Cours d'Automatique ELEC4

S. Icart

Table des matières

I Généralités **3**

1 Systèmes multivariables **3**

2 Quelques rappels sur la transformée de Laplace **3**

3 Transfert **4**
3.1 Fonction de transfert (système monovariable) . . . 4
3.2 Matrice de transfert . . . 4

4 Prise en compte des conditions initiales **4**

5 Linéarisation autour d'un point de fonctionnement **5**

II Systèmes linéaires stationnaires **7**

1 Système linéaire stationnaire continu **7**
1.1 Equations d'état . . . 7
1.2 Résolution du système . . . 7
1.3 Calcul d'une exponentielle de matrice . . . 7

2 Lien entre représentation interne et représentation externe **9**

3 Changement de base sur l'état et réalisation **10**

4 Modes d'un système **11**

5 Stabilité **12**
5.1 Rappels sur la stabilité d'une représentation externe . . . 12
5.2 Stabilité au sens de Lyapounov . . . 12
5.3 Stabilité asymptotique . . . 13

6 Système discret linéaire stationnaire **13**
6.1 Résolution du système . . . 13
6.2 Calcul d'une puissance de matrice . . . 13
6.3 Stabilité . . . 14

7 Discrétisation d'un système continu **14**

III Implantation d'une loi de commande par retour d'état **15**

1 Commandabilité **15**
1.1 Définition 15
1.2 Critère de commandabilité 15
1.3 Forme canonique commandable 15
1.4 Propriétés 16

2 Observabilité **16**
2.1 Définition 16
2.2 Critère d'observabilité 17
2.3 Dualité observabilité–commandabilité 17

3 Minimalité **17**

4 Décomposition canonique dans l'espace d'état **17**
4.1 Sous-espace de commandabilité 17
4.2 Décomposition d'un système non commandable 17
4.3 Sous-espace non observable 18
4.4 Décomposition d'un système non observable 18

5 Commande par retour d'état **18**

6 Observateur **19**

7 Association d'un observateur et d'une commande par retour d'état **20**

Première partie
Généralités

1 Systèmes multivariables

Dans ce cours, on s'intéressera à des systèmes multivariables, i.e des systèmes comportant plusieurs entrées (actionneurs) et plusieurs sorties (capteurs). Les signaux d'entrée et de sortie sont alors représentés par des vecteurs notés respectivement $\underline{u}(t)$ et $\underline{y}(t)$ en temps continu et $\underline{u}_k$ et $\underline{y}_k$ en temps discret.

- m entrées $\underline{u}(t)$ est un vecteur $\in \mathbb{R}^m$
- p sorties $\underline{y}(t)$ est un vecteur $\in \mathbb{R}^p$

On supposera toujours vérifié le **Principe de causalité** : la sortie ne dépend pas des valeurs futures de l'entrée.

$$\underline{y}(t) = h(\underline{u}_{[t_0,t]}, t) \quad t_0 \leq t$$

2 Quelques rappels sur la transformée de Laplace

- Définition :
  Soit $f(t)$ est une fonction causale (i.e nulle pour t négatif), alors, on définit la transformée de Laplace de $f(t)$ par :

  $$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

  (relation biunivoque entre $f(t)$ et $F(p)$).
- Théorème de la dérivée :

  $$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p\mathcal{L}(f(t)) - f(0^+)$$

- Théorème du produit :

  $$\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(f \star g(t))$$

  où $\star$ est le produit de convolution.
- Transformée de Laplace d'un vecteur :

  $$\text{si } \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ alors } \mathcal{L}(\underline{x}(t)) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(x_1(t)) \\ \vdots \\ \mathcal{L}(x_n(t)) \end{pmatrix}$$

3 Transfert

3.1 Fonction de transfert (système monovariable)

- Si le système est linéaire stationnaire continu i.e si les signaux d'entrée et de sortie sont reliés par une équation différentielle à coefficients constants,
- Si les conditions initiales sont nulles,

alors par le théorème de la dérivée, on obtient :

$$Y(p) = G(p)U(p)$$

avec $G(p)$ fraction rationnelle en p.

$G(p)$ est appelée fonction de transfert du système.

