

SIGLE DU COURS: ECN 3150 NOM(S) DU/DES PROFESSEUR(S): Jean-Marie DUFOUR

TITRE DU COURS: ECONOMETRIE - Examen différé

DIRECTIVES PÉDAGOGIQUES: Documentation non permise.

Calculatrices et règles à calcul autorisées.

Ce questionnaire doit être rendu à la fin de l'examen.

QUESTION 1: Répondez brièvement aux questions suivantes:

- (40 points)
- 1) Pourquoi R^2 ne peut-il jamais baisser lorsqu'on ajoute une variable explicative additionnelle dans le modèle classique?
 - 2) Dans quel(s) condition(s) les estimateurs de moindres carrés et les estimateurs de vraisemblance maximale des coefficients de régression sont-ils identiques dans le modèle linéaire classique?
 - 3) Quelle est la signification du terme "hétéroscédasticité"? Quelles conséquences a le fait de ne pas tenir compte de celle-ci (et simplement utiliser les moindres carrés ordinaires)?
 - 4) Qu'est-ce qu'un estimateur convergent?
 - 5) Pourquoi utilise-t-on, dans certains cas, la méthode des variables instrumentales? Donnez un exemple d'une situation où l'utilisation d'une telle méthode paraîtrait justifiée.
 - 6) Soient les deux relations

$$\begin{matrix} Y_1 & = & X_1 & \beta_1 & + & u_1, & Y_2 & = & X_2 & \beta_2 & + & u_2 \\ \text{Tx1} & & \text{TxK}_1 & \text{K}_1 \times 1 & & & \text{Tx1} & & \text{TxK}_2 & \text{K}_2 \times 1 & & \text{Tx1} \end{matrix}$$

$$\text{où } E[u_1 u_1'] = \sigma_{11} I_T, \quad E[u_2 u_2'] = \sigma_{22} I_T \quad \text{et} \quad E[u_1 u_2'] = \sigma_{12} I_T.$$

Donnez deux ensembles de conditions suffisantes sans lesquelles la méthode de Zellner pour estimer ce système n'est pas susceptible d'améliorer la précision de l'estimation.

- 7) On considère le modèle non-linéaire suivant:

$$y_t = \beta_2 + \beta_1 x_{1t}^{\beta_2} + \frac{x_{2t}}{\beta_3} + u_t, \quad t = 1, \dots, 100$$

où les erreurs u_t , $t = 1, \dots, 100$ sont i.i.d. $N[0, \sigma^2]$ et x_1 ainsi que x_2 sont des régresseurs non-stochastiques.

Décrivez comment on pourrait tester l'hypothèse

$$H_0: \beta_3 = 1 \text{ et } \beta_2 = 2.$$

- 8) On considère une équation du type:

QUESTION 2: On suppose que les dépenses de consommation C_t (durant la période t) (35 points) sont une fonction linéaire du revenu Y_t et des actifs liquides L_t (monnaie, obligations, etc.):

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 L_t + u_t$$

(où u_t est une perturbation aléatoire). Utilisant des données trimestrielles qui couvrent la période 1953-1959, on obtient (par les moindres carrés ordinaires) l'estimation suivante:

$$C_t = -13.391 + .63258 Y_t + .45065 L_t + u_t$$

(-3.71) (8.32) (4.24)

$$R^2 = .9951, \quad T = 28$$

a) En supposant que les hypothèses du modèle linéaire classique sont satisfaites, testez (au niveau .05) si

- 1) $\beta_2 = 0$;
- 2) $\beta_1 = 0$ et $\beta_2 = 0$.

b) Supposons que l'on ait des raisons de penser que la variance des erreurs durant la période 1957-1959 était plus grande que durant la période 1953-56. Dans ce contexte, décrivez comment on pourrait tester l'hypothèse d'égalité des variances des erreurs (entre les deux périodes concernées).

c) Calculant la statistique de Durbin-Watson vous obtenez $DW = .612$. Sur cette base, critiquez les conclusions obtenues en a). (Soyez précis). S'il y a lieu, proposez une solution au problème.

QUESTION 3: Etant donné le modèle $y = X\beta + u$, on suppose que toutes les conditions du (25 points) modèle linéaire classique sont satisfaites sauf que $E[uu'] = \sigma^2 V$, où V est une matrice positive définie (connue).

- a) Si on applique les moindres carrés ordinaires à cette équation, l'estimateur résultant $\hat{\beta}$ est-il sans biais? (Justifiez votre réponse).
- b) Calculez la matrice de covariance de $\hat{\beta}$.
- c) Existe-t-il un meilleur estimateur? Si oui, en quel sens et dérivez-le.

* * *

Jean-Marie Defourn
Signature du professeur

FACULTÉ DES ARTS ET DES SCIENCES - DÉPARTEMENT DE SCIENCES ÉCONOMIQUES

SIGLE DU COURS: ECN 3150 NOM(S) DU/DES PROFESSEUR(S): Jean-Marie Dufour

TITRE DU COURS: Econométrie

QUESTION 1 : (35 points)

Indiquez si chacune des assertions suivantes est VRAIE, FAUSSE ou INCERTAINE. Justifiez brièvement votre réponse.

