Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Engenharia Elétrica e Informática
Departamento de Engenharia Elétrica
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Projeto de Pesquisa

# Algoritmo de Busca Adaptativo baseado em

Jean Felipe Fonseca de Oliveira

Campina Grande – PB
Abril de 2012

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Engenharia Elétrica e Informática
Departamento de Engenharia Elétrica
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

# Algoritmo de Busca Adaptativo baseado em

Jean Felipe Fonseca de Oliveira

Relatório de Projeto de Pesquisa submetido à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como requisito necessário para a obtenção do grau de Doutor em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Comunicações

Marcelo Sampaio de Alencar
Orientador

Campina Grande – PB, Maio de 2011

# Sumário

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

## Capítulo 1

# Introdução

Nos dias atuais, as aplicações multimídia tem se tornado mais flexíveis e mais poderosas com a evolução dos semicondutores e o desenvolvimento de novos métodos de processamento de sinais digitais. Devido à limitação da largura de banda do canal e dos rigorosos requisitos de reprodução de vídeo em tempo real, a codificação é um processo indispensável para muitas aplicações de comunicação visual que requerem taxas de compressão muito alta. A grande quantidade de correlação temporal entre quadros adjacentes em uma seqüência de vídeo, também chamada de redundância temporal, deve ser devidamente identificada e eliminada para garantir essas taxas de compressão [**?**].

Com o aumento na popularidade das comunicações de vídeo, a qualidade da experiência do usuário passam a ser uma das preocupações mais importantes na concepção e avaliação de sistemas multimídia [**?**].

Em uma cadeia de transmissão de vídeo, vários fatores influenciam e prejudicam a qualidade da imagem exibida resultante. Um desses fatores é o próprio algoritmo de codificação de fonte. Como consequência da codificação com perdas, uma degradação visível da qualidade do vídeo pode ser observada [**?**].

# Capítulo 2

# Revisão

[?]

O objetivo da estimação de movimento é a redução de redundância temporal entre quadros causada pela correlação de objetos em movimento. No entanto, a estimação e codificação de vetores de movimento devem ser apropriados aos custos computacionais e taxas de bits de acordo com as perspectivas de cada sistemas de compressão. Dessa forma, é muito importante a relação entre a precisão da estimação de movimento e simplicidade dos campos de vetores de descrição [?].

A abordagem mais popular é a de reduzir o número de locais de pesquisa utilizando o pressuposto da superfície de erro unimodal em que o erro da busca diminui monotonicamente quando a posição de melhor busca se aproxima do ponto ótimo global. No entanto, esta hipótese nãoé geralmente satisfeita, resultando em um erro de predição, conhecido como erro de mínimo local.

A estimação de movimento ocupa de 60% a 90% do tempo computacional de todo codificador variando das configurações mais simples para as configurações mais complexas, respectivamente. O artigo [?] define e implementa uma técnica de estimação de movimento fracionada em que todo processo ocupa apenas metade do tempo computacional em que um codificador padrão executaria essa tarefa.

Uma solução para a redução da quantidade de esforço computacional é usar os dados da sequência de vídeo no domínio codificado. Abordagens de processamento de vídeo no domínio codificado são recentes e menos exploradas em comparação com o processamento no domínio de pixel. Um exemplo de um algoritmo simples e rápido para a detecção de alterações de domínio codificado é apresentado por [?].

O processamento no domínio codificado evita a decodificação e reconstrução completa do vídeo, o qual fornece um potencial para processamento em tempo real de fluxos de vídeo múltiplos, por exemplo. O processamento no domínio codificado tem também a vantagem de extrair dados do fluxo de vídeo, que são gerados utilizando os dados originais não comprimidos, os que não estarão disponíveis durante o processamento do fluxo decodificado [**?**].

## Capítulo 3

# Rotação da Constelação

Várias técnicas vem sendo estudadas para reduzir os efeitos dos desvanecimentos. Dentre as técnicas utilizadas para reduzir esses efeitos é usada a recepção por diferentes antenas, em diferentes posições, e em diferentes frequências de RF sempre com a mesma informação de banda básica, e também diferentes polarizações e ângulos de incidência ou rotas. Essas técnicas são chamadas diversidade.

