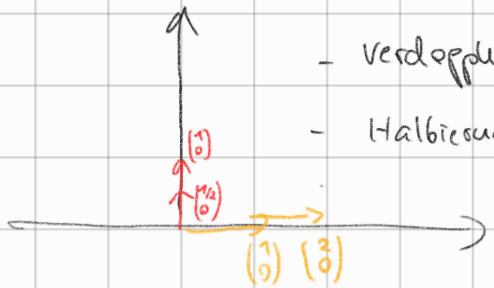
Lorin Urbandat

Serie 1

Aufgabe 1:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A,$$



- Verdopplung in x-Richtung
- Halbierung in y-Richtung

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 1/2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P_A(x) = (2-x)(1/2 - x)}$$

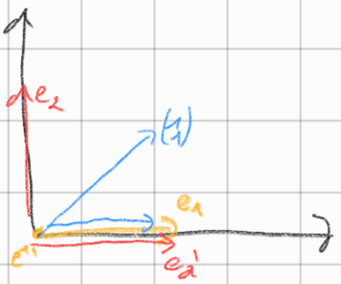
Die Matrix A hat EW 2 und $1/2$ wobei e_1 ein EV von 2 und e_2 ein EV von $1/2$ ist daraus ergibt sich

$$Eig_A(2) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 \right\} \leftarrow \text{Alle EV zum EW } 2$$

$$Eig_A(1/2) = \left\{ \lambda' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda' \in \mathbb{R}, \lambda' \neq 0 \right\} \leftarrow \text{Alle EV zu EW } 1/2$$

(b)

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



B hat nur den Eigenwert 0 für alle Vektoren $\left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \text{ für } \varphi \in (0, 2\pi)$$

Diese Matrix verursacht eine drehung um den Ursprung. dh. sie hat bei $\varphi = 0 \vee \varphi = 2\pi$ den doppelten EW 1, wobei alle Vektoren im $\mathbb{R}^2$ EV sind, da sich dann die Id^2 ergibt. Außerdem hat die Matrix für $\varphi = \pi$ den doppelten EW -1 wobei wieder alle Vektoren im $\mathbb{R}^2$ EV sind. für alle anderen Winkel gibt es keine EW über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4:

(a) z.z. $(T \circ S)(v) = \lambda v \wedge S(v) \neq 0 \Rightarrow (S \circ T)(S(v)) = \lambda S(v)$

$\Rightarrow (T \circ S)(v) \overset{\text{Def.}}{=} T(S(v)) = \lambda v$

$\Rightarrow (S \circ T)(S(v)) = S(T(S(v))) = S(\lambda v) = \lambda S(v)$

wir sehen, dass $S(v)$ ein EV von $S \circ T$ mit EW λ ist, was zu zeigen war $\boxed{z}$

(b) z.z. Wenn $\dim V < \infty \Rightarrow T \circ S$ und $S \circ T$ haben dieselben EW

Wir haben in (a) gezeigt, dass ein EW λ von $T \circ S$ auch ein EW von $S \circ T$ ist, dass heißt wir müssen noch zeigen, dass ein EW α von $S \circ T$ zum Vektor $v \in V$ auch ein EW von $T \circ S$ ist. denn dann haben $T \circ S$ und $S \circ T$ dieselben Eigenwerte

z.z. für $v \in V$ EV von $S \circ T$ mit EW $\alpha \in K$ ist λ auch ein EW von $T \circ S$

$\Rightarrow (S \circ T)(v) = S(T(v)) = \alpha v$

Es gilt $T(v) \neq 0$, weil T eine lineare Abb. ist denn

$T(v) = 0 \overset{\text{Additivität von } T}{\Rightarrow} v = 0$ da aber v ein EV ist gilt $v \neq 0$ und somit auch $T(v) \neq 0$

$\Rightarrow (T \circ S)(T(v)) = T(S(T(v))) = T(\alpha v) = \alpha T(v)$

Das heißt alle EW λ von $T \circ S$ sind EW von $S \circ T$ und alle EW α von $S \circ T$ sind EW von $T \circ S$.

