Applications de la théorie de la prévision optimale à des problèmes économiques *

Jean-Marie Dufour †
Université de Montréal

Première version: Février 2002
Révisions: Mars 2005
Cette version: 29 mars 2005
Compilé: 29 mars 2005, 3:01pm

* Cette recherche a bénéficié du support financier de la Chaire de recherche du Canada en économétrie, du Conseil des Arts du Canada (Bourse Killam), du Conseil de recherche en sciences humaines du Canada, du Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada, de la Fondation Alexander von Humboldt (Allemagne), de l'Institut de Finance mathématique de de Montréal (IFM2), du Réseau canadien de centres d'excellence (projet MITACS), du Fonds de recherche sur la société et la culture (Québec), et du Fonds de recherche sur la nature et les technologies (Québec).

† Titulaire de la Chaire de recherche du Canada en économétrie (Université de Montréal). Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO), Centre interuniversitaire de recherche en économie quantitative (CIREQ) et Département de sciences économiques, Université de Montréal. Adresse postale: Département de sciences économiques, Université de Montréal, C.P. 6128 succursale Centre Ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3J7. TEL: (514) 343 2400; FAX: (514) 343 5831; courriel: jean.marie.dufour@umontreal.ca. Page Web: http://www.fas.umontreal.ca/SCECO/Dufour .

Table des matières

1. Problèmes d'extraction de signal **1**

2. Structure à terme des taux d'intérêts [Meiselman (1963)] **2**

3. Application de la loi des projections itérées **4**

4. Notes bibliographiques **5**

1. Problèmes d'extraction de signal

(1) Un agent désire observer s mais voit seulement

$$x = s + n$$

où n est une erreur de mesure, où

$$E(s) = E(n) = 0,\ E(sn) = 0,\ E\left(s^2\right),\ E\left(n^2\right) < \infty\ .$$

Alors

$$\begin{aligned} P(s \mid 1, x) &= a_0 + a_1 x, \\ a_1 &= \frac{E(sx)}{E(x^2)} = \frac{E(s^2)}{E(e^2) + E(n^2)} = \frac{1}{1 + \frac{E(n^2)}{E(s^2)}}\ , \\ a_0 &= 0\ . \end{aligned}$$

Plus $E(n^2)/E(s^2)$ grand, plus a_1 est petit.
(2) Un travailleur veut estimer (le logarithme) de son salaire réel $w - p$, où $w = \log(W)$ et $p = \log(P)$. Supposons maintenant que :

$$w = z + u,\ p = z + v$$

où

z = mouvement dans le niveau des prix que n'affecte pas le salaire réel

et

$$E(zu) = E(zv) = E(u) = E(v) = E(z) = 0\ .$$

Le travailleur peut observer w mais pas p. Le meilleur prédicteur linéaire de $w - p$ est :

$$P[(w-p) \mid 1, w] = a_0 + a_1 w\ ,$$

où

$$a_0 = 0\ ,$$
$$a_1 = \frac{E[(w-p)\,w]}{E(w^2)} = \frac{E[(u-v)(z+u)]}{E(z^2) + E(u^2)} = \frac{E(u^2)}{E(z^2) + E(u^2)}\ ,$$
$$0 < a_1 < 1\ .$$

Plus $E(z^2)$ est grand, plus a_1 est petit.

2. Structure à terme des taux d'intérêts [Meiselman (1963)]

Soit

$$\begin{aligned} R_{ni} = &\text{ rendement au temps } t \text{ d'une obligation venant} \\ &\text{ à échéance au temps } t+n. \end{aligned}$$

