Geometria Analítica – MAT A01 2023.1
Março de 2023 UFBA
Professor Andreas ♯LoveAndPeace

Primeira lista de exercícios

"*Na Europa está circulando um fantasma - o fantasma do comunismo.*"[1]
(Karl Marx, filósofo alemão, 1818 - 1883)

1. Sejam A, B, C, D e E, pontos. Prove que:

   (a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

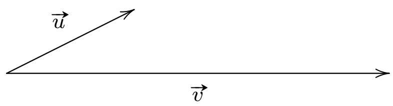
   (b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}$

2. Prove, usando as propriedades da soma entre vetores, que, para todos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ no espaço, as seguintes propriedades são verdadeiras:

   (a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} + \vec{v} \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} = \vec{w}$,

   (b) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$.

3. Dados representantes de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ conforme a figura:

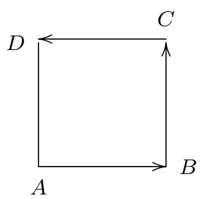
   

   Ache um representante de $\vec{x}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} = \vec{0}$.

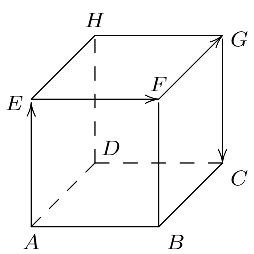
4. Justifique a seguinte regra. Para calcular $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ tome um representante (A, B) de $\vec{u}$, um representante (B, C) de $\vec{v}$, um representante (C, D) de $\vec{w}$. Então $\vec{x}$ tem como representante (A, D).

5. Ache a soma dos vetores indicados na figura nos casos:

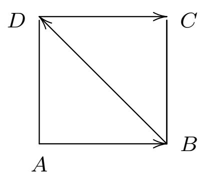
   (a) Quadrado:

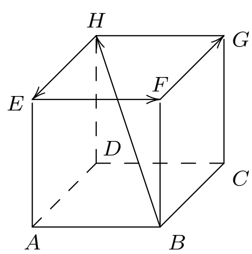
   (b) Cubo:

   (c) Quadrado:

   (d) Cubo:

[1]Original: *Ein Gespenst geht um in Europa - das Gespenst des Kommunismus*, em Manifest der Kommunistischen Partei, 1872, Karl Marx e Friedrich Engels.

6. Prove que, para todos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço e para todo escalar $k, m \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades são verdadeiras:

    (a) $-(\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} - \vec{v}$,
    (b) $k(\vec{u} - \vec{v}) = k\vec{u} - k\vec{v}$,
    (c) $(k - m)\vec{u} = k\vec{u} - m\vec{u}$,
    (d) $k\vec{v} = \vec{0} \implies k = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \vec{0}$,
    (e) $k\vec{u} = k\vec{v} \quad \text{e} \quad k \neq 0 \implies \vec{u} = \vec{v}$,
    (f) $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$,
    (g) $2\vec{v} = \vec{v} + \vec{v}$,

7. Resolva a equação na incognita $\vec{x}$:

$$2\vec{x} - 3\vec{u} = 10(\vec{x} + \vec{v})$$

8. Sejam A e B pontos, e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores. Prove que, se $A + \vec{u} = B + \vec{v}$, então $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \vec{v}$.

9. Determine $\overrightarrow{AB}$ em função de $\vec{u}$, sabendo que $A + (-\vec{u}) = B + \vec{u}$.

10. Determine a relação entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que, para um dado ponto A, $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A$.

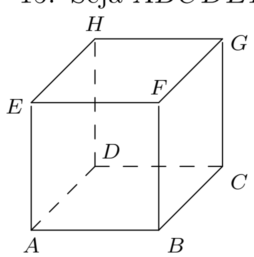
11. Dados os pontos A, B e C, determine X, sabendo que $(A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{CX} = C + \overrightarrow{CB}$.

