $(p_1 \wedge \cdots \wedge p_{k-1} \wedge p_k) \to p_{k+1}$ segue disto. **59.** Demonstraremos primeiro o resultado quando n for uma potência de 2, isto é, se $n = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Seja $P(k)$ a afirmação $A \geq G$, em que A e G são as médias aritmética e geométrica, respectivamente, de um conjunto de $n = 2^k$ números reais positivos. *Passo base:* $k = 1$ e $n = 2^1 = 2$. Observe que $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$. A expansão disto mostra que $a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \geq 0$, ou seja, $(a_1 + a_2)/2 \geq (a_1 a_2)^{1/2}$. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira, com $n = 2^k$. Mostraremos que $P(k+1)$ é verdadeira. Temos $2^{k+1} = 2n$. Agora, $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n})/(2n) = [(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n + (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n})/n]/2$ e, analogamente, $(a_1 a_2 \cdots a_{2n})^{1/(2n)} = [(a_1 \cdots a_n)^{1/n} (a_{n+1} \cdots a_{2n})^{1/n}]^{1/2}$. Para simplificar a notação, indique por $A(x, y, \ldots)$ e $G(x, y, ...)$ a média aritmética e geométrica de $x, y, \ldots$, respectivamente. Além disso, se

$x \le x'$, $y \le y'$, e assim por diante, então $A(x, y, \ldots) \le A(x', y', \ldots)$ e $G(x, y, \ldots) \le G(x', y', \ldots)$. Logo, $A(a_1, \ldots, a_{2n}) = A(A(a_1, \ldots, a_n), A(a_{n+1}, \ldots, a_{2n})) \ge A(G(a_1, \ldots, a_n), G(a_{n+1}, \ldots, a_{2n})) \ge G(G(a_1, \ldots, a_n), G(a_{n+1}, \ldots, a_{2n})) = G(a_1, \ldots, a_{2n})$. Isto termina a demonstração para potências de 2. Agora, se n não for uma potência de 2, seja m a próxima potência de 2 mais alta, e sejam $a_{n+1}, \ldots, a_m$ todos iguais a $A(a_1, \ldots, a_n) = \overline{a}$. Então temos $[(a_1 a_2 \cdots a_n)\overline{a}^{m-n}]^{1/m} \le A(a_1, \ldots, a_m)$, pois m é uma potência de 2. Como $A(a_1, \ldots, a_m) = \overline{a}$, segue que $(a_1 \cdots a_n)^{1/m}\overline{a}^{1-n/m} \le \overline{a}^{n/m}$. Elevando ambos os lados à potência (m/n), obtemos $G(a_1, \ldots, a_n) \le A(a_1, \ldots, a_n)$. **61.** *Passo base:* Para $n = 1$, o lado esquerdo é simplesmente $\frac{1}{1}$, que é 1. Para $n = 2$, existem três subconjuntos não vazios $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{1, 2\}$, de modo que o lado esquerdo é $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 2} = 2$. *Passo de indução:* Suponha que a afirmação seja verdadeira para k. O conjunto dos primeiros $k + 1$ inteiros positivos tem muitos subconjuntos não vazios, mas eles caem em três categorias: um subconjunto não vazio dos primeiros k inteiros positivos junto com $k + 1$, um subconjunto não vazio dos primeiros k inteiros positivos, ou simplesmente $\{k + 1\}$. Pela hipótese de indução, a soma da primeira categoria é k. Para a segunda categoria, podemos cancelar um fator $1/(k + 1)$ de cada termo da soma e o que resta é simplesmente k pela hipótese de indução, de modo que esta parte da soma é $k/(k + 1)$. Finalmente, a terceira categoria fornece simplesmente $1/(k + 1)$. Logo, a somatória toda é $k + k/(k + 1) + 1/(k + 1) = k + 1$. **63.** *Passo base:* Se $A_1 \subseteq A_2$, então A_1 satisfaz a condição de ser subconjunto de cada conjunto na coleção; caso contrário, $A_2 \subseteq A_1$, de modo que A_2 satisfaz a condição. *Passo de indução:* Suponha válida a hipótese de indução, de que a afirmação condicional é verdadeira para conjuntos k, e que nos foram dados $k + 1$ conjuntos que satisfaçam a condição dada. Pela hipótese de indução, deve haver um conjunto A_i para algum $i \le k$ tal que $A_i \subseteq A_j$ para $1 \le j \le k$. Se $A_i \subseteq A_{k+1}$, então teremos acabado. Caso contrário, sabemos que $A_{k+1} \subseteq A_i$, e isto nos diz que A_{k+1} satisfaz a condição de ser um subconjunto de A_j para $1 \le j \le k + 1$. **65.** $G(1) = 0$, $G(2) = 1$, $G(3) = 3$, $G(4) = 4$. **67.** Para mostrar que $2n - 4$ chamadas são suficientes para colocar as fofocas em dia, escolha pessoas 1, 2, 3 e 4 para ser o comitê central. Toda pessoa fora do comitê central chama uma pessoa do comitê central. Neste ponto, os membros do comitê central *como um grupo* sabem todos os escândalos. Eles então trocam informações entre eles fazendo as chamadas 1-2, 3-4, 1-3 e 2-4, nesta ordem. Neste ponto, *todo* membro do comitê central sabe todos os escândalos. Finalmente, todo mundo fora do comitê central chama uma pessoa do comitê central, em cujo ponto todas as pessoas sabem todos os escândalos. [O número total de chamadas é $(n - 4) + 4 + (n - 4) = 2n - 4$.] Que isto não pode ser feito com menos de $2n - 4$ chamadas é muito mais difícil de demonstrar; veja o website http://www.cs.cornell.edu/vogels/Epidemics/gossips-telephones.pdf para detalhes.

69. Demonstramos isto por indução matemática. O passo base ($n = 2$) é verdadeiro tautologicamente. Para $n = 3$, suponha que os intervalos sejam (a, b), (c, d) e (e, f), onde sem perda de generalidade podemos supor que $a \le c \le e$. Como $(a, b) \cap (e, f) \ne \emptyset$, devemos ter $e < b$; por um argumento parecido, $e < d$. Segue que o número no meio do caminho entre e e o menor entre b e d é comum a todos os três intervalos. Agora, para o passo de indução, suponha que, sempre que tivermos k intervalos que têm interseções duas a duas não vazias, então existe um ponto comum a todos os intervalos, e suponha que nos foram dados intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_{k+1}$ que têm interseções duas a duas não vazias. Para cada i de 1 a k, seja $J_i = I_i \cap I_{k+1}$. Afirmamos que a coleção $J_1, J_2, \ldots, J_k$ satisfaz a hipótese de indução, ou seja, que $J_{i_1} \cap J_{i_2} \ne \emptyset$ para cada escolha de índices i_1 e i_2. Isto segue do caso $n = 3$ demonstrado acima, usando os conjuntos I_{i_1}, I_{i_2} e I_{k+1}. Podemos agora usar a hipótese de indução para concluir que existe um número comum a todos os conjuntos J_i para $i = 1, 2, \ldots, k$, que obrigatoriamente está na interseção de todos os conjuntos I_i para $i = 1, 2, \ldots, k + 1$. **71.** Emparelhe as pessoas. Faça as pessoas ficarem a pequenas distâncias diferentes de seus parceiros, mas bem longe de todas as outras pessoas. Então cada pessoa joga uma torta em seu parceiro, de modo que todo mundo é atingido.

