UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE

Jean Marcelo Mira Junior
Lucas Daniel dos Santos

**Métodos numéricos:** Equação de Bashforth-Addams

Joinville
2021

## RESUMO

Métodos numéricos utilizam-se de algoritmos computacionais com princípios matemáticos para a resolução de problemas, estes por sua vez são modelados por programadores cuja as operações possuem quantidades finitas são capazes de resolver os problemas propostos que por vezes não são possíveis de resolução analítica. Para a aplicação deste trabalho desenvolveu-se a implementação os métodos números de Euler que consiste em utilizar as retas tangentes para encontrar o valor da função em um ponto próximo, Heun sendo o método numérico de Euler melhorado, Runge-Kutta se obteve utilizando uma expansão em série de Taylor solicitando um erro local de determinada ordem e Runge-Kutta-Fehlberg na forma de uma expansão em série de Taylor solicitando um erro local de determinada ordem, com o passo de h variável. Estes métodos têm como finalidade resolver equações diferenciais ordinárias de ordem superior de Bashforth-Addams, que descreve a forma de uma gota pendente.

**Palavras-chave:** Euler. Heun. Runge-Kutta. Runge-Kutta-Fehlberg.

# SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Do modelo proposto a Equação de Bashforth-Addams apresenta-se de acordo com os objetivos para a aplicação de métodos numéricos abordados na disciplina de Séries e Equações Diferenciais lecionada pelo Professor Doutor Diogo Nardelli do Centro Tecnológico de Joinville.

Apresenta-se o modelo matemático sugerido pelo próprio docente na equação 1.

$$\frac{d\,\varphi}{d\,\underline{s}} = 2 - Bo\underline{z} - \frac{sen\,\varphi}{\underline{r}} \tag{1}$$

$$\frac{d\,\underline{r}}{d\,\underline{s}} = cos\,\varphi \tag{2}$$

$$\frac{d\,\underline{z}}{d\,\underline{s}} = sen\,\varphi \tag{3}$$

Esta equação descreve a forma de uma gota pendente e de acordo com o objetivo essa equação diferencial não possui solução analítica e faz-se a necessidade da aplicação de métodos para uma respectiva solução.

Para este sistema de equações diferenciais ordinárias (*EDO's*), a imposição de condições iniciais deverá ser considerada, onde:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{r}\,(s) \\ \underline{z}\,(s) \\ \varphi\,(s) \end{array}\right\} \text{são parâmetros geométricos da gota.}$$

E que;

$$\underline{r}\,(0) = 0$$

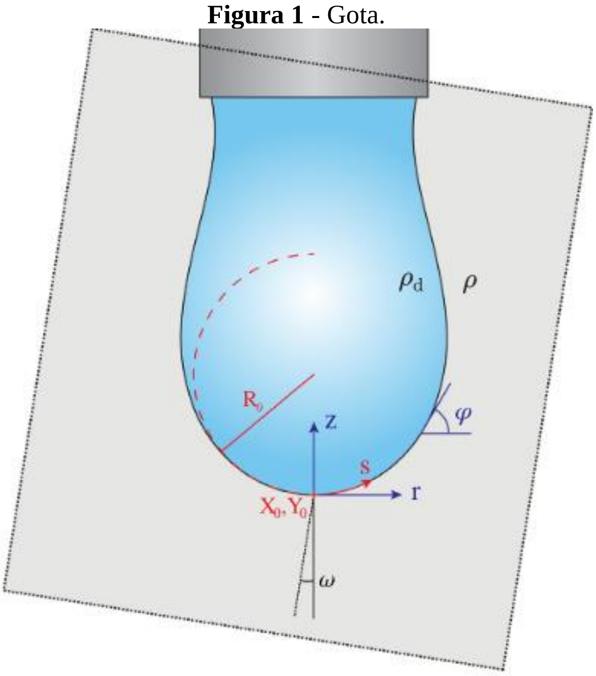
$$\underline{z}\,(0) = 0$$

$$\varphi\,(0) = 0.$$

Obtém-se as condições iniciais.

De acordo com os parâmetros geométricos na figura 1 apresenta-se um formato genérico para uma gota.

