Meta-diagnostic à partir d'une MEF de type « Moore »

30 mai 2017

Table des matières

Introduction

A partir de RRA's statiques, on cherche à réaliser un meta-diagnostic, i.e. déduire des erreurs possibles sur le modèle.

Hypothèses :

1. L'hypothèse du transfert direct entrée/sortie nul est valide,
2. Les dimensions de la matrice C sont correctes (i.e. le nombre d'états et le nombre de sorties sont corrects).
3. Les observations et meta-observations sont correctes.
4. L'algorithme de meta-diagnostic est correct.

Première partie
RRA's statiques

Les RRA's statiques sont obtenues à partir de la matrice C. Comme C est supposée incorrecte, W l'est également. Par ailleurs, faire des « meta-observations » à partir des résidus paraît louche : en effet les résidus sont obtenus à partir de l'application linéaire associée à W. On observe donc d'abord Y, **puis** on calcule les résidus associés à chaque RRA. Si on a des observations partielles sur Y, autant les utilisées elles plutôt qu'utiliser les informations sur les résidus, qui contiennent au mieux autant d'information (si W est injective), au pire moins d'information...

On défini une matrice oracle C_o, telle que $C_o = C + C_\varepsilon$, où C est la matrice erronée que nous pensions correcte, et C_ε représente les erreurs commises sur les coefficients de cette matrice C.

Matrice C oracle de dans $\{0,1\}^{m\times n}$, par exemple la matrice $C_o \in \mathbb{F}_2^{4\times 3}$ suivante :

$$C_o = \begin{bmatrix} u & 1 & u \\ u & 0 & u \\ 1 & 0 & 1 \\ u & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

— u : valeur non définie (non testée), pouvant donc prendre la valeur 0 ou 1.

1 Transformation d'une matrice en un vecteur : une application linéaire

1.1 $\mathbb{F}_2$-Espace vectoriel

On appelle **matrice** de type (I, J) à **coefficients** dans $\mathbb{F}_2$, toute famille d'éléments de $\mathbb{F}_2$ indexée par le produit cartésien $I \times J$, c'est-à-dire toute application A de $I \times J$ dans $\mathbb{F}_2$.

Dans la suite, les ensembles I, J seront finis et sont respectivement les ensembles de nombres entiers naturels $\{1, 2, \ldots, m\}$ et $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dans ce cas, on dit que la matrice a m lignes et n colonnes, ou quelle est de **dimension** ou **taille** (m, n). En notant $a_{i,j}$ l'image d'un couple (i, j) par l'application A, la matrice peut alors être notée

$$A = (a_{i,j})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$$

ou plus simplement $(a_{i,j})$ si le contexte s'y prête.

Une matrice ne comportant qu'une seule ligne et n colonnes est appelée **matrice ligne** de taille n. Une matrice ne comportant m lignes et qu'une seule colonne est appelée **matrice colonne** de taille m.

Une **sous-matrice** de A est une matrice obtenue en sélectionnant une partie $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ de ses lignes et une partie $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ de ces colonnes. On la note $A_{I,J}$.

Proposition Une matrice A de taille (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ peut être transformée en une matrice colonne B de taille mn à coefficients dans $\mathbb{K}$ par une application bilinéaire $f_{m,n}$, dont la réciproque est notée $f_{m,n}^{-1}$, et telle que

$$f_{m,n} : (a_{i,j})_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \to (b_{k,l})_{1\le k\le mn, l=1}$$

$$f_{m,n}^{-1} : (b_{k,l})_{1\le k\le mn, l=1} \to (a_{i,j})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$$

$$\forall (i, j), 1 \le i \le m, 1 \le j \le n : a_{i,j} = f_{m,n}^{-1}(f_{m,n}(a_{i,j})) = f_{m,n}^{-1}\left(b_{i(n-1)+j,1}\right)$$

$$\begin{cases} f : \mathcal{M}_{m,n} & \to \mathcal{M}_{mn,1} \\ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} & \to \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

qui « transforme » une matrice rectangulaire en un vecteur colonne. commutatif $(\mathcal{M}_{m,n}, +)$, où la LCI (= loi de composition interne) est définie usuellement :

$$+ : (A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}^2 \to C \in \mathcal{M}_{m,n},\ c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

