Réf. : **BR3010 V1**

Contrôle actif des bruits - Bases théoriques

Date de publication :
10 avril 2008

Date de dernière validation :
27 juin 2024

Cet article est issu de : **Environnement - Sécurité | Bruit et vibrations**

par **Gérard MANGIANTE**

Résumé Deux méthodes seulement permettent de se protéger contre le bruit, celle qui consiste à le réduire à la source, et celle qui consiste à empêcher sa propagation vers la zone à protéger. Disposer sur le trajet de l'onde un ensemble de sources secondaires émettant une deuxième onde de même amplitude, mais de signe opposé, fait partie des techniques de réduction. Au final, par interférence destructive, la résultante sera nulle dans cette méthode déclarée active. Après un rappel des bases physiques et acoustiques, cet article développe le concept de contrôle actif, ses deux stratégies de commande, en boucle ouverte ou fermée, et les différentes recherches de filtrage optimal.

Abstract Only two methods allow for the protection against noise, one consisting in the reduction at source and the other preventing its propagation towards the protection zone. Attenuation techniques involve the placing, on the trajectory of the wave, of a set of secondary sources emitting a second wave of the same amplitude but of opposite signs. Finally, via destructive interference, the resultant is nil in this active method. After having recalled physical and acoustic basis, this article develops the concept of active control, its two command strategies in open or closed loop and the various means to achieve an optimal filtration.

Contrôle actif des bruits

Bases théoriques

par **Gérard MANGIANTE**
Professeur des universités
Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (CNRS Marseille)

Classiquement on distingue deux méthodes principales de protection contre le bruit : on peut ***réduire le bruit à la source*** *ou* ***empêcher sa propagation*** *vers la zone à protéger. La réduction du bruit à la source, lorsqu'elle est possible, devrait toujours être entreprise avant toute autre forme de lutte contre le bruit car c'est souvent elle qui présente la meilleure efficacité. Par exemple, on peut réduire les émissions aux fréquences basses d'une machine en disposant celle-ci sur un socle massif qui agit par inertie, puis éliminer les fréquences hautes par l'interposition, entre le socle et la machine, d'un matériau résilient comme le liège, le caoutchouc ou la fibre de verre. On peut ensuite compléter ces actions à la source par un traitement acoustique dans la machine et un capotage autour de celle-ci. Lorsque la réduction à la source est impossible ou difficile à mettre en œuvre, on interpose, entre la source de bruit et la zone à protéger, des matériaux qui s'opposent à la propagation des ondes sonores. Pour cela, on peut utiliser des* ***matériaux absorbants****, constitués de substances poreuses ou fibreuses, comme la laine de roche ou la mousse de polyuréthane, ou des* ***matériaux réfléchissants****, qui renvoient les bruits vers des zones où ils sont moins gênants.*

Ces deux techniques de réduction du bruit présentent malheureusement un inconvénient majeur : elles sont difficiles à mettre en œuvre lorsque le bruit à réduire présente des contributions importantes dans le domaine des basses fréquences. Par exemple, l'emploi de matériaux absorbants, très efficace aux fréquences élevées ou moyennes, conduit à des encombrements et des masses prohibitifs aux fréquences basses.

L'absorption et la réflexion ne sont pas les seuls moyens utilisables pour empêcher la propagation d'une onde sonore. Si on dispose sur le trajet de cette onde un ensemble de sources secondaires émettant une deuxième onde de même amplitude, mais de signe opposé, l'addition de ces deux ondes va donner, par interférence destructive, une résultante nulle. Alors que les méthodes de réduction de bruit par absorption ou réflexion sont purement ***passives****, la réduction des bruits par interférence est une méthode* ***active*** *car elle nécessite des* ***actionneurs*** *(les sources secondaires, également appelées* ***sources de contre-bruit****). Diverses expressions ont été utilisées pour désigner cette méthode, suivant que l'on focalise l'attention sur tel ou tel aspect particulier du mécanisme de réduction du bruit : absorption acoustique active, absorption acoustique stimulée, anti-bruit actif... Elles ont été abandonnées au profit d'un anglicisme, le* ***contrôle actif*** *(traduction raccourcie de* ***active noise control****) qui s'est imposé et que nous emploierons dans la suite du présent article.*

Le concept de contrôle actif n'est pas nouveau (nous verrons que les premiers brevets sur le sujet ont été déposés dans les années trente) mais pendant longtemps les tentatives de réalisation et d'exploitation sont restées sans suite. Deux raisons expliquent cette longue gestation :

– si elle n'est pas associée à une méthode de reconstitution du champ acoustique à réduire, l'utilisation des interférences ne permet d'obtenir des réductions notables du niveau sonore que dans des domaines de dimensions restreintes. C'est seulement dans les années soixante-dix que les bases physiques du contrôle actif seront établies à la suite des travaux fondateurs de Jessel ;
– les caractéristiques du bruit à réduire sont généralement variables dans le temps, et les conditions de propagation peuvent fluctuer, ce qui rend nécessaire une réactualisation permanente du signal de commande des sources secondaires.

Les développements, dans les années quatre-vingt, de la microélectronique et du traitement numérique du signal, ont permis la réalisation de systèmes de ***contrôle actif adaptatif*** *capables d'élaborer à chaque instant, et sans action extérieure, la commande optimale des sources secondaires. Ce progrès fut décisif et entraîna, dans les années quatre-vingt-dix, la naissance des premières applications industrielles du contrôle actif. Parallèlement se développait aussi le* ***contrôle actif des vibrations****, plus complexe que le contrôle actif acoustique, et qui est traité dans le fascicule [R 6 200].*

À ce jour, le contrôle actif continue de faire l'objet de nombreuses recherches car de nombreux problèmes sont loin d'être complètement résolus. Ils concernent, et la liste n'est pas exhaustive, l'optimisation du nombre et du placement des sources secondaires, la commande des systèmes complexes, la mise au point d'algorithmes de commande performants et robustes, capables de traiter des bruits de toute nature, la réduction des bruits rayonnés par des sources mobiles ou les effets psychoacoustiques du contrôle actif.

Liste des principales notations	
c	Célérité
E[...]	Espérance mathématique
$e(n)$, $E(z)$	Signal d'erreur (temps discret)
$e(t)$, $E(\omega)$	Signal d'erreur (temps continu)
$\boldsymbol{f}$	Source volumique de force
f_e	Fréquence d'échantillonnage
$G(M\|M_0)$	Fonction de Green
$h_n(x)$	Fonction de Hankel sphérique de première espèce
$\mathbf{I}$	Matrice unité
$J(n)$	Fonction de coût
k	Nombre d'onde
$P_n^m(x)$	Fonction de Legendre de degré n et d'ordre m
q	Source volumique de débit
Q_s	Source de Huygens
$s(M)$	Fonction de découpage
$SNR(\omega)$	Rapport signal sur bruit
$S_{xx}(\omega)$	Densité spectrale de puissance du signal $x(t)$
$S_{xy}(\omega)$	Densité spectrale d'interaction des signaux $x(t)$ et $y(t)$
T_e	Période d'échantillonnage
$\widehat{x}(t)$, $\widehat{X}(\omega)$, $\widehat{X}(z)$	Estimations des grandeurs $x(t)$, $X(\omega)$, $X(z)$
$\boldsymbol{x}$	Vecteur
$\boldsymbol{x}^T$	Vecteur transposé
$\mathbf{X}$	Matrice
$\mathbf{X}^T$	Matrice transposée
$x(n)$	Signal à temps discret
$x(t)$	Signal à temps continu
$\overline{x(t)}$	Valeur moyenne de $x(t)$
$\overline{\|x(t)\|^2}$	Valeur quadratique moyenne de $x(t)$
$x^*(t)$	Complexe conjugué de $x(t)$
$X(\omega)$	Transformée de Fourier de $x(t)$
$X(z)$	Transformée en z de $x(n)$

Liste des principales notations	
$Y_{mn}^e(\theta,\varphi)$, $Y_{mn}^o(\theta,\varphi)$	Harmoniques sphériques
$\gamma_{xy}^2(\omega)$	Cohérence entre les signaux $x(t)$ et $y(t)$
$\delta(n)$	Échantillon unité
$\delta(t)$	Distribution de Dirac
δ_Σ	Distribution de Dirac associée à la surface Σ
λ	Longueur d'onde
λ_k	Valeur propre d'une matrice
μ	Coefficient de convergence d'un algorithme adaptatif
ρ_0	Masse volumique
σ_x^2	Variance de $x(t)$
$\chi(\mathbf{X})$	Conditionnement de la matrice $\mathbf{X}$
ω	Pulsation
Δ	Opérateur laplacien
$\boldsymbol{\nabla}$	Opérateur nabla

