Árvore de Steiner

4062/01 - Projeto e Análise de Algoritmos

Jean Carlos Martins Miguel - PG908452
Sergio Alvarez da Silva Junior - PG405547

PCC
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação

UEM Universidade Estadual de Maringá

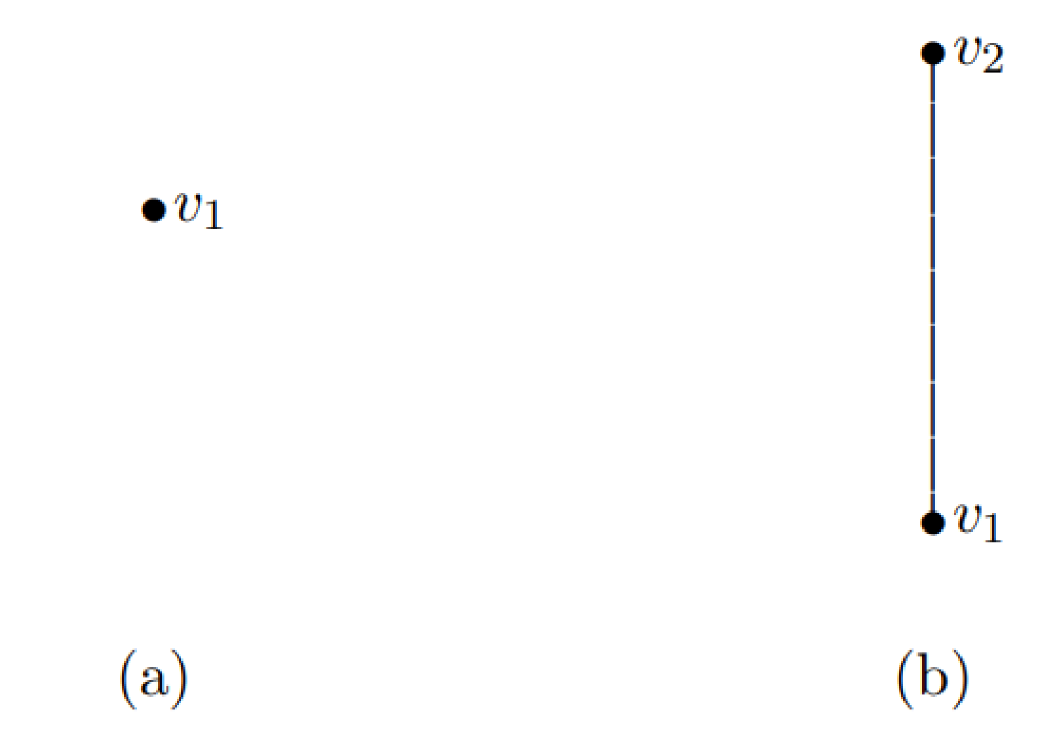
Sumário

Introdução

Definição: A Árvore de Steiner é uma rede de menor custo que conecta um conjunto de vértices, chamados terminais, minimizando o custo total das arestas. Pode-se adicionar vértices adicionais nessa rede, que são chamados de vértices de Steiner (Grimwood ,1994).

Casos triviais (n = 1, 2)