— On défini un On défini une application f qui transforme un tenseur de rang 2 en un tenseur de rang 1, i.e. qui transforme une matrice $\mathcal{M}_{m,n}$ de m lignes et n colonnes en un vecteur colonne $\mathcal{V}_p$ avec $p = m \times n$:

$$\begin{cases} f \ : \mathcal{M}_{m,n} & \to \mathcal{V}_{mn} \\ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} & \to \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

Remarque : comme $\mathcal{V}_p$ est un élément particulier de l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{m,n}$ avec $n = 1$, les définitions des opérations entre 2 éléments $(A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}^2$ valent aussi pour 2 éléments $(A, B) \in \mathcal{M}_{m,1}^2 \equiv (A, B) \in \mathcal{V}_m^2$.

Addition

L'addition $(+)$ de 2 éléments $(\mathcal{M}_{m_1,n_1}, \mathcal{M}_{m_2,n_2})$ est définie usuellement, c'est-à-dire ssi. les dimensions entre 2 éléments sont identiques ($m_1 = m_2$ et $n_1 = n_2$) :

$$\begin{cases} + : \mathcal{M}_{m,n} \times \mathcal{M}_{m,n} & \to \mathcal{M}_{m,n} \\ \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix} \right) & \to \begin{bmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \cdots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \cdots & a_{2,n}+b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & a_{m,2}+b_{m,2} & \cdots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{bmatrix} \end{cases}$$

L'ensemble $(\mathcal{M}_{m,n}, +)$ forme un groupe commutatif.

Multiplication par un scalaire

La multiplication $(\circ)$ d'un élément $\mathcal{M}_{m,n}$ par un scalaire (élément du corps $\mathbb{F}_2 = (\{0,1\}, +, \times)$) est également définie usuellement :

$$\begin{cases} \circ \ : (\{0,1\}, \mathcal{M}_{m,n}) & \to \mathcal{M}_{m,n} \\ \left(\alpha, \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix} \right) & \to \alpha \circ \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \times b_{1,1} & \alpha \times b_{1,2} & \cdots & \alpha \times b_{1,n} \\ \alpha \times b_{2,1} & \alpha \times b_{2,2} & \cdots & \alpha \times b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \times b_{m,1} & \alpha \times b_{m,2} & \cdots & \alpha \times b_{m,n} \end{bmatrix} \end{cases}$$

L'ensemble $(\{0,1\}, \mathcal{M}_{m,n}, \circ)$Les éléments neutres de l'espace de départ (resp. de l'espace d'arrivée) sont la matrice nulle (resp. le vecteur nul). On se place dans un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel sur le corps $\mathbb{F}_2$. On pose :

$$A \in \mathcal{M}_{m,n},\ A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, B \in \mathcal{M}_{m,n},\ B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{F}_2$$

Proposition 1 : f est un morphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration

On doit vérifier que $\forall (x, y) \in \mathcal{M}_{m,n}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$.

$$f(A + \alpha B) = f\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix} \right)$$

$$f(A + \alpha B) = f\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha b_{1,1} & \alpha b_{1,2} & \cdots & \alpha b_{1,n} \\ \alpha b_{2,1} & \alpha b_{2,2} & \cdots & \alpha b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha b_{m,1} & \alpha b_{m,2} & \cdots & \alpha b_{m,n} \end{bmatrix} \right)$$

$$f\left(A+\alpha B\right)=f\left(\begin{bmatrix} a_{1,1}+\alpha b_{1,1} & a_{1,2}+\alpha b_{1,2} & \cdots & a_{1,n}+\alpha b_{1,n}\\ a_{2,1}+\alpha b_{2,1} & a_{2,2}+\alpha b_{2,2} & \cdots & a_{2,n}+\alpha b_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m,1}+\alpha b_{m,1} & a_{m,2}+\alpha b_{m,2} & \cdots & a_{m,n}+\alpha b_{m,n}\end{bmatrix}\right)$$

$$f\left(A+\alpha B\right)=\begin{bmatrix}\alpha a_{1,1}+b_{1,1} & \alpha a_{1,2}+b_{1,2} & \cdots & \alpha a_{1,n}+b_{1,n} & \alpha a_{2,1}+b_{2,1} & \alpha a_{2,2}+b_{2,2} & \cdots & \cdots & \alpha a_{m,n}+b_{m,n}\end{bmatrix}^T \quad (1)$$

