Probabilités

chaque proposition sera représentée par: un diagramme, une écriture ensembliste, du code python, un tableau, un arbre

Proposition (« Français ») | Diagramme de Venn | Notation ensembliste | Python (console ipython) **| Probabilités | Tableau | Arbre**

Evénements élémentaires équiprobables

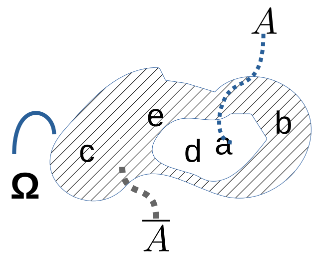
<u>Evénements élémentaires équiprobables</u>:

ex :

Dans l'ensemble des cinq premières lettres de l'alphabet, quelle est la probabilité de piocher la lettre a ou d ?

On note A= « Obtenir la lettre ***a*** ou ***d*** »

L'**événement contraire** de A, se note $\overline{A}$ (A barre)



- $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$
- $A = \{a, d\}$
- $\overline{A} = \{b, c, e\}$

```
In [1]: U = {'a','b','c','d','e'}
   ...: A = {'a','d'}
   ...: A.issubset(U)
Out[1]: True
# A est une partie de U
In [2]: U.difference(A)
Out[2]: {'b', 'c', 'e'}
```

$P(\Omega) = 1$

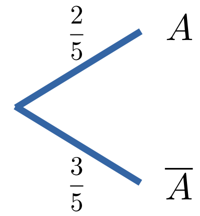
$P(A) = \frac{2}{5}$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

Une probabilité ***p*** est toujours :

$$0 \leq p \leq 1$$

Evénement	A	$\overline{A}$
Probabilité	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$



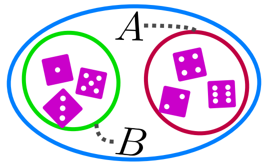
Deux événements incompatibles

Deux événements **incompatibles** :

En jouant au dé, notons :

- A= « Obtenir un nombre pair »
- B= « Obtenir un nombre impair »

Peut-on obtenir un nombre pair **ET** impair ?

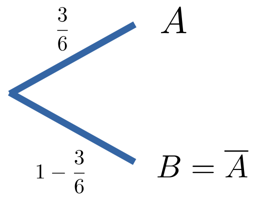


$\cap(\text{"inter"}) \Leftrightarrow ET$

- $A = \{2, 4, 6\}$
- $B = \{1, 3, 5\}$
- $A \cap B = \emptyset$

```
In [1]: A={2, 4, 6}
In [2]: B={1, 3, 5}
In [3]: B.intersection(A)
Out[3]: set()
```

$P(A \cap B) = 0$



Réunion de deux événements incompatibles

Réunion de deux événements incompatibles

Aux cartes, notons

- A= « obtenir une trêfle :♣»
- B= « obtenir un coeur :♥»

Quelles sont les issues de :

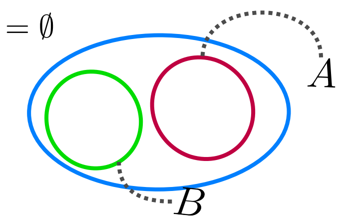
« Piocher un trêfle **OU** un coeur» ?

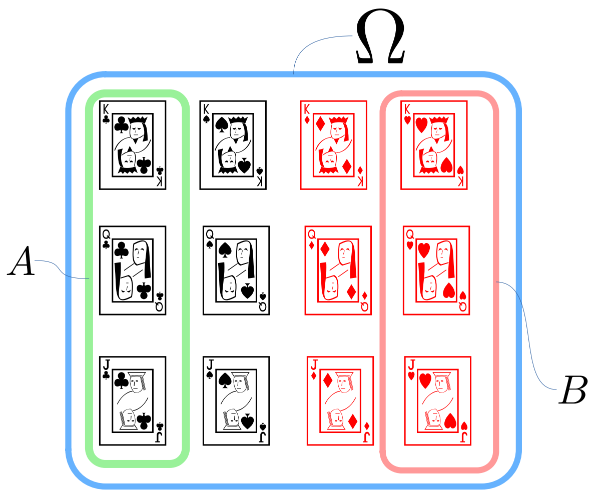
$\cup(\text{"Union"}) \Leftrightarrow OU$