**Figura 1** - Gota.




**Fonte:** J.D. Berry et al, 2015.

## 2 METODOLOGIA

Para o sistema de equações sugerido deve-se considerar que se $\underline{r} = 0$ na equação (1) então haverá divergência, porém, aplicando a condição inicial:

$$\lim_{s \to 0} \frac{sen\,\varphi}{\underline{r}} = 0 \quad \therefore \quad \frac{sen\,\varphi}{\underline{r}} = 0, \text{ nessa condição inicial.}$$

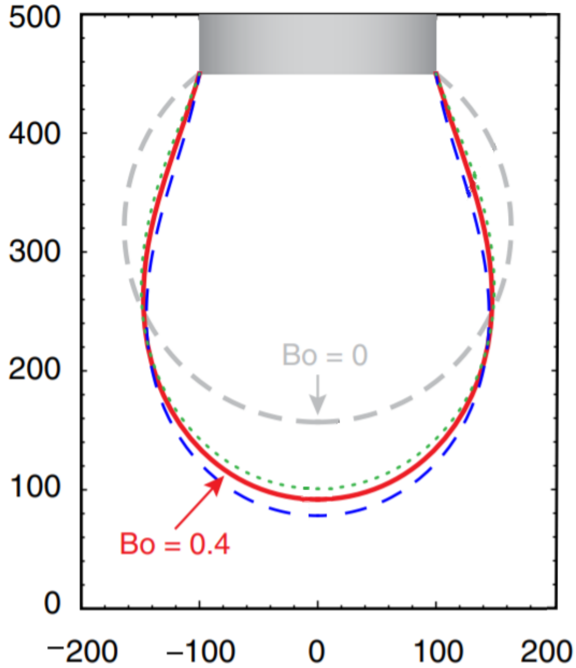
Fornecendo assim o sistema abaixo

$$\frac{d\,\varphi}{d\,\underline{s}} = \begin{cases} 2 - Bo\underline{z} - \dfrac{sen\,\varphi}{\underline{r}} & s \neq 0 \\ 2 - Bo\underline{z} & s = 0 \end{cases} \tag{4}$$

O termo Bo é o número de Bond que está intrinsecamente associado às propriedades dos fluidos cuja o seu valor dá a forma da gota de acordo com a tensão superficial destes fluidos em gotejamento.

Na figura 2 apresenta-se o formato da gota para o número de Bond definido como 0.4.

**Figura 2** - Gota.




**Fonte:** adaptado de J.D. Berry et al.

Assim de forma geral as fórmulas do sistema de primeira ordem não linear que devem ser aplicadas aos métodos numéricos são:

$$f\varphi(\underline{z},\varphi\ ,\underline{r}) = 2\ - Bo\underline{z}\ - \frac{sen\ \varphi}{\underline{r}}\quad s\ \neq\ 0 \tag{5.1}$$

$$f\varphi(\underline{z},\varphi\ ,\underline{r}) = 2\ - Bo\underline{z}\qquad\qquad s\ =\ 0 \tag{5.2}$$

$$f\underline{r}(\underline{z},\varphi\ ,\underline{r}) = cos\ \varphi \tag{6}$$

$$f\underline{z}(\underline{z},\varphi\ ,\underline{r}) = sen\ \varphi \tag{7}$$

De maneira geral como expor-se esse problema pode ser solucionado com aplicação de métodos numéricos, estes métodos já desenvolvidos e aqui implementados, permitem a comparação qualitativa dos comportamentos das soluções fornecidas.

## 2.1 MÉTODO DE EULER

Este método utiliza retas tangentes para encontrar o valor da função em um ponto próximo, fornecendo aproximadamente a derivada de uma função. Ou seja, o método numérico de Euler consiste em utilizar as retas tangentes para encontrar o valor da função em um ponto próximo.

O método foi implementado conforme demonstrado em sala de aula em algoritmo python.

## 2.2 MÉTODO DE HEUN

O método Heun torna a potência de h maior permitindo um erro menor com quantidade menor de cálculos computacionais do que o Método de Euler. Ou seja, o método numérico de Heun é o método numérico de Euler melhorado.

## 2.3 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Esse método resolve numericamente as equações diferenciais ordinárias cuja a função y não é conhecida. porém tomando do princípio que se conhece um determinado conjunto de pontos e cuja aproximam-se dessa função desconhecida, basicamente este método fornece uma aproximação da função através de uma condição inicial num ponto conhecido no início de um intervalo h que é fixo. Ou seja, o método numérico de Runge-Kutta é obtido utilizando uma expansão em série de Taylor solicitando um erro local de determinada ordem.