Outro método proposto é a técnica que consiste em introduzir redundância por meio de uma escolha adequada do ângulo de referência de uma constelação QAM combinada com o entrelaçamento independente das componentes dos símbolos a serem transmitidos, que pode ser chamada de diversidade de modulação [**?**] ou rotação da constelação [**?**], [**?**], [**?**].

O esquema QAM foi primeiro proposto por C. R. Cahn, em 1960 [**?**]. Ele estendeu a modulação de fase para modulação em fase com múltiplas amplitudes. Isto é, há mais de uma amplitude associada a uma fase. Neste esquema, o sinal transmitido é dado por

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n p(t - nT_S)\cos(\omega_c t) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n p(t - nT_S)\sin(\omega_c t), \qquad (3.1)$$

em que

$$a_n, b_n = \pm d, \pm 3d, \ldots, \pm(\sqrt{M} - 1)d$$

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_S \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $\omega_c$ e $A$ são a frequência e a amplitude da portadora, respectivamente.

Pode ser observado a partir da Equação **??** que a informação transmitida em uma componente é independente da informação transmitida na outra. Além do mais, a transmissão dos sinais em canais com desvanecimento independente pode introduzir um ganho de diversidade se houver redundância entre as duas componentes.

A introdução de redundância no esquema QAM pode ser realizada combinando a escolha do ângulo de referência da constelação de sinais, $\theta$, como mostrado na Figura **??**, com o entrelaçamento independente das componentes [**?**].

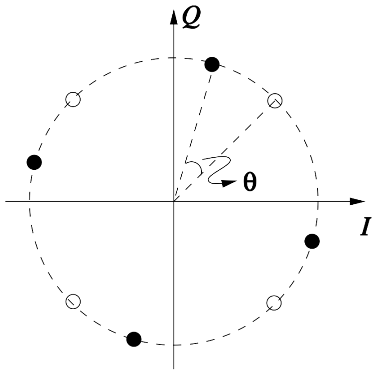


Figura 3.1: Constelação 4-QAM: referência (∘) e girada por um ângulo $\theta$ (•).

No processo de entrelaçamento, as componentes em fase e quadratura de um símbolo transmitido são afetados por desvanecimentos independentes. O resultado dessa técnica é aumentar a robustez do receptor em cenários de propagação com profundo desvanecimento. Para a constelação rotacionada, o sinal transmitido pode ser escrito como

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n p(t - nT_S)\cos(\omega_c t) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_{n-k} p(t - nT_S)\sin(\omega_c t), \tag{3.2}$$

na qual $k$ é um inteiro que representa o atraso (expresso em número de símbolos) introduzido pelo entrelaçamento entre as componentes $I$ e $Q$. Além disso,

$$x_n = a_n \cos\theta - b_n \sin\theta \tag{3.3a}$$

e

$$y_n = a_n \sin\theta + b_n \cos\theta \tag{3.3b}$$

são os novos símbolos QAM[1]. O diagrama de blocos do transmissor que implementa o procedimento é apresentado na Figura **??**.

O ganho de desempenho proporcionado por essa técnica é fundamentado nos picos dos desvanecimentos serem profundos, mas de curta duração, eles podem degradar toda informação (componentes em fase e em quadratura de um símbolo) em uma transmissão convencional. Isto dificilmente ocorre com o uso da constelação rotacionada, pois as componentes de um símbolo são transmitidas em instantes de tempo distintos e existe redundância entre as componentes em fase e quadratura.

[1]É importante observar que, na prática, os *bits* de entrada podem ser mapeados diretamente na constelação girada, sem a necessidade de implementar as fórmulas da Equação **??**.