73.



75. Seja $P(n)$ a afirmação de que todo tabuleiro $2^n \times 2^n \times 2^n$ com um cubo $1 \times 1 \times 1$ removido pode ser preenchido pelos tijolos que são cubos $2 \times 2 \times 2$ cada um com um cubo $1 \times 1 \times 1$ removido. O passo base, $P(1)$, é válido porque um tijolo coincide com o sólido a ser recoberto. Agora, suponha que $P(k)$ seja válida. Agora, considere um cubo $2^{k+1} \times 2^{k+1} \times 2^{k+1}$ com um cubo $1 \times 1 \times 1$ removido. Divida este objeto em oito pedaços usando planos paralelos às suas faces e passando pelo centro. O pedaço $1 \times 1 \times 1$ que falta ocorre em uma destas oito partes. Agora, posicione cada tijolo com seu centro no centro do objeto maior, de modo que o cubo $1 \times 1 \times 1$ que falta fique no octante no qual o objeto maior tem um cubo $1 \times 1 \times 1$ faltando. Isto cria oito cubos $2^k \times 2^k \times 2^k$, em cada um faltando um cubo $1 \times 1 \times 1$. Pela hipótese de indução, podemos preencher cada um destes oito objetos com tijolos. Juntando estes recobrimentos, obtemos o preenchimento desejado.

77.

79. Seja $Q(n)$ a afirmação $P(n + b - 1)$. A afirmação de que $P(n)$ é verdadeira para $n = b, b + 1, b + 2, \ldots$ é o mesmo que a afirmação de que $Q(m)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos m. Nos foi dado que $P(b)$ é verdadeira [isto é, que $Q(1)$ é verdadeira], e que $P(k) \to P(k + 1)$ para todos $k \ge b$

[isto é, que $Q(m) \to Q(m+1)$ para todos os inteiros positivos m]. Portanto, pelo princípio da indução matemática, $Q(m)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos m.