- Para n = 1, menor distância é 0
- para n = 2, menos distância é uma reta

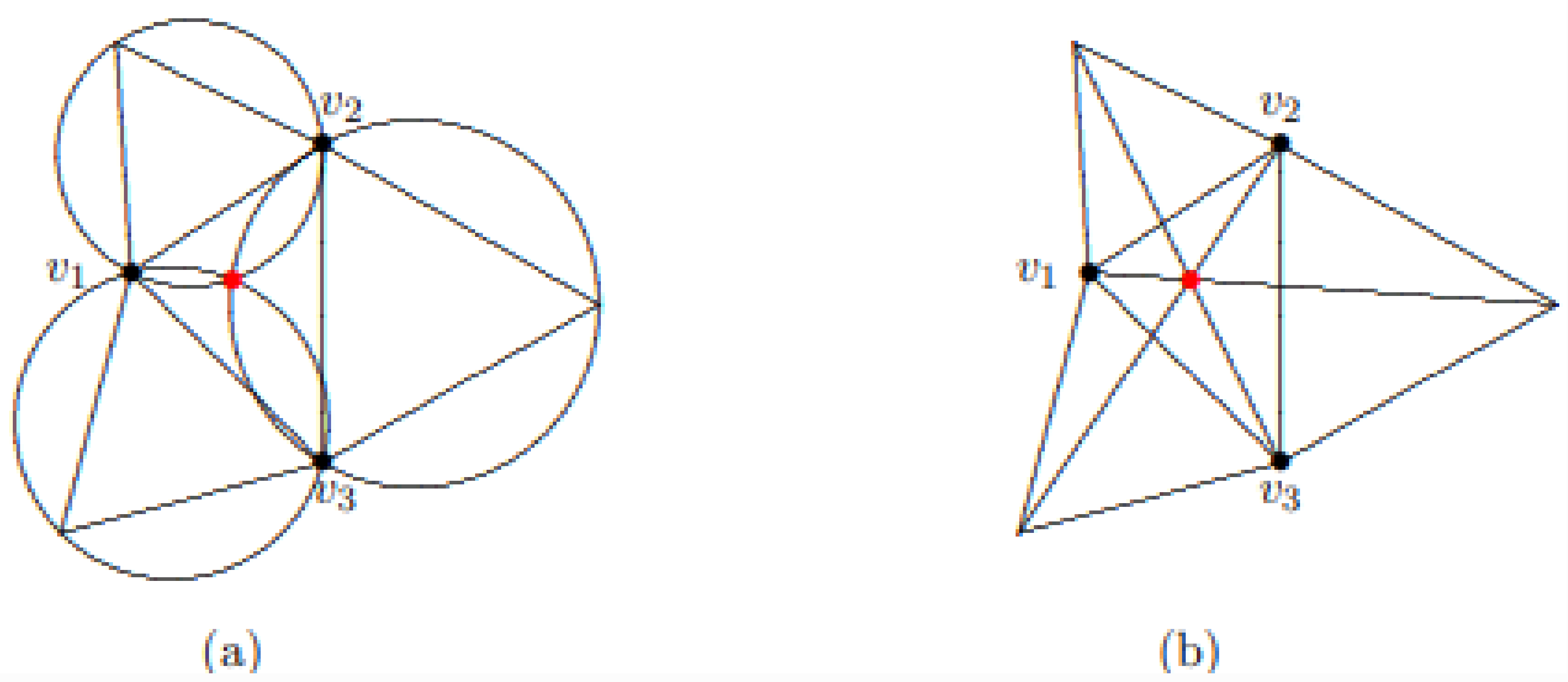


Casos triviais
Fonte: (SOOTHILL, 2010).

Introdução

O problema para quando n = 3 é atribuído ao matemático Fermat (1601-1655):
Fermat propôs o problema da seguinte forma: Encontre no plano um ponto cuja distância total em relação a três pontos dados seja mínima.

- As soluções propostas começam construindo um triângulo e um triângulo equilátero em cada aresta.
- A solução de Torricelli constrói três círculos circunscritos; suas interseções formam o ponto de Torricelli.
- A solução de Simpson traça linhas das pontas dos triângulos equiláteros aos vértices opostos; a interseção dessas linhas é a solução do problema.