1. Aperçu historique

1.1 Précurseurs

C'est à l'ingénieur Henri Coanda que l'on doit la première description d'un système de réduction des bruits basé sur l'utilisation des interférences. Dans deux brevets français, « Procédé de protection contre les bruits » [1], déposé en 1930, et « Procédé et dispositif de protection contre les bruits » [2], déposé en 1932, il indique : *« ... sur le trajet d'une onde sonore à éliminer on fait intervenir une autre onde (onde compensatrice) de mêmes caractéristiques que la première, mais déphasée d'une ou plusieurs demi-longueurs d'onde par rapport à celle-ci. De l'interférence de ces deux ondes résulte une zone neutre qui est une zone de silence »*. Quelques années plus tard, Paul Lueg dépose un brevet sur le même sujet, d'abord en Allemagne en 1933 [3], puis aux États-Unis en 1934 [4]. Lueg analyse en détail le processus de déphasage nécessaire pour obtenir des interférences destructives entre deux ondes se **propageant dans le même sens**. Il décrit aussi un dispositif électronique, basé sur un microphone et un amplificateur, permettant d'obtenir le gain et le retard nécessaires pour la commande d'une source de contre-bruit. Le lecteur intéressé trouvera des informations détaillées sur les travaux de Coanda et de Lueg dans les références [5] et [6].

Ces travaux n'eurent aucune suite pratique dans les années qui suivirent les dépôts des brevets, et il fallut attendre les années cinquante pour voir naître la première tentative sérieuse de contrôle actif des bruits. Deux ingénieurs des laboratoires RCA, Harry F. Olson et Everett G. May présentèrent dans la parution de novembre 1953 du *Journal of the Acoustical Society of America* un « absorbeur électronique de son » [7] basé sur les interférences de deux ondes se **propageant en sens contraire**. Cet absorbeur consistait en un microphone relié à un haut-parleur par un amplificateur réglé de telle façon que ce haut-parleur émette sur le microphone une pression acoustique égale et opposée à celle de l'onde incidente à réduire. La stabilité du système résultait de la faible distance entre le microphone et le haut-parleur qui ne donnait pas lieu à un trop grand nombre de rotations de phase. Pour des fréquences inférieures à 500 Hz, Olson et May obtenaient une réduction d'une quinzaine de décibels du niveau sonore incident dans des domaines de dimensions restreintes, analogues aux « points sourds » d'un système d'ondes stationnaires. Des applications de l'absorbeur électronique à la réalisation de casques antibruit, de traitement actif des salles ou de systèmes antivibration actifs furent proposées ensuite par Olson [8] mais sans succès, à cause des limitations imposées par l'électronique de l'époque.

En 1955, un dispositif destiné à réduire par contrôle actif le bruit de magnétostriction d'un transformateur de puissance fut proposé par un autre ingénieur, William B. Conover [9] [10] [11], de la General Electric Company. Après un réglage manuel de la commande d'un haut-parleur placé très près du transformateur et utilisé comme source de contre-bruit, Conover obtenait une réduction de 6 dB du bruit rayonné dans une zone de 23° d'ouverture (le « faisceau de silence »). Ce dispositif, très sensible aux fluctuations du bruit du transformateur, aux variations de température et au vent, n'eut, comme ses prédécesseurs, aucune suite pratique.

1.2 Travaux fondateurs

Le principe des interférences qui sert de base théorique aux travaux que nous venons de décrire, ne peut suffire pour obtenir un dispositif réellement efficace de contrôle actif car l'effet d'interférence s'accompagne toujours de la création de « franges ». À côté des zones de silence résultant du contrôle actif (équivalentes aux « franges noires » de l'optique) on trouve des **zones de renforcement** du bruit incident (« franges brillantes ») ce qui limite l'intérêt du dispositif.

Dans les années soixante, le français Maurice Jessel, chercheur au Centre de recherches physiques de Marseille, montra qu'en associant les principes de Young et de Huygens, il est possible de concevoir des systèmes de contrôle actif permettant d'obtenir le silence dans un domaine aussi étendu qu'on le souhaite [12] [13] [14]. Avec Gérard Mangiante et Georges Canévet, il fut a l'origine d'une nouvelle formulation du principe de Huygens, dite **formulation JMC**, qui allait permettre de fonder le problème de la reconstitution d'un champ sonore sur de solides bases théoriques [15] [16] [17] [18] [19] [20] [21] [22].

Parallèlement, et indépendamment des travaux du groupe JMC, des applications du principe de Huygens au contrôle actif étaient développées en URSS à partir des travaux de Malyuzhinets [23] [24] [25].

Ces fondements théoriques, associés aux importants progrès dans le domaine du traitement numérique du signal, allaient permettre, à partir des années quatre-vingt, l'essor du contrôle actif.

1.3 Ère moderne

Les caractéristiques du bruit à réduire par contrôle actif sont généralement variables dans le temps, et les conditions de propagation peuvent fluctuer, ce qui rend nécessaire une réactualisation permanente du signal de commande de la source secondaire. Avec les premiers systèmes de contrôle actif, basés sur des dispositifs purement analogiques, les réglages ne pouvaient être modifiés que par une action extérieure, par exemple en agissant sur des potentiomètres. Le système ne pouvait pas « suivre » les variations du bruit à réduire et les conditions d'interférence destructive n'étaient pas assurées à long terme.

Les progrès de la microélectronique et l'essor du traitement numérique du signal à partir des années quatre-vingt allaient permettre la naissance du **contrôle actif adaptatif**. De quoi s'agit-il ? On ajoute un second microphone placé en aval de la source secondaire, pour obtenir des informations sur l'action du contrôle actif. Le signal délivré par ce microphone (le signal d'erreur) est envoyé vers un dispositif de commande (le contrôleur) construit à partir d'un ensemble de processeurs. Il est ensuite traité par un algorithme grâce auquel le processeur recalcule en permanence la commande de la source secondaire de façon à minimiser, au sens d'un critère donné, la somme bruit + contre-bruit. Le calcul de la commande fait appel à une formule itérative : à un instant donné interviennent, non seulement les informations fournies par le signal d'erreur, mais aussi les valeurs de la commande à un instant antérieur.

Le premier dispositif de contrôle actif adaptatif, destiné à fonctionner dans un conduit, fut mis au point en 1985 au Laboratoire de mécanique et d'acoustique de Marseille, par Alain Roure [26]. Avec le développement des processeurs de signal et de l'électronique numérique, d'autres dispositifs du même genre allaient suivre, et permettre au contrôle actif d'entrer dans l'ère de la maturité à partir des années quatre-vingt-dix.

2. Bases physiques du contrôle actif

2.1 Rappels d'acoustique

Afin d'établir analytiquement un certain nombre de résultats, nous resterons, dans le paragraphe 2, dans le cadre de l'acoustique linéaire des milieux stationnaires et non dissipatifs [AF 3 810] et [AF 3 812].

Dans ces conditions, la pression acoustique est solution de l'équation des ondes :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial q_0}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{f}_0 \tag{1}$$

où c célérité,

ρ_0 masse volumique.

Les quantités q_0 et $\boldsymbol{f}_0$ au second membre représentent les sources volumiques de débit et de force présentes dans le milieu.

Dans le cas d'un son pur de pulsation ω, l'équation (1) se réduit à l'équation de Helmholtz :

$$\Delta p + k^2 p = \nabla \cdot \boldsymbol{f}_0 - \mathrm{j}\omega\rho_0 q_0 \tag{2}$$

où $k = \omega/c$ est le nombre d'onde.

La solution élémentaire de cette équation pour une source ponctuelle monopolaire de débit q_0 est donnée par :

$$p\,(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{j}\omega\rho_0}{4\pi} q_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r} \tag{3}$$

où r désigne la distance entre le monopôle et le point M.

2.2 Principe de Young

Le principe de Young, ou principe des interférences, équivaut en acoustique au principe de la superposition des petits mouvements. Il assure que l'on peut obtenir **localement** le silence en superposant deux ébranlements de même amplitude mais de signes opposés. Malheureusement, ces interférences destructives ne peuvent être obtenues que dans des domaines de dimensions restreintes, et ils s'accompagnent aussi d'**interférences constructives** qui se traduisent par l'apparition de zones dans lesquelles le bruit est renforcé.

