Formulações para o Problema do Caixeiro Viajante

Prof. Alexandre Salles da Cunha

Abril de 2024

1 Introdução

Vamos apresentar algumas formulações de Programação Linear Inteira para o clássico Problema do Caixeiro Viajante, definido a seguir. Dado um grafo não direcionado $G = (V, E)$, com pesos ou distâncias $\{d_{ij} : \{i, j\} \in E\}$ associadas às arestas de G, deseja-se encontrar um circuito Hamiltoniano de mínimo peso de G. Um circuito ou ciclo Hamiltoniano é um subgrafo conexo de G, com exatamente $n = |V|$ arestas. A analogia com o Caixeiro Viajante é simples. Os vértices representam cidades a serem visitadas. Partindo de um vértice qualquer previamente escolhido, que recebe o nome de depósito, por exemplo o vértice $1 \in V$, o caixeiro deve encontrar um circuito que visite todos os vértices e que retorne ao vértice de origem, percorrendo a mínima distância total.

Nestas notas, vamos considerar aqui a versão simétrica do problema, em que ir de i até j implica em percorrer a mesma distância percorrida em sentido oposto, de j para i. Podemos admitir que o grafo G é completo, mas nossa notaação fará referência explícita aos pares de cidades que podem ser visitados consecutivamente. As modificações necessárias para tratar o caso em que as distâncias não são simétricas são mínimas.

As formulações que apresentaremos dividem-se em duas grandes categorias:

- Formulações compactas, isto é, em que o número de variáveis de decisão e restrições são limitadas por uma função polinomial das dimensões da entrada do problema, isto é, em $|V|, |E|$.
- Formulações não compactas, que envolvem exponencialmente muitas restrições e/ou variáveis de decisão.

2 Formulações compactas

2.1 Formulação de Miller-Tucker-Zemlin

Assim como outras formulações que iremos discutir aqui, a formulação de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) [Miller et al., 1960] trabalha na versão orientada do problema, em que cada aresta $e = \{i, j\}$ de E dá origem a dois arcos distintos (i, j) e (j, i), como distâncias iguais, $d_{ij} = d_{ji}$. Vamos considerar que $D = (V, A)$ seja o digrafo (grafo direcionado) obtido à partir da duplicação das arestas de G em dois arcos.

A formulação MTZ emprega dois conjuntos de variáveis:

- $\mathbf{x} = \{x_{ij} \in \{0,1\} : (i,j) \in A\}$ para indicar se o arco (i,j) é incluído no circuito, isto é, se o vértice j é visitado imediatamente após a visita de i. Caso seja visitado, $x_{ij} = 1$, caso contrário, $x_{ij} = 0$.
- $\mathbf{u} = \{u_i \geq 0 : i \in V\}$. A variável u_i deve indicar quantos arcos foram percorridos até se visitar o vértice i, partindo-se do vértice de origem 1. Para tanto, vamos impor que $u_1 = 0$ para o vértice 1, arbitrariamente escolhido como o início do circuito.

De acordo com as definições acima, a variável u_j para o último vértice visitado no circuito, aquele vértice a partir do qual se retorna para o depósito, deve ser $u_j = n - 1$, pois foram percorridos exatamente $n - 1$ arcos do início em 1 até j.

Para a apresentação desta e de outras formulações baseadas no digrafo D, vamos assumir a seguinte notação. Dado um subconjunto de vértices $S \subseteq V$, definimos dois subconjuntos de arcos, a saber $\delta^+(S) = \{(i,j) \in A : i \in S, j \notin S\}$ e $\delta^-(S) = \{(i,j) \in A : i \notin S, j \in S\}$. Dado $i \in V$, vamos representar os arcos de D que chegam e que partem em/de i como $\delta^-(i)$ e $\delta^+(i)$, respectivamente.