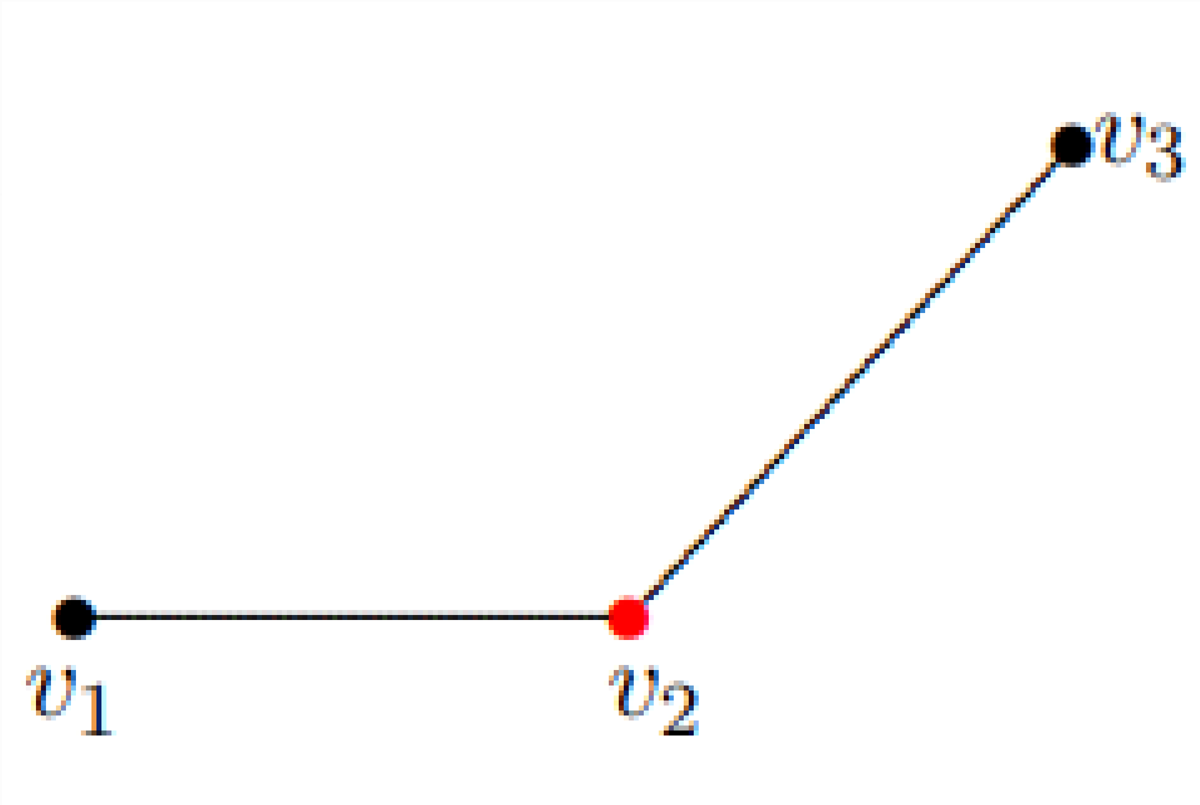


Soluções de Torricelli (a) e Simpson (b)
Fonte: (SOOTHILL, 2010)

Introdução

As soluções falham se um dos ângulos internos do triângulo formado pelos vértices for maior que 120°. Em 1834, o matemático Heinen reuniu todas essas ideias anteriores e formulou a primeira solução completa para o problema de Fermat. Ele demonstrou que:

- Se um dos ângulos internos do triângulo formado pelos três pontos dados for maior que 120°, então o ponto que resolve o problema de Fermat é o próprio vértice onde esse ângulo maior que 120° ocorre.
- Caso contrário, o ponto de mínima soma das distâncias pode ser encontrado pelos métodos propostos por Simpson ou Torricelli.



Exemplo com ângulo maior que 120°
Fonte: (SOOTHILL, 2010)

Introdução

Em 1934, Jarnik e Kossler fizeram a primeira generalização do problema de Fermat:
Dado n pontos em um plano, construa a menor arvore que os vértices contenham todos esses n pontos. Podendo ou não adicionar pontos intermediários (JARNÍK; KÖSSLER, 1934).
Essa generalização, como homenagem ao matemático Jakob Steiner, ficou conhecida como Arvore de Steiner.

Comparação com Árvores de Expansão Mínima (MST):

- MST: Conecta todos os vértices em um grafo.
- Árvore de Steiner: Conecta apenas os vértices terminais selecionados, permitindo a inclusão de vértices intermediários (pontos de Steiner) para minimizar o custo total.