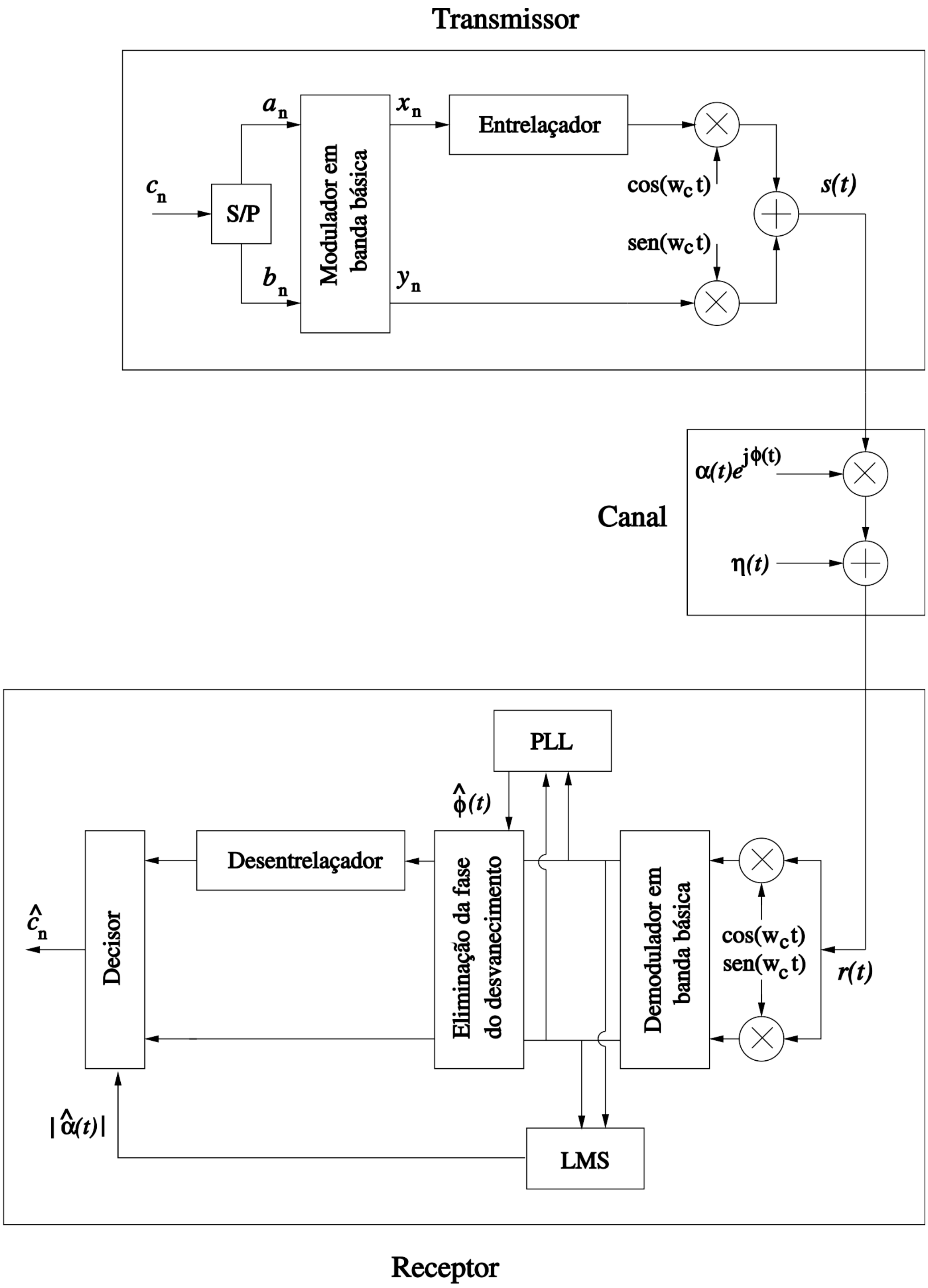


Figura 3.2: Diagrama de blocos do sistema simulado [?].

O ganho de desempenho obtido quando se utiliza constelações rotacionadas depende da escolha do ângulo de rotação. O ângulo de rotação ótimo depende da modulação escolhida e do tipo de canal [?]. Uma característica interessante desse esquema é que o valor de $\theta$ não influencia o desempenho do sistema quando os sinais transmitidos são afetados apenas pelo ruído gaussiano branco (canal AWGN), pois a distância euclidiana entre os símbolos da constelação não depende do ângulo $\theta$ [?]. Por esse motivo uma avaliação do efeito dessa técnica em um canal Rice é interessante, já que o sinal recebido nesse canal resulta de uma propagação com múltiplos percursos e uma componente de visada direta.

