

**Université de Montréal**  
**ECN 6238**  
**Macroéconométrie**  
**Examen final différé**

Aucune documentation permise  
Calculatrice permise  
Durée : 3 heures  
Le questionnaire doit être remis avec le cahier d'examen.

10 points

1. Soit  $(X_t : t \in \mathbb{Z})$  le processus

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}, \quad (u_t : t \in \mathbb{Z}) \sim BB(0, \sigma^2)$$

où  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ . Montrez que  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty$  où  $\gamma(k)$  est la fonction d'autocovariance de  $X_t$ .

20 points

2. Soit  $(X_t : t \in \mathbb{Z})$  un processus ARMA(1, 1) satisfaisant l'équation

$$X_t - \varphi X_{t-1} = u_t + \theta u_{t-1}, \quad u_t \sim BB(0, \sigma^2),$$

où  $|\varphi| < 1$  et  $|\theta| < 1$ .

- (a) Déterminez les coefficients  $\psi_j$  de la représentation MA( $\infty$ ) de  $X_t$ .
- (b) Déterminez la fonction d'autocorrélation de  $X_t$ .
- (c) Donnez la densité spectrale de  $X_t$ .
- (d) Si  $\varphi = 0.5$ ,  $\theta = 0.5$ ,  $X_{10} = 1.0$ ,  $u_{10} = 0.5$  et  $X_t = u_t = 0$  pour  $t \leq 9$ , donnez des prévisions optimales (au sens de l'erreur quadratique moyenne) pour  $X_{11}$  et  $X_{12}$ .

15 points

3. Considérez le modèle décrit par les hypothèses suivantes :

- (1)  $Y_t = \mu_0 + \sum_{j=1}^p \varphi_j Y_{t-j} + u_t, \quad t = p+1, \dots, T;$
  - (2)  $\{u_t : t = 1, \dots, T\} \sim IID(0, \sigma^2);$
  - (3) le polynôme  $\varphi(z) = 1 - \varphi_1 z - \varphi_1 z^2 - \dots - \varphi_p z^p$  a toutes ses racines sur le cercle unité sauf possiblement une qui peut être égale à 1.
- Décrivez une procédure qui permet de tester l'hypothèse que le polynôme  $\varphi(z)$  a une racine sur le cercle unité.

15 points

4. Fonctions de transfert

- (a) Décrivez ce qu'est un modèle de fonction de transfert dans l'analyse des séries chronologiques.
- (b) Décrivez brièvement comment fonctionne, pour un modèle de fonction de transfert, la méthode d'identification de Box et Jenkins.
- (c) Décrivez brièvement comment fonctionne, pour un modèle de fonction de transfert, la méthode d'identification de Haugh et Box.

40 points

5. Soit  $\{(X_t, Y_t) : t \in \mathbb{Z}\}$  un processus stationnaire au sens large strictement non déterministe.

- (a) Que veut-on dire par l'expression "stationnaire au sens large" ?
- (b) Qu'implique le théorème de Wold multivarié pour ce processus ?
- (c) Que veut dire l'expression "strictement non déterministe" ?
- (d) Expliquez les expressions suivantes :
  - i.  $X$  cause  $Y$  ;
  - ii.  $Y$  cause  $X$  instantanément ;
  - iii. il y a rétroaction entre  $X$  et  $Y$ .
- (e) Si on dit que  $(X_t, Y_t)$  suit un processus ARMA, qu'est-ce que cela signifie ?
- (f) En supposant que  $(X_t, Y_t)$  possède une représentation autorégressive, donnez une caractérisation de la relation  $X \nleftrightarrow Y$  :
  - i. à partir de la représentation autorégressive du processus  $(X_t, Y_t)$ ;
  - ii. à partir de la représentation moyenne mobile du processus  $(X_t, Y_t)$ ;
  - iii. à partir des représentation univariées des processus  $X_t$  et  $Y_t$ .
- (g) Décrivez une méthode permettant de tester l'hypothèse que les processus  $X$  et  $Y$  sont indépendant entre eux.
- (h) Décrivez une méthode permettant de tester l'hypothèse que  $X$  cause  $Y$  au sens de Granger.