D'autre part, on a :

$$f\left(A\right)+\alpha f\left(B\right)=f\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n}\end{bmatrix}\right)+\alpha f\left(\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n}\\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n}\end{bmatrix}\right)$$

$$f\left(A\right)+\alpha f\left(B\right)=\begin{matrix}\begin{bmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{m,n}\end{bmatrix}^T + \\ \alpha\begin{bmatrix}b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} & +b_{2,1} & +b_{2,2} & \cdots & \cdots & +b_{m,n}\end{bmatrix}^T\end{matrix}$$

$$f\left(A\right)+\alpha f\left(B\right)=\begin{matrix}\begin{bmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{m,n}\end{bmatrix}^T + \\ \begin{bmatrix}\alpha b_{1,1} & \alpha b_{1,2} & \cdots & \alpha b_{1,n} & +\alpha b_{2,1} & +\alpha b_{2,2} & \cdots & \cdots & +\alpha b_{m,n}\end{bmatrix}^T\end{matrix}$$

$$f\left(A\right)+\alpha f\left(B\right)=\begin{bmatrix}a_{1,1}+\alpha b_{1,1} & a_{1,2}+\alpha b_{1,2} & \cdots & a_{1,n}+\alpha b_{1,n} & a_{2,1}+\alpha b_{2,1} & a_{2,2}+\alpha b_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{m,n}+\alpha b_{m,n}\end{bmatrix}^T \quad (2)$$

Par 1 et 2, il vient que $f\left(A+\alpha B\right)=f\left(A\right)+\alpha f\left(B\right)$ donc f est une application linéaire : c'est un morphisme d'espaces vectoriels.

Proposition 2 : f est un isomorphisme.

Démonstration [démonstration, p.3/17]

Comme les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension finie, f est bijective.

On peut donc transformer la matrice C_o en un vecteur ligne : $f\left(C_o\right)=f\left(\begin{bmatrix} w_1 & 1 & w_2\\ w_3 & 0 & w_4\\ 1 & 0 & 1\\ w_5 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}w_1 & 1 & w_2 & w_3 & 0 & w_4 & 1 & 0 & 1 & u\end{bmatrix}$

Par un changement de base on peut ensuite transformer C_o en une matrice par bloc $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & w_1 & w_2 & w_3 & w_4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}V & W\end{bmatrix}^T$, où $V=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$ est un vecteur colonne dont tout les coefficients sont connus (meta-observations), et où $W=\begin{bmatrix}w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5\end{bmatrix}^T$ est un vecteur colonne dont les coefficients sont inconnus (ceux que l'on cherche justement à déterminer !). L'application linéaire initiale, associée à la matrice C_0, réalisait un morphisme d'espaces vectortiels, d'espace de départ l'espace du vecteur d'états $X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}^T$, et d'espace d'image l'espace du vecteur de mesures :

$$Y=C_0X$$

Comme X ne peut avoir qu'un seul coefficient à 1, on cherche à trouver quelle matrice C_o vérifie $Y=C_oX$, pour $X=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T \vee X=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T \vee X=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$.

Avec $X_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$:

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w_1\\ w_3\\ 1\\ w_5\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\\1\\w_1\\w_2\\w_3\\w_4\\w_5\end{bmatrix}=B_{11}V+B_{12}W$$

Avec $X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} = B_{21}V + B_{22}W$$

Avec $X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} = B_{31}V + B_{32}V$$

On doit résoudre $(Y = B_{11}V + B_{12}W) \vee (Y = B_{21}V + B_{22}W) \vee (Y = B_{31}V + B_{32}W)$. Ce qui revient à chercher l'union des solutions pour 3 systèmes d'équations linéaires :

$$W = \left\{ \hat{W} + W_0 | \forall i \in \{1, 2, 3\}, \forall \aleph_{i2} \in ker\left(B_{i2}\right) \, : \, B_{i2}\left(\hat{W} + \aleph_{i2}\right) = Y + B_{i1}V \right\}$$