Représentation espace d'état d'une MEF de type « Moore »

16 mai 2017

Table des matières

Introduction

On souhaite obtenir une représentation d'espace d'état linéaire d'une MEF déterministe de type « Moore » de façon à :

1. Faire une analogie entre la forme espace d'état d'un système linéaire continu et/ou discret (échantillonné) et la forme espace d'état d'une MEF,
2. Obtenir à partir de cette forme d'espace d'état des RRA's, i.e. des équations qui dépendent uniquement d'observations (sorties/entrées) et indépendantes de l'état courant.

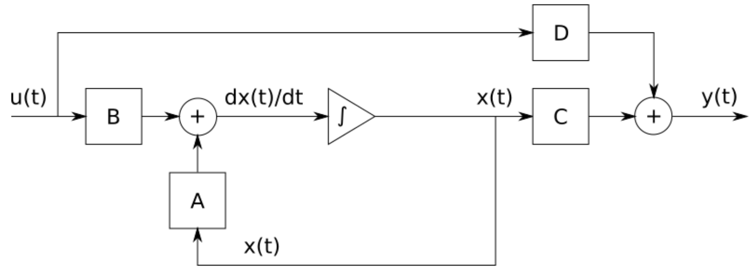

Figure 1 – Schéma-bloc d'une représentation espace d'état d'un système continu linéaire

Première partie

Représentation espace d'état

La représentation d'état (dite « externe ») d'un système continu **L**inéaire **T**emps **I**nvariant qui nous intéresse est définie par :

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}}(t) & = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) & = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) \end{cases}$$

Dans cette représentation :
- A est appelée « matrice dynamique » du système,
- B est appelée « matrice d'entrée » du système,
- C est appelée « matrice de mesure » du système,
- D est appelée « matrice de transfert direct » du système (si $D \neq 0$, la bande passante du système est infinie...),
- $\underline{x}(t)$ est un vecteur colonne appelé « vecteur d'état » du système,
- $\underline{u}(t)$ est un vecteur colonne appelé « vecteur d'entrée » du système,
- $\underline{y}(t)$ est un vecteur colonne appelé « vecteur de sortie » du système.

A, B, C, D sont des applications linéaires/opérateurs linéaires (en anglais : linear-map/linear-mapping). Une application $f : E \to F$ est dite linéaire si elle préserve les combinaisons linéaires, i.e. pour toute famille finie $(v_i)_{i\in I}$ de vecteurs et pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires :

$$f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(v_i)$$

Cette représentation est donnée sous forme de schéma-blocs (schéma fonctionnel) Fig. 1.

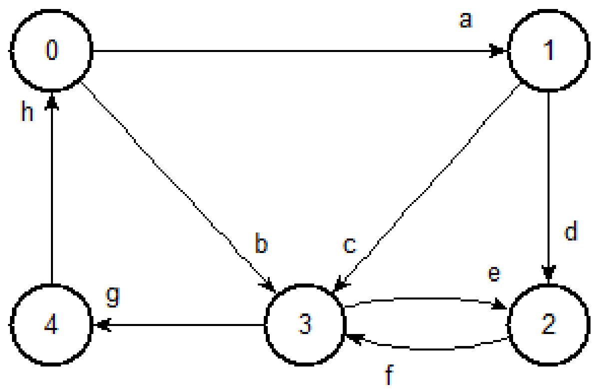

FIGURE 2 – Diagramme états-transition de la MEF considérée (sorties non représentées)

Deuxième partie

Machine de Moore

1 Cas considéré : machine de Moore déterministe, δ fonction totale

Une machine de Moore est une MEF de la catégorie des transducteurs finis. C'est une Machine à Etats Finis car son ensemble d'Etats est discret et fini. C'est un transducteur car il possède des « sorties » (c'est une « extension » des automates finis). Une machine de Moore peut être décrite par une table de transition ou un diagramme états-transitions.

1.1 Définition formelle

Une machine de Moore est un 6-uplet $< Q, i, A, B, \delta, \lambda >$ constitué de :
- un ensemble fini d'états Q ;
- un état initial i, élément de Q ;
- un ensemble fini A, appelé alphabet d'entrée ;
- un ensemble fini B, appelé alphabet de sortie ;
- une fonction de transition $\delta : Q' \times A' \to Q''$. δ est une fonction « totale » ssi $Q' \times Q'' \times A' = Q \times Q \times A$, « partielle » sinon ;
- une fonction de sortie $\lambda : Q \to B$ (totale à priori ?).

On notera $\delta(q, a)$ par aq.

1.2 Diagramme états-transition

La MEF considérée en exemple est donné Fig. 2.

On fait l'hypothèse que la MEF est déterministe, i.e. il n'existe pas 2 arcs sortants d'un meme état avec la meme étiquette. La fonction de transition δ est totale, i.e. l'automate ne peut pas « mourir » (il « accepte » tout évènement de l'alphabet d'entrée quelque soit son état courant). Dans le diagramme d'états-transition, les arcs reliant un état à lui-même n'ont pas été représentés (par souci de commodité). On suppose aussi que les évènements sont séquentiels, i.e. il n'y a qu'une entrée valide simultanément.