Pour obtenir la réponse du système à une entrée quelconque, il suffit d'utiliser la transformée de Laplace inverse :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(p)) = g \star u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)u(t-\tau)\ d\tau$$

où $g(t)$ est la réponse impulsionnelle du système (transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert).
D'après le principe de causalité, on obtient donc :

$$y(t) = g \star u(t) = \int_{0}^{t} g(\tau)u(t-\tau)\ d\tau$$

La fonction de transfert (ou de manière équivalente la réponse impulsionnelle du système) est une repésentation entrée/sortie du système, appelée aussi représentation externe.

3.2 Matrice de transfert

Dans le cas d'un système linéaire sationnaire multivariable, si les conditions initiales sont nulles, on obtient :

$$\underline{Y}(p) = G(p)\underline{U}(p)$$

où $\underline{U}(p)$ et $\underline{Y}(p)$ sont les transformées de Laplace des signaux (vectoriels) d'entrée et de sortie et où $G(p)$ est cette fois une matrice rationnelle $(p \times m)$, appelée matrice de transfert.

4 Prise en compte des conditions initiales

Si les conditions initiales sont non nulles, alors, une représentation externe ne suffit plus. L'étude du comportement du système nécessite une représentation interne.

On écrit le système dynamique sous la forme :

$$(\Sigma) \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\underline{x}}(t) & = & f(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t), \quad \underline{x}_0 = \underline{x}(t_0) \\ \underline{y}(t) & = & \rho(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) \end{array} \right.$$

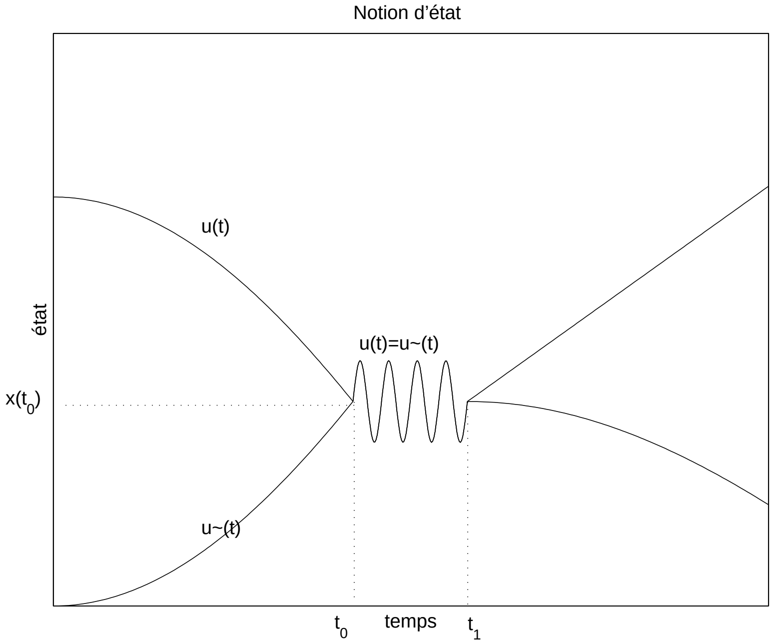
Si les conditions initiales sont en nombre suffisant, et si les fonctions f et g sont suffisamment régulières, le système (Σ) admet une solution unique. Le vecteur $\underline{x}(t)$ est alors appelé vecteur d'état du système (vecteur $\in I\!\!R^n$) et (Σ) est une représentation interne du système.

Propriété :

Tout le passé est résumé dans l'état, soit :

$$\underline{x}(t) = \phi(t_0, t, \underline{x}(t_0), u_{[t_0,t]}) = \phi(t_1, t, \underline{x}(t_1), u_{[t_1,t]}) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

$$\left.\begin{array}{l} u(t) = \tilde{u}(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1] \\ \underline{x}(t_0) = \underline{\tilde{x}}(t_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \underline{x}(t) = \underline{\tilde{x}}(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$



