

ANÁLISIS DE FENÓMENOS DE SINCRONIZACIÓN EN SISTEMAS CAÓTICOS DE ALTA DIMENSIÓN

Memoria presentada por
Dña. Carolina Mendoza Parra
para optar al grado de doctor en Física
Elaborada bajo la dirección del
Dr. Jean Bragard

Septiembre 2003

Depto. de Física y Matemática Aplicada,
Facultad de Ciencias, Universidad de Navarra,
E-31080 Pamplona, España

Tesis doctoral de la Facultad de Ciencias
Universidad de Navarra, Pamplona (España)
Carolina Mendoza Parra (cmendoza@fisica.unav.es)
Análisis de Fenómenos de Sincronización en Sistemas Caóticos de Alta Dimensión
Pamplona, 2003.

Este documento ha sido elaborado con L^AT_EX, Versión 3.14.

D. Jean Bragard, Profesor Adjunto del Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra

CERTIFICA: que la presente Memoria, “Análisis de fenómenos de sincronización en sistemas caóticos de alta dimensión” ha sido realizada bajo mi dirección en el Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra por Dña. Carolina Andrea Mendoza Parra.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firmo la presente certificación en Pamplona, el diez de septiembre de dos mil tres.

Fdo.: Jean Bragard

Agradecimientos

En primer lugar, deseo agradecer al Dr. Jean Bragard, director de esta tesis, por su ayuda, paciencia y disponibilidad, ya que sin su apoyo, este trabajo no habría sido posible.

Un agradecimiento muy especial para el Dr. Stefano Boccaletti, no sólo por sus ideas y valiosa ayuda en la reorientación de ésta tesis, sino por su generosidad, paciencia y hospitalidad en el Istituto Nazionale di Ottica Applicata de Florencia.

Mi reconocimiento y gratitud para el Dr. Javier Martínez Mardones, la Dra. María Jesús Chasco y al Dr. Héctor Mancini por el respaldo y la confianza que depositaron en mí.

Mis agradecimientos para el Dr. Antonio Pelaéz, por su disponibilidad, paciencia y cooperación en la redacción de esta tesis. De igual forma, agradezco al Dr. Carlos Pérez García por el apoyo que me brindó durante éstos años. Y al Dr. Antonio Politi por su preocupación e ideas durante mi estancia en Florencia.

Durante el tiempo que he pertenecido al departamento de Física, he sentido el apoyo y el aprecio de cada uno de sus miembros y por eso me es grato mencionarlos para agradecer su contribución a mi trabajo: Sergio Ardanza, Javier Burguete, Ángel Garcimartín, Wenceslao González, Diego Maza, Diego Valladares, Fernando Varela, Carmen Palacios y Emilio Díaz. A los ayudantes Angela Bernardini, Sergio Casado, Montserrat Miranda, Begoña Peña, Andrea Vallone, Cecilia Wolluscheck, María Yoldi e Iker Zuriguel. Finalmente el personal del departamento Pedro Elizalde, Emmanuel Mancini, Pilar Ayúcar y María José Collados.

A Santiago por animarme día a día a seguir adelante y ayudarme incondicionalmente todos estos años.

A mi familia, que siempre han estado a mi lado, salvando la barrera de la distancia.

Asimismo, agradezco a la Asociación de Amigos de la Universidad de Navarra por la beca durante los periodos 1999–2000, 2002–2003 y al banco Santander Central Hispano por el apoyo económico durante los años 2001–2002, y al proyecto COSYCS of SENS por la estancia en Florencia (Italia).

Índice General

Introducción	1
1 Tipos de Sincronización	9
1.1 Sincronización completa (<i>CS</i>)	10
1.1.1 Acoplamiento unidireccional	11
1.1.2 Acoplamiento bidireccional	13
1.2 Estabilidad en el movimiento sincronizado	14
1.3 Sincronización de fase (<i>PS</i>)	15
1.3.1 Sincronización de fase de osciladores caóticos acoplados	18
1.3.2 Sincronización de fase en osciladores con un forzado	19
1.3.3 Fenómenos de saltos de fase	20
1.3.4 Transición anómala a la Sincronización de fase (<i>ATPS</i>)	22
1.4 Sincronización con retraso (<i>LS</i>)	24
1.5 Sincronización anticipada (<i>AS</i>)	25
1.6 Sincronización generalizada (<i>SG</i>)	27
1.7 Quasi sincronización (<i>QS</i>)	30
1.8 Sincronización intermitente con retraso (<i>ILS</i>)	31
1.9 Sincronización imperfecta de fase (<i>IPS</i>)	33
1.10 Definición de Sincronización	34
1.11 Métodos de detección de la sincronización	36
1.11.1 Sincronización generalizada	37
1.11.2 Dirección del acoplamiento	38
1.11.3 Sincronización de fase	39

2 Fenómenos estudiados en cadenas y campos	43
2.1 Sincronización global y de grupo en un conjunto de sistemas acoplados idénticos	44
2.2 Fenómeno de sincronización en poblaciones de osciladores acoplados no idénticos	45
2.2.1 Sincronización de fase en una cadena de osciladores de Rössler no idénticos	45
2.2.2 Sincronización en sistemas extensos continuos	49
3 Inestabilidad convectiva	55
3.1 Exponentes de Lyapunov	56
3.2 Cálculo del exponente de Lyapunov en el espacio tangente	58
3.3 Exponentes convectivos	60
4 Sincronización anticipada y límites de estabilidad en una cadena	65
4.1 El modelo	68
4.2 Estabilidad temporal	70
4.2.1 Dos osciladores	70
4.2.2 Cadena completa	72
4.3 Estabilidad espacial	75
5 Sincronización anómala en sistemas extensos	85
5.1 Regímenes en la ecuación <i>CGL</i>	86
5.2 Régimen AT–AT	88
5.3 Régimen PT–PT	97
5.4 Ecuación de Kuramoto–Sivashinsky modificada	101
6 Conclusiones	107
Apéndices	111
A Derivación de las ecuaciones de una cadena de osciladores de Rössler acoplados en el espacio tangente	111
B Derivación de las Ecs. de Kuramoto–Sivashinsky modificadas	117

C Convective instabilities of synchronization manifolds in spatially extended system 121

Bibliografía 125

Introducción

La sincronización surge en una amplia variedad de sistemas, como los circuitos electrónicos, láseres, reacciones químicas oscillatorias (Belousov–Zhabotinsky) y marcapasos de corazones. Todos estos sistemas son osciladores automantenidos, y presentan las siguientes propiedades:

- El oscilador es un sistema activo y contiene una fuente de energía que se transforma en un movimiento oscilatorio. Al estar aislado, el oscilador continua generando el mismo ritmo hasta que la fuente de energía se acaba. Matemáticamente, esto se describe como un sistema dinámico autónomo, es decir, que no depende explícitamente del tiempo.
- El tamaño de la oscilación se determina por los parámetros del sistema y no depende de cómo fue puesto en movimiento.
- Al ser perturbado, la oscilación vuelve a su forma original.

Los osciladores pueden mostrar ritmos de distintas formas, desde simples ondas hasta una secuencia de pulsos. Un ejemplo sencillo, para describir la sincronización es el reloj de péndulo [1], utilizado por Christiaan Huygens en el año 1665 para describir la sincronización entre dos relojes [2]. La oscilación del péndulo es de periodo T , determinado por los parámetros internos del reloj, y no depende de cómo fue puesto en movimiento (Fig. 1(a)). En efecto, su mecanismo interno transforma la energía de la cadena (el peso) en el movimiento oscilatorio del péndulo; el reloj gira los brazos contando el número de oscilaciones del péndulo, así su periodo constituye la base unitaria de tiempo. El péndulo oscila, hasta que se termina la energía. Al perturbarlo levemente vuelve a su ritmo previo.

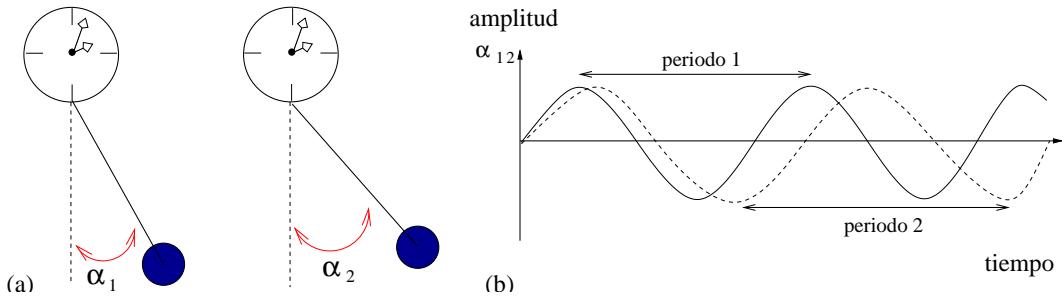


Figura 1: Dos relojes de péndulo
 (a) Los relojes no son idénticos ya que $T_2 > T_1$.
 (b) La evolución de α_1 y α_2 no están correlacionadas

Se caracteriza el ritmo como el número de oscilaciones por unidad de tiempo, es decir, la frecuencia cíclica del oscilador es $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Esta frecuencia se modifica por la acción de una fuerza externa en el oscilador, o debido a la interacción con otro sistema. Para evitar ambigüedades, se llama frecuencia natural (ω^0) a la frecuencia de un sistema autónomo (aislado).

Dos relojes nunca son idénticos, siempre se encuentra algún parámetro del mecanismo interno que los hace diferir. Esta pequeña variación causa una diferencia en los períodos oscillatorios. Por lo tanto, muestran una pequeña diferencia de temporal, y si se miran en algún instante, se encuentran los péndulos en diferentes posiciones, como se observa en la Fig. 1(b).

Los experimentos muestran que una débil interacción puede sincronizar dos relojes. Dos relojes parecidos pero no idénticos, tienen diferentes períodos de oscilación; cuando son acoplados ajustan sus ritmos y comienzan a oscilar con un periodo único. Este fenómeno se describe como el acoplamiento de frecuencias: si dos osciladores no idénticos tienen frecuencias angulares ω_1^0 y ω_2^0 , al acoplarlos alcanzan una oscilación con una frecuencia común. Que sincronicen o no, depende de la fuerza de acoplamiento y de la desviación de las frecuencias iniciales $\Delta\omega^0$.

En los experimentos descritos anteriormente, el acoplamiento depende de la capacidad del soporte común de comunicar el movimiento (ver Fig. 2). De esta forma, si el soporte es absolutamente rígido, los péndulos no se influyen. En cambio, si el

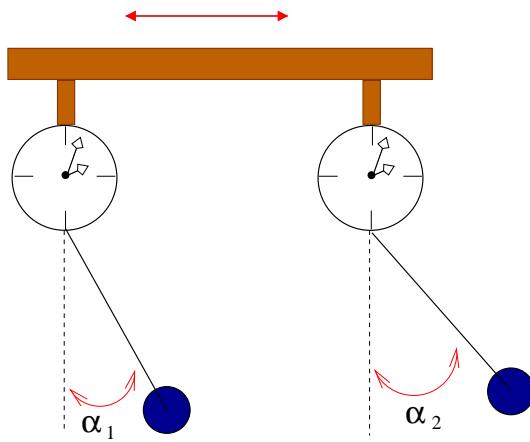


Figura 2: Dos relojes acoplados a través de un soporte común, el travesaño no es rígido (puede vibrar), esto está indicado en la parte superior de la figura. La vibración permite que ambos péndulos puedan sincronizar.

soporte puede vibrar, el acoplamiento no es nulo y los péndulos interactúan.

El acoplamiento se mide a través del desplazamiento de la frecuencia $\Delta\omega(t) = \omega_1(t) - \omega_2(t)$. Entonces, se puede encontrar como el resultado de la interacción (es decir, cuando los relojes sincronizan o no) depende de la diferencia entre las frecuencias. Imaginemos que tenemos el siguiente experimento. Primero sepáramos dos relojes (por ejemplo, los ponemos en dos habitaciones distintas) y medimos sus frecuencias ω_1^0 y ω_2^0 . Habiendo hecho esto, ponemos los relojes en un soporte común, y medimos las frecuencias ω_1 y ω_2 de los sistemas acoplados (Fig. 3).

Puede suceder que los dos péndulos oscilen de la siguiente manera: se muevan a la izquierda simultáneamente cruzando la línea vertical. Las posiciones del péndulo evolucionan en el tiempo como muestra la Fig. 3(a). Alternativamente, se encuentra que dos péndulos siempre se mueven en direcciones opuestas: cuando el primer péndulo alcanza la posición más a la izquierda, el segundo péndulo llega al extremo derecho; cuando cruzan la línea vertical, se mueven en direcciones opuestas (Fig. 3(b)). Para describir estos dos regímenes distintos, se introduce la noción de sincronización de la fase de un oscilador.

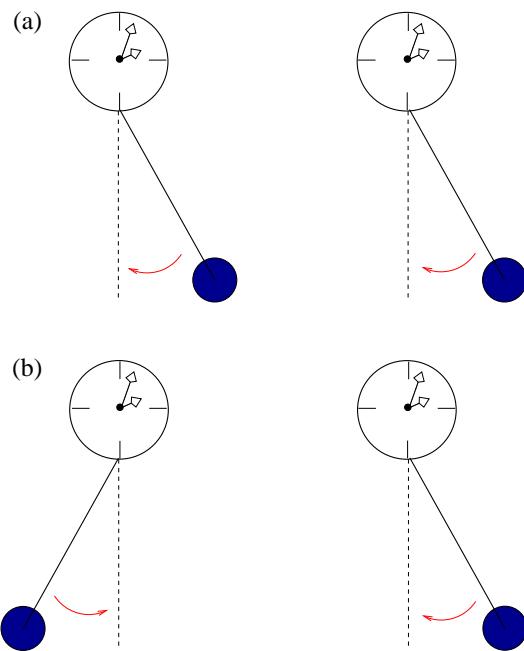


Figura 3: Posibles regímenes de sincronización (a) Presenta una sincronización de fase $\phi_2 - \phi_1 \sim 0$. (b) Muestra una sincronización en antifase $\phi_2 - \phi_1 \sim \pi$.

Si dos péndulos se mueven en la misma dirección y casi simultáneamente alcanzan, la posición extrema derecha, entonces sus fases ϕ_1 y ϕ_2 son cercanas y este estado se llama sincronización de fase (*PS*) (Fig 3(a)). Si los péndulos de dos relojes sincronizados se mueven en direcciones opuestas entonces se habla de sincronización en antifase (Fig. 3(b)). Este estado sincrónico fue observado y descrito por Christiaan Huygens [2]. Una reciente reconstrucción de este experimento hecho por I.I. Bekhman *et al.* [3] demostró que ambos regímenes en fase y antifase son posibles, dependiendo del tipo de acoplamiento. También demostraron que en ocasiones las oscilaciones de ambos relojes no difieren exactamente en uno o medio período: tienen una diferencia de fase adicional $\Delta\alpha$.

Nos interesa el caso de interacción débil entre los osciladores. Si hubiera una interacción fuerte, o incluso una ligadura como en la Fig. 4 la sincronización sería automática, pero en realidad no estaríamos hablando de dos osciladores sino de un

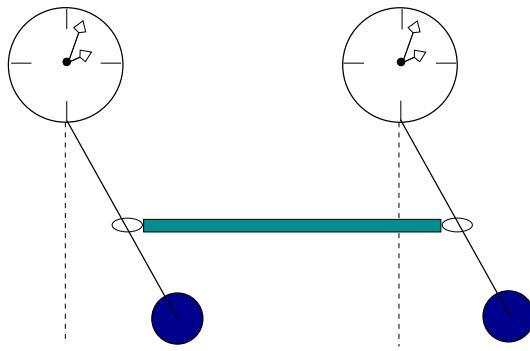


Figura 4: Ejemplo donde no se considera un acoplamiento débil.

sólo dispositivo que los contiene.

En el sentido clásico la sincronización es una adaptación de frecuencias de osciladores periódicos debido a una interacción débil. Se podría pensar que la sincronización en sistemas caóticos no es posible, por las características intrínsecas que se presentan a continuación.

Un sistema caótico queda definido por una serie de propiedades. La primera indica que es extremadamente sensible a las condiciones iniciales, esto significa que un cambio pequeño en las condiciones iniciales de un sistema caótico puede causar un cambio muy grande en los resultados. La segunda es poseer órbitas periódicas inestables. La tercera es la ergodicidad, caracterizada por el hecho de que dado un tiempo suficiente casi todas las órbitas pasan arbitrariamente cerca de todos los puntos del atractor.

Actualmente, se conoce que los osciladores automantenidos, por ejemplo, los dispositivos no lineales eléctricos pueden generar complejas señales caóticas. Muchos sistemas de osciladores naturales también exhiben comportamientos complejos. Estudios recientes han revelado que tales sistemas, siendo acoplados, son capaces de sincronizar.

La idea que subyace bajo el fenómeno de la sincronización es, si dos o más sistemas caóticos, que inicialmente evolucionan sobre trayectorias diferentes, al acoplarse de algún modo puedan tener una evolución común. La sincronización entre dos o más sistemas se consigue en una de las siguientes circunstancias: o uno de los sistemas cambia su trayectoria y sigue al otro o bien, aparece una nueva trayectoria común a

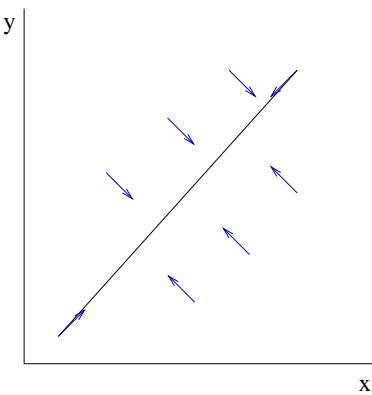


Figura 5: Esquema de la sincronización completa, los estados de los sistemas son idénticos, por esto al dibujar x frente a y se obtiene una diagonal $x = y$.

ambos [4, 5]. Se utilizará la denominación *drive* para referirnos al sistema que dirige la sincronización y *response* para el sistema que sigue la sincronización del *drive*.

Los pioneros, Pecora y Carroll [6] demostraron que, dos sistemas caóticos idénticos que tienen condiciones iniciales diferentes y que por tanto evolucionan sobre trayectorias diferentes, al ser acoplados de forma unidireccional, donde la señal caótica del sistema *drive* se usa para forzar un segundo sistema *response*, se acaban sincronizando.

El acoplamiento tiende a hacer que los estados de los osciladores sean idénticos. Esto influye no sólo en el promedio de las frecuencias sino también en las amplitudes caóticas. Como resultado, las señales coinciden y se obtiene una sincronización completa (CS Fig. 5).

El estado de sincronización completa se encuentra para cualquier valor de la fuerza de acoplamiento, pero sólo una fuerza de acoplamiento suficientemente grande hace que sea estable. De hecho, una pequeña perturbación sobre la identidad completa de los estados, hace que los estados se diferencien, es decir, $x \neq y$. Luego existe una pequeña diferencia $x - y \neq 0$. Si los osciladores no están acoplados, la respuesta se deduce de la propiedad de inestabilidad del caos, divergiendo exponencialmente en el tiempo. Cuando el acoplamiento traspasa un umbral se produce una sincronización entre los estados. Esta sincronización lleva al par $x(t)$, $y(t)$ hacia la diagonal $x = y$, tanto más rápidamente cuanto mayor sea la fuerza del acoplamiento, como se observa

en la Fig. 5.

En el capítulo 1 se describen otros tipos de acoplamientos que se han estudiado después de Pecora y Carroll, y las distintas sincronizaciones que se conocen actualmente, la definición matemática de sincronización y los métodos de detección experimentales de sincronización para la sincronización de fase y también generalizada.

En el capítulo 2 se discute la sincronización en una cadena de osciladores acoplados identificándose la sincronización global y de grupo y la sincronización en sistemas extensos (con acoplamiento en el término difusivo espacial) definiendo los indicadores de este tipo de sincronización.

En el capítulo 3 se muestran los dos medidores de la inestabilidad de un sistema espacio-temporal a través del exponente convectivo y del exponente Lyapunov respectivamente.

Se utilizará a continuación lo descrito anteriormente, para analizar la sincronización en sistemas extensos en dos casos:

El capítulo 4 intenta estudiar la estabilidad de la sincronización anticipada, con un acoplamiento unidireccional en todas las variables del sistema, a través de la simulación de una cadena de 100 osciladores caóticos con una anticipación (τ_0) con el fin de poder predecir dónde se encontrará el sistema dentro de un tiempo de ($100\tau_0$).

En el capítulo 5 se han caracterizado los sistemas extendidos, a través del estudio de dos ecuaciones de Ginzburg–Landau complejas acopladas, se ha trabajado en las regiones de turbulencia de amplitud y turbulencia de fase, encontrándose que sincronizan de forma anómala. Es decir, el sistema no alcanza la variedad de sincronización de forma monótona, así que aumentando el acoplamiento, llega a un punto en el cual, se obtiene un máximo local de decorrelación, para luego comenzar a sincronizarse y obtener la variedad de sincronización.

En el capítulo 6 se presentan las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 1

Tipos de Sincronización

Los sistemas caóticos tienen una alta sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que hace que dos sistemas comenzando en condiciones muy cercanas tengan a lo largo del tiempo trayectorias totalmente diferentes. Pecora y Carroll (*PC*) [6] mostraron que dos comportamientos caóticos se pueden unir en una única trayectoria, sincronizando de esta forma el sistema.

Para que sea posible esta sincronización, existen dos tipos de acoplamiento: *unidireccional* y *bidireccional*. En el *unidireccional o drive-response*, el sistema *response* olvida completamente su condición inicial, aunque esté evolucionando sobre un atráctor caótico, para seguir la misma trayectoria que el sistema *drive*. En el *bidireccional*, ambos sistemas están conectados de forma simétrica, lo que hace que cada uno influya sobre el otro, apareciendo una trayectoria común a ambos sistemas. Existen los siguientes tipos de sincronización:

- La sincronización completa (*CS*) implica la coincidencia de estados de los sistemas, $x_1(t) = x_2(t)$; esto sólo se encuentra en el caso que los sistemas que interactúan sean idénticos [6, 7, 8, 9].
- La sincronización de fase (*PS*) se observa cuando coinciden las fases de dos o más osciladores caóticos no idénticos, mientras sus amplitudes permanecen caóticas y no correlacionadas [10, 11], también se ha visto en osciladores forzados [12, 13] y osciladores caóticos acoplados [14]. Además, presenta fenómenos de saltos de fase [15] y la transición a la sincronización de fase anómala (*ATPS*) [16].

- La sincronización con retraso (*LS*) donde aparece una coincidencia de los estados de los sistemas $x_1(t + \tau) = x_2(t)$ [17].
- La sincronización generalizada (*GS*) se introduce en sistemas *drive-response*, en los que se define la presencia de alguna relación entre los estados de los sistemas *response* y *drive*, es decir, $x_2(t) = F(x_1(t))$ [18, 19].
- La sincronización con retardo intermitente (*ILS*) donde la sincronización retrasada es interrumpida intermitentemente, por una rotura de la sincronización [17, 20].
- La sincronización de fase imperfecta (*IPS*) se obtiene cuando existen saltos de fase en un régimen de (*PS*) [21].
- La quasi sincronización (*QS*) es una variación de la sincronización completa, en la cual sólo se sincronizan completamente algunas de sus variables [22].
- La sincronización anticipada (*AS*) sucede cuando el sistema *response* anticipa al *drive* según la siguiente condición $x(t) = y(t - \tau)$ [23].

En este capítulo presentaremos a través de un ejemplo, cada tipo de sincronización mencionada anteriormente. Luego se presenta una definición matemática de la sincronización de fase (*PS*) y generalizada (*GS*).

Finalmente se analizan los métodos de detección de la sincronización de fase (*PS*) y generalizada (*GS*), así como la determinación de la dirección del acoplamiento.

1.1 Sincronización completa (*CS*)

La *CS* se asocia a un proceso donde la interacción de dos sistemas caóticos lleva a una perfecta unión de sus trayectorias caóticas, permaneciendo en el curso del tiempo, es decir, $x(t) = x'(t)$, $y(t) = y'(t)$ y $z(t) = z'(t)$ para todos los tiempos t mayores que algún tiempo transitorio, tal como se muestra en la Fig. 1.1.

Este mecanismo fue inicialmente propuesto para acoplar de forma unidireccional a sistemas idénticos, y más tarde fue extendido a un acoplamiento bidireccional entre osciladores no idénticos [20]. En la literatura también recibe otros nombres como *sincronización convencional* [24] o *sincronización idéntica* [23]. A continuación se

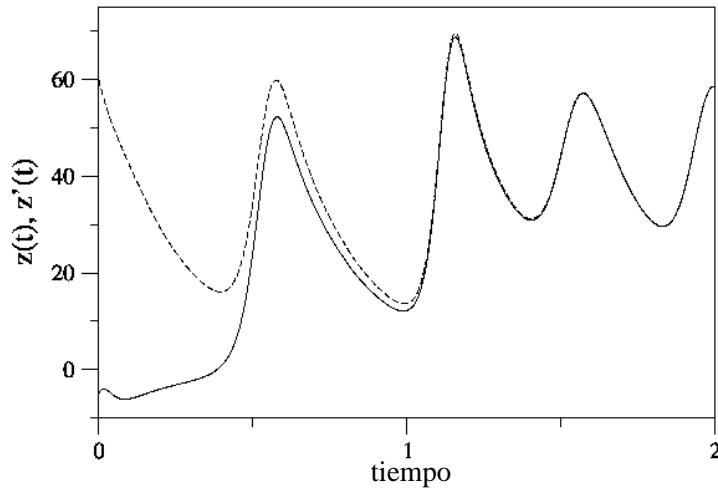


Figura 1.1: Sincronización completa del sistema Lorenz con el acoplamiento *PC*, la línea cortada representa a z mientras que la continua es z' .

presentará este tipo de sincronización para los diferentes acoplamientos unidireccional y bidireccional.

1.1.1 Acoplamiento unidireccional

En este caso el estado del sistema *response* converge de manera asintótica al estado del sistema *drive*: a modo de ejemplo, se analizará el sistema de Lorenz, bajo el acoplamiento de *PC* [6], y luego el de la Descomposición Activo Pasivo (*APD*) [25, 26].

Pecora y Carroll

Se considera un sistema dinámico n -dimensional autónomo, de la siguiente forma:

$$\dot{u} = f(u) \quad (1.1)$$

Luego se divide el sistema, arbitrariamente en dos subsistemas $u = (v, w)$, para obtener:

$$\dot{v} = g(v, w) \quad \dot{w} = h(v, w) \quad (1.2)$$

donde:

$$v = (u_1, \dots, u_m), g = (f_1(u), \dots, f_m(u)), w = (u_{m+1}, \dots, u_n) \text{ y } h = (f_{m+1}(u), \dots, f_n(u)).$$

A continuación, se crea un nuevo subsistema w' idéntico al sistema w , substituyendo el conjunto de variables de v para la correspondiente función v' en la función h , donde se llega a:

$$\dot{v} = g(v, w) \quad \dot{w} = h(v, w) \quad \dot{w}' = h(v, w') \quad (1.3)$$

Los subsistemas de componentes w y w' sincronizan sólo si $\Delta w = w' - w \rightarrow 0$ mientras $t \rightarrow \infty$.

Para el modelo de Lorenz, se considera el sistema *drive*, de forma que la variable x sea el *drive* e y, z las *response*, de esta manera se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{array} \right\} \text{drive}$$

y el sistema *response*, tal que sólo se acopla una variable de estado del sistema, es decir, $x = x'$ se obtiene que el siguiente sistema *response* se expresa como:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}' = \sigma(y' - x') \\ \dot{y}' = -xz' + rx - y' \\ \dot{z}' = xy' - bz' \end{array} \right\} \text{response}$$

En la figura 1.1 se puede ver cómo la configuración anterior alcanza la sincronización completa (*CS*).

Método de descomposición Activo–Pasivo (*APD*)

Esta descomposición es una variación del esquema *drive–response* [25]. Se basa en el hecho de que es posible considerar descomposiciones más generales de un determinado sistema dinámico, que los subsistemas propuesto por (*PC*). Partiendo de un sistema autónomo caótico:

$$\dot{\vec{z}} = F(\vec{z}) \quad (1.4)$$

se puede reescribir formalmente en diferentes vías como un sistema no-autónomo.

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, s(t)) \quad (1.5)$$

tal que el $drive$ $s(t) = h(\vec{x})$ o $\dot{s} = h(\vec{x}, s)$, puede ser una señal cualquiera, incluso caótica. La copia del sistema no-autónomo, tiene la misma señal de $drive$:

$$\dot{\vec{y}} = f(\vec{y}, s(t)) \quad (1.6)$$

La diferencia entre ambos sistemas es $\vec{e} = \vec{x} - \vec{y}$, de donde $\dot{\vec{e}} = f(\vec{x}, s) - f(\vec{y}, s) = f(\vec{x}, s) - f(\vec{x} - \vec{e}, s)$, posee un punto estable en $\vec{e} = \vec{0}$ con lo cual existe para ambos sistemas un estado de sincronización $\vec{x} = \vec{y}$. Esto se puede probar usando el análisis de estabilidad del sistema linealizado para pequeños \vec{e} o utilizando las funciones e Lyapunov, como se verá en la sección 1.2.

Para el sistema de Lorenz:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -10x_1 + s(t) \\ \dot{x}_2 &= 28x_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - 2.666x_3\end{aligned}\quad (1.7)$$

En este caso se considera $s(t) = h(\vec{x}) = 10x_2$. El tipo de acoplamiento de PC tiene sólo tres variaciones correspondientes a las tres variables del sistema x_1 , x_2 o x_3 ; en cambio el acoplamiento APD da infinitas posibilidades. En la Ref. [26] se encuentra la demostración de que el acoplamiento de PC es un caso particular del APD , al hacer los siguientes cambios $s \rightarrow v$, $x \rightarrow w$, $y \rightarrow w'$, $h \rightarrow g$ y $f \rightarrow h$.

1.1.2 Acoplamiento bidireccional

El esquema del acoplamiento bidireccional entre sistemas caóticos idénticos es equivalente a introducir una disipación en la dinámica, de la siguiente forma:

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}) + \epsilon(\vec{y} - \vec{x}) \quad (1.8)$$

$$\dot{\vec{y}} = f(\vec{y}) + \epsilon(\vec{x} - \vec{y}) \quad (1.9)$$

Donde \vec{x} e \vec{y} representan el vector de estado n -dimensional del sistema caótico, mientras que f es un vector de campo $f : R^n \rightarrow R^n$. Finalmente, ϵ es parámetro indicando el acoplamiento disipativo.

Para el sistema de Lorenz [27], se tiene: el sistema $\vec{x} = (x, y, z)$

$$\dot{x} = \sigma(y - x) + \epsilon(x' - x)$$

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -xz + rx - y + \epsilon(y' - y) \\ \dot{z} &= xy - bz + \epsilon(z' - z)\end{aligned}\tag{1.10}$$

y el sistema $\vec{y} = (x', y', z')$

$$\begin{aligned}\dot{x}' &= \sigma(y' - x') + \epsilon(x - x') \\ \dot{y}' &= -x'z' + rx' - y' + \epsilon(y - y') \\ \dot{z}' &= x'y' - bz' + \epsilon(z - z')\end{aligned}\tag{1.11}$$

El estado final de los osciladores acoplados $\vec{x}(t)$ y $\vec{x}'(t)$ no es ni una ni la otra trayectoria, sino una nueva trayectoria común para ambos sistemas.

1.2 Estabilidad en el movimiento sincronizado

El problema de la estabilidad en sistemas acoplados idénticos (Ec. (1.6)), se trata a través de la evolución temporal del error de la sincronización $\vec{e} = \vec{y} - \vec{x}$, que verifica:

$$\dot{\vec{e}} = f(\vec{x}, \vec{s}(t)) - f(\vec{y}, \vec{s}(t))\tag{1.12}$$

donde \vec{x} e \vec{y} representan los vectores de estado en el sistema de *drive* y *response*.

El régimen de *CS* existe cuando la sincronización es asintóticamente estable para todas las trayectorias posibles $\vec{s}(t)$ del sistema *drive* dentro del atractor caótico.

El estudio de la estabilidad del movimiento sincronizado posee diferentes alternativas; nosotros utilizaremos el criterio del promedio de los exponentes de Lyapunov. En el contexto del acoplamiento *drive-response*, a los exponentes de Lyapunov se les agrega el término de *condicionales*, porque son los exponentes del sistema *response* bajo la obligación explícita de que deben ser calculados sobre la trayectoria $s(t)$ [25, 28]. También son llamados *exponentes de Lyapunov transversales*, ya que corresponden a la dirección transversal de la variedad de sincronización $x \equiv y$ [29, 30].

A veces es posible estudiar la estabilidad de *CS* a través de la función de Lyapunov. Si existe una función de Lyapunov para el sistema, es decir, una función L que verifique:

- $L(\vec{e}) > 0 \forall \vec{e} \neq \vec{0}$
- $\frac{dL}{dt} < 0 \forall \vec{e} \neq \vec{0}$

entonces el sistema será estable. La función de Lyapunov da una condición suficiente para la estabilidad de la variedad de sincronización, mientras que la negatividad del exponente condicional de Lyapunov proporciona una condición necesaria. El criterio de la función de Lyapunov da una condición local para la estabilidad. Este criterio sólo se puede aplicar en un número limitado de casos, ya que no es posible encontrar en todos los casos la función de Lyapunov. Por este motivo se utilizará otro criterio de estabilidad, que se basa en separar la parte del error independiente del tiempo de la dependiente del tiempo, tal que:

$$\vec{e} = A + B(\vec{x}, t) \quad (1.13)$$

Donde A corresponde a la parte independiente del tiempo y B a la parte temporal del error. Luego, se exige que la parte real de los autovalores de A sean mayores que los de B . Esto se cumple cuando:

$$-Re[\lambda_m] > \langle \| P^{-1}BP \| \rangle \quad (1.14)$$

donde suponemos que A es diagonalizable, las columnas de P son los autovectores de A , $\langle \rangle$ denota el promedio temporal a lo largo de la trayectoria del *drive* y $Re[\lambda_m]$ es la parte real del máximo valor propio de A . El criterio de la Ec. (1.14) nos proporciona una condición suficiente de la estabilidad global. Los exponentes de Lyapunov no dan cuenta de la estabilidad local del sistema; por esto Gauthier *et al.* [29] propusieron dos parámetros tal que su negatividad determina la estabilidad global y local del sistema. Ellos tratan este punto, donde *CS* es interrumpida en cortos periodos recurrentes de desincronización. Para esto se miden dos parámetros, el promedio de la distancia a la variedad ($|X_{\perp}|_{rms}$) (rms *root mean square*) que da cuenta de la estabilidad global, mientras que el máximo valor observado ($|X_{\perp}|_{max}$) da cuenta de la estabilidad local del sistema. Tal como se muestra en la Fig. 1.2. El criterio anterior no predice una desincronización local de la variedad.

1.3 Sincronización de fase (*PS*)

La idea clásica de sincronización de fase es tener un par de osciladores periódicos, de forma que sus fases $\phi_{1,2}$, posean una relación $n : m$, siendo n y m números enteros, tal que cumplan la condición $n\omega_1 - m\omega_2 = 0$, donde ω_1 y ω_2 son las frecuencias

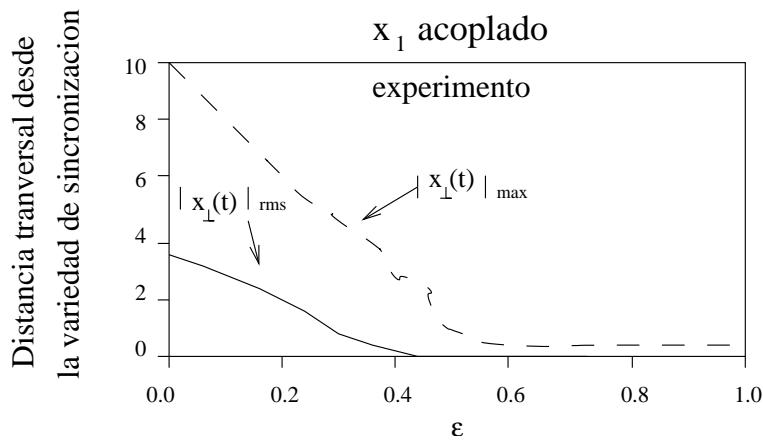


Figura 1.2: Grados de sincronización experimentalmente observados en un circuito caótico acoplado.

de los osciladores respectivamente. La PS es un acoplamiento débil de osciladores periódicos, ya que no determina estrictamente la trayectoria a seguir, y su dinámica se describe por la diferencia de fase ($\theta = n\phi_1 - m\phi_2$):

$$\dot{\theta} = \Delta\omega - \epsilon \sin \theta \quad (1.15)$$

donde $\Delta\omega = n\omega_1^0 - m\omega_2^0$ es la diferencia entre las dos frecuencias naturales, y ϵ es la fuerza del acoplamiento. La sincronización se alcanza cuando los parámetros cumplen:

$$|\frac{\Delta\omega}{\epsilon}| \leq 1 \quad (1.16)$$

la forma de la región de sincronización se conoce como las lenguas de Arnold [12, 13, 31]. En general, la sincronización perfecta de fase y frecuencia se destruye cuando los osciladores están en presencia de ruido $\xi(t)$ que es inevitable en los experimentos y en sistemas reales. En este caso, la dinámica se describe como:

$$\dot{\theta} = \Delta\omega - \epsilon \sin \theta + \xi(t) \quad (1.17)$$

En general, el ruido hace que exista una fluctuación de la diferencia de fase alrededor del mínimo de un pozo de potencial $V(\theta)$, teniendo una barrera superior de energía,

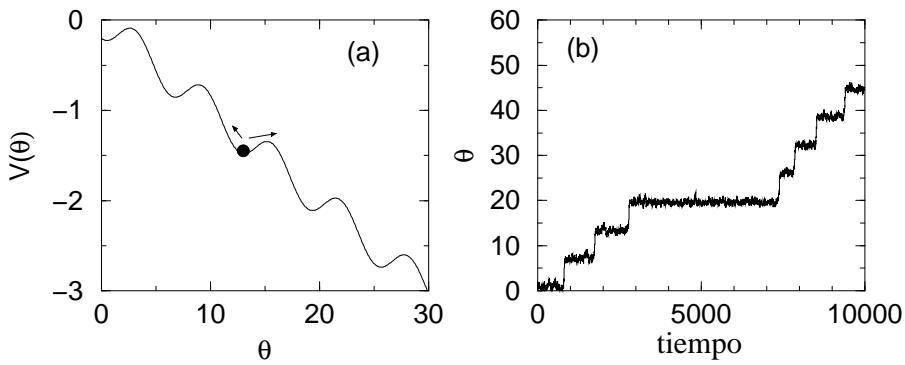


Figura 1.3: (a) Gráfico del potencial ondulado $V(\theta) = -\theta\Delta\omega - \epsilon \cos \theta$ para el sistema de la Ecuación (1.15). (b) El ruido hace fluctuar las diferencias de fase ϕ e induce los saltos de la fase.

de manera que ocasionalmente se mueve al mínimo vecino. (Fig. 1.3(a)). Se puede observar cómo el ruido induce saltos de fase de 2π , en la Fig. 1.3(b).

