Universidade Federal de Itajubá
Instituto de Matemática e Computação (IMC/UNIFEI)
COM936 – Metaheurísticas para problemas de otimização

Trabalho 1 - Seleção de Dataset

Autores: Jean Carlos de Oliveira / 35138; Robert Nicolas Mendes / 2018012810; Victor Pereira Moreira / 2016012632;
Data: Itajubá, 08 de Agosto de 2019.

Sumário

1 Introdução

Esse artigo possui a finalidade de documentar o trabalho da equipe durante todo o processo de esquematização e implementação de algoritmos para otimização com a necessidade de realizar aproveitamento de espaço durante o empacotamento de caixas.

1.1 Problemas de empacotamentos de formas em recipientes circulares

Para abordagem e contextualização do problema, será tratado o problema para embalar pacotes de formas quadradas e retangulares idênticos e não idênticos, respectivamente, em recipientes circulares de tamanho fixo com base no artigo [1]. Dado que o recipiente circular pode não ser grande o suficiente para acomodar todos os retângulos disponíveis, existe um elemento de escolha no problema. Resumidamente, deve-se optar pelo empacotamento de um dos retângulos disponíveis e além disso, para aqueles que já estão embalados, informar quais serão suas posições dentro do recipiente. A embalagem deve respeitar as restrições óbvias de que os retângulos compactados não se sobreponham um ao outro e que cada retângulo empacotado esteja inteiramente dentro do recipiente respeitando os limites do container. Esta embalagem deve ser de modo a maximizar um objetivo apropriado (por exemplo, maximizar o número de retângulos ou maximizar a área total dos retângulos embalados).

2 Desenvolvimento

Buscamos analisar o conjunto de dados escolhido de forma a compreender melhor a organização dos dados para uma posterior implementação de otimização. A relação entre cada conjunto visualizado foi detalhada nas subseções abaixo.

2.1 Conjunto de Dados

Os datasets utilizados são compostos por seis arquivos de dados, sendo três arquivos compostos com informações sobre quadrados, e outro três dados compostos com informações sobre retângulos.

2.1.1 Dados sobre os Quadrados

Os dados a seguir contém as respectivas informações sobre os quadrados e os tamanhos sobre os recipientes circulares que se deve atender:

```
10 3.44 4.21    4.87
1.48
1.78
2.51
2.77
3.31
3.36
3.71
3.89
4.32
4.74
```

Figura 1: Arquivo de Dados dos Pacotes Quadrados

.

- No canto superior esquerdo, no que se encontra o valor 10, é informado a quantidade de quadrados utilizados em comprimentos diferentes;
- Os valores 3.44, 4.21 e 4.87 localizados na parte superior do exemplo, são dados que fornecem três valores para o raio, sendo cada raio correspondente a um diferente container que serão utilizados para comportar os quadrados;
- A coluna de valores do 1.48 até 4.74, informa o comprimento do lado de cada quadrado;

2.1.2 Dados sobre os Retângulos

Os dados a seguir, são as respectivas informações sobre os retângulos, e os tamanhos informados sobre os recipientes circulares:

```
10 2.95 3.62    4.18
1.10    1.61
2.20    1.08
1.68    1.46
1.82    2.61
2.70    2.57
3.21    2.21
2.99    3.51
3.68    3.42
4.62    3.36
3.79    4.79
```

Figura 2: Arquivo de Dados dos Pacotes Retangulares

.

- No canto superior esquerdo, no que se encontra o valor 10, é informado a quantidade de retângulos utilizados em comprimentos e larguras diferentes;
- Os valores 2.95, 3.62 e 4.18 localizados na parte superior do exemplo, são dados que fornecem os três valores para o raio, sendo cada raio correspondente a um container distinto que será utilizado para comportar os retângulos;
- Na coluna dos valores de 1.10 até 3.79, é informado o comprimento de cada retângulo;
- Na coluna dos valores de 1.61 até 4.79, é informado a largura de cada retângulo;

3 Estrutura das Formas no Recipiente

Conforme as informações dadas sobre os datasets sobre os quadrados, retângulos e recipientes circulares, existem medidas óbvias a serem seguidas e respeitadas para seja possível maximizar o número de retângulos ou maximizar a área total dos retângulos embalados. Com isso, as ilustrações a seguir, exemplificadas em um conteiner de raio 4.18, apresentam-se formas de como os retângulos devem se comportar dentro do recipiente para a possibilidade de concluir o objetivo.

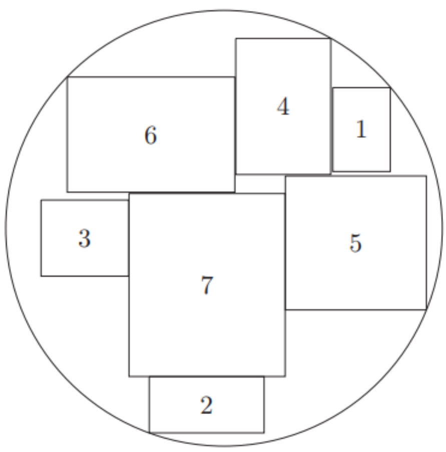

Figura 3: Modelo 1 de Empacotamento para Conteúdos Retangulares

.