5 Linéarisation autour d'un point de fonctionnement

On linéarise autour d'un point de fonctionnement (trajectoire admissible) $(\underline{x}^*, \underline{y}^*, \underline{u}^*)$ en faisant le changement de variables :

$$\begin{cases} \underline{\tilde{x}}(t) = \underline{x}(t) - \underline{x}^* \\ \underline{\tilde{y}}(t) = \underline{y}(t) - \underline{y}^* \\ \underline{\tilde{u}}(t) = \underline{u}(t) - \underline{u}^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}}(t) = f(\underline{x}, \underline{u}, t) \\ \underline{y}(t) = \rho(\underline{x}, \underline{u}, t) \end{cases} \quad \text{devient} \quad \begin{cases} \underline{\dot{\tilde{x}}}(t) = f(\underline{\tilde{x}} + \underline{x}^*, \underline{\tilde{u}} + \underline{u}^*, t) \\ \underline{y}(t) = \rho(\underline{\tilde{x}} + \underline{x}^*, \underline{\tilde{u}} + \underline{u}^*, t) - \underline{y}^* \end{cases}$$

Examinons le cas monovariable et où l'état n'a qu'une composante. On fait alors un développement limité au premier ordre de f et ρ :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f(x^*, u^*, t) + \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}(x^*, u^*, t)\tilde{x} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x^*, u^*, t)\tilde{u}$$

soit, $\dot{\tilde{x}}(t) = f(x^*, u^*, t) + a\tilde{x} + b\tilde{u}$. Si $(x^*, y*)$ est un point d'équilibre, on a $f(x^*, u^*, t) = 0$ De même,

$$\tilde{y}(t) = \rho(x^*, u^*, t) + \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{x}}(x^*, u^*, t)\tilde{x} + \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{u}}(x^*, u^*, t)\tilde{u} - y^*$$

soit $y(t) = c\tilde{x} + d\tilde{u}$.

Dans le cas multivariable stationnaire, on peut montrer que le système linéarisé est

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\underline{x}}(t) & = & A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) & = & C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) \end{array} \right.$$

avec

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*, u^*)\right]_{\substack{i=1 \text{ à } n \\ j=1 \text{ à } n}} \qquad B = \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(x^*, u^*)\right]_{\substack{i=1 \text{ à } n \\ j=1 \text{ à } m}}$$

$$C = \left[\frac{\partial \rho_i}{\partial x_j}(x^*, u^*)\right]_{\substack{i=1 \text{ à } p \\ j=1 \text{ à } n}} \qquad D = \left[\frac{\partial \rho_i}{\partial u_j}(x^*, u^*)\right]_{\substack{i=1 \text{ à } p \\ j=1 \text{ à } m}}$$

Deuxième partie
Systèmes linéaires stationnaires

1 Système linéaire stationnaire continu

1.1 Equations d'état

Dans le cas d'un système linéaire stationnaire continu, la représentation interne est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{\underline{x}}(t) & = & A\underline{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & C\underline{x}(t) + Du(t) \end{array}\right.$$

A, B, C, D étant des matrices constantes.

Remarque : système non linéaire $A(\underline{x}, u)$, ..., non stationnaire $A(t)$, ...
- A matrice d'évolution (ou de dynamique) ($\in \mathbb{R}^{n\times n}$)
- B matrice de commande (ou d'entrée) ($\in \mathbb{R}^{n\times m}$)
- C matrice d'observation (ou de sortie) ($\in \mathbb{R}^{p\times n}$)
- D matrice de transmission directe ($\in \mathbb{R}^{p\times m}$)

On appelle matrice de transition d'état la matrice $\phi(t, t_0)$ telle que la solution du système libre ($u(t) = 0 \forall t$) est $\underline{x}(t) = \phi(t, t_0)\underline{x}_0$.

1.2 Résolution du système

$$\left\{\begin{array}{lccc} \underline{x}(t) & = & e^{A(t-t_0)}\underline{x}_0 & + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ & & \text{réponse} & \text{réponse forcée} \\ & & \text{système libre} & \text{état initial nul} \\ \underline{y}(t) & = & Ce^{A(t-t_0)}\underline{x}_0 & + \displaystyle\int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \end{array}\right.$$

1.3 Calcul d'une exponentielle de matrice

- Développement en série

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \cdots \frac{A^kt^k}{k!} + \cdots$$