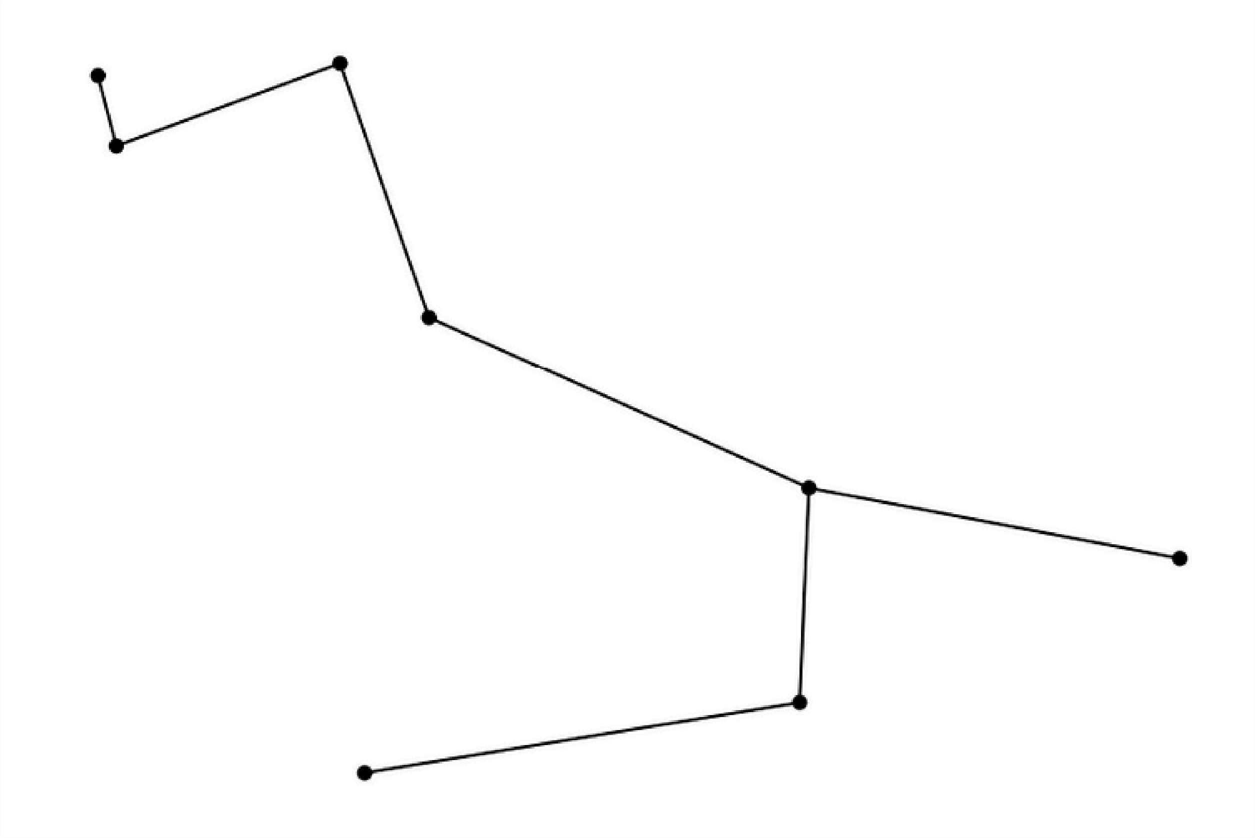
Variações do Problema

Existem diversas variações para o problema da árvore de Steiner.
Em Hauptmann e Karpinski (2013), os autores compilaram mais de 30 variações do problema.
Algumas são:

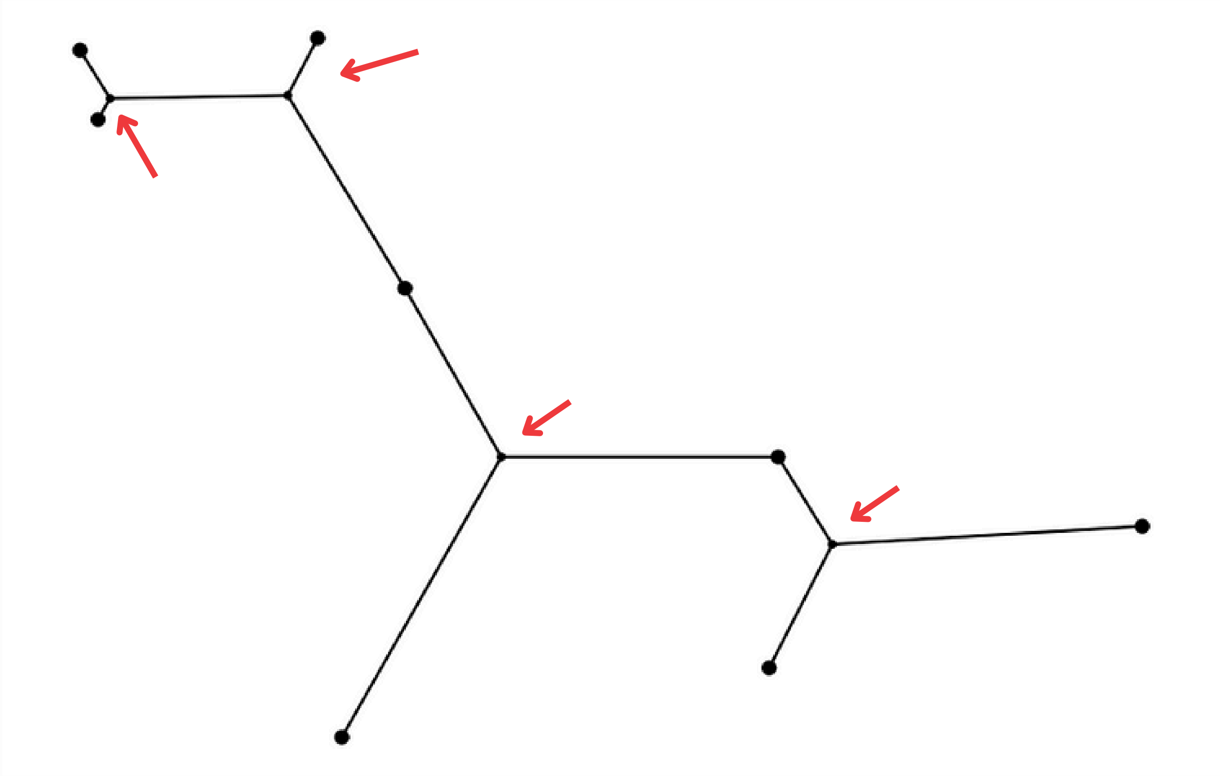
- Árvore de Steiner Euclidiana
- Árvore de Steiner em Grafos
- Árvore de Steiner Retilinea

Árvore de Steiner Euclidiana

Atualmente a proposição original da árvore de Steiner é chamada de árvore de Steiner Euclidiana



MST para 8 terminais



Steiner MST para 8 terminais

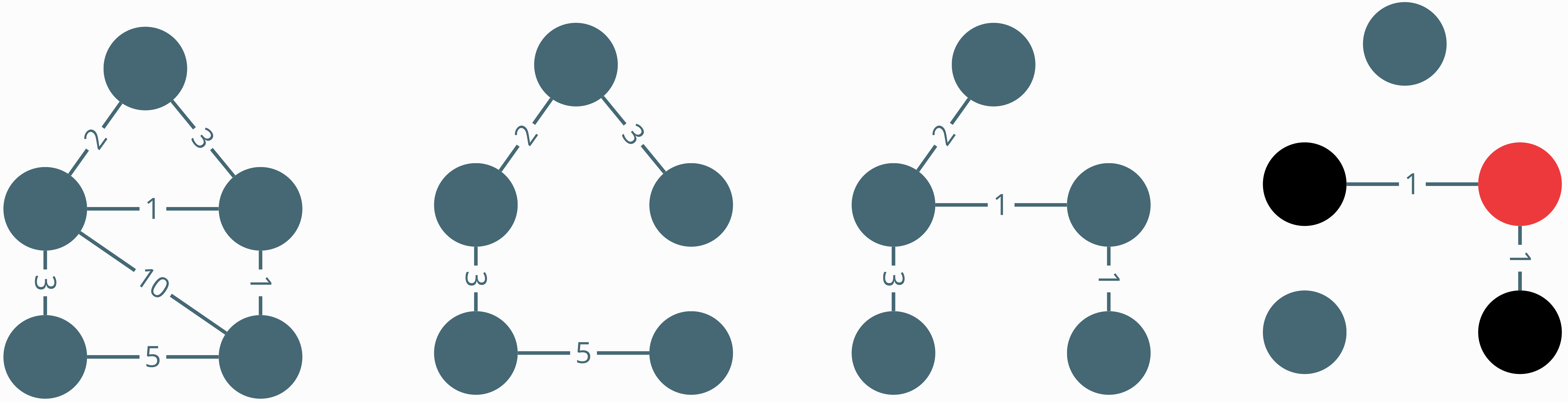
Fonte: Adaptado de (Grimwood, 1994, p. 14).