I. Fisher et J. Hicks ont proposé de considérer le rendement à n périodes comme une moyenne d'un taux courant et de taux à termes (pour une période chacun). En d'autres mots, on suppose que :

$$R_{ni} = \frac{1}{n}\left[R_{1t} + {}_{t+1}F_{1t} + {}_{t+2}F_{1t} + ... + {}_{t+n-1}F_{1t}\right], \; n = 1, 2, 3, \; \ldots \; , \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} {}_{t+j}F_{1t} \;\; = \;\; & \text{taux à terme au temps } t \text{ pour un prêt} \\ & \text{devant être fait au temps } t+j \\ & \text{et venant à échéance au temps } t+j+1. \end{aligned}$$

$$R_{2t} = \frac{1}{2}\left[R_{1t} + {}_{t+1}F_{1t}\right] \Longrightarrow {}_{t+1}F_{1t} = 2R_{2t} - R_{1t}$$

$${}_{t+j}F_{1t} = (j+1)\, R_{j+1,t} - jR_{jt} \; .$$

Dans ce cadre,

$$\begin{aligned} \text{prêt pour deux périodes } = &\text{ prêt maintenant pour une période à } R_{1t} \\ &+ \text{contrat pour un prêt dans une période (pour une période).} \end{aligned}$$

(2.1) est une définition des taux à terme.

Hypothèse d'anticipations :

$${}_{t+j}F_t = \hat{R}_{1,t+j} \;\; : \; \text{Prédiction (en temps } t\text{) par les spéculateurs.}$$

Pour rendre ce modèle opérationnel, nous allons supposons que $\hat{R}_{1,t+j}$ est une anticipation rationnelle par rapport aux taux présents et passés :

$${}_{t+j}F_{1t} = \hat{R}_{1,t+j} = P\left[R_{1,t+j} \mid 1, R_{1t}, R_{1,t+1}, ...\right] \; .$$

Alors,

$$P\left[R_{1,t+j} \mid 1, R_{1,t+1}, R_{1t}, ...\right] = P\left[R_{1,t+j} \mid 1, R_{1t}, R_{1,t-1}, ...\right]$$
$$+b_j\left\{R_{1,t+1} - P\left[R_{1,t+1} \mid 1, R_{1t}, R_{1,t-1}, ...\right]\right\} ,$$
$$_{t+j}F_{1,t+1} =_{t+j} F_{1t} + b_j\left[R_{1,t+1} - {}_{t+1}F_{1t}\right]$$

$$_{t+j}F_{1,t+1} - {}_{t+j}F_{1t} = b_j\left(R_{1,t+1} - {}_{t+1}F_{1t}\right) \ . \tag{2.3}$$

Formule d'attentes adaptatives (sans terme d'erreur). À partir de ce modèle, on s'attend à trouver :

(a) une constante nulle ;
(b) b_j significatif $(b_j \neq 0)$;
(c) $\bar{R}^2$ élevé.

Meiselman (1963) a confirmé ces prédictions (USA, 1901-1954), mais

$$\begin{array}{lcll} \bar{R}^2 & = & 0,91 & \quad j=1 \\ \bar{R}^2 & = & 0,34 & \quad j=8 \ . \end{array}$$

On peut transformer (2.3) en régression standard en supposant que les spéculateurs utilisent d'autres variables pour faire de la prévision.

Supposons que

$$\begin{array}{rcl} & & R_{1,t+j} \text{ sur } R_{1t}, R_{1,t-1}, \ldots, y_t, y_{t-1}, \ldots \\ \Omega_t & = & \left\{R_{1t}, R_{1,t-1}, ..., y_t, y_{t-1}, ...\right\} \ . \end{array}$$

Alors on peut écrire :

$$\begin{array}{rl} & P\left[R_{1,t+j} \mid \Omega_{t+1}\right] - P\left[R_{1,t+j} \mid \Omega_t\right] \\ = & \gamma_j\left(R_{1,t+1} - P\left[R_{1,t+1} \mid \Omega_t\right]\right) + \beta_j\left(y_{t+1} - P\left[y_{t+1} \mid \Omega_t\right]\right), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} _{t+j}F_{1t+1} - {}_{t+j}F_{1t} & = & \gamma_j\left(R_{1,t+1} - P\left[R_{1,t+1} \mid \Omega_t\right]\right) \\ & & +\beta_j\left(y_{t+1} - P\left[y_{t+1} \mid \Omega_t\right]\right) \ . \end{array} \tag{2.4}$$