Para estudiar la sincronización de fase de sistemas caóticos, se necesita determinar la amplitud $A(t)$ y la fase $\phi(t)$ de la señal caótica dependientes del tiempo. Para esto, se considerará una señal analítica de la forma

$$\Psi(t) = s(t) + i\tilde{s}(t) = A(t)e^{i\phi(t)} \quad (1.18)$$

donde $\tilde{s}(t)$ es la transformada de Hilbert [32].

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (1.19)$$

donde P.V. es el valor principal de la integral de Cauchy. Por ejemplo, se puede definir la fase como $\phi(t) = \arctan(y(t)/x(t))$ o a través de la sección de Poincaré, asociándole un incremento de fase lineal de 2π .

$$\phi(t) = 2\pi \left(k + \frac{t - \tau_k}{\tau_{k+1} - \tau_k} \right) \quad (\tau_k < t < \tau_{k+1}) \quad (1.20)$$

donde τ_k es el tiempo de la k -ésima intersección del flujo con la sección de Poincaré.

La frecuencia observada se calcula como

$$\omega = \lim_{t \rightarrow \infty} 2\pi \frac{N_t}{t} \quad (1.21)$$

donde N_t es el número de intersecciones de la trayectoria de la fase con la sección de Poincaré durante el tiempo de observación t . Este método se aplica a las series temporales discretas; para eso, por ejemplo en el sistema de Rössler podemos tomar el máximo de $x(t)$ y en el de Lorenz el máximo de $z(t)$.

El estudio de la sincronización de fase de osciladores caóticos en términos de órbitas periódicas inestables se encuentra en [33, 34].

1.3.1 Sincronización de fase de osciladores caóticos acoplados

Cuando una atractor caótico sincroniza en fase con un forzamiento periódico, la mayor parte de las órbitas quedan acopladas con la frecuencia forzante; esto se denomina acoplamiento de fase. Algo parecido debe pasar cuando se acoplan dos osciladores caóticos; aunque en este caso cada oscilador caótico contribuye con un número infinito de órbitas inestables.

Se utilizará el oscilador de Rössler [8, 10] para analizar la sincronización de dos osciladores caóticos, con un acoplamiento bidireccional. Donde el sistema *drive* es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega_1^0 y_1 - z_1 + \epsilon(x_2 - x_1) \\ \dot{y}_1 &= \omega_1^0 x_1 + ay_1 \\ \dot{z}_1 &= f + z_1(x_1 - c) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Y el sistema *response* es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -\omega_2^0 y_2 - z_2 + \epsilon(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 &= \omega_2^0 x_2 + ay_2 \\ \dot{z}_2 &= f + z_2(x_2 - c) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Aquí se introducen los parámetros $\omega_1^0 = 1 + \Delta\omega^0$ y $\omega_2^0 = 1 - \Delta\omega^0$ y ϵ , que gobiernan las frecuencias y la fuerza del acoplamiento. Al incrementar el acoplamiento se observa una transición a un régimen, donde las fases rotan con velocidades iguales y la diferencia de frecuencias es, $|\phi_1 - \phi_2| < cte.$, $\Delta\omega = 0$.

De esta forma, la PS posee un débil grado de sincronización en los sistemas caóticos en contraposición con lo discutido para la CS . Para poder apreciar mejor la PS del oscilador de Rössler, se convierte el sistema original en función de la amplitud y fase, introduciendo un cambio de variables a coordenadas a polares, y considerando $\phi = \arctan(y/x)$ y $A = (x^2 + y^2)^{1/2}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{A_{1,2}} &= aA_{1,2} \sin^2 \phi_{1,2} - z_{1,2} \cos \phi_{1,2} + \epsilon(A_{2,1} \cos \phi_{2,1} \cos \phi_{1,2} - A_{1,2} \cos^2 \phi_{1,2}) \\ \dot{\phi_{1,2}} &= \omega_{1,2} + a \sin \phi_{1,2} \cos \phi_{1,2} + \frac{z_{1,2}}{A_{1,2}} \sin \phi_{1,2} \\ &\quad - \epsilon \left(\frac{A_{2,1}}{A_{1,2}} \cos \phi_{1,2} \sin \phi_{1,2} - \cos \phi_{1,2} \sin \phi_{1,2} \right) \\ \dot{z_{1,2}} &= f - cz_{1,2} + A_{1,2}z_{1,2} \cos \phi_{1,2}\end{aligned}\tag{1.24}$$

Se considera que la amplitud y la fase varían lentamente, de forma que $\phi_{1,2} = \omega_0 t + \theta_{1,2}$ [17]. Se tiene:

$$\frac{d(\theta_1 - \theta_2)}{dt} = 2\Delta\omega - \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{A_2}{A_1} + \frac{A_1}{A_2} \right) \sin(\theta_1 - \theta_2)\tag{1.25}$$

cuando las fluctuaciones de las amplitudes son nulas se encuentra que:

$$\theta_1 - \theta_2 = \arcsin \left(\frac{4\Delta\omega^0 A_1 A_2}{\epsilon(A_1^2 + A_2^2)} \right)\tag{1.26}$$

Si la fuerza de acoplamiento ϵ es más grande que el valor crítico $\epsilon_{PS} = 4\Delta\omega^0 A_1 A_2 / (A_1^2 + A_2^2)$, comienza la sincronización de fase. Esta idea es parecida a la de sincronización en el caso clásico, sólo que ahora la diferencia de fase fluctúa. Esta transición se ve en la Fig. 1.4(a). Se enfatiza que en contraste a otros tipos de sincronización de sistemas caóticos, en este caso los campos instantáneos x_1, x_2, y_1, y_2 e z_1, z_2 no coinciden. Además las correlaciones entre las amplitudes x_1 y x_2 son pequeñas como se ve en la Fig. 1.4(b) aunque las fases son completamente ancladas y altamente correlacionadas.

1.3.2 Sincronización de fase en osciladores con un forzado

Se mostrará esta sincronización a través de un oscilador caótico con un forzado periódico. El comportamiento sincronizado se ilustra con el sistema de Rössler de la Ec. (1.27) en régimen caótico con $a = 0.165$, $w = 0.97$, $f = 0.2$, $\epsilon = 0.15$ y $c = 10$, y donde $\Omega_e = 1.0$ es la frecuencia del forzado.

$$\dot{x} = -wy - z + \epsilon \sin(\Omega_e t)$$

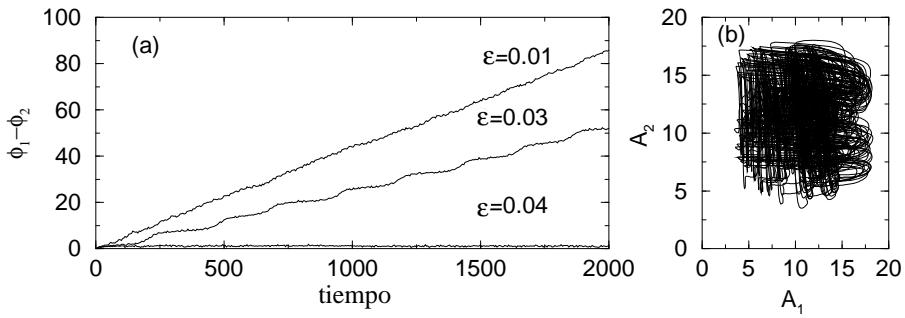


Figura 1.4: Sincronización de fase para dos osciladores caóticos de Rössler acoplados (1.22) y (1.23). (a) Diferencias de fase para distintos acoplamientos ϵ en el tiempo. (b) Amplitud A_1 vs A_2 para la PS en $\epsilon = 0.04$. Aunque las fases estén acopladas, las amplitudes permanecen descorrelacionadas.

$$\begin{aligned}\dot{y} &= wx + ay \\ \dot{z} &= f + z(x - c)\end{aligned}\tag{1.27}$$

Cuando el sistema está acoplado en fase con una señal periódica forzante, al hacer una estroscopía de los estados, el forzado restringe a un área al atractor caótico. En el espacio de los parámetros (Ω_e, ϵ) la región de sincronización mostrada en la Fig. 1.5 es muy parecida a una lengua de Arnold de oscilaciones periódicas [12, 13]. Esta distribución es relativamente uniforme en el atractor cuando el sistema está fuera de la región de acoplamiento de fase.

Este resultado es de esperar porque se sabe que las fases de osciladores caóticos de fase coherente se incrementan casi linealmente al igual que las oscilaciones periódicas [33, 34].

1.3.3 Fenómenos de saltos de fase

En la lengua de Arnold (Fig. 1.5) veremos lo que ocurre a lo largo de una línea horizontal del diagrama, fijando ϵ desde $\omega^0 = \Omega_e$. Es decir, elegimos Ω para que corresponda a la mitad de la región de sincronización y observamos como la sincronización se destruye cuando se cruza el borde de la lengua de Arnold debido a la variación de la frecuencia de forzado. Cuando se incrementa la diferencia $\omega^0 - \Omega_e$

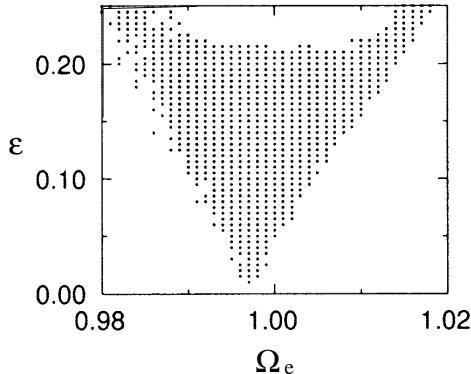


Figura 1.5: Región de sincronización del oscilador de Rössler con un forzado externo.

aparecen los saltos de fase [35].

La región de sincronización de los osciladores caóticos corresponde a la superposición de regiones de acoplamiento de fase de las órbitas periódicas inestables en el atractor [36]. La *PS* sólo se interrumpe cuando la fuerza Ω_e se acerca a la frontera de la región de Arnold, con un cambio rápido de 2π . Las órbitas periódicas inestables no están acopladas por la fuerza externa y por esto surgen los saltos de fase.

Al cruzar el borde de la lengua de Arnold, se pierde la sincronización y la diferencia de fase crece inmediatamente. Este crecimiento no es uniforme, sino que aparecen cambios rápidos prácticamente como un salto, y por esto se denominan saltos de fase.

Para entender este comportamiento, hacemos la analogía con el movimiento de una partícula en un pozo de potencial inclinado (Fig. 1.3(a)). La perdida de sincronización corresponde a la desaparición del mínimo local en el potencial. Entonces la partícula se desliza lentamente en esa parte pequeña en que el potencial es casi horizontal, y luego se mueve rápidamente donde el potencial es abrupto, que corresponde al salto de fase.

Con nuevos incrementos de la diferencia de fase, la duración de las etapas de sincronización son más pequeñas y el crecimiento de la diferencia de fase es casi uniforme.

1.3.4 Transición anómala a la Sincronización de fase (*ATPS*)

Para mostrar esta transición analizaremos dos casos, el caso común del oscilador de Rössler, que nos mostrará una transición normal, y el caso del modelo de Foodweb, donde se podrá ver la anomalía.

Se utiliza un anillo de osciladores de Rössler no-idénticos, acoplados bidireccionalmente en la segunda variable (cada uno con el siguiente y el primero con el último). Por la evolución de cada oscilador, sus frecuencias alcanzan una frecuencia común distinta de las propias de cada sistema, llegando a la *PS*.

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= -b_i y_i - z_i \\ \dot{y}_i &= b_i x_i + a y_i + \frac{\epsilon}{m} \sum_j (y_j - y_i) \\ \dot{z}_i &= 0.4 + (x_i - 8.5) z_i\end{aligned}\tag{1.28}$$

También consideramos un anillo de modelos *Foodweb* no-idénticos con el mismo tipo de acoplamiento:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= a(x_i - x_0) - \alpha_1 x_i y_i \\ \dot{y}_i &= -b_i(y_i - y_0) + \alpha_1 x_i y_i - \alpha_2 y_i z_i + \frac{\epsilon}{m} \sum_j (y_j - y_i) \\ \dot{z}_i &= -c(z_i - z_0)\end{aligned}\tag{1.29}$$

Definimos:

$$z = Re^{i\Psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j}\tag{1.30}$$

donde ϕ_j es la fase de cada oscilador, el parámetro R es la amplitud de z y Ψ define el promedio de la fase del conjunto. Definimos el desorden de las frecuencias como la desviación estándar $\sigma(\epsilon)$ de las frecuencias de los osciladores. Al explorar esto en más detalle, en la Fig. 1.6 Montbrió *et al.* [16] comparan la transición a la sincronización en anillos de sistemas de Rössler y Foodweb. A pesar del hecho que ambos sistemas tienen una topología del atractor idéntica se encuentran diferencias fundamentales en la respuesta a la interacción. Para el anillo de sistemas de Rössler, como se espera, $\sigma(\epsilon)$ decrece monótonamente con el incremento de la fuerza de acoplamiento.

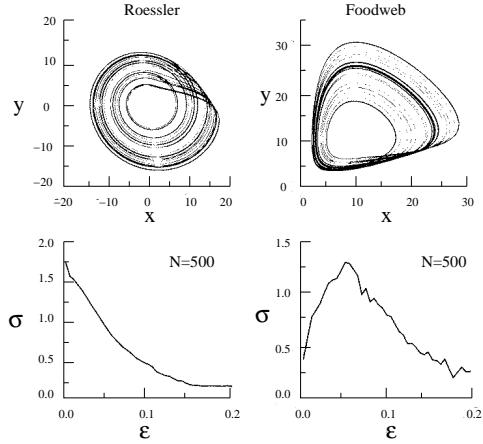


Figura 1.6: Comparación de la transición a la sincronización en una cadena de 500 sistemas de Rössler acoplados (izquierda) y modelos Foodweb (derecha). Los osciladores son acoplados en la variable y con una fuerza de acoplamiento ϵ a los vecinos en un anillo con condiciones de borde periódicas. Los valores iniciales son aleatorios. Arriba, la proyección del sistema desacoplado en el plano (x, y) . Abajo, la desviación estándar como una función del acoplamiento. Los valores de los parámetros para el sistema Rössler $a = 0.15$, y para el modelo Foodweb $x_0 = 1.5$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0.1$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.6$, $a = 1.0$ y $c = 10$. Los parámetros b_i son tomados en ambos sistemas como una distribución aleatoria uniforme en el rango $b_i = 0.97 \pm 0.025$.

En contraste, el anillo de modelos Foodweb muestra un comportamiento totalmente diferente. Al incrementar el acoplamiento el desorden de la frecuencia primero crece alcanzando la máxima decoherencia para niveles intermedios del acoplamiento. Sólo para fuerzas de acoplamiento más grandes, el desorden de frecuencias se reduce nuevamente. Llamaremos este inusual incremento del desorden con la fuerza de acoplamiento *transición anómala de la sincronización de fase* ó (ATPS).

1.4 Sincronización con retraso (*LS*)

En el caso de tener un acoplamiento débil entre dos sistemas no idénticos [17], en el que se pueda encontrar una relación entre las amplitudes, es posible obtener la *LS*, donde los estados de los osciladores son muy parecidos, pero un sistema tiene un retraso en el tiempo con respecto al otro. Para ver cómo se establece esta sincronización enfocamos la dinámica de amplitud de la Ec. (1.24); se utiliza un proceso similar excepto por los términos que contienen ambas fases $\theta_{1,2}$ y las variables $z_{1,2}$, de manera que se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{A}_{1,2} &= \frac{a}{2}A_{1,2} - z_{1,2} \cos(w_0 t + \theta_{1,2}) + \frac{\epsilon}{2}(A_{2,1} \cos(\theta_1 - \theta_2) - A_{1,2}) \\ \dot{z}_{1,2} &= f - cz_{1,2} + A_{1,2}z_{1,2} \cos(w_0 t + \theta_{1,2})\end{aligned}\quad (1.31)$$

donde el forzamiento es $\cos(w_0 t + \theta_{1,2})$.

Si los dos osciladores son idénticos, cuando $\epsilon > \epsilon_{cs}$, se observa sincronización completa $\theta_1 - \theta_2 = 0$, donde ϵ_{cs} es el umbral de acoplamiento en que uno de los dos exponentes de Lyapunov positivos cruza el cero y se vuelve negativo. Para un pequeño parámetro de asintonía Δw , se produce un salto de fase no despreciable en la Ec. (1.26). El estado del sistema queda casi igual pero con un tiempo de retraso $\tau_0 = (\theta_1 - \theta_2)/w_0$, es decir:

$$x_2(t + \tau_0) \approx x_1(t), \quad y_2(t + \tau_0) \approx y_1(t), \quad z_2(t + \tau_0) \approx z_1(t) \quad (1.32)$$

que es la llamada sincronización retrasada.

La *LS* se describe cuantitativamente por una función $S(\tau)$ que introduce un promedio de diferencias entre las variables $x_1(t)$ y $x_2(t + \tau)$, de manera que:

$$S^2(t) = \frac{\langle (x_2(t + \tau) - x_1(t))^2 \rangle}{\sqrt{\langle x_1^2(t) \rangle \langle x_2^2(t) \rangle}} \quad (1.33)$$

y se busca su mínimo $\sigma = \min_\tau S(\tau) = S(\tau_0)$. Esta cantidad es similar a la función de correlación cruzada $\langle (x_1(t)x_2(t + \tau))^2 \rangle$, pero S es especialmente conveniente para mediciones de sincronización con retraso de las series temporales en que $S(\tau_0) \approx 0$, con $\tau_0 \neq 0$, lo que indica sincronización con retraso.

Cuando ϵ se acerca $\epsilon_{lag} = 0.14$, donde efectivamente σ alcanza un cero para un τ_0 distinto de cero, el sistema se somete a la transición de sincronización retrasada.

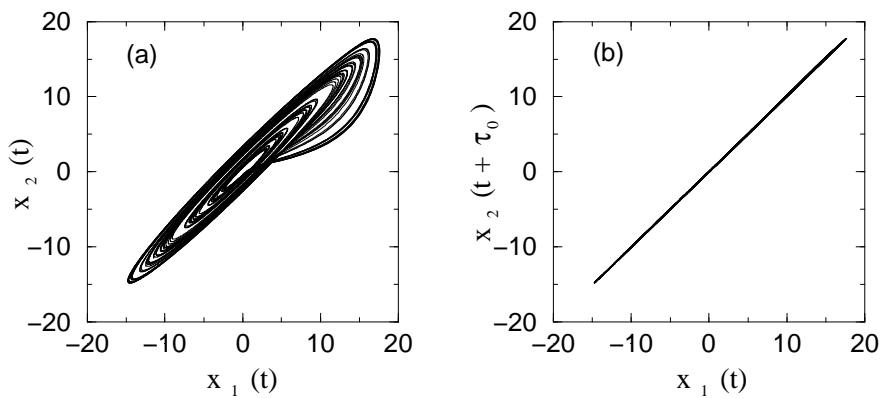


Figura 1.7: Ilustración para la sincronización retrasada con $\epsilon = 20$. (a) Gráfico de $x_1(t)$ vs. $x_2(t)$ muestra que el sistema está completamente desincronizado; (b) Gráfico de $x_1(t)$ vs. $x_2(t + \tau_0)$ con $\tau_0 = 0.21$, la linea recta exhibe la sincronización retrasada.

Después identificando el tiempo de retraso τ_0 por esta función S , la sincronización retrasada se dibuja directamente por $x_2(t + \tau)$ frente a $x_1(t)$ que queda restringida a la diagonal, como se puede ver en la Fig. 1.7. Taherion *et al.* [37] mostraron experimentalmente que la sincronización retrasada es robusta bajo una perturbación.

1.5 Sincronización anticipada (*AS*)

La *AS* es una propiedad de osciladores caóticos idénticos acoplados unidireccionalmente, tales que:

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}) \quad [x \in R^n] \quad (1.34)$$

sea el *drive* y el *response*

$$\dot{\vec{y}} = f(\vec{y}) + \epsilon(\vec{x} - \vec{y}(t - \tau)) \quad (y \in R^n) \quad (1.35)$$

donde ϵ es el acoplamiento y ambos sistemas se sincronizan completamente.

Voss [23] encontró un tipo de variedad de sincronización en que $x(t) = y(t - \tau)$ o su equivalente $y(t) = x(t + \tau)$, donde el sistema *response* anticipa al sistema *drive*, a través de la *CS*.

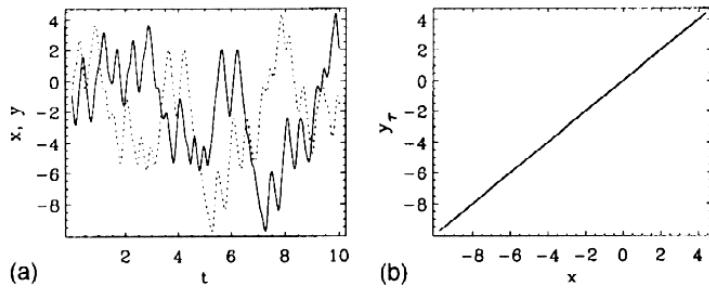


Figura 1.8: (a) Evolución de x e y , (b) Sincronización anticipada para $\tau = 16$.

Para el sistema (Ecs. (1.34) y (1.35)), la evolución de la sincronización en el tiempo se mide por $\Delta(t) := x(t) - y(t - \tau)$.

Por lo tanto, la variedad de sincronización $x(t) = y(t - \tau)$ es estable, después de algún tiempo transitorio. Si el sistema *response* anticipa a otro sistema *drive*, y así sucesivamente, en una cadena de osciladores se puede predecir para tiempos mayores que τ .

En las simulaciones numéricas hechas para los sistemas de Rössler con doce osciladores acoplados unidireccionalmente, donde se va añadiendo uno a uno los osciladores después de un tiempo transitorio T_0 , Voss [38] mostró que el tiempo de anticipación se puede extender al agregar más osciladores y que con ello no se pierde el estado de sincronización del sistema (Fig. 1.8). Siendo los dos primeros osciladores:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\omega^0 y_1 - z_1 \\ \dot{y}_1 = \omega^0 x_1 + ay_1 \\ \dot{z}_1 = f + z_1(x_1 - c) \end{array} \right\} \text{drive}$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_2 = -\omega^0 y_2 - z_2 + \epsilon(x_1 - x_2(t - \tau_0)) \\ \dot{y}_2 = \omega^0 x_2 + ay_2 + \epsilon(y_1 - y_2(t - \tau_0)) \\ \dot{z}_2 = f + z_2(x_2 - c) + \epsilon(z_1 - z_2(t - \tau_0)) \end{array} \right\} \text{response}$$
(1.36)

con los siguientes valores $\omega^0 = 1.0$, $f = 0.2$, $c = 10$ y $a = 0.15$ la variedad de sincronización es $\vec{x}(t) - \vec{y}(t - \tau_0) = 0$, donde $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{y} = (x_2, y_2, z_2)$.

En [38] se demostró que al aumentar el espacio de fase del sistema *drive* (considerando una cadena de sistemas *drive*), se puede lograr que los tiempos de anticipación sean múltiplos del tiempo de retraso. Además, como es natural, el aumento del número de osciladores exige un mayor tiempo transitorio para llegar a la sincronización [39].

1.6 Sincronización generalizada (*SG*)

Cuando existe una diferencia esencial entre los sistemas acoplados, se hace difícil determinar una variedad de sincronización. La sincronización generalizada (*GS*) [8, 18] para un acoplamiento unidireccional tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= \vec{F}(\vec{x}) \\ \dot{\vec{y}} &= \vec{G}(\vec{y}, \vec{h}_\mu(\vec{x}))\end{aligned}\tag{1.37}$$

donde \vec{x} es el vector de estado n -dimensional del sistema *drive* e \vec{y} es el vector de estado m -dimensional del sistema *response*. \vec{F} y \vec{G} son los campos vectoriales y el acoplamiento entre el *drive* y *response* es $\vec{h}_\mu(\vec{x})$. Cuando $\mu = 0$ el sistema *response* es independiente. Para $\mu \neq 0$ se dice que las trayectorias caóticas están sincronizadas en sentido general, si existe alguna transformación de $\vec{y} \rightarrow \Psi \vec{x}$ tal que $\vec{y}(t) = \Psi(\vec{x}, t)$ en estado sincronizado.

A modo de ejemplo, se toma el sistema de Rössler en la configuración *drive-response*, tal que el sistema *drive* sea:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -(y_1 + z_1) \\ \dot{y}_1 &= x_1 + ay_1 \\ \dot{z}_1 &= f + z_1(x_1 - \mu)\end{aligned}\tag{1.38}$$

y el sistema *response*:

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= -(y_2 + z_2) + \epsilon(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 &= x_2 + ay_2 \\ \dot{z}_2 &= f + z_2(x_2 - \mu)\end{aligned}\tag{1.39}$$

Donde $a = 0.2$, $f = 0.2$ y $\mu = 5.7$. El sistema *response* se podrá sincronizar regulando ϵ . Por este motivo, la sincronización no se encuentra para todo ϵ como se ve en la Fig.

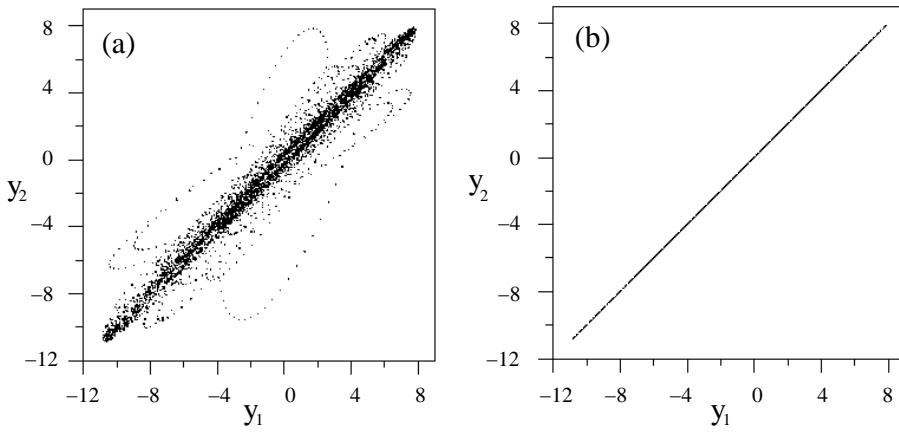


Figura 1.9: La proyección en el plano (y_2, y_1) del atractor caótico generado por las Ecs. (1.38) y (1.39) para un acoplamiento de (a) $\epsilon = 0.1$ y (b) $\epsilon = 0.2$.

1.9 (a). Para $\epsilon = 0.1$ los sistemas acoplados están débilmente sincronizados, mientras que para $\epsilon = 0.2$ (1.9(b)) están en un *CS*.

Es posible construir otro sistema *response* que exhiba una pequeña generalización del movimiento sincronizado con el *drive*, por una simple transformación de las variables *response* (x_2, y_2, z_2) .

$$x_3 = x_2 , \quad y_3 = y_2 + \beta z_3 + \gamma z_3^2 \quad y \quad z_3 = z_2 \quad (1.40)$$

con $\beta = 0.4$ y $\gamma = -0.008$. Sustituyendo en la Ec. (1.39) obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -[y_3 + (1 - \beta)z_3 - \gamma z_3^2] - \epsilon(x_3 - x_1) \\ \dot{y}_3 &= x_3 + 0.2(y_3 - \beta z_3 - \gamma z_3^2) + (\beta + 2\gamma z_3)[0.2 + z_3(x_3 - \mu)] \\ \dot{z}_3 &= 0.2 + z_3(x_3 - \mu) \end{aligned} \quad (1.41)$$

Este nuevo sistema *response* se puede sincronizar con el *drive* para $\epsilon = 0.2$, porque se obtiene aplicando un cambio regular de coordenadas. Sin embargo, en este caso el movimiento no ocurre en una línea recta como vemos en la Fig. 1.10. Aquí el objeto atractor de las trayectorias es más complicado, tanto así, que se puede tomar como un signo de un estado no sincronizado. Con lo cual, distinguir cuándo dos variables

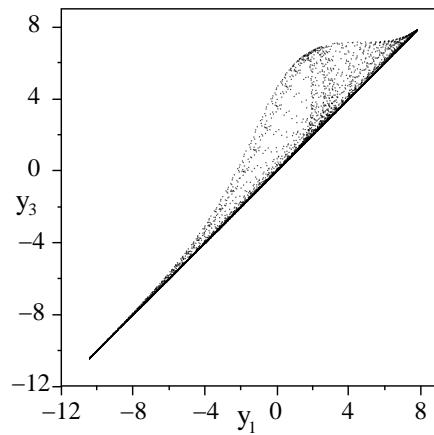


Figura 1.10: La proyección en el plano (y_1, y_3) del atractor caótico generado por las Ecs. (1.38) y (1.39) con la transformación de coordenadas dadas por la Ec. (1.40), para un acoplamiento de $\epsilon = 0.2$.

están sincronizadas de forma generalizada es más complicado que detectar el estado *CS*.

Esta definición de *GS* no es la única que existe en la literatura, la diferencia se basa en las propiedades matemáticas necesarias para la aplicación Ψ . Se hace la distinción entre dos tipos de *GS*, que son llamadas *Sincronización Débil (WS)* y *Sincronización Fuerte (SS)*, que corresponden a los casos en que la aplicación Ψ es (no es) regular, en el sentido de ser (no ser) diferenciable [24]. Y sus umbrales se determinan por dos diferentes exponentes condicionales de Lyapunov.

Kocarev y Parlitz [19] formularon las condiciones necesarias y suficientes para que ocurra la *GS* en el sistema (1.37). Como en el caso de *CS*, la noción de *GS* es equivalente a la estabilidad asintótica del sistema *response*. Definimos al sistema *response* asintóticamente estable si $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{y}_1(t, \vec{x}_1(0), \vec{y}_1(0)) - \vec{y}_2(t, \vec{x}_2(0), \vec{y}_2(0))\| = 0$, donde $(\vec{x}_1(0), \vec{y}_1(0))$ y $(\vec{x}_2(0), \vec{y}_2(0))$ son dos condiciones iniciales genéricas del sistema (1.37) sobre el atractor de sincronización. En otras palabras, $\vec{y} = \psi(\vec{x})$ (no necesariamente regular) existe cuando la acción del *drive* hace olvidar al sistema *response* sus condiciones iniciales.

La estabilidad de la variedad de *GS* se puede determinar del mismo modo que

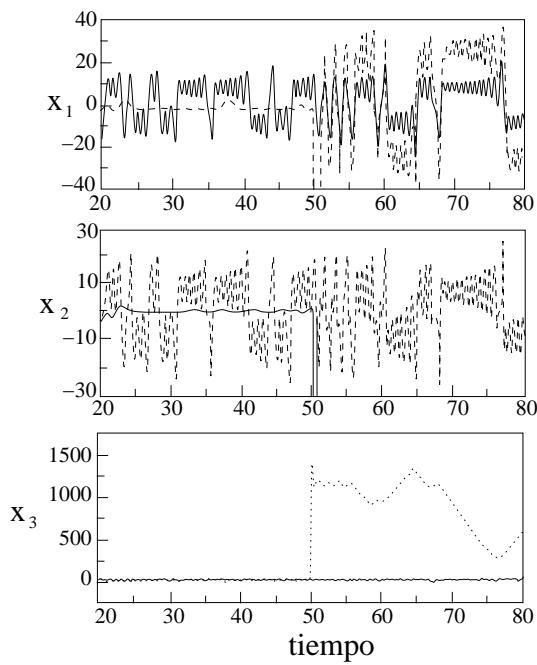


Figura 1.11: La línea de puntos corresponde a la evolución del circuito de Chua y la línea continua al oscilador de Lorenz. (a) la primera variable tiene la misma sincronización de fase, (b) la segunda variable de los sistemas alcanzan la sincronización y (c) la tercera variable no esta sincronizada.

para CS , es decir, por la negatividad de los exponentes transversales de Lyapunov o el uso de la función de Lyapunov.

Para detectar la GS en los experimentos o algunas características de la sincronización, se utiliza el método de los falsos vecinos mutuos [18] que se explicará en la sección 1.11.

1.7 Quasi sincronización (QS)

Dos sistemas caóticos no idénticos están en QS si algunas de sus variables están sincronizadas y otras no.

Femat *et al.* [22] acoplaron un sistema Lorenz y un circuito de Chua, bajo el régimen *drive-response*. En la Fig. 1.11, se muestran las evoluciones de cada variable, donde la línea punteada corresponde al circuito de Chua y la línea continua al oscilador de Lorenz. Para tiempos menores que 50, el sistema no está sincronizado en ninguna variable. Sin embargo, se observa que para un tiempo > 50 , los sistemas presentan *PS* para la primera variable x_1 , *CS* para la segunda variable x_2 y finalmente para x_3 se observa que no sincronizan.

1.8 Sincronización intermitente con retardo (*ILS*)

Este fenómeno se identifica con la intermitencia, por las excursiones locales desde *LS*. Este tipo de sincronización es producido por el hecho que el segundo exponente global de Lyapunov es negativo, pero de valor absoluto pequeño, de forma que la evolución de la dinámica puede conducir al sistema a un región del atractor donde el exponente local de Lyapunov sea positivo.

Kocarev *et al.* [17] han demostrado la conexión entre las transiciones de los exponentes de Lyapunov y las etapas de sincronización para los sistemas de Rössler acoplados. Los resultados se resumen en la Fig. 1.12. En ella se muestran los exponentes de Lyapunov, la diferencia promedio de frecuencia $\Delta\omega$, el mínimo σ de $\mathbf{S}(\tau)$ y el tiempo de retraso τ_0 , todos frente la fuerza de acoplamiento ϵ . $\Delta\Omega$ muestra una *PS* en $\epsilon_{PS} = 0.036$, donde uno de los exponentes de Lyapunov (λ) se vuelve negativo, mientras la transición a la *LS* es en $\epsilon_{LS} = 0.14$, después que otro exponente de Lyapunov hubiese cruzado el cero en $\epsilon = 0.11$.

Nos fijaremos en el régimen de la región $0.11 < \epsilon < 0.14$ donde σ tiene un valor pequeño, pero no es despreciable. El comportamiento típico de la sincronización intermitente con retardo [17], donde la sincronización retrasada se interrumpe intermitentemente por una rotura de la sincronización, se puede apreciar en la Fig. 1.13 para $\epsilon = 0.13$. Es muy similar a la pérdida intermitente de *CS* en sistemas acoplados idénticos [40, 41, 42]. Para entender esta rotura en el comportamiento de la sincronización con retraso, volvemos a la Ec. (1.31).

Al introducir las variables con retraso para el segundo sistema $\tilde{A}_2 = A_2(t + \tau)$, $\tilde{z}_2 = z_2(t + \tau)$ donde $\tau = (\theta_1 - \theta_2)/\Omega_0$, se reduce el sistema de la Ec. (1.31) a dos sistemas acoplados idénticos bajo una señal *drive* idéntica y con una perturbación

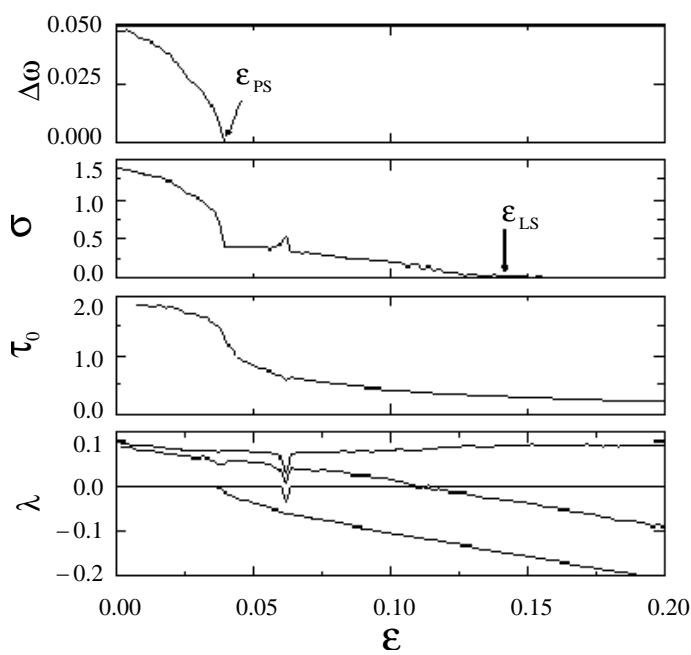


Figura 1.12: Dos osciladores de Rössler vs. el acoplamiento ϵ . (a) Después de la transición de *PS* a $\epsilon_{PS} = 0.036$, uno de los exponentes de Lyapunov es negativo. (b) La transición *LS* ocurre con $\epsilon_{LS} = 0.14$, cuando el otro exponente positivo cruza el cero en $\epsilon_{CS} = 0.11$.

adicional en términos η_1 y η_2 :

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 &= \frac{a}{2}A_1 - z_1 \cos(\Omega_0 t + \theta_1) + \frac{\epsilon}{2}(\tilde{A}_2 - A_1) + \eta_1 \\ \dot{z}_1 &= f - cz_1 + A_1 z_1 \cos(\Omega_0 t + \theta_1)\end{aligned}\quad (1.42)$$

y

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{A}}_2 &= \frac{a}{2}\tilde{A}_2 - \tilde{z}_2 \cos(\Omega_0 t + \theta_1) + \frac{\epsilon}{2}(A_1 - \tilde{A}_2) + \eta_2 \\ \dot{\tilde{z}}_2 &= f - c\tilde{z}_2 + \tilde{A}_2 \tilde{z}_2 \cos(\Omega_0 t + \theta_1)\end{aligned}\quad (1.43)$$

con

$$\eta_1 = \frac{\epsilon}{2}(A_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \tilde{A}_2) \quad (1.44)$$

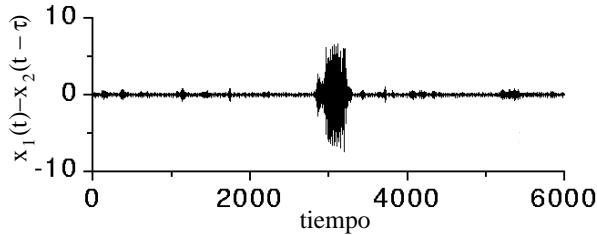


Figura 1.13: Sincronización con retraso intermitente para $\epsilon = 0.13$.

y

$$\eta_2 = \frac{\epsilon}{2} A_1 (\cos(\theta_1 - \theta_2) - 1) \quad (1.45)$$

Ahora, si se ignoran los términos perturbativos η_1 y η_2 por un momento, los dos osciladores idénticos acoplados alcanzan la *CS*, cuando uno de los dos exponentes de Lyapunov positivos se vuelve negativo en $\epsilon_{cs} = 0.11$, es decir, $A_1 = \tilde{A}_2$. Finalmente se observa la sincronización retrasada con $A_1 \approx \tilde{A}_2$ después de $\epsilon = 0.14$. Más allá del punto de transición $\epsilon_{cs} = 0.11$, la *CS* del sistema es sensible a perturbaciones de η_1 y η_2 , y el error de sincronización $A_1 - \tilde{A}_2$ puede tener una larga excursión de valores comparables al orden de A_1 o \tilde{A}_2 durante la rotura de la sincronización. Se observa la sincronización con retraso intermitente en la Fig. 1.13. Para más detalles en la Boccaletti *et al.* [20] muestran la rotura de la sincronización retrasada.