Seção 4.2

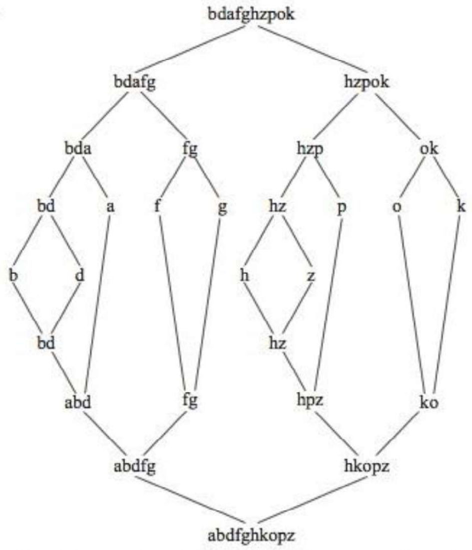
1. *Passo base:* Nos foi dito que podemos correr um quilômetro, de modo que $P(1)$ é verdadeira. *Passo de indução:* Suponha válida a hipótese de indução, de que podemos correr qualquer número de quilômetros entre 1 e k. Devemos mostrar que podemos correr $k + 1$ quilômetros. Se $k = 1$, então já nos foi dito que podemos correr dois quilômetros. Se $k > 1$, então a hipótese de indução nos diz que podemos correr $k - 1$ quilômetros, de modo que podemos correr $(k - 1) + 2 = k + 1$ quilômetros. **3.** **a)** $P(8)$ é verdadeira, porque podemos formar 8 centavos em selos com um selo de 3 centavos e um selo de 5 centavos. $P(9)$ é verdadeira, porque podemos formar 9 centavos em selos com três selos de 3 centavos. $P(10)$ é verdadeira, porque podemos formar 10 centavos em selos com dois selos de 5 centavos. **b)** A afirmação de que, usando apenas selos de 3 centavos e de 5 centavos, podemos formar j centavos em selos para todos j com $8 \leq j \leq k$, em que supomos que $k \geq 10$. **c)** Supondo válida a hipótese de indução, podemos formar $k + 1$ centavos em selos usando apenas selos de 3 centavos e de 5 centavos. **d)** Como $k \geq 10$, sabemos que $P(k - 2)$ é verdadeira, ou seja, que podemos formar $k - 2$ centavos em selos. Ponha mais um selo de 3 centavos no envelope, e teremos formado $k + 1$ centavos em selos. **e)** Completamos tanto o passo base quanto o passo de indução, de modo que, pelo princípio de indução completa, a afirmação é verdadeira para todo inteiro n maior que ou igual a 8. **5.** a) 4, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28 e todos os valores maiores que ou iguais a 30. **b)** Seja $P(n)$ a afirmação de que podemos formar n centavos em selos usando apenas selos de 4 centavos e de 11 centavos. Queremos demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 30$. Para o passo base, $30 = 11 + 11 + 4 + 4$. Suponha que possamos formar k centavos em selos (a hipótese de indução); mostraremos como formar $k + 1$ centavos em selos. Se os k centavos incluírem um selo de 11 centavos, então substitua-o por três selos de 4 centavos. Caso contrário, os k centavos foram formados usando apenas selos de 4 centavos. Como $k \geq 30$, devem existir pelo menos oito selos de 4 centavos envolvidos. Substitua oito selos de 4 centavos por três selos de 11 centavos e teremos formado $k + 1$ centavos em selos. **c)** $P(n)$ é o mesmo que na parte (b). Para demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 30$, verificamos o passo base de que, $30 = 11 + 11 + 4 + 4$, $31 = 11 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$, $32 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$ e $33 = 11 + 11 + 11$. Pelo passo de indução, suponha válida a hipótese de indução, de que $P(j)$ seja verdadeira para todo j com $30 \leq j \leq k$, em que k é um inteiro arbitrário maior que ou igual a 33. Queremos mostrar que $P(k + 1)$ é verdadeira. Como $k - 3 \geq 30$, sabemos que $P(k - 3)$ é verdadeira, ou seja, podemos formar $k - 3$ centavos em selos. Ponha mais um selo de 4 centavos no envelope e teremos formado $k + 1$ centavos em selos. Nesta demonstração, nossa hipótese de indução era de que $P(j)$ era verdadeira para todos os valores de j entre 30 e k, inclusive, em vez de apenas $P(30)$ ser verdadeira. **7.** Podemos formar todas as quantias, exceto \$ 1 e \$ 3. Seja $P(n)$ a afirmação de que podemos formar n dólares usando apenas notas de 2 e de 5 dólares. Queremos demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 5$. (É claro que \$ 1 e \$ 3 não podem ser formados e que \$ 2 e \$ 4 podem) Para o passo base, observe que $5 = 5$ e que $6 = 2 + 2 + 2$. Suponha válida a hipótese de indução, de que $P(j)$ seja verdadeira para todo j com $5 \leq j \leq k$, em que k é um inteiro arbitrário maior que ou igual a 6. Queremos mostrar que $P(k + 1)$ é verdadeira. Como $k - 1 \geq 5$, sabemos que $P(k - 1)$ é verdadeira, ou seja, que podemos formar $k - 1$ dólares. Adicione mais uma outra nota de 2 dólares e teremos formado $k + 1$ dólares. **9.** Seja $P(n)$ a afirmação de que não existe nenhum inteiro positivo b, tal que $\sqrt{2} = n/b$. *Passo base:* $P(1)$ é verdadeira porque $\sqrt{2} > 1 \geq 1/b$ para todo inteiro positivo b. *Passo de indução:* Suponha que $P(j)$ seja verdadeira para todo $j \leq k$, em que k é um inteiro positivo arbitrário; demonstramos que $P(k + 1)$ é verdadeira por contradição. Suponha que $\sqrt{2} = (k+1)/b$ para algum inteiro positivo b. Então $2b^2 = (k + 1)^2$, de modo que $(k + 1)^2$ é par, e, portanto, $k + 1$ é par. Assim, escreva $k + 1 = 2t$ para algum inteiro positivo t, de modo que $2b^2 = 4t^2$ e $b^2 = 2t^2$. Pelo mesmo raciocínio que antes, b é par, de modo que $b = 2s$ para algum inteiro positivo s. Então, $\sqrt{2} = (k+1)/b = (2t)/(2s) = t/s$. Mas $t \leq k$, de modo que isto contradiz a hipótese de indução, e nossa demonstração do passo de indução está completa. **11.** *Passo base:* Existem quatro casos base. Se $n = 1 = 4 \cdot 0 + 1$, então, claramente, o segundo jogador ganha. Se existirem duas, três ou quatro cartas ($n = 4 \cdot 0 + 2$, $n = 4 \cdot 0 + 3$ ou $n = 4 \cdot 1$), então o primeiro jogador pode ganhar removendo todas, exceto uma carta. *Passo de indução:* Suponha válida a hipótese de indução completa, de que em jogos com k ou menos cartas, o primeiro jogador pode ganhar se $k \equiv 0$, 2 ou 3 (mod 4) e o segundo jogador pode ganhar se $k \equiv 1 \pmod 4$. Suponha que temos um jogo com $k + 1$ cartas, com $k \geq 4$. Se $k + 1 \equiv 0 \pmod 4$, então o primeiro jogador pode remover 3 cartas, deixando $k - 2$ cartas para o outro jogador. Como $k - 2 \equiv 1 \pmod 4$, pela hipótese de indução, este é um jogo em que o segundo jogador, neste ponto (que é o primeiro jogador em nosso jogo), pode ganhar. Analogamente, se $k + 1 \equiv 2 \pmod 4$, então o primeiro jogador pode remover uma carta; e, se $k + 1 \equiv 3 \pmod 4$, então o primeiro jogador pode remover duas cartas. Finalmente, se $k + 1 \equiv 1 \pmod 4$, então o primeiro jogador deve deixar k, $k - 1$ ou $k - 2$ cartas para o outro jogador. Como $k \equiv 0 \pmod 4$, $k - 1 \equiv 3 \pmod 4$ e $k - 2 \equiv 2 \pmod 4$, então, pela hipótese de indução, este é um jogo em que o primeiro jogador, naquele ponto (que é o segundo jogador em nosso jogo), pode ganhar. **13.