

# Simulación de carros y motos.

Amaya Danna, Polo Jean y Sierra Nicolás.

**Resumen** - En el siguiente trabajo se presenta cómo por medio de los conceptos físicos dados por la mecánica Newtoniana y la cinemática, se puede modelar el comportamiento de un vehículo para el desarrollo de simuladores.

**Índice de Términos** – simulación, carros, motos, torque.

En el presente documento se analizarán las físicas de automóviles y motocicletas con sus respectivos principios básicos. El enfoque de este trabajo es tener en cuenta cada una de las fuerzas que actúan sobre los vehículos motorizados, en especial carros y motocicletas, cómo funcionan, cómo se mueven, cómo aceleran y frenan mediante el uso de los diagramas de fuerzas y las ecuaciones de cada principio básico de estas.

## I. DIAGRAMA DE FUERZAS.

En este caso particular, el automóvil se encuentra sobre una pendiente con ángulo .

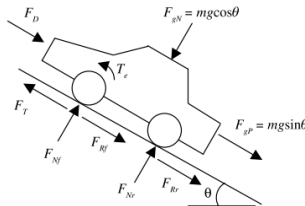


Figura 1. Diagrama de fuerzas automóvil en pendiente.

Las principales fuerzas que influyen en el automóvil son:

**[Fg]** **Fuerza de gravedad:** Se descompone en su fuerza perpendicular (**FgN**) y paralela (**FgP**) a la rampa.

$$F_{gN} = mg \cos \theta$$

Ecuación 1.1. Fuerza gravitacional perpendicular.

$$F_{gP} = mg \sin \theta$$

Ecuación 1.2. Fuerza gravitacional paralela.

**[FN]** **Fuerza normal:** Es la fuerza normal de los neumáticos que están en contacto con el suelo. Equilibra a la fuerza de gravitacional paralela.

$$F_N = F_{Nf} + F_{Nr} = mg \cos \theta$$

Ecuación 1.3. Fuerza normal = Fuerza gravitacional perpendicular.

**[FT]** **Fuerza de las ruedas:** Es la fuerza que se genera por el torque generado en el motor que hace que las ruedas giren. Donde  $T_e$  es el torque del motor y  $T_w$  es el torque de las ruedas. Sólo se aplica a las ruedas delanteras. La fuerza

aplicada en las ruedas delanteras es igual al torque generado en ellas sobre su radio ( $r_w$ ).

$$F_T = \frac{T_w}{r_w}$$

Ecuación 1.4. Fuerza aplicada a las ruedas delanteras.

**[FR]** **Fuerza de fricción:** Es la fuerza que se opone al movimiento de las ruedas. Actúa sobre las llantas traseras y delanteras y sentido opuesto a la fuerza de movimiento.

$$F_R = \mu_r F_N = \mu_r mg \cos \theta$$

Ecuación 1.5. Fuerza de rozamiento.

**[FD]** **Fuerza aerodinámica:** Es la fuerza que se opone al movimiento del auto. Afecta principalmente al área delantera del auto y depende de características del aire.

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho v^2 A$$

Ecuación 1.6. Fuerza aerodinámica.

## II. ANÁLISIS DE FUERZAS.

Entendiendo esto, podemos denotar que la fuerza de rozamiento (Ec. 1.5), la fuerza de gravedad paralela (Ec. 1.2) y la fuerza aerodinámica (Ec. 1.6) son las fuerzas que se oponen a la fuerza de rodamiento (Ec. 1.4), teniendo así que nuestra fuerza total es:

$$F_{Total} = \frac{T_w}{r_w} - \mu_r mg \cos \theta - mg \sin \theta - \frac{1}{2} C_D \rho v^2 A$$

Ecuación 2.1. Fuerza total del automóvil.

A partir de la ecuación 2.1 podemos hallar la aceleración del vehículo, entendiendo que  $F=ma$ ; implicando que:  $a=F/m$

$$a = \frac{T_w}{r_w m} - \mu_r g \cos \theta - g \sin \theta - \frac{1}{2} \frac{C_D \rho v^2 A}{m}$$

Ecuación 2.2. Aceleración del sistema.