Árvore de Steiner em Grafos

Nesta variação, a Árvore de Steiner deve ser encontrada dentro de um grafo.
A ideia é conectar um subconjunto específico de vértices terminais do grafo, permitindo a inclusão de vértices intermediários para minimizar o custo total das arestas conectando esses terminais.
Características:

- Utiliza a estrutura do grafo já existente.
- Importante em redes onde os vértices e arestas já estão pré-definidos.

Árvore de Steiner em Grafos



Grafo qualquer

Árvore geradora
custo = 13

Árvore geradora
mínima
custo = 7

Árvore de Steiner

Fonte: Elaborado pelo autor.

Árvore de Steiner Retilinea

Na Árvore de Steiner Retilínea, os vértices são conectados por segmentos de linha que são ou horizontais ou verticais. Esta variação é especialmente relevante em áreas como o design de circuitos integrados, onde as conexões seguem um layout de grade retilíneo.

Características:

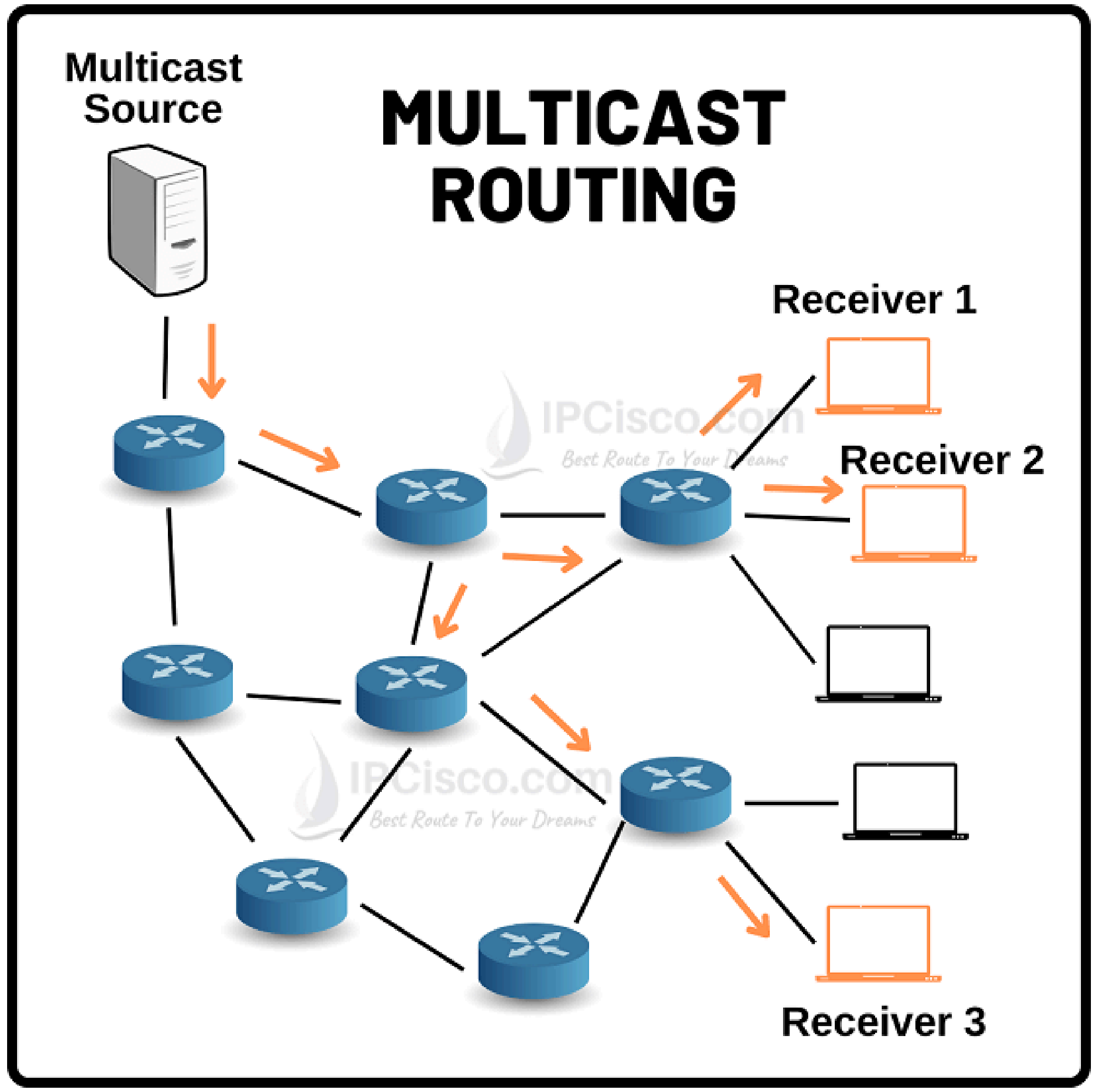
- As conexões são feitas ao longo de linhas retas, alinhadas com os eixos x e y.
- Utilizada em problemas onde o espaço é restrito a um layout de grade.

