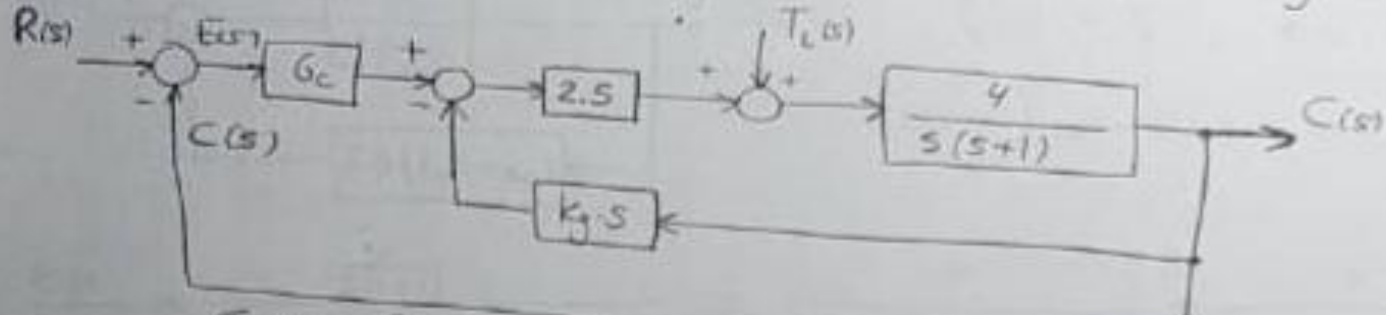
RESPUEST REGIMEN Permanente

PROBLEMA 1 Para el Sistema que se muestra en la Figura:



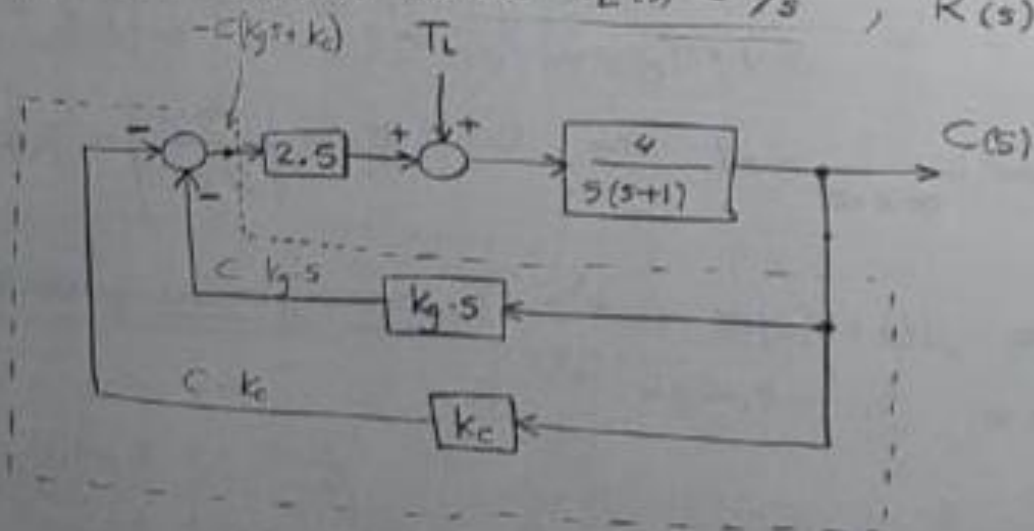
$E(s) = R(s) - C(s)$

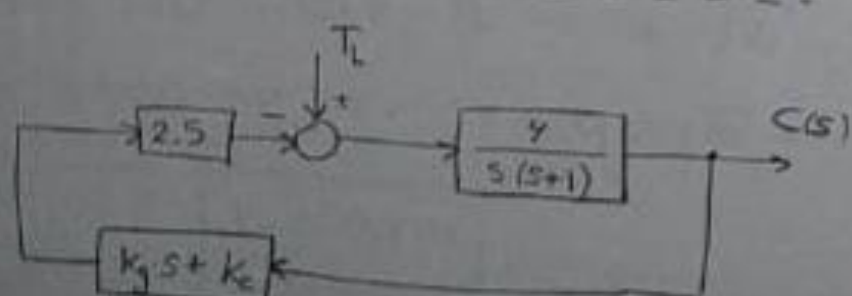
1A) Si $G_c = k_c$, determinar k_g y k_c para obtener una $\xi = 0.5$ y un $e_{RP} = 5\%$ para una entrada escalón en T_L (3 Puntos)