1.9 Sincronización imperfecta de fase (*IPS*)

A modo de ejemplo se considera el sistema de Lorenz con un *drive* periódico de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - 2.667z + \epsilon \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (1.46)$$

Para $r = 28$, aparecen mesetas para ciertos valores de Ω , lo que da origen a una *IPS* [21, 43, 44], como se muestra por los saltos de tamaño 2π y 4π en la Fig. 1.14.

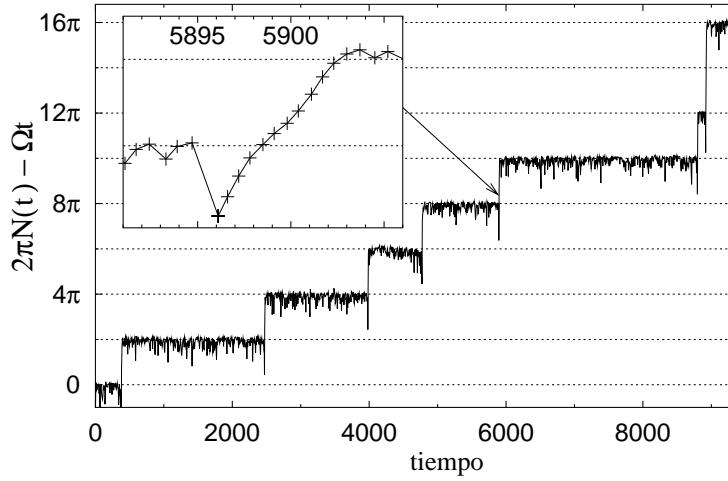


Figura 1.14: De Sparrow [27]. Saltos de fase de la sincronización de fase imperfecta en el sistema de Lorenz con un *drive* periódico.

La razón para esta sincronización de fase imperfecta, está en el parámetro r que hace coincidir el punto silla $(0, 0, 0)$ con el atractor caótico. De esta forma, la trayectoria disminuye su velocidad considerablemente cuando pasa cerca del punto silla, mientras la oscilación es mucho mas rápida cuando la trayectoria gira alrededor de uno o de dos focos inestables.

Debido a la variación de frecuencias, las regiones de acoplamiento de fase no se superponen para producir una región de sincronización completa del atractor caótico. Para una frecuencia y una amplitud dada de la señal externa del *drive*, existen ciertas órbitas inestables que no son bloqueadas y la sincronización imperfecta de fase caracteriza este comportamiento complicado.

1.10 Definición de Sincronización

En un principio la sincronización fue definida por Shraiman *et al.* y Chaté [45, 46]; habiéndose generalizado y simplificado por Boccaletti *et al.* [36, 47], siendo este último formalismo el que presentaremos a continuación.

Se considera un sistema $\vec{Z} \in R^m$ ($m = m_1 + m_2$) dividido en dos subsistemas, $\vec{X} \in R^{m_1}$ e $\vec{Y} \in R^{m_2}$. Se dice que estos dos sistemas están sincronizados, si cada evento de un subsistema (y) corresponde a otro evento particular en el subsistema (x). Se pueden identificar estos eventos con puntos del espacio de fases y la sincronización por medio de una función continua \vec{X} a \vec{Y} tal que un punto particular de \vec{X} sea aplicado, unívocamente a un punto en \vec{Y} .

La sincronización en experimentos o en simulaciones numéricas, no es tan exacta, de un determinado \tilde{x} a un determinado \tilde{y} . La situación experimental es que $x(t)$ sea cercano a \tilde{x} cuando $y(t)$ es cercano a \tilde{y} . Una función continua no es necesariamente una función suave, permitiendo sincronización generalizada con funciones exóticas.

El primer paso es definir la función continua e incluirla de forma consistente con la dinámica.

Definición: Una función f es una función de sincronización en (\tilde{u}, \tilde{v}) si (a) $\tilde{v} = f(\tilde{u})$; (b) es continua en \tilde{u} y (c) es consistente con la dinámica local $(u(t), v(t))$, en el sentido de que si δ y ϵ son un par válido para la propiedad de continuidad ($|u(t) - \tilde{u}| < \delta$ implica $|f(u) - \tilde{v}| < \epsilon$), entonces la dinámica es tal que si $|u(t) - \tilde{u}| < \delta$ se tiene $|v(t) - \tilde{v}| < \epsilon$.

En otras palabras, cerca de (\tilde{u}, \tilde{v}) la función f describe bien al subsistema \vec{V} desde el subsistema \vec{U} . Sea \mathcal{B} la cuenca de atracción de un atractor \mathcal{A} de un sistema dinámico $\vec{Z} \subset R^m$ y \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 son las proyecciones desde $R^{d_1+d_2}$ a R^{d_1} y a R^{d_2} , respectivamente.

Definición: Para una determinada función dada $\mathcal{F} : R^m \rightarrow R^{d_1+d_2}$, un sistema dinámico $\vec{Z} \subset R^m$ contiene subsistemas localmente sincrónicos en $\tilde{z} \in \mathcal{A}$ si $\forall z_0 \in \mathcal{B}$ existe un tiempo T tal que para $t \geq T$ existe una función de sincronización en $(\tilde{u} = \mathcal{P}_1(\mathcal{F}(\tilde{z})), \tilde{v} = \mathcal{P}_2(\mathcal{F}(\tilde{z})))$.

Esta definición de sincronización local es importante en fenómenos como *ILS*, que están íntimamente relacionados con las propiedades de la estabilidad local del flujo en el atractor caótico.

La definición anterior da una función asociada a cada par sincronizado (\tilde{u}, \tilde{v}) , pero ésta puede ser diferente para pares distintos. Los pares δ y ϵ válidos no tienen una relación particular en las diferentes funciones de sincronización.

Una función simple que aplica la proyección \vec{U} de $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ [$\mathcal{P}_1(\mathcal{F}(\mathcal{A})) = \mathcal{U}$] a la proyección de \vec{V} de $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ [$\mathcal{P}_2(\mathcal{F}(\mathcal{A})) = \mathcal{V}$] puede ser obtenida, como afirmaremos en el teorema de abajo. El rasgo esencial que necesitamos añadir es un conjunto de puntos de sincronización sobre el atractor que provean de una propiedad de cubrimiento.

Definición: Si $\{u_i\}$ es un conjunto de puntos de \vec{U} y $\{f_i\}$ es un conjunto de funciones continuas, con cada f_i asociada a un u_i , de \vec{U} a \vec{V} , entonces las funciones suministran un *recubrimiento con continuidad* de \vec{U} , si $\forall \epsilon > 0$ el conjunto de todos los δ_i válidos asociados con ϵ (uno para cada par (u_i, f_i)) recubre el conjunto \vec{U} .

El siguiente teorema de Boccaletti *et al.* [47] nos suministra la única función de sincronización.

Teorema: Si un subsistema \vec{U} contiene un conjunto de puntos de sincronización $\{u_i\}$ y las funciones asociadas $\{f_i\}$ suministran un recubrimiento con continuidad en \vec{U} , entonces existe una función de sincronización única y global, $f : \vec{U} \rightarrow \vec{V}$.

1.11 Métodos de detección de la sincronización

Mientras que la *CS* se detecta fácilmente al visualizar la diferencia entre las dos series temporales, la identificación de otros tipos de sincronización con interdependencias débiles no es sencilla. El método más conocido para buscar interdependencias entre dos series de muestras de datos x_i e y_i con un paso de tiempo Δt , es calcular la función de correlación cruzada (considerando el tiempo de retraso $\tau = l\Delta t$)

$$C(X, Y, \tau) = \langle [(x_i - \langle x \rangle)(y_{i-l} - \langle y \rangle)] \rangle \quad (1.47)$$

donde $\langle \cdot \rangle$ es el promedio temporal. Es importante enfatizar que $C(X, Y, \tau)$ mide sólo la interdependencia lineal entre las series temporales. La medición de la interacción no lineal, concepto de la teoría de la información, se consigue mediante la información mutua:

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (1.48)$$

que se basa en las entropías de Shannon $H(x)$ y $H(y)$ de ambas series temporales y la entropía $H(X, Y)$ junto a la función de probabilidad, como describe Pompe [48].

Muchos métodos modernos para el análisis no lineal de series temporales multivariadas se basan en la asunción que determina la dinámica responsable de series temporales complejas [49, 50]. Según el teorema de reconstrucción de Takens [51], la estructura de la dinámica en el espacio de fases se despliega y reconstruye equivalentemente en un espacio de dimensión alta desde una única serie temporal escalar. A menudo los vectores en el espacio de reconstrucción m dimensional se pueden construir

por un tiempo de retardo (por ejemplo, $\tau = l\Delta t$) como:

$$\vec{X}_i = (x_i, x_{i-l}, \dots, x_{i-(m-1)l}) \quad (1.49)$$

Para múltiples series de tiempo, los parámetros de reconstrucción m y l pueden ser diferentes y a menudo podrán ser cambiados individualmente por X e Y . Para más detalles sobre la optimización de estos parámetros se puede consultar las referencias Abarbanel *et al.* [49] y Kantz *et al.* [50]. Se proponen muchos métodos para reducir el ruido, y se usan cantidades invariantes, como los exponentes de Lyapunov λ_i o las dimensiones D_i . Se realizan predicciones de series temporales y se pueden construir modelos locales o globales.¹

Además de estos métodos generales de análisis de datos no lineales, se han desarrollado recientemente técnicas especiales para el análisis de sincronización. A continuación hacemos un resumen de estos métodos para las sincronizaciones generalizada y de fase [36].

1.11.1 Sincronización generalizada

Se considera un sistema compuesto de dos sistemas acoplados con señales escalares $x(t)$ de dimensión m_1 e $y(t)$ de dimensión m_2 . Construimos un espacio global de dimensión $m = m_1 + m_2$ [52].

$$\tilde{z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \\ \vdots \\ x(t - (m_1 - 1)\tau_1) \\ y(t) \\ y(t - \tau_2) \\ \vdots \\ y(t - (m_2 - 1)\tau_2) \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

Es necesario ampliar el teorema de los falsos vecinos más próximos propuestos por Rulkov *et al.* [18] y Cenys *et al.* [53], donde $\tilde{z} \in R^m$ es un vector cuyas componentes son los escalares x, y con un tiempo de retraso τ_1, τ_2 y para considerar todas la

¹Un programa de análisis de series temporales no lineales, es el TISEAN 2.1 que se encuentra en <http://www.mpiipks-dresden.mpg.de/~tisean>

variables m-dimensionales \tilde{z}_j donde $j = 1, \dots, N$ con N el número de mediciones disponibles. Cada dato \tilde{z}_1 (\tilde{z}_2) se asocia con \tilde{z}_{NN_1} (\tilde{z}_{NN_2}) su primer vecino más próximo en un radio δ , de modo que tengamos $\tilde{z}_{NN_1}^{(1)}$ ($\tilde{z}_{NN_2}^{(1)}$) su primer vecino más próximo asociado a x y $\tilde{z}_{NN_1}^{(2)}$ ($\tilde{z}_{NN_2}^{(2)}$) su primer vecino asociado a y . Para cada par $\tilde{z}_1, \tilde{z}_{NN_1}$ se calcula la distancia [54, 55, 56]. A continuación se aumenta la dimensión en 1, para saber si es un falso vecino, tomando el incremento sólo en una variable x o y y se cuentan las parejas de falsos vecinos $N_1(m)$ y $N_2(m)$. Cuando N_1 y N_2 son cero, se obtiene la dimensión de m .

En este momento, se busca una función entre los dos subespacios m_1 y m_2 . Se considera el valor de m_1 , \tilde{x}^* , con su correspondiente \tilde{y}^* de m_2 . Hay que notar que la única componente que siempre tiene el mismo tiempo es $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$. $\tilde{x}^* = \tilde{x}(t)$ y $\tilde{y}^* = \tilde{y}(t)$, se introduce un entorno de y con un radio δ_1 y se busca una relación entre $f : x \rightarrow y$. Elegimos δ_1 y δ_2 positivos. Si todas las imágenes de los n vectores que entran en el entorno de \tilde{x}^* de radio δ_2 , entran también en el entorno de \tilde{y}^* de radio δ_1 hemos acabado, en caso contrario, se disminuye δ_2 . Para el entorno B la probabilidad es

$$P(B) = \frac{m}{N} \quad (1.51)$$

y la probabilidad de que los n puntos estén en el espacio m es:

$$P_n(B) = \left(\frac{m}{n}\right)^n \quad (1.52)$$

Ahora se busca la probabilidad de que $N - m$ puntos estén en B , utilizando la distribución binomial $d(N - m, m, P(B)) = K$ [57] y se define

$$\theta = 1 - \frac{P_n(B)}{K} = \begin{cases} 0 & \text{no existe una función, faltan puntos} \\ 1 & \text{si existe una función, está asegurada} \end{cases} \quad (1.53)$$

1.11.2 Dirección del acoplamiento

Debido a las diferentes configuraciones del acoplamiento, la interdependencia entre X e Y puede ser asimétrica, como el acoplamiento unidireccional de X a Y , Y es afectado por X , mientras X no está influenciado por Y . En otro caso, consideraremos un acoplamiento bidireccional X a Y y de Y a X .

Se determina la dirección del acoplamiento por las mediciones basadas en la reconstrucción en el espacio de estado.

Para un acoplamiento unidireccional desde X a Y , cuando el acoplamiento es débil se puede predecir de Y a X pero no al revés y de esta forma se detecta la relación entre el *drive* y el *response*, al utilizar la predicción mutua descrita por Schiff *et al.* [57]. Cuando se observa una *GS* a partir de una predicción bidireccional mutua, el acoplamiento unidireccional no se diferencia del bidireccional. Por tanto, se debe conocer desde un principio si el acoplamiento es unidireccional. La predicción mutua bidireccional implica una *GS*.

Un método para detectar la geometría de un acoplamiento *drive–response* bajo *GS* se encuentra en [58].

1.11.3 Sincronización de fase

Para detectar la *PS*, se busca la correlación entre fases en las series temporales anteriores. Para ello, se calcula la fase utilizando un filtro. Dada una señal analítica $V(t)$

$$V(t) = A(t)e^{i\phi(t)} = x(t) \odot F(t) \quad (1.54)$$

donde \odot denota la convolución, el registro de la fase es un problema de filtrado de la señal. Una elección puede ser un filtro de tipo Gaussiano alrededor de una frecuencia característica ν_0 con un ancho σ , por ejemplo, $F(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp[-i\nu_0 t + \sigma^2 t^2/2]$; DeShazer *et al.* [59] discuten esta definición de la fase.

Con los registros de fase y frecuencia, se detecta la sincronización. Debido a diversos efectos, se encuentra un límite de la sincronización de fase apareciendo la sincronización imperfecta y ruido. Las fases no están acopladas perfectamente: a menudo se interrumpen por saltos de fase. Schäfer *et al.* [60] presentan algunos métodos para detectar la *PS* con ruido de fondo.

- Análisis de diferencia de fase

Los períodos del acoplamiento de fase se manifiestan por la de diferencia $\Delta\phi_{n,m} = n\phi_x - m\phi_y$ constante. Sin embargo, debido al ruido o fluctuaciones caóticas de la señal, no se detecta fácilmente, y por tanto, se analiza la distribución de los ciclos de diferencia de fase $\Delta\Phi_{n,m} = \Delta\phi_{n,m} \bmod 2\pi$, donde los máximos locales indican las diferencias de fases entre los sistemas. Tass *et al.* [61] proponen las medidas de $n : m$ índices sincronizados, en base a la entropía de Shannon. Otro

índice se basa en la probabilidad condicional γ_l . Los intervalos de las dos fases ϕ_x y ϕ_y , $[0, n2\pi]$ y $[0, m2\pi]$, son divididos en N compartimentos. Para cada compartimento l , se calcula:

$$\gamma_l(t_j) = \frac{1}{M_l} \sum e^{i\phi_y(t-j)} \quad (1.55)$$

para todo j tal que, $\phi_x(t_j)$ pertenezca al compartimento l , siendo M_l el número de puntos en l . Se promedia $\gamma_l(t_j)$ sobre N y se determina el índice de sincronización:

$$\lambda_{n,m} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N |\gamma_l(t_j)| \quad (1.56)$$

que tiene un valor entre 0 y 1. También se define otra cantidad basándose en la diferencia de fase $\Delta\Phi_{n,m}$ como:

$$\tilde{\lambda}_{n,m} = <\sin^2 \Delta\Phi_{n,m}> + <\cos^2 \Delta\Phi_{n,m}> \quad (1.57)$$

La información mutua entre las distribuciones de las fases ϕ_x y ϕ_y se calcula como medida cuantitativa del grado de sincronización de fase [47, 62].

- Razón de frecuencia instantánea

Para sistemas sincronizados, la razón $(n : m)$ podrá fluctuar alrededor de un número racional. Su ventaja es que no existe necesidad de buscar los valores adecuados de n y m . Sin embargo, debido al ruido, a la no estacionariedad y los cortos intervalos de los episodios de sincronización, podríamos no ser capaces de distinguir la sincronización de la coincidencias ocasional de frecuencias, y este método puede ser usado solamente en adición al análisis de las diferencias de fase.

- Construyendo un sincrograma

Este método utiliza la idea de una fase estroboscópica: cuando el ciclo de fase de un sistema alcanza un cierto valor fijo θ en un momento t_k , por ejemplo, $\phi_k(t_k) = \theta$, la fase cíclica de otro sistema se dibuja vs. t_k para construir un sincrograma de orden m , es decir:

$$\Psi(t_k) = \phi_y(t_k) \bmod (2\pi m) \quad (1.58)$$

En esta presentación gráfica, la sincronización $n : m$ puede ser visualizada mediante n rectas horizontales distintas y las transiciones entre las diferentes razones de acoplamiento de fase pueden ser resaltadas, lo que es extremadamente útil para la aplicación a datos biológicos donde la no estacionariedad es frecuentemente fuerte.

Capítulo 2

Fenómenos estudiados en cadenas y campos

Un sistema extenso, en una primera aproximación se puede describir como un conjunto de sistemas caóticos conectados por medio de un determinado acoplamiento, que puede ser local o global. La sincronización espacio temporal del caos para estos sistemas ha sido estudiado para poblaciones de sistemas dinámicos acoplados [63], para sistemas hamiltonianos acoplados o elementos biestables [64], redes neuronales [65], mapas discretos de tiempo con el principal campo global acoplado [66, 67], y para otras muchas situaciones que serán resumidas a continuación.

Se han estudiado intensivamente fenómenos colectivos en redes de osciladores periódicos acoplados, modelando la descripción de problemas físicos [68, 69, 70, 71, 72, 73] y biológicos [74, 75, 76]. Los osciladores acoplados se utilizan en modelos más generales en medios fuera del equilibrio [77, 78].

En la evolución en el tiempo de sistemas extensos en el espacio, la dinámica puede dar lugar a caos espacio-temporal, formación de patrones e interfaces. Se contempla la evolución de sistemas complejos, secuencias genéticas y procesos de sincronización.

2.1 Sincronización global y de grupo en un conjunto de sistemas acoplados idénticos

En un conjunto de sistemas caóticos idénticos acoplados se observa que pueden sincronizar globalmente (*CS*) o parcialmente (*Sincronización de grupo*). El sistema fue introducido originalmente por Kaneko [79] para estudiar la dinámica colectiva en largas poblaciones de osciladores caóticos idénticos acoplados

$$x_i(n+1) = (1 - \epsilon)f(x_i(n)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_j(n)) \quad (2.1)$$

donde, $i = 1, \dots, N$ es el índice espacial, $x_i(n)$ es la variable de estado discreta en el tiempo $n = 0, 1, \dots$, ϵ es el acoplamiento y $f(x) = ax(1-x)$ (la aplicación logística).

Pecora *et al.* [80, 81, 82] consideran N osciladores idénticos acoplados difusivamente con condiciones de contorno periódicas

$$\dot{u}_j = f(u_j) + \epsilon E(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) \quad (2.2)$$

donde $j = 0, 1, \dots, N-1$, $u_j \in R^n$, la función no lineal $f : R^n \rightarrow R^n$ es una función no-lineal, ϵ es un parámetro escalar de acoplamiento, y $E = \text{diag}(e_1, \dots, e_n)$ una matriz diagonal constante de difusión con elementos $0 \leq e_i \leq 1$. El régimen de sincronización global corresponde a un estado espacial homogéneo $u_0 = u_1 = \dots = u_{N-1}$ que define una variedad de sincronización invariante M . En M la dinámica se gobierna por la ecuación de osciladores desacoplados $\dot{s} = f(s)$. La estabilidad del estado síncrono se determina por linealización de la Ec. (2.2) sobre $s(t)$. Se llega a:

$$\dot{\xi}_j = Df(s)\xi_j + \epsilon E(\xi_{j+1} - 2\xi_j + \xi_{j-1}) \quad (2.3)$$

donde $\xi_j = u_j - s$, $Df(s)$ es el Jacobiano de f en $s(t)$. Las Ecs. de estabilidad lineal (2.3) se pueden diagonalizar por la expansión en modos espaciales de Fourier, $\xi_j = (1/\sqrt(N)) \sum_{k=0}^{N-1} \eta_k \exp(-2\pi i j k / N)$. De esta forma se encuentra:

$$\dot{\eta}_k = [Df(s) - 4\epsilon \sin^2(\pi k / N)E]\eta_k \quad (2.4)$$

donde $k = 0, 1, \dots, N-1$. Resolviendo la Ec. (2.4) para una determinada $f(s)$ y una solución $s(t)$, se pueden obtener todos los exponentes de Lyapunov que determinan la estabilidad de la variedad de sincronización M . En [80, 81] se encontró que para

el sistema de Rössler acoplado, al incrementar el acoplamiento se puede adelantar el desestabilizamiento del estado síncrono. Este fenómeno se llama bifurcación de longitud de onda corta.

Se ha observado la sincronización global o de grupo en conjuntos de sistemas idénticos, el fenómeno de antifase y la sincronización de fase–antifase [83, 84, 85, 86, 87]. Estos tipos de sincronización son definidos por la existencia de una variedad invariante lineal transversal estable. Tal sincronización de antifase se observa en un sistema de osciladores acoplados donde todas las variables correspondientes a los osciladores son iguales con signo opuesto. En la sincronización fase–antifase, un conjunto de las variables correspondientes es igual, mientras el otro es igual pero con signo opuesto.

2.2 Fenómeno de sincronización en poblaciones de osciladores acoplados no idénticos

El estudio de comportamientos cooperativos en conjuntos de osciladores caóticos ha llegado a ser muy atractivo, ya que, se ha demostrado que los típicos fenómenos en redes con un acoplamiento periódico son similares a los sistemas caóticos [63, 80, 88, 89, 90, 91, 92]. Aquí se tratará la descripción de los efectos de la sincronización en conjuntos de osciladores caóticos no idénticos acoplados.

Como en el caso de conjuntos pequeños (dos elementos) de sistemas caóticos acoplados, todos los tipos de sincronización se pueden encontrar en conjuntos grandes (cadenas). Para demostrar el típico fenómeno en tales conjuntos, estudiaremos cadenas de osciladores de Rössler.

2.2.1 Sincronización de fase en una cadena de osciladores de Rössler no idénticos

En una cadena de osciladores continuos, la *PS* de elementos acoplados, es similar al fenómeno de sincronización de redes de sistemas periódicos y caóticos. Presentaremos los resultados de una cadena de osciladores de Rössler no idénticos con un acoplamiento difusivo a los vecinos más próximos [93]. El modelo de esta cadena se escribe como el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{x}_n = -\omega_n^0 y_n - z_n$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_n &= \omega_n^0 x_n + ay_n + \epsilon(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) \\ \dot{z}_n &= 0.4 + (x_n - 8.5)z_n\end{aligned}\quad (2.5)$$

donde $n = 1, \dots, N$ son los números de los osciladores de la cadena y ϵ es el coeficiente de acoplamiento. El parámetro ω_n^0 corresponde a la frecuencia natural de cada oscilador individual. Se introduce un gradiente de distribución de frecuencias naturales $\omega_n^0 = \omega_1^0 + \delta(n-1)$, donde δ es una frecuencia pequeña entre sistemas vecinos. La distribución aleatoria de las frecuencias naturales está en el rango $[\omega_1^0, \omega_1^0 + \delta(N-1)]$, se consideran las condiciones de contorno como libre-libre:

$$y_0(t) = y_1(t) \quad y_{N+1}(t) = y_N(t) \quad (2.6)$$

En este sistema la fase se define por:

$$\phi_n = \arctan(y_n/x_n) \quad (2.7)$$

y la amplitud se define como:

$$A_n = \sqrt{z_n^2 + y_n^2} \quad (2.8)$$

Se puede calcular la diferencia de fase entre los osciladores vecinos como $\phi_n - \phi_{n+1}$. Si esta diferencia de fase no crece con el tiempo, se obtiene un acoplamiento de fase 1:1. Una condición débil de sincronización es la coincidencia de los promedios de frecuencias parciales definidas como:

$$\omega_n = \langle \dot{\phi}_n \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\phi_n(T) - \phi_n(0)}{T} \quad (2.9)$$

La frecuencia de oscilaciones caóticas ω_n se puede calcular como:

$$\omega_n = \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{M_T^n}{T} \quad (2.10)$$

donde M_T^n es el número de rotaciones del punto de fase alrededor del origen durante el tiempo T . Para el atractor de Rössler, las estimaciones de las Ecs. (2.9) y (2.10) prácticamente coinciden.

En simulaciones numéricas realizadas en una cadena de 20 a 50 osciladores, la principal cantidad calculada son las frecuencias ω_n . Generalmente, al incrementar el acoplamiento todas las frecuencias ω_n llegan a ser iguales; esto se denomina *FS*.

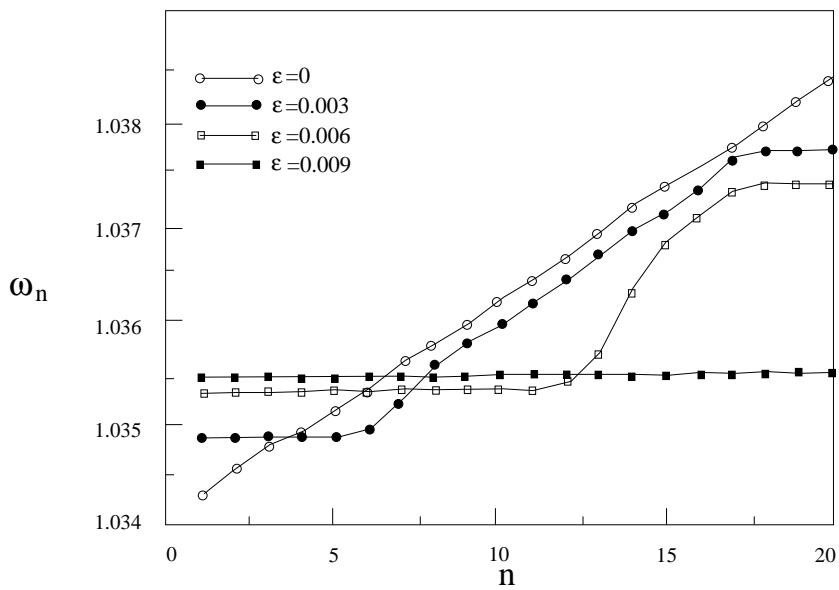


Figura 2.1: Transición suave a la sincronización global en una cadena de osciladores de Rössler, para $\delta = 2 \cdot 10^{-4}$ y $w_1 = 1$.

Mientras en el caso de osciladores periódicos acoplados, el régimen de sincronización global en la cadena Ec. (2.5) puede aparecer en dos formas, dependiendo de la frecuencia relativa δ/w_1^0 . Bajo estos dos escenarios, se describen las transiciones como suave y fuerte de la siguiente forma:

- Primero se considera el caso de un pequeño rango de frecuencia $\delta/w_1^0 \ll 1$. Se observa una transición suave a la sincronización global (Fig. 2.1). En esta transición las amplitudes de los osciladores permanecen caóticas. Como se muestra en [10], la *PS* aparece en un sistema de dos osciladores acoplados con el mismo espectro de Lyapunov, cuando uno de los exponentes cero pasa a ser negativo, mientras el otro permanece positivo. Para una cadena de N osciladores tenemos N exponentes de Lyapunov positivos decrecientes y se alcanza *PS* cuando un exponente se hace cero, y el resto ($N - 1$) se vuelven negativos.
- Para el caso de un rango de frecuencia δ/w_1 grande, se encuentra la transición a la sincronización a través de grupos sincronizados, es decir, da lugar a

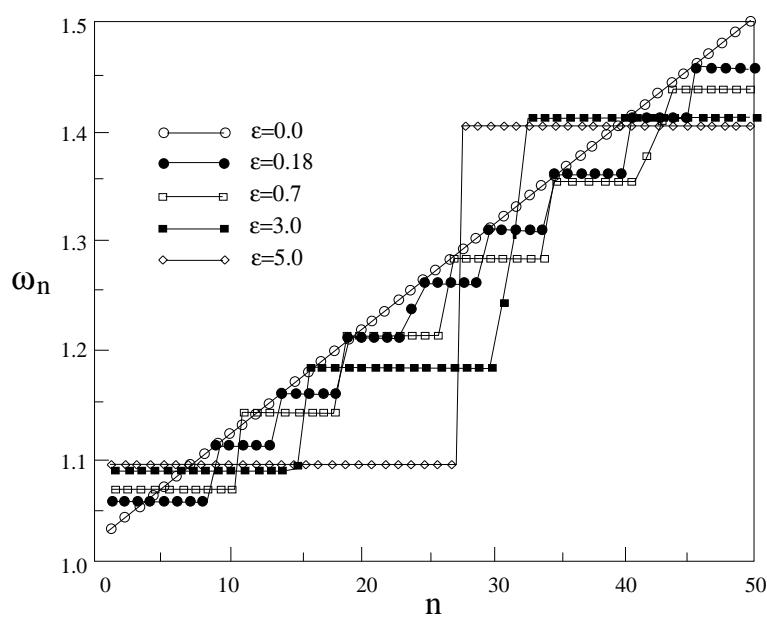


Figura 2.2: Transición fuerte a la sincronización global en una cadena de osciladores de Rössler, para $\delta = 9 \cdot 10^{-3}$ y $w_1 = 1$.

una transición fuerte (Fig 2.2). Con el incremento del acoplamiento el ancho de los grupos crece, y en paralelo, el número de grupos decrece y finalmente, se encuentran dos grupos. Se espera que al seguir incrementando la fuerza de acoplamiento se alcance la sincronización global. Cuando el parámetro de acoplamiento ϵ crece, decrecen los exponentes de Lyapunov positivos. Una medida de las diferencias de fase instantáneas entre osciladores vecinos, es la cantidad:

$$s_n = \sin^2\left(\frac{\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)}{2}\right) \quad (2.11)$$

Llamamos defectos a los mínimos de la amplitud local, que coinciden con los máximos s_n y aparecen regularmente en las posiciones de la cadena [93].

Consideramos los efectos de la *PS* que ocurre en una cadena con una distribución aleatoria de frecuencias naturales. Como en el caso del incremento lineal de frecuencias, el régimen global sincronizado llega por vía de la formación de grupos (transición

fuerte). La diferencia esencial es que para la misma diferencia pequeña de frecuencias parciales w_n , la sincronización global aparece para valores considerablemente menores del acoplamiento que en el caso de una distribución lineal [94].

Los efectos presentes de PS en elementos de cadenas de osciladores caóticos acoplados lleva a la idea de que PS es un fenómeno universal de los sistemas caóticos acoplados y es similar a la sincronización de redes de osciladores periódicos. Recientemente, han sido investigados los límites de un conjunto de fase acopladas en una cadena de osciladores caóticos acoplados unidireccionalmente de Rössler [94].

2.2.2 Sincronización en sistemas extensos continuos

En esta sección se hará un nuevo análisis de sistemas continuos espacio–temporales, es decir, sistemas modelados por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. La sincronización de campos continuos extensos ha sido estudiada en varias situaciones diferentes [92, 95, 96, 97, 98]. Se analizará el caso de dos campos obedeciendo una ecuación compleja de Ginzburg–Landau unidimensional (*CGL*), con parámetros idénticos [99, 100] y distintos. En este último caso se hace posible una comparación entre acoplamientos bidireccionales [101, 102], acoplamientos unidireccionales [103] y forzados externos [104]. La relevancia de *CGL* proviene del hecho de que esta ecuación es conocida como un modelo universal cerca de una bifurcación de Hopf [105].

Se describirá cada acoplamiento simétrico bidireccional entre dos campos no idénticos dimensionales, por la ecuación *CGL*:

$$\dot{A}_{1,2} = A_{1,2} + (1 + i\alpha_{1,2})\partial_x^2 A_{1,2} - (1 + i\beta_{1,2})|A_{1,2}|^2 + \epsilon(x)(A_{2,1} - A_{1,2}) \quad (2.12)$$

donde $A_{1,2} \equiv \rho_{1,2}(x, t)e^{i\Psi_{1,2}(x, t)}$ son dos campos complejos de amplitudes $\rho_{1,2}$ y fases $\phi_{1,2}$, $\partial_x^2 A_{1,2}$ es la segunda derivada de $A_{1,2}$ con respecto a la variable espacial $0 \leq x \leq L$, L es la extensión del sistema, $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ son los parámetros de control reales, $\epsilon(x)$ es el factor de acoplamiento distribuido en el espacio y sobre los bordes consideramos condiciones de contorno periódicas.

En [100], se encuentra la sincronización de dos *CGL* idénticas ($\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$) como un resultado de un acoplamiento en un número finito N_c de controladores, es decir, con una función de acoplamiento determinada por:

$$\epsilon(x) = \sum_{i=1}^{N_c} \epsilon \delta(x - x_i) \quad (2.13)$$

donde x_i indica la posición donde actúa i–ésimo acoplamiento. Consideramos que δ es una función definida en un entorno de cero.

La Ec. (2.13) indica que el acoplamiento actúa sólo en puntos discretos de la malla, que está igualmente espaciada en ($x_i - x_{i-1} = \xi$). De hecho, perturbando la Ec. (2.12) con un acoplamiento del tipo de la Ec. (2.13) no se encuentra ningún efecto: δ perturbaciones en el espacio no son capaces de modificar cualitativamente el desarrollo de las soluciones de las Ecs. en derivadas parciales. El motivo es porque en la Ec. (2.13) δ no es la función δ de Dirac, sino que el acoplamiento en la posición x_i está extendido sobre todo el espacio. Esto es importante de resaltar, ya que este es el caso en aplicaciones prácticas, donde los controladores tienen en general un tamaño finito. Una posibilidad es considerar el espacio localmente extendido de controladores, y estudiar la extensión de la malla, así se puede seleccionar la extensión espacial de los controladores [100, 101, 102].

Boccaletti *et al.* [100] muestran que un número finito de controladores es suficiente para detectar *CS* de dos sistemas idénticos, en una vía robusta donde cada controlador sea ubicado aproximadamente a dos longitudes de correlación ($\xi \leq 2\xi_c$).

En la Ref. [101] se extiende el estudio a la sincronización de dos campos desde diferentes dinámicas ($\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$), en este caso la función del acoplamiento fue extendida sobre los N puntos de la malla ($\epsilon(x) \equiv \epsilon$). En este último caso, se observa una transición desde la no sincronización a *CS* mediante un estado parecido a la *PS*. El estado de intermitencia de la *PS* se ha caracterizado en [103] para el caso de un acoplamiento unidireccional. El análisis espacio–temporal de Fourier de este estado indica que el fenómeno de sincronización tiene principalmente un comportamiento temporal más que espacial y la etapa intermedia está caracterizada con grandes variaciones de frecuencias en el tiempo de los sistemas [102].

La sincronización entre sistemas no idénticos se puede alcanzar con un acoplamiento discreto, es decir, un acoplamiento extendido sólo en algunos de los puntos de la malla. Este es un hecho posible en el límite $\xi \leq \xi_c$ con tal de que la fuerza de acoplamiento ϵ se incremente de forma proporcional cuando el número de controladores decrece.

Las propiedades de *CGL* en la ausencia de acoplamiento en regímenes caóticos se pueden identificar por las ecuaciones (2.12) dependiendo de los parámetros (α , β) [106, 107] y de las propiedades de estabilidad de las soluciones de ondas planas $A_q = \sqrt{1 - q^2} e^{i(qx+wt)}$ ($-1 \leq q \leq 1$, donde q es el número de onda en el espacio

de Fourier, y $w = -\beta - (\alpha - \beta)q^2$ es la Ec. de dispersión de las ondas planas. En particular para $\alpha\beta > -1$ existe un valor crítico $q_c = \sqrt{\frac{1+\alpha\beta}{2(1+\beta^2)+1+\alpha\beta}}$, tal que, todos las ondas planas en el rango $-q_c \leq q \leq q_c$ son linealmente estables. Estas ondas se vuelven inestables fuera de este rango, por un mecanismo llamado inestabilidad de Eckhaus. Por lo tanto, todas las ondas planas se vuelven inestables cuando cruza desde abajo la de linea de Benjamin–Feir $\alpha\beta = -1$. Identificamos sobre esta línea bicos y dos diferentes estados turbulentos [106, 107], la llamada turbulencia de fase (*PT*) y la turbulencia de amplitud (*AT*).