- 1) Lorsqu'on ajoute une variable explicative à une régression linéaire, la valeur du coefficient de corrélation multiple corrigé \bar{R}^2 n'augmente pas nécessairement.
- 2) Lorsque les erreurs suivent une loi multinormale (dans le modèle linéaire classique); la somme des résidus (des moindres carrés ordinaires) doit être égale à zéro.
- 3) La méthode de Zellner pour l'estimation conjointe de plusieurs équations est toujours plus efficace que l'application des moindres carrés ordinaires à chaque équation.
- 4) La méthode des moindres carrés ordinaires et la méthode des doubles moindres carrés peuvent être considérés comme des cas spéciaux de la méthode des variables instrumentales.
- 5) Pour l'estimation d'un modèle de régression linéaire avec erreurs autocorrélées (suivant un processus autorégressif d'ordre 1), la méthode de Cochrane-Orcutt et la méthode de Durbin donnent généralement le même résultat.
- 6) Dans le traitement des modèles à retards échelonnés, la méthode d'Almon peut être considérée comme un cas spécial de la méthode de Koyck.
- 7) La procédure de Box-Cox permet de déterminer si les erreurs (dans le modèle linéaire classique) sont hétéroskédastiques.

QUESTION 2 : (45 points)

Un économètre propose la forme suivante pour la demande de monnaie durant l'hyperinflation allemande :

$$\log \left(\frac{M_t}{P_t} \right) = \beta_0 + \beta_1 \pi_t^* + \varepsilon_t$$

- où M_t = stock de monnaie (au temps t);
 P_t = niveau des prix (au temps t);
 π_t^* = taux d'inflation anticipé (au temps t);
 ε_t = erreur aléatoire.

Sur base d'une série mensuelle couvrant la période février 1921-août 1923 (31 observations), il obtient (par les moindres carrés ordinaires) l'équation :

a) Sur la base de ces données, testez les hypothèses suivantes (à un niveau de 5%) :

- 1) $\beta_1 = -1.0$;
- 2) les erreurs ne sont pas autocorrélées;
- 3) la demande de monnaie est stable;
- 4) la variance des erreurs est constante; (ce résultat peut-il affecter la validité des résultats précédents?).

(Précisez bien les hypothèses sur lesquelles chacun de ces tests est basé).

b) Ce modèle suppose-t-il que l'élasticité de la demande de monnaie est constante (le long de la courbe de demande de monnaie)? Sinon, décrivez comment on pourrait mesurer cette élasticité.

c) Un deuxième économètre propose le modèle alternatif

$$\log \frac{M_t}{P_t} = \beta_0' + \beta_1' \log \pi_t^* + \epsilon_t$$

Décrivez une procédure statistique par laquelle on pourrait discriminer entre ce modèle et le précédent.

d) Un troisième économètre propose d'ajouter la valeur retardée de $\log(M_t/P_t)$ à l'équation et obtient (par les moindres carrés ordinaires) :

$$\log \frac{M_t}{P_t} = \frac{3.403}{(0.543)} - \frac{2.003\pi_t^*}{(0.231)} + \frac{0.430 \log \left(\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}} \right)}{(0.097)} + \hat{\epsilon}_t$$

$$R^2 = 0.949, \quad DW = 1.81$$

(échantillon effectif : mars 1921-août 1923, après déduction d'une observation pour la variable retardée).

- 1) Sur la base de ce résultat, l'addition de cette variable vous apparaît-elle justifiée? Justifiez votre réponse.
- 2) Testez si les erreurs sont autocorrélées.
- 3) Donnez une justification économique de la proposition du troisième économètre. (Essayez d'être explicite).

QUESTION 3 : (20 points)

Soit le modèle

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_k x_{tk} + \epsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

où $k \geq 2$ et toutes les hypothèses du modèle linéaire classique normal sont satisfaites. Montrez que le test du quotient de vraisemblance pour l'hypothèse

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_k = 0$$

est équivalent à un test basé sur la statistique

$$F = \frac{R^2 / (K - 1)}{(1 - R^2) / (T - K)}$$

TABLES

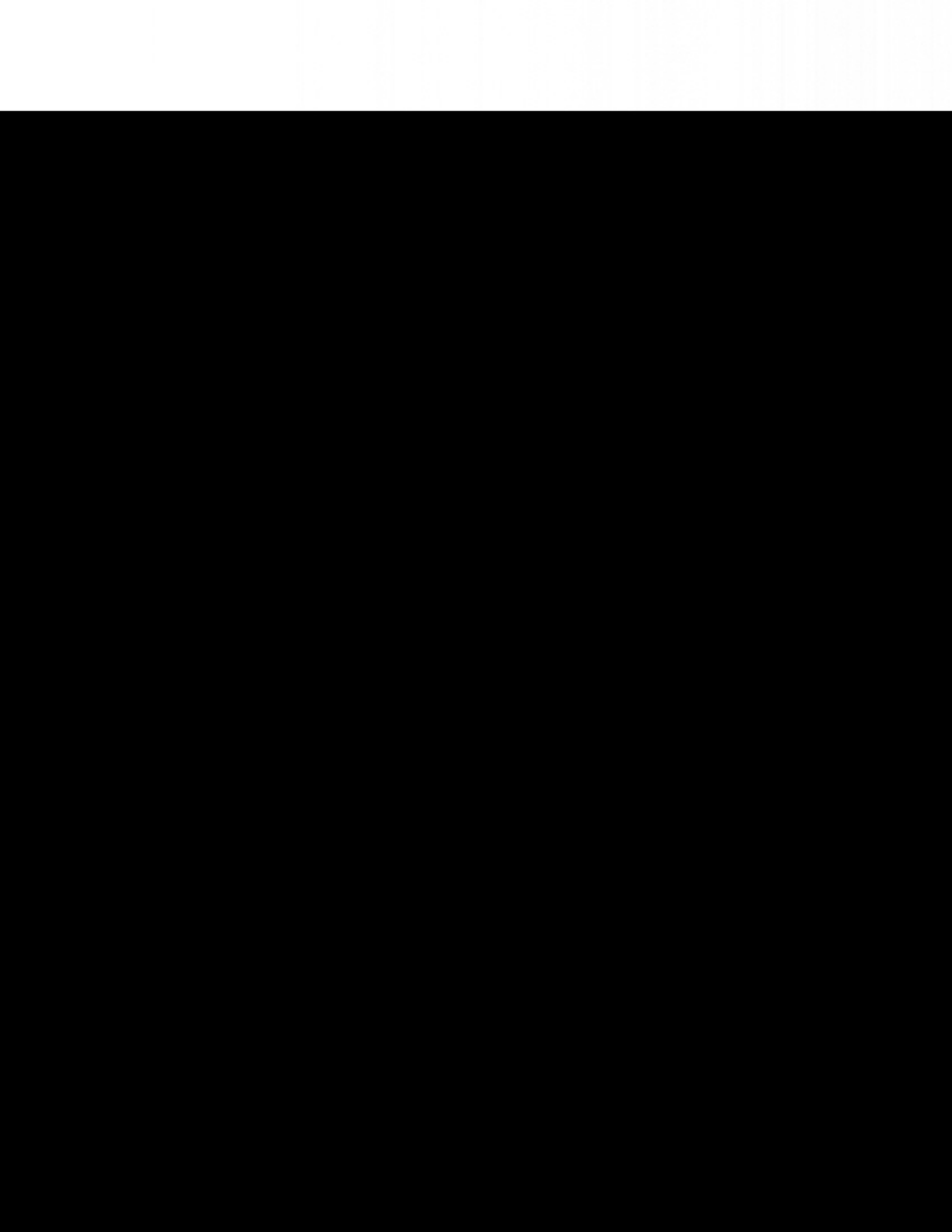
The *t* Distribution and the Normal Distribution^a