$R(s) = 0$

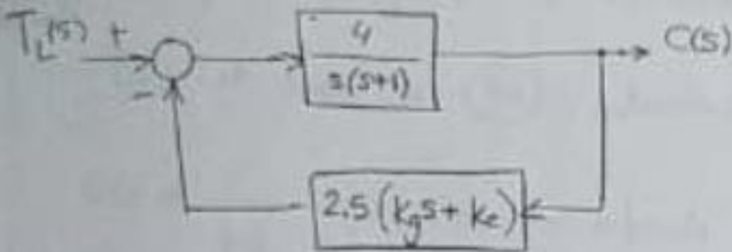
$E(s) = R(s) - C(s)$

Para una Entrada escalón $T_L(s) = 1/s$, $R(s) = 0$





1A:



$T_L(s) = 1/s$; $R(s) = 0$

$E(s) = R(s) - C(s) = -C(s)$

$$\frac{C(s)}{T_L(s)} = \frac{\frac{4}{s(s+1)}}{1+\frac{4}{s(s+1)}(2.5)(k_g s+k_c)} = \frac{4}{s(s+1)+10(k_g s+k_c)} = \frac{4}{s^2+(1+10k_g)s+10k_c}$$

$$E(s) = -C(s) = \frac{-4\,T_L(s)}{s^2+(1+10k_g)s+10k_c} = \frac{-4\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2+(1+10k_g)s+10k_c}$$

$$e_{RP} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{-4s(1/s)}{s^2+(1+10k_g)s+10k_c} = \pm 5\%$$

$$e_{RP} = \left|\frac{-4}{10k_c}\right| = \pm 0.05 \Rightarrow k_c = \frac{4}{10\cdot 0.05} \Rightarrow \boxed{k_c = 8}$$

ECUACION CARACTERISTICA : $\begin{cases} s^2+(1+10k_g)s+10k_c = 0 \\ s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2 = 0 \end{cases}$

$2\zeta\omega_n = 1+10k_g$

$\omega_n^2 = 10k_c = 10\cdot 8 = 80 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{80} = 8.9443$

$\omega_n = \underline{8.9443}$

Para $\zeta = 0.5 \Rightarrow \omega_n = 1+10k_g = \sqrt{80} \Rightarrow k_g = \frac{\sqrt{80}-1}{10}$

$\boxed{k_c = 8}$ $\boxed{k_g = 0.7944}$

1B ¿Afectará K_g al e_{RP} directamente? ¿Si o No y por qué?

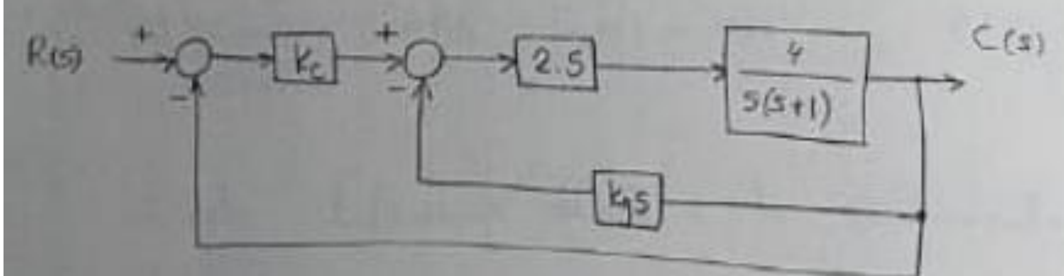
Para el caso de 1A, entrada escalón en T_L, $R(s)=0$

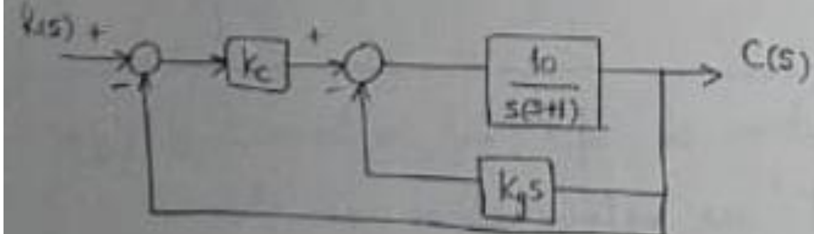
$$e_{RP} = \frac{4}{10K_c} \Rightarrow e_{RP} \text{ no depende de } K_g \Rightarrow K_g \text{ no afecta } e_{RP}$$

en este caso

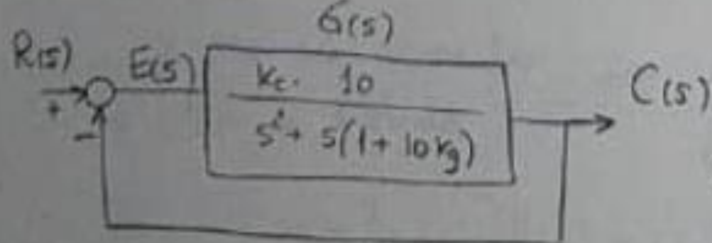
1C ¿Por qué existe diferencia en el valor de e_{RP} ante entradas escalón en "R" y en "T_L"?