A formulação é a seguinte:

$$\min \left\{ \sum_{(i,j)\in A} d_{ij} x_{ij} : (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathcal{P}_{MTZ} \cap (\{0,1\}^{2|E|} \times \mathbb{R}^n) \right\}, \tag{1}$$

onde $\mathcal{P}_{MTZ}$ corresponde à seguinte região poliédrica:

$$\sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij} = 1 \qquad i \in V \tag{2}$$

$$\sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ji} = 1 \qquad i \in V \tag{3}$$

$$u_j \geq u_i + (n-1)x_{ij} - (n-2) \qquad (i,j) \in A, i,j \neq 1 \tag{4}$$

$$u_1 = 0 \tag{5}$$

$$u_i \geq 0 \qquad i \in V \tag{6}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i,j) \in A \tag{7}$$

As restrições (2) e (3) definem uma *atribuição* ou *assignment* para D, garantindo que exatamente um arco saia de i e chegue em i, para todo vértice i de D. Por si só, estas restrições não garantem que as soluções do modelo serão conectadas, ou livre de subcircuitos nesse caso.

As restrições (4) são chamadas de *restrições de eliminação de subcircuitos* de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ). Em conjunto com as de atribuição e com a natureza binária das variáveis $\mathbf{x}$, elas garantem que os vetores $\mathbf{x}$ escolhidos não induzam um subcircuito de D, isto é, um circuito que não visite todos os vértices de V. Veja que as restrições (4) não são impostas para arcos incidentes ao depósito. Veja também que as restrições MTZ garantem a seguinte relação disjuntiva:

$$x_{ij} = 1 \Rightarrow u_j \geq u_i + 1.$$

Por outro lado, quando $x_{ij} = 0$, as restrições são trivialmente satisfeitas, uma vez que nesse caso se reduz à $u_j - u_i \geq -n + 2$. Esta última condição é de fato trivialmente satisfeita pois se o vértice j for o primeiro a ser visitado após o ponto de partida e i for o último, temos $u_j = 1, u_i = n - 1$ e a restrição $u_j - u_i = 1 - (n - 1) = -n + 2$. Em qualquer outro caso, a desigualdade é folgada.

Assim como em qualquer formulação de Programação Inteira para um Problema de Otimização Combinatória, precisamos mostrar que o conjunto de soluções estabelecido como de viabilidade define uma formulação para o problema. Vamos então demonstrar que $\mathcal{P}$ define uma formulação para o Problema do Caixeiro Viajante.

Teorema 2.1 *O modelo* (1) *define uma formulação para o Problema do Caixeiro Viajante. Isto é, todo vetor* $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathcal{P}_{MTZ} \cap (\{0,1\}^{2|E|} \times \mathbb{R}^n)$ *é associado a um circuito Hamiltoniano de* G *e, por outro lado, todo circuito Hamiltoniano de* G *(ou de* D*) possui um correspondente vetor* $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ *tal que* $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathcal{P}_{MTZ} \cap (\{0,1\}^{2|E|} \times \mathbb{R}^n)$.

Prova 2.2

- *Primeira parte do se e somente se.*
  Vamos supor, por absurdo, que exista $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathcal{P}_{MTZ} \cap (\{0,1\}^{2|E|} \times \mathbb{R}^n)$ *que possua um subcircuito de comprimento* k *(ou seja que envolve exatamente* $k < n$ *arcos) e que não visite o vértice de partida. Vamos assumir que este subcircuito seja percorrido visitando-se os vértices* $i_1, i_2, \ldots, i_k$*, nesta ordem. Então por* (4) *temos:*

$$
\begin{aligned}
u_{i_2} &\geq u_{i_1} + 1 \\
u_{i_3} &\geq u_{i_2} + 1 \\
\vdots \; &\; \vdots \\
u_{i_k} &\geq u_{i_{k-1}} + 1 \\
u_{i_1} &\geq u_{i_k} + 1
\end{aligned}
$$

  Observe que temos uma série telescópica de forma que, somando as parcelas à direita e à esquerda das desigualdades, chegamos à conclusão que $0 \geq k$*, condição absurda, que mostra não poder existir um subcircuito.*

- *Segunda parte, a volta do se e somente se. Vamos tomar um circuito Hamiltoniano qualquer e verificar que existe uma atribuição de valores para* $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ *que satisfaça às restrições do modelo. Para tanto, basta atribuir* $x_{ij} = 1$ *para todo par de vértices* i, j *visitados de forma consecutiva, e* $x_{pq} = 0$ *para os pares não visitados consecutivamente. Partindo de* $u_1 = 0$*, basta atribuir valores uma unidade maior que o valor atribuído ao antecessor no caminho, para as demais variáveis* u.

