Idées pour les calculs de cycles

Jean IBARZ

7 avril 2017

Table des matières

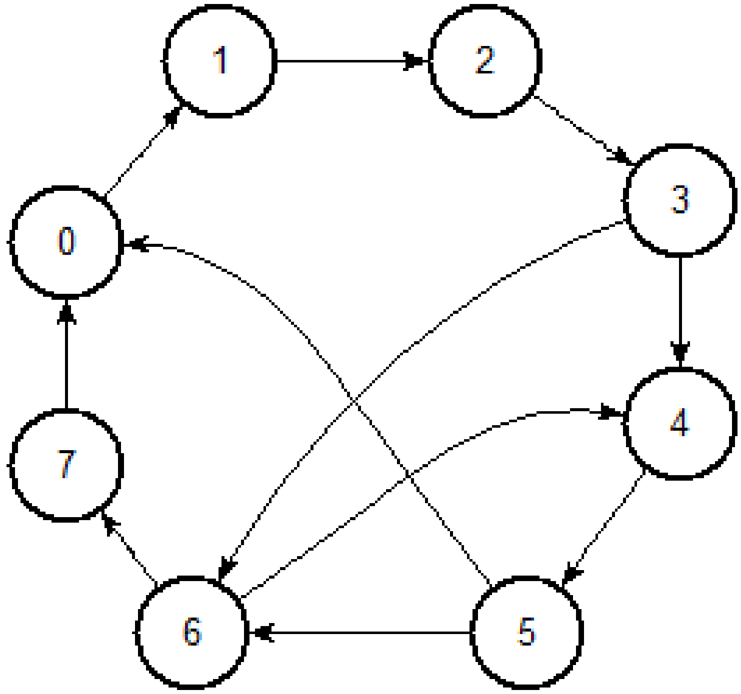

FIGURE 1 – Exemple d'un graphe orienté

Objectif

Trouver une méthode rapide pour calculer des cycles dans un graphe orienté

Première partie

Introduction

Soit M la matrice d'incidence d'un graphe orienté tel que celui présenté en exemple Figure 1.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La ligne i de M^n (respectivement $(M^n)^T$) indique l'ensemble des noeuds accessibles (respectivement co-accessibles) depuis le noeud i en n évènements. Si $M^n_{i,j} = 0$ (respectivement $\left(M^n_{i,j}\right)^T = 0$), le noeud j n'est pas accessible (respectivement co-accessible) depuis i en n évènements, sinon il est accessible.

Les lignes de $M + M^T$ représentent les noeuds voisins de 1 évènement (successeurs ou/et prédécesseurs).

On a :

1. $\mathbb{I}.M = 0$ ssi il n'existe pas de cycle de longueur 1. Avec Matlab, on vérifie qu'il n'y a pas de tel cycle,
2. $M.M^T = 0$ ssi il n'existe pas de cycle de longueur 1 ou 2 : pour toute paire de noeuds (n_1, n_2), n_1 n'est jamais (prédécesseur et successeur) de n_2 ($n_2$pouvant être égal à n_1 ce qui couvre les cycles de longueur 1-). On vérifie encore avec Matlab qu'il n'y a pas de tel cycle,

3. $(M+M^2).(M+M^2)^T = 0$ ssi il n'existe pas de cycle de longueur ≤ 4. En effet, $M+M^2$ représente les noeuds accessibles en $+1$ ou $+2$ évènements, tandis que $\left(M+M^2\right)^T$ représente les noeuds accessibles en -1 ou -2 évènements. Le produit des 2 est nul ssi pour toute paire de noeuds (n_1, n_2), n_1 n'est jamais (prédécesseur de (1 ou 2) et successeur de (1 ou 2) de n_2, c'est à dire qu'on ne retombe jamais sur le même noeud n_1 à partir d'un noeud n_2 en avançant de 1 ou 2 et en reculant de 1 ou 2 évènements depuis n_2. Comme ce calcul couvre les cycles de longueur 2, le calcul de l'étape 2 n'est pas nécessaire. Cette fois on obtient avec Matlab :

$$(M+M^2).(M+M^2)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   On en déduit donc qu'il existe un cycle de longueur ≤ 4 pour les noeuds 4,5,6. On pourrait encore préciser car comme le calcul précédent était nul, le cycle ne peut être que de longueur 3 ou 4. Mais ce n'a aucune importance puisque la seule chose qui nous intéresse est de trouver un cycle et pas de préciser sa longueur. On peut vérifier sur le graphe que le cycle $< 4, 5, 6 >$, de taille 3, existe bel et bien.

4. De la même façon, $(M+M^2+M^3).(M+M^2+M^3)^T = 0$ ssi il n'existe pas de cycle de longueur 1 à 6. Ce calcul couvre également le cas 3. On trouve avec Matlab :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Il existe des cycles de longueur 2 à 6 sur tout les noeuds du graphe. Par exemple les cycles $< 0, 1, 2, 3, 4, 5 >$ et $< 0, 1, 2, 3, 6, 7 >$ suffisent effectivement à couvrir tout les noeuds.

5. En généralisant, $C(M, n) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} M^i\right) . \left(\sum_{i=1}^{i=n} M^i\right)^T = 0$ ssi il n'existe pas de cycle de longueur $\leq 2n$.
6. Finalement, comme pour une matrice de taille N les cycles minimaux sont de taille $\leq N$, il suffit de calculer $C(M, floor(N/2))$ avec $floor$ la fonction de troncature.
7. En utilisant un schéma de Horner pour calculer la matrice à la puissance m, il suffit de $(n-1)$ additions sur la diagonale principale et $(n-1)$ multiplications matricielles (complexité $\approx O(n^2)$), soit une complexité polynômiale de $\approx O(n^3)$. En plus, le calcul peut se faire de façon itérative....
8. En plus, il y a une dualité entre le nombre de cycles et la possible réduction du graphe :
   (a) plus il y a de cycles longs, plus le graphe est réductible,
   (b) plus il y a de cycles courts, plus ils seront trouvés rapidement !

On peut faire la chose suivante :

1. Chercher un cycle de taille 1 (il suffit de regarder la diagonale de la matrice),
2. Chercher un cycle de taille 2 (il suffit de calculer $M.M^T = 0$),
3. Il existe probablement (obligatoirement ?) des noeuds réductibles : réduire donc la matrice,
   (a) Si la matrice à été réduite, chercher un cycle de taille 2 (il suffit de recalculer $M.M^T = 0$), puis répéter la procédure en 3
   (b) Sinon continuer en calculant la puissance supérieure et en répétant les réductions