

Construction d'une quasi-géodésique sur un polyèdre convexe

Jean Chartier

15 juillet 2021

En 1949, Alexandre Pogorelov démontre l'existence d'une quasi-géodésique simple et fermée sur tout polyèdre convexe¹. Nous nous proposons de décrire un algorithme permettant de construire à la surface (homéomorphe à la sphère) de tout polyèdre (convexe ou non), une telle quasi-géodésique. Nous démontrons d'abord l'existence d'une quasi-géodésique de longueur inférieure à une borne dépendant du polyèdre. Cela nous donne une borne supérieure sur la combinatoire de la quasi-géodésique (ordre de rencontre des sommets et arêtes) et nous permet de dresser une liste des chemins à tester.

Définition 0.0.1 (Quasi-géodésique)

Une quasi-géodésique sur un polyèdre P quelconque est un chemin continu $\gamma : I \rightarrow \partial P$, où I est un intervalle de \mathbb{R} , satisfaisant quatre conditions :

- Il est rectiligne uniforme sur les faces de P qu'il traverse.
- Il forme au passage d'une arête deux angles égaux à π .
- Il forme au passage d'un sommet de courbure positive deux angles inférieurs ou égaux à π .
- Il forme au passage d'un sommet de courbure négative deux angles supérieurs ou égaux à π .

Notation : Étant donné un polyèdre P , on notera p_1, \dots, p_n ses n sommets et a_1, \dots, a_m ses m arêtes, avec une notation alternative pour les arêtes reliant p_i et p_j , à savoir a_{ij} . On appelle *chapeau* de sommet p_i , noté C_i , la réunion des triangles $p_i p_l p_k$, où p_l et p_k sont voisins de p_i et appartiennent à une même face de P .

Theorème 0.0.1 (Théorème 1)

Soit P un polyèdre quelconque. Il existe une quasi-géodésique simple et fermée $\gamma : S^1 \rightarrow \partial P$ dont la longueur n'excède pas $M = \sum_i L(a_i)$. On peut demander en outre, quitte à faire glisser parallèlement γ le long des arêtes qu'elle traverse, que 0 soit envoyé sur un sommet p_* .

Démonstration. Nous savons depuis [ref] que les 2-sphères sont épluchables (shellable). En particulier, il existe une triangulation $\{T_1, \dots, T_l\}$ de P qui s'appuie sur les sommets p_i et telle que :

$$\forall i = 1 \dots l, \bigcup_{k=1}^{k=i} T_k \simeq D^2 \text{ et } \bigcup_{k=1}^{k=l} T_k \simeq S^2$$

On précise que T_i et T_{i+1} ne sont pas nécessairement adjacents. On renomme éventuellement les sommets de P pour avoir $p_0 \in T_1$ et $p_n \in T_l$. On balaye T_1 (resp. T_l) par des segments σ_s^1 (resp. σ_s^l), parallèles au côté opposé à p_0 (resp. p_n). Puis, pour i allant de 2 à $l-1$:

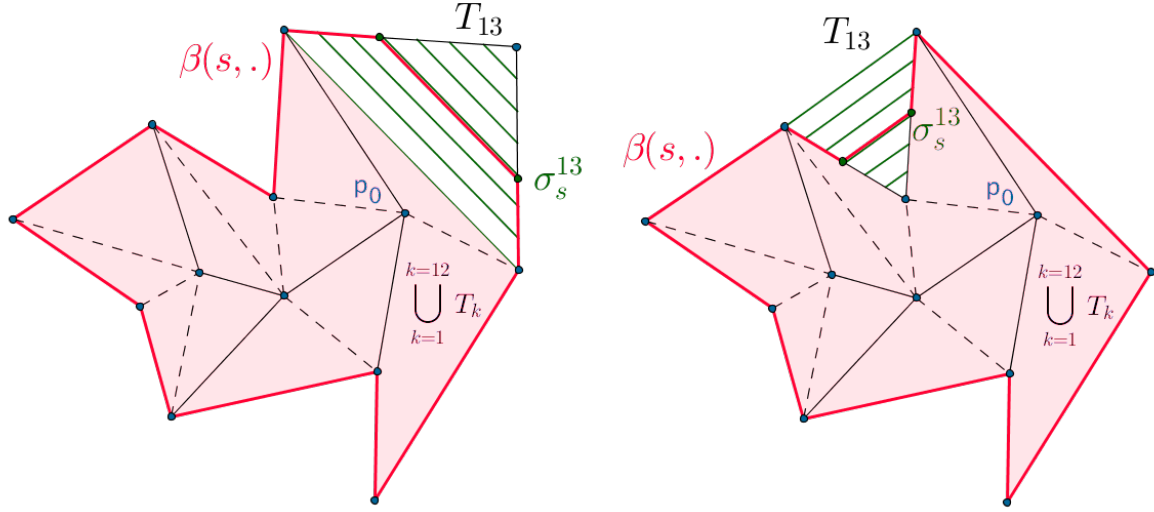
- Si T_i partage un unique côté avec $\bigcup_{k=1}^{k=i-1} T_k$, on balaye T_i par des segments σ_s^i parallèles à ce côté.
- Si T_i partage deux côtés avec $\bigcup_{k=1}^{k=i-1} T_k$, on balaye T_i par des segments σ_s^i parallèles au troisième côté.