(à éviter sauf si A nilpotente ou involutive)
- Transformée de Laplace inverse

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left((pI - A)^{-1}\right)$$

- Changement de base (diagonalisation ou forme de Jordan)
  Soient $\underline{v}_i$ les vecteurs propres de A

$$A\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$$

  – Si A possède n vecteurs propres indépendants, alors A est diagonalisable. Soit T la matrice formée des vecteurs propres et Λ la matrice diagonale ayant les valeurs propres de A sur la diagonale :

$$T = (\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \ \dots \ \mid \underline{v}_n) \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AT &= A\,(\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \ \dots \ \mid \underline{v}_n) \\ &= (\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \ \dots \ \mid \underline{v}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= T\Lambda \end{aligned}$$

  Or il est simple de montrer que $e^{\Lambda t} = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_i t}\right)$ et que

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$$

  – Sinon, A possède des vecteurs propres et des vecteurs propres généralisés. On peut alors mettre A sous forme de Jordan On décompose J en $J = \Lambda + Z$, où Λ est diagonale et Z nilpotente. Λ et Z commutant, on obtient $e^{Jt} = e^{\Lambda t}e^{Zt}$.

multiplicité de λ_i	nb de vect. propres indépendants $n - rg(\lambda I - A)$	Bloc de Jordan
2	1	$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$
	2	$\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$ diagonalisable
3	1	$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$ 1 bloc de dim 3
	2	$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$
	3	$\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$ diagonalisable

2 Lien entre représentation interne et représentation externe

Si les conditions initiales sont nulles, alors en prenant la transformée de Laplace des équations d'état et de sortie, on obtient le matrice de transfert :

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D$$

Le système est strictement propre si $D = 0$ (pas de lien direct entrée/sortie, le système ne laisse pas passer les impulsions), il est juste propre sinon.
Exemple (cf cours) $\rightsquigarrow$ “on ne voit pas tout sur le transfert”.

Réciproquement, comment obtenir une réalisation à partir d'une fonction de transfert ? On étudiera seulement les systèmes monovariables. Notons $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$.

- Si $d^\circ(N(p)) = d^\circ(D(p))$, alors, il existe une partie entière (qui donne la matrice D) d'où, $G(p) = q + \frac{N_1(p)}{D(p)}$ avec $d^\circ(N_1(p)) < d^\circ(D(p))$ (strictement propre).
- Si $N(p)$ scalaire, alors,

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0}$$

On choisit comme variables d'état les dérivées successives de la sortie et on obtient comme réalisation :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

A est sous forme compagne : *Les coefficients a_i sont les coefficients du polynôme caractéristique de A* :

$$det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

- Si $N(p)$ polynomial,

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0}$$

alors, en posant

$$\frac{Z(p)}{U(p)} = \frac{1}{D(p)}$$

et en prenant comme état les dérivées successives de z, on obtient

$$\begin{array}{l} A \text{ et } B \text{ inchangées} \\ C = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0\cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Autres choix possibles. . .

3 Changement de base sur l'état et réalisation

On considère la réalisation d'état suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \underline{\dot{x}}(t) & = & A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \quad \underline{x}_0 = \underline{x}(t_0) \\ \underline{y}(t) & = & C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) \end{array} \right.$$

Comme nous le verrons plus loin, il peut être intéressant de faire des changements de base dans l'espace d'état (afin de "démêler" les équations). Soit P la matrice de changement de base associée et soit $\underline{\tilde{x}}$ les coordonnées du vecteur d'état dans la nouvelle base. On a ainsi $\underline{x} = P\underline{\tilde{x}}$.

Le système d'équations précédent devient donc :

$$\left\{ \begin{array}{lll} P\dot{\underline{\tilde{x}}}(t) & = & AP\underline{\tilde{x}}(t) + B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) & = & CP\underline{\tilde{x}}(t) + D\underline{u}(t) \end{array} \right.$$

ou encore :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\tilde{x}}}(t) &= P^{-1}AP\underline{\tilde{x}}(t) + P^{-1}B\underline{u}(t), \quad \underline{\tilde{x}}_0 = P^{-1}\underline{x}_0 \\ \underline{y}(t) &= CP\underline{\tilde{x}}(t) + D\underline{u}(t) \end{cases}$$

On obtient ainsi une réalisation appelée *réalisation équivalente* où les matrices A, B, C, D sont remplacées respectivement par les matrices $\tilde{A} = P^{-1}AP, \tilde{B} = P^{-1}B, \tilde{C} = CP, \tilde{D} = D$ (il est normal que cette dernière matrice soit inchangée puisque rien n'a été modifié d'un point de vue entrée-sortie).