Degrees of Freedom	Pb	.25	.1	.05	.025	.01	.005
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	
15	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	
16	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	
17	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	
18	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	
19	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	
20	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	
21	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	
22	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	
23	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	
24	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	
25	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	
26	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	
27	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	
28	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	
29	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	
30	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	
40	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	
60	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	
120	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	
∞	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	

(Normal)

Source. This table is abridged from E. S. Pearson and H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1 (1954), p. 138, with kind permission of the Syndics of the Cambridge University Press, publishers for the Biometrika Society.

^a The smaller probability shown at the head of each column is the area in one tail; the larger probability is the area in both tails. Example: With 20 degrees of freedom, a *t* value larger than 1.725 has a .05 probability and a *t* value exceeding 1.725 in absolute value has a .1 probability.



The χ^2 Distribution^a

Degrees of freedom	ph	.995	.990	.975	.950	.900
1		$3.84146 \cdot 10^{-10}$	$15.708 \cdot 10^{-4}$	$98.206 \cdot 10^{-4}$	$39.3214 \cdot 10^{-4}$	0.157908
2		.0100251	.0201007	.0506356	.102587	.210720
3		.0717212	.148332	.351795	.584375	.853785
4		.206990	.297110	.484419	.710721	1.063623
5		.411740	.554300	.831211	1.145476	1.610131
6		.675727	.872085	1.237347	1.635399	2.20413
7		.989265	1.239043	1.68987	2.16935	2.83311
8		1.34419	1.646482	2.17973	2.73264	3.48954
9		1.734926	2.087912	2.70039	3.32511	4.16816
10		2.15585	2.55821	3.24697	3.94010	4.86518
11		2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	5.57779
12		3.07882	3.57056	4.40379	5.22603	6.30380
13		3.56503	4.10091	5.00874	5.89160	7.00000
14		4.07468	4.64043	5.62872	6.57063	7.78953
15		4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	8.54675
16		5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	9.31223
17		5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	10.0852
18		6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	10.8649
19		6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	11.6509
20		7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	12.4426
21		8.03366	8.89720	10.28293	11.5913	13.2396
22		8.64272	9.54249	10.9823	12.3380	14.0415
23		9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	14.8479
24		9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587
25		10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734
26		11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	17.2919
27		11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	18.1138
28		12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.9392
29		13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	19.7677
30		13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992
40		20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505
50		27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886
60		35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589
70		43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3280
80		51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778
90		59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912
100		67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581

^a The probability shown at the head of the column is the area in the right-hand tail. Example: With 4 degrees of freedom, a χ^2 value larger than 7.78 has a .1 probability.