## 2.4 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA-FEHLBERG

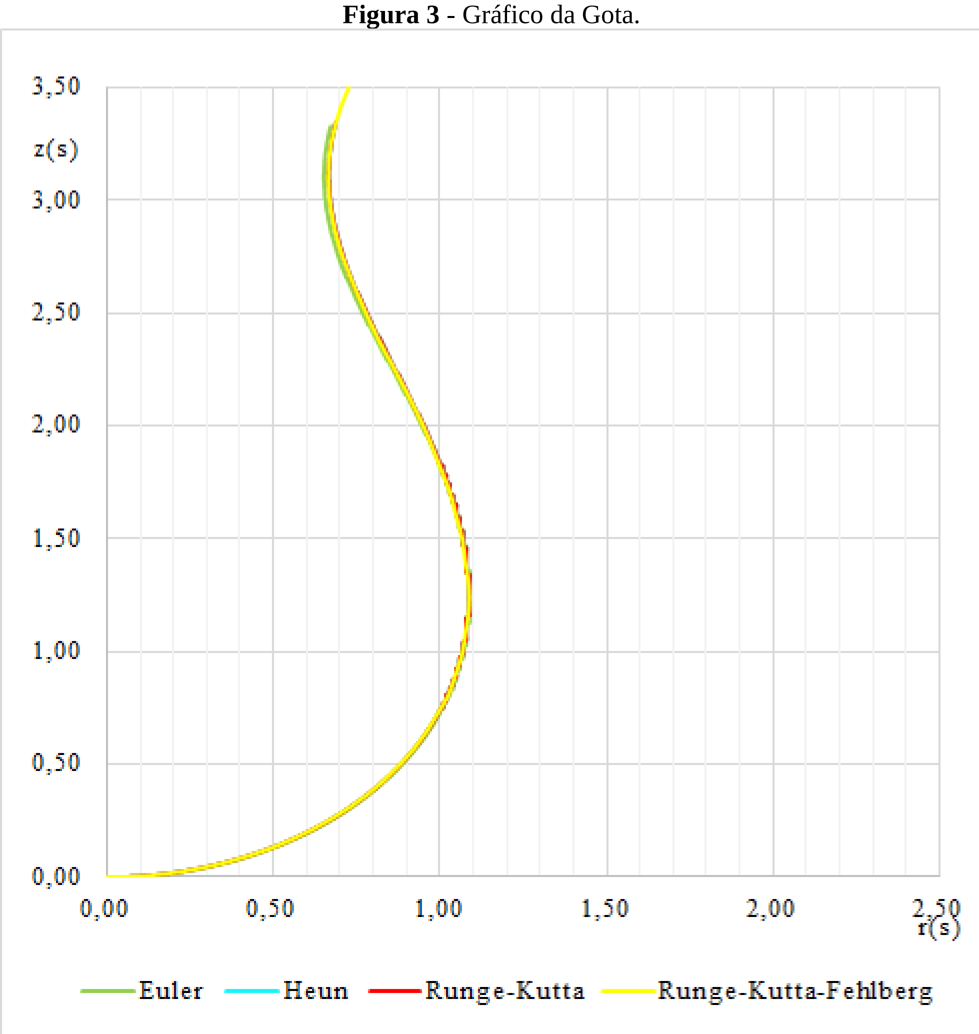
No método de Runge-Kutta-Fehlberg pode-se variar o intervalo h permitindo assim que o mesmo se adapte a forma da função garantindo que o erro se comporte conforme a variação dessa forma. Ou seja, o método numérico de Runge-Kutta-Fehlberg é obtido utilizando uma expansão em série de Taylor solicitando um erro local de determinada ordem, com o passo “h” variando.

## 3 RESULTADOS

Através da análise numérica constata-se que o método Runge-Kutta-Fehlberg tem melhores resultados com uma menor quantidade de interações, fornecendo uma notória qualidade no comportamento dos dados; Comportamento esse, relativo a velocidade de convergência, enquanto nos métodos de: Euler; Heun; E Runge-Kutta, definiu-se com 400 interações para apresentar uma forma de gota aceitável o método de Runge-Kutta-Fehlberg apresentou a mesma forma com apenas 52 iterações.

Na figura 3 apresenta-se a comparação da forma da gota para cada método com as considerações das interações mencionadas, a sobreposição das plotagens dos dados apenas para comparação visual.