## III. TORQUES Y ENGRANAJES.

Es importante en este punto mencionar que el torque generado por el motor no es el mismo generado en las ruedas.

**Torque del motor:** Este torque está en función a la velocidad a la cual está girando. O mejor conocido como revoluciones por minuto.

$$T_e = T_e(\Omega_e)$$

Ecuación 3.1. Torque del motor.

**Engranajes:** El torque generado en el motor, antes de pasar a las rudas, pasa por una sección llamada transmisión

compuesta por muchos engranajes (Fig. 2). La principal función de los engranajes es disminuir la velocidad angular y aumentar el torque generado por el motor. Todo es cuestión de rendimiento.

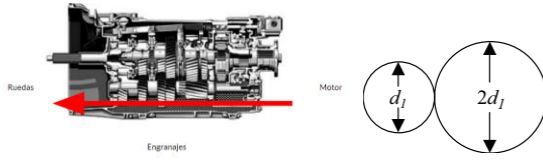


Figura 2. Transmisión con engranajes.

Por ejemplo, (Fig. 2) en el segundo cambio los engranajes tienen el doble de diámetro que en el cambio 1; pero por cada revolución que haga el cambio 2, el cambio 1 hará dos. Es decir, **A mayor diámetro, menor velocidad angular pero mayor torque generado.**

La relación de transmisión ( $g_r$ ), no es más que la relación de los diámetros de los engranajes. Para este ejemplo sería **2:1**. Sin embargo, también hay un conjunto adicional de engranajes entre la transmisión y las ruedas; en muchos automóviles, este conjunto de engranajes se conoce como diferencial. La relación de transmisión de este conjunto de engranajes final se conoce como la relación de transmisión final. ( $G$ )

**Torque de las ruedas:** En resumen, el torque que es aplicado a las ruedas sería el torque del motor factor de la relación de transmisión (según su cambio) y la relación de transmisión final.

$$T_w = T_e g_k G$$

Ecuación 3.2. Torque de las ruedas.

Reemplazando la ecuación 3.2 en la ecuación 2.2, encontramos la aceleración del sistema.

$$a = \frac{T_e g_k G}{r_w m} - \mu_r g \cos \theta - g \sin \theta - \frac{1}{2} \frac{C_D \rho v^2 A}{m}$$

Ecuación 3.3. Aceleración del sistema.

#### IV. ARRASTRE Y FRICCIÓN.

En la física aplicada a carros, se tienen **2 fuerzas principales que se oponen al movimiento de este**, las cuales son el arrastre aerodinámico y la fricción.

**Arrastre:** Es una fuerza cuya dirección es opuesta a la velocidad del carro. En la Ec. 1.6, se puede apreciar que el arrastre es expresado como una función de la densidad del aire ( $\rho$ ), la velocidad del carro ( $v$ ) y su área frontal ( $A$ ).

Cabe resaltar que **esta fuerza depende de la forma del vehículo**, de tal manera que cuando hay una menor área frontal, habrá un menor coeficiente de arrastre ( $C_D$ ).

**Área frontal:** Se asume que la sección frontal es rectangular. Para tener en cuenta que esta sección tiene una pendiente, se multiplica por un factor que se encuentre entre 0 y 1.

$$A = 0.85 * width * height$$

Ecuación 4.1. Área frontal de un auto en donde el factor por el que se multiplica es de 0.85.

**Fricción:** Las llantas, al estar rodando, generan una fuerza de fricción que será opuesta al movimiento del objeto. Esta fuerza es causada por el contacto entre la superficie en la que está rodando y el mismo.

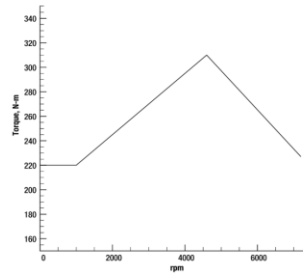
#### V. ACELERACIÓN Y VELOCIDAD.