2.2.1 Conditions d'atténuation d'une onde acoustique

Considérons deux sources sonores travaillant à la même fréquence et jouant respectivement le rôle de **source primaire** et de **source secondaire**. En appliquant le principe de superposition, la pression acoustique p en un point M résultant de l'interférence des champs sonores $p_p = P_p\, e^{j\omega t}$ et $p_s = P_s\, e^{j\omega t}$ émis par ces deux sources s'écrit $p = p_p + p_s$. On obtiendra le silence en M si la condition $P_s = -P_p$ est vérifiée. Comme nous le verrons plus loin, cette condition, pour des raisons technologiques évidentes, ne peut être vérifiée qu'avec un certain degré d'approximation lorsque le contrôle actif est mis en œuvre. On aura donc en pratique :

$$P_s = A P_p\, e^{j\varphi}$$

où A est un coefficient réel et positif proche de 1 et φ un déphasage proche de π.

La pression acoustique en M devient :

$$p = P_p\, e^{-j\omega t}\,[1 + A\,e^{j\varphi}]$$

et l'atténuation de l'onde primaire, en dB, définie par $\Delta L_p = 20\log|p_p|/|p|$, s'écrit :

$$\Delta L_p = -10\log[1 + 2 \cdot 10^{\delta L_p/20}\cos\varphi + 10^{\delta L_p/10}] \qquad \textbf{(4)}$$

où $\delta L_p = 20\log A$ désigne l'écart, en dB, entre le bruit et le contre-bruit, appelé **erreur d'amplitude**. On définit aussi une **erreur de phase** par $\delta\varphi = |\pi - \varphi|$. L'effet de ces erreurs sur l'efficacité du contrôle est montré sur la figure **1**, qui représente les variations de ΔL_p en fonction de δL_p pour différentes valeurs de φ.

On voit que les performances du contrôle sont très sensibles à de faibles erreurs d'amplitude et de phase. Ainsi, pour obtenir au moins 15 dB d'atténuation, l'erreur de phase doit être inférieure à 5° et l'erreur d'amplitude doit être comprise entre – 1,5 dB et + 1,2 dB.

2.2.2 Contrôle actif utilisant une source secondaire monopolaire

Supposons que les sources primaire et secondaire soient deux sources ponctuelles monopolaires émettant en champ libre, de débits respectifs q_p et q_s et disposées en (– d/2, 0, 0) et (+ d/2, 0, 0) comme indiqué sur la figure **2**.

D'après l'équation (2) la pression acoustique en un point M est donnée par :

$$p\,(M) = \frac{j\omega\rho_0}{4\pi}\left[q_p\frac{e^{-jkr_p}}{r_p} + q_s\frac{e^{-jkr_s}}{r_s}\right] \qquad \textbf{(5)}$$

où r_p et r_s désignent les distances entre les monopôles et le point M.

On pourra obtenir le silence en un point quelconque M_0 en imposant à la source secondaire la condition :

$$q_s = -\,q_p\frac{r_{s_0}}{r_{p_0}}e^{-jk(r_{p_0} - r_{s_0})} \qquad \textbf{(6)}$$

En dehors de ce point, on constate que le champ primaire est réduit dans des zones dont la taille diminue avec la fréquence et qu'il est renforcé ailleurs (figure **3**).

Si le point M_0 est suffisamment éloigné des sources, on peut utiliser une approximation de champ lointain et écrire la condition (6) sous la forme :

$$q_s \approx -\,q_p\, e^{-jkd\cos\theta_0} \qquad \textbf{(7)}$$

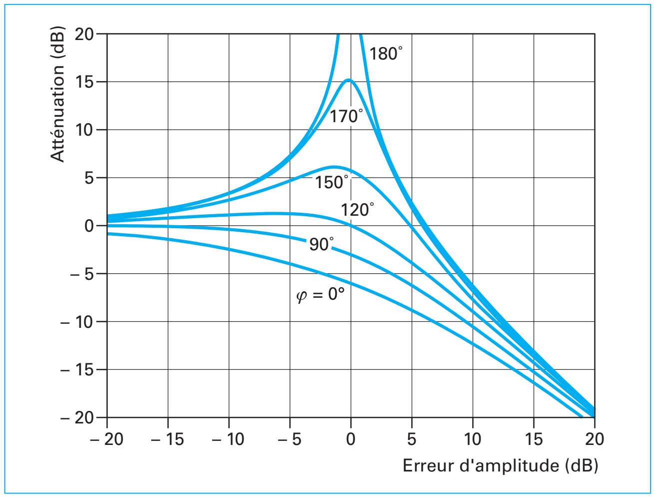


Figure 1 – Influence des erreurs d'amplitude et de phase sur l'atténuation de l'onde primaire

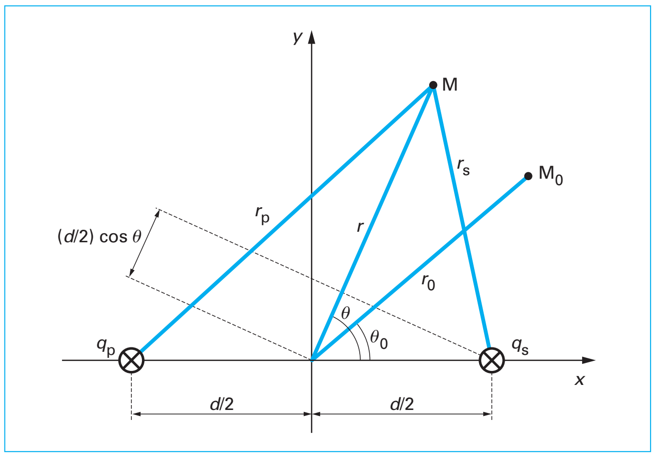


Figure 2 – Contrôle actif utilisant une source secondaire monopolaire

et la pression acoustique au point M peut s'écrire :

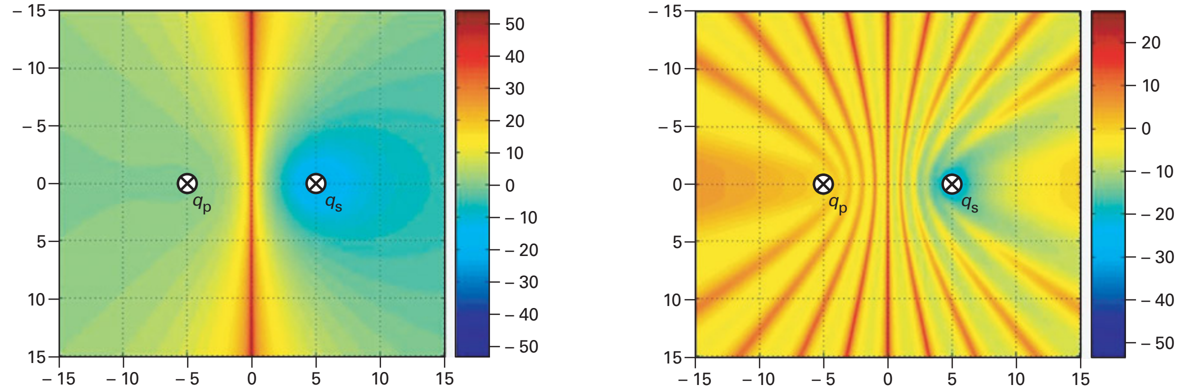
$$p\,(M) \approx p_p\,(M)[1 - e^{-jkd(\cos\theta_0 - \cos\theta)}] \qquad \textbf{(8)}$$

où p_p (M) est la pression acoustique en ce point M en l'absence de contrôle.

L'utilisation des relations trigonométriques élémentaires nous permet d'en déduire l'expression de l'atténuation de l'onde primaire en champ lointain :

$$\Delta L_p \approx -10\log(1 - \cos[kd(\cos\theta_0 - \cos\theta)]) - 3\ \text{dB} \qquad \textbf{(9)}$$

En remarquant que la valeur maximale de $\cos\theta_0 - \cos\theta$ est égale à 2 (quand $\theta_0 = 0$ et $\theta = \pi$), on voit que l'onde primaire sera atténuée **dans tout l'espace** si $1 - \cos 2kd < 1/2$ soit $d < \lambda/12$. Ainsi, à 1 000 Hz, la distance entre la source primaire et la source secondaire devra être inférieure à 2,8 cm. Ce résultat montre le peu d'intérêt pratique de l'utilisation du principe de Young en contrôle actif s'il n'est pas associé à une méthode permettant de **reconstituer** le champ acoustique primaire dans le domaine à contrôler.



ⓐ $\lambda/d = 5$ ⓑ $\lambda/d = 0{,}2$

Les atténuations (dB) sont représentées dans le plan $z = 0$ avec deux monopôles en (– 5, 0, 0) et (+ 5, 0, 0)

Figure 3 – Interférences acoustiques créées par deux sources ponctuelles monopolaires

2.3 Méthodes de reconstitution d'un champ sonore

La reconstitution d'un champ sonore dans un domaine donné nécessite un **ensemble de sources secondaires** dont il faut déterminer la **nature** (monopôles, dipôles, quadripôles...), le **nombre**, la **répartition** et la **commande**. Le problème de la commande des sources secondaires sera abordé dans le paragraphe 3. Le paragraphe 2.3 est consacré à la présentation des principales méthodes utilisables pour reconstituer un champ sonore et leur application au contrôle actif.