<u>Remarque :</u>

Les événements A et B sont incompatibles :

$A \cap B = \emptyset$





$A \cup B = \{J_♣, Q_♣, K_♣, J_♥, Q_♥, K_♥\}$

```
#Le code python3 ci-dessous correspond
#au cas où A et B ne sont pas
#incompatibles
from itertools import product
figures={'J', 'Q', 'K'}
trêfle ="\u2663"
coeur = "\u2665"
carreau = "\u2666"
pic ="\u2660"
rouge = {coeur, carreau}
enseignes = {trêfle, carreau, coeur, pic}
#Définissons un univers et des événements:
Ω = {u for u in product(figures, enseignes)}
A = {k for k in product('K', enseignes)}
B = {r for r in product(figures, rouge)}
# A appartient à Ω
print(A.issubset(Ω))
#A ET B
print("A ET B", A.intersection(B))
#A OU B
print("A OU B", A.union(B))
```

A et B **incompatibles** donc :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

donc :

$$P(A \cup B) = \frac{3}{12} + \frac{3}{12}$$

Il se trouve que dans cette situation

$P(A) = P(B) = \frac{3}{12}$, ce n'est pas toujours le cas. Comme A et B **incompatibles, b**ien sûr :

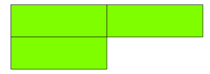
$$P(A \cap B) = \frac{0}{12} = 0$$

Le tableau suivant est untableau d'effectif à double entrée :

$\cap : ET$	A :trêfle	$\overline{A}$:non trêfle	total
B : coeur	0	3	3
$\overline{B}$: non coeur	3	6	9
total	3	9	12

ex : $\overline{A} \cap B$: Il y a bien 3 cartes qui sont des coeurs ET pas des trêfles.

Remarque, es cases colorées du tableau représentent :

$A \cup B$ 

Evénements non incompatibles

Evénements non incompatibles :

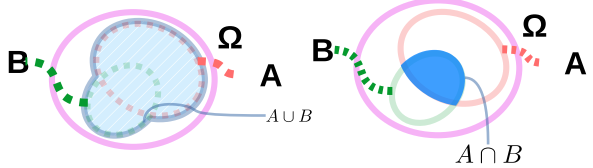
roi:K (King), reine:Q (Queen), valet:J (Jack)

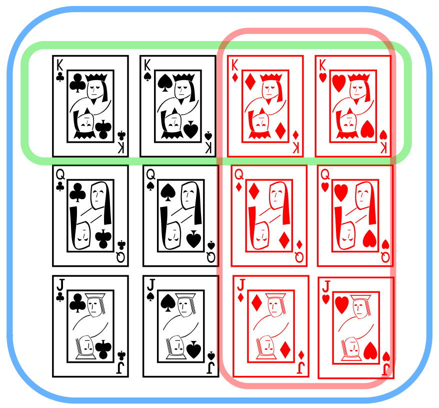
Paquet de 12 cartes (figures:K, Q, J)

- A= « La carte est un roi:K»
- B= « La carte est rouge (♦,♥)

Quelles sont les issues possibles des événements :

- « piocher un roi **ET** une carte rouge » ?
- « piocher un roi **OU** une carte rouge »





$A \cap B = \{K_♦, K_♥\}$

$A \cup B = \{K_♦, K_♣, K_♦, K_♥, Q_♦, Q_♥, J_♦, J_♥\}$

Vérifier que :

$P(A \cap B) = \frac{2}{12}$

Calculons $P(A \cup B)$ en comptant les issues:

$$P(A \cup B) = \frac{8}{12}$$

Calculons $P(A \cup B)$ avec la relation:

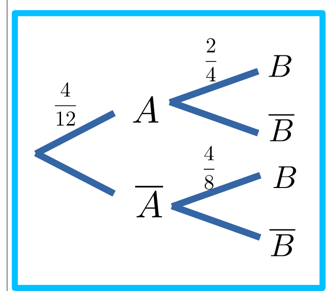
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

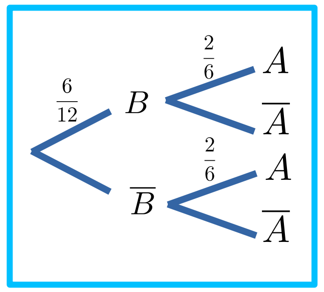
$P(A \cup B) = \frac{4}{12} + \frac{6}{12} - \frac{2}{12}$ donc :

$P(A \cup B) = \frac{4+6-2}{12} = \frac{8}{12}$

On note les probabilités sur les branches :

$\cap : ET$	A	$\overline{A}$	total
B	2	4	6
$\overline{B}$	2	4	6
total	4	8	12





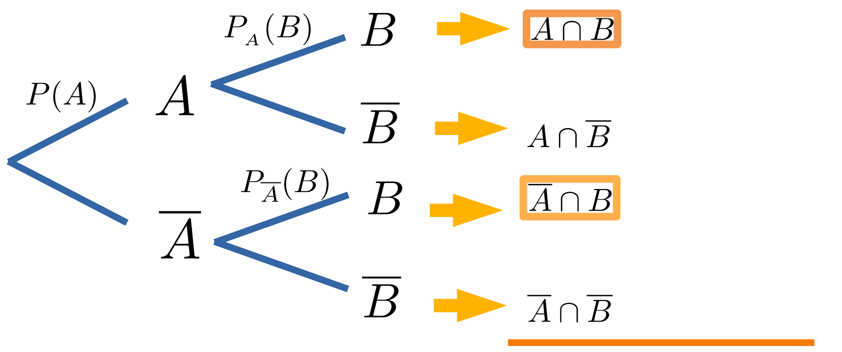
Probabilités conditionnelles

Proposition et événements	Représentation (tableau à double entrée, arbre)	Probabilité

Proposition et événements

On a deux événements A et B. La question que l'on se pose sera typiquement : A est réalisé (« On sait que A s'est produit »), quelle est la probabilité que B se réalise ? C'est l'événement $B\ sachant\ A$.

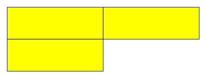
Représentation (tableau à double entrée, arbre)



$$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$$

Les événements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles. Il y a deux façons d'obtenir B : avoir réalisé A et B ou avoir réalisé le contraire de A et B.

$\cap : ET$	A	$\overline{A}$	*total*
B	$A \cap B$	$A \cap \overline{B}$	$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$
$\overline{B}$	$\overline{A} \cap B$	$\overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$
total	$A = (A \cap B) \cup (A \cup \overline{B})$	$\overline{A} = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$	Ω

$A \cup B$ 

Probabilité

<u>Théorème des probabilités conditionnelles :</u>

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

« La proba d'une feuille, c'est le produit des probas des branches »

Donc :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

La probabilité $P_A(B)$ se dit : *probabilité de B **sachant** A.*

<u>Théorème des probabilités totales</u> :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

car $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$sont incompatibles.

Evénements indépendants :

Deux événements sont indépendants quand savoir que l'un s'est réalisé n'apporte aucune connaissance sur la probabilité de l'autre.

<u>Exemple :</u>

On lance un dé deux fois (ou deux dés) et :

- A=on obtient une face paire au premier lancé (2, 4, 6)
- B= on obtient un nombre premier (2, 3, 5) au second lancé

Remarque :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

donc la probabilité de réaliser ***ni A ni B*** est :

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

<u>Deux événements A et B sont indépendants si :</u>

$$P(B) = P_A(B)$$

Conséquence :

$$P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$$

C'est en général, cette propriété que l'on utilise pour vérifier l'indépendance de deux événements.