On vérifiera que la matrice de transfert est inchangée :

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D = \tilde{C}(pI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}$$

4 Modes d'un système

La réponse du système libre $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t)$ est donnée par $\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}_0$.

* Si A est diagonalisable,

- si $\underline{x}_0$ est un vecteur propre de A,

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= e^{At}\underline{x}_0 = (I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \cdots)\underline{v}_i \\ &= (1 + \lambda_i t + \frac{\lambda_i^2 t^2}{2} + \cdots)\underline{v}_i = e^{\lambda_i t}\underline{v}_i \end{aligned}$$

  La trajectoire libre est donc une droite que l'on parcourt plus ou moins vite selon la valeur de λ_i.
  Les couples $(\lambda_i, \underline{v}_i)$ sont appelés modes du sytème (direction et "vitesse" dans cette direction).

- si $\underline{x}_0$ est quelconque
  A étant diagonalisable, on peut décomposer $\underline{x}_0$ sur la base des vecteurs propres :

$$\underline{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$$

  La trajectoire obtenue est donc une combinaison linéaire des trajectoires propres.

* Si A n'est pas diagonalisable,
par exemple, bloc de Jordan

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

- Si $\underline{x}_0$ est un vecteur propre de A.

$$\underline{x}(t) = e^{\lambda t}\underline{x}_0$$

- Si $\underline{x}_0$ est un vecteur propre généralisé
  la trajectoire est une combinaison des $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$, $\frac{t^2}{2}e^{\lambda t}\ldots$

5 Stabilité

5.1 Rappels sur la stabilité d'une représentation externe

La réponse d'un système à une entrée quelconque étant le produit de convolution de la réponse impulsionnelle et de l'entrée, on va s'intéresser à la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert. Soient p_i les **pôles** de $G(p)$:

- si tous les pôles sont simples, on décompose $G(p)$ en éléments simples :

$$\begin{aligned} G(p) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{p-p_i} \\ \mathcal{L}^{-1} \rightsquigarrow \quad g(t) &= \sum_{i=1}^{n} k_i e^{p_i t} \text{ (réponse impulsionnelle)} \end{aligned}$$

- s'il existe des pôles multiples réels :

$$\begin{aligned} G(p) &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=1}^{m_i} \frac{k_{i,l}}{(p-p_i)^l} \\ \mathcal{L}^{-1} \rightsquigarrow \quad g(t) &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=1}^{m_i} k_{i,l} \; t^{l-1} e^{p_i t} \end{aligned}$$

- s'il existe des pôles complexes $p_i = \sigma_i + j\omega_i$, la réponse impulsionnelle fera intervenir $e^{\sigma_i t} \sin \omega_i t \ldots$

Enfin, la réponse à une entrée quelconque étant le produit de convolution de la réponse impulsionnelle et de l'entrée, on obtient le résultat (connu) suivant :

Le système est stable ssi tous les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle négative.

On distingue deux types de stabilité : la stablité au sens de Lyapounov et la stabilité asymptotique que l'on va énoncer dans le cas d'un représentation interne.

5.2 Stabilité au sens de Lyapounov

Un système est stable au sens de Lyapounov si lorsqu'on l'écarte (légèrement) d'un point d'équilibre, il reste au voisinage de ce point :

$$\forall\, \varepsilon \quad \exists\, \delta \text{ tq } ||\underline{x}_0|| \leq \delta \Rightarrow ||\underline{x}(t, \underline{x}_0)|| < \varepsilon$$

Soient λ_i les valeurs propres de la matrice d'évolution A d'une représentation d'état, alors on obtient le résultat suivant :
Le système est stable au sens de Lyapounov ssi $Re(\lambda_i) \leq 0 \ \forall \lambda_i$.