À chaque segment σ_s^i ainsi tiré à travers un certain T_i , on associe continûment (en s puis en i) le paramétrage d'un lacet formé par le bord du disque $\bigcup_{k=1}^{k=i-1} T_k$, privé de son intersection avec T_i et relié à σ_s^i par deux portions du bord de T_i (voir figure ci-dessous). Pour $i = 1$ (resp. $i = l$), on relie plutôt σ_s^i à p_0 (resp. p_n) par deux portions du bord de T_i . On a ainsi construit un balayage de P par des cercles $\beta : S^2 \rightarrow P$ – où S^2 est vue comme le quotient du cylindre $[0, 1] \times S^1$ par la relation qui identifie les cercles $(0, S^1)$ et $(1, S^1)$ à deux points – qui est de degré 1 et qui satisfait :

- Chaque fibre $\beta(s, \cdot) : S^1 \rightarrow P$ est une ligne brisée simple à la surface de P .
- Il existe une suite de valeurs : $0 < s_1 < \dots < s_{l-1} < 1$ telle que $\beta([0, s_i] \times S^1) = \bigcup_{k=1}^{k=i} T_k$.
- $\beta(0, \cdot)$ est le lacet constant en p_0 et $\beta(1, \cdot)$ est le lacet constant en p_n .
- $\forall s \in]0, 1[, \beta(s, \cdot)$ est un polygone de longueur l_s tracé sur P , parcouru à vitesse constante $c_s = l_s/2\pi$.

Ainsi construit, β ne présente aucune fibre $\beta(s, \cdot)$ dont la longueur n'excède M .

1. Nous donnons en annexe la preuve qu'il n'existe pas toujours de quasi-géodésique déterministe sur un polyèdre convexe, c'est-à-dire le cas échéant, qui traverse les sommets en formant deux angles égaux.



On distingue à partir de maintenant les chapeaux *convexes* – pour lesquels la somme des angles adjacents à p_i est inférieure à 2π – et *concaves* – pour lesquels la somme des angles adjacents à p_i est supérieure à 2π .

Raccourcissement par disques...

On définit ici un protocole de flot par disques, c'est-à-dire un raccourcissement itératif des fibres de β en les \mathcal{C}_i . En l'occurrence, on pourra parler de *redressement* des fibres, amenées localement en des portions de quasi-géodésiques. On s'inspire ici des travaux de Hass et Scott [HS]. Les brèches ouvertes par le flot, notamment autour des sommets et des *becs* (voir ci-dessous), devront être recousues avec de nouvelles fibres, plus petites que la plus longue fibre du balayage initial.