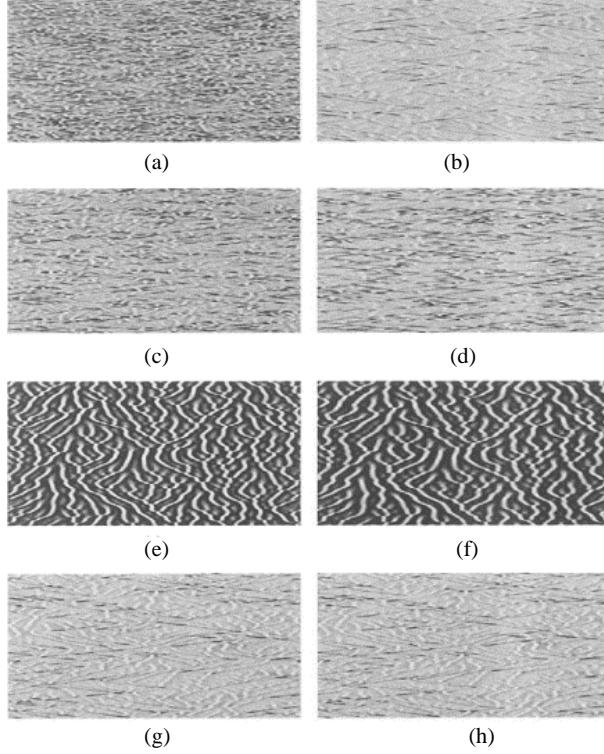


Figura 2.3: Espacio eje horizontal y tiempo eje vertical. ρ_1 para las figuras (a, c, e, g) y ρ_2 para las figuras (b, d, f, h). Los parámetros son $\alpha_1 = \alpha_2 = 2.1$, $\beta_1 = -1.2$ y $\beta_2 = -0.83$. (a) y (b) corresponden a $\epsilon = 0.05$, (c) y (d) a $\epsilon = 0.14$, (e) y (f) a $\epsilon = 0.2$ y finalmente (g) y (h) a $\epsilon = 2.0$.

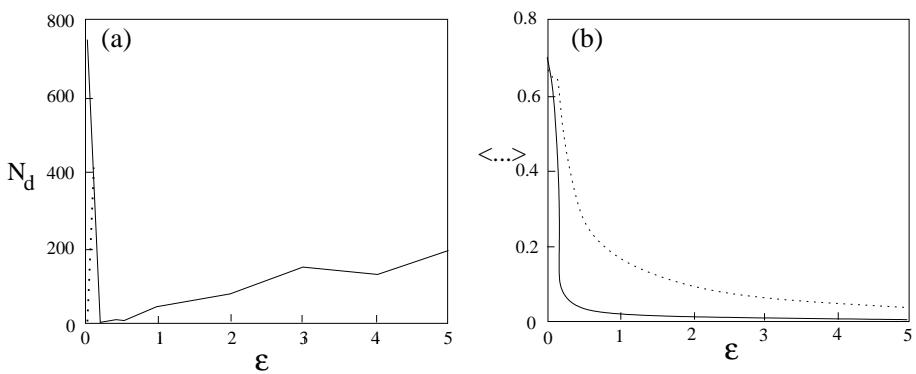


Figura 2.4: Indicadores de la sincronización (a) Número total de defectos N_d frente a la fuerza de acoplamiento para A_1 (línea continua) y A_2 (línea de puntos), (b) Indicadores de modulo (línea sólida) y fase (línea de puntos) frente a ϵ .

La PT es un estado caracterizado por la evolución caótica de la fase, mientras los cambios de amplitud son suaves. Por el contrario, en AT la dinámica de amplitud llega a ser caótica, las grandes oscilaciones de la amplitud causan ocasionalmente la aparición de defectos espacio-temporales en el punto donde la amplitud localmente tiende a cero.

Esto implica que elegir en la Ec. (2.12) parámetros suficientemente distintos en las ecuaciones que gobiernan los campos $A_{1,2}$ es equivalente a seleccionar las evoluciones desacopladas de los dos campos para AT y PT respectivamente.

La Fig. 2.3 representan los patrones de la evolución espacio–temporal de ρ_1 (a, c, e, g) y ρ_2 (b, d, f, h). Para un pequeño acoplamiento ϵ A_1 y A_2 no sincronizan (Fig. 2.3(a,b)). Al incrementar el acoplamiento (Fig. 2.3 (c, d)), los dos sistemas llegan al estado AT y aparecen defectos ($\rho_2 = 0$) en el sistema A_2 . Al seguir aumentando el acoplamiento (Fig 2.3 (e, f)), los dos sistemas presentan una sincronización PT y no se encuentran grandes defectos. Si nuevamente se incrementa el acoplamiento (Fig. 2.3 (g, h)), los dos estados tienen una CS , y aparece la creación–aniquilación de defectos. Una posible explicación sería que las dos dinámicas para A_1 y A_2 no son compatibles y la dinámica combinada del estado sincronizado, debido a esta incompatibilidad, ha de ser de tipo intermitente.

Para describir el escenario anterior, se necesita introducir algunos indicadores

cuantitativos: El número de defectos N_d como una función de ϵ (ver Fig. 2.4(a)),

El promedio (en espacio y tiempo) de la diferencia de los módulos

$$\langle \Delta\rho \rangle = \langle \frac{|\rho_1 - \rho_2|}{\rho_1 + \rho_2} \rangle_{x,t} \quad (2.14)$$

y el mismo promedio para la diferencia de fase

$$\langle \Delta\phi \rangle = \langle \frac{|\phi_1 - \phi_2|}{|\phi_1| + |\phi_2|} \rangle_{x,t} \quad (2.15)$$

La Fig. 2.4(b), muestra que la diferencia de módulos (línea continua) decrece mucho más rápido que la diferencia de fase (línea de puntos), con respecto al incremento del acoplamiento, y por lo tanto, se puede decir que primero sincronizan los defectos y luego aparece la *CS* [101].

Capítulo 3

Inestabilidad convectiva

El análisis de estabilidad lineal de la dinámica caótica se relaciona con el problema de cómo medir la divergencia de las trayectorias cercanas [108]. En sistemas extensos, la dependencia espacial de la variable de estado impone que consideremos también el fenómeno de propagación de las inhomogeneidades espaciales [109].

Se han introducido dos indicadores dinámicos para caracterizar los diferentes efectos. El primero corresponde a la tasa de crecimiento temporal de una perturbación en el espacio, donde se utiliza el método estándar para determinar el espectro de los exponentes de Lyapunov, calculando luego los exponentes transversales de Lyapunov, midiendo así la separación entre el sistema *drive* y *response*.

El siguiente indicador es la tasa de crecimiento espacial en un determinado tiempo. Deisser y Kaneko [110], introdujeron los llamados exponentes convectivos, concebidos para cuantificar la tasa de crecimiento de una perturbación que se mueve en un sistema de referencia inercial. El exponente espacial (convectivo) se utiliza para conocer las propiedades de localización de los vectores convectivos y caracterizar las propiedades de estabilidad en sistemas de flujo abierto (es decir, sistemas con un acoplamiento asimétrico espacial).

Comenzamos esta primera parte, con la observación de una perturbación, analizando la tasa de crecimiento temporal λ . A continuación análogamente se describe μ que corresponde a la tasa de crecimiento espacial.

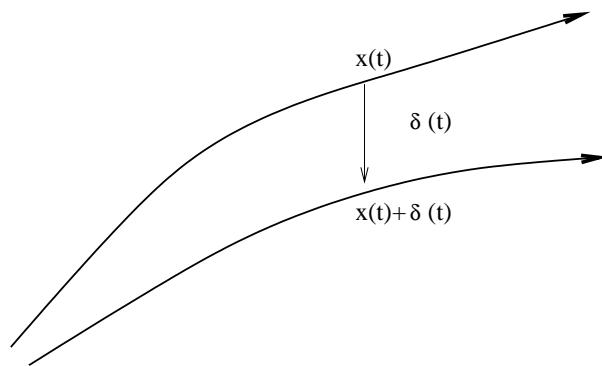


Figura 3.1: Divergencia de dos trayectorias partiendo de $x(t)$ y $x(t) + \delta(t)$.

3.1 Exponentes de Lyapunov

El objetivo de estos exponentes es medir la sensibilidad de las condiciones iniciales de un sistema dinámico. Esto se hace mediante una función exponencial, donde el exponente (λ) determina la tasa de divergencia de las órbitas que comienzan desde puntos muy próximos.

El movimiento de una trayectoria sobre un atractor caótico es sensible a las condiciones iniciales. De esta forma dos trayectorias que inicialmente están juntas, rápidamente divergen una de la otra y sus estados futuros son muy diferentes. Lo ilustramos en la Fig. 3.1, donde $x(t)$ es un punto en el atractor a tiempo t , $x(t) + \delta(t)$ es un punto cercano, y $\delta(t)$ es una pequeña separación del punto inicial.

Se analiza el crecimiento de la separación $\delta(t)$, que es:

$$\delta(t) \sim \delta_0 e^{\lambda t} \quad (3.1)$$

Esto indica que dos trayectorias próximas se separan o se acercan exponencialmente, dependiendo de si λ es positivo o negativo. El número λ es llamado el exponente de Lyapunov. En realidad, en un sistema n -dimensional se encuentran n exponentes de Lyapunov, que dependen levemente de la trayectoria de estudio. El promedio sobre diferentes puntos de la misma trayectoria determina el verdadero valor de λ . Cuando al menos un exponente es positivo, el sistema resulta ser caótico, ya que las trayectorias se separan a medida que avanza el tiempo.

Para derivar un cálculo preciso de λ , supondremos que estamos iterando una aplicación (mapa) f real de variable real [111]. Los resultados analíticos que obtengamos los trasladaremos al caso continuo.

Sea $\delta_n = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)$, donde $f^n(x_0 + \delta_0)$ y $f^n(x_0)$ son puntos cercanos, recordando que $\delta(t) = \delta_0 e^{\lambda t}$ se obtiene:

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| \quad (3.2)$$

$$= \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right| \quad (3.3)$$

$$= \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)| \quad (3.4)$$

Se considera el límite $\delta_0 \rightarrow 0$ en el paso anterior. De esta forma, el término en el interior del valor absoluto se puede expresar como:

$$(f^n)'(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \quad (3.5)$$

entonces

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| \quad (3.6)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (3.7)$$

si $n \rightarrow \infty$, se define el exponente de Lyapunov para la órbita partiendo de x_0 :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right\} \quad (3.8)$$

Notemos que λ depende de x_0 . Sin embargo, esto es igual para todo x_0 que pertenece a un determinado atractor. Para puntos fijos y ciclos estables, se encuentra un λ negativo que hace converger las trayectorias; y para atractores caóticos λ es positivo haciendo diverger las trayectorias.

3.2 Cálculo del exponente de Lyapunov en el espacio tangente

Si un sistema dinámico tiene un espacio de fase multidimensional, por ejemplo, el mapa de Hénon y el oscilador de Lorenz, el conjunto de exponentes de Lyapunov, se llama espectro de Lyapunov y caracteriza la divergencia de la trayectoria. A modo de ejemplo, se considerará un conjunto de condiciones iniciales que forma una esfera del espacio de fase para el modelo de Lorenz (tridimensional).

Al “integrar” las Ecs. de Lorenz (3.9), un conjunto de puntos del espacio de fase se va deformando en el transcurso del tiempo. Si el sistema tiene un punto fijo estable, un entorno suyo se contrae a un punto. En el caso de que el sistema sea caótico, la esfera podrá diverger en alguna dirección, siendo despreciable en las otras dos direcciones. En este caso se pueden definir tres exponentes de Lyapunov para medir la deformación en tres direcciones mutuamente perpendiculares. Estas tres direcciones generalmente no corresponden a los ejes de las variables originales. Entonces, debemos utilizar el procedimiento de ortogonalización de Gram–Schmidt [112] para renormalizar las 3 direcciones ortogonales.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 &= -x_1 z_1 + r x_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 &= x_1 y_1 - b z_1\end{aligned}\tag{3.9}$$

Consideramos dos osciladores de Lorenz (3.9) y (3.10) de forma que $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{y} = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) \\ \dot{y}_2 &= -x_2 z_2 + r x_2 - y_2 \\ \dot{z}_2 &= x_2 y_2 - b z_2\end{aligned}\tag{3.10}$$

Considerando las Ecs. de Lorenz linealizadas, con $\vec{\Delta} = \vec{x} - \vec{y}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta x}{dt} &= -\sigma \Delta x + \sigma \Delta y \\ \frac{d\Delta y}{dt} &= -x \Delta z - z \Delta x + r \Delta x - \Delta y\end{aligned}\tag{3.11}$$

$$\frac{d\Delta z}{dt} = x\Delta y + y\Delta x - b\Delta z$$

Definimos los valores iniciales para $\vec{\Delta}$ como $\Delta x(0) = (1, 0, 0)$, $\Delta y(0) = (0, 1, 0)$ y $\Delta z(0) = (0, 0, 1)$. A continuación se integran las Ecs. originales y las linealizadas del movimiento, utilizando la aproximación discreta del método de Euler (elegimos un pequeño intervalo temporal δt e iteramos). Una iteración produce un vector desde la Ec. original de movimiento (3.9) y otro $\vec{\Delta}$ desde las Ecs. linealizadas (3.11). Después de algunas iteraciones se encuentran los vectores ortonormales $\vec{\Delta}'$ desde los $\vec{\Delta}$ utilizando el siguiente procedimiento de ortonormalización:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{|\Delta x|} \quad (3.12)$$

$$\Delta y' = \frac{\Delta y - (\Delta x' \cdot \Delta y)\Delta x'}{|\Delta y - (\Delta x' \cdot \Delta y)\Delta x'|} \quad (3.13)$$

$$\Delta z' = \frac{\Delta z - (\Delta x' \cdot \Delta z)\Delta x' - (\Delta y' \cdot \Delta z)\Delta y'}{|\Delta z - (\Delta x' \cdot \Delta z)\Delta x' - (\Delta y' \cdot \Delta z)\Delta y'|} \quad (3.14)$$

Para simplificar la notación al $\vec{\Delta}$ lo denotamos como $\vec{\Delta}'$. Finalmente, se acumulan las sumas parciales $S_{i+1}^x = S_i^x + \log |\Delta x_i|$ y análogamente con las variables y, z .

De esta forma, los exponentes de Lyapunov son:

$$\begin{aligned} \lambda_{\perp i}^x &= \frac{1}{n} S_i^x \\ \lambda_{\perp i}^y &= \frac{1}{n} S_i^y \\ \lambda_{\perp i}^z &= \frac{1}{n} S_i^z \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde n es el número de iteraciones.

El número $\lambda = \max(\lambda_{\perp i}^x, \lambda_{\perp i}^y, \lambda_{\perp i}^z)$, mide el estado de sincronización entre el sistema *drive* y *response*. En el caso de ser positivo indica que los sistemas se encuentran desincronizados y en el caso contrario, cuando es negativo, muestra la sincronización de ambos sistemas.

3.3 Exponentes convectivos

La inestabilidad convectiva, se encuentra en sistemas en los que una perturbación inicial crece y se traslada en el espacio a través de un acoplamiento, con una cierta velocidad, como se puede observar en la Fig. 3.2, donde cada línea corresponde a un oscilador acoplado unidireccionalmente. En el tiempo la perturbación en cada oscilador en un principio crece y luego se atenúa hasta desaparecer.

Al perturbar el primer oscilador y al estar éste acoplado al segundo oscilador, le transmite a través del acoplamiento la perturbación al segundo oscilador, que a su vez se la pasa al siguiente. De esta forma cada vez la perturbación que se transmite es más grande. Hasta llegar al último oscilador, el cual no transmite la perturbación y ésta desaparece completamente del sistema. Como la perturbación va pasando en un determinado tiempo por cada oscilador, se puede calcular la velocidad de fase del sistema como el cuociente entre número del oscilador y el tiempo en que tarda en llegar la perturbación. Siendo esta la velocidad de fase del sistema.

Siendo las tasas de crecimiento espacial y temporal μ y λ respectivamente, definimos una perturbación como:

$$\delta = \delta_0 e^{\mu x + \lambda t} \quad (3.16)$$

Un método alternativo para determinar la estabilidad de los sistemas espaciales se basa en los exponentes convectivos. Se definen en términos de la tasa de crecimiento de una perturbación inicial δ_0^x extendida en un intervalo finito $-L_0/2 \leq x \leq L_0/2$. Debido al acoplamiento con un vecino próximo, esta perturbación permanece confinada en el cono de luz $-L_0/2 - t < x < L_0/2 + t$. Los análisis numéricos indican que para un tiempo t suficientemente grande la perturbación es:

$$|\delta_t^x| \simeq e^{\Lambda(x/t)t} \quad (3.17)$$

donde Λ , es el exponente convectivo de Lyapunov [110], siendo sólo una función de $v = x/t$. Por lo tanto, $\Lambda(v)$ representa la tasa de crecimiento de la perturbación en un movimiento inercial con velocidad v . Cuando tomamos el límite $t \rightarrow \infty$ implícitamente suponemos que tenemos una cadena infinita. El ancho inicial L_0 de la perturbación no es un parámetro relevante [110].

De la Ec. (3.17) es claro que el perfil espacial de la perturbación es localmente exponencial. De hecho, si se consideran dos sitios cercanos y se expande Λ , se obtiene:

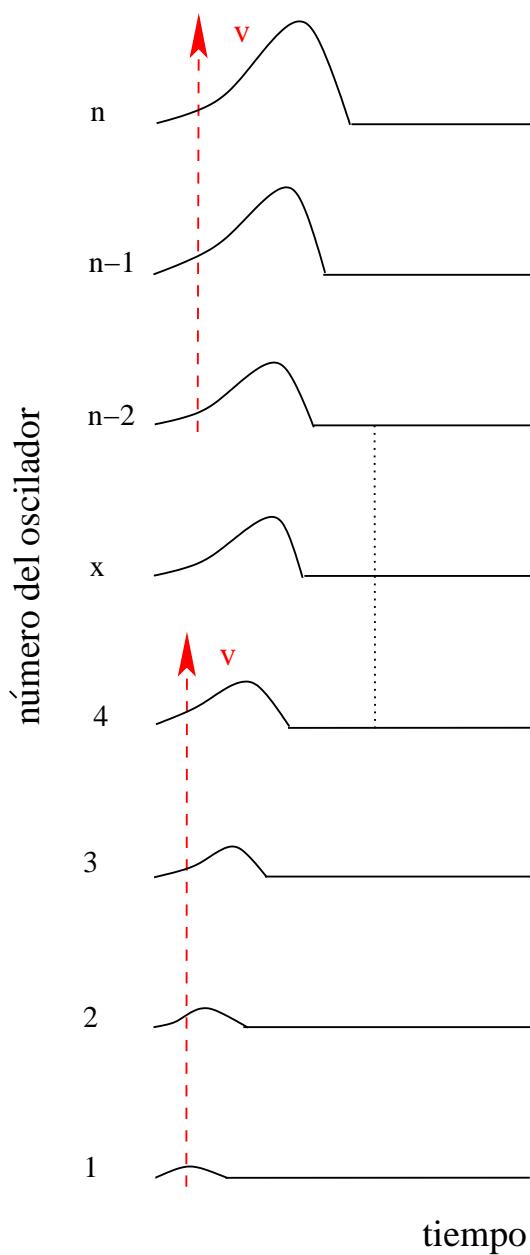


Figura 3.2: Esquema de la evolución de una perturbación a través de una cadena de osciladores.

$$\Lambda\left(\frac{x+1}{t}\right) \simeq \Lambda\left(\frac{x}{t}\right) + \Lambda'\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} \quad (3.18)$$

donde las primas denotan las derivadas con respecto al argumento. De la definición de exponente espacial Ec. (3.16), $\mu = \log(\delta_t^{x+1}/\delta_t^x)$ y de las Ecs. (3.17) y (3.18), se obtiene:

$$\mu = \frac{d\Lambda(v)}{dv} \quad (3.19)$$

La forma local de la exponencial de la perturbación indica que la tasa de crecimiento temporal para x fijo es simplemente la definición para el exponente específico $\lambda(\mu)$, es decir,

$$|\delta_{t+T}^x| \simeq |\delta_t^x| e^{\lambda(\mu)T} \quad (3.20)$$

para T suficientemente grande, μ no varía notablemente entre t y $t+T$ en el lugar x . De las Ecs. (3.17) y (3.20), y después de expandir Λ alrededor de $v = x/t$, se encuentra:

$$\lambda(\mu) = \Lambda(v) - v\Lambda'(v) \quad (3.21)$$

Las Ecs. (3.19) y (3.21) muestran que los exponentes convectivos $\Lambda(v)$ están unidos a un exponente de Lyapunov $\lambda(\mu)$ a través de la transformada de Legendre. Tal transformación generaliza el resultado de la Ref. [114], donde se ha derivado el caso de una ecuación lineal con coeficientes constantes, basado en la relación de dispersión. Las simulaciones numéricas se muestran en la Fig. 3.3, los exponentes convectivos, donde los puntos se refieren a la estimación directa del exponente convectivo, mientras la línea continua es el resultado de la transformada de Legendre. La buena correlación de los datos confirma las asunciones hechas en la derivación de las Ecs. (3.19) y (3.21).

La definición de Λ se puede extender a todo el espectro de exponentes al observar no sólo la amplitud local de la perturbación sino también su forma [115].

De hecho, el límite $t \rightarrow \infty$ implica el límite de tamaño infinito. Por lo tanto, se puede controlar el tamaño del sistema, si se consideran largos períodos de tiempo. Esto es quizás la más severa limitación para la medición directa con precisión de los exponentes convectivos Λ .

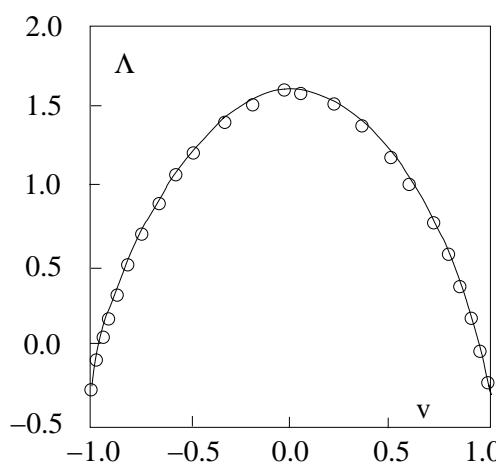


Figura 3.3: Exponentes convectivos para mapas de Henón acoplados [113] Λ frente a la velocidad v . los puntos son la estimación directa de la Ec. (3.19), la línea se obtiene tomando la transformada de Legendre de $\lambda(\mu)$.

Combinando las Ecs. (3.17) con (3.19), se obtiene:

$$\Lambda(v) = \lambda_{max}(\mu) + \mu \frac{d\lambda_{max}(\mu)}{d\mu} \quad (3.22)$$

con la Ec. (3.17) se puede interpretar como una transformada de Legendre desde el par (Λ, v) al par (λ_{max}, μ) . La transformación inversa implica:

$$v = \frac{d\lambda_{max}(\mu)}{d\mu} \quad (3.23)$$

La Ec. de estado (3.22) donde $\Lambda(v)$ es la tasa de crecimiento de una perturbación localizada con un determinado valor μ desde la condición Ec. (3.17). Por lo tanto, la misma perturbación se propaga con otra velocidad $\tilde{v} = \lambda_{max}(\mu)/\mu$ [117]. Haciendo que $\tilde{v}(\mu)$ y v correspondan a las velocidades de fase y de grupo. En particular la velocidad de fase $\tilde{v}(\mu)$ puede ser mayor que la velocidad de la luz (que es igual a 1 en retículo de mapas acoplados (CML) con un acoplamiento al próximo vecino), mientras v está limitado a ser pequeño.

Cuando se utiliza una transformación de Legendre, se necesita poner atención sobre la concavidad de las funciones involucradas en la transformación. En el presente

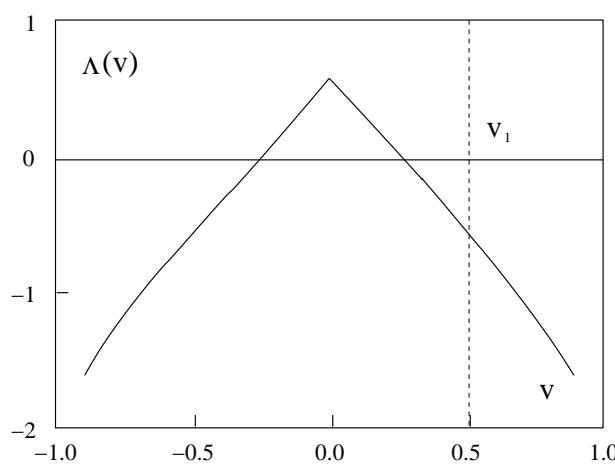


Figura 3.4: Máximo exponente convectivo para un modelo de reacción difusión [116] obtenidos con la transformada de Legendre v . La línea vertical indica la posición de la velocidad crítica v_1 , para un modelo 1D de sistema de fluidos abierto.

contexto, para el caso de un patrón aleatorio donde el borde de la región permite exhibir un cambio de concavidad en $|\mu| = \mu_1$. Esto implica que para $|\mu| < \mu_1$, el máximo exponente temporal es constante e igual a $\lambda_{max}(\mu_1)$. La correspondiente transición de fase refleja el principio de una dependencia lineal de los exponentes convectivos en la velocidad para $|v|$ más pequeños que algún valor v_1

$$\Lambda(v) = \lambda_{max}(\mu_1) - \mu_1 v \quad (3.24)$$

En la Fig. 3.4, donde se muestra todo el conjunto de valores de $\Lambda(v)$ respecto v . Se puede apreciar el máximo exponente convectivo $\Lambda(v)$, y la linea punteada indica la velocidad crítica v_1 .

De forma análoga a la sección 3.2 se determinamos los exponentes convectivos en el espacio tangente, cambiando la medición de la tasa crecimiento de una perturbación en el tiempo, por la del espacio. Construimos los $\Delta\vec{r}$ como la diferencia entre un oscilador y el anterior, es decir, $x_i(t) - x_{i-1}(t)$. El resto del procedimiento, no se modifica. De esta forma para calcular el exponente convectivo, hay que perturbar n veces el sistema y luego hacer el promedio de estas perturbaciones.

Capítulo 4

Sincronización anticipada y límites de estabilidad en una cadena

La sincronización anticipada [23, 38], como se describió en la sección 1.5, se alcanza al acoplar dos sistemas idénticos organizados de forma que uno dirija la dinámica del otro. Esto puede expresarse como:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= f(\vec{x}(t)) && \text{drive} \\ \dot{\vec{y}} &= f(\vec{y}(t)) + \epsilon(\vec{x}(t) - \vec{y}(t - \tau)) && \text{response}\end{aligned}$$

donde \vec{y} está acoplado a \vec{x} pero \vec{x} no está acoplado a \vec{y} , siendo ϵ la fuerza de acoplamiento. Los dos sistemas actúan a través de un acoplamiento unidireccional entre $\vec{x}(t)$ e $\vec{y}(t - \tau)$, de tal forma que la variedad de sincronización es:

$$\vec{x}(t) = \vec{y}(t - \tau)$$

es decir,

$$\vec{x}(t + \tau) = \vec{y}(t)$$

o equivalentemente, el sistema $\vec{x}(t)$ va seguir la trayectoria de $\vec{y}(t)$ con un tiempo de retraso τ . Así, al hacer una traslación de la serie temporal un tiempo τ en el sistema $y(t)$ y compararla con la trayectoria de $x(t)$, éstas serán idénticas.

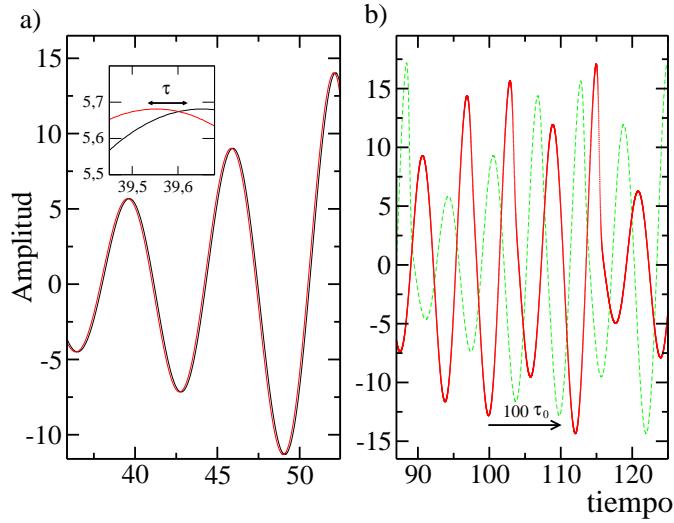


Figura 4.1: a) Evolución dos osciladores de Rössler; se puede apreciar la anticipación en $\tau_0 = 0.1$, para $\epsilon = 4.1$, donde — $x(t)$ e — $y(t)$. b) Evolución de los osciladores de Rössler 1 y 100, en la que se puede apreciar una anticipación de $100\tau_0$, para $\epsilon = 4.1$, donde — $x(t)$ e — $y_{100}(t)$.

En la Fig. 4.1 (a) se muestra la evolución de dos sistemas de Rössler $x(t)$ e $y(t)$ en el tiempo, donde se puede apreciar la anticipación del sistema $y(t)$ (línea roja) con respecto al $x(t)$ (línea negra). En el inserto, se observa que $y(t)$ (línea roja) está anticipando cómo evolucionará el sistema $x(t)$ (línea negra) en un tiempo $\tau_0 = 0.1$.

Para aumentar los tiempos τ de anticipación, Voss [38] utilizó una cadena de 16 osciladores, siendo cada oscilador $y(t)$ *drive* del oscilador posterior y *response* del oscilador anterior. Nosotros hemos considerado 100 osciladores acoplados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= f(\vec{x}(t)) \\ \dot{\vec{y}_i} &= f(\vec{y}_i(t)) + \epsilon(\vec{y}_{i-1}(t) - \vec{y}_i(t - \tau_0))\end{aligned}$$

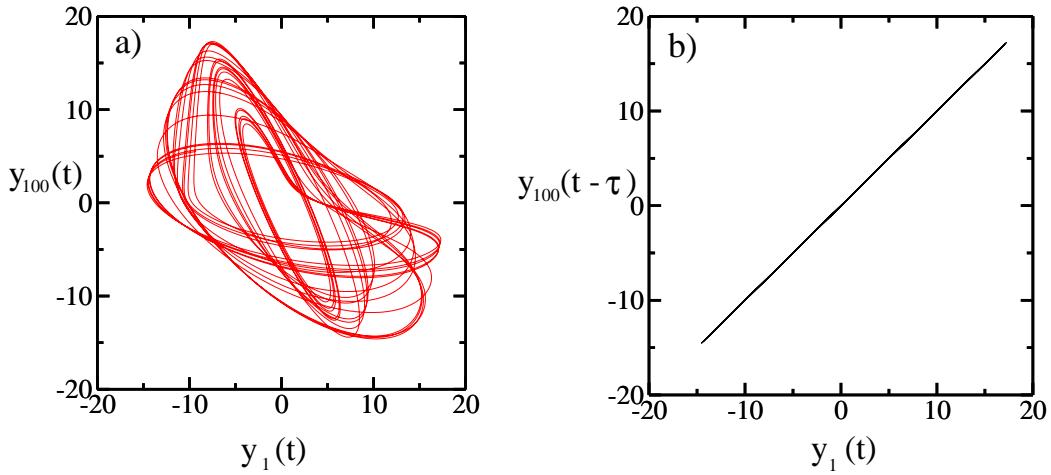


Figura 4.2: (a) Evolución de $y_1(t)$ frente a $y_{100}(t)$, (b) Variedad de sincronización para $y_1(t)$ frente a $y_{100}(t - \tau)$.

$$i = 2, \dots, 100 \quad \vec{y}_1 = \vec{x}$$

Así, por cada oscilador que se agregue a la cadena se obtiene un incremento en el tiempo de anticipación de τ_0 . De esta forma, si se considera i como el número de osciladores acoplados, el tiempo final de anticipación será $\tau = i\tau_0$.

En la Fig. 4.1(b) se representa la evolución dos osciladores de Rössler $x(t)$ e $y(t)$ en el tiempo, se aprecia la anticipación del sistema $y(t)$ (línea roja) con respecto al $x(t)$ (línea verde). La flecha que comienza en el tiempo 100 para $y(t)$ (línea roja) está anticipando cómo evolucionará el sistema $x(t)$ (línea verde) en el tiempo 110; de esta forma se comprueba que para la cadena de 101 osciladores acoplados con $\tau_0 = 0.1$ la anticipación total es de $100 \cdot 0.1 = 10$ unidades de tiempo.

La Fig. 4.2(a) presenta la evolución del primer oscilador con respecto al número 100 en el mismo tiempo esto es $y_1(t)$ frente a $y_{100}(t)$. Se ve que los sistemas no están relacionados, ya que para un mismo valor de $y_1(t)$ se encuentran varios valores de

$y_{100}(t)$. En la Fig. 4.2(b) se dibuja la relación de $y_1(t)$ frente $y_{100}(t - \tau)$ donde se observa que el sistema está sincronizado, es decir, las trayectorias de ambos osciladores son iguales y para cada valor $y_1(t)$ se encuentra un único valor de $y_{100}(t - \tau)$. Es decir, el oscilador y_{100} anticipa un tiempo τ al oscilador y_1 .

4.1 El modelo

El sistema que vamos a utilizar está formado por 100 osciladores de Rössler, acoplados unidireccionalmente, donde el primer oscilador ($\vec{x} = (x_1, y_1, z_1)$) evoluciona libremente.

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -wy_1(t) - z_1(t) \\ \dot{y}_1 = wx_1(t) + ay_1(t) \\ \dot{z}_1 = f + z_1(t)(x_1(t) + c) \end{array} \right\} \text{drive}$$

con los siguientes valores de los parámetros (que se mantendrán fijos de aquí en adelante)

$$a = 0.15, \quad c = 10, \quad f = 0.2 \quad \text{y} \quad w = 1.0$$

Los otros osciladores ($\vec{y} = (x_i, y_i, z_i)$), se acoplan unidireccionalmente con el oscilador anterior de la siguiente forma:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_i = -wy_i(t) - z_i(t) + \epsilon(x_{i-1}(t) - x_i(t - \tau_0)) \\ \dot{y}_i = wx_i(t) + ay_i(t) + \epsilon(y_{i-1}(t) - y_i(t - \tau_0)) \\ \dot{z}_i = f + z_i(t)(x_i(t) + c) + \epsilon(z_{i-1}(t) - z_i(t - \tau_0)) \end{array} \right\} \text{response}$$

En este espacio, para calcular la variedad de sincronización debemos hacer una resta entre las trayectorias de los dos osciladores $\vec{\Delta} = \vec{x} - \vec{y}_\tau$. Si la diferencia es $|\vec{\Delta}| < 10^{-4}$, no podremos obtener un valor preciso ¹. Sin embargo, al utilizar las ecuaciones en el espacio tangente, se ve cómo evoluciona directamente la diferencia, dándonos valores más precisos. Por este motivo, se utiliza el espacio tangente y la derivación a este nuevo espacio se encuentra en el apéndice A.

¹ Al considerar un oscilador con variables que se encuentren entre -20 y 20, al buscar la sincronización y tener $|\vec{\Delta}| < 10^{-4}$, las coordenadas de x e y_τ tienen 6 cifras significativas iguales, de donde $\vec{\Delta}$ es prácticamente $\vec{0}$.

Para ello se utiliza la siguiente definición:

$$\vec{\Delta}_i = \begin{pmatrix} \Delta_i^1 \\ \Delta_i^2 \\ \Delta_i^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i(t) - x_{i+1}(t - \tau_0) \\ y_i(t) - y_{i+1}(t - \tau_0) \\ z_i(t) - z_{i+1}(t - \tau_0) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

donde $\vec{\Delta}_i$ es la variedad de sincronización entre los dos sistemas. Luego la cadena completa es:

primer oscilador

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_1^1 &= -w\Delta_1^2 - \Delta_1^3 - \epsilon\Delta_{1,\tau_0}^1 \\ \dot{\Delta}_1^2 &= w\Delta_1^1 + a\Delta_1^2 - \epsilon\Delta_{1,\tau_0}^2 \\ \dot{\Delta}_1^3 &= x_1\Delta_1^3 + z_1\Delta_1^1 - c\Delta_1^3 - \epsilon\Delta_{1,\tau_0}^3 \end{aligned} \quad (4.2)$$

como novedad al segundo oscilador se le agrega una pequeña perturbación $\Delta_{2,\tau_0}' = \Delta_{2,\tau_0}^1 + \sigma_0\xi$, donde σ_0 es el tamaño de la perturbación y ξ un número aleatorio entre $[-1,1]$.

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_2^1 &= -w\Delta_2^2 - \Delta_2^3 + \epsilon(\Delta_1^1 - \Delta_{2,\tau_0}') \\ \dot{\Delta}_2^2 &= w\Delta_2^1 + a\Delta_2^2 + \epsilon(\Delta_1^2 - \Delta_{2,\tau_0}^2) \\ \dot{\Delta}_2^3 &= x_1\Delta_2^3 + z_1\Delta_2^1 - c\Delta_2^3 + \epsilon(\Delta_1^3 - \Delta_{2,\tau_0}^3) \end{aligned} \quad (4.3)$$

y el resto de los osciladores permanece sin perturbar:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_i^1 &= -w\Delta_i^2 - \Delta_i^3 + \epsilon(\Delta_{i-1}^1 - \Delta_{i,\tau_0}^1) \\ \dot{\Delta}_i^2 &= w\Delta_i^1 + a\Delta_i^2 + \epsilon(\Delta_{i-1}^2 - \Delta_{i,\tau_0}^2) \\ \dot{\Delta}_i^3 &= x_i\Delta_i^3 + z_i\Delta_i^1 - c\Delta_i^3 + \epsilon(\Delta_{i-1}^3 - \Delta_{i,\tau_0}^3) \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde $i = 3, \dots, 100$

Así, se puede definir el error de la sincronización [38] como:

$$\sigma^2(j) = (\Delta_{j-1}^1 - \Delta_{j,\tau_0}^1)^2 \quad (4.5)$$

con $j = 2, \dots, 100$, de manera que podemos medir el error en el espacio tangente de cada oscilador cuando éste actúa como *drive*, con respecto a su correspondiente *response*, tomando como referencia la primera componente de cada oscilador. Se hace notar que sólo se mide el error con respecto a la primera variable, porque ésta es la que recibe la perturbación.

4.2 Estabilidad temporal

La estabilidad de la variedad de sincronización de dos osciladores de Rössler acoplados en el espacio tangente se analiza perturbando al segundo oscilador todo el tiempo, de la siguiente forma:

$$\Delta_1^{1'} = \Delta_1^1 + \sigma_0 \xi, \quad \Delta_1^{2'} = \Delta_1^2 \quad \text{y} \quad \Delta_1^{3'} = \Delta_1^3$$

donde σ_0 es el tamaño de la perturbación y ξ es un número aleatorio. Se ha definido la perturbación como $\sigma_0 \xi$ con el objetivo de variar su tamaño.

A continuación, se analiza la estabilidad para dos osciladores. Una vez determinados los rangos de estabilidad para ellos, se analizará la cadena completa.