5.3 Stabilité asymptotique

Un système est asymptotiquement stable si lorsqu'on l'écarte (légèrement) d'un point d'équilibre, il y revient :

$$\exists\ \delta \text{ tq } ||\underline{x}_0|| < \delta \quad \Rightarrow \quad \underline{x}(t, \underline{x}_0) \to 0 \text{ quand } t \to \infty$$

soit avec les mêmes notations que précédemment :
Le système est stable au sens de Lyapounov ssi $Re(\lambda_i) < 0\ \forall \lambda_i$.

6 Système discret linéaire stationnaire

Dans le cas d'un système linéaire stationnaire à temps discret , les équations différentielles sont remplacées par des équations récurrentes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \underline{x}_{k+1} & = & \phi\ \underline{x}_k + \Gamma\ u_k\ , \quad \underline{x}_{k_0} = \underline{x}_0 \\ \\ \underline{y}_k & = & H\ \underline{x}_k (+Du_k) \end{array} \right.$$

ϕ, Γ, H étant des matrices constantes.
Remarque : système non linéaire $\phi(\underline{x}, u)$, non stationnaire ϕ_k.

On obtient aisément la relation entre une réalisation discrète et la matrice de transfert du système :

$$G(z) = H(zI - \phi)^{-1}\Gamma + D$$

6.1 Résolution du système

$$\left\{ \begin{array}{lcccc} \underline{x}_{k+1} & = & \phi^{k+1-k_0}\underline{x}_0 & + & \displaystyle\sum_{i=k_0}^{k} \phi^{k-i}\Gamma u_i \\ & & \text{réponse} & & \text{réponse} \\ & & \text{système libre} & & \text{état initial nul} \\ \underline{y}_k & = & H\phi^{k-k_0}\underline{x}_0 & + & \displaystyle\sum_{i=k_0}^{k-1} H\phi^{k-1-i}\Gamma u_i + Du_k \end{array} \right.$$

6.2 Calcul d'une puissance de matrice

- Transformée en z
  Soit $\underline{X}(z) = \mathcal{Z}(\underline{x}_k)$,

  $$\mathcal{Z}(\underline{x}_{k+1}) = z(\underline{X}(z) - \underline{x}_0) \quad \text{(CI non nulles)}$$

  Or, $z(\underline{X}(z) - \underline{x}_0) = \phi \underline{X}(z)$, d'où

  $$\phi^k = \mathcal{Z}^{-1}\left(z(zI - \phi)^{-1}\right)$$

- Changement de base (diagonalisation ou forme de Jordan)

$$J = P^{-1}\phi P$$
$$\phi^k = PJ^kP^{-1} \qquad J^k \text{ facile à calculer}$$

6.3 Stabilité

Idem que dans le cas continu en remplaçant le demi-plan gauche par le cercle unité ($Re(p_i) < 0$ par $|z_i| < 1$).

7 Discrétisation d'un système continu

On suppose que la période d'échantillonnage est T et qu'en entrée on a bloqueur d'ordre zéro, soit $u(\tau) = u(kT) \quad kT \leq \tau < (k+1)T$, d'où :

$$\underline{x}((k+1)T) = e^{AT}\underline{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bd\tau \; u(kT)$$

soit

$$\begin{aligned} \phi &= e^{AT} \\ \Gamma &= \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bd\tau = \int_0^T e^{Av}Bdv \end{aligned}$$

Troisième partie
Implantation d'une loi de commande par retour d'état

1 Commandabilité

1.1 Définition

- En continu :

Le système linéaire stationnaire $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + Bu(t)$ est complètement commandable au temps t_0, ssi pour **tout** état initial $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ et tout état $\underline{x}_1$, il existe un temps **fini** $t_1 > t_0$ et une entrée $u_{[t_0,t_1]}$ qui permet de passer de l'état $\underline{x}(t_0)$ à l'état $\underline{x}(t_1)$ à l'instant t_1.
On parle de commandabilité de la paire (A, B).

En continu, il est équivalent de prendre $\underline{x}(t_0) = \underline{0}$.

- En discret :

$\underline{x}_{k+1} = \phi\underline{x}_k + \Gamma u_k$ est CC ssi son état $\underline{x}_k$ peut être transféré de l'état $\underline{x}_0 = \underline{0}$ à l'instant t_0 à un état quelconque $\underline{x}$ dans un intervalle de temps fini, $[t_0, t_o + fT]$.