	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005
101.5308	.45937	1.32130	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944	
.575364	1.38629	2.77259	4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966	
1.212534	2.36597	4.10835	6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8181	
1.92255	3.35670	5.38527	7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8600	
2.67460	4.35146	6.62568	9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496	
3.45460	5.34812	7.84080	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476	
4.25485	6.34581	9.03715	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777	
5.07064	7.34412	10.2188	13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550	
5.89883	8.34283	11.3887	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893	
6.71720	9.34182	12.5489	15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882	
7.58412	10.3410	13.7007	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569	
8.43842	11.3403	14.8454	18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995	
9.29006	12.3393	15.9830	19.8110	22.1621	24.7356	27.6883	29.8194	
10.1653	13.3393	17.1170	21.0642	23.0848	26.1190	29.1543	31.3193	
11.0165	14.3389	18.2451	22.3072	24.0958	27.4884	30.5779	32.8013	
11.9122	15.3385	19.3688	23.5418	25.2962	28.8454	31.9999	34.2672	
12.7919	16.3381	20.4887	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185	
13.6753	17.3379	21.6049	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564	
14.5620	18.3376	22.7178	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822	
15.4518	19.3374	23.8277	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968	
16.3444	20.3372	24.9348	29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010	
17.2306	21.3370	26.0393	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956	
18.1173	22.3369	27.1413	32.0069	35.1725	38.0757	41.6384	44.1811	
19.0372	23.3367	28.2412	33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585	
19.9393	24.3366	29.3389	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278	
20.8434	25.3364	30.4345	35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899	
21.7494	26.3363	31.5284	36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6448	
22.6572	27.3362	32.6205	37.9159	41.3172	44.4607	48.2782	50.9933	
23.5666	28.3362	33.7109	39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356	
24.4776	29.3360	34.7998	40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720	
25.3863	30.3354	35.8160	41.8050	44.9167	48.2167	52.1899	54.9990	
26.2938	31.3347	36.8164	43.1671	46.0489	49.4402	53.4794	56.3157	
27.1983	32.3344	37.8103	44.3970	47.0819	50.6499	54.7425	57.6215	
28.1003	33.3343	38.8103	45.8521	48.2721	51.8469	55.9899	58.9177	
29.0000	34.3343	39.8103	46.9300	49.3721	53.0321	57.2177	60.1957	
29.8976	35.3343	40.8103	48.0300	50.4571	54.1999	58.4377	61.4667	
30.7926	36.3343	41.8103	49.1877	51.5299	55.3521	59.6425	62.7215	
31.6853	37.3343	42.8103	50.4699	52.5899	56.4899	60.8325	63.9615	
32.5753	38.3343	43.8103	51.8166	53.6299	57.6221	62.0077	65.1865	
33.4626	39.3343	44.8103	53.1099	54.6621	58.7499	63.1687	66.3967	
34.3473	40.3343	45.8103	54.4400	55.6899	59.8721	64.3199	67.5957	
35.2293	41.3343	46.8103	55.7000	56.7077	60.9899	65.4525	68.7807	
36.1086	42.3343	47.8103	56.8333	57.7221	62.1021	66.5767	69.9527	
36.9853	43.3343	48.8103	57.9333	58.7321	63.2099	67.6899	71.1117	
37.8593	44.3343	49.8103	59.0000	59.7377	64.3121	68.7925	72.2567	
38.7306	45.3343	50.8103	60.0666	60.7399	65.4099	69.8857	73.3917	
39.5993	46.3343	51.8103	61.1333	61.7421	66.5021	70.9699	74.5147	
40.4653	47.3343	52.8103	62.2000	62.7449	67.5899	72.0447	75.6267	
41.3286	48.3343	53.8103	63.2666	63.7477	68.6721	73.1099	76.7287	
42.1893	49.3343	54.8103	64.3333	64.7500	69.7499	74.1657	77.8207	
43.0473	50.3343	55.8103	65.4000	65.7521	70.8221	75.2117	78.9027	
43.9026	51.3343	56.8103	66.4666	66.7549	71.8899	76.2487	79.9747	
44.7553	52.3343	57.8103	67.5333	67.7577	72.9521	77.2767	81.0367	
45.6053	53.3343	58.8103	68.6000	68.7599	73.9999	78.2957	82.0887	
46.4526	54.3343	59.8103	69.6666	69.7621	75.0321	79.3067	83.1407	
47.2973	55.3343	60.8103	70.7333	70.7649	76.0599	80.3099	84.1927	
48.1393	56.3343	61.8103	71.8000	71.7677	77.0821	81.3047	85.2447	
48.9786	57.3343	62.8103	72.8666	72.7700	78.1099	82.2917	86.2967	