4.2.1 Dos osciladores

Para determinar la estabilidad de los dos primeros osciladores, recurrimos a los exponentes transversales de Lyapunov, como ya vimos en la sección 3.1. La negatividad de éstos nos indica que la variedad de sincronización es estable [29].

En la Fig. 4.3 se observa el comportamiento de los exponentes transversales de Lyapunov λ_{\perp} frente al acoplamiento ϵ , para 8 tiempos de anticipación τ_0 . Cada línea se ha hecho fijando el tiempo de anticipación τ_0 y variando las fuerzas de acoplamiento ϵ , calculando su correspondiente exponente de Lyapunov transversal λ_{\perp} . Se ve que todas las curvas tienen el mismo tipo de comportamiento; comienzan desde el mismo valor, correspondiente al máximo exponente de Lyapunov ($\lambda_{\perp}(\max) = 0.0826$, ver figura interior) y disminuyen hasta llegar a un mínimo local, que depende de cada τ_0 , donde comienza a crecer nuevamente hasta volverse positivo a través de un régimen lineal. En la figura interior, se observa que para $0 \leq \epsilon \leq 0.08$, λ_{\perp} es positivo para todo τ_0 , indicando que el sistema es inestable; en este rango todas las curvas se superponen, es decir, el exponente de Lyapunov es independiente del tiempo de anticipación τ_0 .

Aumentando ϵ se puede apreciar que todas las curvas tienen un rango negativo de $\epsilon = 0.08$ y cuanto mayor sea el tiempo de anticipación, menor es el rango en que el λ_{\perp} es negativo. Por ejemplo, para el caso de $\tau_0 = 0.4$ en $\epsilon = 2.7$, λ_{\perp} se vuelve positivo. En cambio, para $\tau_0 = 0.1$, λ_{\perp} se vuelve positivo para $\epsilon = 14.4$. Sin embargo, si nos fijamos en la curva para $\tau_0 = 0.02$ vemos que ésta sigue el mismo patrón de comportamiento de las anteriores y en el gráfico no llega a aparecer su valor mínimo que está bastante más abajo.

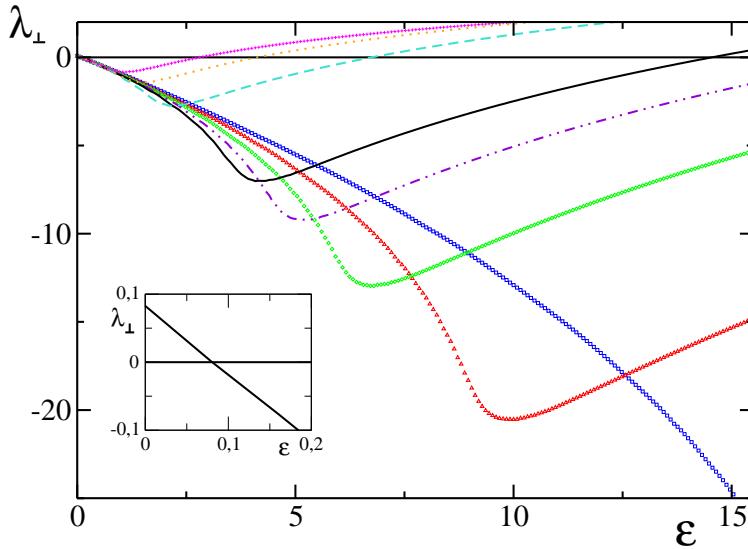


Figura 4.3: Estabilidad transversal de la variedad de sincronización para el sistema de Rössler con $a = 0.15$, $c = 10$, $w = 1$ y $f = 0.2$. Para $\tau_0 = 0.4$ $\textcolor{orange}{++}$, $\tau_0 = 0.3$ \cdots , $\tau_0 = 0.2$ $-$, $\tau_0 = 0.1$ $-$, $\tau_0 = 0.08$ $\textcolor{magenta}{\cdots \cdots}$, $\tau_0 = 0.06$ $\textcolor{green}{\diamond}$, $\tau_0 = 0.04$ $\textcolor{red}{\triangle}$ y $\tau_0 = 0.02$ $\textcolor{blue}{\square}$.

De lo anterior se concluye que para cada tiempo de anticipación τ_0 se encuentra un rango de ϵ a partir de 0.08 en el cual el sistema es estable y después, dependiendo de τ_0 , al ir aumentando ϵ se vuelve inestable. Con estos primeros resultados se determinará el área de trabajo para que la variedad de sincronización sea estable [25]. Además concuerda con lo observado en la Ref. [23], λ_{\perp} será negativo en un rango de parámetros determinados, indicando que la *AS* presenta una estabilidad absoluta.

Hasta este punto, se han considerado sólo dos osciladores: un *drive* y un *response*. Una vez determinado el tiempo de anticipación entre los osciladores de la cadena τ_0 , se determina el valor de ϵ , que corresponde al mínimo de λ_{\perp} (ver Tabla 4.1). Así, se han obtenido los parámetros con que se acoplará la cadena completa, es decir, los 100 osciladores.

τ_0	ϵ	λ_{\perp}
0.02	19.1	-43.5
0.04	9.7	-20.7
0.06	6.6	-13.2
0.08	5.05	-9.4
0.1	4.1	-7.1
0.2	2.2	-2.7
0.3	1.5	-1.44
0.4	1.1	-0.85

Tabla 4.1: Mínimos locales de λ_{\perp} obtenidos a partir de la Fig. 4.3.

4.2.2 Cadena completa

Utilizando los valores de la Tabla 4.1, se selecciona la fuerza de acoplamiento ϵ y el tiempo de anticipación τ_0 . A continuación se perturba todo el tiempo el segundo oscilador y se va midiendo el error σ_i de cada oscilador con respecto al anterior.

En la Fig. 4.4 se muestran dos casos: ($\tau_0 = 0.08$, $\epsilon = 5.05$), ($\tau_0 = 0.1$, $\epsilon = 4.1$) donde se ha representado σ_i^2 con respecto al tiempo. Se observa que el sistema sincroniza para ambos casos, ya que el máximo valor que alcanza de desviación es 10^{-9} , valor muy pequeño. Cada círculo representa cómo evoluciona cada oscilador con respecto al oscilador anterior. Se observa que los 10 primeros osciladores tienen un comportamiento distinto que el resto, ya que el segundo y tercer osciladores forman una pequeña sincronización de grupo (se ve que hay dos osciladores que tienen un σ_i muy parecido y luego hay un salto en el valor del σ_i). Luego los otros 7 osciladores tienen un σ_i que decae a medida que avanza el tiempo hasta llegar al 11, donde comienza a crecer σ_i .

La evolución del error de sincronización de la cadena a través del tiempo la modelamos según:

$$\sigma_i^2 = \sigma_1 e^{2\lambda_{\perp} t} \quad (4.6)$$

Al hacer este ajuste, se encuentra que para $\tau_0 = 0.08$ (Fig. 4.4(a)) el valor del exponente de Lyapunov transversal $\lambda_{\perp} = 0.05538$ y para la Fig. 4.4(b) $\tau_0 = 0.1$ con su exponente $\lambda_{\perp} = 0.08211$. Al comparar el exponente transversal de Lyapunov de la

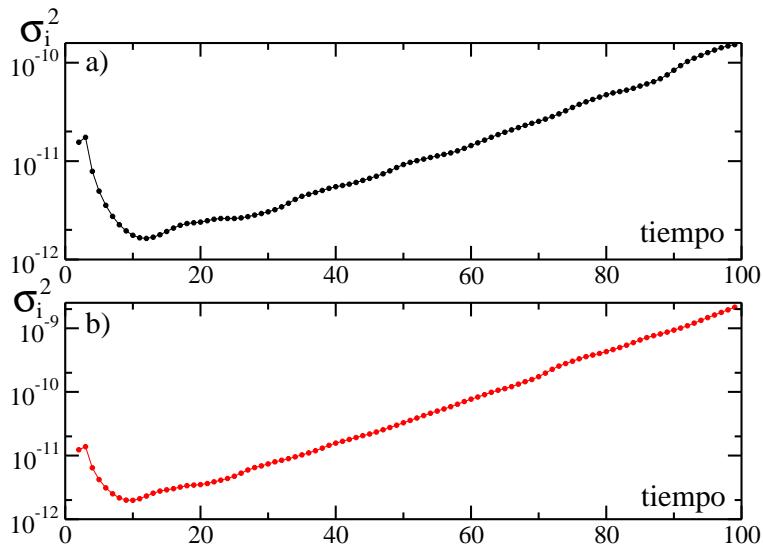


Figura 4.4: Evolución del error de sincronización en el tiempo representado en una escala semilogarítmica. Para $\sigma_0 = 10^{-4}$ a) $\tau_0 = 0.08$ y $\epsilon = 5.05$; b) $\tau_0 = 0.1$ y $\epsilon = 4.1$.

cadena con el máximo exponente transversal de Lyapunov para dos osciladores (ver inserto en Fig. 4.3 $\lambda_{\perp}(\max) = 0.0826$), se encuentra que el exponente transversal de la cadena es menor, indicando que el sistema es estable y está sincronizado.

Para comprobar la estabilidad de la cadena, se variaron los tamaños de las perturbaciones σ_0 . En la Fig. 4.5, se muestran las variaciones de la sincronización al usar tres $\sigma_0 = 10^{-3}$, 10^{-4} y 10^{-5} , se fija $\tau_0 = 0.1$ y $\epsilon = 4.1$. Se observa que las tres curvas son paralelas, indicando que el exponente transversal de Lyapunov es independiente del tamaño de la perturbación. También vemos que al variar σ_0 el resultado de la amplitud es $\sigma_1 = 10^{-3} \cdot \sigma_0^2$, porque para $\sigma_0 = 10^{-3}$, 10^{-4} y 10^{-5} se obtiene 10^{-9} , 10^{-11} y 10^{-13} .

El resultado eventual de la Fig. 4.4 es concluir que para tiempos arbitrarios de

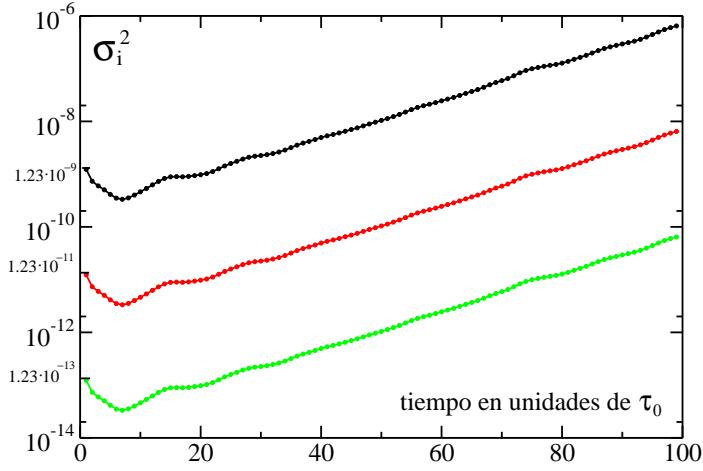


Figura 4.5: Evolución de σ^2 en el tiempo para $\tau_0 = 0.1$ y $\epsilon = 4.1$. — $\sigma_0 = 1 \cdot 10^{-3}$, — $\sigma_0 = 1 \cdot 10^{-4}$ y — $\sigma_0 = 1 \cdot 10^{-5}$.

anticipación con su acoplamiento apropiado para un determinado número de osciladores N , el i -ésimo oscilador anticipa a su *driver* un tiempo τ_0 y su dinámica converge a la variedad de sincronización $x_i = x_1(t - (i - 1)\tau_0)$.

Una vez que se ha confirmado que el sistema es estable temporalmente, se pasa a analizar su estabilidad espacial.

En la siguiente Fig. 4.6 se presenta la evolución de una perturbación mantenida en el tiempo sobre el primer oscilador con respecto al quinto (éste no está perturbado). Se observa que mientras que el oscilador no es perturbado el sistema sincroniza, pero cuando se comienza a perturbar la diferencia no se atenúa, aunque el exponente de Lyapunov sea negativo. Como esto no concuerda con los resultados anteriores analizaremos sólo una perturbación.

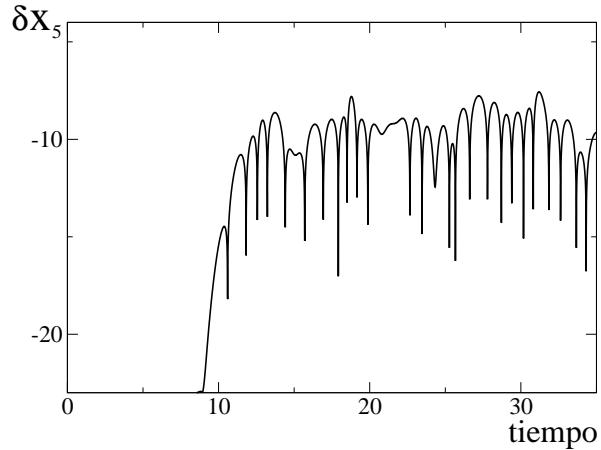


Figura 4.6: Evolución temporal de Δx_5 para $\tau_0 = 0.1$ y $\epsilon = 4.1$. El sistema con condiciones iniciales aleatorias y se observa que sincroniza, hasta que comienza a ser perturbado todo el tiempo.

4.3 Estabilidad espacial

Ahora perturbamos el primer oscilador de la siguiente manera: esperamos que la cadena se encuentre totalmente sincronizada, y una vez sincronizada se perturba el primer oscilador y se espera hasta que el sistema vuelva a sincronizar. Luego se vuelve a perturbar el primer oscilador, y se espera a que sincronice nuevamente, y así sucesivamente (en nuestro caso hemos hecho 10000 perturbaciones).

En las Figs. 4.4 y 4.5 se mostró que el sistema al ser perturbado todo el tiempo y tener un exponente transversal de Lyapunov negativo podía sincronizar. Esta sincronización era tal que las perturbaciones se atenuaban en el tiempo. Pero ahora vemos que la perturbación va creciendo a través del espacio, y que a cada oscilador le llega una perturbación mayor (ver Fig. 4.7).

Para tratar de explicar esto recurrimos a la Fig. 4.8, donde cada línea representa un oscilador sincronizado, en el que la perturbación se va transmitiendo por el acoplamiento a lo largo del tiempo. De esta forma, se presenta esquemáticamente

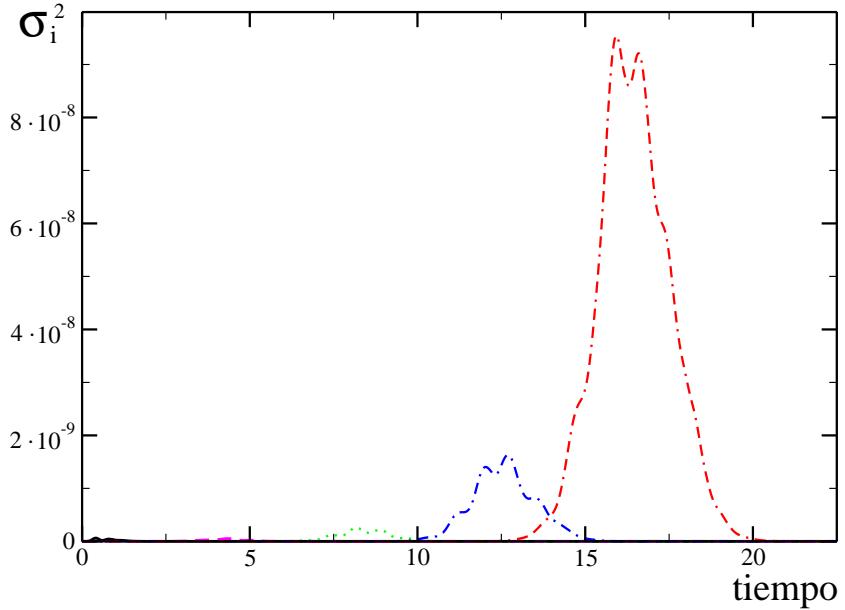


Figura 4.7: Promedio de la evolución de 10000 perturbaciones. Donde — σ_5^2 , — — σ_{25}^2 , ··· σ_{50}^2 , - · - σ_{75}^2 y - - - σ_{100}^2 .

la evolución de una perturbación, pasando de oscilador en oscilador. Se aprecia la influencia del τ_0 en el sistema, haciendo que a cada oscilador le llegue la perturbación con un retardo de τ_0 , con respecto al oscilador anterior. Así se ve que el sistema tiene una velocidad de grupo v . Aquí se puede observar que la perturbación, le llega a cada oscilador, con un tiempo de retraso $i\tau_0$.

La sincronización anticipada es robusta, aunque la evolución en el tiempo de la perturbación crezca al transmitirse entre oscilador y oscilador, porque finalmente toda la cadena vuelve a estar sincronizada, como se puede ver en la Fig. 4.7.

El fenómeno de inestabilidad convectiva se encuentra en sistemas espacialmente extendidos donde una perturbación local se atenúa hasta desaparecer, si observamos

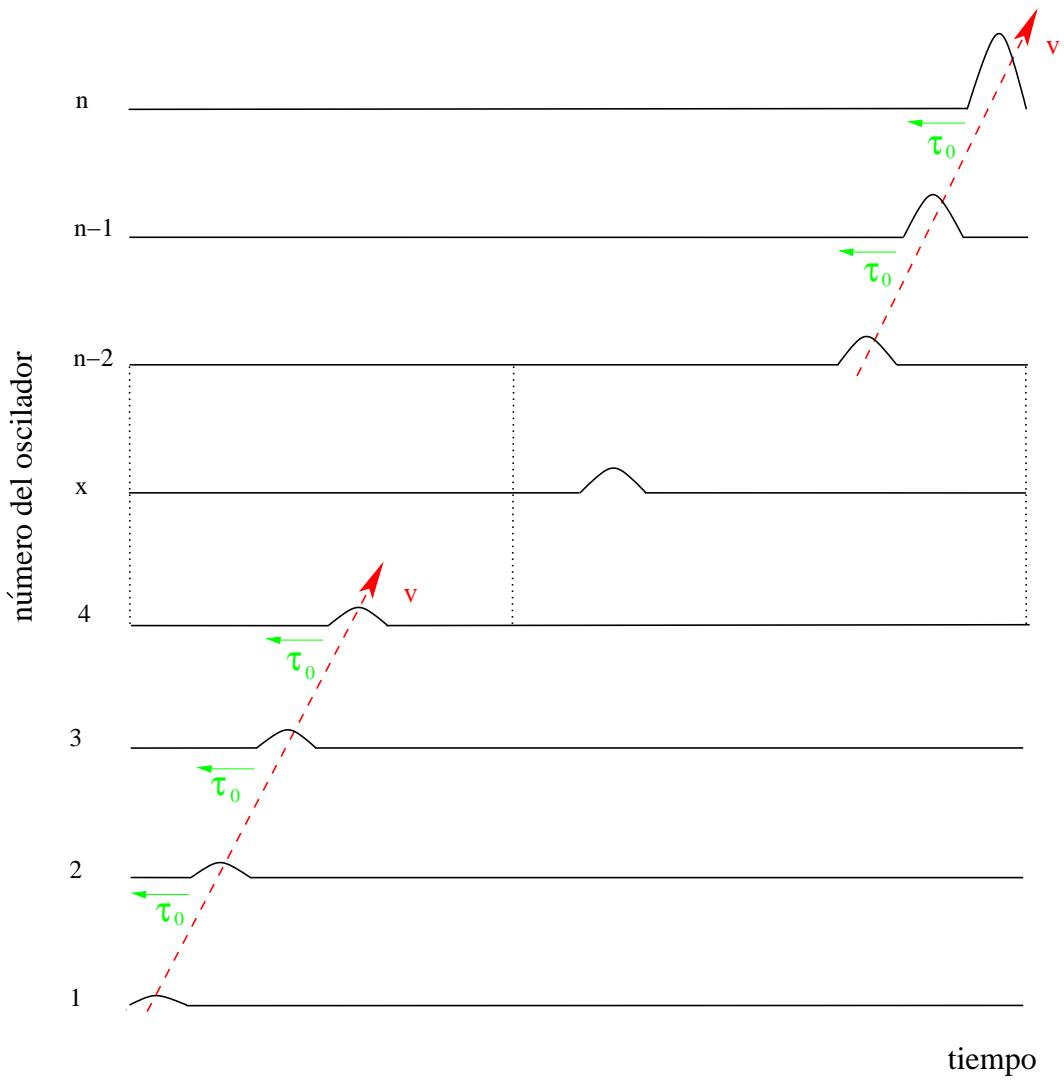


Figura 4.8: Diagrama de evolución de una perturbación, la flecha representa el tiempo τ_0 de anticipación, en este caso muestra el retraso en el cual llega la perturbación.

donde ha sido generada mientras que aparece más grande en un movimiento inercial. La analogía, depende de la interpretación del número entero i de los osciladores como una variable espacial, una exacta aplicación al fenómeno convectivo no es posible por la presencia adicional de iteraciones retrasadas que hacen el problema sea conceptualmente más complejo [118].

Sin embargo, se puede probar si la evolución de una perturbación localizada sigue el mismo comportamiento escalado como en un sistema extenso. En el contexto de un patrón unidimensional, el exponente convectivo se define como [113, 110]:

$$\Lambda(v) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta(i = vt, t)|}{\delta(0, 0)} \quad (4.7)$$

donde $\delta(i, t)$ es la amplitud de la perturbación en el lugar i y tiempo t , está inicialmente localizado en una región finita alrededor del origen. Si $|i|$ y t son bastante grandes, esto es equivalente a:

$$\delta(i, t) \simeq e^{\Lambda(v)t} = e^{\frac{\Lambda(v)}{v}i} \quad (4.8)$$

Desde un punto de vista numérico, se estima $\Lambda(v)$ de manera precisa por la comparación de la amplitud de la perturbación en dos diferentes posiciones espacio temporales $P_1 \equiv (i_1, t_1)$ y $P_2 \equiv (i_2, t_2)$:

$$\Lambda(v) = \frac{v}{i_2 - i_1} \ln \left(\frac{\delta(i_2, t_2)}{\delta(i_1, t_1)} \right) \quad (4.9)$$

donde $v = i_1/t_1 = i_2/t_2$ [116].

De hecho, es necesario que P_1 y P_2 estén bastante lejos del origen, las correcciones de tamaño finito δ afectan la dinámica y desaparecen cuando se toma la razón de la Ec. (4.7).

Así construimos el gráfico 4.9, confirmando que el comportamiento de las perturbaciones en el contexto de los osciladores de Rössler con un acoplamiento retrasado es análogo a los sistemas inestables convectivos. Efectivamente, las tres curvas obtenidas por la comparación entre pares de osciladores, (80,60), (60,40) y (40,20) casi se sobreponen, y sugieren que el espectro convectivo $\Lambda(v)$ está bien definido en este contexto.

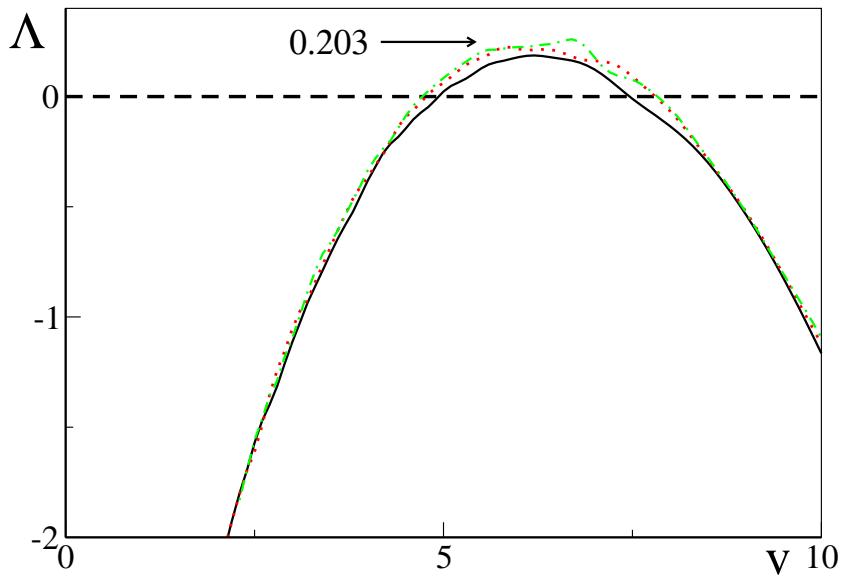


Figura 4.9: Máximos exponentes convectivos de Lyapunov Λ frente a v donde las curvas corresponden a — $x = 20$, ··· $x = 40$ y – · $x = 80$.

La existencia de un máximo positivo de $\Lambda(v)$ implica que las perturbaciones viajan con una velocidad v entre dos ceros de $\Lambda(v)$ (aproximadamente entre 4.7 y 7.8) y son amplificadas. Además, el máximo valor de $\Lambda(v)$ es aproximadamente igual a 0.203 y mayor que el exponente de Lyapunov positivo para un oscilador simple $\lambda_{\perp}(max)$, lo que indica que tal inestabilidad convectiva es más fuerte que la inestabilidad local.

Finalmente, se calcula el máximo exponente convectivo de Lyapunov tomando los máximos de σ_i de cada oscilador en su respectivo tiempo (Fig. 4.10), donde hacemos el siguiente ajuste:

$$\sigma_i = 3.06 \cdot 10^{-6} \exp(0.202t) \quad (4.10)$$

siendo el exponente $\Lambda_{max} = 0.202$ correspondiente al máximo exponente de Lyapunov

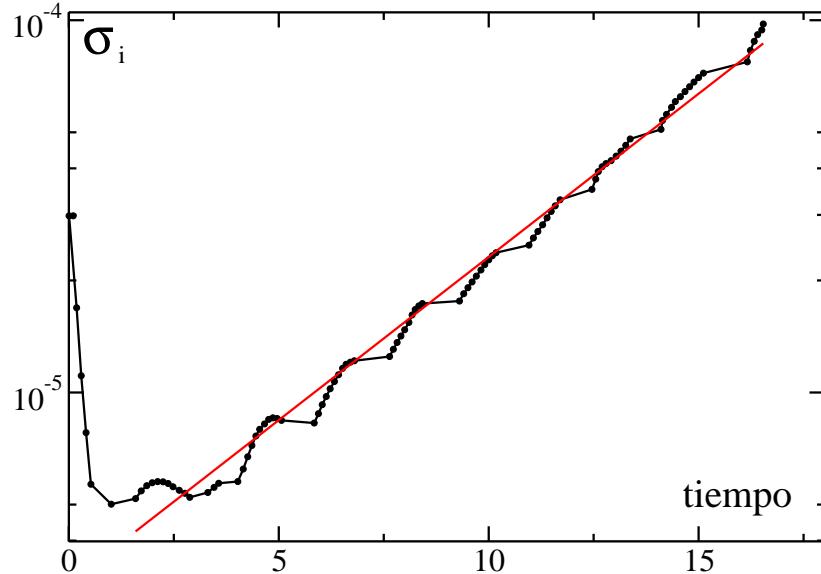


Figura 4.10: Máximo de la perturbación de cada oscilador en el tiempo donde la pendiente corresponde al máximo exponente convectivo Λ para $\epsilon = 4.1$.

convectivo [110]. Este valor tiene una buena correspondencia con el valor $\Lambda_{max} = 0.203$ calculado a partir de la Fig. 4.9.

A continuación fijamos τ_0 y variamos ϵ de 1.0 a 5.0, para una cadena completa se consideran los máximos de σ_i de cada oscilador con respecto a su tiempo. De esta forma obtenemos la Fig. 4.11, donde se observa que para pequeños valores de ϵ se encuentra un Λ_{max} menor, y al acercarnos a $\epsilon \rightarrow 0$ se recupera el valor del máximo exponente de Lyapunov transversal.

Calcularemos ahora la velocidad v de crecimiento de la perturbación en función del número del oscilador. Esto lo hacemos extrayendo el tiempo en el cual σ_i^2 alcanza el máximo para cada oscilador. Como se puede observar en la Fig. 4.12 la velocidad

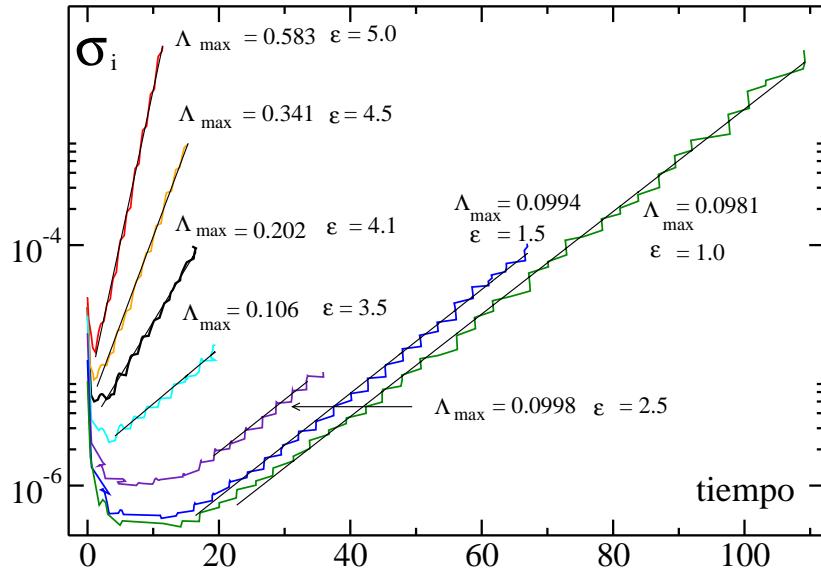


Figura 4.11: Máximo de la perturbación para cada oscilador, con distintas fuerzas de acoplamiento en escala semilogarítmica para $\sigma_0 = 0.005$ y $\tau_0 = 0.1$.

es lineal, y se observa sincronización de pequeños grupos de osciladores. Esto es, cada 10 osciladores aproximadamente hay un pequeño salto en el valor de σ y al ajustarle una recta (línea roja en la Fig. 4.12) se encuentra:

$$x = 0.580 + 5.90t \quad (4.11)$$

donde x corresponde al número del oscilador y t al tiempo. La velocidad de grupo 5.90, es la velocidad con la cual avanza la perturbación en la cadena.

Hemos mostrado que pequeñas perturbaciones en una cadena de osciladores unidireccionalmente acoplados impiden que se encuentre *AS* para grandes tiempos de anticipación, por la inestabilidad convectiva.

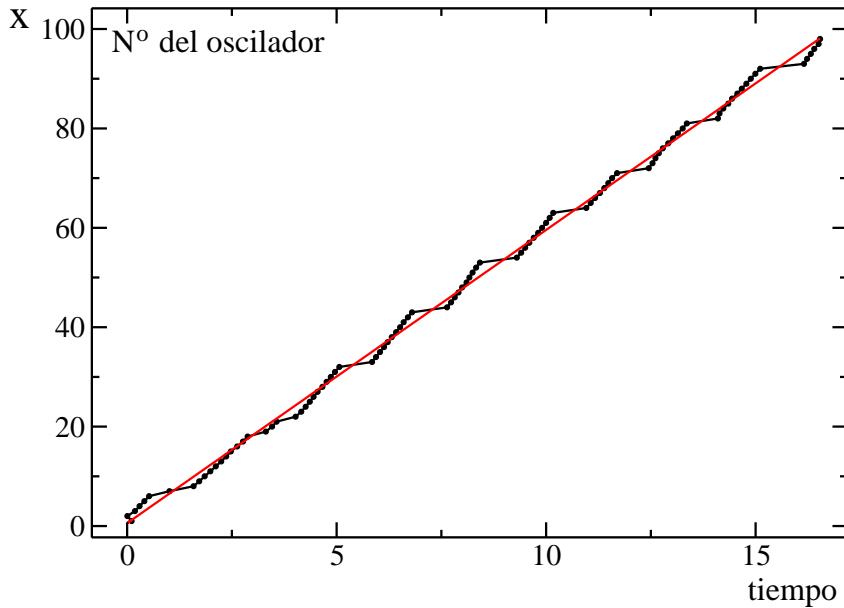


Figura 4.12: Velocidad de la perturbación. La línea continua — corresponde a un ajuste lineal.

Esto indica que la estabilidad absoluta de la variedad de sincronización es sólo una condición necesaria para la robustez de las propiedades de sincronización en sistemas extensos acoplados espacialmente, ya que otros tipos de inestabilidades espacio temporales pueden introducir efectos que son más fuertes que las inestabilidades locales.

Una consecuencia general es que las condiciones necesarias y suficientes para las propiedades de estabilidad de sincronización en sistemas espaciales extensos dependen de la dinámica y es importante estudiar las fuentes de inestabilidad, tal como el crecimiento convectivo de una perturbación en sistemas inerciales.

Una nueva consecuencia concierne la posibilidad de implementar *AS* como una

estrategia para pronosticar en tiempo real de estados futuros dada una dinámica. Tal posibilidad necesita para ser reconsiderada por una cuidadosa investigación de las inestabilidades espacio temporales que pueden ser sufridas por la dinámica sincronizada cuando las perturbaciones son tomadas en cuenta.

Capítulo 5

Sincronización anómala en sistemas extensos

La transición anómala a la sincronización de fase fue descrita en la sección 1.3.4 y consiste en la sincronización entre dos sistemas donde la divergencia entre ellos aumenta a pesar de aumentar el acoplamiento llegando a un máximo local y después disminuye hasta llegar a un estado sincronizado [16].

Por otra parte, la sincronización de la ecuación *CGL* ha sido estudiada en [99, 100], la sincronización de fase anómala para dos *CGL* acopladas bidireccionalmente en el régimen AT–PT ha sido descrita recientemente [119].

Vamos a analizar dos Ecs. *CGL* acopladas de la siguiente forma:

$$\dot{A}_1 = A_1 - (1 + i\beta_1) |A_1|^2 A_1 + (1 + i\alpha)\partial_x^2 A_1 + \frac{\epsilon}{2}(1 - \theta)(A_2 - A_1) \quad (5.1)$$

$$\dot{A}_2 = A_2 - (1 + i\beta_2) |A_2|^2 A_2 + (1 + i\alpha)\partial_x^2 A_2 + \frac{\epsilon}{2}(1 + \theta)(A_1 - A_2) \quad (5.2)$$

donde \dot{A} es la derivada parcial con respecto al tiempo ∂_x^2 es la segunda derivada con respecto al espacio y los parámetros α y β son constantes reales.

El primer término describe el crecimiento lineal de las perturbaciones, el segundo la saturación no lineal (parte real) y la variación de frecuencia (parte imaginaria), el tercer término describe la interacción espacial, la difusión (parte real) y la dispersión (parte imaginaria); el último término describe el acoplamiento entre los dos sistemas,

donde ϵ es la fuerza de acoplamiento. Para $\epsilon = 0$ las Ecs. (5.1) y (5.2) están desacopladas y θ determina el tipo de acoplamiento. Encontramos tres casos límites sobre el tipo de acoplamiento:

- $\theta = 1$ la Ec. (5.1) queda desacoplada, evolucionando libremente como *drive*, y para la Ec. (5.2) el acoplamiento es ϵ , siendo el *response*.
- $\theta = 0$ las Ecs. (5.1) y (5.2) se acoplan de forma bidireccional y el valor del acoplamiento es $\epsilon/2$.
- $\theta = -1$ la Ec. (5.2) queda desacoplada siendo el *drive* y para la Ec. (5.1) el valor del acoplamiento es ϵ y es el *response*.

En el caso en que $\epsilon = 0$, estas Ecs. tienen la siguiente solución conocida: ondas viajeras (*TW*) donde $A_{1,2}(x, t) = \rho_{1,2}(x, t)e^{i\phi_{1,2}(x, t)}$ son funciones complejas, siendo $\rho_{1,2}$ los módulos y $\phi_{1,2} = \omega_{1,2}t + qx$ las fases, donde $\omega_{1,2}$ y q corresponden a las frecuencias y el número de onda respectivamente. El módulo y la frecuencia son soluciones relacionadas con el número de onda q

$$|\rho_{1,2}| = \sqrt{1 - q^2} \quad \omega_{1,2} = \beta_{1,2} + (\alpha - \beta_{1,2})q^2 \quad (5.3)$$

Como se puede ver en la Ec. (5.3) el rango de existencia de las soluciones de *TW* es $-1 < q < 1$. Esta es una banda de estabilidad para estas soluciones.

Las soluciones son inestables en la región de parámetros $\alpha\beta_{1,2} > -1$. A través de la inestabilidad de Eckhaus ($\alpha\beta_{1,2} = -1$) las soluciones se hacen estables $\alpha\beta_{1,2} < -1$ y en este caso

$$-q_c \leq q \leq q_c \quad q_c = \sqrt{\frac{1 + \alpha\beta_{1,2}}{2(1 + \beta_{1,2}^2) + 1 + \alpha\beta_{1,2}}} \quad (5.4)$$

Todas las ondas planas son inestables cuando cruzan bajo la línea $\alpha\beta_{1,2} = -1$ en el espacio de parámetros que es la llamada línea de Benjamin–Feir–Newell (*B-F-N*). Sobre esta línea se identifican bicoas y dos estados de turbulencia, de fase *PT*, o bien de amplitud *AT* (Fig. 5.1).

5.1 Regímenes en la ecuación *CGL*

Numerosos trabajos numéricos han identificado regiones de parámetros dibujando un diagrama de fase para la Ec. *CGL* [106, 120]. Este diagrama fue obtenido con

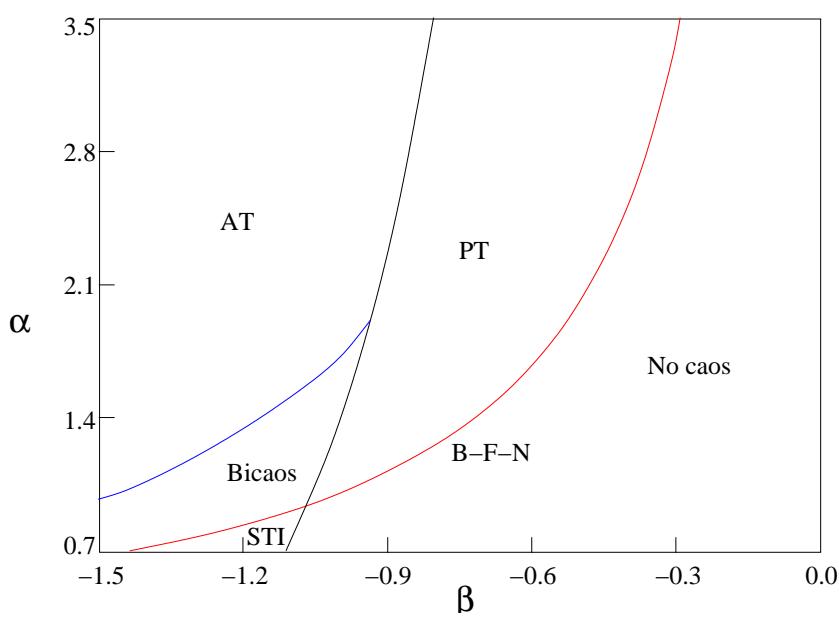


Figura 5.1: Diagrama de fase de la Ec. *CGL* en el espacio de parámetros α y β .

soluciones numéricas para tiempos grandes desde condiciones iniciales particulares y condiciones de contorno periódicas. Se muestran cinco regiones diferentes en la mitad del espacio de parámetros de la Fig. 5.1.