12. Prove que, se $B = A + \overrightarrow{DC}$, então $B = C + \overrightarrow{DA}$.

13. Prove que $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$.

14. Prove que, se $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$, então $A = B$.

15. Seja $ABCDEFGH$ o cubo:



    Determine:

    (a) $A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
    (b) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}$
    (c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{BF}$
    (d) $\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BH}$

16. (a) Seja ABC um triângulo e $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{XB}$. Exprima $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ e λ.
    (b) Seja ABC um triângulo e $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{XB}$, $\overrightarrow{BY} = \mu\overrightarrow{YC}$ e $\overrightarrow{CZ} = \rho\overrightarrow{ZA}$. Exprima $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{AY}$ e $\overrightarrow{BZ}$ em função de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$.

17. Sejam M, N e P os pontos médios respetivamente dos lados AB, BC e AC de um triângulo ABC. Mostre que

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$$

18. Seja $OABC$ um tetraedro e X o ponto da reta BC definido por $\overrightarrow{BX} = m\overrightarrow{BC}$ por um $m \in \mathbb{R}$. Exprima $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{AX}$ em função de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

19. Seja ABC um triângulo, X um ponto na reta AB tal que $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{XB}$ e Y um ponto na reta BC tal que $\overrightarrow{BY} = 3\overrightarrow{YC}$. Prove que as retas CX e AY se cortam num ponto.

20. Sejam A, B, C e D pontos quaisquer no espaço, M o ponto médio de AC e N o de BD. Exprima $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ em função de $\overrightarrow{MN}$.

21. Seja $ABCD$ um quadrilátero e O um ponto qualquer no espaço. Seja P o ponto médio do segmento que une os pontos médios das diagonais AC e BD. Prove que

$$P = O + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$$

22. Sejam A, B e C e D três pontos quaisquer com $A \neq B$. Prove que:

$$X \text{ é um ponto do segmento } AB \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \overrightarrow{CX} = a\overrightarrow{C}A + b\overrightarrow{C}B \\ \text{com } a \geq 0,\ b \geq 0, \text{ e } a + b = 1. \end{array}$$

23. Prove que, o conjunto $\{\vec{v}\}$ é LD, se e somente se a equação $x\vec{v} = \vec{0}$ admite solução não trivial.

24. Prove que, se o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI, então os conjuntos $\{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, 3\vec{v}\}$ e $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}\}$ também são LI.

25. Seja $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ um conjunto LI. Dado um vetor $\vec{t}$ qualquer, sabemos que existem escalares $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$. Prove que:

$$\{\vec{u} + \vec{t}, \vec{v} + \vec{t}, \vec{w} + \vec{t}\} \text{ é LD} \iff a + b + c + 1 = 0$$

26. Prove que, se o conjunto $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ é LI, então o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI.

Segunda lista de exercícios

"*A burguesia tirou da relação familiar o seu véu sentimental e a reduziu a uma pura condição monetária.*"[2]
(Karl Marx, filósofo alemão, 1818 - 1883)

27. Prove que, para qualquer base $\mathcal{B}$, $\vec{0} = (0,0,0)_{\mathcal{B}}$.

28. Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\vec{u} = (1,-1,3)_{\mathcal{B}}$, $\vec{v} = (2,1,3)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{w} = (-1,-1,4)_{\mathcal{B}}$. Ache as coordenadas de:
   (a) $\sqrt{2}\vec{u}$,
   (b) $\vec{u} + \vec{v}$,
   (c) $\vec{u} - 2\vec{v}$,
   (d) $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$,
   (e) $5\vec{u} - \vec{v} - \frac{3}{7}\vec{w}$,
   (f) $\sqrt{5}\vec{u} - \vec{v} + \frac{3}{2}\vec{w}$.

29. Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\vec{u} = (1,-1,3)_{\mathcal{B}}$, $\vec{v} = (2,1,3)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{w} = (-1,-1,4)_{\mathcal{B}}$. Verifique se $\vec{u}$ é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

30. Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\vec{u} = (1,-1,3)_{\mathcal{B}}$, $\vec{v} = (2,1,3)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{w} = (-1,-1,4)_{\mathcal{B}}$. Escreva o vetor $\vec{t} = (4,0,13)_{\mathcal{B}}$ como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

31. O vetor $\vec{u} = (1,-1,3)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v} = (-1,1,0)$ e $\vec{w} = \left(2,3,\frac{1}{3}\right)$?

32. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e
$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3,\\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2,\\ \vec{u}_3 &= \vec{v}_3.\end{aligned}$$
Decida se $\mathcal{C} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é base de $\mathbb{R}^3$.

33. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$. Prove que $\mathcal{C} = \{a\vec{u}, b\vec{v}, c\vec{w}\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ se e somente se a, b e c são não nulos.

34. Sejam $OABC$ um tetraedro e M o ponto médio de BC:
   (a) explique porque $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ é base de $\mathbb{R}^3$,

[2] Original: *Die Bourgeoise hat dem Familienverhältnis seinen rührend sentimentalen Schleier abgerissen und es auf ein reines Geldverhältnis zurückgeführt*, em Manifest der Kommunistischen Partei, 1872, Karl Marx e Friedrich Engels.

(b) determine as coordenadas de $\overrightarrow{AM}$, na base $\mathcal{B}$ (dica: use o exercício **??**).

35. Explique porque um conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ de vetores dois a dois ortogonais tem que ser LI.

36. Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Calcule as normas dos seguintes vetores na base $\mathcal{B}$:

(a) $(1,1,1)$,
(b) $(1,0,0)$,
(c) $(-1,1,1)$,
(d) $(3,4,\sqrt{11})$,
(e) $(-3,-4,\sqrt{11})$,
(f) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,
(g) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,
(h) $\left(-\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

37. Normalize os vetores do Exercício anterior.

38. Explique porque o produto interno não pode ser associativo.

39. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$. Prove as seguintes propriedades utilizando as propriedades básicas do produto escalar:

(P4) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$,
(P5) $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$,
(P6) $\vec{u} \cdot k\vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$,
(P7) $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$,
(P8) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$.

40. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ não nulos. Prove:

(a) $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$,
(b) $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff |\vec{u} \cdot \vec{v}| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$.

41. Ache a medida (em radianos) dos ângulos entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nos casos:

(a) $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (-2,10,2)$,
(b) $\vec{u} = (3,3,0)$, $\vec{v} = (2,1,-1)$,
(c) $\vec{u} = (-1,1,1)$, $\vec{v} = (1,1,1)$,
(d) $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$,
(e) $\vec{u} = (300,300,0)$, $\vec{v} = (-2000,-1000,2000)$,

42. Ache x de modo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais nos casos:

(a) $\vec{u} = (x,0,3)$, $\vec{v} = (1,x,3)$,
(b) $\vec{u} = (x,x,4)$, $\vec{v} = (4,x,1)$,
(c) $\vec{u} = (x+1,1,2)$, $\vec{v} = (x-1,-1,-2)$,
(d) $\vec{u} = (x,-1,4)$, $\vec{v} = (x,-3,1)$.

43. Calcule $||2\vec{u} + 4\vec{v}||^2$ sabendo que $||\vec{u}|| = 1$, $||\vec{v}|| = 2$ e a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{2}{3}\pi$.

44. Se A, B e C são os vértices de um triângulo equilátero de lado unitário, calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

45. Se $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $||\vec{u}|| = \dfrac{3}{2}$, $||\vec{v}|| = \dfrac{1}{2}$ e $||\vec{w}|| = 2$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.

46. Prove que se $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$ e $\vec{v} \perp (\vec{w} - \vec{u})$, então $\vec{w} \perp (\vec{u} - \vec{v})$.

47. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$ nos casos seguintes:

    (a) $\vec{u} = (6, -2, -4)$, $\vec{v} = (-1, -2, 1)$,
    (b) $\vec{u} = (7, 0, -5)$, $\vec{v} = (1, 2, -1)$,
    (c) $\vec{u} = (1, -3, 1)$, $\vec{v} = (-4, 2, 4)$,
    (d) $\vec{u} = (2, 1, 2)$, $\vec{v} = (4, 2, 4)$.

48. A medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\dfrac{\pi}{6}$. Sendo $||\vec{u}|| = 1$ e $||\vec{v}|| = 7$, calcule $||\vec{u} \times \vec{v}||$ e $||\frac{1}{3}\vec{u} \times \frac{3}{4}\vec{v}||$.

49. Seja $ABCD$ um tetraedro regular de lado unitário. Calcule $||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}||$.

50. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Calcule a área do paralelogramo $ABCD$ sendo $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$ e $\overrightarrow{AD} = (2, 1, 4)$.

51. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Calcule a área do triângulo ABC sendo $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 3)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$.

52. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Ache um vetor unitário ortogonal a $\vec{u} = (1, -3, 1)$ e $\vec{v} = (-3, 3, 3)$.

53. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Ache $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \times (\vec{i} + \vec{k}) = 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ e $||\vec{x}|| = \sqrt{6}$.

54. Prove:

    (a) $||\vec{u} \times \vec{v}||^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2$,
    (b) $||\vec{u} \times \vec{v}||^2 \leq ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2$,
    (c) $||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$,
    (d) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2(\vec{v} \times \vec{u})$,
    (e) $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u}$,
    (f) $(\vec{u} - \vec{t}) \times (\vec{v} - \vec{w}) + (\vec{v} - \vec{t}) \times (\vec{w} - \vec{u}) + (\vec{w} - \vec{t}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u})$.

55. Prove que se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \times \vec{t}$ e $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v} \times \vec{t}$ então $\vec{u} - \vec{t}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ são vetores linearmente dependentes.

56. Prove que a altura do triângulo ABC relativa à base AB mede $h = \dfrac{||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{AB}||}$.

57. Expressa a distância do ponto C à reta r que passa por dois pontos A e B em termos dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

58. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Calcule $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ sendo $\vec{u} = (-1, -3, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$ e $\vec{w} = (2, 1, 1)$.

59. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Calcule o volume do paralelepípedo definido pelo vetores $\vec{u} = (2, -2, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$ e $\vec{w} = (-2, -1, -1)$.

60. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Calcule o volume do tetraedro $ABCD$ dados $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$ e $\overrightarrow{AD} = (-4, 0, 0)$.

61. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Verifique:

    (a) $[\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$,

    (b) $[a\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = a[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$,

    (c) $[\vec{u} + a\vec{v} + b\vec{w}, \vec{v} + c\vec{w}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

62. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Calcule $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ sabendo $||\vec{u}|| = 1$, $||\vec{v}|| = 2$, $||\vec{w}|| = 3$ e que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é base negativa com $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dois a dois ortogonais.

63. A medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\dfrac{\pi}{6}$ e $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Sendo $||\vec{u}|| = 1$, $||\vec{v}|| = 1$. $||\vec{w}|| = 4$ e $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ base positiva, ache $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

64. Prove que:

    (a) $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| \leq ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}||$,

    (b) $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| \leq ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}||$ se e somente se algum dos vetores for nulo ou sendo todos não nulos, forem dois a dois ortogonais.

65. Prove que se $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u} = \vec{0}$, então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é conjunto linearmente dependente.

66. Prove que a altura do tetraedro $ABCD$ relativa à base ABC é:
$$h = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||}.$$
Observe que o volume de um tetraedro é um terço da a área do triângulo base vezes a altura.

67. Sejam $ABCD$ um tetraedro, $P = A + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, $Q = B - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ e $R = C + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Mostre que $PQRD$ forma tetraedro e determine a razão entre os volumes de $PQRD$ e $ABCD$.