Com o objetivo de maximizar o número de retângulos dentro do recipiente, a figura 3 demonstra uma possibilidade de como as formas poderão ser estruturadas;

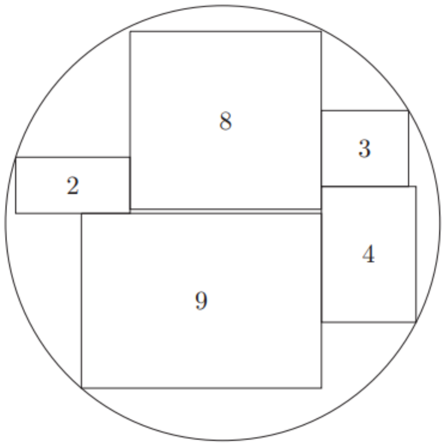

Figura 4: Modelo 2 de Empacotamento para Conteúdos Retangulares

.

Nesse caso, deve-se maximizar a área total de retângulos empacotados no recipiente. A figura 4 demonstra uma segunda possibilidade de como as formas poderão ser estruturadas;

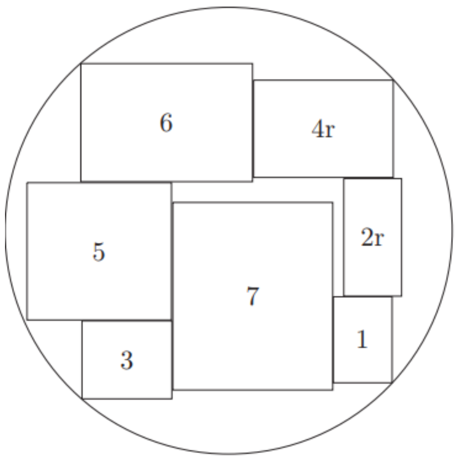

Figura 5: Modelo 3 de Empacotamento para Conteúdos Retangulares

.

Retângulos possuem medidas diferentes para altura e comprimento que poderão ocasionar problemas para suportar as restrições impostas, ou seja, a ocorrência de um retângulo não se enquadrar dentro do contêiner.

Além disso, as implementações também podem querer abordar situações onde os retangulos poderão ser rotacionados na tentativa de se obter melhor aproveitamento de espaço. A figura 5 demonstra uma forma de como os pacotes poderão estar organizados para o mesmo objetivo de aumentar o número de retângulos.

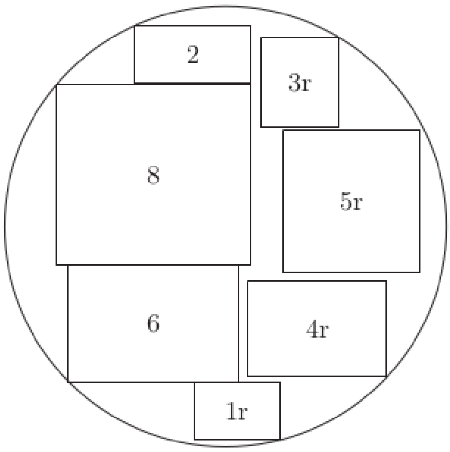

Figura 6: Modelo 4 de Empacotamento para Conteúdos Retangulares
.

Por fim, aplicando o mesmo conceito de rotação, a figura 8 demonstra um exemplo de organização das formas obtendo-se uma maximização da área dos retângulos. Todas as figuras denotadas pelo carácter r informam que a referida forma sofreu rotação igual a 90 graus.

Em escala comparativa, percebe-se que a fig.4 e a fig.8 abordam o mesmo problema, contudo, a implementação da regra de rotacionamento permite retonar um melhor aproveitamento de espaço como no último modelo.

4 Formulação Matemática

Com base no problema de empacotamento de retângulos desiguais em conteiners de tamanho fixo, foi estabelecido um modelo matemático fundamentado na programação não-linear, uma vez que nosso problema será definido por um conjunto de desigualdades nas dimensões dos retângulos e conteiners e nas equações geradas a partir deste, juntamente da função objetivo cujo proposito será maximizar o número e a área dos retângulos contidos.

Para resolução do problema, a partir da geometria euclidiana será verificado qual dos N retângulos deverá ser empacotado, dado que o lado horizontal será definido por *Li (Length)*, a largura por *Wi (Width)* e um valor (empacotado ou não), denotado por *Vi*. Dada a formulação básica, inicialmente não será realizada a rotação, de forma que os retângulos sejam empacotados com suas bordas horizontais (comprimento) paralelas ao eixo x, suas bordas verticais (largura) paralelas ao eixo y. Para os quadrados, logicamente $Li = Wi$, uma vez que seus lados possuem tamanhos iguais. As formas são ordenadas em tamanho crescente baseadas em sua área, ou seja, $LiWi \leq Li{+}1Wi{+}1$. Sendo $i = 1, \ldots, n{-}1$.