49.8153	58.3343	63.8103	73.9333	73.7721	79.1321	83.2717	87.3487	
50.6493	59.3343	64.8103	75.0000	74.7749	80.1499	84.2447	88.3967	
51.4806	60.3343	65.8103	76.0666	75.7777	81.1621	85.2099	89.4447	
52.3093	61.3343	66.8103	77.1333	76.7800	82.1699	86.1667	90.4927	
53.1353	62.3343	67.8103	78.2000	77.7821	83.1721	87.1157	91.5407	
53.9586	63.3343	68.8103	79.2666	78.7849	84.1699	88.0587	92.5887	
54.7793	64.3343	69.8103	80.3333	79.7877	85.1621	89.0000	93.6367	
55.5973	65.3343	70.8103	81.4000	80.7900	86.1549	90.0000	94.6847	
56.4126	66.3343	71.8103	82.4666	81.7921	87.1477	91.0000	95.7327	
57.2253	67.3343	72.8103	83.5333	82.7949	88.1399	92.0000	96.7807	
58.0353	68.3343	73.8103	84.6000	83.7977	89.1321	93.0000	97.8287	
58.8426	69.3343	74.8103	85.6666	84.8000	90.1249	94.0000	98.8767	
59.6473	70.3343	75.8103	86.7333	85.8021	91.1177	95.0000	99.9247	
60.4493	71.3343	76.8103	87.8000	86.8049	92.1099	96.0000	100.9727	
61.2486	72.3343	77.8103	88.8666	87.8077	93.1021	97.0000	102.0207	
62.0453	73.3343	78.8103	89.9333	88.8100	94.0899	98.0000	103.0687	
62.8393	74.3343	79.8103	91.0000	89.8121	95.0821	99.0000	104.1167	
63.6306	75.3343	80.8103	92.0666	90.8149	96.0699	100.0000	105.1647	
64.4193	76.3343	81.8103	93.1333	91.8177	97.0521	101.0000	106.2127	
65.2053	77.3343	82.8103	94.2000	92.8200	98.0399	102.0000	107.2607	
65.9886	78.3343	83.8103	95.2666	93.8221	99.0321	103.0000	108.3087	
66.7693	79.3343	84.8103	96.3333	94.8249	100.0249	104.0000	109.3567	
67.5473	80.3343	85.8103	97.4000	95.8277	101.0177	105.0000	110.4047	
68.3226	81.3343	86.8103	98.4666	96.8300	102.0099	106.0000	111.4527	
69.0953	82.3343	87.8103	99.5333	97.8321	103.0021	107.0000	112.5007	
69.8653	83.3343	88.8103	100.6000	98.8349	104.0000	108.0000	113.5487	
70.6326	84.3343	89.8103	101.6666	99.8377	105.0000	109.0000	114.5967	
71.3973	85.3343	90.8103	102.7333	100.8400	106.0000	110.0000	115.6447	
72.1593	86.3343	91.8103	103.8000	101.8421	107.0000	111.0000	116.6927	
72.9186	87.3343	92.8103	104.8666	102.8449	108.0000	112.0000	117.7407	
73.6753	88.3343	93.8103	105.9333	103.8477	109.0000	113.0000	118.7887	
74.4293	89.3343	94.8103	107.0000	104.8500	110.0000	114.0000	119.8367	
75.1806	90.3343	95.8103	108.0666	105.8521	111.0000	115.0000	120.8847	
75.9286	91.3343	96.8103	109.1333	106.8549	112.0000	116.0000	121.9327	
76.6726	92.3343	97.8103	110.2000	107.8577	113.0000	117.0000	122.9807	
77.4136	93.3343	98.8103	111.2666	108.8600	114.0000	118.0000	124.0287	
78.1513	94.3343	99.8103	112.3333	109.8621	115.0000	119.0000	125.0767	
78.8853	95.3343	100.8103	113.4000	110.8649	116.0000	120.0000	126.1247	
79.6153	96.3343	101.8103	114.4666	111.8677	117.0000	121.0000	127.1727	
80.3413	97.3343	102.8103	115.5333	112.8700	118.0000	122.0000	128.2207	
81.0636	98.3343	103.8103	116.6000	113.8721	119.0000	123.0000	129.2687	
81.7826	99.3343	104.8103	117.6666	114.8749	120.0000	124.0000	130.3167	
82.4986	100.3343	105.8103	118.7333	115.8777	121.0000	125.0000	131.3647	
83.2113	101.3343	106.8103	119.8000	116.8800	122.0000	126.0000	132.4127	
83.9206	102.3343	107.8103	120.8666	117.8821	123.0000	127.0000	133.4607	
84.6266	103.3343	108.8103	121.9333	118.8849	124.0000	128.0000	134.5087	
85.3293	104.3343	109.8103	123.0000	119.8877	125.0000	129.0000	135.5567	
86.0286	105.3343	110.8103	124.0666	120.8900	126.0000	130.0000	136.6047	
86.7246	106.3343	111.8103	125.1333	121.8921	127.0000	131.0000	137.6527	
87.4173	107.3343	112.8103	126.2000	122.8949	128.0000	132.0000	138.7007	
88.1066	108.3343	113.8103	127.2666	123.8977	129.0000	133.0000	139.7487	
88.7926	109.3343	114.8103	128.3333	124.9000	130.0000	134.0000	140.7967	
89.4753	110.3343	115.8103	129.4000	125.9021	131.0000	135.0000	141.8447	
90.1546	111.3343	116.8103	130.4666	126.9049	132.0000	136.0000	142.8927	
90.8306	112.3343	117.8103	131.5333	127.9077	133.0000	137.0000	143.9407	
91.5033	113.3343	118.8103	132.6000	128.9100	134.0000	138.0000	144.9887	
92.1726	114.3343	119.8103	133.6666	129.9121	135.0000	139.0000	146.0367	
92.8386	115.3343	120.8103	134.7333	130.9149	136.0000	140.0000	147.0847	
93.5013	116.3343	121.8103	135.8000	131.9177	137.0000	141.0000	148.1327	
94.1606	117.3343	122.8103	136.8666	132.9200	138.0000	142.0000	149.1807	
94.8166	118.3343	123.8103	137.9333	133.9221	139.0000	143.0000	150.2287	
95.4693	119.3343	124.8103	139.0000	134.9249	140.0000	144.0000	151.2767	
96.1186	120.3343	125.8103	140.0666	135.				