Observa-se também que a eficiência espectral do sistema é mantida porque, a cada intervalo de sinalização, dois *bits* são transmitidos independentemente do valor de $\theta$. Além do mais, a complexidade do esquema é relativamente baixa, pois requer apenas a adição de entrelaçadores no transmissor, uma vez que os *bits* de entrada podem ser mapeados diretamente na constelação desejada.

Assumindo que o canal de comunicações móveis é caracterizado por desvanecimento rápido e plano, o sinal na entrada do receptor, denotado por $r(t)$, é dado por

$$r(t) = \alpha(t)s(t) + \eta(t), \tag{3.4}$$

em que $\eta(t)$ representa o ruído aditivo modelado por um processo gaussiano branco, complexo, com média nula e variância $N_0/2$ por dimensão. Além disso, o fator multiplicativo $\alpha(t)$ é modelado por um processo gaussiano complexo estacionário em sentido amplo com densidade espectral de potência (DEP) dada por

$$G(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-(f/f_D)^2}}, & \text{se } |f| < f_D \\ 0, & \text{se } |f| \geq f_D, \end{cases} \tag{3.5}$$

em que $f_D$ é o máxima frequência Doppler [**?**].

# Capítulo 4

# Canal de Comunicação com Desvanecimento Rice

Em comunicações móveis terrestres o canal de comunicações é constituído por todo o meio físico existente entre o transmissor e o receptor [**?**]. Os obstáculos, ora presentes, ora ausentes, juntamente com a mobilidade do receptor, fazem com que existam vários modelos de canais variantes no tempo.

Quando diferentes componentes de onda incidem sobre o móvel com amplitudes aproximadamente iguais e ângulos de chegadas uniformemente distribuídos (modelo de espalhamento de Clarke, Apêndice **??**) devido ao espalhamento sofrido pelo sinal na vizinhança do móvel, o sinal no receptor tem uma envoltória com distribuição Rayleigh.

Porém, se houver uma componente incidindo sobre o móvel, diretamente ou por reflexão, com uma potência maior que as demais, então o sinal no receptor tem uma envoltória com distribuição Rice. A componente com potência predominante recebe o nome da componente direta ou componente especular, ou ainda componente LOS [**?**, **?**]. Essa situação de propagação tem sido comumente observada em ambiente microcelular [**?**, **?**], podendo ocorrer em macrocélulas quando houver linha de visada na transmissão, em canais de comunicação móvel via satélite, entre outros [**?**].

## 4.1 Modelagem Matemática

A componente especular pode ser modelada matematicamente como uma das inúmeras cópias do sinal que incidem sobre o móvel no modelo de Clarke e Jakes, porém com amplitude, fase e frequência Doppler determinísticas, dada por [**?**]

$$r_0 = Re\{T_0(t)e^{jw_c t}\} = A_0 \cos(w_c t + w_0 t + \phi_0) \tag{4.1}$$

em que $w_0 = 2\pi f_m cos\alpha_0$ é a frequência Doppler (rad/s) da componente especular, $\alpha_0$ o ângulo de azimute, $\phi_0$ o ângulo de fase inicial e

$$T_0(t) = m_R(t) + jm_I(t) = A_0 e^{j(w_0 t+\phi_0)} \ ,$$

$$m_R(t) = A_0 \cos(w_0 t + \phi_0) \ \text{ e } \ m_I(t) = A_0 \sin(w_0 t + \phi_0)$$

e

$$A_0^2 = m_R^2 + m_I^2.$$

Como o sinal recebido é formado pela soma das componente procedentes do espalhamento na vizinhança do móvel e a componente especular, os coeficientes de transmissão podem ser modelados por

$$u(t) = A_0 e^{j(w_0 t+\phi_0)} + \sum_{n=1}^{M} A_n e^{j(w_n t+\phi_n)} = T_0(t) + c(t), \tag{4.2}$$

com $c(t)$ tendo as propriedades estatísticas dadas em [**?**]. O coeficiente $u(t)$ é um processo aleatório Gaussiano complexo com valor médio $T_0(t)$. Esse processo não é estacionário nem mesmo no sentido amplo, já que seu valor médio é uma função do tempo.