Dos de estas regiones están en la zona estable bajo la línea *B-F-N* y las otras tres en la zona inestable, sobre dicha línea. Se encuentran distinciones entre las diferentes fases asintóticas en el comportamiento de $\rho_{1,2}$ para tiempos grandes. Detallando el comportamiento asintótico en diferentes regiones:

- Región no caótica. La evolución aquí va a una solución *TW* para todas las condiciones iniciales. Los atractores en esta región son soluciones estables *TW*.
- Región de intermitencia espacio temporal *STI*. Pese al hecho que la *TW* es estable, la evolución desde condiciones iniciales aleatorias no está atraída hacia las *TW*. En cambio, un atractor caótico alcanza una configuración típica del campo $\rho_{1,2}$ consistente en regiones *TW* interrumpida por épocas turbulentas.
- Turbulencia de amplitud *AT*. Ésta es una región muy desordenada en el modulo

de $\rho_{1,2}$. Tiene una densidad finita en el espacio tiempo (cuando $\rho_{1,2} \rightarrow 0$, tenemos un defecto). En resumen, la función de correlación temporal tiene un decaimiento casi-exponencial.

- Turbulencia de fase *PT*. Este es un desorden débil de la fase en que $A_{1,2}(x, t)$ permanece cerca de un valor distinto de cero; la densidad espacio-temporal de defectos es cero. La correlación temporal decae de forma exponencial. El comportamiento de la fase en esta región se parece al comportamiento turbulento de la Ec. de Kuramoto–Sivashinsky.
- Región de bicos. Dependiendo de las particulares condiciones iniciales, el sistema termina en regiones *AT* o *PT* o en un nuevo atractor en que la configuración de $A_{1,2}$ consiste en regiones de turbulencia de fase y amplitud.

En este capítulo caracterizaremos la sincronización anómala en dos Ecs. *CGL* para los regímenes *AT–AT* y *PT–PT*. Además deduciremos a partir de las Ecs. *CGL* la de Kuramoto–Sivashinsky modificada para el caso *PT–PT* y calcularemos la frecuencia en forma semianalítica.

5.2 Régimen AT–AT

Vamos a analizar la Ec. *CGL* acoplada en el régimen *AT–AT* con $\alpha = 2.00$, $\beta_1 = -1.05$ y $\beta_2 = -1.20$, con $-1 \leq \theta \leq 1$.

Para detectar la *CS*, se utiliza el coeficiente de Pearson, que medirá la correlación lineal entre ρ_1 y ρ_2 .

El coeficiente de Pearson γ mide el grado de asociación lineal entre dos variables cualesquiera, y puede calcularse dividiendo la covarianza de ambas por el producto de las desviaciones típicas de las dos variables. Para un conjunto de datos, γ puede tomar cualquier valor entre -1 y $+1$. El valor de γ será positivo si existe una relación directa entre ambas variables, esto es, si las dos aumentan al mismo tiempo. Será negativo si la relación es inversa, es decir, cuando una variable disminuye a medida que la otra aumenta. Un valor de $+1$ ó -1 indicará una relación lineal perfecta entre ambas variables, mientras que un valor 0 indicará que no existe relación lineal entre ellas. Hay que tener en cuenta que un valor de cero no indica necesariamente que no exista correlación, ya que las variables pueden presentar una correlación no lineal.

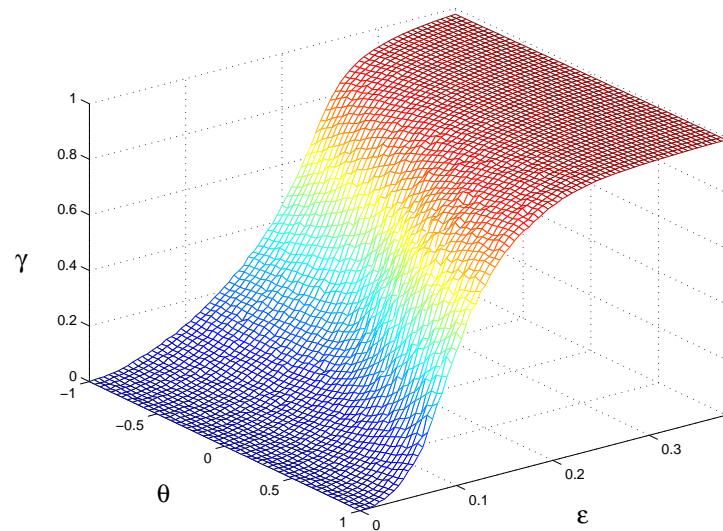


Figura 5.2: γ coeficiente de Pearson.

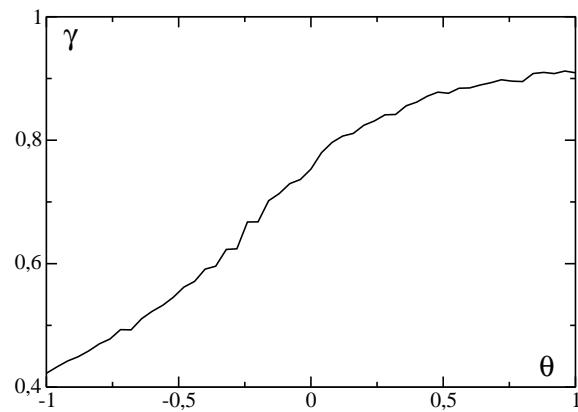


Figura 5.3: Variación de γ con respecto a θ para $\epsilon = 0.2$.

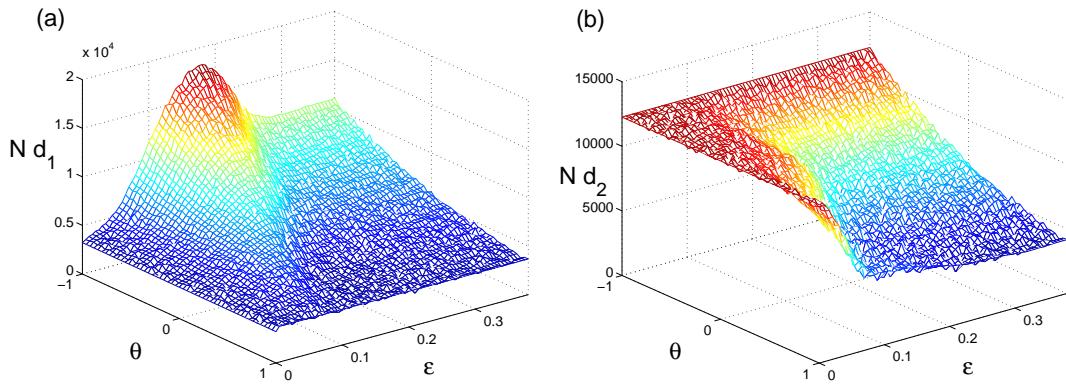


Figura 5.4: Simulación con un paso de tiempo $\delta t = 10^{-2}$ y el paso espacial $\delta x = 0.25$ para $L = 100$, $5 \cdot 10^6$ iteraciones temporales. (a) Nd_1 número de defectos de ρ_1 (b) Nd_2 número de defectos de ρ_2 .

$$\gamma = \frac{\langle (\rho_1 - \langle \rho_1 \rangle)(\rho_2 - \langle \rho_2 \rangle) \rangle}{\sqrt{\langle (\rho_1 - \langle \rho_1 \rangle)^2 \rangle} \sqrt{\langle (\rho_2 - \langle \rho_2 \rangle)^2 \rangle}} \quad (5.5)$$

En la Fig. 5.2 se ha dibujado el coeficiente de Pearson, frente a θ y ϵ . Cuando aumenta la fuerza del acoplamiento ϵ , las amplitudes pasan de estar no correlacionadas, para $\epsilon = 0$, a totalmente correlacionadas en $\epsilon \simeq 0.4$ obteniendo una *CS*. Es importante notar que la transición a estados de *CS* se efectúa para valores distintos de ϵ cuando θ varía (Fig. 5.3).

Otro indicador de la sincronización corresponde al número de defectos. Se considera un defecto el lugar donde $\rho_{1,2} \rightarrow 0$; en nuestro caso será cuando $\rho_{1,2} < 2.5 \cdot 10^{-2}$, debido a la precisión numérica. Una cantidad intensiva es la densidad de defectos medida como el número de defectos por unidad de espacio y tiempo.

En la Fig. 5.4(a) se ha representado el número de defectos, para la Ec. (5.1). Aquí se aprecia cómo a medida que el tipo de acoplamiento va variando desde θ igual a -1 hasta 1 el número de defectos va variando.

El acoplamiento ϵ , en este caso juega un papel importante, ya que para valores $0 < \epsilon < 0.1$ y para $\theta \sim 1$, tenemos que el valor de la diferencia de amplitudes ρ_1 y ρ_2

es mínima, obteniéndose el mínimo valor de defectos, o mejor dicho, ρ_2 rectifica muy poco la trayectoria de ρ_1 produciendo pocos defectos.

Al acercarnos a $\theta = 0$, se encuentra un acoplamiento bidireccional, donde la fuerza de acoplamiento es simétrica, de manera que ρ_1 y ρ_2 buscan una nueva solución intermedia, distinta de la solución sin acoplamiento. Aquí se ve que para $0 < \epsilon < 0.2$, hay un incremento del número de defectos en el sistema (5.1).

Para $\theta < 0$, tenemos un acoplamiento unidireccional, ahora es ρ_1 el que está sometido a la dinámica de ρ_2 . La fuerza de acoplamiento total, se obtiene en $\theta = -1$ y vale $\epsilon(\rho_2 - \rho_1)$. Esta corrección produce en ρ_1 una gran cantidad de defectos.

Para $0.1 > \epsilon > 0.2$, con θ entre 0 y 1, no se aprecia una diferencia grande con respecto a lo anterior, pero al acercarnos a $\theta = -1$, se observa que el número de perturbaciones tiene un máximo local de defectos y que después de éste existe una disminución del número de defectos. Para $\epsilon > 0.2$, lo que corresponde a un valor grande para el acoplamiento del sistema, tenemos sincronización y el número de defectos para ρ_1 y ρ_2 son iguales.

Para la Fig. 5.4(b) el número de defectos de ρ_2 , para bajos valores del acoplamiento, $\epsilon < 0.1$ se encuentra una gran cantidad de defectos, siendo este valor casi independiente del tipo de acoplamiento. A medida que θ va disminuyendo, la región donde se encuentran grandes cantidades de defectos aumenta.

Para $\epsilon > 0.1$ la cantidad de defectos baja ostensiblemente. Para un valor fijo de ϵ vemos que Nd_2 va subiendo de forma lineal con θ .

Cuando $\theta = -1$ el acoplamiento es unidireccional y ρ_2 está obligado a seguir la dinámica de ρ_1 llegando al máximo del número de defectos, de forma independiente del valor del acoplamiento ϵ .

En este caso, el sistema comienza desincronizado y se va sincronizando al ir aumentando el acoplamiento. Además en este caso no se detecta, un acoplamiento fuerte, que exija una sincronización para todos los ϵ superiores a algún valor crítico independiente del tipo de acoplamiento (unidireccional o bidireccional).

En el régimen AT-AT, vemos en la Fig. 5.2 que para $\epsilon > 0.4$ se encuentra que los sistemas tienen una *CS*, al comprobar que los valores del número de defectos para ρ_1 y ρ_2 son iguales, confirmando la *CS*.

Como se describe en [121], para el régimen *AT-PT* la diferencia de amplitud para un sistema bidireccional ($\theta = 0$) va pasando desde una etapa de desincronización completa a una *CS* para $\epsilon = 0.09$. En nuestro caso lo encontramos para $\epsilon = 0.3$.

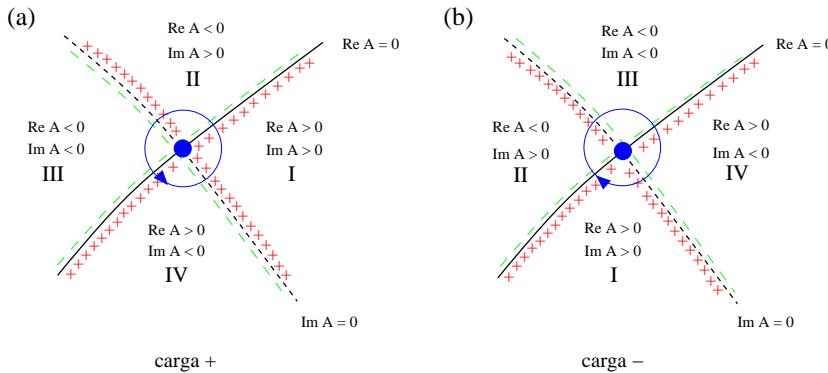


Figura 5.5: Esquemas de carga topológica para un defecto (a) carga positiva (b) carga negativa.

Se define la carga topológica de un defecto como la integral de camino cerrado del gradiente de la fase rodeando el defecto. Ésta es igual a $n2\pi$, donde n corresponde a la carga. De esta forma para $n > 0$, se tendrá una carga positiva, para $n < 0$ la carga será negativa.

En la Fig. 5.5 hemos representado dos defectos de carga 2π y -2π la amplitud de los vecinos cercanos a un defecto, representado por el punto azul. En un defecto se encuentra un salto de fase de 2π y por tanto, existen dos configuraciones dependiendo del giro de la fase. En este esquema se considera la carga topológica positiva, si este gira en sentido trigonométrico.

En las Figs. 5.6 y 5.7 se ha representado ρ_1 y ρ_2 para $\epsilon = 0.5$ y $\theta = -0.88$. Las regiones rojas indican los máximos y las azules corresponden a los mínimos locales, y después de un transitorio hemos empezado a localizar los defectos midiendo su carga topológica. Cuando esta carga es positiva se marca el punto con + y si es negativa con \circ .

En el primer sistema, encontramos casi la misma cantidad de defectos de carga topológica positiva (46) que de carga negativa (45) de los 92 defectos encontrados, el que falta es de carga neutra. Para el segundo sistema hallamos 48 defectos de carga positiva, y 46 de carga negativa, de 95 defectos totales el defecto restante es de carga neutra.

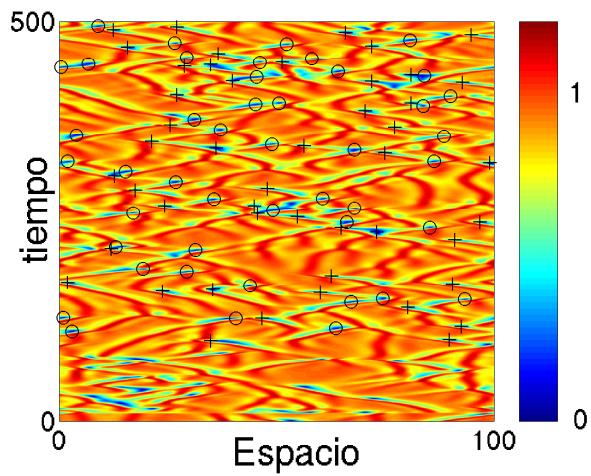


Figura 5.6: Diagrama espacio temporal para ρ_1 .

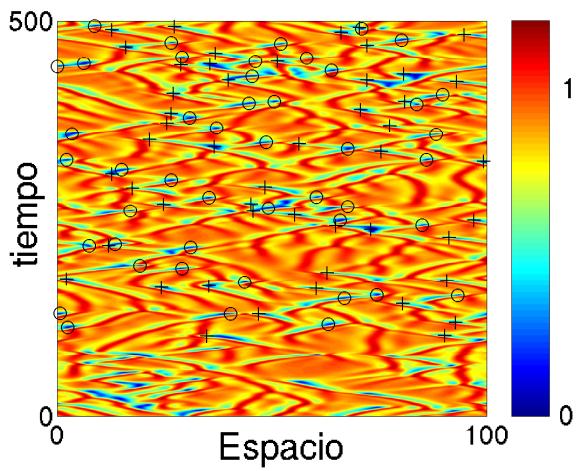


Figura 5.7: Diagrama espacio temporal para ρ_2 .

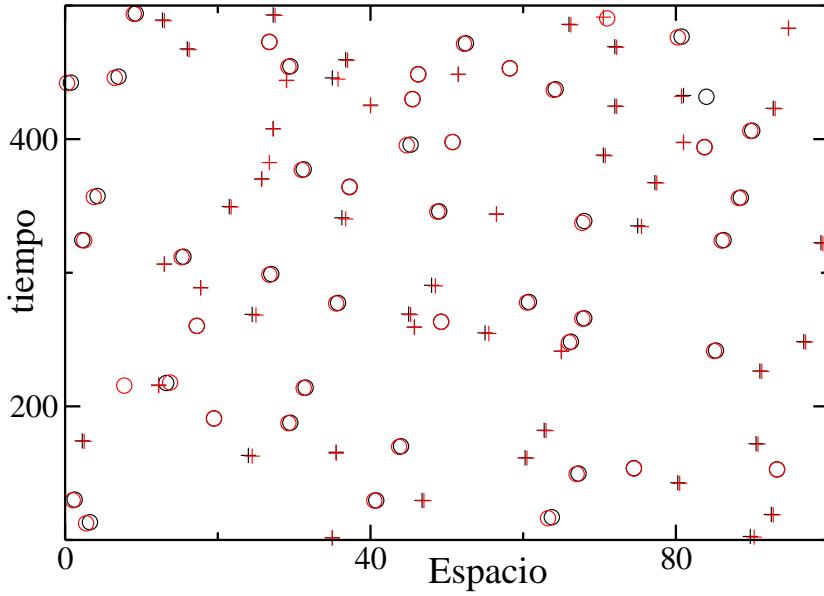


Figura 5.8: Diagrama de correspondencia de defectos, el color negro corresponde al primer sistema y color rojo al segundo. El signo + indica un defecto de carga topológica positiva y el o a la carga negativa.

A continuación hemos representado en la Fig. 5.8 de color negro al sistema 1 y de color rojo al sistema 2, los signos + y o corresponden a la carga topológica positiva y negativa, respectivamente. Podemos observar que aunque las cantidades de defectos son parecidas no implica que los defectos ocurran en el mismo lugar. Cuando coinciden dos defectos (rojo–negro), siempre tienen la misma carga topológica.

Definimos la diferencia de fase entre los dos sistemas como:

$$\Delta\phi(t) = \underset{x \in [0, L]}{\text{Max}} [\phi_1(t) - \phi_2(t)] \quad (5.6)$$

donde $\phi_{1,2}$ es el máximo de la fase de las Ecs. (5.1) y (5.2).

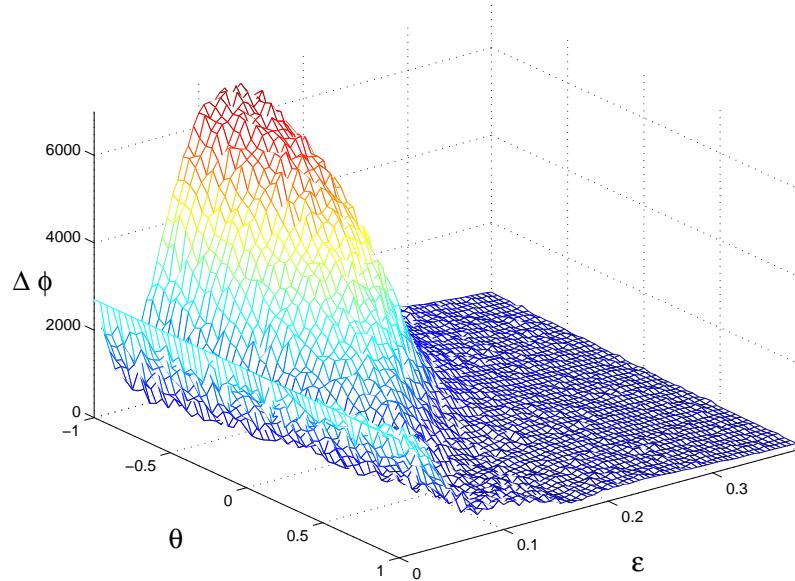


Figura 5.9: $\Delta\phi$ Diferencia de fase (definido en el texto).

En la Fig. 5.9 se representa la variación de la fase $\Delta\phi$ con respecto a θ y ϵ . Para valores de $\theta > 0$ se encuentra una sincronización normal, ya que al aumentar el valor de ϵ el sistema sincroniza, encontrándose en *PS*.

En el caso $\theta < 0$ se observa que para pequeños valores de ϵ comienza a sincronizar, pero al llegar a $\epsilon \simeq 0.1$ el sistema desincroniza, es decir, que domina la dinámica A_1 . Aquí se observa que el sistema cada vez está más desincronizado, al aumentar la diferencia $\Delta\phi$, hasta llegar a un máximo local y desde este valor, el sistema comienza a sincronizar, ya que disminuye el valor de $\Delta\phi$ hasta llegar a cero.

Para valores de $\epsilon > 0.3$ se observa que el sistema sincroniza para todos los valores de θ , ya que la diferencia $\Delta\phi \sim 0$ es independiente de qué Ec. domine la dinámica. De igual forma al tener un $\epsilon > 0.3$ el sistema tiene una *PS*.

La diferencia de frecuencias es:

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \quad (5.7)$$

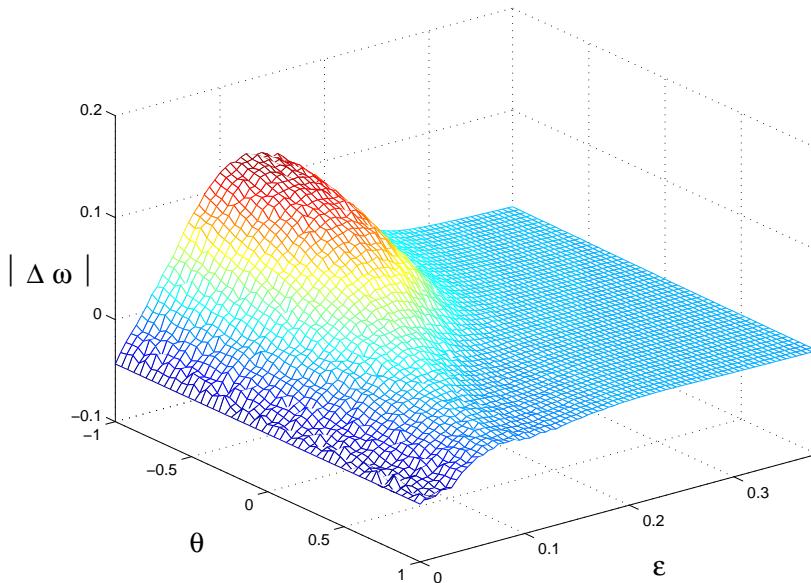


Figura 5.10: $\Delta\omega$ Diferencia de frecuencia.

donde ω_1 y ω_2 se definen como:

$$w_{1,2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \frac{\phi_{1,2}(x, t)}{t} \rangle_x \quad (5.8)$$

siendo $\langle \rangle_x$ es el promedio espacial.

La Fig. 5.10 presenta la variación de $\Delta\omega$ con respecto a los parámetros ϵ y θ . Para $0 < \theta < 1$, estamos en la situación en que A_1 va desde un acoplamiento bidireccional simétrico hasta uno asimétrico, donde A_1 evoluciona libremente. En este caso se encuentran dos comportamientos, uno para $\epsilon < 0.2$, donde el sistema está completamente desincronizado y otro para $\epsilon > 0.2$, donde se encuentra en una *FS*. El paso a esta sincronización, es a medida que $|\Delta\omega|$ va disminuyendo hasta llegar a cero.

Para $-1 < \theta < 0$, A_1 va desde un acoplamiento bidireccional a uno unidireccional, en el cual A_1 debe olvidar completamente de su dinámica. Encontramos también dos comportamientos: para $\epsilon > 0.3$, el sistema está sincronizado, mientras que para

$\epsilon < 0.3$, el sistema está desincronizado.

En este caso, cuando $0 < \epsilon < 0.3$ se observa que existe una transición anómala de frecuencia, donde la diferencia de frecuencia, al incrementar el acoplamiento primero disminuye, luego crece hasta llegar a un máximo local, para de nuevo volver a disminuir, hasta llegar a la FS para $\epsilon > 0.3$.

El decaimiento de la desincronización o la sincronización de fase y frecuencia, fue descrito por [121] para el caso $AT-PT$ ocurriendo estos al mismo tiempo. Esto también es consistente con lo observado para pequeños parámetros de asintonía en modelos químicos [122].

Volviendo al caso $AT-AT$ notamos que la CS no implica una FS ; se observa en la Fig. 5.4(b) que para valores de $\epsilon > 0.1$ el sistema sincroniza para $\theta = 0$; para el mismo valor en la Fig. 5.10 se encuentra el sistema completamente desincronizado.

Al comparar las Figs. 5.10 y 5.9, se observa que la sincronización de frecuencia y fase coinciden para todos los valores de ϵ y θ . Los puntos de máxima desincronización y sincronización también coinciden. Esto no se cumple siempre, ya que en el caso de estar en el régimen $PT-AT$, es decir una Ec. en turbulencia de fase y la otra en la de turbulencia de amplitud, no se encuentra esta correlación [119].

5.3 Régimen PT–PT

Para hacer las simulaciones en este régimen se ha considerado $\alpha = 2.00$, $\beta_1 = -0.75$ y $\beta_2 = -0.90$, variando θ en $[-1,1]$ y ϵ en $[0,0.5]$. Con un paso de tiempo temporal $\delta t = 10^{-2}$, paso espacial $\delta x = 0.25$ para $L = 100$, $1.5 \cdot 10^6$ iteraciones temporales.

La Fig. 5.11 nos da el coeficiente de Pearson γ frente a los parámetros θ y ϵ . Observamos que las Ecs. permanecen descorrelacionadas para $\theta = 1$ y $\epsilon < 0.2$. Al disminuir el valor de θ se necesita una mayor fuerza de acoplamiento para que las Ecs. sincronicen (CS). Es decir, al sistema A_1 le cuesta adaptar más su dinámica a la de A_2 , que de forma inversa.

En la Fig. 5.12 se presenta el número de defectos. Para la primera Ec. A_1 (Fig. 5.12(a)) $0 \leq \epsilon \leq 0.08$ no se encuentra ningún defecto. Pero para $\epsilon > 0.08$ se observa la aparición de defectos a partir de $\theta = 0.56$ hasta $\theta = -1$, donde éstos van aumentando. Notamos que las Ecs. se encuentran en el régimen $PT-PT$, donde no se producen defectos. Estos defectos se producen al acoplarse A_1 con A_2 . A

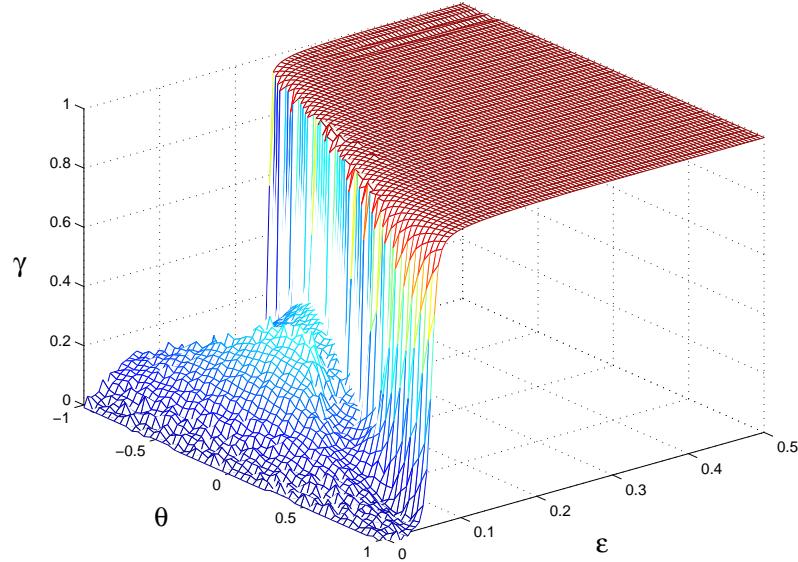


Figura 5.11: Coeficiente de Pearson γ .

medida que el acoplamiento se va transformando en unidireccional, el número de defectos va aumentando; para $\theta = -1$ es donde se encuentra la dinámica dominada por A_2 y corresponde al mayor número de defectos. Para valores de $\epsilon > 0.3$ no se encuentran defectos para todo el rango de θ . Además vemos que cuando la dinámica está dominada por A_1 se encuentra una transición normal a la sincronización, mientras que cuando domina A_2 surge la sincronización anómala.

En la Fig. 5.12(b) se observa el número de defectos de A_2 . En este caso se aparece una pequeña región de aparición de defectos, correspondiente a los valores de θ donde A_2 domina sobre la dinámica A_1 . Aquí, se encuentran pocos defectos porque A_1 rápidamente modifica su dinámica para seguir a A_2 , tal como se aprecia a través del coeficiente de Pearson γ . Para el resto de la región no se encuentran defectos.

Al comparar los números de defectos de A_1 y A_2 se encuentra que en A_1 se producen más defectos que en A_2 y que las regiones de defectos no coinciden.

La diferencia de fase (Fig. 5.13) definida en la Ec. (5.6) presenta para $0 < \theta < 1$ una transición normal a la sincronización, es decir, $\Delta\phi$ disminuye con el acoplamiento

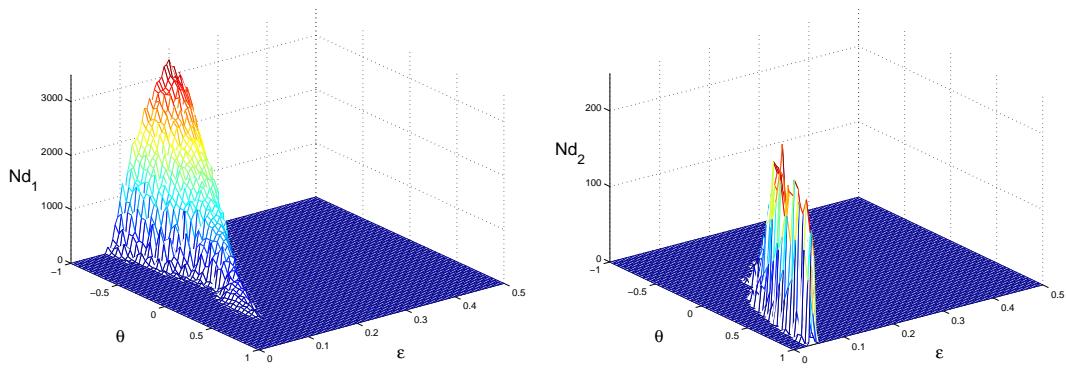


Figura 5.12: (a) Nd_1 número de defectos de ρ_1 (b) Nd_2 número de defectos de ρ_2 .

hasta alcanzar el cero.

Para valores de $-1 < \theta < 0$ se encuentra, que para $\epsilon > 0.1$ la desincronización aumenta de forma lineal, pero para valores de $0.1 < \epsilon < 0.15$ hay un salto donde la desincronización aumenta hasta llegar a un máximo local, desde el que comienza a disminuir la diferencia de fase hasta llegar a cero: nos encontramos con sincronización anómala. Comparando las regiones de sincronización anómala, entre el número de defectos y la diferencia de fase, se ve que no coinciden, como en el caso *AT-AT*.

En la diferencia de frecuencias (Fig. 5.14) también se observa la sincronización anómala. Para $0.5 < \theta \leq 1$ hay una transición normal, es decir, la diferencia entre las frecuencias va disminuyendo a medida que aumenta la fuerza de acoplamiento; para $\epsilon > 0.2$ se encuentra la sincronización de frecuencia. Para $-1 \leq \theta \leq 0.5$ aparece la sincronización anómala, ya que la diferencia de frecuencia aumenta primero linealmente y luego aumenta en un salto brusco hasta de alcanzar un máximo negativo de desincronización y comenzar a sincronizar. Vemos que la región de sincronización de fase coincide con la de sincronización de frecuencia.

Al analizar las frecuencias de sincronización, se obtiene para $\theta = 1$ que $\omega = \omega_1 \sim 0.75$ y para $\theta = -1$, que $\omega = \omega_2 \sim 0.9$ como cabe esperar, porque en cada extremo una de los dos sistemas es el *drive*.

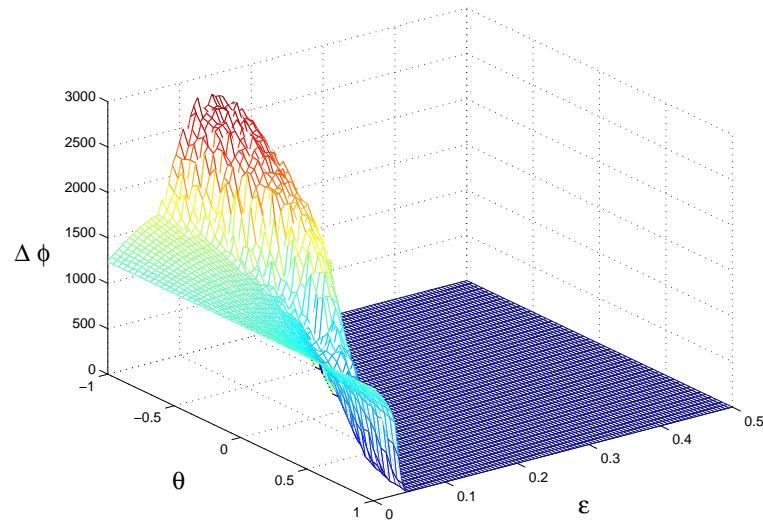


Figura 5.13: Diferencia de fase $\Delta\phi$.

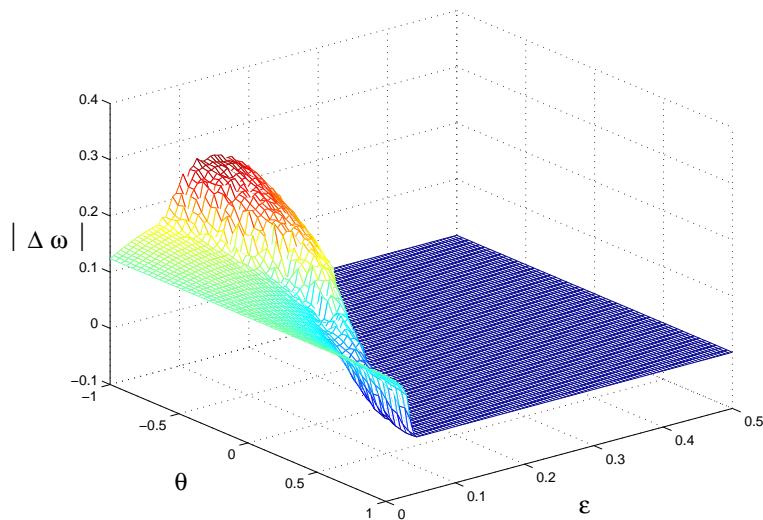


Figura 5.14: Diferencia de frecuencias $\Delta\omega$.

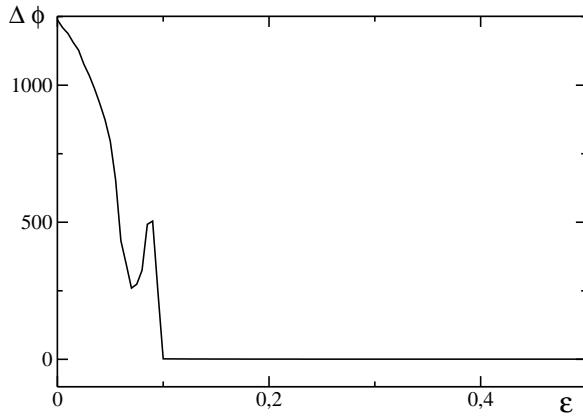


Figura 5.15: Variación de $\Delta\phi$ con respecto a ϵ para $\theta = 0.48$.

Además cuando no hay defectos vemos en las Figs. 5.13 y 5.14 que aparece la sincronización anómala y cuando surgen los defectos ($\epsilon > 0.1$) hacen que se acentúe más la anomalía; aunque no son los responsables de este comportamiento. Podemos observar en la Fig. 5.15 para $\theta = 0.48$ cómo el sistema va sincronizando y cuando aparecen los defectos hay una pequeña desincronización.

Notamos que el primer sistema tiene una frecuencia aproximada de 0.75, y el segundo de 0.9. Cuando la dinámica está dominada por A_1 (frecuencia baja), el sistema presenta una sincronización normal. Pero cuando A_1 debe modificar su dinámica para seguir a la frecuencia mayor surge la sincronización anómala.

5.4 Ecuación de Kuramoto–Sivashinsky modificada

Como una primera aproximación, nos referiremos al cálculo de la frecuencia de las Ecs. simuladas anteriormente. Para esto deducimos la Ec. de Kuramoto –Sivashinsky modificada a partir de la Ec. *CGL*, que se ha demostrado que también describe *PT* [123, 124]. La *CGL* se escribe como:

$$\dot{A}_1 = A_1 + (1 + i\alpha)\partial_x^2 A_1 - (1 + i\beta) |A_1|^2 A_1 \quad (5.9)$$

La perturbamos de la siguiente forma:

$$A = r(x, t)e^{i\psi(x, t)} \quad (5.10)$$

$$r(x, t) = 1 + \rho(x, t) \quad (5.11)$$

$$\psi(x, t) = -\beta t + \phi(x, t) \quad (5.12)$$

$$\Delta_{\omega_0} = -\beta_1 + \beta_2 \quad (5.13)$$

Después de tediosos cálculos se obtiene

$$\dot{\phi} = \Omega_2^1 \partial_x^2 \phi + \Omega_2^2 (\partial_x \phi)^2 + \Omega_4^1 \partial_x^4 \phi \quad (5.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \Omega_2^1 &= 1 + \alpha\beta & \Omega_2^2 &= \beta - \alpha \\ \Omega_4^1 &= -\frac{\alpha^2(1+\beta^2)}{2} \end{aligned} \quad (5.15)$$

La Ec. (5.14) corresponde a la ecuación de Kuramoto–Sivashinsky, que es conocida por exhibir turbulencia de fase, cuando el coeficiente de difusión $\Omega_2^1 = 1 + \alpha\beta$ es negativo. La correspondiente Ec. *CGL* también exhibe turbulencia de fase cuando $1 + \alpha\beta$ es negativo [123, 124].

