Introduction à la prévision à partir de modèles de séries chronologiques *

Jean-Marie Dufour †

Première version : Avril 1987
Révisions : Mai 2003, Mars 2005
Compilé : 30 mars 2005, 3:04pm

* Cette recherche a bénéficié du support financier de la Chaire de recherche du Canada en économétrie, du Conseil des Arts du Canada (Bourse Killam), du Conseil de recherche en sciences humaines du Canada, du Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada, de la Fondation Alexander von Humboldt (Allemagne), de l'Institut de Finance mathématique de de Montréal (IFM2), du Réseau canadien de centres d'excellence (projet MITACS), du Fonds de recherche sur la société et la culture (Québec), et du Fonds de recherche sur la nature et les technologies (Québec).

† Titulaire de la Chaire de recherche du Canada en économétrie (Université de Montréal). Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO), Centre interuniversitaire de recherche en économie quantitative (CIREQ) et Département de sciences économiques, Université de Montréal. Adresse postale: Département de sciences économiques, Université de Montréal, C.P. 6128 succursale Centre Ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3J7. TEL: (514) 343 2400; FAX: (514) 343 5831; courriel: jean.marie.dufour@umontreal.ca. Page Web: http://www.fas.umontreal.ca/SCECO/Dufour .

Table des matières

1. Introduction

Les modèles de séries chronologiques reposent sur l'utilisation de modèles de processus stochastiques (aléatoires) au moyen desquels une variable peut être prédite à partir de son propre passé.

Les types de modèles importants sont :

1. bruit blanc,
2. processus autorégressif ;
3. processus moyenne mobile ;
4. $ARMA$;
5. $ARIMA$.

2. Bruit blanc

Une suite de v.a.'s $(\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc ssi

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t) &= \mu \text{ (constante)}, \quad \forall t \, , \\ Cov(\varepsilon_s, \varepsilon_t) &= 0 \, , \qquad\qquad\qquad \forall \, s \neq t \, . \end{aligned}$$

Souvent, on suppose aussi que $\mu = 0$ (bruit blanc de moyenne zéro).

Le propre d'un bruit blanc est qu'il n'est pas possible (une fois μ connu) de prévoir ε_{t+1} par une combinaison linéaire des valeurs passées $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, ...$:

$$\begin{aligned} P(\varepsilon_{t+1} \mid \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, ...) &= 0 \, , \\ P(\varepsilon_{t+m} \mid \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, ...) &= 0 \, , \quad m \geq 1 \, . \end{aligned}$$

3. Processus autorégressifs

On dit que X_t suit un processus autorégressif d'ordre $p\,[AR(p)]$ ssi

$$X_t = \theta_0 + \varphi_1 X_{t-1} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

où

$$\begin{aligned} &\varepsilon_t \sim \text{Bruit blanc } \left(0, \sigma^2\right) \, , \\ &\varepsilon_t \text{ est non corrélé avec } X_{t-1,} X_{t-2}, ... \, . \end{aligned}$$

On note aussi que

$$\varphi(B) X_t = \theta_0 + \varepsilon_t , \quad \varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \cdots - \varphi_p B^p .$$

Considérons le processus $AR(1)$ avec $\theta_0 = 0$:

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t .$$

Alors,

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 \varphi_1^t + \left(\varepsilon_t + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \varphi_1^{t-1} \varepsilon_1\right) \\ &= X_0 \varphi_1^t + \sum_{j=0}^{t-1} \varphi_1^j \varepsilon_{t-j} \\ &= X_{-N} \varphi_1^{t+N} + \sum_{j=0}^{t+N-1} \varphi_1^j \varepsilon_{t-j} . \end{aligned}$$

Si $|\varphi_1| < 1$, le premier devient négligeable et on peut écrire :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j \varepsilon_{t-j} .$$

Les variables $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ ne constituent pas un bruit blanc. On a :

$$\begin{aligned} E(X_t) &= 0 , \\ Var(X_t) &= \sigma^2 / \left(1 - \varphi_1^2\right) , \\ \gamma(k) &= Cov(X_t, X_{t+k}) = \varphi_1^{|k|} \sigma^2 / \left(1 - \varphi_1^2\right) , \\ \rho(k) &= Corr(X_t, X_{t+k}) = \varphi_1^{|k|} . \end{aligned}$$

La moyenne et les covariances de X_t ne dépendent pas de t (processus stationnaire).