Daraus folgt, dass $S \circ T$ und $T \circ S$ die selben EW haben was zu zeigen war

$\boxed{\lightning}$

Aufgabe 6:

(a) __z. z.__ $T_{V/U} : V/U \to V/U$, $v+U \mapsto Tv+U$ ist ein wohl-definierter Endomorphismus

Wir müssen zeigen, dass 1) Die Abbildung unabhängig von der Wahl des Repräsentanten ist

2) $\operatorname{Im}(T_{V/U}) \subseteq V/U$

3) $T_{V/U}$ ist ein Endomorphismus

1) Seien $v, v' \in V$ sodass $v \sim_U v'$ bzw. $v' \in [v]_{\sim_U}$

Dann ist zu zeigen, dass $Tv' \in [Tv]_{\sim_U}$ ist bzw. dass

$Tv' - Tv \in U$

Wir wissen dass $v' - v \overset{\text{weil } v' \sim_U v}{\in} U$ außerdem ist U T-invariant

$$\underline{T(v') - T(v) \overset{T \text{ ist Endomorph}}{=} T(v'-v) \overset{U \text{ ist } T \text{ invariant}}{\in} U}$$

Was zu zeignen war.

Das heißt $T_{V/U}$ hängt nicht vom Repräsentanten ab. ✓

2) __z.z.__ $\operatorname{Im}(T_{V/U}) \subseteq V/U$

$\boxed{\text{Erinnerung: } \quad V/U := \{v+U \mid v \in U\}}$

Da $v \in V$ und T ein Endomorphismus auf V ist, ist $Tv \in V$. damit gilt per Definition $\underline{Tv + U \in V/U}$ was zu zeigen war.

3) z.z. $T_{V/U}$ ist ein Endomorphismus

Wir müssen zeigen dass 3.1) $\mathrm{Im}(T_{V/U}) \subseteq V/U$

3.2) $T_{V/U}$ ist eine lineare Abb.

3.1) Dies haben wir bereits in 2 gezeigt

3.2)

Additivität

Seien $v_1, v_2 \in V$ und $v_1 + U,\ v_2 + U \in V/U$

$$T_{V/U}((v_1+U)+(v_2+U)) \overset{\text{Def. der Addition auf } V/U}{=} T_{V/U}((v_1+v_2)+U) \overset{\text{Def. von } T_{V/U}}{=} T(v_1+v_2)+U$$

$$\overset{T \text{ ist linear}}{=} T(v_1)+T(v_2)+U \overset{\text{Addition auf } V/U}{=} (T(v_1)+U)+(T(v_2)+U)$$

$$\overset{\text{Def. von } T_{V/U}}{=} \underline{T_{V/U}(v_1+U) + T_{V/U}(v_2+U)}$$ was zu zeigen war

Homogenität

Sei $a \in K$, $v \in V$ und $v + U \in V/U$

$$T_{V/U}(av + U) \overset{\text{Def. } T_{V/U}}{=} T(av) + U \overset{T \text{ ist Linear}}{=} aT(v) + U$$

$$\overset{\text{Def } T_{V/U}}{=} \underline{a T_{V/U}(v + U)}$$ was zu zeigen war

Wir haben gezeigt, dass $T_{V/U}$ nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängt und dass $T_{V/U}$ tatsächlich ein Endomorphismus ist. damit ist $T_{V/U}$ wohl-definiert was zu zeigen war

$\square$

Aufgabe 7:

Sei $U \subseteq V$ ein UVR von V und $\pi_U : V \to V/U$
$v \in V \mapsto v + U \in V/U$

Für einen UVR $W \subseteq V$ sei $\pi_U(W) = \{\pi_U(w) \mid w \in W\}$

Für einen UVR $L \subseteq V/U$ sei $\pi_U^{-1}(L) = \{v \in V \mid \pi_U(v) \in L\}$

Zeigen Sie:

a

1) Wohldefiniertheit
2) Bijektivität

$\{W \subseteq V : W \text{ ist UVR von } V \text{ mit } U \subseteq W\}$
$\xrightarrow{\tilde{\pi}_U} \{L \subseteq V/U : L \text{ ist UVR von } V/U\}$

1)