Soit $0 \leq i \leq n$ et \mathcal{C}_i un chapeau. On appelle *arc* de \mathcal{C}_i une composante connexe de :

$$\mathcal{C}_{ij} \cap \text{Im}(\beta(s, .))$$

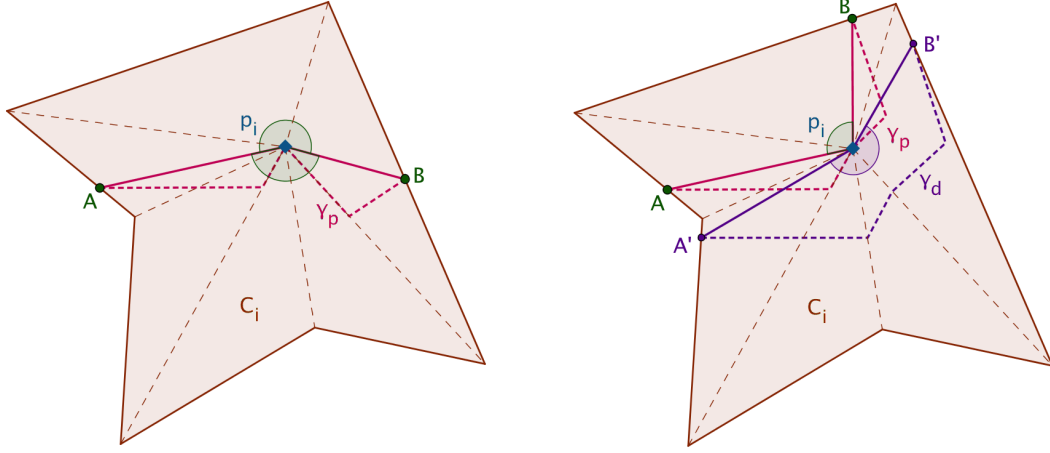
Les différents cas à traiter dépendent des trois critères suivants :

- Présence ou non d'une fibre entièrement incluse dans \mathcal{C}_i .
- Présence ou non d'un *bec* dans \mathcal{C}_i , à savoir un arc δ de \mathcal{C}_i telle que $\partial\mathcal{C}_i \cap \delta$ admet plus de deux composantes connexes. Le nombre de composantes connexes au-delà de deux définit le degré du bec.
- Convexité ou concavité de \mathcal{C}_i .

On traite le cas où aucune fibre $\beta(t, .)$ n'est incluse dans \mathcal{C}_i , aucun bec ne traverse \mathcal{C}_i , avec \mathcal{C}_i convexe. On fait passer un test à l'une des fibres passant par p_i (il peut y en avoir un bouquet). On note γ_p cette fibre et A, B ses points d'entrée et de sortie de \mathcal{C}_i . La ligne brisée Ap_iB sépare \mathcal{C}_i en deux quartiers \mathcal{C}_i^g et \mathcal{C}_i^d .

- Si les deux angles² formés par Ap_iB sont $\leq \pi$, alors γ_p est redressée sur Ap_iB , via une homotopie décroissante pour la longueur. Dès lors et dans un même ballet d'homotopies, toutes les autres fibres de \mathcal{C}_i peuvent être redressées sur un plus court chemin dans \mathcal{C}_i , du côté de Ap_iB où elles prennent racines, à savoir \mathcal{C}_i^g ou \mathcal{C}_i^d . Rappelons qu'aucune fibre jusqu'alors ne se coupe transversalement.
- Si l'angle formé par Ap_iB du côté de \mathcal{C}_i^g (resp. \mathcal{C}_i^d) est $> \pi$ (nécessairement, l'autre sera $< \pi$), on cherche une fibre γ_g (resp. γ_d) qui peut être redressée dans \mathcal{C}_i^g (resp. \mathcal{C}_i^d) en passant par p_i , pour former un angle égal à π : elle réalise de ce côté de Ap_iB un plus court chemin. Dès lors, on redresse toutes les fibres de \mathcal{C}_i de part et d'autre de γ_g (resp. γ_d), comme précédemment.

2. Toutes les projections azimutales présentent un code couleur pour les angles :
 $\leq \pi \rightarrow \text{vert} \mid > \pi \rightarrow \text{bleu} \mid = \pi \rightarrow \text{violet}$



Attention, la présence d'un bec, dans ce quartier de C_i peut compromettre l'existence d'une telle fibre. \square

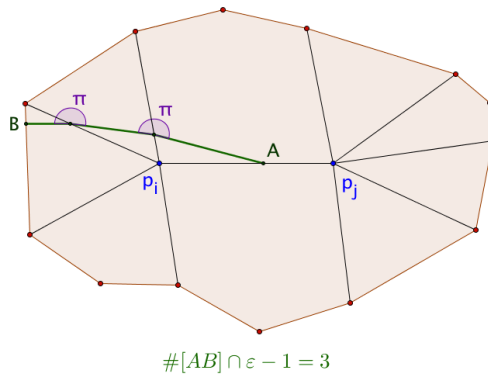
Théorème 0.0.2 (Théorème 2)

Il existe un algorithme permettant de construire une telle quasi-géodésique.