5% and 1% Points for the Distribution of F (5% roman, 1% boldface)*

Degrees of Freedom n_1	Degrees of Freedom n_2																											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞				
1	161 4052	200 4999	216 5403	225 5625	230 5764	234 5859	237 5928	239 5981	241 6022	242 6056	243 6082	244 6106	245 6142	246 6169	248 6203	249 6234	250 6258	251 6286	252 6302	253 6323	253 6334	254 6352	254 6361	254 6366				
2	18.51 98.49	19.00 99.00	19.16 99.17	19.25 99.25	19.30 99.30	19.33 99.33	19.36 99.34	19.37 99.36	19.38 99.38	19.39 99.40	19.40 99.41	19.41 99.42	19.42 99.43	19.43 99.44	19.44 99.45	19.45 99.46	19.46 99.47	19.47 99.48	19.47 99.48	19.48 99.49	19.49 99.49	19.49 99.50	19.50 99.50	19.50 99.50	19.50 99.50			
3	10.13 34.12	9.55 30.82	9.28 29.46	9.12 28.71	9.01 28.24	8.94 27.91	8.88 27.67	8.84 27.49	8.81 27.34	8.78 27.23	8.76 27.13	8.74 27.05	8.71 26.92	8.69 26.83	8.66 26.69	8.64 26.60	8.62 26.50	8.60 26.41	8.58 26.35	8.57 26.27	8.56 26.23	8.54 26.18	8.54 26.14	8.53 26.12				
4	7.71 21.20	6.94 18.00	6.59 16.69	6.39 15.98	6.26 15.52	6.16 15.21	6.09 14.98	6.04 14.80	6.00 14.66	5.96 14.54	5.93 14.45	5.91 14.37	5.87 14.24	5.84 14.15	5.80 14.02	5.77 13.93	5.74 13.83	5.71 13.74	5.70 13.69	5.68 13.61	5.66 13.57	5.65 13.52	5.64 13.48	5.63 13.46				
5	6.61 16.26	5.79 13.27	5.41 12.06	5.19 11.39	5.05 10.97	4.95 10.67	4.88 10.45	4.82 10.27	4.78 10.15	4.74 10.05	4.70 9.96	4.68 9.89	4.64 9.77	4.60 9.68	4.56 9.55	4.53 9.47	4.50 9.38	4.46 9.29	4.44 9.24	4.42 9.17	4.40 9.13	4.38 9.07	4.37 9.04	4.36 9.02				
6	5.99 13.74	5.14 10.92	4.76 9.78	4.53 9.15	4.39 8.75	4.28 8.47	4.21 8.26	4.15 8.10	4.10 7.98	4.06 7.87	4.03 7.79	4.00 7.72	3.96 7.60	3.92 7.52	3.87 7.39	3.84 7.31	3.81 7.23	3.77 7.14	3.75 7.09	3.72 7.02	3.71 6.99	3.69 6.94	3.68 6.90	3.67 6.88				
7	5.59 12.25	4.74 9.55	4.35 8.45	4.12 7.85	3.97 7.46	3.87 7.19	3.79 7.00	3.73 6.84	3.68 6.71	3.63 6.62	3.60 6.54	3.57 6.47	3.52 6.35	3.49 6.27	3.44 6.15	3.41 6.07	3.38 5.98	3.34 5.90	3.32 5.85	3.29 5.78	3.28 5.75	3.25 5.70	3.24 5.67	3.23 5.65				
8	5.32 11.26	4.46 8.65	4.07 7.59	3.84 7.01	3.69 6.63	3.58 6.37	3.50 6.19	3.44 6.03	3.39 5.91	3.34 5.82	3.31 5.74	3.28 5.67	3.23 5.56	3.20 5.48	3.15 5.36	3.12 5.28	3.08 5.20	3.05 5.11	3.03 5.06	3.00 5.00	2.98 4.96	2.96 4.91	2.94 4.88	2.93 4.86				
9	5.12 10.56	4.26 8.02	3.86 6.99	3.63 6.42	3.48 6.06	3.37 5.80	3.29 5.62	3.23 5.47	3.18 5.35	3.13 5.26	3.10 5.18	3.07 5.11	3.02 5.00	2.98 4.92	2.93 4.80	2.90 4.73	2.86 4.64	2.82 4.56	2.80 4.51	2.77 4.45	2.76 4.41	2.73 4.36	2.72 4.33	2.71 4.31				
10	4.96 10.04	4.10 7.56	3.71 6.55	3.48 5.99	3.33 5.64	3.22 5.39	3.14 5.21	3.07 5.06	3.02 4.95	2.97 4.85	2.94 4.78	2.91 4.71	2.86 4.60	2.82 4.52	2.77 4.41	2.74 4.33	2.70 4.25	2.67 4.17	2.64 4.12	2.61 4.05	2.59 4.01	2.56 3.96	2.55 3.93	2.54 3.91				
11	4.84 9.65	3.98 7.20	3.59 6.22	3.36 5.67	3.20 5.32	3.09 5.07	3.01 4.88	2.95 4.74	2.90 4.63	2.86 4.54	2.82 4.46	2.79 4.40	2.74 4.29	2.70 4.21	2.65 4.10	2.61 4.02	2.57 3.94	2.53 3.86	2.50 3.80	2.47 3.74	2.45 3.70	2.42 3.66	2.41 3.62	2.40 3.60				
12	4.75 9.33	3.88 6.93	3.49 5.95	3.26 5.41	3.11 5.06	3.00 4.82	2.92 4.65	2.85 4.50	2.80 4.39	2.76 4.30	2.72 4.22	2.69 4.16	2.64 4.05	2.60 3.93	2.54 3.86	2.50 3.78	2.46 3.70	2.42 3.61	2.40 3.56	2.36 3.49	2.35 3.46	2.32 3.41	2.31 3.38	2.30 3.36				
13	4.67 9.07	3.80 6.70	3.41 5.74	3.18 5.20	3.02 4.86	2.92 4.62	2.84 4.44	2.77 4.30	2.72 4.19	2.67 4.10	2.63 4.02	2.60 3.96	2.55 3.85	2.51 3.78	2.46 3.67	2.42 3.59	2.38 3.51	2.34 3.42	2.32 3.37	2.28 3.30	2.26 3.27	2.24 3.21	2.22 3.18	2.21 3.16				