Aplicações práticas

- Redes de comunicação;
- Projetos de circuitos eletrônicos;
- Distribuição de óleo e gás;
- Sistemas de irrigação;

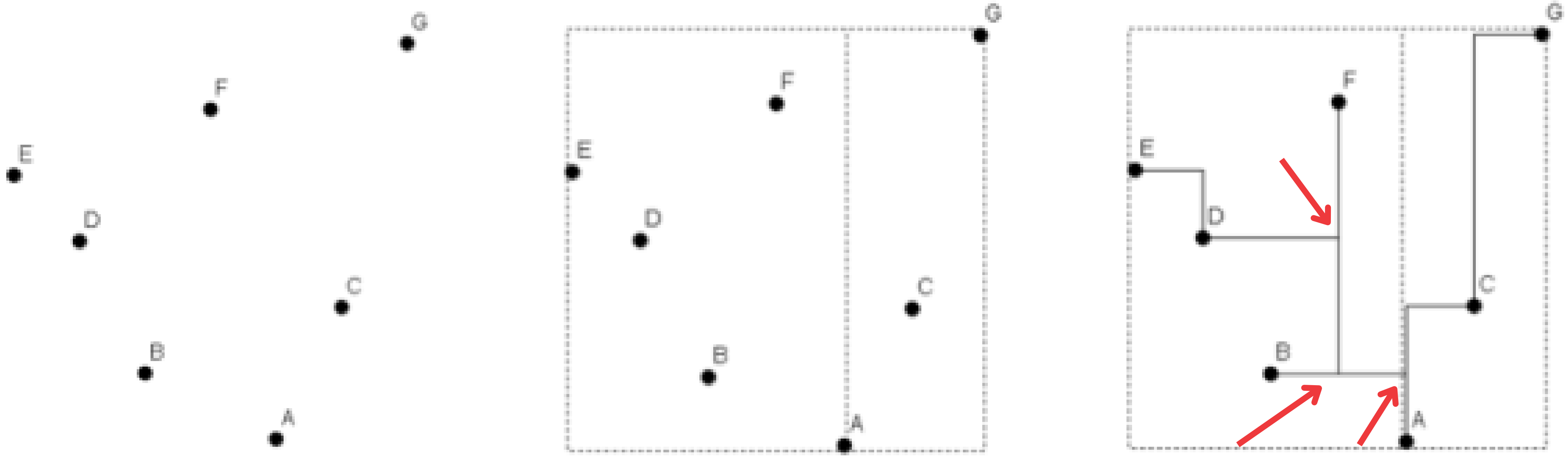
Aplicações práticas

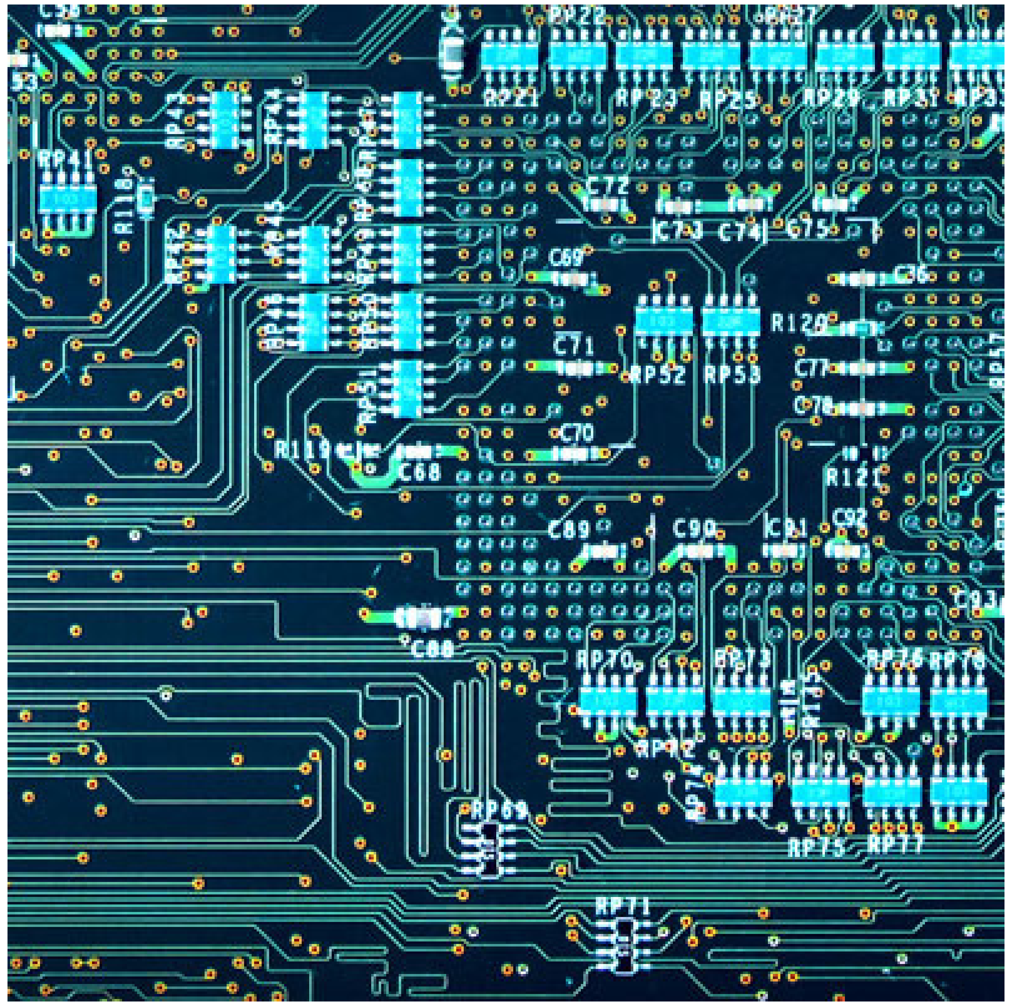
- Redes de comunicação: Roteamento Multicast



Aplicações práticas

- Projetos de circuitos eletrônicos: Circuitos Integrados





Aplicações práticas

- Distribuição de óleo e gás: Conectar poços de petróleo, refinarias e estações de bombeamento.

Aplicações práticas

- Sistemas de irrigação: Distribuir água de maneira eficiente para cobrir todas as áreas de cultivo a partir de uma ou mais fontes de água.

Referências

- https://ipcisco.com/lesson/multicast-routing/, Acesso em 08/05/2024
- https://digitalcommons.unl.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1140&context=computerscidiss , Acesso em 08/05/2024
- SOOTHILL, Germander. The Euclidean Steiner Problem. Report, Department of Mathematical Science, Durham University, England (Undergraduate Departmental Prizes), 2010.
- JARNÍK, Vojtěch; KÖSSLER, Miloš. O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Jednota československých matematiků a fysiků, v. 63, n. 8, p. 223-235, 1934.
- GRIMWOOD, Geoffrey Ross. The Euclidean Steiner tree problem: Simulated annealing and other heuristics. 1994. Thesis (Ph.D.)—Open Access Te Herenga Waka-Victoria University of Wellington, Wellington, New Zealand, 1994.

Dúvidas? Críticas? Sugestões?

Obrigado!