Preuve du Théorème 2. Soit $\mathcal{E} = \{p_1, \dots, p_n, a_1, \dots, a_m\}$ l'ensemble des sommets et arêtes ouvertes de P . À une courbe simple $c : I \rightarrow P$, on associe le mot $\mathcal{E}(c)$ composé des éléments ordonnés de \mathcal{E} rencontrés par $c(t)$ quand t parcourt I . On veut donner une borne η sur la combinatoire de γ , c'est-à-dire une borne sur la longueur de $\mathcal{E}(\gamma)$. À chaque arête a_{ij} , on associe un coefficient de rencontre $k(a_{ij})$ mesuré comme suit :

$$k(a_{ij}) = \max_{\substack{A \in a_{ij} \\ B \in \partial(C_i \cup C_j)}} \frac{\#([AB], \mathcal{E}) - 1}{L(AB)}$$

Où $[AB]$ est le plus court chemin sur P entre A et B et où $\#([AB], \mathcal{E})$ désigne le nombre d'éléments de \mathcal{E} rencontrés par $[AB]$, transversalement ou longitudinalement s'il s'agit d'une arête.



On a alors une expression de η :

$$\eta = \left\lceil M \cdot \max_{a_{ij}} k(a_{ij}) \right\rceil$$

On considère l'ensemble³ des mots de $\eta + 1$ lettres prises dans \mathcal{E} , commençants et terminants par un même nom de sommet, noté p_\star . Un mot *valide* ne doit contenir que deux types de syllabes :

3. De cardinal $n(n+m)^{\eta-1}$

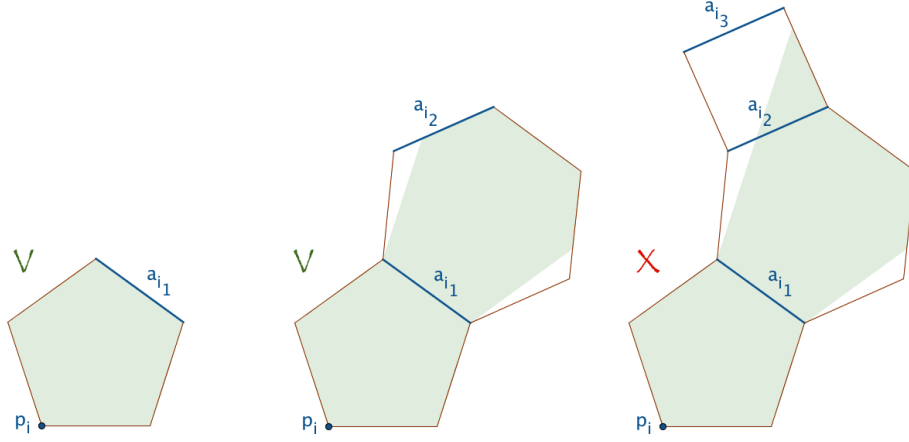
- Deux lettres désignant deux éléments au bord d'une même unique face de P , notée $F(\square_i, \square_j)$.
- Trois lettres désignant une arête comprise entre ses deux extrémités.

À γ correspond nécessairement un tel mot, noté $\bar{\gamma}$. Réciproquement, à un mot $x = \overline{p_\star l_1 \dots l_{\eta-1} p_\star}$ correspond une quasi-géodésique simple et fermée s'il satisfait, de gauche à droite, le test suivant :

- Premier cas : deux sommets p_i et p_j se suivent dans x . On enregistre le tracé $[p_i, p_j]$ à travers $F(p_i, p_j)$.
- Deuxième cas : la séquence $\overline{p_i a_{ij} p_j}$ a lieu dans x . On enregistre le tracé $[p_i, p_j]$ le long de a_{ij} .
- Troisième cas : deux sommets p_i et p_j cernent une suite $\overline{a_{i_1} \dots a_{i_k}}$ dans x . On développe successivement les faces adjacentes $F(p_i, a_{i_1})$, $F(a_{i_1}, a_{i_2})$, \dots , $F(a_{i_k}, p_j)$.