** Seja $P(n)$ a afirmação de que são necessários exatamente $n - 1$ movimentos para montar um quebra-cabeças com n peças. Agora, $P(1)$ é trivialmente verdadeira. Suponha que $P(j)$ seja verdadeira para todos $j \leq k$, e considere um quebra-cabeças com $k + 1$ peças. O movimento final deve ser a ligação de dois blocos, de tamanho j e $k + 1 - j$ para algum inteiro j com $1 \leq j \leq k$. Pela hipótese de indução, são necessários $j - 1$ movimentos para construir um bloco, e $k + 1 - j - 1 = k - j$ movimentos para construir o outro. Portanto, são necessários $1 + (j - 1) + (k - j) = k$ movimentos no total, de modo que $P(k + 1)$ é verdadeira. **15.** Considere o tabuleiro de Chomp com n linhas e n colunas. Afirmamos que o primeiro jogador pode ganhar o jogo fazendo o primeiro movimento para deixar apenas a linha de cima e a coluna mais à esquerda. Seja $P(n)$ a afirmação de que, se um jogador apresentar a um oponente a configuração Chomp com apenas n biscoitos na linha de cima e n biscoitos na coluna mais à esquerda, então ele pode ganhar o jogo. Demonstraremos que $\forall n\, P(n)$ por indução completa. Sabemos que $P(1)$ é verdadeira, porque o oponente é forçado a pegar o biscoito envenenado em sua primeira jogada. Fixe $k \geq 1$ e suponha que $P(j)$ seja verdadeira para todo $j \leq k$. Afirmamos que $P(k+1)$ é verdadeira. É a vez de o oponente fazer um movimento. Se ele escolhe o biscoito envenenado, então o jogo acaba e ele perde. Caso contrário, suponha que ele escolha o biscoito na linha de cima na coluna j, ou o biscoito na coluna mais à esquerda na linha j, para algum j com $2 \leq j \leq k+1$. O primeiro jogador agora escolhe o biscoito na coluna esquerda na linha j, ou o biscoito na linha de cima na coluna j, respectivamente. Isto deixa a posição coberta por $P(j-1)$ para seu oponente, de modo que, pela hipótese de indução, ele pode ganhar. **17.** Seja $P(n)$ a afirmação de que, se um polígono simples com n lados for triangulado, então pelo menos dois dos triângulos na triangulação têm dois lados vizinhos ao exterior do polígono. Demonstraremos que $\forall n \geq 4\, P(n)$. A afirmação é claramente verdadeira para $n = 4$, porque existe apenas uma diagonal, deixando dois triângulos com a propriedade desejada. Fixe $k \geq 4$ e suponha que $P(j)$ seja verdadeira para todo j com $4 \leq j \leq k$. Considere um polígono com $k+1$ lados, e alguma triangulação dele. Escolha uma das diagonais nesta triangulação. Primeiro suponha que esta diagonal divida o polígono em um triângulo e um polígono com k lados. Então, o triângulo tem dois lados na fronteira com o exterior. Além disso, o polígono de k lados tem, pela hipótese de indução, dois triângulos que têm dois lados na fronteira com o exterior do polígono de k lados, e apenas um destes triângulos pode deixar de ser um triângulo que tem dois lados na fronteira com o exterior do polígono original. O único outro caso é que a diagonal divida o polígono em dois polígonos com j lados e $k+3-j$ lados para algum j com $4 \leq j \leq k-1$. Pela hipótese de indução, cada um destes polígonos tem dois triângulos que têm dois lados na fronteira com seu exterior, e em cada caso apenas um destes triângulos pode deixar de ser um triângulo que tem dois lados na fronteira com o exterior do polígono original. **19.** Seja $P(n)$ a afirmação de que a área de um polígono simples com n lados e vértices, todos em pontos reticulados, é dada por $I(P) + B(P)/2 - 1$. Demonstraremos $P(n)$ para todo $n \geq 3$. Começamos com um lema de aditividade: Se P for um polígono simples com todos os vértices em pontos do reticulado, dividido em polígonos P_1 e P_2 por uma diagonal, então $I(P) + B(P)/2 - 1 = [I(P_1) + B(P_1)/2 - 1] + [I(P_2) + B(P_2)/2 - 1]$. Para demonstrar isso, suponha que existam k pontos do reticulado na diagonal, sem contar suas extremidades. Então, $I(P) = I(P_1) + I(P_2) + k$ e $B(P) = B(P_1) + B(P_2) - 2k - 2$; e o resultado segue de cálculos simples. O que isto diz em particular é que, se a fórmula de Pick der a área correta para P_1 e P_2, então ela deve dar a fórmula correta para P, cuja área é a soma das áreas de P_1 e P_2; e analogamente, se a fórmula de Pick der a área correta de P e de um dos P_i's, então ela deve dar a fórmula correta para o outro P_i. Demonstraremos a seguir o teorema para retângulos cujos lados sejam paralelos aos eixos coordenados. Tal retângulo tem vértices necessariamente em (a, b), (a, c), (d, b) e (d, c), em que a, b, c e d são inteiros com $b < c$ e $a < d$. Sua área é $(c-b)(d-a)$. Além disso, $B = 2(c - b + d - a)$ e $I = (c - b - 1)(d - a - 1) = (c-b)(d-a) - (c-b) - (d-a) + 1$. Portanto, $I + B/2 - 1 = (c-b)(d-a) - (c-b) - (d-a) + 1 + (c - b + d - a) - 1 = (c-b)(d-a)$, que é a área desejada. Considere a seguir um triângulo retângulo cujos lados sejam paralelos aos eixos coordenados. Este triângulo é a metade de um retângulo do tipo que acabamos de considerar, para o qual a fórmula de Pick é válida, de modo que, pelo lema da aditividade, ela vale também para o triângulo. (Os valores de B e I são os mesmos para cada um dos dois triângulos, de modo que, se a fórmula de Pick desse uma resposta que fosse ou muito pequena ou muito grande, então ela daria uma resposta correspondentemente errada para o retângulo.) Para o próximo passo, considere um triângulo arbitrário com vértices nos pontos reticulados que não seja do tipo já considerado. Coloque-o dentro de um retângulo tão pequeno quanto possível. Existem diversas maneiras possíveis de isso ocorrer, mas, em qualquer caso (e adicionando mais uma aresta em um caso), o retângulo terá sido dividido no triângulo dado e em dois ou três triângulos retângulos com lados paralelos aos eixos coordenados. Novamente pelo lema da aditividade, temos certeza de que a fórmula de Pick dá a área correta para o triângulo dado. Isto completa a demonstração de $P(3)$, o passo base em nossa demonstração por indução completa. Para o passo de indução, dado um polígono arbitrário, use o Lema 1 no texto para dividi-lo em dois polígonos. Então, pelo lema da aditividade acima e pela hipótese de indução, sabemos que a fórmula de Pick dá a área correta para este polígono. **21. a)** Na figura à esquerda, $\angle abp$ é menor, mas $\overline{bp}$ não é uma diagonal interior. **b)** Na figura à direita, $\overline{bd}$ não é uma diagonal interior. **c)** Na figura à direita, $\overline{bd}$ não é uma diagonal interior. **23. a)** Quando tentamos demonstrar o passo de indução e encontramos um triângulo em cada subpolígono com pelo menos dois lados na fronteira com o exterior, pode ocorrer em cada caso que o triângulo do qual temos certeza de fato faz fronteira com a diagonal (que é parte da fronteira daquele polígono). Isto nos deixa sem a certeza de nenhum triângulo tocar a fronteira do polígono *original*. **b)** Demonstramos a afirmação mais forte $\forall n \geq 4\; T(n)$ no Exercício 17. **25. a)** O passo de indução aqui nos permite concluir que $P(3)$, $P(5)$, ... são todas verdadeiras, mas não podemos concluir nada sobre $P(2)$, $P(4)$, ... **b)** $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n, usando indução completa. **c)** O passo de indução aqui nos permite concluir que $P(2), P(4), P(8), P(16), \ldots$ são todas verdadeiras, mas não podemos concluir nada sobre $P(n)$ quando n não for uma potência de 2. **d)** Isto é indução matemática; podemos concluir que $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n. **27.