En général, les autocorrélations d'un processus $AR(p)$ décroissent à un rythme exponentiel. Comme

$$X_{t+1} = \varphi_1 X_t + \varepsilon_{t+1} ,$$

on peut prévoir X_t au moyen des formules suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{X}_t(1) &= \varphi_1 X_t \equiv P(X_{t+1} \mid X_t, X_{t-1}, ...) , \\ \hat{X}_t(2) &= \varphi_1 \hat{X}_t(1) = \varphi_1^2 X_t \equiv P(X_{t+2} \mid X_t, X_{t-1}, ...) , \\ \hat{X}_t(h) &= \varphi_1^h X_t , \quad h = 1, 2, 3, ... \end{aligned}$$

On peut montrer que $\hat{X}_t(h)$ est une prévision optimale.

L'erreur de prévision 1 période à l'avance est :

$$e_t(1) = X_{t+1} - \hat{X}_t(1) = \varepsilon_{t+1} \quad \text{Bruit blanc.}$$

Prévision à partir d'un modèle AR(p)

Définissons :

$$\hat{X}_t(h) = X_{t+h} \ , \quad \text{si } h \leq 0 \ .$$

Comme

$$\begin{aligned} X_t &= \theta_0 + \sum_{j=1}^{p} \varphi_j X_{t-j} + \varepsilon_t \ , \\ X_{t+h} &= \theta_0 + \sum_{j=1}^{p} \varphi_j X_{t+h-j} + \varepsilon_{t+h} \ , \end{aligned}$$

on obtient des prévisions :

$$\hat{X}_t(h) = \theta_0 + \sum_{j=1}^{p} \varphi_j \hat{X}_t(h-j) \ , \quad h = 1, 2, \ldots \ .$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} \hat{X}_t(1) &= \theta_0 + \sum_{j=1}^{p} \varphi_j X_{t+1-j} \ , \\ \hat{X}_t(2) &= \theta_0 + \varphi_1 \hat{X}_t(1) + \sum_{j=2}^{p} \varphi_j X_{t-j+2} \ . \end{aligned}$$

4. Processus de moyenne mobile

On dit que X_t suit un processus de moyenne mobile d'ordre q $[MA(q)]$ si

$$X_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} = \theta_0 + \theta_q(B) \varepsilon_t \ ,$$

où

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &\sim BB\left(0, \sigma^2\right) \ , \\ \theta_q(B) &= 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q \ , \end{aligned}$$

$$E(X_t) = \theta_0 .$$

Les X_t sont corrélés entre eux.

Prenons $q = 1$ avec $\theta_0 = 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
X_t &= \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} , \\
Var(X_t) &= \left(1 + \theta_1^2\right) \sigma_\varepsilon^2 , \\
Cov(X_t, X_{t-1}) &= -\theta_1 \sigma_\varepsilon^2 , \\
\gamma(k) &= Cov(X_t, X_{t+k}) = 0 , \quad \text{si } k > 1 , \\
\rho(k) &= Corr(X_t, X_{t+k}) = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} , \quad \text{si } k = 1 , \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = 0 , \quad \text{si } k \geq 2 .
\end{aligned}$$

Prévisions à partir d'un modèle $MA(q)$

Comme

$$\begin{aligned}
X_{t+1} &= \varepsilon_{t+1} - \theta_1 \varepsilon_t , \\
\hat{X}_t(1) &= -\theta_1 \varepsilon_t .
\end{aligned}$$

Pour un processus $MA(q)$,

$$\begin{aligned}
\hat{X}_t(h) &= \theta_0 , \quad \text{si } h > q \\
&= \theta_0 - \theta_1 \hat{\varepsilon}_{t+h-1} - \cdots - \theta_q \hat{\varepsilon}_{t+h-q} , \quad 1 \leq h \leq q ,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_{t+j} &= \varepsilon_{t+j} , \quad \text{si } j \leq 0 , \\
&= 0 , \quad \text{si } j > 0 .
\end{aligned}$$

5. Processus ARMA

On dit que X_t suit un processus ARMA(p, q) si

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \cdots - \varphi_p X_{t-p} = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} .$$

La prévision est basée sur des principes semblables à celle des processus $AR(q)$ ou $MA(q)$.