Dans les trois cas :

- Si $p_i = p_\star$, on continue le test à partir de p_j .
- Si $p_i \neq p_\star$, alors des tracés en aval et en amont de p_i on été enregistrés. Le test est positif si l'angle en p_i formé par ces deux tracés satisfait aux conditions d'une quasi-géodésique.
- Si $p_j = p_\star$, alors des tracés en aval et en amont de p_\star on été enregistrés. Le test est positif si l'angle en p_\star formé par ces deux tracés satisfait aux conditions d'une quasi-géodésique.



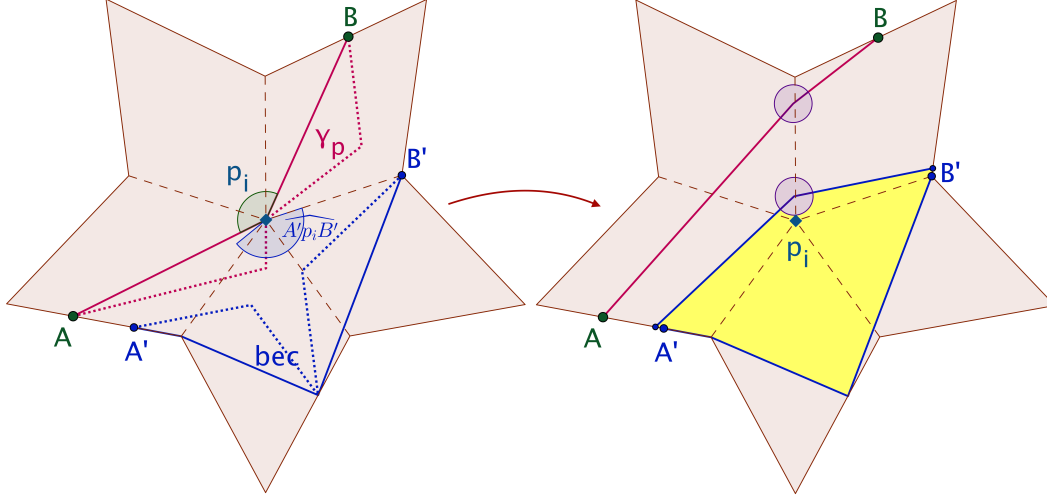
L'un au moins des mots valides doit passer le test avec succès, à commencer par $\bar{\gamma}$. Ainsi, **le test fournit la construction d'une quasi-géodésique sur P .**

□

Définition 0.0.2 (Bec)

Un bec, relativement à un chapeau \mathcal{C}_i , est une fibre $\beta(t, \cdot)$ qui coupe $\partial\mathcal{C}_i$ en au moins trois temps $g_1 < g_2 < g_3$ tels que $\beta(t, [g_1, g_3]) \subset \mathcal{C}_i$. Il est dit centré s'il enferme le sommet, excentré sinon.

Si β présente un bec centré d'extrémités A' et B' du côté de Ap_iB où l'angle est plus grand que π et s'il n'existe aucune fibre, dans la bande délimitée par A, A', B, B' , qui soit redressable en un plus court chemin passant par p_i (comme au point 2), alors toutes les fibres à l'intérieur du bec seront redressées au-delà de p_i en un plus court chemin (voir figure ci-dessous). La brèche ouverte par ce redressement sera recousu avec des fibres nécessairement plus courtes que le bec.

**Tangence**

Une fibre γ d'un chapeau peut longer une portion de son bord. Si γ poursuit sa route à l'intérieur du chapeau, elle devrait éventuellement être redressée à partir de son premier point d'entrée dans le chapeau, de sorte qu'une brèche s'ouvrirait entre γ et ses fibres voisines, celles en particulier qui s'accrochent au voisinage du point où γ quitte la frontière du chapeau. La difficulté vient du fait que tous les points de la frontière du chapeau ne sont pas alors des points d'entrée ou de sortie de fibres. On propose de remplacer – à travers une homotopie – le paramètre de cette fibre par un intervalle fermé de taille epsilon, mis en bijection homéomorphe avec la portion du bord qui est longée. De sorte que chaque copie de γ sera considérée comme entrant dans le chapeau au point du bord qui correspond à son paramètre.