Para $T_L = 0$, $R(s) = 1/s$





$$\frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1+\frac{10}{s(s+1)}K_g \cdot s}$$



$$G(s) = \frac{K_c \cdot 10}{s(s+1+10K_g)}$$

tipo 1

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{10K_c}{s^2+s(1+10K_g)}}{1+\frac{10K_c}{s^2+s(1+10K_g)}} = \frac{10 \cdot K_c}{s^2+s(1+10K_g)+10K_c}$$

Para $T_L = 0$, $R(s) = 1/s$

$$E(s) = R(s) - C(s) = R(s) - E(s)G(s) \Rightarrow E(s)(1+G(s)) = R(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)}R(s) = \frac{R(s)}{1+\frac{k_c 10}{s(s+1+10k_g)}} = \frac{s(s+1+10k_g)R(s)}{s(s+1+10k_g)+k_c 10}$$

$$e_{RP} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s(1/s)s(s+1+10k_g)}{s(s+1+10k_g)+k_c 10} = \frac{0}{k_c \cdot 10} = 0$$

$$\begin{cases} e_{RP} = 0 & \text{PARA } r(t) = u(t) \ ; \ T_L = 0 \\ e_{RP} = \dfrac{4}{10k_c} & \text{PARA } T_L(t) = u(t) \ ; \ r(t) = 0 \end{cases}$$

Existe diferencia debido a la Realimentación de Velocidad ($k_g s$)

1D) ¿ Demostrar que tipo de controlador nos darán un $e_{RP} = 0$ ante un cambio escalón en "T_L" ?

Se requiere aumentar el tipo de sistema $\Rightarrow$ usamos un controlador PI para hacer $e_{RP} = 0$

Para $T_L(s) = \frac{1}{s}$; $R(s) = 0$ (de Parte 1A)

$$E(s) = \frac{-4\,T_L(s)}{s^2+(1+10k_g)s+10G_c}$$

Haciendo $G_c = k_c + k_i/s$.

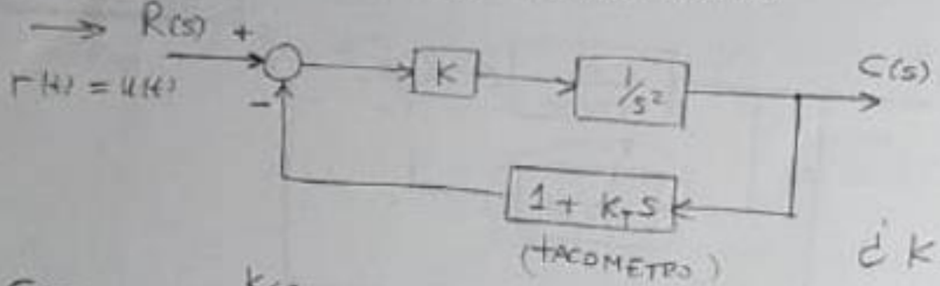
$$e_{RP} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{-4s(1/s)}{s^2 + (1+10k_g)s + 10\left(k_c + \frac{k_i}{s}\right)} \qquad 10\left(\frac{sk_c + k_i}{s}\right)$$

$$e_{RP} = \lim_{s\to 0} \frac{-4s}{s^3 + (1+10k_g)s^2 + 10(sk_c + k_i)} = \frac{0}{10 k_i} = 0$$

ENTONCES $\boxed{e_{RP} = 0}$ para $G_c = k_c + \frac{k_i}{s}$

ante $T_L(s) = 1/s$; $R(s) = 0$

EJERCICIO : REGIMEN TRANSITORIO



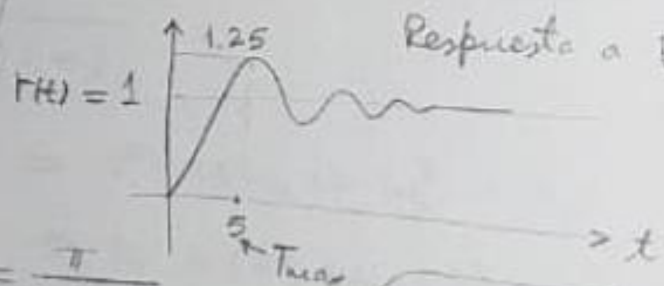
¿K, K_T ?