14	4.60 8.86	3.74 6.51	3.34 5.56	3.11 5.03	2.96 4.69	2.85 4.46	2.77 4.28	2.70 4.14	2.65 4.03	2.60 3.94	2.56 3.86	2.53 3.80	2.48 3.70	2.44 3.62	2.39 3.51	2.35 3.43	2.31 3.34	2.27 3.26	2.24 3.21	2.21 3.14	2.19 3.11	2.16 3.06	2.14 3.02	2.13 3.00				
15	4.54 8.68	3.68 6.36	3.29 5.42	3.06 4.89	2.90 4.56	2.79 4.32	2.70 4.14	2.64 4.00	2.59 3.89	2.55 3.80	2.51 3.73	2.48 3.67	2.43 3.56	2.39 3.48	2.33 3.36	2.29 3.29	2.25 3.20	2.21 3.12	2.18 3.07	2.15 3.00	2.12 2.97	2.10 2.92	2.08 2.89	2.07 2.87				
16	4.49 8.53	3.63 6.23	3.24 5.29	3.01 4.77	2.85 4.44	2.74 4.20	2.66 4.03	2.59 3.89	2.54 3.78	2.49 3.69	2.45 3.61	2.42 3.55	2.37 3.45	2.33 3.37	2.28 3.25	2.24 3.18	2.20 3.10	2.16 3.01	2.13 2.96	2.09 2.89	2.07 2.86	2.04 2.80	2.02 2.77	2.01 2.75				
17	4.45 8.40	3.59 6.11	3.20 5.18	2.96 4.67	2.81 4.34	2.70 4.10	2.62 3.93	2.55 3.79	2.50 3.68	2.45 3.59	2.41 3.52	2.38 3.45	2.33 3.35	2.29 3.27	2.23 3.16	2.19 3.08	2.15 3.00	2.11 2.92	2.08 2.86	2.04 2.79	2.02 2.76	1.99 2.70	1.97 2.67	1.96 2.65				
18	4.41 8.28	3.55 6.01	3.16 5.09	2.93 4.58	2.77 4.25	2.66 4.01	2.58 3.85	2.51 3.71	2.46 3.60	2.41 3.51	2.37 3.44	2.34 3.37	2.29 3.27	2.25 3.19	2.19 3.07	2.15 3.00	2.11 2.91	2.07 2.83	2.04 2.78	2.00 2.71	1.98 2.68	1.95 2.62	1.93 2.59	1.92 2.57				
19	4.38 8.18	3.52 5.93	3.13 5.01	2.90 4.50	2.74 4.17	2.63 3.94	2.55 3.77	2.48 3.63	2.43 3.52	2.38 3.43	2.34 3.36	2.31 3.30	2.26 3.19	2.21 3.12	2.15 3.00	2.11 2.92	2.07 2.84	2.02 2.76	2.00 2.70	1.96 2.63	1.94 2.60	1.91 2.54	1.90 2.51	1.88 2.49				
20	4.35 8.10	3.49 5.85	3.10 4.94	2.87 4.43	2.71 4.10	2.60 3.87	2.52 3.71	2.45 3.56	2.40 3.45	2.35 3.37	2.31 3.30	2.28 3.23	2.23 3.13	2.18 3.05	2.12 2.94	2.08 2.86	2.04 2.77	1.99 2.69	1.96 2.63	1.92 2.56	1.90 2.53	1.87 2.47	1.85 2.44	1.84 2.42				
21	4.32 8.02	3.47 5.78	3.07 4.87	2.84 4.37	2.68 4.04	2.57 3.81	2.49 3.65	2.42 3.51	2.37 3.40	2.32 3.31	2.28 3.24	2.25 3.17	2.20 3.07	2.15 2.99	2.09 2.88	2.05 2.80	2.00 2.72	1.96 2.63	1.93 2.58	1.89 2.51	1.87 2.47	1.84 2.42	1.82 2.38	1.81 2.36				
22	4.30 7.94	3.44 5.72	3.05 4.82	2.82 4.31	2.66 3.99	2.55 3.76	2.47 3.59	2.40 3.45	2.35 3.35	2.30 3.26	2.26 3.18	2.23 3.12	2.18 3.02	2.13 2.94	2.07 2.83	2.03 2.75	1.98 2.67	1.93 2.58	1.91 2.53	1.87 2.46	1.84 2.42	1.81 2.37	1.80 2.33	1.78 2.31				
23	4.28 7.88	3.42 5.66	3.03 4.76	2.80 4.26	2.64 3.94	2.53 3.71	2.45 3.54	2.38 3.41	2.32 3.30	2.28 3.21	2.24 3.14	2.20 3.07	2.14 2.97	2.10 2.89	2.04 2.78	2.00 2.70	1.96 2.62	1.91 2.53	1.88 2.48	1.84 2.41	1.82 2.37	1.79 2.32	1.77 2.28	1.76 2.26				
24	4.26 7.82	3.40 5.61	3.01 4.72	2.78 4.22	2.62 3.90	2.51 3.67	2.43 3.50	2.36 3.36	2.30 3.25	2.26 3.17	2.22 3.09	2.18 3.03	2.13 2.93	2.09 2.85	2.02 2.74	1.98 2.66	1.94 2.58	1.89 2.49	1.86 2.44	1.82 2.36	1.80 2.33	1.76 2.27	1.74 2.23	1.73 2.21				
25	4.24 7.77	3.38 5.57	2.99 4.68	2.76 4.18	2.60 3.86	2.49 3.63	2.41 3.46	2.34 3.32	2.28 3.21	2.24 3.13	2.20 3.05	2.16 2.99	2.11 2.89	2.06 2.81	2.00 2.70	1.96 2.62	1.92 2.54	1.87 2.45	1.84 2.40	1.80 2.32	1.77 2.29	1.74 2.23	1.72 2.19	1.71 2.17				
26	4.22 7.72	3.37 5.53	2.98 4.64	2.74 4.14	2.59 3.82	2.47 3.59	2.39 3.42	2.32 3.29	2.27 3.17	2.22 3.09	2.18 3.02	2.15 2.96	2.10 2.86	2.05 2.77	1.99 2.66	1.95 2.58	1.90 2.50	1.85 2.41	1.82 2.36	1.78 2.28	1.76 2.25	1.72 2.19	1.70 2.15	1.69 2.13				
27	4.21 7.68	3.35 5.49	2.96 4.60	2.73 4.11	2.57 3.79	2.46 3.56	2.37 3.39	2.30 3.26	2.25 3.14	2.20 3.06	2.16 2.98	2.13 2.93	2.08 2.83	2.03 2.74	1.97 2.63	1.93 2.55	1.88 2.47	1.84 2.38	1.80 2.33	1.76 2.25	1.74 2.21	1.71 2.16	1.68 2.12	1.67 2.10				