2.3.1 Décomposition multipolaire

En 1976, Kempton [27] a montré que le rayonnement en champ lointain d'une source monopolaire localisée au point de coordonnées (– u, – v, – w) peut être annulé en utilisant un ensemble de **sources de contre-bruit multipolaires** localisées à l'origine (0, 0, 0). Un développement limité de $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}/r$ conduit à exprimer la pression acoustique en un point M de coordonnées (x, y, z) sous la forme :

$$p\,(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{j}\omega\rho_0 q}{4\pi}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r} \qquad (10)$$

avec $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Chaque terme du développement peut être interprété comme une source multipolaire. Le terme d'ordre 0 correspond à un **monopôle**, les trois termes d'ordre 1 à des **dipôles** orientés dans les directions (Ox), (Oy) et (Oz), les six termes d'ordre 2 à des **quadripôles** longitudinaux et latéraux, et ainsi de suite.

Beauvilain et Bolton [28] ont utilisé cette méthode en développant suivant un axe unique, la source primaire étant située à (– d, 0, 0). L'amplitude des sources secondaires était obtenue par calcul direct ou en appliquant une méthode de moindres carrés. Les résultats font apparaître une atténuation de 25 dB à 250 Hz pour d = 0,27 m et N = 3.

Malgré cette tentative, la décomposition multipolaire reste peu utilisée en contrôle actif pour les raisons suivantes :

– dans le cas de sources de bruit complexes, le calcul analytique n'est pas possible et il faut utiliser une méthode de moindres carrés ;

– il n'y a aucune raison pour que l'ordre de la troncature conduise à un contrôle optimal ;

– les résultats sont très dépendants de la distance entre la source primaire et les sources de contre-bruit. Pour rester à des distances acceptables pour des applications pratiques, il faut utiliser des multipôles d'ordre élevé dont la mise en œuvre devient rapidement problématique.

2.3.2 Décomposition en harmoniques sphériques

Lorsque une source sonore située dans un volume V rayonne en champ libre, on peut exprimer son rayonnement au moyen d'un développement en harmoniques sphériques [29]. À l'extérieur de la plus petite sphère Σ de centre O (origine du système de coordonnées) contenant le volume V, la pression acoustique en un point M (r, θ, φ) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} p\,(\mathrm{M}) &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n(kr)\sum_{m=0}^{n} A_{mn}P_n^m(\cos\theta)\cos(m\varphi) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} h_n(kr)\sum_{m=1}^{n} B_{mn}P_n^m(\cos\theta)\sin(m\varphi) \end{aligned} \qquad (11)$$

où $h_n(kr)$ désigne la fonction de Hankel sphérique de première espèce et $P_n^m(\cos\theta)$ la fonction de Legendre de degré n et d'ordre m.

Les quantités :

$$Y_{mn}^{e}\,(\theta, \varphi) = P_n^m\,(\cos\theta)\cos(m\varphi)$$

et :

$$Y_{mn}^{o}\,(\theta, \varphi) = P_n^m\,(\cos\theta)\sin(m\varphi)$$

sont les **fonctions harmoniques sphériques**.

La décomposition donnée par la relation (11), dite **décomposition monocentre**, peut être généralisée en utilisant un ensemble de sphères Σ_j (j = 1, 2, ..., N_c) centrées sur des points O_j telles que le volume V soit entièrement contenu dans l'union des Σ_j. On parle alors de **décomposition multicentres** et on écrit :

$$\begin{aligned} p\,(\mathrm{M}) = \sum_{j=1}^{N_c}\Big[&\sum_{n=0}^{\infty} h_n(kr_j)\sum_{m=0}^{n} A_{mn}^{j}P_n^m(\cos\theta_j)\cos(m\varphi_j) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} h_n(kr_j)\sum_{m=1}^{n} B_{mn}^{j}P_n^m\,(\cos\theta_j)\sin(m\varphi_j)\Big] \end{aligned} \qquad (12)$$

Si l'on suppose que la pression acoustique $\tilde{p}$ est connue en N points de mesure M_i entourant la source primaire, les séries (11) ou (12) sont tronquées et on détermine les quantités A_{mn}^j et B_{mn}^j en minimisant la fonctionnelle :

$$J\,(p,\tilde{p}) = \sum_{i=1}^{N} \left| p\,(M_i) - \tilde{p}\,(M_i) \right|^2 \qquad \textbf{(13)}$$

La décomposition en harmoniques sphériques a été utilisée par de nombreux auteurs pour la reconstruction d'un champ sonore en vue du contrôle actif :

– Konyaev et coauteurs [30] ont utilisé cette méthode pour calculer, par une **méthode d'intégration**, les 25 premiers coefficients de la série pour une onde plane à partir de valeurs du champ calculées sur un ensemble discret de points situés sur deux sphères concentriques S_1 et S_2 ;

– Weinrich et Arnold [31] ont pu, par cette approche, séparer les ondes sortantes et rentrantes correspondant à des sources placées à l'intérieur de S_1 et à l'extérieur de S_2 ;

– Mazanikov et coauteurs [32] ont appliqué la méthode à la suppression active de champs sonores en utilisant quatre sphères concentriques S_1, S_2, S_3 et S_4 ($r_1 < r_2 < r_3 < r_4$). Deux séries de sources de contre-bruit monopolaires étaient réparties sur S_3 et S_4, commandées par deux séries de capteurs monopolaires répartis sur les surfaces de S_1 et S_2. L'amplitude des sources était calculée à partir de la décomposition (11) pour annuler le champ primaire à l'extérieur de la sphère S_4. Ce travail a été complété par celui de Konyaev et Fedoryuk [33], qui ont étudié les problèmes résultant de la **discrétisation** de la répartition des sources de contre-bruit ;

– Filippi, Piraux et Habault [34] [35] ont proposé d'utiliser une **méthode d'optimisation** pour le calcul des paramètres valable pour le cas discret et le cas continu. Les résultats ont été validés par des simulations numériques puis par des expérimentations en chambre anéchoïque ;

– Martin et Roure [36] ont utilisé la méthode des harmoniques sphériques pour réduire les bruits de transformateur.

2.3.3 Principe de Huygens

Les résultats obtenus au paragraphe 2.2 montrent que, pour obtenir le silence dans un domaine étendu, il faut faire interférer des **ondes progressant dans le même sens** dans la totalité de ce domaine. Pour cela, le rayonnement de l'ensemble des sources de contre-bruit dans ce domaine doit être, au signe près, identique à celui des sources primaires (ou tout au moins très proche de celui-ci). Le **principe de Huygens** nous fournit précisément une configuration de sources permettant d'atteindre cet objectif. En effet, ce principe affirme que l'on peut toujours remplacer, vis-à-vis d'un point d'observation M, un ensemble de sources primaires contenues dans un domaine V par une distribution de sources secondaires réparties sur une surface Σ séparant complètement V de M (figure **4**).

En utilisant de façon combinée les principes de Young et de Huygens, on peut donc concevoir, en théorie, des systèmes de contrôle actif capables d'annuler une onde acoustique dans n'importe quel volume donné à l'avance.

2.3.3.1 Calcul des sources de Huygens

Le principe de Huygens explique la propagation de proche en proche d'une onde en montrant qu'à chaque instant une certaine configuration de sources secondaires virtuelles (les **sources de Huygens**) prend le relais de la source primaire émettrice.