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K/s^2}{1+\frac{K}{s^2}(1+K_T s)} = \frac{K}{s^2+KK_T s+K}$$

Asumiendo que el sistema es sub-amortiguado

$$s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2 = s^2+KK_T s+K$$

$$\boxed{\begin{aligned}2\xi\omega_n &= KK_T\\ \omega_n^2 &= K\end{aligned}}$$



Respuesta a Escalón Unitario

$$t_{max} = 5\ seg = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \longrightarrow \boxed{\omega_n = \frac{\pi}{5\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$M_p = 0.25 = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow Ln(M_p) = Ln\left(e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right) = -\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

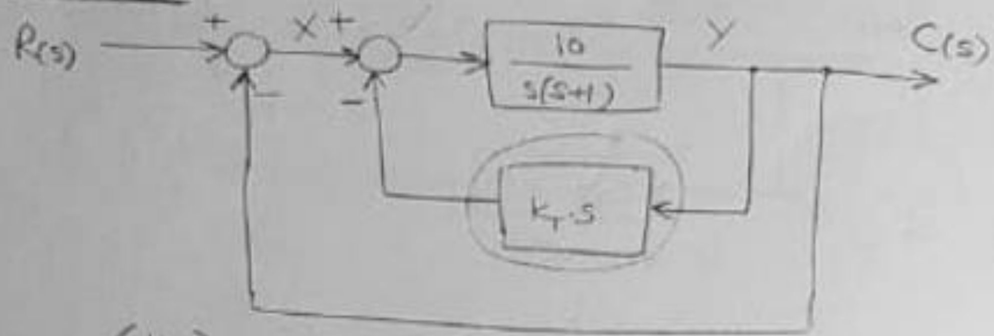
$$\sqrt{1-\xi^2} = \frac{-\xi\pi}{Ln(M_p)} \Rightarrow 1-\xi^2 = \frac{\xi^2\pi^2}{(Ln M_p)^2} \Rightarrow 1 = \xi^2\left[1+\frac{\pi^2}{(Ln M_p)^2}\right]$$

$$1 = \xi^2\left[\frac{(ln M_p)^2+\pi^2}{(ln M_p)^2}\right] \Rightarrow \xi^2 = \frac{(ln M_p)^2}{(ln M_p)^2+\pi^2}$$

$$\xi = \frac{ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2+(ln M_p)^2}} = \frac{ln(0.5)}{\sqrt{\pi^2+(ln(0.5))^2}} \Rightarrow \boxed{\xi = 0.404}$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{5\sqrt{1-\xi^2}} = \boxed{0.627} \Rightarrow \boxed{K = \sqrt{\omega_n}}$$

EJERCICIO



$$\frac{Y}{X} = \frac{\left(\frac{10}{s(s+1)}\right)}{1+\frac{10\cdot k_T\cdot s}{s(s+1)}} = \frac{10}{s(s+1)+10k_T\cdot s} = \frac{10}{s\left[(s+1)+10k_T\right]}$$

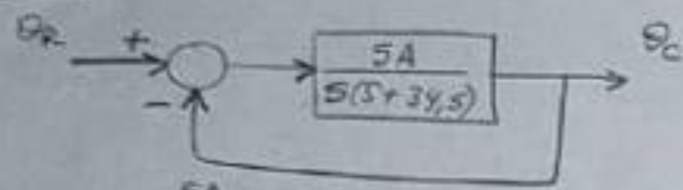
$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{10}{s\left[(s+1)+10k_T\right]}}{1+\frac{10}{s\left[(s+1)+10k_T\right]}} = \frac{10}{s\left[(s+1)+10k_T\right]+1}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{10}{s^2+(1+10k_T)s+1}$$

$$s^2+(1+10k_T)s+1 = s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$$

$$\begin{cases} 1+10k_T = 2\xi\omega_n \Rightarrow k_T = (2\xi\omega_n - 1) \\ \omega_n^2 = 10 \qquad\qquad \omega_n = \sqrt{10} \end{cases}$$

EJEMPLO



$$G(s) = \frac{5A}{s(s+34,5)}$$

$$\frac{\theta_C}{\theta_R} = \frac{\frac{5A}{s(s+34,5)}}{1+\left(\frac{5A}{s(s+34,5)}\right)}$$

El Estudio del Régimen transitorio depende de los Polos de LAZO Cerrado

$$\left[1+G(s)H(s)\right] = 1+\frac{5A}{s(s+34,5)} = 0 \Rightarrow s^2+34,5\cdot s+5A = 0$$

$$s^2+\underbrace{34,5}\cdot s+5A = s^2+\underbrace{2\xi\omega_n}s+\omega_n^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -17,25 \pm \sqrt{\left(\frac{34,5}{2}\right)^2 - 5A}$$

$\omega_n = \sqrt{5A}$ Frecuencia Natural

$$2\xi\omega_n = 34,5 \Rightarrow \xi = \left(\frac{17,25}{\sqrt{5A}}\right)$$ Amortiguamiento del Sistema