O valor médio quadrático de $u(t)$ é dado por

$$b_R = E\{u(t)u^*(t)\} = E\{(T_0(t) + c(t))(T_0^*(t) + c^*(t))\} \ ,$$

$$b_R = |T_0(t)|^2 + E\{|c(t)|^2\} \ ,$$

$$b_R = A_0^2 + 2\sigma^2. \tag{4.3}$$

A potência da componente especular é determinado por $A_0^2$ e a potência das componentes espalhadas é dada por $2\sigma^2$. A razão entre ambas é o fator $K$ ou fator de Rice [**?**]

$$K = \frac{A_0^2}{2\sigma^2}. \tag{4.4}$$

Considerando a independência entre as partes real e imaginária de $c(t)$, pode-se escrever a função densidade de probabilidade conjunta de $u(t)$, como

$$f_u(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{(x-m_R(t))^2+(y+m_I(t))^2}{\sigma^2}\right),$$
$$f_u(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+A_0^2-2(xm_R(t)+ym_I(t))}{\sigma^2}\right), \tag{4.5}$$

transformando $f_u(x,y)$ para coordenadas polares $f_u(r,\theta)$, com $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, tem-se

$$f_u(r,\theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2+A_0^2-2rA_0\cos(w_0t+\phi_0-\theta)}{\sigma^2}\right), (r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi), \tag{4.6}$$

desta forma, a função de probabilidade do módulo de $u(t)$ é dada por

$$f_{|u|}(r) = \int_0^{2\pi} f_u(r,\theta)d\theta,$$

$$f_{|u|}(r) = \frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2+A_0^2}{\sigma^2}\right)\int_0^{2\pi}\exp\left(\frac{2rA_0\cos(w_0t+\phi_0-\theta)}{\sigma^2}\right)d\theta. \tag{4.7}$$

Note que o integrando da equação **??** é uma função periódica em $\theta$ com período $2\pi$. Como consequência, o termo $(w_0t+\phi_0)$ não tem influência sobre o resultado da integral, em que pode ser expressa pela função de Bessel modificada de ordem zero

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(\alpha\cos\varphi)d\varphi = I_0(\alpha), \tag{4.8}$$

e a fdp resulta em

$$f_{|u|}(r) = \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2+A_0^2}{\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{rA_0}{\sigma^2}\right), r \geq 0, \tag{4.9}$$

que é a distribuição de Rice.

Rescrevendo $f_{|u|}(r)$ como função do valor médio quadrático $b_R$ e o fator $K$, tem-se

$$f_{|u|}(r) = \frac{2r(K+1)}{b_R}\exp\left(-K-\frac{r^2(K+1)}{b_R}\right)I_0\left(2r\sqrt{\frac{K(K+1)}{b_R}}\right), r \geq 0, \tag{4.10}$$

A Figura **??** ilustra $f_{|u|}(r)$ para alguns valores de $K$. Para $K=0$, tem-se uma curva Rayleigh. À medida que $K$ aumenta, a curva se aproxima de uma gaussiana. Nesse caso há uma menor ocorrência de valores de $r$ próximos a zero, indicando que a frequência com que os desvanecimentos profundos ocorrem é tão menor quanto maior for a potência da componente especular.