Dans une série de travaux fondateurs, Jessel, Mangiante et Canévet [13] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20] [21] [22] ont proposé une nouvelle formulation (dite **formulation JMC**) de ce principe, basée sur l'utilisation de **fonctions de perturbation**. Cette formulation permet de calculer, à partir des équations définissant la propagation d'un type d'onde donné, l'expression des sources de

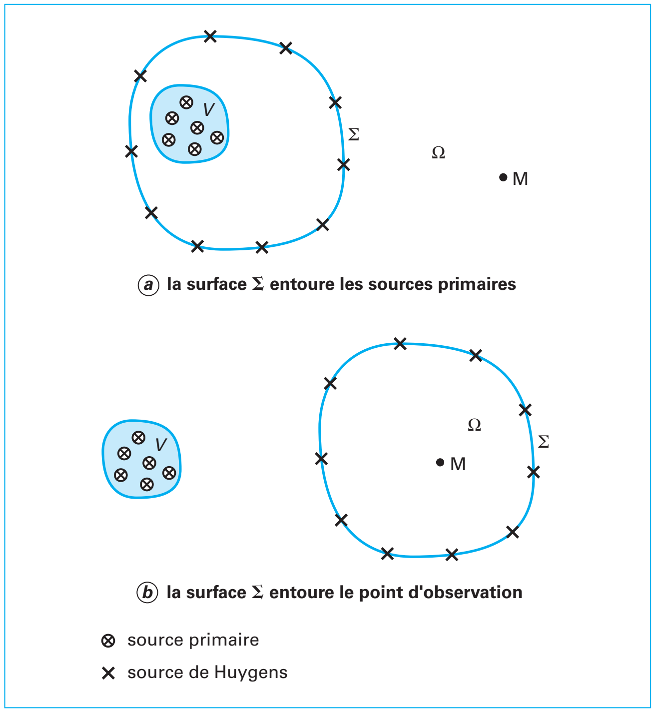


Figure 4 – Principe de Huygens

Huygens par une formule simple [37]. En acoustique, ces sources peuvent être utilisées comme sources de contre-bruit en changeant leur signe. On peut alors annuler une onde acoustique dans tout domaine de l'espace désigné à l'avance.

Comme indiqué sur la figure **4**, désignons par Ω le domaine dans lequel on souhaite obtenir le silence. En introduisant une fonction de perturbation s (M) (la **fonction de découpage**), définie par $s\,(M) = 0$ à l'intérieur de Ω et $s\,(M) = 1$ à l'extérieur de ce domaine, dans l'équation (1) on obtient :

$$\Delta\,(sp) + k^2 sp = \nabla \cdot \boldsymbol{f}_0 - \mathrm{j}\omega\rho_0 q_0 + sQ_s \qquad \textbf{(14)}$$

On peut montrer [38] [39] que le terme supplémentaire Q_s qui apparaît au second membre représente la répartition des sources de contre-bruit, équivalentes aux sources de Huygens changées de signe, qu'il faut disposer sur la surface Σ pour obtenir le silence dans le domaine Ω. Un calcul simple conduit à :

$$Q_s = -2\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}\delta_\Sigma - p\nabla \cdot (\boldsymbol{n}\delta_\Sigma) \qquad \textbf{(15)}$$

avec $\boldsymbol{n}$ normale unitaire extérieure à la surface Σ,

δ_Σ distribution de Dirac associée à cette surface.

On voit que :

– la répartition de sources de contre-bruit qui assure le silence dans Ω est une distribution surfacique de **monopôles** et de **dipôles** correspondant respectivement aux termes $-2\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}\delta_\Sigma$ et $-p\nabla \cdot (\boldsymbol{n}\delta_\Sigma)$. La combinaison de ces deux types de sources constitue un **tripôle** ;

– la présence des termes $\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}$ et $-p$ indique que les monopôles doivent être commandés par des capteurs dipolaires et les dipôles par des capteurs monopolaires.

En utilisant la fonction de Green $G(\mathrm{M}|\mathrm{M}_0)$ associée à l'équation (14), on obtient une forme intégrale de la relation (15) analogue à l'intégrale de Kirchhoff-Helmholtz :

$$p(\mathrm{M}) = -\int_{\Sigma}\left[G(\mathrm{M}|\mathrm{M}_0)\frac{\partial p(\mathrm{M}_0)}{\partial \boldsymbol{n}_0} - p(\mathrm{M}_0)\frac{\partial G(\mathrm{M}|\mathrm{M}_0)}{\partial \boldsymbol{n}_0}\right]\mathrm{d}\,\Sigma \qquad \textbf{(16)}$$

L'utilisation de sources de Huygens comme sources de contre-bruit présente un avantage important : le rayonnement résultant de ces sources est nul à l'extérieur du domaine à protéger, ce qui améliore la stabilité du système de contrôle actif et empêche la création de zones de renforcement du bruit en dehors de la région protégée. Elle présente aussi un inconvénient : ces sources sont plus difficiles à réaliser pratiquement que les sources simples (elles résultent de la combinaison d'un monopôle et d'un dipôle) et sont plus encombrantes que ces dernières. Leur commande est plus compliquée que celle d'une source simple puisqu'elle fait appel à des capteurs monopolaires et dipolaires. On trouvera dans les références [40] et [41] la description détaillée d'un système de contrôle actif utilisant une source de Huygens.

2.3.3.2 Sources de Huygens discrètes

La distribution surfacique de sources de contre-bruit définie par la relation (14) est continue. Bien évidemment, elle doit être remplacée par une distribution discrète lorsqu'une application pratique est envisagée. Il n'existe pas à ce jour de méthode rigoureuse permettant de calculer le **nombre** de sources secondaires nécessaires pour une application et d'optimiser leur **placement**. À la suite d'expériences et de simulations, diverses formules semi-empiriques ont été proposées pour relier le nombre N de sources de contre-bruit, après discrétisation, à la longueur d'onde λ.

Nelson et Elliott [42] estiment que, dans le cas d'un réseau plan de sources de contre-bruit, leur écartement doit être de l'ordre de $\lambda/\sqrt{\pi}$, soit approximativement une demi-longueur d'onde.

Lorsque les sources sont réparties sur une sphère de rayon R, deux formules ont été proposées. Konyaev et coauteurs [43] indiquent que le nombre de sources secondaires doit vérifier l'inégalité $(\lambda/2R)\sqrt{N/\pi} \geqslant 2{,}5$ alors que Vian [44] propose l'inégalité voisine $N \geqslant 16\pi R^2/\lambda^2$. Dans tous les cas, le nombre de sources de contre-bruit à commander **augmente de façon prohibitive** avec la fréquence, ce qui **limite** les applications du contrôle actif au domaine des moyennes et des basses fréquences. Un axe de recherche en cours concerne la mise au point de méthodes permettant d'optimiser le placement des sources secondaires afin de réaliser un compromis acceptable entre l'atténuation et l'étendue du domaine contrôlé.

2.3.3.3 Utilisation de la première zone de Fresnel

Lorsque des sources de Huygens sont réparties sur une surface sphérique entourant la source de bruit, on définit une **zone de Fresnel** relative à un point M extérieur à la sphère par l'ensemble des points de la sphère dont la distance est comprise entre :

$$d \text{ et } d + \lambda/2 \qquad \text{(première zone)}$$
$$d + (m-1)\lambda/2 \text{ et } d + m\lambda/2 \qquad (m-\text{ième zone})$$

où d désigne la distance du point M à la sphère.

Un résultat, classique en optique, montre que la contribution de la première zone de Fresnel est, en champ lointain, sensiblement égale au double de la contribution de la sphère complète. On peut donc réduire sensiblement le nombre de sources secondaires en disposant celles-ci uniquement sur la première zone de Fresnel. En utilisant cette méthode, Mangiante et Vian [45] ont pu montrer que :

– des atténuations notables peuvent être obtenues dans les basses fréquences avec un nombre très restreint de sources ;

– l'atténuation reste importante dans un domaine autour du point M. Par exemple, dans le cas d'une sphère de rayon $R = 50$ m, on obtient une atténuation moyenne de 18 dB dans un espace de 400 m de longueur, 60 m de largeur et 30 m de hauteur.

Bien entendu, les zones de Fresnel ne peuvent être définies que pour un son pur de fréquence f_0. Mangiante et Vian ont montré [45] que les atténuations, quoique moindres, restent importantes si on remplace le son pur par un bruit blanc filtré sur une largeur de bande de tiers d'octave autour de f_0.

2.3.3.4 Applications du principe de Huygens au contrôle actif

De nombreux travaux relatifs au contrôle actif sont basés sur le principe de Huygens. En utilisant quatre sources analogues à celles définies par la relation (15), et six microphones, Angevine [46] [47] a obtenu une réduction importante (supérieure à 10 dB) et dans une zone assez large (une quarantaine de degrés d'ouverture) du bruit d'un transformateur de puissance. Hasebe [48] [49] [50] a réalisé un écran actif de sources tripolaires permettant d'obtenir une atténuation de 5 à 10 dB dans la zone de fréquence de 300 Hz à 1 100 Hz. Uosukainen [51] [52] a présenté une méthode de traitement d'une salle de concert par un contrôle actif basé sur la formulation JMC.

Le lecteur désireux de compléter son information sur l'aspect acoustique du contrôle actif pourra consulter l'ouvrage de Rosenhouse [53].