** Suponha, para uma demonstração por contradição, que exista algum inteiro positivo n tal que $P(n)$ não seja verdadeira. Seja m o menor inteiro positivo maior que n para o qual $P(m)$ é verdadeira; sabemos que tal m existe porque $P(m)$ é verdadeira para infinitos valores de m. Mas sabemos que $P(m) \to P(m-1)$, de modo que $P(m-1)$ também é verdadeira. Assim, $m - 1$ não pode ser maior que n, de modo que $m - 1 = n$ e $P(n)$ é, de fato, verdadeira. Esta contradição mostra que $P(n)$ é verdadeira para todo n. **29.** O erro está em ir do caso base $n = 0$ para o próximo caso, $n = 1$; não podemos escrever 1 como a soma de dois números naturais menores. **31.** Suponha que a propriedade da boa ordenação seja válida. Suponha que $P(1)$ seja verdadeira e que a afirmação condicional $[P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(n)] \rightarrow P(n+1)$ seja verdadeira para todo inteiro positivo n. Seja S o conjunto dos inteiros positivos n para os quais $P(n)$ é falsa. Mostraremos que $S = \emptyset$. Suponha que $S \neq \emptyset$. Então, pela propriedade da boa ordenação, existe um menor inteiro m em S. Sabemos que m não pode ser 1 porque $P(1)$ é verdadeira. Como $n = m$ é o menor inteiro, tal que $P(n)$ é falsa, $P(1), P(2), \ldots, P(m-1)$ são verdadeiras, e $m - 1 \geq 1$. Como $[P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(m-1)] \rightarrow P(m)$ é verdadeira, segue que $P(m)$ também deve ser verdadeira, o que é uma contradição. Logo, $S = \emptyset$. **33.** Em cada caso, dê uma demonstração por contradição baseada em um "menor contra-exemplo", ou seja, valores de n e k tal que $P(n, k)$ não seja verdadeira e n e k sejam menores em algum sentido. **a)** Escolha um contra-exemplo com $n + k$ tão pequeno quanto possível. Não podemos ter $n = 1$ e $k = 1$, porque nos foi dado que $P(1, 1)$ é verdadeira. Portanto, ou $n > 1$ ou $k > 1$. No primeiro caso, pela nossa escolha de contra-exemplo, sabemos que $P(n-1, k)$ é verdadeira. Mas o passo de indução então força $P(n, k)$ a ser verdadeira, uma contradição. **b)** Escolha um contra-exemplo com n tão pequeno quanto possível. Não podemos ter $n = 1$, porque nos foi dado que $P(1, k)$ é verdadeira para todo k. Portanto, $n > 1$. Pela nossa escolha de contra-exemplo, sabemos que $P(n-1, k)$ é verdadeira. Mas o passo de indução então força $P(n, k)$ a ser verdadeira, uma contradição. **c)** Escolha um contra-exemplo com k tão pequeno quanto possível. Não podemos ter $k = 1$, porque nos foi dito que $P(n, 1)$ é verdadeira para todo n. Portanto, $k > 1$. Pela nossa escolha de contra-exemplo, sabemos que $P(n, k-1)$ é verdadeira. Mas o passo de indução então força $P(n, k)$ a ser verdadeira, uma contradição. **35.** Seja $P(n)$ a afirmação de que, se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forem n números reais distintos, então são usadas $n - 1$ multiplicações para encontrar o produto destes números, não importando como os parênteses são inseridos neste produto. Demonstraremos que $P(n)$ é verdadeira usando indução completa. O caso base $P(1)$ é verdadeiro porque são necessárias $1 - 1 = 0$ multiplicações para encontrar o produto de x_1, um produto com apenas um fator. Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para $1 \leq k \leq n$. A última multiplicação usada para encontrar o produto dos $n + 1$ números reais distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ é uma multiplicação do produto dos primeiros k destes números para algum k e o produto dos últimos $n + 1 - k$ deles. Pela hipótese de indução, são usadas $k - 1$ multiplicações para encontrar o produto de k destes números, não importando como os parênteses foram inseridos no produto destes números, e são usadas $n - k$ multiplicações para encontrar o produto dos outros $n + 1 - k$ deles, não importando como os parênteses foram inseridos no produto destes números. Como é necessária mais uma multiplicação para encontrar o produto de todos os $n + 1$ números, o número total de multiplicações usadas é igual a $(k - 1) + (n - k) + 1 = n$. Logo, $P(n + 1)$ é verdadeira. **37.** Suponha que $a = dq + r = dq' + r'$ com $0 \leq r < d$ e $0 \leq r' < d$. Então $d(q - q') = r' - r$. Segue que d divide $r' - r$. Como $-d < r' - r < d$, temos $r' - r = 0$. Logo, $r' = r$. Segue que $q = q'$. **39.** Isto é um paradoxo causado pela auto-referência. A resposta é claramente "não". Existe um número finito de palavras em inglês, logo, apenas um número finito de seqüências de 15 palavras ou menos; portanto, apenas um número finito de números inteiros positivos pode ser descrito, não todos eles. **41.** Suponha que a propriedade da boa ordenação fosse falsa. Seja S um conjunto não vazio de inteiros não negativos que não tivesse um menor elemento. Seja $P(n)$ a afirmação "$i \notin S$ para $i = 0, 1, \ldots, n$". $P(0)$ é verdadeira porque se $0 \in S$ então S tem um menor elemento, a saber, 0. Agora, suponha que $P(n)$ seja verdadeira. Logo, $0 \notin S$, $1 \notin S, \ldots, n \notin S$. Claramente, $n + 1$ não pode estar em S, pois, se estivesse, ele seria seu menor elemento. Logo, $P(n + 1)$ é verdadeira. Assim, pelo princípio da indução matemática, $n \notin S$ para todo inteiro não negativo n. Logo, $S = \emptyset$, uma contradição. **43.** Isto segue imediatamente do Exercício 41 (se considerarmos o princípio da indução matemática como axioma) e desse exercício junto com a discussão a seguir do enunciado formal de indução completa no texto, o qual mostrou que a indução completa implica o princípio de indução matemática (se considerarmos a indução completa como axioma).

