Le pendule de Foucault

Les notations

On note $\vec{p}$ la position de la masse suspendue à un fil de longueur l, $\vec{v}$ sa vitesse et $\vec{a}$ son accélération, définis dans un repère orthonormé $(\vec{u}_x \quad \vec{u}_y \quad \vec{u}_z)$.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

Principe fondamental de la dynamique

Bilan des forces

$$\vec{T} + m\vec{\gamma} = m\vec{a}$$

Prise en compte de la pesanteur avec $g = 9{,}81 m/s^2$ (gravitation et force d'inertie centrifuge) et de la force de Coriolis

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - 2\vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}$$

Calculs

Moyen pour « se débarrasser de $\vec{T}$ »

$$\vec{u}_x \wedge \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_y \wedge \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}.(\vec{u}_x \wedge \vec{p}) = \vec{T}.(\vec{u}_y \wedge \vec{p}) = 0$$

$$\vec{\gamma}.(\vec{u}_x \wedge \vec{p}) = \vec{a}.(\vec{u}_x \wedge \vec{p}) = -z\gamma_y + y\gamma_z = -z\ddot{y} + y\ddot{z}$$

$$\vec{\gamma}.(\vec{u}_y \wedge p) = \vec{a}.(\vec{u}_y \wedge \vec{p}) = z\gamma_x - x\gamma_z = z\ddot{x} - x\ddot{z}$$

Moyen pour « se débarrasser de z »

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \qquad x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0 \qquad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = 0$$

$$z = -\sqrt{l^2 - x^2 - y^2} \qquad \dot{z} = -\frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{z} \qquad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

Utilisation des relations précédentes

$$-z^2\gamma_y + yz\gamma_z = -z^2\ddot{y} + yz\ddot{z} = (-xy)\ddot{x} + (-y^2 - z^2)\ddot{y} - y(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$z^2\gamma_x - xz\gamma_z = z^2\ddot{x} - xz\ddot{z} = (x^2 + z^2)\ddot{x} + (xy)\ddot{y} + x(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$(xy)\ddot{x} + (l^2 - x^2)\ddot{y} = z^2\gamma_y - yz\gamma_z - yv^2$$

$$(l^2 - y^2)\ddot{x} + (xy)\ddot{y} = z^2\gamma_x - xz\gamma_z - xv^2$$

Au final

$$l^2\ddot{x} = -xy\gamma_y - xz\gamma_z + (l^2 - x^2)\gamma_x - xv^2$$

$$l^2\ddot{y} = -yx\gamma_x - yz\gamma_z + (l^2 - y^2)\gamma_y - yv^2$$