3. Stratégies de commande

Un système de contrôle actif se présente comme un ensemble de sources secondaires et un ensemble de capteurs destinés à fournir les signaux nécessaires pour élaborer, grâce à un dispositif électronique (le **contrôleur**), la commande de ces sources. Deux stratégies de commande peuvent être utilisées : la **commande en boucle ouverte** ou **commande par anticipation** (*feedforward control*) et la **commande en boucle fermée** (*feedback control*). Une étude détaillée de ces stratégies de commande en contrôle actif sortant du cadre du présent dossier, nous renvoyons le lecteur désireux d'approfondir ce point aux ouvrages de Nelson et Elliott [54], Kuo et Morgan [55], Hansen et Snyder [56] et Elliott [57], qui constituent des ouvrages de référence dans ce domaine et qui sont à la base des paragraphes 3, 4 et 5.

Pour simplifier la description des stratégies de commande, nous nous limiterons, dans un premier temps, à la description du contrôle actif dans un conduit. Nous supposerons que les fréquences de travail se situent en deçà de la fréquence de coupure fondamentale du conduit, ce qui implique que seules des ondes planes se propagent dans ce conduit. Dans ces conditions, le système de contrôle actif est dit **monovoie** parce qu'il ne nécessite qu'une seule source secondaire. Les résultats seront par la suite généralisés au cas des **systèmes multivoies**, utilisés pour travailler dans un conduit au-delà de la fréquence de coupure ou dans des milieux tridimensionnels.

3.1 Contrôle actif en boucle ouverte

Le contrôle actif en boucle ouverte suppose que l'on dispose d'un **signal de référence** $s(t)$ fortement corrélé avec le bruit primaire. Ce signal peut être obtenu à partir d'un **capteur de référence** (le plus souvent un microphone) ou, lorsque c'est possible, à partir d'un signal électrique directement lié à la source de bruit (par exemple un signal tachymétrique peut être utilisé comme référence pour suivre les variations de régime d'un moteur). Le signal de référence est traité par un filtre électronique, le contrôleur, pour élaborer le signal de commande de la source secondaire $y(t)$. La réduction du bruit primaire est contrôlée par un second capteur, le **capteur d'erreur** dont le signal de sortie est le **signal d'erreur** $e(t)$ (figure **5*a***).

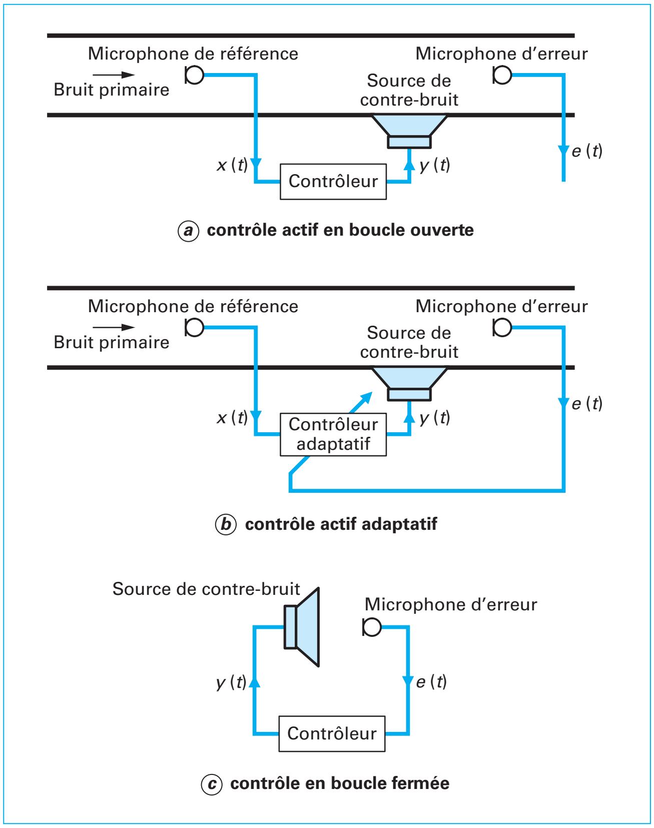


Figure 5 – Stratégies de commande

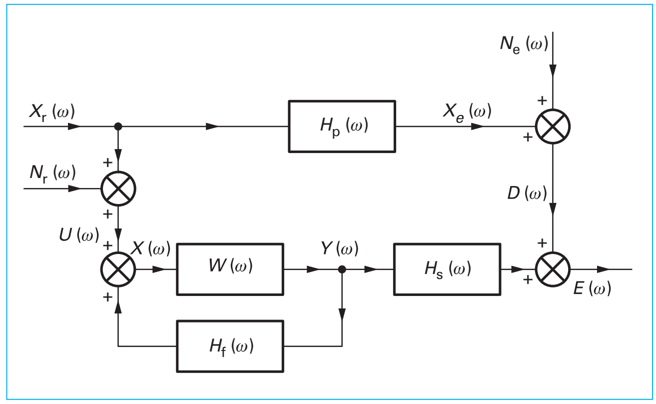


Figure 6 – Schéma fonctionnel électrique détaillé du contrôle actif en boucle ouverte

Le signal d'erreur peut être utilisé pour modifier les caractéristiques électriques du contrôleur afin de tenir compte de l'évolution des signaux traités et des variations des conditions de propagation : on parle alors de **contrôle actif adaptatif** (figure **5*b***).

3.2 Contrôle actif en boucle fermée

Lorsqu'on ne dispose pas d'un signal de référence pour piloter le système de contrôle actif, on peut utiliser le signal d'erreur pour commander la source secondaire après traitement par le contrôleur (figure **5*c***) : c'est la commande en boucle fermée.

Comme nous le verrons plus loin, le contrôle actif en boucle fermée est beaucoup plus difficile à mettre en œuvre que le contrôle actif en boucle ouverte. En particulier, il est très sensible aux retards pouvant apparaître dans les trajets secondaires. On l'utilise en général pour le contrôle des vibrations non périodiques, ainsi que pour une application bien particulière, le casque antibruit actif (cf. *infra*).

4. Contrôle actif en boucle ouverte

4.1 Filtrage optimal

Le schéma fonctionnel **électrique** d'un système de contrôle actif monovoie en boucle ouverte est représenté sur la figure **6**. Il tient compte des **bruits de mesure** $N_r(\omega)$ et $N_e(\omega)$ (dus à la turbulence, par exemple) présents sur les microphones de référence et d'erreur, ainsi que d'un chemin de rétroaction entre la source secondaire et le microphone de référence, caractérisé par sa réponse en fréquence $H_f(\omega)$.

- Les signaux $X_r(\omega)$ et $X_e(\omega) = H_p(\omega)X_r(\omega)$ correspondent respectivement au bruit primaire au microphone de référence et au microphone d'erreur. La quantité $H_p(\omega)$ est la réponse en fréquence du transfert primaire.
- La réponse du transfert secondaire est $H_s(\omega)$. Elle inclut la fonction de transfert de la source secondaire, la propagation acoustique entre cette source et le capteur d'erreur et la réponse du capteur d'erreur.
- Le signal de référence, qui est traité par le contrôleur est $X(\omega)$. Il s'écrit :

$$X(\omega) = X_r(\omega) + H_f(\omega)\,Y(\omega) + N_r(\omega)$$

- La fonction de transfert du contrôleur est $W(\omega)$ et son signal de sortie, qui commande la source secondaire, est $Y(\omega) = W(\omega)X(\omega)$.
- Le signal d'erreur est $E(\omega)$. Il a pour expression :

$$E(\omega) = X_e(\omega) + H_s(\omega)\,Y(\omega) + N_e(\omega)$$

4.1.1 Calcul du filtre optimal

On dit que le filtre est **optimal** lorsque le signal d'erreur, qui traduit l'efficacité du contrôle, est **minimisé en moyenne quadratique**. Dans le domaine fréquentiel, il s'agira donc de minimiser la quantité $\mathrm{E}\left[|E(\omega)|^2\right]$, qui correspond à la densité spectrale de puissance du signal d'erreur $S_{ee}(\omega)$ (cf. tableau **4** en annexe, § 6).

On peut simplifier le schéma fonctionnel de la figure **6** en remplaçant le contrôleur par un **pseudo-contrôleur** de fonction de transfert $H(\omega)$ telle que :

$$H(\omega) = \frac{W(\omega)}{1 - W(\omega)H_f(\omega)} \qquad (17)$$

On obtient le schéma de la figure **7*a*** et le signal d'erreur s'écrit :

$$E(\omega) = D(\omega) + H_s(\omega)\,H(\omega)\,U(\omega) \qquad (18)$$

avec $D(\omega) = H_p(\omega)\,X_r(\omega) + N_e(\omega)$ et $U(\omega) = X_r(\omega) + N_r(\omega)$.