Seção 4.3

1. a) $f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 7, f(4) = 9$ **b)** $f(1) = 3, f(2) = 9, f(3) = 27, f(4) = 81$ **c)** $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 16, f(4) = 65\,536$ **d)** $f(1) = 3, f(2) = 13, f(3) = 183, f(4) = 33\,673$ **3. a)** $f(2) = -1, f(3) = 5, f(4) = 2, f(5) = 17$ **b)** $f(2) = -4, f(3) = 32, f(4) = -4096, f(5) = 536\,870\,912$ **c)** $f(2) = 8, f(3) = 176, f(4) = 92\,672, f(5) = 25\,764\,174\,848$ **d)** $f(2) = -\frac{1}{2}, f(3) = -4, f(4) = \frac{1}{8}, f(5) = -32$ **5. a)** Não é válida. **b)** $f(n) = 1 - n$. *Passo base:* $f(0) = 1 = 1 - 0$. *Passo de indução:* se $f(k) = 1 - k$, então $f(k+1) = f(k) - 1 = 1 - k - 1 = 1 - (k+1)$. **c)** $f(n) = 4 - n$ se $n > 0$ e $f(0) = 2$. *Passo base:* $f(0) = 2$ e $f(1) = 3 = 4 - 1$. *Passo de indução* (com $k \geq 1$): $f(k+1) = f(k) - 1 = (4 - k) - 1 = 4 - (k+1)$. **d)** $f(n) = 2^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$. *Passo base:* $f(0) = 1 = 2^{\lfloor (0+1)/2 \rfloor}$ e $f(1) = 2 = 2^{\lfloor (1+1)/2 \rfloor}$. *Passo de indução* (com $k \geq 1$): $f(k+1) = 2f(k-1) = 2 \cdot 2^{\lfloor k/2 \rfloor} = 2^{\lfloor k/2 \rfloor + 1} = 2^{\lfloor ((k+1)+1)/2 \rfloor}$. **e)** $f(n) = 3^n$. *Passo base:* Trivial. *Passo de indução:* Para n ímpar, $f(n) = 3f(n-1) = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$; e para $n > 1$ par, $f(n) = 9f(n-2) = 9 \cdot 3^{n-2} = 3^n$. **7.** Existem muitas possibilidades corretas de resposta. Daremos algumas relativamente simples. **a)** $a_{n+1} = a_n + 6$ para $n \geq 1$ e $a_1 = 6$ **b)** $a_{n+1} = a_n + 2$ para $n \geq 1$ e $a_1 = 3$ **c)** $a_{n+1} = 10a_n$ para $n \geq 1$ e $a_1 = 10$ **d)** $a_{n+1} = a_n$ para $n \geq 1$ e $a_1 = 5$ **9.** $F(0) = 0, F(n) = F(n-1) + n$ para $n \geq 1$ **11.** $P_m(0) = 0, P_m(n+1) = P_m(n) + m$ **13.** Seja $P(n)$ a afirmação "$f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$". *Passo base:* $P(1)$ é verdadeira porque $f_1 = 1 = f_2$. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então $f_1 + f_3 + \cdots + f_{2k-1} + f_{2k+1} = f_{2k} + f_{2k+1} = f_{2k+2} + f_{2(k+1)}$. **15.** *Passo base:* $f_0 f_1 + f_1 f_2 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1^2 = f_2^2$. *Passo de indução:* Suponha que $f_0 f_1 + f_1 f_2 + \cdots + f_{2k-1} f_{2k} = f_{2k}^2$. Então $f_0 f_1 + f_1 f_2 + \cdots + f_{2k-1} f_{2k} + f_{2k} f_{2k+1} + f_{2k+1} f_{2k+2} = f_{2k}^2 + f_{2k} f_{2k+1} + f_{2k+1} f_{2k+2} = f_{2k}$

else $A(m, n) := A(m-1, A(m, n-1))$

45.



47. Considere as duas listas com $1, 2, ..., m-1, m+n-1$ e $m, m+1, ..., m+n-2, m+n$, respectivamente. 49. Se $n=1$, então o algoritmo não faz nada, o que está correto porque uma lista com um elemento já está ordenada. Suponha que o algoritmo funcione corretamente para $n=1$ até $n=k$. Se $n=k+1$, então a lista é quebrada em duas listas, L_1 e L_2. Pela hipótese de indução, *mergesort* ordena corretamente cada uma destas sublistas; além disso, *merge* funde corretamente as duas listas ordenadas em uma porque com cada comparação o menor elemento em $L_1 \cup L_2$ que ainda não foi posto em L é colocado lá. 51. $O(n)$ 53. 6 55. $O(n^2)$

Seção 4.5

1. Suponha que $x=0$. O segmento de programa primeiro atribui o valor 1 a y e então atribui o valor $x+y=0+1=1$ a z. 3. Suponha que $y=3$. O segmento de programa atribui o valor 2 a x e então atribui o valor $x+y=2+3=5$ a z. Como $y=3>0$, ele então atribui o valor $z+1=5+1=6$ a z.

5.
$$(p \wedge \textit{condição}1)\{S_1\}q$$
$$(p \wedge \neg\textit{condição}1 \wedge \textit{condição}2)\{S_2\}q$$
$$\vdots$$
$$(p \wedge \neg\textit{condição}1 \wedge \neg\,\textit{condição}2 \; \cdots \wedge \neg\textit{condição}(n-1)\{S_n\}q$$
$$\therefore\ p\{\textbf{if}\ \textit{condição}1\ \textbf{then}\ S_1;\ \textbf{else if}\ \textit{condição}2\ \textbf{then}\ S_2; ...;\ \textbf{else}\ S_n\}q$$

7. Mostraremos que p: "$\textit{potencia} = x^{i-1}$ e $i \leq n+1$" é um laço invariável. Observe que p é verdadeira inicialmente, porque antes de o laço começar, $i=1$ e $\textit{potencia}=1=x^0=x^{1-1}$. A seguir, devemos mostrar que, se p é verdadeira e $i \leq n$ depois de uma execução do laço, então p permanece verdadeira depois de mais uma execução. O laço aumenta i por 1. Logo, como $i \leq n$ antes desta passagem, $i \leq n+1$ depois desta passagem. Além disso, o laço atribui $\textit{potencia} \cdot x$ a *potencia*. Pela hipótese de indução podemos ver que à *potencia* é atribuído o valor $x^{i-1} \cdot x = x^i$. Logo, p permanece verdadeira. Além disso, o laço termina depois de n passagens do laço com $i=n+1$ porque a i é atribuído o valor 1 antes de entrar no laço, é aumentado por 1 em cada passagem, e o laço termina quando $i>n$. Conseqüentemente, no final $\textit{potencia}=x^n$, como desejado. 9. Suponha que p seja "m e n são inteiros". Então, se a condição $n<0$ for verdadeira, $a=-n=|n|$ depois de S_1 ser executado. Se a condição $n<0$ for falsa, então $a=n=|n|$ depois de S_1 ser executado. Logo, $p\{S_1\}q$ é verdadeira onde q é $p \wedge (a=|n|)$. Como S_2 atribui o valor 0 a ambos, k e x, é claro que $q\{S_2\}r$ é verdadeira onde r é $q \wedge (k=0) \wedge (x=0)$. Suponha que r seja verdadeira. Seja $P(k)$ a afirmação "$x=mk$ e $k \leq a$". Podemos mostrar que $P(k)$ é um laço invariável para o laço em S_3. $P(0)$ é verdadeira porque antes de entrar no laço $x=0=m \cdot 0$ e $0 \leq a$. Agora, suponha que $P(k)$ seja verdadeira e $k<a$. Então $P(k+1)$ é verdadeira porque a x é atribuído o valor $x+m=mk+m=m(k+1)$. O laço termina quando $k=a$, e naquele ponto $x=ma$. Logo, $r\{S_3\}s$ é verdadeira, em que s é "$a=|n|$ e $x=ma$". Agora, suponha que s seja verdadeira. Então, se $n<0$, segue que $a=-n$, de modo que $x=-mn$. Neste caso, S_4 atribui $-x=mn$ a *produto*. Se $n>0$, então $x=ma=mn$, de modo que S_4 atribui mn a *produto*. Logo, $s\{S_4\}t$ é verdadeira. 11. Suponha que a afirmação inicial p seja verdadeira. Então, como $p\{S\}q_0$ é verdadeira, q_0 é verdadeira depois de o segmento S ser executado. Como $q_0 \rightarrow q_1$ é verdadeira, segue também que q_1 é verdadeira depois de S ser executado. Logo, $p\{S\}q_1$ é verdadeira. 13. Usaremos a proposição p, "$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(x, y)$ e $y \geq 0$", como o laço invariável. Observe que p é verdadeira antes de entrar no laço, porque, naquele ponto, $x=a$, $y=b$ e y é um inteiro positivo, usando a afirmação inicial. Agora, suponha que p seja verdadeira e $y>0$; então o laço será executado novamente. Dentro do laço, x e y são substituídos por y e x **mod** y, respectivamente. Pelo Lema 1 da Seção 3.6, $\text{mdc}(x, y) = \text{mdc}(y, x \textbf{ mod } y)$. Portanto, depois da execução do laço, o valor de $\text{mdc}(x, y)$ é o mesmo que era antes. Além disso, como y é o resto, ele é pelo menos 0. Logo, p permanece verdadeira, de modo que ela é um laço invariável. Além do mais, se o laço terminar, então $y=0$. Neste caso, temos $\text{mdc}(x, y) = x$, a afirmação final. Portanto, o programa, que dá x como sua saída, calculou corretamente $\text{mdc}(a, b)$. Finalmente, podemos demonstrar que o laço termina, porque cada iteração faz com que o valor de y decresça pelo menos 1. Portanto, o laço pode ser iterado no máximo b vezes.