En nuestro caso tenemos 2 Ec. *CGL* acopladas

$$\dot{A}_{1,2} = A_{1,2} + (1 + i\alpha)\partial_x^2 A_{1,2} - (1 + i\beta) |A_{1,2}|^2 A_{1,2} + \frac{\epsilon}{2}(1 \mp \theta)(A_{2,1} - A_{1,2}) \quad (5.16)$$

Consideramos la ecuación $\phi(x, t)$ por la expansión sistemática en series de ∂_x como se ve en el Apéndice B. y se perturba de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A_1 &= r_1(x, t)e^{i\psi_1(x, t)} & A_2 &= r_2(x, t)e^{i\psi_2(x, t)} \\ r_1(x, t) &= 1 + \rho_1(x, t) & r_2(x, t) &= 1 + \rho_2(x, t) \\ \psi_1(x, t) &= -\beta_1 t + \phi_1(x, t) & \psi_2(x, t) &= -\beta_2 t + \phi_2(x, t) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Utilizando las siguientes variables, para simplificar la escritura

$$c_1 = \frac{\epsilon}{2}(1 - \theta) \quad c_2 = \frac{\epsilon}{2}(1 + \theta) \quad (5.18)$$

al reemplazar los valores anteriores en la Ec. (5.16) y siguiendo el mismo procedimiento utilizado para calcular la Ec. (5.14) se llega a dos Ecs. de fase acopladas:

$$\dot{\phi}_1 = \Omega_{1,0} + \Omega_{1,2}^1 \partial_x^2 \phi_1 + \Omega_{1,2}^2 (\partial_x \phi_1)^2 + \Omega_{1,4}^1 \partial_x^4 \phi_1 \quad (5.19)$$

$$\dot{\phi}_2 = \Omega_{2,0} + \Omega_{2,2}^1 \partial_x^2 \phi_2 + \Omega_{2,2}^2 (\partial_x \phi_2)^2 + \Omega_{2,4}^1 \partial_x^4 \phi_2 \quad (5.20)$$

donde los coeficientes son:

$$\begin{aligned} \Omega_{1,2}^1 &= 1 + \alpha \beta_1 & \Omega_{1,2}^2 &= \beta_1 - \alpha \\ \Omega_{1,4}^1 &= -\frac{\alpha^2(1+\beta_1^2)}{c_1+2} \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{2,2}^1 &= 1 + \alpha \beta_2 & \Omega_{2,2}^2 &= \beta_2 - \alpha \\ \Omega_{2,4}^1 &= -\frac{\alpha^2(1+\beta_2^2)}{c_2+2} \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\Omega_{1,0} = -c_1(\sin[t(\beta_1 - \beta_2) - \phi_1 + \phi_2] + \beta_1 - \beta_1 \cos[t(\beta_1 - \beta_2) - \phi_1 + \phi_2]) \quad (5.23)$$

$$\Omega_{2,0} = -c_2(\sin[t(\beta_2 - \beta_1) - \phi_2 + \phi_1] + \beta_2 - \beta_2 \cos[t(\beta_2 - \beta_1) - \phi_2 + \phi_1]) \quad (5.24)$$

Se encuentra una nueva Ec. que tiene un término adicional $\Omega_{1,0}$ ($\Omega_{2,0}$). Al hacer $\epsilon = 0$ ($c_1 \rightarrow 0$ y $c_2 \rightarrow 0$), en las Ecs. (5.19) y (5.20), recuperamos la Ec. (5.14). Cuando $\alpha \beta_{1,2} > -1$, tenemos que $\Omega_{1,2}^2$ ($\Omega_{2,2}^2$) es negativo y se encuentra la inestabilidad de fase. Además, el número de onda $q \neq 0$. Este argumento es válido sólo para fluctuaciones de fase lentas.

Al considerar que los osciladores están acoplados y las fluctuaciones en la fase son pequeñas, se puede despreciar del sistema los términos $\partial_x \phi_{1,2}, \partial_x^2 \phi_{1,2}, \dots$, por tanto

$$\dot{\phi}_{1,2} = \omega_{1,2} - \beta_{1,2} \quad (5.25)$$

la Ec. de Kuramoto–Sivashinsky nos proporciona el término $\dot{\phi}$ que corresponde a la corrección de la aproximación $\omega = -\beta$ (Fig. 5.16).

Para $\alpha \beta_{1,2} < -1$ las fluctuaciones de fase no pueden ser ignoradas, por esto, se integran las Ec. (5.19) y (5.20) con respecto a x sobre un intervalo $[x_1, x_2]$ y se divide esto por $(x_2 - x_1)$.

$$\langle \dot{\phi}_1 \rangle = \langle \Omega_{1,0} \rangle + \Omega_{1,2}^2 \langle (\partial_x \phi_1)^2 \rangle - \beta_1 \quad (5.26)$$

donde $\langle \rangle$ indica un promedio sobre el intervalo. Entonces la frecuencia verifica:

$$\omega_{1,2} = \langle \Omega_{1,0} \rangle + \Omega_{1,2}^2 \langle \overline{(\partial_x \phi_{1,2})^2} \rangle - \beta_{1,2} \quad (5.27)$$

$$\omega_{1,2} = -c_{1,2} \beta_{1,2} + (\beta_{1,2} - \alpha) \langle \overline{(\partial_x \phi_{1,2})^2} \rangle - \beta_{1,2} \quad (5.28)$$

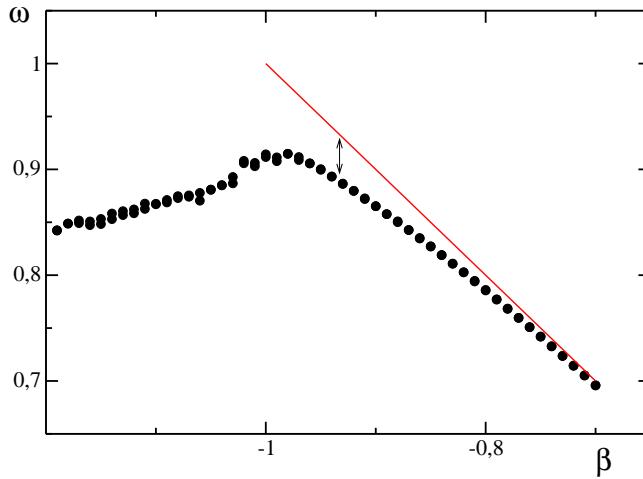


Figura 5.16: ω vs β de para una Ec. *CGL* con $\alpha = 2.0$. La línea roja corresponde la curva $\omega = -\beta$ y $\dot{\phi}$ es la corrección de la ω , que está representado por la flecha, entre la línea roja y la línea de puntos que es la frecuencia real.

donde $(\overline{\partial_x \phi_{1,2}})^2$ es la media cuadrática de las fluctuaciones de fase para la una determinada región.

Luego la diferencia de frecuencias es:

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{\epsilon}{2}((1+\theta)\beta_2 - (1-\theta)\beta_1) + (\beta_1 - \alpha)(\overline{\partial_x \phi_1})^2 - (\beta_2 - \alpha)(\overline{\partial_x \phi_2})^2 - \beta_1 + \beta_2$$

En nuestro caso, tenemos que $\alpha > 0$, $0 > \beta_1 > \beta_2$, $\epsilon > 0$ y $(\overline{\partial_x \phi_{1,2}})^2$ son positivas, porque están elevadas al cuadrado. Analizaremos dos casos, para $\theta = 1$:

$$\omega_1 - \omega_2 = (-\beta_1 + \beta_2 + \epsilon\beta_2) + (\beta_1 - \alpha)(\overline{\partial_x \phi_1})^2 - (\beta_2 - \alpha)(\overline{\partial_x \phi_2})^2 \quad (5.29)$$

obtenemos que el primer término es negativo, el segundo también es negativo y el tercer término que es del orden de magnitud del segundo es el único término positivo.

El siguiente caso para $\theta = -1$

$$\omega_1 - \omega_2 = (-\beta_1 + \beta_2 - \epsilon\beta_1) + (\beta_1 - \alpha)(\overline{\partial_x \phi_1})^2 - (\beta_2 - \alpha)(\overline{\partial_x \phi_2})^2 \quad (5.30)$$

aquí se obtiene el primer término positivo, el segundo negativo y el tercero positivo. Este cambio, del primer término, es el que nos introduce la sincronización anómala, como se puede comprobar al comparar esto con la Fig. 5.14, cuando $\theta = 1$, la sincronización es normal, y a medida que θ se acerca a -1 comienza a observarse la anomalía [125].

Hemos estudiado varios tipos de sincronización que se encuentran en la *CGL* acoplada de forma asimétrica en los regímenes *AT-AT* y *PT-PT*. Analizando el comportamiento de la sincronización a través del acoplamiento asimétrico, encontrando los umbrales de la *PS*, *FS* y *CS*.

Capítulo 6

Conclusiones

En el capítulo 1 se ha realizado un resumen de los distintos tipos de acoplamiento que permiten la sincronización entre dos osciladores caóticos y se han descrito las diferentes clases de sincronización que se conocen actualmente; se ha analizado la estabilidad del movimiento sincronizado utilizando el criterio del promedio de los exponentes de Lyapunov, se ha dado una definición matemática de la sincronización y se describió un método experimental para detectar la sincronización.

En el capítulo 2 se discutió sobre el comportamiento de la sincronización en cadenas de osciladores acoplados, que puede ser un comportamiento de conjunto para toda la cadena o de grupo para sólo algunos osciladores de la cadena. También se analizó la sincronización en los sistemas extendidos, es decir, con un acoplamiento en el término difusivo espacial para dos Ec. *CGL* acopladas; en este caso fue necesario definir nuevos indicadores de sincronización, como el número de defectos, la diferencia de módulos y la diferencia de fase.

En el capítulo 3 se analizaron los exponentes de Lyapunov que miden la divergencia en el tiempo entre dos trayectorias caóticas. Luego se calculó el exponente de Lyapunov transversal, donde se puede apreciar directamente cómo evoluciona la diferencia entre dos trayectorias. Finalmente se analizan los exponentes convectivos que miden la divergencia de dos trayectorias en el espacio y se calcula el máximo exponente convectivo.

En el capítulo 4 se ha simulado una cadena de 100 osciladores de Rössler unidireccionalmente acoplados y se ha estudiado su estabilidad frente a perturbaciones de distintos tipos:

- Al perturbar el sistema todo el tiempo sobre el segundo oscilador y medir los exponentes transversales de Lyapunov λ_{\perp} , se encontró que la cadena era estable frente a las perturbaciones para pequeños tiempos de anticipación.
- Al perturbar una vez el primer oscilador y esperar a que la cadena vuelva a sincronizar para volver a perturbar, se observó que la perturbación se trasladaba a través de la cadena con una velocidad constante v y crecía exponencialmente, es decir, el sistema presenta inestabilidad convectiva. Anteriormente esta inestabilidad sólo había sido observada en cadenas de sistemas discretos acoplados.
- Se calculó también el máximo exponente convectivo de la cadena Λ para distintas fuerzas de acoplamiento, determinándose que, para un menor acoplamiento, Λ disminuye y cuando $\epsilon \rightarrow 0$ el máximo exponente convectivo llega al valor del máximo exponente transversal de Lyapunov.
- Se ha determinado que la estabilidad absoluta es sólo una condición para la sincronización, ya que existen otros tipos de inestabilidades que pueden producir efectos mayores que las inestabilidades locales.

En el capítulo 5 se estudió la sincronización de dos Ecs. *CGL* acopladas en el régimen AT–AT y PT–PT. Se realizaron las simulaciones numéricas donde se calculó el coeficiente de Pearson γ , el número de defectos para cada ecuación Nd_1 y Nd_2 y la diferencia de fase $\Delta\phi$ y de frecuencia $\Delta\omega$.

Régimen AT–AT

- Se encontró que las ecuaciones sincronizaban de forma anómala en la fase, en la frecuencia y en el número de defectos de la primera ecuación en el siguiente rango: para $-1 < \theta < 0$ y $0 < \epsilon < 0.3$.

Régimen PT–PT

- Se encontró que aunque este régimen no presenta defectos, al acoplar dos *CGL* aparecen defectos para ambas ecuaciones, induciendo la sincronización anómala en *PS* y *FS*.
- Realizamos también la derivación de las Ecs. de Kuramoto–Sivashinsky modificada a partir de las Ecs. de *CGL*. Y encontramos que al hacer $\epsilon = 0$, se recobra

la ecuación de Kuramoto–Sivashinsky desacoplada. A partir de la ecuación derivada se estudió el comportamiento de la diferencia de frecuencias $\Delta\omega$, que es la responsable de la aparición de la anomalía de sincronización.

Encontramos que para ambos regímenes cuando la dinámica está dominada por la Ec. de mayor frecuencia surge la sincronización anómala. En cambio cuando la Ec. *drive* es la de menor frecuencia, se encuentra una sincronización normal.

Apéndice A

Derivación de las ecuaciones de una cadena de osciladores de Rössler acoplados en el espacio tangente

Deducimos a continuación las ecuaciones en el espacio tangente a partir de una cadena de 100 osciladores de Rössler acoplados unidireccionalmente, donde el primer oscilador evoluciona libremente. Y el oscilador 2, esta acoplado con él 1, el 3 con el 2 y así hasta el 100 con el 99. Las ecuaciones para el primer oscilador de Rössler son:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -wy_1(t) - z_1(t) \\ \dot{y}_1(t) = wx_1(t) + ay_1(t) \\ \dot{z}_1(t) = f + z_1(t)(x_1(t) + c) \end{array} \right\} \text{drive}$$

con los siguientes valores de los parámetros (que se mantendrán fijos para toda la cadena):

$$a = 0.15, \quad c = 10, \quad f = 0.2 \quad \text{y} \quad w = 1.0$$

El segundo sistema ($\vec{y} = (x_2, y_2, z_2)$), se acopla unidireccionalmente con el sistema *drive* de la siguiente forma:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_2(t) = -wy_2(t) - z_2(t) + \epsilon(x_1(t) - x_2(t - \tau_0)) \\ \dot{y}_2(t) = wx_2(t) + ay_2(t) + \epsilon(y_1(t) - y_2(t - \tau_0)) \\ \dot{z}_2(t) = f + z_2(t)(x_2(t) + c) + \epsilon(z_1(t) - z_2(t - \tau_0)) \end{array} \right\} \text{response}$$

donde ϵ representa la fuerza de acoplamiento entre los dos sistemas. Se nota, que el acoplamiento es asimétrico, de forma que el oscilador 2 esta acoplado con el 1, pero el 1 no está acoplado con el 2. El resto de los osciladores tienen el mismo tipo de acoplamiento.

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_i(t) = -wy_i(t) - z_i(t) + \epsilon(x_{i-1}(t) - x_i(t - \tau_0)) \\ \dot{y}_i(t) = wx_i(t) + ay_i(t) + \epsilon(y_{i-1}(t) - y_i(t - \tau_0)) \\ \dot{z}_i(t) = f + z_i(t)(x_i(t) + c) + \epsilon(z_{i-1}(t) - z_i(t - \tau_0)) \end{array} \right\} i = 3, \dots, 100$$

donde cada oscilador es *response* del oscilador precedente y *drive* del posterior. Por simplicidad, utilizaremos las siguiente notación: $y_{1,\tau_0} = y_1(t - \tau_0)$ e $y_{1,2\tau_0} = y_1(t - 2\tau_0)$.

El motivo por el cual se utiliza el espacio tangente es porque para medir la sincronización entre dos sistemas, se debe calcular la diferencia entre ellos ($\vec{\Delta} = \vec{x} - \vec{y}_{\tau_0}$), y este resultado, indica el nivel de sincronización. Si $\|\vec{\Delta}\| >> 1$, se dice que están desincronizados, y si $\|\vec{\Delta}\| << 1$ nos indica que están sincronizados. Pero cuando las variaciones entre los dos sistemas es $\|\vec{\Delta}\| < 10^{-4}$, al hacer la resta no tenemos una precisión suficiente. Por esto, se utiliza el espacio tangente, que mide la evolución de las pequeñas diferencias entre los osciladores, dándonos una media mucho más precisa.

A continuación se obtienen las ecuaciones en el espacio tangente a partir de estos osciladores. Para ello se utiliza la siguiente definición:

$$\vec{\Delta}_1 = \vec{x} - \vec{y}_{\tau_0} = \begin{pmatrix} \Delta_1^1 \\ \Delta_1^2 \\ \Delta_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) - x_2(t - \tau_0) \\ y_1(t) - y_2(t - \tau_0) \\ z_1(t) - z_2(t - \tau_0) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

donde $\vec{\Delta}$ es a la variedad de sincronización entre los dos sistemas. Por este motivo se escribe el sistema *response* desplazado τ_0

$$\dot{x}_{2,\tau_0} = -wy_{2,\tau_0} - z_{2,\tau_0} + \epsilon(x_{1,\tau_0} - x_{2,2\tau_0})$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_{2,\tau_0} &= wx_{2,\tau_0} + ay_{2,\tau_0} + \epsilon(y_{1,\tau_0} - y_{2,2\tau_0}) \\ \dot{z}_{2,\tau_0} &= f + z_{2,\tau_0}(x_{2,\tau_0} + c) + \epsilon(z_{1,\tau_0} - z_{2,2\tau_0})\end{aligned}\quad (\text{A.2})$$

Al hacer la diferencia entre los primeros dos osciladores y reagrupando las variables, se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_1^1 &= -w(y_1 - y_{2,\tau_0}) - (z_1 - z_{2,\tau_0}) - \epsilon(x_{1,\tau_0} - x_{2,\tau_0}) \\ \dot{\Delta}_1^2 &= w(x_1 - x_{2,\tau_0}) + a(y_1 - y_{2,\tau_0}) - \epsilon(y_{1,\tau_0} - y_{2,\tau_0}) \\ \dot{\Delta}_1^3 &= z_1x_1 - z_{2,\tau_0}x_{2,\tau_0} - c(z_1 - z_{2,\tau_0}) - \epsilon(z_{1,\tau_0} - z_{2,\tau_0})\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

utilizando la Ec (A.1) se llega a:

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_1^1 &= -w\Delta_1^2 - \Delta_1^3 - \epsilon\Delta_{1,\tau_0}^1 \\ \dot{\Delta}_1^2 &= w\Delta_1^1 + a\Delta_1^2 - \epsilon\Delta_{1,\tau_0}^2 \\ \dot{\Delta}_1^3 &= z_1x_1 - z_{2,\tau_0}x_{2,\tau_0} - c\Delta_1^3 - \epsilon\Delta_{1,\tau_0}^3\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

En la Ec. (A.4) se encuentran dos términos no lineales $x_{2,\tau_0}z_{2,\tau_0}$ y x_1z_1 , para linealizarlos volvemos a la definición de la Ec. (A.1); se sabe que:

$$\begin{aligned}x_{2,\tau_0} &= x_1 - \Delta_1^1 \\ z_{2,\tau_0} &= z_1 - \Delta_1^3\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

reemplazamos estos valores en el término no lineal, obteniendo:

$$\begin{aligned}x_1z_1 - x_{2,\tau_0}z_{2,\tau_0} &= x_1z_1 - (x_1 - \Delta_1^1)(z_1 - \Delta_1^3) \\ &= x_1z_1 - x_1z_1 + x_1\Delta_1^3 + z_1\Delta_1^1 - \Delta_1^1\Delta_1^3\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

se desprecia el término $\Delta_1^1\Delta_1^3$, por representar $\vec{\Delta}$ una pequeña variación entre los osciladores:

$$x_1z_1 - x_{2,\tau_0}z_{2,\tau_0} = x_1\Delta_1^3 + z_1\Delta_1^1\quad (\text{A.7})$$

Reemplazando la Ec. (A.7) en (A.4) se obtiene la ecuación linealizada para el espacio tangente:

$$\dot{\Delta}_1^1 = -w\Delta_1^2 - \Delta_1^3 - \epsilon\Delta_{1,\tau_0}^1$$

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_1^2 &= w\Delta_1^1 + a\Delta_1^2 - \epsilon\Delta_{1,\tau_0}^2 \\ \dot{\Delta}_1^3 &= x_1\Delta_1^3 + z_1\Delta_1^1 - c\Delta_1^3 - \epsilon\Delta_{1,\tau_0}^3\end{aligned}\tag{A.8}$$

Hemos obtenido las ecuaciones en el espacio tangente para los dos primeros osciladores, ahora para agregar otro oscilador más, se considera el segundo oscilador \vec{y} como *drive* y el tercero ($\vec{z} = (x_3, y_3, z_3)$) como *response* y se vuelve a utilizar el procedimiento anterior. Comenzamos reescribiendo el sistema \vec{y}

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_2 = -wy_2 - z_2 + \epsilon(x_1 - x_{2,\tau_0}) \\ \dot{y}_2 = wx_2 + ay_2 + \epsilon(y_1 - y_{2,\tau_0}) \\ \dot{z}_2 = f + z_2(x_2 + c) + \epsilon(z_1 - z_{2,\tau_0}) \end{array} \right\} \text{drive}$$

y el sistema *response* desplazado en τ_0

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_{3,\tau_0} = -wy_{3,\tau_0} - z_{3,\tau_0} + \epsilon(x_{2,\tau_0} - x_{3,2\tau_0}) \\ \dot{y}_{3,\tau_0} = wx_{3,\tau_0} + ay_{3,\tau_0} + \epsilon(y_{3,\tau_0} - y_{3,2\tau_0}) \\ \dot{z}_{3,\tau_0} = f + z_{3,\tau_0}(x_{3,\tau_0} + c) + \epsilon(z_{2,\tau_0} - z_{3,2\tau_0}) \end{array} \right\} \text{response}$$

La variedad de sincronización para estos dos osciladores es:

$$\vec{\Delta}_2 = \vec{y} - \vec{z}_\tau = \begin{pmatrix} \Delta_2^1 \\ \Delta_2^2 \\ \Delta_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_{3,\tau_0} \\ y_2 - y_{3,\tau_0} \\ z_2 - z_{3,\tau_0} \end{pmatrix}\tag{A.9}$$

Haciendo la resta entre los sistemas *drive* y *response*, se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_2^1 &= -w\Delta_2^2 - \Delta_2^3 + \epsilon(\Delta_1^1 - \Delta_{2,\tau_0}^1) \\ \dot{\Delta}_2^2 &= w\Delta_2^1 - a\Delta_2^2 + \epsilon(\Delta_1^2 - \Delta_{2,\tau_0}^2) \\ \dot{\Delta}_2^3 &= x_2z_2 - x_{3,\tau_0}z_{3,\tau_0} + c\Delta_2^3 + \epsilon(\Delta_1^3 - \Delta_{2,\tau_0}^3)\end{aligned}\tag{A.10}$$

Nuevamente aparecen dos términos no lineales, que son linealizados utilizando la Ec. (A.9)

$$\begin{aligned}x_2z_2 - x_{3,\tau_0}z_{3,\tau_0} &= x_2z_2 - (x_2 - \Delta_2^1)(z_2 - \Delta_2^3) = x_2z_2 - x_2z_2 + x_2\Delta_2^3 + z_2\Delta_2^1 - \Delta_2^1\Delta_2^3 \\ &= x_2\Delta_2^3 + z_2\Delta_2^1\end{aligned}\tag{A.11}$$

Reemplazando la Ec. (A.11) en (A.10), se obtiene la segunda Ec. en el espacio tangente.

$$\dot{\Delta}_2^1 = -w\Delta_2^2 - \Delta_2^3 + \epsilon(\Delta_1^1 - \Delta_{2,\tau_0}^1)$$

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_2^2 &= w\Delta_2^1 - a\Delta_2^2 + \epsilon(\Delta_1^2 - \Delta_{2,\tau_0}^2) \\ \dot{\Delta}_2^3 &= x_2\Delta_2^3 + z_2\Delta_2^1 + c\Delta_2^3 + \epsilon(\Delta_1^3 - \Delta_{2,\tau_0}^3)\end{aligned}\tag{A.12}$$

Para calcular la Ec. de los osciladores tres y cuatro, se hace lo mismo que para la Ec. (A.12), sólo cambiando los subíndices, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 4 \dots$. Resumiendo las Ecs, para la cadena completa son:

Para $i = 1$

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_1^1 &= -w\Delta_1^2 - \Delta_1^3 - \epsilon\Delta_{1,\tau_0}^1 \\ \dot{\Delta}_1^2 &= w\Delta_1^1 + a\Delta_1^2 - \epsilon\Delta_{1,\tau_0}^2 \\ \dot{\Delta}_1^3 &= x_1\Delta_1^3 + z_1\Delta_1^1 + c\Delta_1^3 - \epsilon\Delta_{1,\tau_0}^3\end{aligned}\tag{A.13}$$

y para $i = 2, \dots, 100$

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_i^1 &= -w\Delta_i^2 - \Delta_i^3 + \epsilon(\Delta_{i-1}^1 - \Delta_{i,\tau_0}^1) \\ \dot{\Delta}_i^2 &= w\Delta_i^1 - a\Delta_i^2 + \epsilon(\Delta_{i-1}^2 - \Delta_{i,\tau_0}^2) \\ \dot{\Delta}_i^3 &= x_i\Delta_i^3 + z_i\Delta_i^1 + c\Delta_i^3 + \epsilon(\Delta_{i-1}^3 - \Delta_{i,\tau_0}^3)\end{aligned}\tag{A.14}$$

Estas son las Ecs. utilizadas en el capítulo 4, para hacer las simulaciones numéricas. Se ha linealizado estas ecuaciones, ya que al ser $\vec{\Delta}$ la variedad de sincronización sabemos que es un valor muy pequeño, haciendo que el término no lineal no genere correcciones apreciables al sistema.

Apéndice B

Derivación de las Ecs. de Kuramoto–Sivashinsky modificadas

En este apéndice se calcula la forma normal de la ecuación que regula la evolución para la variedad central asociada a una inestabilidad de fase de la solución homogénea de una ecuación de onda en un medio anisótropo.

La aparición de una estructura ondulatoria en un medio anisótropo se describe, en la proximidad del límite máximo de bifurcación, para dos ecuaciones *CGL* acopladas. Si las ondas progresivas son estables con relación a las ondas estacionarias, este sistema de ecuaciones se reduce, después de un cambio de referencial, a un par de ecuaciones, que se escriben como:

$$\dot{A}_{1,2} = A_{1,2} + (1 + i\alpha)\partial_x^2 A_{1,2} - (1 + i\beta) |A_{1,2}|^2 A_{1,2} + \frac{\epsilon}{2}(1 \mp \theta)(A_{2,1} - A_{1,2}) \quad (\text{B.1})$$

Considerando

$$c_1 = \frac{\epsilon}{2}(1 - \theta) \quad c_2 = \frac{\epsilon}{2}(1 + \theta) \quad (\text{B.2})$$

Estás ecuaciones admiten una solución homogénea

$$A_1 = r_1(x, t)e^{i\psi_1(x, t)} \quad A_2 = r_2(x, t)e^{i\psi_2(x, t)} \quad (\text{B.3})$$

donde la fase ψ es arbitraria. Esta libertad de elección sobre la fase del parámetro de orden implica la existencia de un modo de fase marginal para $A_{1,2}$, mientras que sus perturbaciones de amplitud son amortiguadas por la dinámica de la Ec. B.1. Por esto se reduce la Ec. B.1 a una ecuación que describe sólo la evolución de la fase del parámetro de orden.

Se analizará a continuación la Ec. para A_1 , porque la Ec. para A_2 es análoga. De esta forma, la Ec. B.1 puede reescribirse sobre la forma de dos ecuaciones acopladas, una para el modulo de A_1 y la otra para la fase de A_1 . Reemplazando la solución homogénea B.3 en la Ec. B.1 se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{r}_1 + ir_1\dot{\psi}_1 &= r_1 - (1 + i\beta_1)r_1^3 + (1 + i\alpha)(\partial_x^2 r_1 + 2i\partial_x r_1 \partial_x \psi_1 + ir_1 \partial_x^2 \psi_1 - r_1(\partial_x \psi_1)^2) \\ &\quad + c_1(r_2 e^{i(\psi_1 - \psi_2)} - r_1)\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

identificando las partes reales e imaginarias de cada miembro, se separa en dos ecuaciones:

$$\dot{r}_1 = r_1 - r_1^3 + \partial_x^2 r_1 - \alpha r_1 \partial_x^2 \psi_1 - 2\alpha \partial_x r_1 \partial_x \psi_1 - r_1(\partial_x \psi_1)^2 + c_1(r_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) - r_1)$$

y

$$r_1 \dot{\psi}_1 = -\beta_1 r_1^3 + 2\partial_x r_1 \partial_x \psi_1 + r_1 \partial_x^2 \psi_1 + \alpha \partial_x^2 r_1 - \alpha r_1 (\partial_x \psi_1)^2 - r_1 - c_1 r_2 \sin(\psi_1 - \psi_2)$$

haciendo el siguiente cambio de variable, las ecuaciones se escriben como:

$$\begin{aligned}r_1(x, t) &= 1 + \rho_1(x, t) \\ \psi_1(x, t) &= -\beta_1 t + \phi_1(x, t)\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_1 &= -2\rho_1 - \rho_1^3 + \partial_x^2 \rho_1 - (1 + \rho_1) \partial_x^2 \phi_1 - 2\alpha \partial_x \rho_1 \partial_x \phi_1 - \alpha(1 + \rho_1)(\partial_x \phi_1)^2 \\ &\quad + c_1((1 + \rho_2) \cos(\phi_1 - \phi_2) - 1 - \rho_1) - 3\rho_1^2\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

y

$$(1 + \rho_1) \dot{\phi}_1 = -2\beta_1 \rho_1 - 3\beta_1 \rho_1^2 - \beta_1 \rho_1^3 + 2\partial_x \rho_1 \partial_x \phi_1 + (1 + \rho_1) \partial_x^2 \phi_1 + \alpha \partial_x^2 \rho_1$$

$$+ \alpha(1 + \rho_1)\partial_x^2\phi_1 - c_1(1 + \rho_2)\sin(\psi_1 - \psi_2) \quad (\text{B.7})$$

haciendo un desarrollo en serie Taylor para $1/(1 + \rho_1)$ al tercer orden se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 = & -2\beta_1\rho_1 - \beta_1\rho_1^2 + (2\partial_x\rho_1\partial_x\phi_1 + \alpha\partial_x^2\rho_1)(1 - \rho_1 + \rho_1^2) + \partial_x^2\phi_1 \\ & + \alpha\partial_x^2\phi_1 - c_1(1 + \rho_2)\sin(\psi_1 - \psi_2) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

La ecuación B.1 se ha transformado en dos ecuaciones acopladas rigiendo las perturbaciones de fase y amplitud. Se introducen dos hipótesis: se supone por una parte que las derivadas espaciales de ϕ_1 son pequeñas (se justifica por la existencia de un modo de fase marginal $q = 0$) y por otra parte, se considera que las perturbaciones de amplitud son de orden dos con relación a las derivadas espaciales.

Se pretende eliminar los términos de amplitud de la ecuación de fase, de esta forma se define:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 = & -\beta_1\partial_x\rho_1 - 2u_1\rho_1\partial_x\rho_1 - u_2\partial_x\phi_1\partial_x\rho_1 - u_3\partial_x^2\partial_t\rho_1 - u_4\rho_1\rho_2 - u_5\rho_1^2 - u_6\rho_1 \\ & - u_7\rho_1\partial_x^2\phi_1 - u_8\rho_1^3 - u_9\partial_x\rho_2\partial_x\phi_1 - u_{10}\partial_x^2\rho_2 - u_{11}\rho_2 - u_{12}\partial_x^2\rho_1 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Reemplazando la Ec. (B.8) en la Ec. (B.9) y eliminando los términos superiores, se llega a:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 = & (\beta_1 + \alpha + 2u_1)\rho_1(\partial_x\phi_1)^2 + (2 + 2\beta_1^2 + 2u_2 + c_1u_2)\partial_x\rho_1\partial_x\phi_1 \\ & + (\alpha + \alpha\beta_1^2 + 2u_3 + c_1u_3)\partial_x^2\rho_1 + (-2c_1u_1 - u_4)\rho_1\rho_2 + (4u_1 + 2c_1u_1 - u_5)\rho_1^2 \\ & + (-u_6 + c_1\beta_1)\rho_1 + (1 + 2\alpha u_1 - u_7 + \alpha\beta_1)\rho_1\partial_x^2\phi_1 + (-\beta_1 - u_8)\rho_1^3 \\ & + (-c_1u_2 - u_9)\partial_x\rho_2\partial_x\phi_1 + (-c_1u_3 - u_{10})\partial_x^2\rho_2 + (\sin[t(\beta_1 - \beta_2) - \phi_1 + \phi_2]c_1 \\ & - u_{11} - \cos[t(\beta_1 - \beta_2) - \phi_1 + \phi_2]c_1\beta_1)\rho_2 + (-u_{12} - \alpha\beta_1^2 + \beta_1^3)(\partial_x\rho_1)^2 \\ & + (1 + \alpha\beta_1)\partial_x^2\phi_1 + \alpha u_4\partial_x^4\phi_1 + (-\alpha + \beta_1)(\partial_x\phi_1)^2 \\ & + c_1\sin(t(\beta_1 - \beta_2) - \phi_1 + \phi_2)) + c_1\beta_1 - c_1\beta_1\cos(t(\beta_1 - \beta_2) - \phi_1 + \phi_2)) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

donde se eliminan los términos de amplitud a través de los u_i que son:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2}(\alpha - \beta_1) & u_2 &= -\frac{2(1+\beta_1^2)}{2+c_1} \\
u_3 &= -\frac{\alpha(1+\beta_1^2)}{2+c_1} & u_4 &= -c_1(\alpha - \beta_1) \\
u_5 &= (2 + c_1)(\alpha - \beta_1) & u_6 &= c_1\beta_1 \\
u_7 &= 1 + \alpha^2 & u_8 &= -\beta_1 \\
u_9 &= \frac{2c_1(1+\beta_1^2)}{2+c_1} & u_{10} &= \frac{\alpha c_1(1+\beta_1^2)}{2+c_1} \\
u_{12} &= \beta_1^2(-\alpha + \beta_1)
\end{aligned} \tag{B.11}$$

$$u_{11} = c_1(\sin(t(\beta_1 - \beta_2) - \phi_1 + \phi_2)) - \beta_1 \cos(t(\beta_1 - \beta_2) - \phi_1 + \phi_2)) \tag{B.12}$$

al reemplazar los valores anteriores se llega a la siguiente ecuación para ϕ_1 :

$$\dot{\phi}_1 = \Omega_{1,0} + \Omega_{1,2}^1 \partial_x^2 \phi_1 + \Omega_{1,2}^2 (\partial_x \phi_1)^2 + \Omega_{1,4}^1 \partial_x^4 \phi_1 + \Omega_{1,4}^2 \partial_x \phi_1 \partial_x^3 \phi_1 \tag{B.13}$$

donde los coeficientes son:

$$\begin{aligned}
\Omega_{1,2}^1 &= 1 + \alpha\beta_1 & \Omega_{1,2}^2 &= \beta_1 - \alpha \\
\Omega_{1,4}^1 &= -\frac{\alpha^2(1+\beta_1^2)}{c_1+2}
\end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\Omega_{1,0} = -c_1(\sin[t(\beta_1 - \beta_2) - \phi_1 + \phi_2] + \beta_1 - \beta_1 \cos[t(\beta_1 - \beta_2) - \phi_1 + \phi_2]) \tag{B.15}$$

Para obtener la Ec. de ϕ_2 se cambian los subíndices 1 a 2, encontrándose la siguiente ecuación:

$$\dot{\phi}_2 = \Omega_{2,0} + \Omega_{2,2}^1 \partial_x^2 \phi_2 + \Omega_{2,2}^2 (\partial_x \phi_2)^2 + \Omega_{2,4}^1 \partial_x^4 \phi_2 \tag{B.16}$$

con los siguientes coeficientes:

$$\begin{aligned}
\Omega_{2,2}^1 &= 1 + \alpha\beta_2 & \Omega_{2,2}^2 &= \beta_2 - \alpha \\
\Omega_{2,4}^1 &= -\frac{\alpha^2(1+\beta_2^2)}{c_2+2}
\end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\Omega_{2,0} = -c_2(\sin[t(\beta_2 - \beta_1) - \phi_2 + \phi_1] + \beta_2 - \beta_2 \cos[t(\beta_2 - \beta_1) - \phi_2 + \phi_1]) \tag{B.18}$$

Las Ecs. (B.13) y (B.16), corresponden a la evolución de las fases ϕ_1 y ϕ_2 acopladas a través de los términos $\Omega_{1,0}$ y $\Omega_{2,0}$. Se nota que al hacer $\epsilon = 0$ ($c_1 = 0$ y $c_2 = 0$) se recupera la Ec. de Kuramoto–Sivashinsky, para una Ec. CGL desacoplada.

a

Convective instabilities of synchronization manifolds in spatially extended systems

C. Mendoza[‡], S. Boccaletti, and A. Politi

*Istituto Nazionale di Ottica Applicata, L.go E. Fermi, 6, 50125 Florence, Italy
† also Dept. of Phys. and Applied Math., University of Navarre, Pamplona, Spain*

(Dated: August 8, 2003)

We study the stability properties of anticipating synchronization in an open chain of unidirectionally coupled identical chaotic oscillators. Despite showing absolute stability, the synchronization manifold is affected by further processes that destabilize the synchronized regime. We analyze and characterize such instabilities drawing a qualitative and quantitative comparison with the convective instabilities typical of spatially extended systems.

PACS numbers: PACS: 05.45.-a, 05.45.Xt, 05.45.Jn

The synchronization of coupled chaotic systems has been a topic of intense study over the past years [1]. In this framework, different synchronization features have been described: identical and generalized synchronization [2, 3], phase synchronization [4], lag and intermittent lag synchronization [5], and anticipating synchronization [6]. Furthermore, synchronization effects have been explored in natural phenomena [7], and laboratory experiments [8], as well as unifying approaches to describe synchronization states have been proposed [9].

More recently, synchronization phenomena have been investigated in large populations of coupled chaotic units and neural networks [10], globally or locally coupled map lattices [11] and in space extended systems [12].

While for confined chaotic systems the stability of the synchronization motion can be assessed by the study of the transversal Lyapunov exponent [13] or the Lyapunov function [14], for space extended systems a still unsolved crucial question is whether absolutely stable synchronization manifolds can be affected by other types of space-time instabilities leading to desynchronization. In this communication we show that this is indeed the case for chains of unidirectionally coupled identical chaotic oscillators, where an absolutely stable anticipating synchronization manifold (ASM) is nevertheless convectively unstable and thus loses its synchronization properties for any small noisy perturbation.

Anticipating synchronization [6] is a property of identical chaotic oscillators unidirectionally coupled in a driver-response configuration. There, a memory element in the coupling factor (represented by a short time delay τ) makes the trajectories to converge toward an absolutely stable ASM wherein the state of the response system *anticipates* the one of the driver by the same amount of time τ . Such a feature was proven to be a stable property of pairs of chaotic systems, and later extended to open chains of identical systems, where the augmented phase space allows anticipation times that may exceed the characteristic time scales of the chaotic dynamics [6].