ω_n y ξ dependen del Valor de A

$e_{RP}\Big|_{\text{entrada escalón}} = 0$ tipo 1: ya que $G(s)$ Tiene un Polo en el origen

$$e_{RP}\Big|_{\text{rampa}} \longrightarrow \lim_{s\to 0} sG(s)H(s) = K_V = \frac{5A}{34,5}$$

$$e_{RP}\Big|_{\text{ENT. RAMPA}} = \frac{R}{K_V}$$

COMO SELECCIONAR $\boxed{A}$

Sistema CRITICAMENTE AMORTIGUADO

Haciendo $\sqrt{B^2-4AC} = 0 \Rightarrow \xi = 1$

$$\left(\frac{34,5}{2}\right)^2 - 5A = 0 \Rightarrow A = 59,5$$

#1

TEORIA DE CONTROL / RESPUESTA TEMPORAL

TAREA

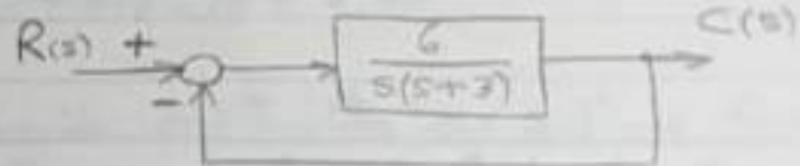
(1) PROBLEMA 1

Para el siguiente sistema conseguir el controlador apropiado para obtener un $M_p(\%) = \boxed{7,66\%}$ y un $t_s(2\%) = \boxed{0,667}$ seg, buscando mejorar el transitorio. Determinar cuanto vale el $\boxed{e_{RP}}$ frente a

a) Entrada Escalón

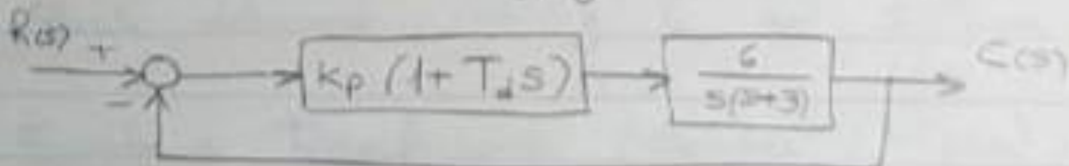
b) Entrada Rampa

SOLUCION:



- Puede usarse un controlador PD para mejorar el transitorio.
- La elección de PD es válida ya que no se requiere condición de Régimen Permanente.

Al usar un PD se agrega $G_c(s) = K_P(1 + T_d s)$



PASOS A SEGUIR:

a) Determinar posibles candidatos a controlador según las condiciones del transitorio o Reg. Permanente.

→ En este caso no hay requerimiento de Régimen Permanente, por lo tanto podría usarse cualquiera pero la condición de MEJORAR EL TRANSITORIO nos hace pensar en un PD o un PID.

→ Usamos el PD por 2 razones:

1) Mejora la Respuesta transitoria

2) No incrementa el orden del sistema, por tanto pueden tenerse Ganancias mayores sin Riesgo de Inestabilidad

PROBLEMA 1 CONTINUACION

b) Agregar el controlador en el Paso Directo

c) Hallar la Función de transferencia $C(s)/R(s)$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p(1+T_d s)\cdot\frac{6}{s(s+3)}}{1+K_p(1+T_d s)\frac{6}{s(s+3)}} = \frac{6K_p(1+T_d s)}{s(s+3)+6K_p(1+T_d s)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6\cdot K_p\cdot(1+T_d s)}{s^2+(3+6K_pT_d)s+6\cdot K_p}$$

d) Determinar Ecuación Característica del sistema deseado a partir de los Requerimientos de Respuesta transitoria

MAXIMO SOBREIMPULSO → $$M_p(\%) = 100\cdot e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (1)$$

tiempo de Establecimiento $$t_s(2\%) = \left(\frac{4}{\xi\omega_n}\right) \quad (2)$$

Puede obtenerse ω_n y ξ del sistema deseado

Función de Transferencia Estandar (típica) de 2do orden:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

La Ecuación Característica es

$$s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2 = 0 \quad (3)$$

DATOS DEL PROBLEMA → $M_p(\%) = 7{,}66\ \%$

$T_s(2\%) = 0{,}667$ seg

PROBLEMA 1 CONTINUACION $M_p = 7,66$

$$M_p(\%) = 100\cdot e^{\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} \Longrightarrow \xi = \sqrt{\frac{\ln^2\left(\frac{M_p}{100}\right)}{\pi^2+\ln^2\left(\frac{M_p}{100}\right)}} = \sqrt{\frac{6.60}{\pi^2+6.60}}$$

$\boxed{\xi = 0.6331}$

$$T_s(2\%) = \frac{4}{\xi\omega_n} = 0,667 \Longrightarrow \xi\omega_n = \frac{4}{0,667} = 6$$

$$\omega_n = \frac{6}{\xi} = \frac{6}{0.6331} \Longrightarrow \boxed{\omega_n = 9.4772} \rightarrow \boxed{\omega_n^2 = 89.82}$$

Reemplazando en $\Delta(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

$s^2 + 12\,s + 89.82 = 0 \Longrightarrow$ Ecuación Característica del sistema deseado