Exercícios Complementares

1. Seja $P(n)$ a afirmação de que esta equação é válida. *Passo base:* $P(1)$ diz que $2/3 = 1-(1/3^1)$, o que é verdade. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então $2/3 + 2/9 + 2/27 + \cdots + 2/3^n + 2/3^{n+1} = 1 - 1/3^n + 2/3^{n+1}$ (pela hipótese de indução), e isto é igual a $1-1/3^{n+1}$, como desejado. 3. Seja $P(n)$ a afirmação "$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1)2^n + 1$". *Passo base:* $P(1)$ é verdadeira porque $1 \cdot 1 = 1 = (1-1)2^1 + 1$. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + k \cdot 2^{k-1} + (k$

$+ 1) \cdot 2^k = (k - 1)2^k + 1 + (k + 1)2^k = 2k \cdot 2^k + 1 = [(k + 1) - 1]2^{k+1} + 1$. **5.** Seja $P(n)$ a afirmação "$1/(1 \cdot 4) + \cdots + 1/[(3n - 2)(3n + 1)] = n/(3n + 1)$". *Passo base:* $P(1)$ é verdadeira porque $1/(1 \cdot 4) = 1/4$. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então $1/(1 \cdot 4) + \cdots + 1/[(3k - 2)(3k + 1)] + 1/[(3k + 1)(3k + 4)] = k/(3k + 1) + 1/[(3k + 1)(3k + 4)] = [k(3k + 4) + 1]/[(3k + 1)(3k + 4)] = [(3k + 1)(k + 1)]/[(3k + 1)(3k + 4)] = (k + 1)/(3k + 4)$. **7.** Seja $P(n)$ a afirmação "$2^n > n^3$". *Passo base:* $P(10)$ é verdadeira porque $1024 > 1000$. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então $(k + 1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \leq k^3 + 9k^2 \leq k^3 + k^3 = 2k^3 < 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$. **9.** Seja $P(n)$ a afirmação "$a - b$ é um fator de $a^n - b^n$". *Passo base:* $P(1)$ é trivialmente verdadeira. Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então $a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1} = a(a^k - b^k) + b^k(a - b)$. Então, como $a - b$ é um fator de $a^k - b^k$ e $a - b$ é um fator de $a - b$, segue que $a - b$ é um fator de $a^{k+1} - b^{k+1}$. **11.** Seja $P(n)$ a afirmação "$a + (a + d) + \cdots + (a + nd) = (n + 1)(2a + nd)/2$". *Passo base:* $P(1)$ é verdadeira porque $a + (a + d) = 2a + d = 2(2a + d)/2$. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então $a + (a + d) + \cdots + (a + kd) + [a + (k + 1)d] = (k + 1)(2a + kd)/2 + a + (k + 1)d = \frac{1}{2}(2ak + 2a + k^2d + kd + 2a + 2kd + 2d) = \frac{1}{2}(2ak + 4a + k^2d + 3kd + 2d) = \frac{1}{2}(k + 2)[2a + (k + 1)d]$. **13.** *Passo base:* Isto é verdade para $n = 1$ porque $5/6 = 10/12$. *Passo de indução:* Suponha que esta equação seja válida para $n = k$, e considere $n = k + 1$. Então $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{i+4}{i(i+1)(i+2)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{i+4}{i(i+1)(i+2)} + \frac{k+5}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k(3k+7)}{2(k+1)(k+2)} + \frac{k+5}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ (pela hipótese de indução) $= \frac{1}{(k+1)(k+2)} \cdot \left(\frac{k(3k+7)}{2} + \frac{k+5}{k+3}\right) = \frac{1}{2(k+1)(k+2)(k+3)} \cdot [k(3k + 7)(k + 3) + 2(k + 5)] = \frac{1}{2(k+1)(k+2)(k+3)} \cdot (3k^3 + 16k^2 + 23k + 10) = \frac{1}{2(k+1)(k+2)(k+3)} \cdot (3k + 10)(k + 1)^2 = \frac{1}{2(k+2)(k+3)} \cdot (3k + 10)(k + 1) = \frac{(k+1)(3(k+1)+7)}{2((k+1)+1)((k+1)+2)}$, como desejado. **15.** *Passo base:* A afirmação é verdadeira para $n = 1$ porque a derivada de $g(x) = xe^x$ é $x \cdot e^x + e^x = (x + 1)e^x$ pela regra do produto. *Passo de indução:* Suponha que a afirmação seja verdadeira para $n = k$, isto é, a k-ésima derivada é dada por $g^{(k)} = (x + k)e^x$. Derivando pela regra do produto, obtemos a $(k + 1)$-ésima derivada: $g^{(k+1)} = (x + k)e^x + e^x = [x + (k + 1)]e^x$, como desejado. **17.** Usaremos agora indução completa para mostrar que f_n é par se $n \equiv 0 \pmod 3$ e é ímpar caso contrário. *Passo base:* isto segue porque $f_0 = 0$ é par e $f_1 = 1$ é ímpar. *Passo de indução:* Suponha que, se $j \leq k$, então f_j é par se $j \equiv 0 \pmod 3$ e é ímpar caso contrário. Agora, suponha que $k + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Então, $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ é par porque f_k e f_{k-1} são ambos ímpares. Se $k + 1 \equiv 1 \pmod 3$, então $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ é ímpar porque f_k é par e f_{k-1} é ímpar. Finalmente, se $k + 1 \equiv 2 \pmod 3$, então $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ é ímpar porque f_k é ímpar e e f_{k-1} é par. **19.