1.2 Critère de commandabilité

- En continu
  (A, B) CC ssi la matrice de commandabilité

$$\mathcal{C}_{A,B} = \big(B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B\big)$$

  est de rang n.
  Remarque : on appelle indice de commandabilité l'entier k tq

$$rang\,\big(B \mid AB \mid \cdots \mid A^{k-1}B\big) = n$$

- En discret
  (ϕ, Γ) CC ssi

$$\mathcal{C}_{\phi,\Gamma} = \big(\Gamma \mid \phi\Gamma \mid \cdots \mid \phi^{n-1}\Gamma\big) \text{ est de rang } n$$

1.3 Forme canonique commandable

On ne s'intéresse qu'aux systèmes monoentrée (la matrice B est alors un vecteur colonne).

Si le système est complètement commandable, alors il existe une base où

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & & -a_{n-1} \end{pmatrix} \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Comme pour la forme de Jordan, pour trouver le changement de base associé, on part de la forme que l'on veut obtenir :

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= M^{-1}AM \\ M\tilde{A} &= AM \end{aligned}$$

$\leadsto$ n équations vectorielles dont une vérifiée (th. Cayley Hamilton)
$\leadsto$ un degré de liberté : le vecteur m_n.
Si le système est complètement commandable, alors on peut choisir $m_n = B$ et la matrice obtenue est alors inversible.

1.4 Propriétés

- On ne "voit" pas les modes non-commandables sur le transfert (simplification pôle-zéro)
- La commandabilité est invariante par changement de base sur l'état.
- La commandabilité est invariante par retour d'état.

Remarque : L'observation n'intervient pas dans la commandabilité.

2 Observabilité

2.1 Définition

– En continu :
Le système linéaire stationnaire continu $\left\{ \begin{array}{ll} \dot{\underline{x}} & = A\underline{x} + Bu \\ y & = C\underline{x} \end{array} \right.$ est complètement observable à t_0, si pour tout état $\underline{x}_0$ à l'instant t_0, , il existe $t_1 (> t_0)$ fini tel que la connaissance de $u_{[t_0,t_1]}$ et $y_{[t_0,t_1]}$ soit suffisante pour déterminer de manière unique l'état $\underline{x}_0$ initial.
NB : la commande n'intervient pas dans l'observabilité (on supposera $u(t) = 0$).
On parle d'observabilité de la paire (C, A).
Le système est CO à t_0 ssi $\exists t_1 > t_0$ fini tq $\{y(t, t_0, \underline{x}_0) = 0 \forall\, t \in [t_0, t_1]\} \Rightarrow \underline{x}_0 = \underline{0}$.
– En discret :
la définition est analogue au cas continu, mais il existe une différence entre

- observabilité (on "veut" $\underline{x}_0$)
- reconstructibilité (on "veut" $\underline{x}_1$)

2.2 Critère d'observabilité

(C, A) CO ssi la matrice d'observabilité

$$\mathcal{O}_{C,A} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \text{ est de rang } n.$$

2.3 Dualité observabilité–commandabilité

- (A, B) CC ssi (B^T, A^T) CO.
- Forme canonique observable : utiliser la dualité
- Propriétés : idem que celles du § 1.4

3 Minimalité

Définition :
Soit (A, B, C, D) une réalisation associée à une matrice de transfert $G(p)$. Soit n_0 la dimension de l'état associé. Alors, cette réalisation est minimale ssi toute autre réalisation est d'ordre $n \geq n_0$.
Propriété :
Un système est minimal ssi il est complètement commandable et complètement observable.

4 Décomposition canonique dans l'espace d'état

4.1 Sous-espace de commandabilité

Définition :
Soit le système $\underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t) + Bu(t)$. On appelle sous-espace de commandabilité le sous-espace vectoriel engendré par les états qui peuvent être atteints à partir de l'état nul en un temps fini.
Propriété :
Le sous-espace de commandabilité est engendré par les colonnes de la matrice de commandabilité.