**Figura 3** - Gráfico da Gota.

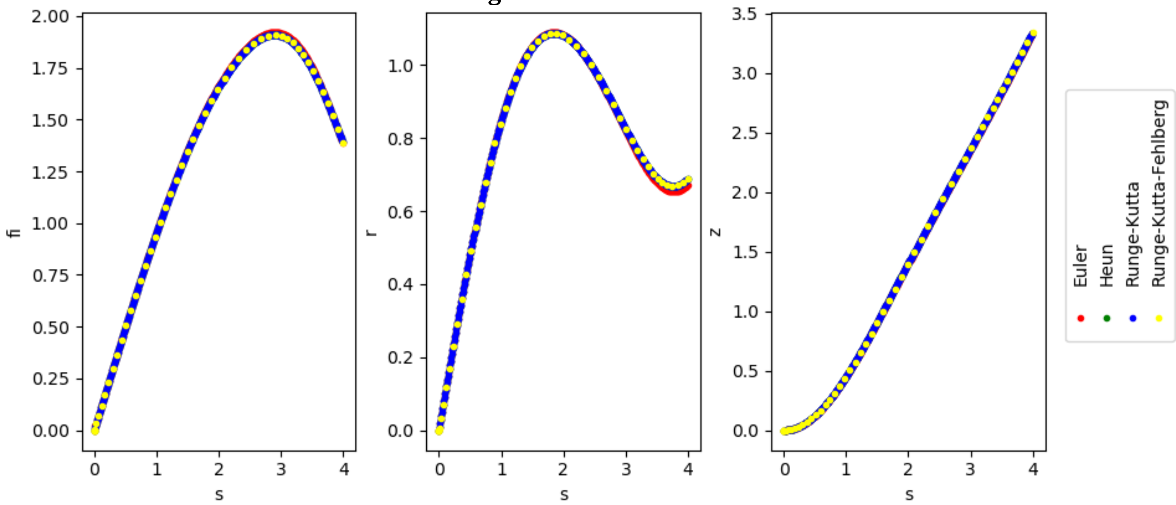



**Fonte:** os Autores.

Portanto o método Runge-Kutta-Fehlberg apresentou valores numéricos mais condizentes e qualitativamente mais eficientes ao comparar os dados dos parâmetros geométricos resultantes obtidos. [1]

Por fim os parâmetros geométricos da variável independente $\boldsymbol{s}$ e das variáveis dependentes $\varphi, \boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{z}$ podem ser verificadas abaixo:

**Figura 4** - Resultados.

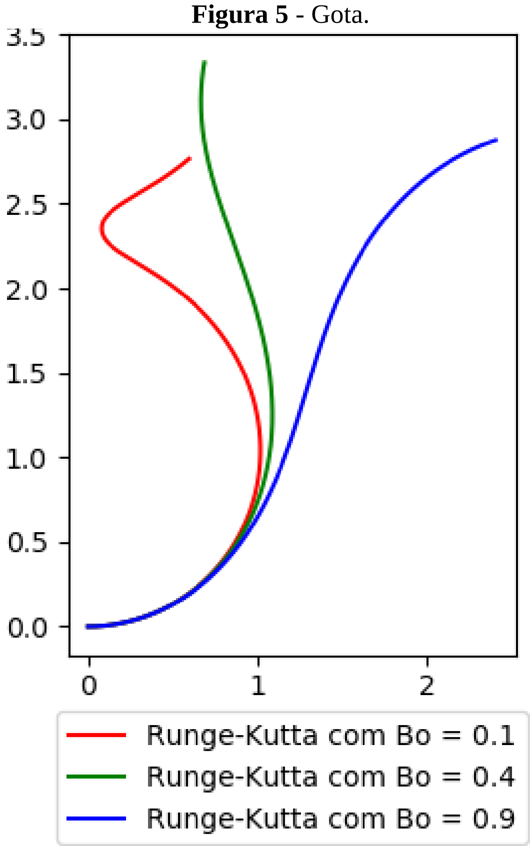



**Fonte:** os Autores.

[1] Tabela de dados está disponível em: <https://rb.gy/uflw5g>

De acordo com a figura 5 pode-se analisar que para diferentes números de Bond o método de Runge-Kutta experimenta a variação da função desconhecida conforme a mudança das propriedades do fluido em estudo, o que se considera aceitável em comparação com o artigo em referência que utiliza dados de diferentes fluidos reais[2].

**Figura 5** - Gota.




**Fonte:** o autor.

[2] Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcis.2015.05.012>

## 4 CONCLUSÃO

Por fim verifica-se que com a aplicação dos métodos numéricos implementados através dos conhecimentos adquiridos em aula tem a funcionalidade e aplicabilidade em sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem conforme a proposição do desenvolvimento da atividade avaliativa.

A solução para a proposta apresentada exige um nível de conhecimento moderado em decorrência da aplicação dos métodos exigidos, principalmente nas suas peculiaridades; a exemplo disso, pode-se citar no entendimento para a implementação correta do método Runge-Kutta-Fehlberg. A variação das ordens e a variação do intervalo “h” com o crescimento ou decrescimento conforme os dados desenvolvem-se o algoritmo implementado obedece às diretrizes, como as condições iniciais e os parâmetros sugeridos.

# REFERÊNCIAS

Joseph D. Berry , Michael J. Neeson, Raymond R. Dagastine, Derek Y.C. Chan, Rico F. Tabor. **Measurement of surface and interfacial tension using pendant drop tensiometry.** Austrália, 2015.

Material de apoio da disciplina.