En este sentido, se debe tener en cuenta que, para crear una simulación de automóvil, es necesario **determinar la aceleración y la velocidad del coche en cualquier momento.** El punto de partida para este análisis es la siguiente ecuación.

$$a = \frac{T_e g_k G}{r_w m} - \mu_r g \cos \theta - g \sin \theta - \frac{1}{2} \frac{C_D \rho v^2 A}{m}$$

Ecuación 5.1. Aceleración del sistema.

En la que todas las incógnitas son conocidas, el único dato que se desconoce es  $T_e$  y se analizará a continuación. En la gráfica 1 se compara la velocidad máxima del vehículo con su aceleración.



Gráfica 1. Curva del torque para Porsche S.

$$\begin{aligned} T_e &= 220 & \Omega_e &\leq 1000 \\ T_e &= 0.025\Omega_e + 195 & 1000 < \Omega_e < 4600 \\ T_e &= -0.032\Omega_e + 457.2 & \Omega_e &\geq 4600 \end{aligned}$$

Ecuación 5.2. Ecuaciones de curva.

A partir de esta se pueden modelar 3 ecuaciones diferentes dependiendo de su cambio en pendientes. Las 3 ecuaciones 5.2, son una forma generalizada de la ecuación de la curva.

$$T_e = b\Omega_e + d$$

Ecuación 5.3. Ecuación general de la curva

**El parámetro b en la Ec. 5.4 es la pendiente de la línea.** Por supuesto, las líneas rectas no son la única forma de modelar matemáticamente una curva de torque; dependiendo de la forma de la curva, la función parabólica o exponencial también podría usarse para aproximar una curva de torque.

Tener una expresión matemática para la curva de torque está muy bien, pero para resolver la aceleración del automóvil lo que realmente se necesita es una ecuación para el torque de la rueda en función de la velocidad actual del automóvil.

$$a = \frac{60g_k^2 G^2 b v}{2\pi m r_w^2} + \frac{g_k G d}{m r_w} - \frac{1}{2} \frac{C_D \rho v^2 A}{m} - \mu_r g \cos \theta - g \sin \theta$$

Ecuación 5.4. Ecuación general de la aceleración máxima.

Esta ecuación suele verse bastante compleja, pero en realidad es solo una ecuación algebraica. **Las constantes se pueden agrupar para formar una ecuación más simple en la que la**

### aceleración del automóvil es una función de la velocidad actual del automóvil.

$$a = \frac{dv}{dt} = c_1 v^2 + c_2 v + c_3$$

Ecuación 5.5. Aceleración Final.

Donde,

$$c_1 = -\frac{1}{2} \frac{C_D \rho A}{m} \quad c_2 = \frac{60 g_k^2 G^2 b}{2 \pi m r_w^2}$$

$$c_3 = \frac{g_k G d}{m r_w} - \mu_r g \cos \theta - g \sin \theta$$

Ecuación 5.6. constantes

Se puede observar qué parámetros influyen en la aceleración del carro. Algunas conclusiones son bastante claras: cuanto más pesado es el automóvil, menor es el nivel de aceleración. Si se aumentan las relaciones de transmisión y transmisión final, se aumenta la aceleración. La fricción de las ruedas aumenta la aceleración.

De este modo, **la velocidad máxima será el punto donde la aceleración neta en el automóvil es cero**. En este caso,  $V_{max}$ , de un automóvil está limitada por la línea de límite del valor rpm del motor.

$$v_{max} = \frac{2 \pi r_w \Omega_{redline}}{60 g_k G}$$

Ecuación 5.7. Velocidad máxima

A velocidades más altas (con relaciones de transmisión más bajas), la velocidad máxima de un automóvil está limitada por la resistencia. A medida que aumenta la velocidad, la resistencia aerodinámica aumenta hasta que se alcanza una velocidad donde el torque aplicado a las ruedas está equilibrado exactamente por la resistencia aerodinámica y la fricción de rodadura experimentada por el vehículo.

$$v_{max} = \frac{-c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4c_1 c_3}}{2c_1}$$

Ecuación 5.8. Velocidad máxima

Cualquiera de estas dos ecuaciones expuestas anteriormente funciona para encontrar la velocidad máxima del vehículo.