(e) Por Coeficientes $\rightarrow$ Igualamos la Ecuación del sistema deseado y la del [sistema original + controlador Genérico]

$$\boxed{s^2 + (3 + 6K_pT_d)s + 6K_p} = \boxed{s^2 + 12\,s + 89.84}$$

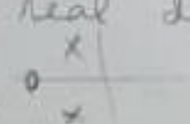
$$\begin{cases} 3 + 6K_pT_d = 12 \Longrightarrow \\ 6K_p = 89.84 \Longrightarrow \boxed{K_p = 14.97} \end{cases}$$

$$\rightarrow T_d = \frac{(12-3)}{6K_p} \Longrightarrow \boxed{T_d = 0.10}$$

El controlador viene dado por $G_c(s) = K_p(1 + T_d s) = \boxed{14.97(1 + 0.1s)}$

NOTA: Para un Proceso como el dado $\left(1/T_d\right)$ debe ser mayor que la parte real de los Polos Complejos Conjugados

Polos Dominantes



Parte Real $\sigma = \xi\omega_n = 6 \rightarrow \boxed{\frac{1}{T_d} = 10}$

Por lo tanto el Controlador es un buen diseño

e_{RP} frente a una Entrada Escalón $r(t) = u(t)$

$$e_{RP} = \left(\frac{1}{1+K_{pos}}\right) \; ; \; K_{pos} = \lim_{s \to 0} G(s)H(s) = \lim_{s \to 0}\left[\frac{K_p(1+T_d s)\cdot 6}{s(s+3)}\right]$$

K_p

$$K_{pos} = \lim_{s \to 0}\left[\frac{6\cdot 14.97\cdot(1+0.1s)}{s(s+3)}\right] = \infty \rightarrow e_{RP} = \left(\frac{1}{1+\infty}\right) = 0$$

$\boxed{e_{RP} = 0}$ ANTE UNA ENTRADA ESCALON

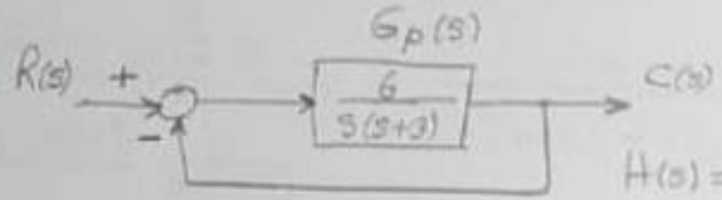
e_{RP} frente a una ENTRADA RAMPA $r(t) = \frac{1}{s^2}$

$$e_{RP} = \frac{1}{K_{vel}} \; ; \; K_{vel} = \lim_{s \to 0} s\,G(s)H(s)$$

$$K_{vel} = \lim_{s \to 0}\left[s\,\frac{K_p(1+T_d s)\cdot 6}{s(s+3)}\right] = \frac{K_p\cdot 6}{3} = \frac{6\cdot(14.97)}{3} = \boxed{29.94}$$

$$e_{RP} = \frac{1}{K_{vel}} = 0.0334 \; ; \; \boxed{e_{RP} = 3.34\ \%}$$

$\boxed{\text{PROBLEMA \#2}}$



$$G(s) = \frac{6}{s(s+3)} \qquad H(s) = 1$$

TIPO (1) → Un Polo de Lazo Abierto en el origen

REQUERIMIENTO ⟹ $\begin{cases} e_{RP} = 0 \text{ para una Entrada Rampa con} \\ M_P(\%) = 5{,}52\,\% \text{ y } T_S = 3.14 \text{ seg} \end{cases}$

$\boxed{\text{SOLUCION}}$

Para que e_{RP} sea 0 ante una Entrada Rampa, el sistema en Lazo Abierto $(G(s)H(s))$ debe tener como mínimo 2 polos en el origen (TIPO 2 o mayor). El sistema $G(s)$ dado solamente tiene un polo en el origen, por lo tanto $G_c(s)$ debe añadir uno más.

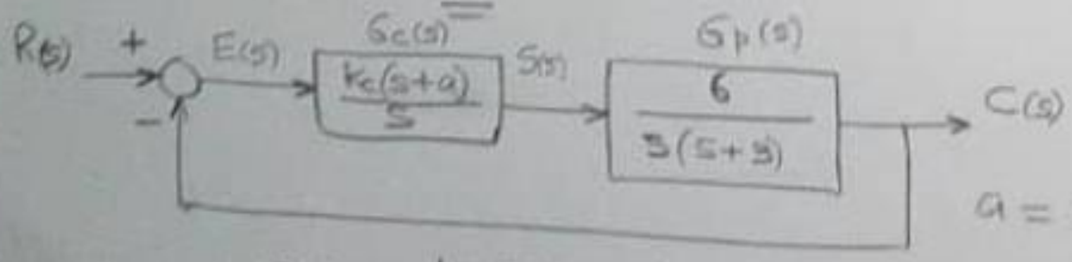
$\rightarrow K_c + \frac{K_c \cdot a}{S}$