The interest for the study of this synchronization phenomenon in large chains relies in the fact that it can be taken as an alternative method for real time forecasting

of future states of a given dynamics. To this purpose, one has to characterize the space-time instabilities that might be suffered by the ASM when noisy perturbations affect the driving signal.

In order to address such a problem, let us consider an open chain of N unidirectionally coupled identical Rössler oscillators [15], given by

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{r}_i) + \varepsilon(1 - \delta_{1i})[\mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_i(t - \tau)] \quad (1)$$

where the dots denote temporal derivatives, $\mathbf{r}_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$ is the vector field of the i th driven oscillator ($i = 1, \dots, N$), ε is the coupling strength, τ is the delay time in the coupling factor, δ_{ij} is the Kronecker δ function, and $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ is a vector field

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = [-y - z, x + ay, b + z(x - c)]. \quad (2)$$

responsible for generating the locally chaotic dynamics. In the following, we set $a = 0.15$, $b = 0.2$, $c = 10$, $N = 100$ and we study the evolution of system (1) upon varying τ and ε , starting from a set of random initial conditions $\mathbf{r}_i(0)$ covering all the interval $[0, -\tau]$ for each oscillator. All reported simulations have been performed by implementing a fourth order Runge-Kutta integration scheme with free boundary conditions.

In order to carry on the linear stability analysis, it is convenient to pass from the $\{\mathbf{r}_i(t)\}$ to the $(\mathbf{r}_1(t), \Delta\mathbf{r}_i \equiv \{\mathbf{r}_{i-1}(t) - \mathbf{r}_i(t - \tau)\})$ representation (with $i > 1$). In fact, the synchronized state is characterized by $\Delta\mathbf{r}_i = 0$. Linearization of the equations for \mathbf{r}_1 accounts simply for the Lyapunov exponents of the single Rössler oscillator. The dynamics of an infinitesimal perturbation $\rho_i = (u_i, v_i, w_i)$ of the differences $\Delta\mathbf{r}_i$ is instead described by

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= -v_i - w_i + \varepsilon(1 - \delta_{1i})u_{i-1} - \varepsilon u_i(t - \tau), \\ \dot{v}_i &= u_i + az_i + \varepsilon(1 - \delta_{1i})v_{i-1} - \varepsilon v_i(t - \tau), \\ \dot{w}_i &= (x_i - c)w_i + z_iu_i + \varepsilon(1 - \delta_{1i})w_{i-1} - \varepsilon w_i(t - \tau). \end{aligned} \quad (3)$$

The growth rates of ρ_i define the so called *transversal* Lyapunov exponents, insofar as they give information on the evolution of perturbations transversally to the ASM (represented by the fixed point $\Delta\rho = 0$ in system (3)),

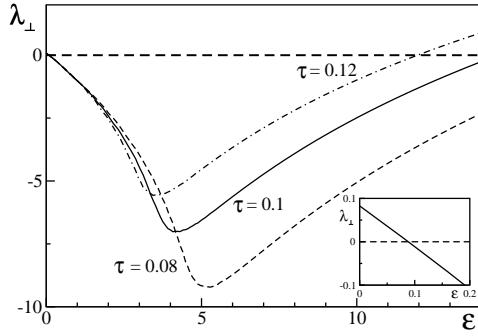


FIG. 1: Transversal Lyapunov exponent λ_{\perp} (see text for definition) computed from system (3) vs. the coupling strength ε for $\tau = 0.12$ (dot-dashed line), $\tau = 0.1$ (solid line) and $\tau = 0.08$ (dashed line). The three curves start from $\lambda_0 \simeq 0.0826$, corresponding to the maximum (positive) Lyapunov exponent for the Rössler oscillator.

and the negativity of the maximum of such exponents is a necessary condition for absolute stability of such a manifold. It is important to notice that while the dynamical law for ρ_2 is self-contained, the evolution of all other perturbations can be determined only as a cascade process. A necessary condition for the synchronized regime to be stable is that the growth rate λ_{\perp} of ρ_0 is negative. In Fig. 1, we have plotted the values of λ_{\perp} vs. the coupling strength, for different choices of τ . Consistently with what observed in Ref. [6], λ_{\perp} can be negative in a suitable parameter range, indicating that the ASM is there absolutely stable. Notice that for all choices of τ , λ_{\perp} at zero coupling is positive and equal to the maximum Lyapunov exponent of the single Rössler system, $\lambda_0 = 0.0826$ (for the chosen parameter values).

On the basis of the results reported in Fig. 1, one is tempted to conclude that arbitrarily long anticipation times can be obtained by just coupling a sufficiently large number N of oscillators, since the i th oscillator anticipates its driver by a time τ , and its dynamics is therefore expected to collapse onto a manifold wherein $\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_1(t + (i-1)\tau)$. In fact, this would be possible only if absolute stability were a sufficient condition for the settings of such a manifold. Fig. 2 indeed shows that this is not the case. System (1) is let evolve from random initial condition for $N = 100$, $\tau = 0.1$ and $\varepsilon = 4.1$ (from the solid curve in Fig. 1, one can clearly see that the corresponding λ_{\perp} is negative) up to the time at which the ASM is reached. At this point a zero average δ -correlated Gaussian noise $D\xi(t)$ of small amplitude $D = 0.005$ is added to the variable x_2 . The deviations from the ASM are thereby monitored by evaluating $\delta x_i = |x_1(t) - x_i(t - (i-1)\tau)|$. From Fig. 2 it is clear that the trajectory abandons the absolutely stable ASM manifold $\delta x_i = 0$ as a result of the applied perturbation although the deviations in the 5th oscillator are still quite

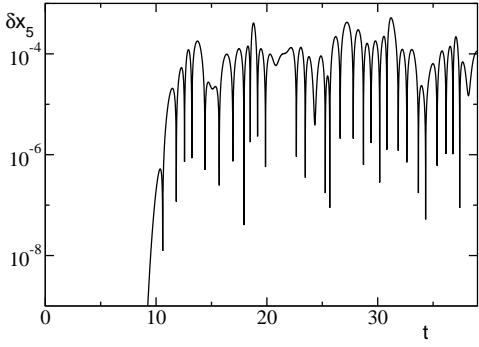


FIG. 2: Temporal evolution of δx_5 for $\tau = 0.1$ and $\varepsilon = 4.1$. The trajectory starts from random initial conditions and is subjected to a zero average δ -correlated Gaussian noise perturbation $D\xi(t)$ ($D = 0.005$) added to the variable y_1 .

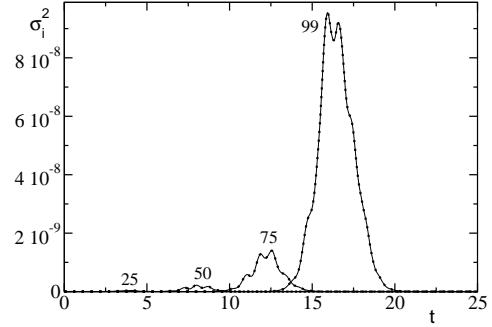


FIG. 3: Time evolution of the ensemble averaged differences $\sigma_i^2 = \langle u_i^2 \rangle$ for $i = 25, 50, 75$ and 99 (the corresponding numbers are on the top of each curve). Each curve is obtained from an ensemble average of 10,000 perturbations, for $\tau = 0.1$, $\varepsilon = 4.1$ and $\eta = 5 * 10^{-3}$. Solid (dotted) line reports the calculation in the normal (tangent) space

small. In fact, it is crucial to add that the asymptotic (in time) size of the deviations tend to grow exponentially with i .

In order to clarify the whole process, we prefer to investigate the response of the system to a delta-like perturbation. More precisely, we have let the system (1) evolve from random initial condition at $t = 0$ (with $\tau = 0.1$ and $\varepsilon = 4.1$) until it reaches (within numerical accuracy) the ASM. Then, evolution is restarted after perturbing x_1 by a small amount η , while all other variables are left unchanged. Convergence back to the ASM is studied by monitoring the single step anticipation error $\sigma_i^2 = \langle [x_i(t - \tau) - x_{i-1}(t)]^2 \rangle$, where angular brackets denote an average over an ensemble of independent choices of the initial conditions.

In the limit of small perturbations, instead of following

two separate trajectories, it is sufficient to let a perturbation evolve in tangent space: in this limit $\sigma_i^2 = \langle u_i^2 \rangle$. The curves corresponding to different oscillators that are plotted in Fig. 3 clearly indicates that the deviation from the ASM initially grows but eventually converges to 0 thus confirming its absolute stability. On the other hand, oscillators labelled by larger i -values are characterized by higher peaks. Fig. 3 also demonstrates that the behavior of the system is basically insensitive on whether calculations are performed in the normal or in the tangent space.

This phenomenon is very much reminiscent of convective instabilities in spatially extended systems where a localized perturbation dies if observed where it has been generated while it appears to grow in suitably moving frames. The analogy relies on the interpretation of the integer i labelling the oscillators as a space variable, but an exact mapping with convective phenomena is hindered by the additional presence of the “delayed” interactions which make the problem conceptually more complex.

One can, nevertheless, test whether the evolution of an initially localized perturbation follows the same scaling behaviour as in spatially extended systems. In the context of one-dimensional lattices, the convective Lyapunov exponent is defined as [16]

$$\Lambda(v) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta(i = vt, t)|}{\delta(0, 0)} \quad (4)$$

where $\delta(i, t)$ denotes the perturbation amplitude in site i at time t and is initially localized in a finite region around the origin. This is equivalent to stating that

$$\delta(i, t) \simeq \exp(\Lambda(v)t) = \exp\left(\frac{\Lambda(v)}{v} i\right) \quad (5)$$

for both $|i|$ and t large enough.

From a numerical point of view, $\Lambda(v)$ can be accurately estimated by comparing the perturbation amplitude at two different space-time positions $P_1 \equiv (i_1, t_1)$, $P_2 \equiv (i_2, t_2)$,

$$\Lambda(v) = \frac{v}{i_2 - i_1} \ln \frac{|\delta(i_2, t_2)|}{|\delta(i_1, t_1)|}, \quad (6)$$

where $v = i_1/t_1 = i_2/t_2$. In fact, provided that both P_1 and P_2 are far enough from the origin, multiplicative finite-size corrections affect δ in the same way and thus disappear when the ratio is taken in Eq. (6).

The results reported in Fig. 4 confirm that the behaviour of perturbations in the context of Rössler oscillators with delayed coupling is analogous that of convectively unstable systems. Indeed, the three curves obtained by comparing the following pairs of oscillators, (80,60), (60,40), and (40,20) almost overlap, thus suggesting that the convective spectrum $\Lambda(v)$ is a well defined quantity in this context too. Next, the very existence of a positive maximum of $\Lambda(v)$ implies that perturbations traveling with a velocity v in between the two

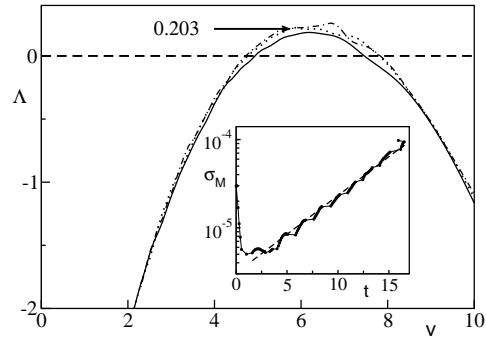


FIG. 4: Convective Lyapunov exponent $\Lambda(v)$ vs. propagation velocity v , computed by comparing the perturbation in different pairs of oscillators according to Eq. (6). Dot-dashed, dotted and solid lines correspond to the pairs (80,60), (60,40), and (40,20), respectively. The maximum value of the exponent is marked by an arrow. Inset: maximum value of σ_i vs. time of occurrence. The rate of an exponential best fit equal to 0.202 agrees with the maximal convective Lyapunov exponent.

zeros of $\Lambda(v)$ (approximately equal to 5 and 8) are indeed amplified. Furthermore, the maximum rate, approximately equal to 0.203, is even larger than the positive Lyapunov exponent of the single oscillator λ_0 , indicating that such convective instability is even stronger than local instability. The value of the maximum convective exponent can be independently checked by monitoring the values of the maxima σ_M of each σ_i versus their occurrence time. The best fit reported in the inset of Fig. 4 corresponds to a growth rate of 0.202, in good agreement with the maximum of the convective spectrum.

In conclusion, we have shown that convective instability prevents the occurrence of anticipating synchronization over arbitrarily long times in a chain of unidirectionally coupled identical chaotic oscillators, when even a small amount of noise is present.

This evidence indicates that absolute stability of the synchronization manifold is only a necessary conditions for the robustness of synchronization properties in coupled spatially extended systems, whereas other types of space-time instabilities may introduce effects that are even stronger than local instabilities.

A general consequence is that necessary and sufficient conditions for the stability of synchronization properties in spatially extended systems strictly depend on the space-extended nature of the dynamics and need to be assessed by taking into account additional sources of instability, such as convective growth of perturbations in moving frames.

A further consequence concerns the possibility of implementing anticipating synchronization as a strategy for real time forecasting of future states of a given dynamics. Such a possibility needs to be reconsidered by a careful

investigation of the space-time instabilities that might be suffered by the synchronized dynamics when noisy perturbations are taken into account.

The Authors are indebted with H.U. Voss, J. Kurths and C. Peréz-García for many fruitful discussions. Work partly supported by EU Contract HPRN-CT-2000-

00158, and MIUR-FIRB project n. RBNE01CW3M-001. One of us (CM) acknowledges also the financial support from the DGICYT (Spanish Government) grant IN-EFLUID project n. BFM2002-02011 and "Asociación de Amigos de la Universidad de Navarra".

-
- [1] A. Pikovsky, M. Rosenblum and J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, (Cambridge University Press, 2001); S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. Valladares and C. Zhou, *Phys. Rep.* **366**, 1, (2002).
 - [2] H. Fujisaka and T. Yamada, *Prog. Theor. Phys.* **69**, 32 (1983); L.M. Pecora and T.L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 821 (1990).
 - [3] N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Tsimring and H.D.I. Abarbanel, *Phys. Rev.* **E51**, 980 (1995); L. Kocarev and U. Parlitz, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1816, (1996).
 - [4] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky and J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1804 (1996).
 - [5] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky and J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4193 (1997); S. Boccaletti and D.L. Valladares, *Phys. Rev.* **E62**, 7497 (2000).
 - [6] H.U. Voss, *Phys. Rev.* **E61**, 5115 (2000); H.U. Voss, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 014102 (2001).
 - [7] C. Schäfer, M.G. Rosenblum, J. Kurths and H.H. Abel, *Nature* **392**, 239 (1998); P. Tass, M.G. Rosenblum, M.G. Weule, J. Kurths, A. Pikovsky, J. Volkmann, A. Schnitzler and H.J. Freund, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3291 (1998); G.D. Van Wijgeren and R. Roy, *Science* **279**, 1198 (1998); A. Neiman, X. Pei, D. Russell, W. Wojtanek, L. Wilkens, F. Moss, H.A. Braun, M.T. Huber and K. Voigt, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 660 (1999); G. M. Hall, S. Bahar and D.J. Gauthier, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2995 (1999); B. Blasius, A. Huppert and L. Stone, *Nature*, **399**, 354 (1999); D. J. DeShazer, R. Breban, E. Ott and R. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 044101 (2001).
 - [8] C.M. Ticos, E. Rosa Jr., W.B. Pardo, J.A. Walkenstein and M. Monti, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2929 (2000); D. Maza, A. Vallone, H. Mancini and S. Boccaletti, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5567 (2000); E. Allaria, F.T. Arecchi, A. Di Garbo and R. Meucci, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 791 (2001); S. Boccaletti, E. Allaria, R. Meucci and F.T. Arecchi, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 194101 (2002).
 - [9] I.I. Blekhman, A.L. Fradkov, H. Nijmeijer and A. Yu. Pogromsky, *Systems & Control Letters* **31**, 299 (1997); R. Brown and L. Kocarev, *Chaos* **10**, 344 (2000); S. Boccaletti, Louis M. Pecora, A. Pelaez, *Phys. Rev.* **E63**, 066219 (2001).
 - [10] S. H. Strogatz, S.E. Mirollo and P.C. Matthews, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2730 (1992); A. Pikovsky, M. Rosenblum and J. Kurths, *Europhys. Lett.* **34**, 165 (1996); G. Osipov, A. Pikovsky, M. Rosenblum and J. Kurths, *Phys. Rev.* **E55**, 2353 (1997); D.H. Zanette, *Phys. Rev.* **E55**, 5315 (1997); V. N. Belykh, I. Belykh and M. Hasler, *Phys. Rev.* **E63**, 036216 (2001); D.L. Valladares, S. Boccaletti, F. Feudel and J. Kurths, *Phys. Rev.* **E65**, 055208 (2002).
 - [11] V. N. Belykh and E. Mosekilde, *Phys. Rev.* **E54**, 3196 (1996); M. Hasler, Yu. Maistrenko and E. Mosekilde, *Phys. Rev.* **E58**, 6843 (1998); A. Pikovsky, O. Popovich and Yu. Maistrenko, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 044102 (2001).
 - [12] G. Hu and Z. Qu, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 68 (1994); L. Kocarev, Z. Tasev and U. Parlitz, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 52 (1997); R.O. Grigoriev, M.C. Cross and H.G. Schuster, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2795 (1997); P. Parmananda, *Phys. Rev.* **E56**, 1595 (1997); S. Boccaletti, J. Bragard, F.T. Arecchi and H.L. Mancini, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 536 (1999); H. Chaté, A. Pikovsky and O. Rudnick, *Physica* **D131**, 17 (1999); L. Junge and U. Parlitz, *Phys. Rev.* **E62**, 438, (2000).
 - [13] L.M. Pecora and T.L. Carroll, *Phys. Rev.* **A44**, 2374 (1991); D.J. Gauthier and J.C. Bienfang, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1751 (1996).
 - [14] K. M. Cuomo and A.V. Oppenheim, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 65 (1991); L. Kocarev and U. Parlitz, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 5028 (1995); R. Brown and N.F. Rulkov, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4189 (1997).
 - [15] O.E. Rössler, *Phys. Lett.* **A57**, 397 (1976).
 - [16] R.J. Deissler and K. Kaneko, *Phys. Lett.* **A119**, 397 (1987); A. Politi and A. Torcini, *Chaos* **2**, 293 (1992).

Bibliografía

- [1] A. Pikovsky, M. Rosemblum y J. Kurts. *Synchronization–A Unified Approach to Nonlinear Science*. Cambrige University Press, 2001.
- [2] C. Huygens. *Horologium Oscilatorium*. Paris, France, 1673.
- [3] I.I. Blekhman, P.S. Landa y M.G. Rosenblum. Synchronization and Chaotization in Interacting Systems. *Appl. Mech. Rev.*, 48:733–752, 1995.
- [4] T. Kapitaniak y L.O. Chua. Strange nonchaotic trajectories on torus. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 7:423–429, 1997.
- [5] T. Kapitaniak y L.O. Chua. Locally intermingled basins of attraction in coupled Chua’s circuits. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 6:357–366, 1996.
- [6] L.M. Pecora y T.L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64:821–824, 1990.
- [7] H. Fujisaka y T. Yamada. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Prog. Theor. Phys.*, 69:32–47, 1983.
- [8] V.S. Afraimovich, N.N. Verichev, y M.I. Rabinovich. Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems. *Izvestiya–Vysshikh–Uchebnykh–Zavedenii–Radiofizika*, 29:1050–1060, 1986.
- [9] E. Ott, C. Grebogi y J.A. Yorke. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 64:1196–1199, 1990.
- [10] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky y J. Kurths. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 76:1804–1807, 1996.

- [11] E.R. Rosa, E. Ott y M.H. Hess. Transition to phase synchronization of chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 80:1642–1645, 1998.
- [12] E.F. Stone. Frequency entrainment of a phase coherent attractor. *Phys. Lett. A*, 162:367–374, 1992.
- [13] A.S. Pikovsky, M. Rosenblum, G.V. Osipov, M. Zacks y J. Kurths. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving. *Physica D*, 104:219–238, 1997.
- [14] V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, D.E. Postnov y M.A. Safonova. Synchronization of chaos. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 2:633–644, 1992.
- [15] P. Manneville y Y. Pomeau. Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems. *Physica D*, 1:219–226, 1980.
- [16] E. Montbrió y B. Blasius. Using nonisochronicity to control synchronization in ensembles of non-identical oscillators. *Chaos*, 13:291–308, 2003.
- [17] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky y J. Kurths. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 78:4193–4196, 1997.
- [18] N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Tsimring y H.D.I. Abarbanel. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 51:980–994, 1995.
- [19] L. Kocarev y U. Parlitz. Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems. *Phys. Rev. Lett.*, 76:1816–1819, 1996.
- [20] S. Boccaletti y D.L. Valladares. Characterization of intermittent lag synchronization. *Phys. Rev. E*, 62:7497–7500, 2000.
- [21] M.A. Zacks, E.-H. Park, M.G. Rosenblum y J. Kurths. Alternating locking ratios in imperfect phase synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 82:4228–4231, 1999.
- [22] R. Femat y G. Solis–Perales. On the chaos synchronization phenomena. *Phys. Letts. A*, 262:50–60, 1999.

- [23] H.U. Voss. Anticipating chaotic synchronization. *Phys. Rev. E*, 61:5115–5119, 2000.
- [24] K. Pyragas. Synchronization of coupled time-delay systems: Analytical estimations. *Phys. Rev. E*, 58:3067–3071, 1998.
- [25] L. Kocarev y U. Parlitz. General approach for chaotic synchronization with applications to communication. *Phys. Rev. Lett.*, 74:5028–5031, 1995.
- [26] U. Parlitz, L. Kocarev, T. Stojanovski y H. Preckel. Encoding messages using chaotic synchronization. *Phys. Rev. E*, 53:4351–4361, 1996.
- [27] C. Sparrow. *The Lorenz Equations, Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*. Springer, New York, 1982.
- [28] L.M. Pecora y T.L. Carroll. Driving systems with chaotic signals. *Phys. Rev. A*, 44:2374–2383, 1991.
- [29] D.J. Gauthier y J.C. Bienfang. Intermittent loss of synchronization in coupled chaotic oscillators: Toward a new criterion for high-quality synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 77:1751–1754, 1996.
- [30] J. Güemez y M.A. Matías. Modified method for synchronizing and cascading chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 52:2145–2148, 1995.
- [31] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Springer, Berlin, 1984.
- [32] D. Gabor. Theory of communications. *J. IEE London*, 93:429–457, 1946.
- [33] A.S. Pikovsky, G. Osipov, M. Rosenblum, M. Zacks, y J. Kurths. Attractor-repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 79:47–50, 1997.
- [34] A.S. Pikovsky, M. Zacks, M. Rosenblum, G. Osipov, y J. Kurths. Phase synchronization of chaotic oscillations in terms of periodic orbits. *Chaos*, 7:680–687, 1997.
- [35] A. Pikovsky, M. Rosenblum y J. Kurths. *Synchronization, A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, UK, 2001.

- [36] S. Boccaletti, J. Kurts, G. Osipov, D.L. Valladares y C.S. Zhou. The synchronization of chaotic systems. *Phys. Rep.*, 366:1–101, 2002.
- [37] S. Taherion y Y.C. Lai. Observability of lag synchronization of coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. E*, 59:6247–6250, 1999.
- [38] H.U. Voss. Dynamic long-term anticipation of chaotic states. *Phys. Rev. Lett.*, 87:014102, 2001.
- [39] C. Massoller. Anticipation in the synchronization of chaotic semiconductor lasers with optical feedback. *Phys. Rev. Lett.*, 86:2782–2785, 2001.
- [40] P. Ashwin, J. Buescu y I. Stewart. Bubbling of attractors and synchronisation of chaotic oscillators. *Phys. Lett. A*, 193:126–139, 1994.
- [41] J.F. Heagy, T.L. Carroll y L.M. Pecora. Desynchronization by periodic orbits. *Phys. Rev. E*, 52:1253–1256, 1995.
- [42] C.S. Zhou y C.H. Lai. Robustness of supersensitivity to small signals in nonlinear dynamical systems. *Phys. Rev. E*, 59:6243–6246, 1999.
- [43] E.H. Park, M. Zaks y J. Kurths. Phase synchronization in the forced Lorenz system. *Phys. Rev. E*, 60:6627–6638, 1999.
- [44] M.A. Zacks, E.–H. Park y J. Kurths. On phase synchronization by periodic force in chaotic oscillators with saddle equilibria. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 10:2649–2667, 2000.
- [45] I.I. Blekhman, A.L. Fradkov, H. Nijmeijer y A.Yu. Pogromsky. On self-synchronization and controlled synchronization. *System, & Control Letters*, 31:299–305, 1997.
- [46] R. Brown y L. Kocarev. A unifying definition of synchronization for dynamical systems. *Chaos*, 10:344–349, 2000.
- [47] S. Boccaletti, L. M. Pecora y A. Pelaez. Unifying framework for synchronization of coupled dynamical systems. *Phys. Rev. E*, 63:066219, 2001.
- [48] B. Pompe. Measuring statistical dependences in a time series. *J. Stat. Phys.*, 73:587–610, 1983.

- [49] H.D.I. Abarbanel. *Analysis of Observed Chaotic Data*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [50] H. Kantz y T. Schreiber. *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [51] F. Takens. *Detecting Strange Attractors in Turbulence*. Springer, Berlin, 1981.
- [52] M. Wiesenfeldt, U. Parlitz y W. Lauterborn. Mixed state analysis of multivariate time series. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 11:2217–2226, 2001.
- [53] A. Cenys, G. Lasiene y K. Pyragas. Estimation of interrelation between chaotic observables. *Physica D*, 52:332–337, 1991.
- [54] J. Arnhold, P. Grassberger, K. Lehnertz y C. E. Elger. A robust method for detecting interdependences: application to intracranially recorded EEG. *Physica D*, 134:419–430, 1999.
- [55] R.Q. Quiroga, J. Arnhold y P. Grassberger. Learning driver-response relationships from synchronization patterns. *Phys. Rev. E*, 61:5142–5148, 2000.
- [56] A. Schmitz. Measuring statistical dependence and coupling of subsystems. *Phys. Rev. E*, 62:7508–7511, 2000.
- [57] S.J. Schiff, P. So, T. Chang, R.E. Burke y T. Sauer. Detecting dynamical interdependence and generalized synchrony through mutual prediction in a neural ensemble. *Phys. Rev. E*, 54:6708–6724, 1996.
- [58] L.M. Pecora y T.L. Carroll. Detecting chaotic drive-response geometry in generalized synchronization. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 10:875–889, 2000.
- [59] D.J. DeShazer, R. Breban, E. Ott y R. Roy. Detecting phase synchronization in a chaotic laser array. *Phys. Rev. Lett.*, 87:044101, 2001.
- [60] C. Schäfer, M.G. Rosenblum, H.H. Abel y J. Kurths. Synchronization in the human cardiorespiratory system. *Phys. Rev. E*, 60:857–870, 1999.
- [61] P. Tass, M.G. Rosenblum, M.G. Weule, J. Kurths, A. Pikovsky, J. Volkmann, A. Schnitzler y H.J. Freund. Detection of n:m phase locking from noisy data: application to magnetoencephalography. *Phys. Rev. Lett.*, 81:3291–3294, 1998.

- [62] M. Palus. Detecting phase synchronization in noisy systems. *Phys. Lett. A*, 235:341–351, 1997.
- [63] A. Pikovsky, M. Rosenblum y J. Kurths. Synchronization in a population of globally coupled chaotic oscillators. *Europhys. Lett.*, 34:165–170, 1996.
- [64] D.H. Zanette. Dynamics of globally coupled bistable elements. *Phys. Rev. E.*, 55:5315–5320, 1997.
- [65] D.H. Zanette y A.S. Mikhailov. Mutual synchronization in ensembles of globally coupled neural networks. *Phys. Rev. E*, 58:872–875, 1998.
- [66] F.S. de San Roman, S. Boccaletti, D. Maza y H.L. Mancini. Weak synchronization of chaotic coupled map lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 81:3639–3642, 1998.
- [67] D. Maza, S. Boccaletti y H. Mancini. Phase clustering and collective behaviors in globally coupled map lattices due to mean field effects. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 10:829–833, 2000.
- [68] P. Hadley, M.R. Beasley y K. Wiesenfeld. Phase locking of Josephson-junction series arrays. *Phys. Rev. B*, 38:8712–8719, 1988.
- [69] K. Wiesenfeld, P. Colet y S.H. Strogatz. Synchronization transitions in a disordered Josephson series array. *Phys. Rev. Lett.*, 76:404–407, 1996.
- [70] K. Wiesenfeld, P. Colet y S.H. Strogatz. Frequency locking in Josephson arrays: connection with the Kuramoto model. *Phys. Rev. E*, 57:1563–1569, 1998.
- [71] J. Benford et al. Phase locking of relativistic magnetrons. *Phys. Rev. Lett.*, 62:969–971, 1989.
- [72] S.K. Han, C. Kurrer y Y. Kuramoto. Dephasing and Bursting in Coupled Neural Oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3190–3193, 1995.
- [73] Y. Braiman, J.F. Lindner y W.L. Ditto. Taming spatiotemporal chaos with disorder. *Nature*, 378:465–467, 1995.
- [74] L. Glass y M.C. Mackey. *From Clocks to Chaos*. Princeton University Press, Princeton, 1988.

- [75] A.T. Winfree. *The Geometry of Biological Time*. Springer, New York, 1980.
- [76] J.D. Murray. *Mathematical Biology*. Springer, Berlin, 1989.
- [77] H.D.I. Abarbanel, M.I. Rabinovich, A. Selverston, M.V. Bazhenov, R. Huerta, M.M. Sushchik y L.L. Rubchinskii. Synchronisation in neural assemblies. *Phys. Usp.*, 39:337–362, 1996.
- [78] M.I. Rabinovich y M.M. Sushchik. The regular and chaotic dynamics of structures in fluid flows. *Usp. Fiz. Nauk*, 160:3–64, 1990.
- [79] K. Kaneko. Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements. *Physica D*, 41:137–172, 1990.
- [80] J.F. Heagy, L.M. Pecora y T.L. Carroll. Short wavelength bifurcations and size instabilities in coupled oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, 74:4185–4188, 1994.
- [81] L.M. Pecora. Synchronization conditions and desynchronizing patterns in coupled limit-cycle and chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 58:347–360, 1998.
- [82] L. Pecora, T. Carroll, G. Johnson, D. Mar y K.S. Fink. Synchronization stability in coupled oscillator arrays: solution for arbitrary configurations. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 10:273–290, 2000.
- [83] V.N. Belykh y E. Mosekilde. One-dimensional map lattices: synchronization, bifurcations, and chaotic structures. *Phys. Rev. E*, 54:3196–3203, 1996.
- [84] M. Hasler, Yu. Maistrenko y O. Popovich. Simple example of partial synchronization of chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 58:6843–6846, 1998.
- [85] V. Belykh, I. Belykh y M. Hasler. Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems. *Phys. Rev. E*, 62:6332–6345, 2000.
- [86] H.L. Yang. Phase synchronization of diffusively coupled Rössler oscillators with funnel attractors. *Phys. Rev. E*, 64:026206, 2001.
- [87] G. Hu, Y. Zhang, H.A. Cerdeira y S. Chen. From low-dimensional synchronous chaos to high-dimensional desynchronous spatiotemporal chaos in coupled systems. *Phys. Rev. Lett.*, 85:3377–3380, 2000.

- [88] J.F. Heagy, T.L. Carroll y L.M. Pecora. Synchronous chaos in coupled oscillator systems. *Phys. Rev. E*, 50:1874–1885, 1994.
- [89] L. Brunnet, H. Chate y P. Manneville. Long-range order with local chaos in lattices of diffusively coupled ODEs. *Physica D*, 78:141–154, 1994.
- [90] L.M. Pecora et al. Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. *Chaos*, 7:520–543, 1997.
- [91] M. Zhan, G. Hu, Y. Zhang y D. He. Generalized splay state in coupled chaotic oscillators induced by weak mutual resonant interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 86:1510–1513, 2001.
- [92] L. Kocarev y U. Parlitz. Synchronizing spatiotemporal chaos in coupled nonlinear oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 77:2206–2209, 1996.
- [93] G. Osipov, A. Pikovsky, M. Rosenblum y J. Kurths. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rossler oscillators. *Phys. Rev. E*, 55:2353–2361, 1997.
- [94] D.L. Valladares, S. Boccaletti, F. Feudel y J. Kurths. Collective phase locked states in a chain of coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. E*, 65:055208, 2002.
- [95] P. Parmananda. Generalized synchronization of spatiotemporal chemical chaos. *Phys. Rev. E*, 56:1595–1598, 1997.
- [96] L. Kocarev, Z. Tasev y U. Parlitz. Synchronizing spatiotemporal chaos of partial differential equations. *Phys. Rev. Lett.*, 79:51–54, 1997.
- [97] G. Hu y Z. Qu. Controlling spatiotemporal chaos in coupled map lattice systems. *Phys. Rev. Lett.*, 72:68–71, 1994.
- [98] R.O. Grigoriev, M.C. Cross y H.G. Schuster. Pinning control of spatiotemporal chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 79:2795–2798, 1997.
- [99] A. Amengual, E. Hernández-García, R. Montagne y M. San Miguel. Synchronization of spatiotemporal chaos: the regime of coupled spatiotemporal intermittency. *Phys. Rev. Lett.*, 78:4379–4382, 1997.

- [100] S. Boccaletti, J. Bragard y F.T. Arecchi. Controlling and synchronizing space time chaos. *Phys. Rev. E*, 59:6574–6578, 1999.
- [101] S. Boccaletti, J. Bragard, F.T. Arecchi y H.L. Mancini. Synchronization in nonidentical extended systems. *Phys. Rev. Lett.*, 83:536–539, 1999.
- [102] J. Bragard, F.T. Arecchi y S. Boccaletti. Characterization of synchronized spatiotemporal states in coupled nonidentical complex Ginzburg-Landau equations. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 10:2381–2389, 2000.
- [103] M. Cross y P. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, 65:851–1112, 1993.
- [104] H. Chaté, A. Pikovsky y O. Rudnick. Forcing oscillatory media: phase kinks vs. synchronization. *Physica D*, 131:17–30, 1999.
- [105] L. Junge and U. Parlitz. Phase synchronization of coupled ginzburg-landau equations . *Phys. Rev. E*, 62:438–441, 2000.
- [106] B. Shraiman, A. Pumir, W. van Saarloos, P. C. Hohenberg, H. Chaté y M. Holenf. Spatiotemporal chaos in the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation. *Physica D*, 57:241–248, 1992.
- [107] H. Chaté. Spatiotemporal intermittency regimes of the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation. *Nonlinearity*, 7:185–204, 1994.
- [108] D. Ruelle y J.-P. Eckmann. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.*, 57:617–656, 1985.
- [109] P. Manneville. *Dissipative Structures and Weak Turbulence*. Academic Press, San Diego, 1990.
- [110] R.J. Deissler y K. Kaneko. Velocity-dependent Lyapunov exponents as a measure of chaos for open-flow systems. *Phys. Lett. A*, 119:397–402, 1987.
- [111] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley, USA, 1994.
- [112] H. Gould y J. Tobochnik. *An Introduction to Computer Simulation Methods*. Addison-Wesley, USA, 1996.

- [113] A. Politi y A. Torcini. Periodic orbits in coupled Henon maps: Lyapunov and multifractal analysis. *Chaos*, 2:293–300, 1992.
- [114] T. Bohr y D. Rand. A mechanism for localised turbulence. *Physica D*, 52:532–543, 1991.
- [115] G. Mayer-Kress y K. Kaneko. Spatiotemporal chaos and noise. *J. Stat. Phys.*, 54:1458–1489, 1989.
- [116] S. Lepri, A. Politi y A. Torcini. Chronotopic lyapunov analysis: II toward a unified approach. *J. Stat. Phys.*, 88:31–45, 1997.
- [117] A. Torcini, P. Grassberger y A. Politi. Error propagation in extended chaotic systems. *J. Phys. A*, 28:4533–4541, 1995.
- [118] C. Mendoza, S. Boccaletti y A. Politi. Convective instabilities of synchronization manifolds in spatially extended systems. *aceptado en Int. J. Comp. Ant. Sys.*, 2003.
- [119] J. Bragard, S. Boccaletti y H. Mancini. Asymmetric coupling effects in the synchronization of spatially extended chaotic systems. *Phy. Rev. Lett.*, 91:64103, 2003.
- [120] H. Chaté, A. Pikovsky y O. Rudzick. Forcing oscillatory media: phase kinks vs. synchronization. *Physica D*, 131:17–30, 1999.
- [121] J. Bragard, S. Boccaletti y F.T. Arecchi. Control and synchronization of space extended dynamical systems. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 11:2715–2729, 2001.
- [122] P. Parmananda. Generalized synchronization of spatiotemporal chemical chaos. *Phys. Rev. E*, 56:1595–1598, 1997.
- [123] H. Sakaguchi. Phase turbulence and mutual entrainment in a coupled oscillator system. *Prog. Theor. Phys.*, 83:169–174, 1990.
- [124] H. Sakaguchi. Breakdown of the phase dynamics. *Prog. Theor. Phys.*, 84:792–800, 1990.
- [125] C. Mendoza, J. Bragard y S. Boccaletti. Anomalous synchronization in extended system. *en preparación*, 2003.

Summary of the work

In this thesis we have studied two types of synchronization in extended systems.

First, the stability of anticipating synchronization manifolds in a chain of 100 unidirectionally coupled Rössler oscillators has been addressed. For this system, we have measured the transversal Lyapunov exponents. We have also determined the behavior of the perturbations by monitoring in time the amplitude of an initial point-like disturbance that propagates in the oscillators chain and by measuring its growth rate. A suitable representation of the Lyapunov spectra allows a compact description of all the possible disturbances in tangent space. We find that this kind of synchronization is affected by a convective instability, which has a nonzero group velocity with respect to the laboratory frame.

In the second part, we have characterized anomalous synchronization occurring in two asymmetrically coupled complex Ginzburg–Landau equations. We have set the equations either in the phase turbulence (*PT*) regime or in the amplitude turbulence (*AT*) regime. By increasing the coupling parameter we have found frequency synchronization, phase synchronization and complete synchronization. We have observed that the equation with a higher frequency synchronizes in a regular fashion with an equation with a lower frequency. On the contrary, an equation with lower frequency synchronizes with a system with higher frequency passing by an *anomalous* stage. At the end, for two equations in different *PT* regimes, we have deduced the modified Kuramoto–Sivashinsky equation in order to calculate analytically the average frequency. By doing so we were able to explain the *anomalous* synchronization stage.