2.2 Fortalecendo a formulação MTZ

É sempre desejável tentarmos fortalecer uma formulação para um Problema de Programação Inteira. Por fortalecer, queremos dizer tornar o poliedro que define a formulação (no caso acima, o poliedro $\mathcal{P}_{MTZ}$) o mais próximo possível da envoltória convexa das soluções viáveis do problema. Esta envoltória consiste no menor conjunto convexo que contém todas as soluções do problema. Como o conjunto de soluções do TSP é discreto, sua envoltória convexa é um conjunto poliedral limitado, isto é um politopo. Idealmente, se a formulação coincidir com a envoltória convexa, podemos substituir as restrições que garantem a natureza discreta das variáveis por sua versão contínua e tratar o Problema de Programação Inteira como um Problema de Programação Linear, para o qual dispomos de algoritmos eficientes (no sentido estrito de Teoria da Computação) e eficazes na prática (embora não necessariamente eficientes à luz da Teoria), ou seja, muito bons em termos práticos.

A maneira usual de fortalecer uma formulação consiste em encontrar desigualdades lineares válidas para as soluções inteiras do problema, porém violadas para as soluções das relaxações lineares dos modelos que temos em mãos. Na prática, quando fortalecemos uma formulação esperamos que o valor da relaxação linear do modelo se torne mais próximo do valor da função objetivo ótima do problema. Quando assim procedemos, dizemos que estamos fazendo um *estudo poliedral* do problema.

No caso específico da formulação MTZ para o TSP, sua relaxação linear é:

$$\min \left\{ \sum_{(i,j)\in A} d_{ij}x_{ij} : (\mathbf{x},\mathbf{u}) \in \mathcal{P}_{MTZ} \right\}. \tag{8}$$

Veja que o problema (8) é um Problema de Programação Linear, enquanto que (1) é um Problema de Programação Linear Inteira. Um conjunto de desigualdades válidas para o problema são as desigualdades de Miller-Tucker-Zemlin fortalecidas, proposas por [Desrochers and Laporte, 1991].

As desigualdades de Miller-Tucker-Zemlin fortalecidas (SMTZ) substituem as restrições MTZ originais (4) e são escritas como:

$$u_j \geq u_i + (n-1)x_{ij} + (n-3)x_{ji} - (n-2), \forall (i,j) \in A, i,j \neq 1. \tag{9}$$

Por um lado, note que a desigualdade (9) é válida pois em qualquer solução do TSP teremos $x_{ij} + x_{ji} \leq 1$. Se $x_{ji} = 1$ então $x_{ij} = 0$ e a desigualdade estabelece que $u_j \geq u_i - 1$. Esta última condição é verificada, pois se $x_{ji} = 1$, j é visitado imediatamente antes de i no ciclo Hamiltoniano e portanto $u_j = u_i - 1$.

Por outro lado, observe que para qualquer vetor $(\mathbf{x},\mathbf{u}) \in [0,1]^{2|E|+n}$ não há como o lado direito da desigualdade (9) ser menor do que o lado direito da desigualdade MTZ *fraca* (4). Isto é verdade pois (9) inclui o termo não negativo $(n-3)x_{ji}$. Neste caso, dizemos que desigualdade (9) domina a versão (4).

Vamos representar por $\mathcal{P}^+_{MTZ}$ o poliedro obtido ao se substituir (4) por (9) na definição de $\mathcal{P}_{MTZ}$. Algebricamente, temos que $P^+_{MTZ} \subset P_{MTZ}$.

Referências

[Desrochers and Laporte, 1991] Desrochers, M. and Laporte, G. (1991). "Improvements and Extensions to the Miller-Tucker-Zemlin Subtour Elimination Constraints". *Operations Research Letters*, 10:27–36.

[Miller et al., 1960] Miller, C. E., Tucker, A. W., and Zemlin, R. A. (1960). "Integer programming formulations and travelling salesman problems". *Journal of the Association of Computing Machinery*, 7:326–329.