Posibles controladores

$$\begin{cases} \text{Proporcional + Integral } \; G_c(s) = \dfrac{K_c(s+a)}{S} \; ; \; a = \dfrac{1}{T_i} \\ \text{PID: } \; G_c(s) = \dfrac{K_c \cdot (s+a)^2}{S} \; ; \text{ CEROS IGUALES} \end{cases}$$

Integral Puro → [origina un Polinomio incompleto como Ecuación Característica

CONTROLADOR PI



$$a = \frac{1}{T_i}$$

$$S(s) = K_c \cdot E(s) + \frac{K_c \cdot a}{S} E(s)$$

#6

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_c(s+a)}{s} \cdot \frac{6}{s(s+3)}}{1 + \frac{K_c(s+a)}{s} \cdot \frac{6}{s(s+3)}} = \frac{6K_c(s+a)}{s^2(s+3) + 6K_c(s+a)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6K_c \cdot (s+a)}{s^3 + 3s^2 + 6K_c \cdot s + 6K_c \cdot a}$$

- Ecuación Característica de $G_p(s)$ más $G_c(s)$ es de 3er orden
- La Función de transferencia del sistema deseado es de 2do orden

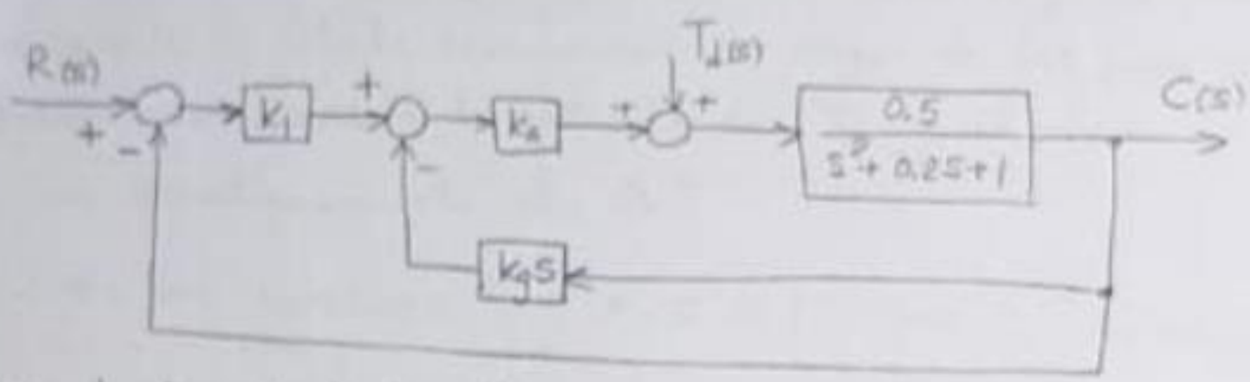
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \leftarrow \Delta_{\text{DESEADA}}(s)$$

Para poder igualar ambas Ecs. Características debemos multiplicar $\Delta_{DES}(s)$ por un factor debido a un polo real