6. Stationnarité et inversibilité

On dit qu'un processus X_t est stationnaire au sens large (*SSL*) ssi

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \mu \,, \\ Cov(X_t, X_{t-k}) &= \gamma(k) \ . \end{aligned}$$

Le bruit blanc et les processus $MA(q)$ sont *SSL*. Pour qu'un processus $AR(p)$ soit $AR(p)$ ou $ARMA(p,q)$, il faut que les racines de l'équation

$$1 - \varphi_1 z - \cdots - \varphi_p z^p = 0$$

satisfassent $|z| > 1$ (à l'extérieur du cercle unité).

Tout processus $AR(p)$ ou $ARMA(p,q)$ peut s'écrire sous la forme $MA(\infty)$:

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad \text{(théorème de Wold)}$$

De façon analogue, un processus $MA(q)$ peut s'écrire sous une forme autorégressive si les racines de

$$1 - \theta_1 z - \cdots - \theta_q z^q = 0$$

sont à l'extérieur du cercle unité (inversibilité).

Beaucoup de variables économiques ne sont pas stationnaires. Box et Jenkins (1976) suggèrent de les transformer pour les rendre stationnaires. On différencie une ou plusieurs fois :

$$X_t \to W_t = (1-B)^d X_t \ .$$

Processus $ARIMA$:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \varphi_1 B - \cdots - \varphi_p B^D\right)(1-B)^d X_t \\ = \;& \theta_0 + \left(1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q\right)\varepsilon_t \,. \end{aligned}$$

7. Autocorrélations et autocorrélations partielles

Pour estimer $\rho(k)$, on utilise

$$r_k = \sum_{t=1}^{n-k} \left(X_t - \bar{X}\right)\left(X_{t+k} - \bar{X}\right) \Big/ \sum_{t=1}^{n} \left(X_t - \bar{X}\right)^2 \ .$$

On peut identifier l'ordre d'un processus $MA(q)$ en notant que

$$r_k \simeq 0 \ , \quad \text{pour } k > q \ .$$

On peut identifier l'ordre d'un processus $AR(p)$ en examinant les autocorrélations partielles. On obtient la k-ième autocorrélation partielle a_{kk} en considérant le système d'équations :

$$\rho_k = \sum_{j=1}^{k} a_{kj}\rho_{k-j} \ , \quad j = 1, 2, ..., k \ .$$

Si on remplace ρ_k par r_k, on peut estimer $\hat{a}_{kk}$, $k = 1, 2, ...$.

8. Approche de Box-Jenkins pour la construction de modèles de séries chronologiques

Box et Jenkins (1976) suggèrent un processus en trois étapes :

(1) Identification
  Transformation préliminaire des données
    (différentiation, log)
  Valeurs de p et q

(2) Estimation (maximum de vraisemblance)

(3) Validation
  Résidus blancs

Si le modèle est insatisfaisant., on revient à (1).

9. Exemples

Voir Granger (1980, pages 68-71).

10. Notes bibliographiques

Voir Le lecteur trouvera des discussions élémentaires de la prévision à partir de modèles ARIMA dans Granger (1980) et Diebold (2004).

Références

Box, G. E. P. et Jenkins, G. M. (1976), *Time Series Analysis : Forecasting and Control*, second edn, Holden-Day, San Francisco.

Diebold, F. X. (2004), *Elements of Forecasting*, third edn, Thomson South-Western, Mason, Ohio.

Granger, C. W. J. (1980), *Forecasting in Business and Economics*, Academic Press, New York.