Les systèmes décrits par les fonctions de transfert $H(\omega)$ et $H_s(\omega)$ peuvent être permutés s'ils sont linéaires et stationnaires (figure **7*b***). La quantité $R(\omega) = H_s(\omega)U(\omega)$ est la **référence filtrée**,

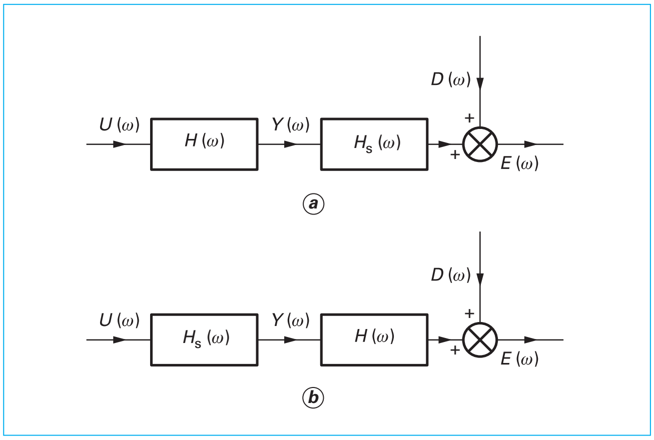


Figure 7 – Schéma fonctionnel électrique simplifié du contrôle actif en boucle ouverte

dont on montrera par la suite toute l'importance en contrôle actif adaptatif. Le signal d'erreur devient :

$$E(\omega) = D(\omega) + H(\omega)\, R(\omega) \quad \textbf{(19)}$$

En calculant E[$|E(\omega)|^2$] on obtient, d'après la relation (19) :

$$S_{ee}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{rr}(\omega) + S_{rd}^*(\omega)\, H(\omega) + H^*(\omega) S_{rd}(\omega) + S_{dd}(\omega) \quad \textbf{(20)}$$

La densité spectrale de puissance du signal d'erreur se présente comme une forme quadratique. Elle possède donc un minimum unique, donné par :

$$S_{ee_{\min}}(\omega) = S_{dd}(\omega) - \frac{|S_{rd}(\omega)|^2}{S_{rr}(\omega)} \quad \textbf{(21)}$$

En remarquant que

$$S_{rd}(\omega) = H_s^*(\omega)\, S_{ud}(\omega)$$

et $$S_{rr}(\omega) = |H_s(\omega)|^2 S_{uu}(\omega)\,,$$

on peut écrire :

$$S_{ee_{\min}}(\omega) / S_{dd}(\omega) = 1 - \gamma_{ud}^2(\omega)$$

où $\gamma_{ud}^2(\omega) = |S_{ud}(\omega)|^2 / S_{uu}(\omega) S_{dd}(\omega)$ est la **cohérence** entre les sorties du capteur de référence et du capteur d'erreur.

On en déduit que l'atténuation maximale à une fréquence donnée s'écrit $\Delta L_{w_{\max}} = 10 \log[1 - \gamma_{ud}^2(\omega)]$, ce qui montre que la performance d'un système de contrôle actif en boucle ouverte peut être évaluée par la mesure de la cohérence entre deux signaux, sans avoir à calculer la réponse du contrôleur.

La réponse du pseudo-contrôleur optimal s'écrit :

$$H_{\text{opt}}(\omega) = -\frac{S_{rd}(\omega)}{S_{rr}(\omega)} \quad \textbf{(22)}$$

En supposant que les bruits de mesure ne sont pas corrélés avec le bruit à réduire, on a :

$$S_{rd}(\omega) = H_s^*(\omega)\, H_p(\omega)\, S_{x_r x_r}(\omega)$$

et :

$$S_{rr}(\omega) = |H_s(\omega)|^2 [S_{x_r x_r}(\omega) + S_{n_r n_r}(\omega)]$$

où $S_{x_r x_r}(\omega)$ et $S_{n_r n_r}(\omega)$ désignent respectivement les densités spectrales de puissance du bruit primaire et du bruit de mesure au microphone de référence.

En reportant ces résultats dans la relation (22), la fonction de transfert du pseudo-contrôleur optimal peut s'écrire :

$$H_{\text{opt}}(\omega) = -\frac{SNR(\omega)}{1 + SNR(\omega)} \frac{H_p(\omega)}{H_s(\omega)} \quad \textbf{(23)}$$

où $SNR(\omega) = S_{x_r x_r}(\omega) / S_{n_r n_r}(\omega)$ désigne le rapport signal sur bruit sur le capteur de référence. On peut noter que le bruit de mesure $N_e(\omega)$ présent au niveau du microphone d'erreur n'intervient pas dans cette expression.

La fonction de transfert du contrôleur optimal se déduit de la relation (17). On trouve :

$$W_{\text{opt}}(\omega) = \frac{H_{\text{opt}}(\omega)}{1 + H_f(\omega) H_{\text{opt}}(\omega)} \quad \textbf{(24)}$$

En introduisant la réponse en fréquence du transfert primaire en présence de bruit, définie par :

$$H_{pn}(\omega) = \frac{SNR(\omega)}{1 + SNR(\omega)} H_p(\omega) \quad \textbf{(25)}$$

la réponse du filtre optimal s'écrit :

$$W_{\text{opt}}(\omega) = \frac{-H_{pn}(\omega)}{H_s(\omega) - H_f(\omega) H_{pn}(\omega)} \quad \textbf{(26)}$$

Sa détermination nécessite la connaissance des quantités $H_s(\omega)$, $H_f(\omega)$ et $H_{pn}(\omega)$, qui peuvent être obtenues en utilisant la méthode suivante, proposée par Roure [26].

a) On mesure $H_s(\omega)$ et $H_f(\omega)$ par les techniques classiques d'analyse spectrale en injectant dans la source secondaire un signal de test à large bande $\sigma(t)$ non corrélé avec le bruit primaire, par exemple un bruit blanc.

On trouve :

$$H_s(\omega) = S_{\sigma e}(\omega) / S_{\sigma\sigma}(\omega) \ \text{ et } \ H_f(\omega) = S_{\sigma x}(\omega) / S_{\sigma\sigma}(\omega)$$

b) On obtient la quantité $H_{pn}(\omega)$ en mesurant la fonction de transfert entre le capteur de référence et le capteur d'erreur $H_{re}(\omega) = [S_{xe}(\omega) / S_{xx}(\omega)]_{Y(\omega)=0}$ lorsque la source secondaire n'est pas alimentée. On a alors $X(\omega) = U(\omega) = X_r(\omega) + N_r(\omega)$ et $E(\omega) = D(\omega)$. En supposant, comme précédemment, que $X_r(\omega)$ et $N_r(\omega)$ ne sont pas corrélés on trouve :

$$H_{re}(\omega) = \frac{S_{sd}(\omega)}{[S_{ss}(\omega) + S_{n_r n_r}(\omega)]}$$

c'est-à-dire : $H_{re}(\omega) = H_{pn}(\omega)$.

4.1.2 Synthèse du contrôleur optimal

Après avoir calculé, par la relation (26), la réponse du contrôleur optimal il faut en faire la **synthèse**. Cette synthèse est généralement basée sur l'utilisation d'un **filtre numérique** en raison des nombreux avantages que ce type de filtre présente :

– un filtre numérique permet de réaliser, avec une très grande précision, n'importe quelle fonction de transfert, y compris des fonctions de transfert impossibles à obtenir dans le domaine analogique ;

– les paramètres du filtre peuvent être aisément changés par reprogrammation ;

– les seuls bruits à prendre en compte sont les bruits de quantification, liés au nombre de bits utilisés, et les bruits de calcul. Ces derniers peuvent être rendus très faibles par l'utilisation d'un processeur à virgule flottante.

Ainsi, pour réaliser le contrôle actif en boucle ouverte dans un conduit, Roure [26] utilise un filtre à réponse impulsionnelle finie (cf. tableau **5** en annexe, § 6) dont les coefficients sont calculés selon la méthode suivante :

– on multiplie $W_{opt}(\omega)$ par une fenêtre de pondération fréquentielle de façon à annuler la réponse en dehors de la bande utile de fréquence. La limite inférieure est fixée en fonction du rapport signal sur bruit (par exemple 50 Hz chez Roure) et la limite supérieure est la fréquence de coupure du conduit ;

– on rend la réponse fréquentielle antisymétrique pour que la réponse impulsionnelle du filtre soit réelle ;

– on calcule les coefficients du filtre par transformée de Fourier inverse ;

– on supprime les composantes non causales par fenêtrage temporel.