4.2 Décomposition d'un système non commandable

Supposons (A, B) non CC (avec $B \neq 0$) alors il existe une base où le système s'écrit

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

avec $\dim(A_{11}) = \text{ r } = \text{rg}(\mathcal{C}_{A,B})$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X} & = & \mathcal{C} & \oplus & \mathcal{X}_2 \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \text{commandable} & & \text{non commandable} \end{array}$$

vp de $A_{11} \rightsquigarrow$ modes commandables
vp de $A_{22} \rightsquigarrow$ modes non-commandables

4.3 Sous-espace non observable

Définition :

Soit le système $\begin{cases} \underline{\dot{x}} & = A\underline{x} \ (+Bu) \\ y & = C\underline{x} \end{cases}$ On appelle sous-espace non observable le sous-espace vectoriel engendré par les états qui donnent une sortie nulle sur un intervalle de temps non nul (commande supposée nulle).

Propriété :

Le sous-espace non observable coïncide avec le noyau de la matrice d'observabilité :

$$\mathcal{N} = \text{Ker}\mathcal{O}_{C,A}$$

4.4 Décomposition d'un système non observable

Supposons (C, A) non CO (avec $C \neq 0$) alors il existe une base où le système s'écrit

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec (C_1, A_{11}) CO
$\dim(A_{11}) = \text{rg}(\mathcal{O}_{C,A}) \quad (n - r = \dim(\text{Ker}(\mathcal{O}_{C,A}))\ )$

vp de $A_{11} \rightsquigarrow$ modes observables
vp de $A_{22} \rightsquigarrow$ modes non-observables

5 Commande par retour d'état

- Commande par retour de sortie
  Loi de commande

$$u(t) = -Ky(t) + v(t)$$

  v "nouvelle(s)" entrée(s).

- Commande par retour d'état
  On se sert des dynamiques propres au système (peu coûteux) commande plus "riche"

$$u(t) = -K\underline{x}(t) + v(t)$$

  Problème :
  Peut-on choisir les dynamiques du système bouclé ?

Théorème :

Soit Λ un ensemble de n complexes symétrique ($\lambda_i \in \Lambda \Rightarrow \lambda_i^* \in \Lambda$), alors il existe K tq le spectre de $A - BK$ soit égal à Λ ssi (A, B) est CC.

- Si le système n'est pas CC :
  $\rightsquigarrow$ on ne peut plus placer le spectre à volonté.
  On se sert de la base où $\mathcal{X} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{X}_2$. Les vp correspondant à A_{22} ne peuvent être modifiées par retour d'état.
- Système stabilisable :
  les modes non commandables sont stables.

6 Observateur

La commande par retour d'état nécessite la connaissance de l'état du système. Or, on ne connaît que la sortie. On va donc construire une estimée de l'état à partir de ce dont on dispose.

$$\begin{cases} \dot{\hat{\underline{x}}} &= A\hat{\underline{x}} + Bu + G\ \underbrace{(y - C\hat{\underline{x}})}_{\text{innovation}} \\ \hat{y} &= C\hat{\underline{x}} \end{cases}$$

G est le gain de l'observateur $(n \times p)$

Soit $\underline{\varepsilon}$ l'erreur d'estimation,

$$\dot{\underline{\varepsilon}} = (A - GC)\ \underline{\varepsilon}$$

CNS pour que $\underline{\varepsilon}(t) \to \underline{0}$, $t \to \infty$: les valeurs propres de $(A - GC)$ doivent être à partie réelle négative.

Théorème :

On peut placer le spectre de l'observateur à volonté ssi la paire (C, A) est CO.

Observateurs minimaux : théorie de Luenberger, il est inutile de reconstruire tout l'état puisque y nous donne déjà des informations.

7 Association d'un observateur et d'une commande par retour d'état

On réalise la commande à l'aide de l'état estimé (puisque on ne dispose pas de tout l'état). La loi de commande devient alors : $u = -K\underline{\hat{x}} + Lv$, soit pour le système total :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \underline{\dot{x}} \\ \underline{\dot{\varepsilon}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - GC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{\varepsilon} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} BL \\ 0 \end{pmatrix} v \\
y &= \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{\varepsilon} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Principe de séparation [1] :

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A - BK) \cup \sigma(A - GC)$$

On règle séparément chacun des deux spectres (attention aux "vitesses").

1. en notant σ le spectre de la matrice considérée i.e l'ensemble de ses valeurs propres