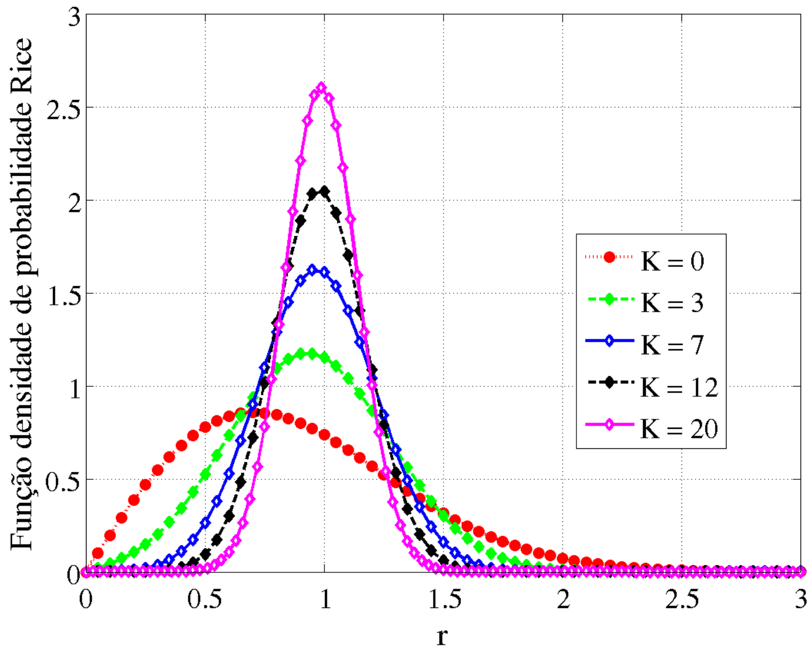


Figura 4.1: Função densidade de probabilidade de Rice para alguns valores de $K$, com $b_R = 1$.

## 4.2 Modelagem Computacional

Para gerar numericamente os coeficientes do desvanecimento Rice (dados pela Equação **??**) deve-se somar uma componente especular aos coeficientes de desvanecimento Rayleigh. Assim, os coeficientes discretos de desvanecimento Rice podem ser dados por

$$\widetilde{u}[n] = T_0(nT_s) + \widetilde{c}[n] = A_0 e^{j(w_0 n T_s + \phi_0)} + \widetilde{c}[n]. \tag{4.11}$$

Além dos parâmetros necessários para gerar $\widetilde{c}[n]$ (coeficientes do desvanecimento Rice), é necessário conhecer os seguintes parâmetros:

- $K$: fator de Rice que caracteriza o canal a ser simulado;
- $b_R$: valor médio quadrático da componente multipercurso Rice;
- $\phi_0$: ângulo de fase da componente especular;
- $w_0$: deslocamento Doppler da componente especular.

Conhecendo os parâmetros $K$ e $b_R$ é possível obter $A_0$ e $\sigma^2$ a partir das Equações **??** e **??** [**?**]:

$$A_0 = \sqrt{\frac{K}{K+1}b_R} \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \frac{1}{2(1+K)}b_R. \tag{4.12}$$

A partir da Equação **??** são obtidos os fatores do processo gaussiano complexo, dado por $\alpha = X + jY$, em que as componentes real e imaginária apresentam média ($\mu$) e desvio padrão ($\sigma$), isto é, $X, Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, com média e desvio padrão dado por [**?**, **?**]

$$\mu = \sqrt{\frac{K}{2(K+1)}}, \tag{4.13}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2(K+1)}}. \tag{4.14}$$

## 4.3 Estimação do fator $K$

A estimativa do fator $K$ de Rice tem sido amplamente estudada. Em [**?**] são mostradas várias formas de se realizar a estimação desse fator, entre elas se destacam os métodos que utilizam a fdp de segunda e quarta ordem dos momentos.

Um forma de realizar a estimação usando os momentos pode ser visto em [**?**], na qual foi definido $\gamma = V[R^2]/(E[R^2])^2$, com $V[.]$ denotando a variância. Com o uso de $\gamma$ o $K$ pode ser expresso por

$$K = \frac{\sqrt{1-\gamma}}{1-\sqrt{1-\gamma}}. \tag{4.15}$$

Uma outra forma de estimar o valor de $K$ é mostrado em [**?**]. Essa estimação se baseia nas seguintes propriedades do fator $K$:

1. A uma determinada distância, é possível supor que a força da componente de dispersão varia muito menos do que a componente fixa, que é dominada por radiação proveniente da direção da estação de base e que é fortemente afetadas por locais de sombra ao longo dessa direção. Assim, é esperado que o valor de $K$ tenha estatísticas lognormal em vários locais, com um desvio padrão comparável com o relacionado com o desvanecimento provocado pela sombra [**?**].