On fait le choix de travailler dans un corps fini commutatif $\mathbb{F}_2$ (dit « corps de Galois »), i.e. une structure algébrique $(\{0,1\}, +, \times)$ définie avec les deux lois de composition interne $(+, \times)$ définies par les tables de vérités données ci-après :

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Remarque : dans $\mathbb{F}_2$, les couples d'opérations $(+, -)$ et $(\times, \div)$ sont identiques. En effet, on vérifie facilement que :

$$\begin{cases} 0+0=0 & \Longrightarrow \; 0-0=0 \\ 0+1=1 & \Longrightarrow \; 1-1=0 \\ 1+0=1 & \Longrightarrow \; 1-0=1 \\ 1+1=0 & \Longrightarrow \; 0-1=1 \end{cases}$$

d'ou une table de vérité pour l'opérateur $(-)$ identique à l'opérateur $(+)$, et la division n'est définie que pour $\{0,1\}\backslash\{0\}=\{1\}$ et on a :

$$\begin{cases} 0\times 1=0 & \implies 0\div 1=0 \\ 1\times 1=1 & \implies 1\div 1=1 \end{cases}$$

d'ou la encore une table de vérité pour $(\div)$ identique à la sous-table extraite de $(\times)$. On écrira donc parfois l'un ou l'autre des opérateurs si cela permet d'améliorer la compréhension.

On utilise un codage 1 parmi n (n le nombre d'états), i.e. on associe chaque état i à une variable d'état $X_i \in \{0,1\}$. On a $X_i = 1$ si l'état courant est l'état i, $X_i = 0$ sinon. On note X le vecteur d'état (vecteur colonne) $X = \begin{bmatrix} X_0 & X_1 & \cdots & X_{n-1} \end{bmatrix}^T$. De façon similaire, on notera $U = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & g & h \end{bmatrix}^T$ le vecteur d'entrée.

1.3 Conditions de « mise à zéro »

Les conditions de « mise à zéro » pour chaque variable d'état sont :

$$\begin{cases} X_0 : & a\times X_0 + b\times X_0 \\ X_1 : & c\times X_1 + d\times X_1 \\ X_2 : & f\times X_2 \\ X_3 : & e\times X_3 + g\times X_3 \\ X_4 : & h\times X_4 \end{cases}$$

1.4 Conditions de « mise à un »

Les conditions de « mise à un » pour chaque variable d'état sont :

$$\begin{cases} X_0 : & h\times X_4 \\ X_1 : & a\times X_0 \\ X_2 : & d\times X_1 + e\times X_3 \\ X_3 : & b\times X_0 + c\times X_1 + f\times X_2 \\ X_4 : & g\times X_3 \end{cases}$$

1.5 Variations des variables d'état

Une variable d'état i varie lorsque $X_i[k+1] - X_i[k] = 1$ (équivalent à $X_i[k+1] + X_i[k]$ sur notre corps $\mathbb{F}_2$), i.e. lorsque l'un des deux conditions suivantes sont remplies :

$$\begin{cases} (X_i[k]=0) \text{ et } (X_i[k+1]=1) & \textbf{condition de mise à un vérifiée} \text{ ("arrivée" sur l'état } i) \\ (X_i[k]=1) \text{ et } (X_i[k+1]=0) & \textbf{condition de mise à zéro vérifiée} \text{ ("départ" de l'état } i) \end{cases}$$

Les conditions de variations d'état sont donc définies par :

$$\begin{cases} X_0 : & a\times X_0 + b\times X_0 + h\times X_4 \\ X_1 : & a\times X_0 + c\times X_1 + d\times X_1 \\ X_2 : & d\times X_1 + f\times X_2 + e\times X_3 \\ X_3 : & b\times X_0 + c\times X_1 + e\times X_3 + f\times X_2 + g\times X_3 \\ X_4 : & g\times X_3 + h\times X_4 \end{cases}$$

1.6 Représentation espace d'état

La représentation d'espace d'état discrète est :

$$\begin{cases} X[k+1] & = f\left(X[k], U[k]\right) \\ Y[k] & = g(X[k], U[k]) \end{cases}$$

Comme le système n'est pas linéaire, il ne peut pas être écrit tel quel sous une forme d'espace d'état discrète linéaire :