De plus, si on projette $y_{t+1} - P\left[y_{t+1} \mid \Omega_t\right]$ sur $R_{1,t+1} - P\left[R_{1,t+1} \mid \Omega_t\right]$ on obtient la décomposition :

$$y_{t+1} - P\left[y_{t+1} \mid \Omega_t\right] = \alpha_j\left(R_{1,t+1} - P\left[R_{1,t+1} \mid \Omega_t\right]\right) + \varepsilon_{t+1} \tag{2.5}$$

où

$$\alpha_j = \frac{E\left\{\left(R_{1,t+1} - P\left[R_{1,t+1} \mid \Omega_t\right]\right)\left(y_{t+1} - P\left[y_{t+1} \mid \Omega_t\right]\right)\right\}}{E\left(R_{1,t+1} - P\left[R_{1,t+1} \mid \Omega_t\right]\right)^2}$$

$$\mathsf{Cov}\left\{\varepsilon_{t+1}, R_{1,t+1} - P\left[R_{1,t+1} \mid \Omega_t\right]\right\} = 0\ .$$

Si on remplace (2.5) dans (2.4), on obtient :

$$\begin{aligned} {}_{t+j}F_{1,t+1} - {}_{t+j}F_{1t} &= \varphi_j \left(R_{1,t+1} - P\left[R_{1,t+1} \mid \Omega_t\right]\right) + \varepsilon_{t+1} \\ \varphi_j &= \beta_j \alpha_j + \gamma_j\ . \end{aligned}$$

Haute valeur de $\bar{R}^2 \Longrightarrow$ Grande partie de l'information continue dans les valeurs retardées de R_{1t}.

3. Application de la loi des projections itérées

Soit le modèle d'anticipation de la structure à terme des taux d'intérêts :

$$\begin{aligned} {}_{t+t}F_{1t} &= P\left[R_{1,t+j} \mid \Omega_t\right]\ ,\ j = 1, 2, ... \\ \Omega_t &\supset \Omega_{t-1} \supset \Omega_{t-2} \supset ... \end{aligned}$$

où Ω_t toute l'information disponible au temps t. Par la loi des projections itérées,

$$\begin{aligned} P\left[{}_{t+j}F_{1t} \mid \Omega_{t-1}\right] &= P\left[P\left[R_{1,t+j} \mid \Omega_t\right] \mid \Omega_{t-1}\right] \\ &= P\left[R_{1,t+j} \mid \Omega_{t-1}\right] \\ &= {}_{t+j}F_{1,t-1} \\ P\left[{}_{t+j}F_{1t} \mid \Omega_{t-1}\right] &= {}_{t+j}F_{1,t-1}. \end{aligned}$$

La suite ${}_{t+j}F_{1,t-n}\ ,\ {}_{t+j}F_{1,t-n+1}\ ,\ ...\ ,\ {}_{t+j}F_{1t}$ constitue une martingale (faible) par rapport à Ω_{t-1}, le meilleur prédicteur de ${}_{t+j}F_{1t}$, c'est ${}_{t+j}F_{1,t-1}$

$$P\left[\left({}_{t+j}F_{1t} - {}_{t+j}F_{1,t-1}\right) \mid \Omega_{t-1}\right] = 0.$$

La révision dans la prévision de $R_{1,t+j}$ entre $t-1$ et t ne peut être prédite à l'aide de l'information contenue dans Ω_{t-1}. Cette hypothèse est testable. Notons aussi que

$$P\left[R_{1,t+j} - {}_{t+j}F_{1t} \mid \Omega_{t-1}\right] = 0.$$

Les erreurs de prévision doivent avoir moyenne 0 et sont non-prévisibles à partir de l'information dans Ω_{t-1}.

4. Notes bibliographiques

Le lecteur trouvera des discussions des applications de la théorie des la prévision optimale à des modèles économiques dans Sargent (1987, Chapter X) et Whiteman (1983).

Références

Meiselman, D. (1963), *The Term Structure of Interest Rates*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Sargent, T. J. (1987), *Macroeconomic Theory*, second edn, Academic Press, New York .

Whiteman, C. H. (1983), *Linear Rational Expectations Models*, University of Minnesota Press, Minneapolis, MN.