### VI. CAMBIO DE MARCHAS.

Cada motor de automóvil tiene una característica conocida como valor de rpm de línea roja. El motor no puede exceder esta tasa de rotación por más de un breve período de tiempo sin causar daños al motor. La nueva tasa de rotación del motor,  $\Omega_e$  (nuevo), será igual a la rotación del motor antes del cambio de marcha,  $\Omega_e$  (antiguo), multiplicado por la relación de la nueva relación de transmisión a la anterior relación de transmisión.

$$\Omega_e (new) = \Omega_e (old) \frac{g_k (new)}{g_k (old)}$$

Ecuación 6.1. Ecuación cambio de marchas

### VII. FRENADO.

Existen dos formas en las que un carro puede frenar:

**Por sí mismo:** El motor se ralentizará por sí solos debido a la naturaleza con la que se mueven los cilindros que se encuentran dentro del motor.

$$T_{eb} = \mu_{eb} \frac{\Omega_e}{60}$$

Ecuación 7.1. Torque del motor al frenar.

A diferencia de la Ec. 3.1, la cual modela matemáticamente el torque de un motor, se puede observar que en la ecuación 7.1 el torque que se genera está afectado por una constante, la cual es conocida como el coeficiente de frenado en el motor ( $\mu_{eb}$ ).

**Si el conductor frena:** Al aplicar los frenos de un auto, la pastilla del freno un disco hace que se genere un torque que ralentiza las llantas, el cual **actúa en dirección opuesta a la dirección con la que la llanta está rodando**.

$$a_b = -\frac{v_0^2}{2x}$$

Ecuación 7.2. Aceleración del auto al frenar.

Nótese que en la ecuación 7.2, para hallar la aceleración con la que se frenó, se necesita la velocidad inicial del auto ( $v_0$ ) y la distancia del frenado ( $x$ ).

### VIII. TRACCIÓN DE LLANTAS.

Esta fuerza, conocida como la fuerza de tracción, es igual a la fuerza normal ejercida sobre el neumático multiplicada por el coeficiente de fricción entre el neumático y la carretera.

$$F_T = \mu_k F_N = \mu_k mg \cos \theta$$

Ecuación 8.1. Tracción de llantas

Es la fuerza máxima que se puede aplicar a el neumático para que ruede sin deslizar por el suelo. **La fuerza de tracción para un automóvil dado es típicamente determinada al pasar el automóvil por lo que se conoce como prueba de patín**. El auto es conducido en una pista circular llana. La velocidad del automóvil aumenta hasta la aceleración centrípeta del coche es igual a la fuerza de tracción de los neumáticos.

### IX. CURVAS.

Cuando un carro gira, se puede modelar su comportamiento con base en la velocidad que este tenga al tomar la curva. Si el carro está tomando la curva en velocidades bajas, se pueden ignorar factores como la aceleración centrípeta y se puede asumir que las llantas están rodando sin deslizarse.

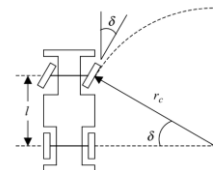


Figura 3. Diagrama de un carro andando en una curva con bajas velocidades.

En la Figura 3, se presenta un diagrama de cómo se movería el carro. En este, se observa que las llantas delanteras están volteadas con un ángulo  $\delta$  y se está conduciendo en un círculo con radio  $r_c$  (se asume que el auto tiene velocidad constante). Para determinar este radio, se calcula la proporción entre la distancia de las llantas traseras y delanteras ( $l$ ) y el seno del ángulo de giro ( $\delta$ ).

$$r_c = \frac{l}{\sin \delta}$$

Ecuación 9.1. Radio del círculo de giro.

$$\omega_t = \frac{v}{r_c}$$

Ecuación 9.2. Velocidad angular de giro.

En este caso, debido a que las ruedas están rodando sin fricción, la velocidad angular va a ser igual a la magnitud de la velocidad dividido en el radio del círculo de giro. Reemplazando la ecuación 9.1 en la ecuación 9.2, se encuentra la velocidad angular del giro expresada por medio del ángulo de giro y la distancia entre las llantas traseras y delanteras.

$$\omega_t = \frac{v \sin \delta}{l}$$

Ecuación 9.3. Velocidad angular de giro expresada con base al ángulo de giro.