Para os valores de Vi é possível validar os diferentes casos do problema. Por exemplo, se $Vi{=}1;\ i = 1, \ldots, n$, temos um problema de maximização do número de retângulos empacotados. Caso $Vi{=}LiWi;\ i = 1, \ldots, n$, temos um problema de maximização da área de retângulos empacotados. Alternativamente, Vi pode assumir valores arbitrários.

Outros valores são:

- Se o retângulo i for empacotado: $ai = 1$. Caso contrário, $ai = 0$.
- (Xi, Yi) a posição do centro do retângulo i.

No que diz respeito ao posicionamento $(xi,\ yi)$ de um retângulo i não empacotado, $ai{=}0$, todos os retângulos serão redirecionados para a origem. Sendo Q o conjunto de todos os pares de retângulos *[(i,j) i=1, ..., n; j=1, ..., n; Tal que j seja maior que i]*. Formulação Matemática:

$$\max \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i \tag{1}$$

$$\text{subject to} \tag{2}$$

$$-\alpha_i \left(\sqrt{(R^2 - W_i^2/4)} - L_i/2\right) \leq x_i \leq \alpha_i \left(\sqrt{(R^2 - W_i^2/4)} - L_i/2\right) \quad i = 1, \ldots, n$$

$$-\alpha_i \left(\sqrt{(R^2 - L_i^2/4)} - W_i/2\right) \leq y_i \leq \alpha_i \left(\sqrt{(R^2 - L_i^2/4)} - W_i/2\right) \quad i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

$$(x_i + L_i/2)^2 + (y_i + W_i/2)^2 \leq \alpha_i R^2 + (1 - \alpha_i)\left(L_i^2/4 + W_i^2/4\right) \quad i = 1, \ldots, n \tag{4}$$

$$(x_i + L_i/2)^2 + (y_i - W_i/2)^2 \leq \alpha_i R^2 + (1 - \alpha_i)\left(L_i^2/4 + W_i^2/4\right) \quad i = 1, \ldots, n \tag{5}$$

$$(x_i - L_i/2)^2 + (y_i + W_i/2)^2 \leq \alpha_i R^2 + (1 - \alpha_i)\left(L_i^2/4 + W_i^2/4\right) \quad i = 1, \ldots, n \tag{6}$$

$$(x_i - L_i/2)^2 + (y_i - W_i/2)^2 \leq \alpha_i R^2 + (1 - \alpha_i)\left(L_i^2/4 + W_i^2/4\right) \quad i = 1, \ldots, n \tag{7}$$

$$\alpha_i \alpha_j \left[\max\{|x_i - x_j| - (L_i + L_j)/2, |y_i - y_j| - (W_i + W_j)/2\}\right] \geq 0 \quad \forall (i,j) \in Q \tag{8}$$

$$\alpha_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{9}$$

Figura 7: Modelo Matemático Proposto pelo Artigo

.

A primeira equação presente na linha 2, maximiza o valor dos retângulos empacotados, enquanto na linha 3, verifica-se se um retângulo é empacotado.

Sua coordenada X é determinada por:

$$\left[-\left(\sqrt{(R^2 - W_i^2/4)} - L_i/2\right), +\left(\sqrt{(R^2 - W_i^2/4)} - L_i/2\right)\right]$$

Figura 8: Fórmula para Cálculo do Valor do eixo x

.

Os limites são deduzidos a partir de considerações geométricas. Considere que o valor da coordenada x do centro associado a um retângulo colocado com seu centro no eixo x e dois de seus cantos tocando o recipiente circular. A principal característica da Eq. (2) é que se o retângulo não for empacotado, então a coordenada x é forçada a ser zero e a Eq. (3) é a restrição equivalente à Eq. (2) para a coordenada y.

As Eqs (4) - (7) são responsáveis para que o retângulo seja empacotado e que seu centro seja justamente posicionado onde todo o retângulo esteja dentro do recipiente. Para isso, garante-se que todos os quatro cantos do retângulo estejam dentro do círculo. Estes quatro cantos são (*Xi* ± *Li / 2, Yi* ± *Wi / 2*). As Eqs. (4) - (7) também garantem que a distância da origem do quadrado para cada um desses cantos não seja maior que o raio do conteiner.

Se um retângulo não for empacotado, ele será posicionado na origem *(Xi = Yi = 0)*. Nesse caso, o lado esquerdo determinado pelas Eqs. (4) - (7) torna-se $Li^2/4 + Wi^2/4$, assim como o lado direito, atendendo às restrições do conteiner.

A Eq. (8) garante que dois retângulos i e j empacotados, não se sobreponham. Para ela, dois retângulos de tamanho *[Li, Wi]* e *[Lj, Wj]* não irão se sobrepor, desde que a diferença entre as coordenadas x do centro seja pelo menos $Li+Lj/2$ ou que a diferença entre as coordenadas do centro y seja pelo menos $Wi+Wj/2$(ou ambas).

Referências

[1] Claudia O López and JE Beasley. *Packing unequal rectangles and squares in a fixed size circular container using formulation space search*, volume 94. Elsevier, 2018.