Idées pour les calculs de cycles

Jean IBARZ

8 avril 2017

Table des matières

I A partir d'une matrice adjacente **3**

II Solution bis **5**

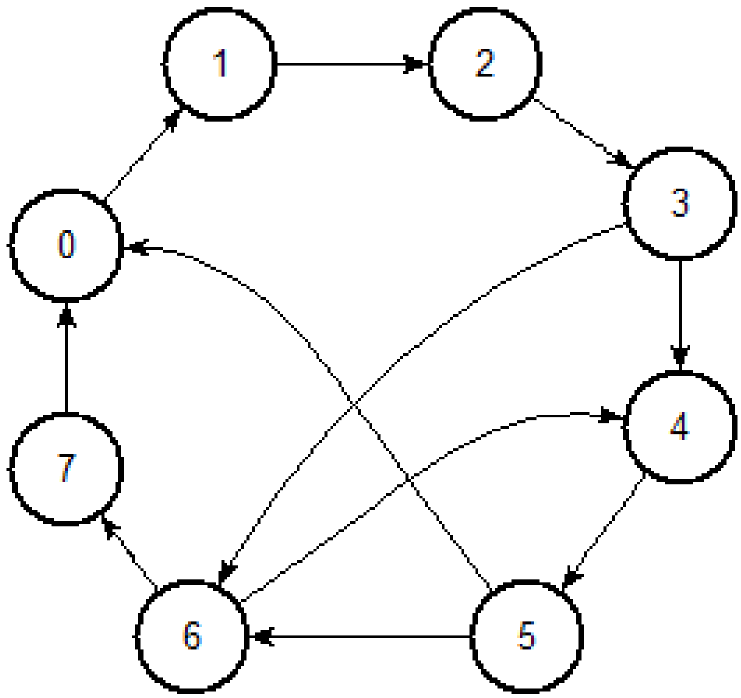

FIGURE 1 – Exemple d'un graphe orienté

Objectif

Trouver une méthode rapide pour calculer des cycles dans un graphe orienté

Première partie

A partir d'une matrice adjacente

Inconvénient majeur : matrice gigantesque (espace mémoire $O(N^2)$) non adaptée à des graphes trop gros.

Soit la matrice binaire $M \in \mathbb{B}^{N\times N}$, la matrice d'adjacence d'un graphe orienté fini de N sommets tel que celui présenté en exemple Figure 1.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La ligne i de M^n (respectivement $(M^n)^T$) indique l'ensemble des sommets accessibles (respectivement co-accessibles) depuis le sommet i en n évènements. Si $M^n_{i,j} = 0$ (respectivement $\left(M^n_{i,j}\right)^T = 0$), le sommet j n'est pas accessible (respectivement co-accessible) depuis i en n évènements, sinon il est accessible.

La matrice $M \vee M^T$ représente les sommets voisins de ± 1 évènement (successeurs et prédécesseurs).

On a aussi :

1. $\mathbb{I} \wedge M = 0$ ssi il n'existe pas de cycle de longueur 1,

2. $M \wedge M^T = 0$ ssi il n'existe pas de cycle de longueur 1 ou 2 : $\forall (n_1, n_2) \in [0, N]^2, \nexists n_1 \; s.t. \; n_1 = successeur(n_2) = predecesseur(n_2)$. Le cas où c'est égalité est vérifié avec $n_1 = n_2$ correspond à un cycle de longueur 1, tandis que le cas où cette égalité est vérifié correspond à un cycle de longueur 2. Sur l'exemple donné précédemment l'égalié $M \wedge M^T = 0$ est vérifiée : il n'y a pas de cycles de longueur ≤ 2.
3. $(M \vee M^2) \wedge (M \vee M^2)^T = 0$ ssi il n'existe pas de cycle de longueur ≤ 4. En effet, $M \vee M^2$ représente les sommets accessibles en $+1$ ou $+2$ évènements, tandis que $\left(M \vee M^2\right)^T$ représente les sommets accessibles en -1 ou -2 évènements. Le produit par élément (« et » logique) des 2 est nul ssi pour toute paire de sommets (n_1, n_2), n_1 n'est jamais (prédécesseur de (1 ou 2) et successeur de (1 ou 2) de n_2, c'est à dire qu'on ne retombe jamais sur le même sommet n_1 à partir d'un sommet n_2 en avançant de (1 ou 2) arêtes et en reculant de (1 ou 2) arêtes. Ce calcul couvre donc les cycles de longueur 2, 3 et 4. Cette fois on obtient avec Matlab :