** Seja $P(n)$ a afirmação $f_k f_n + f_{k+1} f_{n+1} = f_{n+k+1}$ para todo inteiro não negativo k. *Passo base:* Isto consiste em mostrar que $P(0)$ e $P(1)$ são ambos válidos. $P(0)$ é verdadeira porque $f_k f_0 + f_{k+1} f_1 = f_{k+1} \cdot 0 + f_{k+1} \cdot 1 = f_1$. Como $f_k f_1 + f_{k+1} f_2 = f_k + f_{k+1} = f_{k+2}$, segue que $P(1)$ é verdadeira. *Passo de indução:* Agora, suponha que $P(j)$ seja válida. Então, pela hipótese de indução e pela definição recursiva dos números de Fibonacci, segue que $f_{k+1} f_{j+1} + f_{k+2} f_{j+2} = f_k(f_{j-1} + f_j) + f_{k+1}(f_j + f_{j+1}) = (f_k f_{j-1} + f_{k+1} f_j) + (f_k f_j + f_{k+1} f_{j+1}) = f_{j-1+k+1} + f_{j+k+1} = f_{j+k+2}$. Isto mostra que $P(j + 1)$ é verdadeira. **21.** Seja $P(n)$ a afirmação $l_0^2 + l_1^2 + \cdots + l_n^2 = l_n l_{n+1} + 2$. *Passo base:* $P(0)$ e $P(1)$ são ambas válidas, porque $l_0^2 = 2^2 = 2 \cdot 1 + 2 = l_0 l_1 + 2$ e $l_0^2 + l_1^2 = 2^2 + 1^2 = 1 \cdot 3 + 2 = l_1 l_3 + 2$. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja válida. Então, pela hipótese de indução $l_0^2 + l_1^2 + \cdots + l_k^2 + l_{k+1}^2 = l_k l_{k+1} + 2 + l_{k+1}^2 = l_{k+1}(l_k + l_{k+1}) + 2 = l_{k+1} l_{k+2} + 2$. Isto mostra que $P(k + 1)$ é válida. **23.** Seja $P(n)$ a afirmação de que a identidade é válida para todo n. *Passo base:* $P(1)$ é obviamente verdadeira. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então, $\cos(k + 1)x + i\,\mathrm{sen}(k + 1)x = \cos(kx + x) + i\,\mathrm{sen}(kx + x) = \cos kx \cos x - \mathrm{sen}\, kx\, \mathrm{sen}\, x + i(\mathrm{sen}\, kx \cos x + \cos kx\, \mathrm{sen}\, x) = \cos x(\cos kx + i\,\mathrm{sen}\, kx)(\cos x + i\,\mathrm{sen}\, x) = (\cos x + i\,\mathrm{sen}\, x)^k(\cos x + i\,\mathrm{sen}\, x) = (\cos x + i\,\mathrm{sen}\, x)^{k+1}$. Segue que $P(k + 1)$ é verdadeira. **25.** Reescreva o lado direito como $2^{n+1}(n^2 - 2n + 3) - 6$. Para $n = 1$ temos $2 = 4 \cdot 2 - 6$. Suponha que a equação é válida para $n = k$, e considere $n = k + 1$. Então $\sum_{j=1}^{k+1} j^2 2^j = \sum_{j=1}^{k} j^2 2^j + (k + 1)^2 2^{k+1} = 2^{k+1}(k^2 - 2k + 3) - 6 + (k^2 + 2k + 1)2^{k+1}$ (pela hipótese de indução) $= 2^{k+1}(2k^2 + 4) - 6 = 2^{k+2}(k^2 + 2) - 6 = 2^{k+2}[(k + 1)^2 - 2(k + 1) + 3] - 6$. **27.** Seja $P(n)$ a afirmação de que esta equação é válida. *Passo base:* Em $P(2)$ ambos os lados se reduzem a $1/3$. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então $\sum_{j=1}^{k+1} 1/(j^2 - 1) = \left(\sum_{j=1}^{k} 1/(j^2 - 1)\right) + 1/[(k + 1)^2 - 1] = (k - 1)(3k + 2)/[4k(k + 1)] + 1/[(k + 1)^2 - 1]$ pela hipótese de indução. Isto se simplifica para $(k - 1)(3k + 2)/[4k(k + 1)] + 1/(k^2 + 2k) = (3k^3 + 5k^2)/[4k(k + 1)(k + 2)] = \{[(k + 1) - 1][3(k + 1) + 2]\}/[4(k + 1)(k + 2)]$, que é exatamente o que $P(k + 1)$ afirma. **29.** Seja $P(n)$ a afirmação de que pelo menos $n + 1$ retas são necessárias para cobrir o reticulado de pontos na região triangular dada. *Passo base:* $P(0)$ é verdadeira, porque precisamos pelo menos de uma reta para cobrir o ponto em $(0, 0)$. *Passo de indução:* Suponha válida a hipótese de indução, de que pelo menos $k + 1$ retas são necessárias para cobrir o reticulado de pontos com $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq k$. Considere o triângulo de pontos do reticulado definido por $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq k + 1$. Por contradição, suponha que $k + 1$ retas pudessem cobrir este conjunto. Então, estas retas deveriam cobrir os $k + 2$ pontos na reta $x + y = k + 1$. Mas apenas a própria reta $x + y = k + 1$ pode cobrir mais que um destes pontos, porque duas retas distintas intersectam em, no máximo, em ponto. Portanto, nenhuma das $k + 1$ retas que são necessárias (pela hipótese de indução) para cobrir o conjunto de pontos do reticulado dentro do triângulo, mas não nesta reta, pode cobrir mais de um ponto nesta reta, e isto deixa pelo menos um ponto não coberto. Portanto, nossa hipótese de que $k + 1$ retas podiam cobrir um conjunto maior está errada, e nossa demonstração está completa. **31.** Seja $P(n)$ a afirmação $\mathbf{B}^k = \mathbf{M}\mathbf{A}^k\mathbf{M}^{-1}$. *Passo base:* Parte das condições dadas. *Passo de indução:* Suponha válida a hipótese de indução. Então $\mathbf{B}^{k+1} = \mathbf{B}\mathbf{B}^k = \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}^k = \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{A}^k\mathbf{M}^{-1}$ (pela hipótese de indução) $= \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{I}\mathbf{A}^k\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{A}^k\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{M}^{-1}$. **33.** Demonstramos por indução matemática a seguinte afirmação mais forte: Para todo $n \geq 3$, podemos escrever $n!$ como a soma de n de seus divisores distintos positivos, um dos quais é 1. Ou seja, pode-