Degrees of Freedom n_2		Degrees of Freedom n_1																							
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.09	2.06	2.02	1.96	1.91	1.87	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.67	1.65
	7.64	5.45	4.57	4.07	3.76	3.53	3.36	3.23	3.11	3.03	2.95	2.89	2.82	2.74	2.66	2.57	2.49	2.44	2.35	2.30	2.22	2.18	2.09	2.06	2.06
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10	2.06	2.03	1.98	1.94	1.89	1.85	1.80	1.77	1.73	1.71	1.68	1.65	1.64
	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.08	3.00	2.92	2.87	2.80	2.72	2.64	2.55	2.47	2.42	2.33	2.27	2.19	2.15	2.10	2.06	2.06
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.34	2.27	2.21	2.17	2.13	2.09	2.05	2.02	1.97	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.72	1.69	1.66	1.64	1.63
	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.06	2.98	2.90	2.84	2.78	2.70	2.62	2.53	2.45	2.40	2.31	2.24	2.16	2.12	2.07	2.03	2.01
32	4.15	3.30	2.90	2.67	2.51	2.40	2.32	2.25	2.19	2.14	2.10	2.06	2.02	1.98	1.94	1.90	1.86	1.82	1.76	1.74	1.69	1.67	1.64	1.61	1.59
	7.50	5.34	4.46	3.97	3.66	3.42	3.25	3.12	3.01	2.94	2.86	2.80	2.74	2.66	2.58	2.49	2.42	2.34	2.25	2.20	2.12	2.08	2.02	1.98	1.96
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.30	2.23	2.17	2.12	2.08	2.04	2.00	1.96	1.92	1.88	1.84	1.80	1.74	1.71	1.67	1.64	1.61	1.59	1.57
	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.38	3.21	3.08	2.97	2.89	2.82	2.76	2.69	2.62	2.54	2.45	2.37	2.30	2.21	2.15	2.08	2.04	1.98	1.94	1.91
36	4.11	3.26	2.86	2.63	2.48	2.37	2.28	2.21	2.15	2.10	2.06	2.02	1.98	1.94	1.90	1.86	1.82	1.78	1.72	1.69	1.65	1.62	1.59	1.56	1.55
	7.39	5.25	4.38	3.89	3.58	3.35	3.18	3.04	2.94	2.86	2.78	2.72	2.65	2.57	2.49	2.40	2.32	2.24	2.15	2.10	2.02	1.98	1.92	1.87	1.85
38	4.10	3.25	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.05	2.01	1.97	1.93	1.89	1.85	1.80	1.76	1.71	1.67	1.63	1.60	1.57	1.54	1.53
	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.91	2.82	2.75	2.69	2.62	2.54	2.46	2.37	2.29	2.20	2.12	2.06	1.99	1.95	1.89	1.84	1.81
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.07	2.04	2.00	1.96	1.92	1.88	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.61	1.59	1.55	1.53	1.51
	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.88	2.80	2.73	2.66	2.59	2.51	2.43	2.34	2.26	2.17	2.10	2.02	1.97	1.94	1.88	1.84	1.81
42	4.07	3.22	2.83	2.59	2.44	2.32	2.24	2.17	2.11	2.06	2.02	1.99	1.94	1.90	1.86	1.82	1.78	1.73	1.68	1.64	1.60	1.57	1.54	1.51	1.49
	7.27	5.15	4.29	3.80	3.49	3.26	3.10	2.96	2.86	2.77	2.70	2.64	2.57	2.49	2.41	2.32	2.24	2.15	2.08	2.02	1.94	1.91	1.85	1.80	1.78
44	4.06	3.21	2.82	2.58	2.43	2.31	2.23	2.16	2.10	2.05	2.01	1.98	1.92	1.88	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.58	1.55	1.52	1.48	1.46
	7.24	5.12	4.26	3.78	3.46	3.24	3.07	2.94	2.84	2.75	2.68	2.62	2.55	2.47	2.39	2.30	2.22	2.14	2.06	2.00	1.92	1.88	1.82	1.78	1.75
46	4.05	3.20	2.81	2.57	2.42	2.30	2.22	2.14	2.09	2.04	2.00	1.96	1.92	1.88	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.57	1.54	1.48	1.46	1.44
	7.21	5.10	4.24	3.76	3.44	3.22	3.05	2.92	2.82	2.73	2.66	2.60	2.53	2.45	2.37	2.28	2.20	2.12	2.04	1.98	1.90	1.86	1.80	1.76	1.72
48	4.04	3.19	2.80	2.56	2.41	2.29	2.21	2.14	2.08	2.03	1.99	1.95	1.91	1.87	1.83	1.78	1.74	1.69	1.66	1.61	1.56	1.53	1.47	1.45	1.43
	7.19	5.08	4.22	3.74	3.42	3.20	3.04	2.90	2.80	2.71	2.64	2.58	2.51	2.43	2.35	2.26	2.18	2.10	2.02	1.96	1.88	1.84	1.78	1.73	1.70
50	4.03	3.18	2.79	2.55	2.40	2.28	2.20	2.13	2.07	2.02	1.98	1.94	1.90	1.86	1.82	1.77	1.74	1.69	1.66	1.61	1.55	1.52	1.46	1.44	1.68
	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.18	3.02	2.88	2.78	2.70	2.62	2.56	2.49	2.41	2.33	2.24	2.16	2.08	2.00	1.94	1.86	1.82	1.76	1.71	1.68

Source: This table is reproduced from *Statistical Methods*, 4th edition, with the permission of the author, George W. Snedecor, and his publisher, The Collegiate Press, Ames, Iowa.

* The number of degrees of freedom in the numerator and the denominator are n_1 and n_2 , respectively. Example: With 5 degrees of freedom in the numerator and 20 in the denominator, an F value larger than 2.71 has .05 probability and a value exceeding 4.10 has .01 probability. Also, an F value exceeding 1/4.56 = .219 has .95 probability with the same degrees of freedom. The figure .219 represents the lower 5 percent point of the distribution; it is obtained by taking the reciprocal of the F ratio and interchanging the degrees of freedom in the numerator and the denominator.