2. Por definição, os terminais remotos em ambientes de macro-célula geralmente encontram-se na região de sombra, bloqueando a linha de visada para a estação base. Com o aumento da altura da antena do terminal, o ângulo de difração diminui, e a força da componente fixa aumenta. Pode-se supor que a componente de dispersão, que é o resultado da reflexão e da dispersão, varia pouco. Assim, é esperado que o $K$ aumente com a altura do terminal.

3. Como as componentes espalhadas vêm de todas as direções, há redução no sinal de dispersão por conta da diminuição da largura do feixe da antena receptora. Assim, espera-se que $K$ aumente com a diminuição da largura de feixe da antena.

4. Em [**?**] é mostrado que a velocidade média do vento acima do nível do topo das árvores não varia muito ao longo de uma distância de vários quilômetros. Assim, espera-se que os eventos de desvanecimento associados a folhagem (*windblown*) devem ser relacionados com os *links* dentro de uma célula típica.

A partir dessas propriedades, e do modelo estatístico de primeira ordem para $K$, é possível chegar à seguinte equação [**?**]

$$K \cong F_s F_h F_b K_o d^{\gamma} (d \text{ em km}), \tag{4.16}$$

em que os fatores são definidos a seguir.

1. $F_s$ é o fator da temporada

$$F_s = \begin{cases} 1.0, & \text{Verão (folhas)}, \\ 2.5, & \text{Inverno (sem folhas)}. \end{cases} \tag{4.17}$$

2. $F_h$ é o fator da altura da antena

$$F_h = (h/3)^{0.46} \quad (h \text{ em metros}). \tag{4.18}$$

3. $F_b$ é o fator da largura do feixe da antena

$$F_b = (b/17)^{-0.62} \quad (b \text{ em graus } (^\circ)). \tag{4.19}$$

$K_o$ e $\gamma$ são contantes de otimização encontradas por regressão [**?**].

$$Y = K/(F_s F_h F_b) \cong K_o d^{\gamma} \tag{4.20}$$

Para cada $K$ calculado na base de dados, há uma estação, altura, largura de feixe e distância associados e, portanto, um valor de $Y$ pode ser calculado e combinado com $d$. Pode-se, então, realizar um ajuste de regressão entre $Y$ e $d$ no banco de dados.

A referência [**?**] apresenta um banco de dados que abrange duas temporadas, verão (folhas) e inverno (sem folhas), duas alturas de antena (3 e 10m), e três larguras de feixe das antenas (17°, 30°, e 65°), para um total de 12 combinações. Para cada conjunto de parâmetros (altura, temporada e largura de feixe), foi calculado o $K$ para várias frequências e locais. Os valores encontrados foram arredondados e podem ser vistos na Tabela **??**.

Tabela 4.1: Fator de $K$ médio [**?**].

| **Largura de feixe da antena** | **Verão (Folhas)** | | **Inverno (Sem Folhas)** | |
|---|---|---|---|---|
| | $h = 3$m | $h = 10$m | $h = 3$m | $h = 10$m |
| 17° | 6,0 dB | 8,0 dB | 10,0 dB | 12,5 dB |
| 30° | 4,5 dB | 7,5 dB | 9,0 dB | 11,0 dB |
| 65° | 2,5 dB | 5,0 dB | 6,0 dB | 8,5 dB |

## 4.4 Medições Experimentais do Valor de $K$

O fator $K$ tem sido determinado experimentalmente por meio de medidas da resposta impulsiva do canal. Em [**?**], medidas foram coletadas na cidade de Ottawa, Canadá, com frequência de 900 MHz, para um raio de até 30 km, com antena da estação base a 33,5 metros de altura. Quatro tipos de ambientes foram considerados: área aberta, suburbana, urbana com baixa densidade e urbana com média densidade.