$$(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s+p)$$

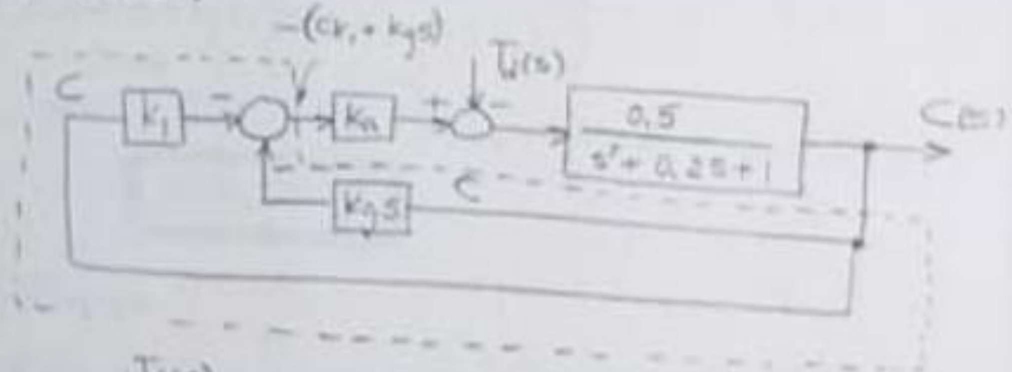
PARCIAL I / TEORIA DE Control 26/6/199

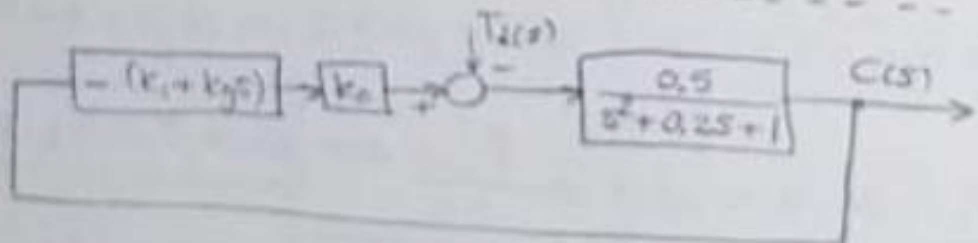
③

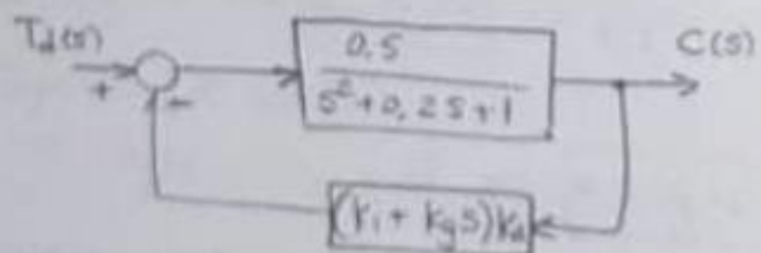


3A) Expresar la función de transferencia para el efecto de la entrada de perturbación T_d en $C(s)$.

$$\left.\frac{C(s)}{T_d(s)}\right|_{R(s)=0} = ?$$







$$\left.\frac{C(s)}{T_d(s)}\right|_{R(s)=0} = \frac{\frac{0.5}{s^2+0.2s+1}}{1+\left(\frac{0.5}{s^2+0.2s+1}\right)(K_1+K_g s)}$$

$$\left.\frac{C(s)}{T_d(s)}\right|_{R(s)=0} = \frac{0.5}{(s^2+0.2s+1) + 0.5(K_1+K_g s)K_a}$$

$$\boxed{\left.\frac{C(s)}{T_d(s)}\right|_{R(s)=0} = \frac{0.5}{s^2+(0.2+0.5K_gK_a)s+(1+0.5K_1K_a)}}$$

3B) Encontrar las ecuaciones que deben satisfacer K_a, K_1 y K_g para asegurar un valor de Estado estacionario no mayor de 0.1 para C en respuesta a un escalón de entrada en T_d y al mismo tiempo un amortiguamiento de 0.5.

$$\begin{cases} C_{RP} < 0.1 \\ C(\infty) < 0.1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{s \to 0} sC(s) = \lim_{t \to \infty} C(t) < 0.1 \qquad \text{para } T_d(t) = u(t)$$

$$\lim_{s \to 0} sC(s) = \lim_{s \to 0} \frac{(s)\,0.5\,(1/s)}{\underset{s^2 +}{s^2} + \underset{2\xi\omega_n \cdot s}{(0.2 + 0.5 K_g K_a)s} + \underset{\omega_n^2}{(1 + 0.5 K_1 K_a)}} < 0.1$$

$$\frac{0.5}{1 + 0.5 K_1 K_a} < 0.1 \Rightarrow 5 < 1 + 0.5 K_1 K_a \Rightarrow 4 < 0.5 K_1 K_a$$

$$\boxed{K_1 K_a > 8} \quad \text{--- (1)}$$

Como $\xi = 0.5$, entonces

$$0.2 + 0.5 K_g K_a = 2\xi\omega_n = \omega_n \Rightarrow \boxed{0.2 + 0.5 K_g K_a = \omega_n} \cdot (2$$

$$\boxed{\omega_n^2 = 1 + 0.5 K_1 K_a} \Rightarrow \frac{\omega_n^2 - 1}{0.5} = K_1 K_a > 8 \Rightarrow \frac{\omega_n^2 - 1}{0.5} > 8$$

$$\omega_n^2 - 1 > 4 \Rightarrow \boxed{\omega_n > \sqrt{5}} \quad \text{--- (3)}$$

Sustituyendo (3) en (2)

$$0.2 + 0.5 K_g K_a = \omega_n > \sqrt{5} \Rightarrow \boxed{0.5 K_g K_a > (\sqrt{5} - 0.2)} \quad \text{--- (4)}$$

CONDICIONES para K_a, K_1 y K_g

$$\begin{cases} K_1 K_a > 8 \\ 0.5 K_g K_a > (\sqrt{5} - 0.2) \Rightarrow \boxed{0.5 K_g K_a > 2.0361} \end{cases}$$

3C) ¿Cuál Parámetro debe ajustarse para asegurar que ambas especificaciones en Parte (b) se cumplan.

Por Ejemplo si $K_1 = 1$ y $K_g = 2$, Entonces $K_a > 8$

ATISFACIENDO [illegible] se cumple.. Amb.. [illegible] $K_a > 2.0361$