Por otra parte, cuando se hace un giro con altas velocidades, se deben tener en cuenta otros factores como el deslice de las llantas causado por la fuerza centrípeta. La forma más sencilla de modelar estos giros es por medio de la fuerza lateral (**Flateral**), la cual es la diferencia entre la fuerza centrípeta y la fuerza de fricción.

$$F_{lateral} = \frac{mv^2}{r_c} - \mu_k mg \cos \theta$$

Ecuación 9.4. Fuerza lateral.

Esta ecuación permite una aproximación, pero no es útil al momento de modelar fenómenos como cuando el carro gira fuera de control o cuando gira bruscamente. En caso de querer recrear estos efectos, se debe evaluar la fuerza lateral para cada una de las llantas.

## X. COLISIONES.

Cuando un carro colisiona con otro objeto, este tenderá a dañarse como resultado de este choque. Esto pasa debido a que la energía cinética del carro y del objeto con el que haya chocado se convertirá en trabajo el cual se verá reflejado en el daño carro.

$$v'_1 = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{(1+e)m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad ; \quad v'_2 = \frac{(1+e)m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - em_1}{m_1 + m_2} v_2$$

Ecuación 10.1. Velocidades post-colisión de 2 objetos.

Si alguna parte del carro se llega a deformar a causa de este choque, se asume que la colisión es inelástica y que el coeficiente de restitución ( $e$ ) es menor a 1. En caso de ser una colisión completamente inelástica (cosa que no pasará en la mayoría de los casos), los objetos quedarían pegados y ambos tendrían la misma velocidad post-colisión, tal como se muestra en la ecuación 10.2.

$$v'_1 = v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Ecuación 10.2. Velocidades post-colisión con un coeficiente de restitución igual a cero.

## XI. MOTOS.

La física actúa de una forma similar tanto en motos como en carros. La mayor diferencia que existe es que las motos tienen mayor potencial para acelerar, son más ligeras y ágiles. No obstante, una de las mayores diferencias que hay con respecto a los autos, es la capacidad de las motos para recorrer una curva.

Cuando una moto está girando a bajas velocidades, el giro actúa de una forma similar a la del carro; pero, cuando esta se encuentra haciendo la misma acción en altas velocidades, se produce un efecto llamado **precesión giroscópica**. Este fenómeno causa que cuando la moto esté girada hacia una dirección, exista un torque en la llanta en dirección opuesta. Debido a esto, si la llanta delantera va en la misma dirección del giro, el conductor de la moto se caerá.



Figura 4. Contradirección en una moto.

Para contrarrestar este efecto, la persona tiene que inclinarse hacia el giro para así estabilizar el movimiento de la moto. Esta técnica se llama **contradirección**.

## XII. CONCLUSIONES

- ✓ Los modelos físicos presentados sirven para modelar de forma general cualquier vehículo motorizado (ya sea un carro, una moto o un tanque).
- ✓ Las fuerzas que se oponen al movimiento del automóvil son la fuerza de fricción de las ruedas, la fuerza aerodinámica y el peso paralelo a la pendiente.
- ✓ El torque de las ruedas no es el mismo torque del motor puesto que los engranajes con mayor diámetro producen menor velocidad angular pero mayor torque.
- ✓ Si se aumentan las relaciones de transmisión y transmisión final, se aumenta la aceleración, si la fricción de las ruedas aumenta, aumenta la aceleración.
- ✓ El arrastre que tiene un carro es directamente proporcional a su área frontal.
- ✓ A medida que aumenta la velocidad, la resistencia aerodinámica aumenta
- ✓ Cuanto más pesado es el automóvil, menor es el nivel de aceleración.
- ✓ Al modelar el conducir sobre una curva, se debe de tener en cuenta la velocidad del modelo (si es una baja o una alta velocidad), así como la distancia entre las llantas delanteras y traseras.