Nos ambientes em questão, o modelo de canal Rice se mostrou mais apropriado para descrever estatisticamente os dados coletados, indicando a presença de uma componente especular entre o transmissor e o receptor. A Tabela **??** reproduz alguns dos resultados obtidos em [**?**], em que foram utilizados para determinar os valores de $K$.

Tabela 4.2: Parâmetros estimados para a distribuição de Rice [**?**].

| **Ambiente** | $A_0$ | $\sigma$ | $K$ **(dB)** |
|---|---|---|---|
| Área aberta | 0,9615 | 0,26910 | 8,0504 |
| Suburbana | 0,9514 | 0,29960 | 7,0261 |
| Urbana baixa densidade | 0,9256 | 0,36167 | 5,1519 |
| Urbana média densidade | 0,9022 | 0,40555 | 3,9349 |

# Referências Bibliográficas

# Apêndice A

# Modelo de Propagação por Espalhamento Clarke

O modelo matemático de propagação por espalhamento de Clarke tem sido amplamente aceito no meio científico. É capaz de representar matematicamente os efeitos que um sinal sofre ao propagar-se por um canal de comunicação com desvanecimento.

No modelo bidimensional de propagação por espalhamento de R. H. Clarke, o sinal recebido em qualquer ponto no espaço é composto pela superposição de M ondas planas [**?**] provenientes do espalhamento sofrido pelo sinal na vizinhança do receptor. Seja a $n$-ésima onda incidindo sobre o receptor com amplitude $A_n$ e com fase $\phi_n$, então o sinal recebido total (em banda base) é dado por [**?**]

$$c = E_0 \sum_{n=1}^{M} A_n e^{j\phi_n} \tag{A.1}$$

em que $E_0$ é a amplitude do sinal enviado. As fases $\phi_n$ são uniformemente distribuídas de 0 a $2\pi$ e são independentes entre si e dos ângulos de chegada $\alpha_n$. Teoricamente, infinitas ondas ($M \to \infty$) chegam ao receptor num determinado ponto no espaço.

O movimento do móvel introduz um deslocamento Doppler na $n$-ésima componente de onda de acordo com o seu ângulo de incidência, ou seja,

$$w_n = 2\pi f_m \cos\alpha_n, \tag{A.2}$$

na qual o máximo deslocamento Doppler é dado por

$$f_m = \frac{v}{\lambda}. \tag{A.3}$$

A partir da equação **??**, o sinal recebido total pode agora ser rescrito como uma função do tempo dada por

$$c = E_0 \sum_{n=1}^{M} A_n e^{j(w_n + \phi_n)}, \tag{A.4}$$

que representa o modelo matemático de propagação por espalhamento de Clarke. No modelo original $A_n$ foi considerada constante e igual para todas as componentes de onda.

Para chegar ao mesmo resultado, em [**?**] Jakes considerou que o sinal transmitido é dado por $E_0 \cos(w_c t)$ e admitiu que incidiu $M$ cópias do sinal sobre o receptor móvel. Então o sinal total recebido pode ser escrito por

$$r(t) = E_0 \sum n = 1 M A_n \cos(w_c t + w_n t + \phi_n) \tag{A.5}$$

Note que $r(t)$ é caracterizado por três variáveis aleatórias: $A_n$ , $\phi_n$ e $\alpha_n$ , as quais são assumidas ser independentes pela própria natureza física do fenômeno de desvanecimento [**?**].

## A.1 O espectro de Potência do Canal no Modelo de Clarke

A abordagem clássica para o cálculo da DEP em canal com desvanecimento foi introduzida primeiramente por Jakes em 1974 [**?**]. Porém, a equação da DEP foi primeiramente apresentada por Clarke [**?**] (1968), a qual foi obtida através da transformada de Fourier da função de autocorrelação do processo aleatório proveniente do modelo de propagação por espalhamento. A DEP é dado por

$$S_p(f) = \frac{1}{\pi f_m \sqrt{1 - \left(\frac{f - f_c}{f_m}\right)^2}}, \quad |f - f_c| \leq f_m, \tag{A.6}$$

e ilustrado pela figura