$$(M \vee M^2) \wedge (M \vee M^2)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On en déduit donc qu'il existe un cycle de longueur ≤ 4 pour les sommets 4,5,6. On pourrait encore préciser car comme le calcul précédent était nul, le cycle ne peut être que de longueur 3 ou 4. Mais ce n'a aucune importance puisque la seule chose qui nous intéresse est de trouver un cycle et pas de préciser sa longueur. On peut vérifier sur le graphe que le cycle $< 4, 5, 6 >$, de taille 3, existe bel et bien.
4. De la même façon, $(M \vee M^2 \vee M^3) \wedge (M \vee M^2 \vee M^3)^T = 0$ ssi il n'existe pas de cycle de longueur 1 à 6. Ce calcul couvre également le cas 3. On trouve avec Matlab :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il existe des cycles de longueur 2 à 6 sur tout les sommets du graphe. Par exemple les cycles $< 0, 1, 2, 3, 4, 5 >$ et $< 0, 1, 2, 3, 6, 7 >$ suffisent effectivement à couvrir tout les sommets.
5. En généralisant, $C(M, n) = \left(\bigvee_{i=1}^{i=n} M^i\right) \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{i=n} M^i\right)^T = 0$ ssi il n'existe pas de cycle de longueur $\leq 2n$.
6. Pour calculer $\bigvee_{i=1}^{i=n} M^i$ ($\equiv \sum_{i=1}^{i=n} M^i$), on peut :
   (a) Utiliser un schéma de Horner, par exemple avec $n = 4$ on a $M\left(\mathbb{I} + M\left(\mathbb{I} + M\left(\mathbb{I} + M\right)\right)\right) = M + M^2 + M^3 + M^4 ...$, il suffit donc de $(n-1)$ additions avec la matrice identité (diagonale uniquement donc complexité $O(N)$) et $(n-1)$ multiplications matricielles (complexité $\approx O(N^2)$), soit une complexité polynômiale de $\approx O((n-1) \times N^3)$). En plus, le calcul peut se faire de façon itérative....
   (b) Utiliser une exponentiation binaire, c'est à dire choisir un n étant une puissance de puissance de 2, et calculer par étape :
      — <u>Initialisation :</u> $M_2 = (\mathbb{I} + M)^2$ soit l'équivalent de $\mathbb{I} + M + M^2$ (les coefficients ne changent rien puisqu'on est en booléen),
      — $M_4 = M_2^2 = \left(\mathbb{I} + M + M^2\right)^2$ soit $\mathbb{I} + M^2 + M^3 + M^4$,
      — $M_8 = M_4^2 = \left(\mathbb{I} + M + M^2 + M^3 + M^4\right)^2$ soit $\mathbb{I} + M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5 + M^6 + M^7 + M^8$
      — etc. (pour la dernière étape on pense à supprimer la matrice identité...)
      Le calcul prend cette fois $O(log(n) \times N^2)$.Comme on peut choisir n arbitraire, il suffit de choisir la puissance de 2 qui dépasse N... cette technique réduit davantage la complexité que Horner et on peut elle aussi l'appliquer de façon itérative. Le point faible reste le carré de la matrice booléenne qu'il faudrait pouvoir simplifier (au moins l'écrire sous forme d'opérations $\{\wedge, \vee\}$)...

7. Finalement, comme pour une matrice de taille N les cycles minimaux sont de taille $\leq N$, il suffit de calculer $C(M, floor(N/2))$ avec $floor$ la fonction de troncature.
8. En plus, il y a une dualité entre le nombre de cycles et la possible réduction du graphe :
   (a) plus il y a de cycles longs, plus le graphe est réductible,
   (b) plus il y a de cycles courts, plus ils seront trouvés rapidement !

On pourrait faire la chose suivante :

1. Chercher un cycle de taille 1 (il suffit de regarder la diagonale de la matrice, complexité $O(N)$),
2. Chercher un cycle de taille 2 (il suffit de calculer $M \wedge M^T = 0$, complexité $O(N^2)$),
3. Il existe probablement (obligatoirement ?) des sommets réductibles : réduire donc la matrice,
   (a) Si la matrice à été réduite, chercher un cycle de taille 2 (il suffit de recalculer $M.M^T = 0$), puis répéter la procédure en 3
   (b) Sinon continuer en calculant la puissance supérieure et en répétant les réductions

Deuxième partie

Solution bis

Plutôt que d'associer un marquage $\{Fsain, Fcertain, Fincertain\}$ sur les sommets d'un graphe, il faudrait les associer aux arêtes. Pour moi, c'est plus logique et plus cohérent que l'on puisse fournir un diagnostic « au moment » d'un évènement plutôt que « sur un état ». En effet, l'évènement est daté, l'état non... Hors si une faute peut apparaître sur un état, même si l'évènement précédent nous assure qu'aucune faute n'a eu lieu après le franchissement, immédiatement arrivé sur l'état il est possible qu'une faute est apparue et donc qu'on ne sache pas si le système est en faute ou non. On crée de façon itérative par exploration un graphe dont les arêtes correspondraient à des évènements $Fincertains$. Quand l'exploration est finie :

1. On retire les sommets qui n'ont pas de successeurs
2. On répète l'opération jusqu'à ce qu'il n'y ai plus de sommets sans successeurs.
3. S'il ne reste aucun sommet (graphe vide), alors il n'existe pas de cycle, sinon il existe au moins un cycle $Fincertain$.