$$\begin{cases} X[k+1] & = AX[k] + BU[k] \\ Y[k] & = CX[k] + DU[k] \end{cases}$$

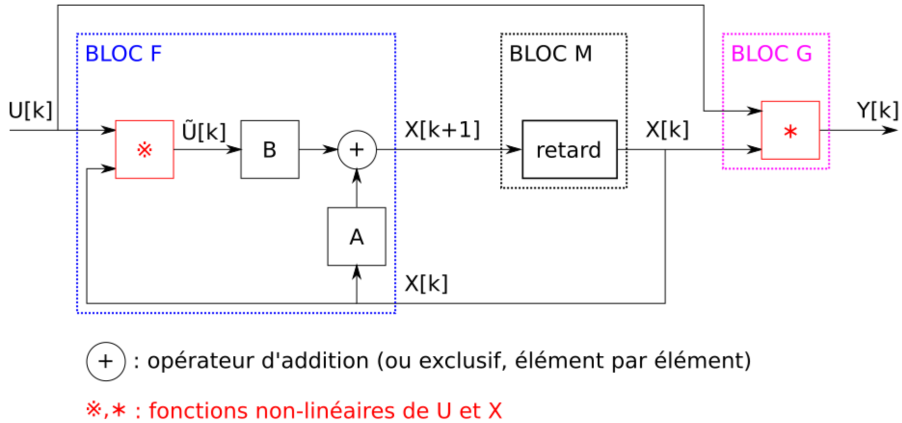

FIGURE 3 – Schéma-blocs d'une machine de Moore (cas général)

C'est toutefois possible en effectuant une transformation non-linéaire $\mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^m \to \mathbb{F}_2^{mn}$. Dans notre cas, on effectuera cette transformation dans un espace vectoriel $Q \subset \mathbb{F}_2^{mn}$, avec Q minimal pour pouvoir représenter le système. Dans le cas du système étudié la transformation sera donc définie par :

$$\left(\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} \right) \to \tilde{U} = \begin{bmatrix} a \times X_0 \\ b \times X_0 \\ c \times X_1 \\ d \times X_1 \\ e \times X_2 \\ f \times X_2 \\ e \times X_3 \\ g \times X_3 \\ h \times X_4 \end{bmatrix}$$

On peut alors écrire la représentation d'espace d'état discrète linéaire :

$$\begin{cases} X[k+1] &= f\left(X[k], \tilde{U}[k]\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0[k] \\ X_1[k] \\ X_2[k] \\ X_3[k] \\ X_4[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \times X_0 \\ b \times X_0 \\ c \times X_1 \\ d \times X_1 \\ e \times X_2 \\ f \times X_2 \\ e \times X_3 \\ g \times X_3 \\ h \times X_4 \end{bmatrix} \\ Y[k] &= g(X[k], \tilde{U}[k]) \end{cases}$$

<u>Rappel :</u>

$$\begin{cases} X_0 : & a \times X_0 + b \times X_0 + h \times X_4 \\ X_1 : & a \times X_0 + c \times X_1 + d \times X_1 \\ X_2 : & d \times X_1 + f \times X_2 + e \times X_3 \\ X_3 : & b \times X_0 + c \times X_1 + e \times X_2 + f \times X_2 + g \times X_3 \\ X_4 : & g \times X_3 + h \times X_4 \end{cases}$$

<u>Remarques :</u>

— le nombre de coefficients non-nuls dans une quelconque ligne i de la matrice B correspond au nombre d'arcs (entrants + sortants) sur l'état i,

— le nombre de coefficients non-nuls dans une quelconque colonne j de la matrice B est toujours égal à 2 (un coefficient pour l'état mis à 0 et un coefficient pour l'état mis à 1 pour l'arc associé à la colonne j),

— on en déduit que le nombre de coefficients non-nuls est égal à $2a$ si a est le nombre d'arcs du diagramme d'états-transition,

— la dimension de l'espace vectoriel nécessaire pour les entrées est égal au nombre d'arcs (8 ici).

On donne une forme schéma-blocs de la machine de Moore (cas général) Fig. 3.

Si l'on fait les hypothèses suivantes :

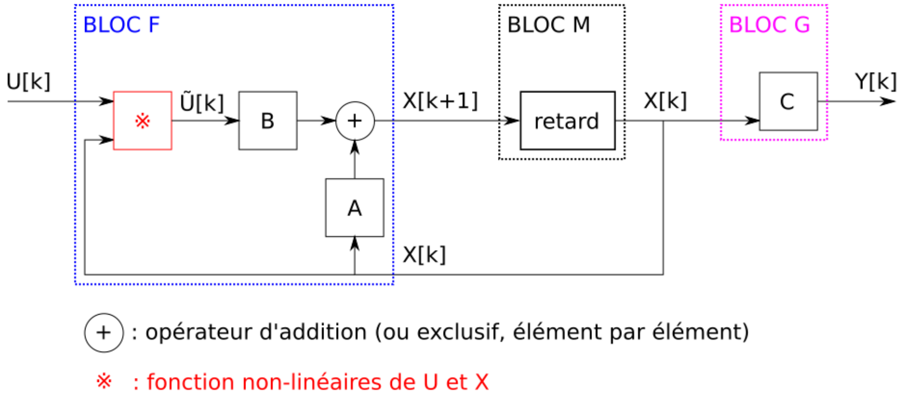

FIGURE 4 – Schéma-blocs d'une machine de Moore (sous les hypothèses $D = 0$ et $Y = f(X[k])$)

— $D = 0$, i.e. il n'y a pas de transfert direct entrée/sortie, et
— $Y = f(X[k])$, i.e. la sortie est une fonction linéaire de l'état courant.

Alors on obtient un schéma-blocs simplifié, représenté Fig. 4.