4.2 Contrôle actif adaptatif

4.2.1 Filtrage adaptatif

Le filtrage adaptatif est une technique particulière de filtrage numérique, utilisée lorsqu'il est nécessaire de simuler ou de modéliser un processus dont les caractéristiques varient dans le temps. Cette technique conduit à la mise en œuvre de filtres dont les coefficients sont **variables**. Leurs variations sont définies par un **critère** et sont réalisées suivant un **algorithme** *ad hoc* implémenté dans un processeur.

On utilise le filtrage adaptatif en contrôle actif pour modifier les caractéristiques électriques du contrôleur afin que la somme bruit + contre-bruit reste minimale en valeur quadratique moyenne quand les signaux traités évoluent ou quand les conditions de propagation varient.

Comme le filtrage adaptatif est associé à des spécifications temporelles, nous mènerons l'étude du contrôle actif adaptatif dans le domaine du temps discret, ce qui implique que les signaux intervenant dans le contrôle ont été échantillonnés puis numérisés.

L'étude comportera quatre étapes :

– détermination du filtre optimal en temps discret (filtre de Wiener) ;

– calcul du filtre optimal par une méthode itérative (algorithme du gradient déterministe) ;

– approximation de l'algorithme (algorithme du gradient stochastique) ;

– contrôle actif adaptatif (algorithme LMS avec référence filtrée).

4.2.2 Filtrage de Wiener

Considérons le problème d'estimation représenté sur la figure **8**.

Une séquence de référence $x(n)$ est envoyée à l'entrée d'un filtre à réponse impulsionnelle finie possédant N_w coefficients notés w_k. La sortie $y(n)$ de ce filtre est additionnée à une séquence $d(n)$ pour former un signal d'erreur $e(n) = d(n) + y(n)$. Le problème du filtrage optimal consiste à calculer les coefficients w_k pour qu'une **fonction de coût** $J(n)$, traduisant la « distance » entre $d(n)$ et $y(n)$, soit minimale. Le filtre Wiener est celui qui minimise la fonctionnelle $J(n) = \mathrm{E}[e^2(n)]$ qui correspond à l'erreur quadratique moyenne.

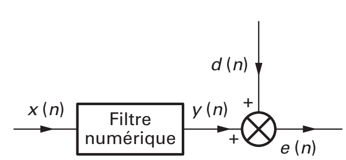


Figure 8 – Filtrage numérique optimal

Si on pose :

$$\boldsymbol{w} = [w_0\ w_1\ \dots\ w_{N_w-1}]^{\mathrm{T}} \text{ et } \boldsymbol{x}(n) = [x(n)\ x(n-1)\ \dots\ x(n-N_w+1)]^{\mathrm{T}}$$

où T dénote l'opération de transposition, on a :

$$y(n) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n)\,\boldsymbol{w}$$

Le signal d'erreur s'écrit :

$$e(n) = d(n) + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(n) = d(n) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{w} \quad \textbf{(27)}$$

On en déduit la fonction de coût :

$$J(n) = \mathrm{E}[d^2(n)] + 2\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\boldsymbol{w} \quad \textbf{(28)}$$

où $\mathbf{R} = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(n)\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n)]$ **matrice de corrélation** du signal de référence,

$\boldsymbol{r} = \mathrm{E}[d(n)\,\boldsymbol{x}(n)]$ **vecteur de corrélation** entre le signal désiré et le signal de référence.

La matrice **R** est définie positive, de Toeplitz et à symétrie hermitienne ($\mathbf{R} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}$), ce qui implique que la forme quadratique (28) présente un minimum unique.

On obtient le filtre optimal $\boldsymbol{w}_{opt}$ en annulant le gradient $\partial J/\partial \boldsymbol{w}$ de la fonction de coût. En calculant ce gradient on établit l'**équation de Wiener-Hopf** qui définit le filtre optimal :

$$\mathbf{R}\boldsymbol{w}_{opt} = -\,\boldsymbol{r} \quad \textbf{(29)}$$

Sous réserve que la matrice **R** ne soit pas singulière on trouve :

$$\boldsymbol{w}_{opt} = -\,\mathbf{R}^{-1}\,\boldsymbol{r} \quad \textbf{(30)}$$

En reportant ce résultat dans l'équation (28) on peut calculer l'erreur quadratique moyenne minimale :

$$J_{min}(n) = \mathrm{E}[d^2(n)] - \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{r} = \sigma_{\mathrm{d}}^2 - \sigma_{y_{opt}}^2 \quad \textbf{(31)}$$

L'erreur quadratique moyenne minimale est égale à la différence entre la variance du signal désiré et celle de l'estimée de ce signal par filtrage optimal.

4.2.3 Algorithme du gradient déterministe

La détermination du filtre optimal nécessite le calcul des fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation de $x(n)$ et $e(n)$, puis l'inversion de la matrice **R**. On peut éviter le calcul de $\mathbf{R}^{-1}$ en utilisant l'**algorithme du gradient déterministe** qui permet de résoudre l'équation (30) par une méthode **itérative** en se souvenant que $J(n)$ est une forme quadratique qui possède un minimum unique.

La méthode du gradient consiste à partir d'une condition initiale $\boldsymbol{w}(0)$ pour générer, à l'aide d'un algorithme, une séquence de vecteurs $\boldsymbol{w}(1)$, $\boldsymbol{w}(2)$... de façon à incrémenter $\boldsymbol{w}(n)$ dans la direction opposée au gradient de la fonction de coût.

En posant $\boldsymbol{g} = \partial J/\partial \boldsymbol{w}$ on a $\boldsymbol{r} = -\,\mathbf{R}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{g}/2$ puis, en reportant ce résultat dans l'équation (30) :

$$\boldsymbol{w}_{opt} = \boldsymbol{w} - \frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{g} \quad \textbf{(32)}$$

La réécriture de cette équation sous une **forme récursive** définit l'algorithme du gradient déterministe pour le filtrage de Wiener :

$$\boldsymbol{w}(n+1) = \boldsymbol{w}(n) - \frac{1}{2}\mu\boldsymbol{g}(n) \quad \textbf{(33)}$$

où n dénote l'itération. La constante positive μ est appelée **pas d'adaptation** ou **coefficient de convergence**. En utilisant la relation (27), l'algorithme s'écrit :

$$\boldsymbol{w}(n+1) = \boldsymbol{w}(n) - \mu\mathrm{E}[\boldsymbol{x}(n)\,e(n)] \quad \textbf{(34)}$$

Le choix d'une valeur de μ qui assure la convergence de l'algorithme est lié aux valeurs propres λ_k de la matrice d'autocorrélation **R**. On montre que le pas d'adaptation doit vérifier la condition $0 < \mu < 2/\lambda_{max}$ où λ_{max} désigne la plus grande valeur propre de la matrice **R**.

Lorsque la convergence est assurée, la solution de l'équation (34) est la solution optimale de l'équation de Wiener-Hopf et on a $\boldsymbol{w}(\infty) = \boldsymbol{w}_{opt}$.

4.2.4 Algorithme du gradient stochastique

4.2.4.1 Définition

L'**algorithme du gradient stochastique** ou **algorithme LMS** (pour *least mean square*) est une approximation de l'algorithme du gradient déterministe proposée en 1960 par Widrow et Hoff [58]. On remplace les quantités **R** et $\boldsymbol{r}$, qui interviennent dans $E[\boldsymbol{x}(n)e(n)]$, et qui ne sont pas connues, par des **estimées instantanées** $\widehat{\mathbf{R}}$ et $\widehat{\boldsymbol{r}}$ définie par $\widehat{\mathbf{R}}(n) = \boldsymbol{x}(n)\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n)$ et $\widehat{\boldsymbol{r}}(n) = \boldsymbol{x}(n)\,d(n)$. L'estimée du gradient s'écrit alors $\widehat{\boldsymbol{g}} = 2\widehat{\mathbf{R}}\boldsymbol{w} + 2\widehat{\boldsymbol{r}}$. En reportant ces résultats dans (34), on obtient la relation qui définit l'algorithme LMS :

$$\boldsymbol{w}(n+1) = \boldsymbol{w}(n) - \mu\,\boldsymbol{x}(n)\,e(n) \tag{35}$$

qui peut s'écrire aussi :

$$w_q(n+1) = w_q(n) - \mu x(n-q)\,e(n) \qquad q = 0, 1, \ldots, N_w - 1 \tag{36}$$

On voit que la mise en œuvre de l'algorithme LMS est très simple car elle ne nécessite que $2N_w + 1$ multiplications et $2N_w$ additions par itération.

4.2.4.2 Condition de convergence

Comme dans le cas du gradient déterministe, la convergence de l'algorithme LMS est assurée si μ vérifie la condition $0 < \mu < 2/\lambda_{max}$. La valeur de λ_{max} n'étant pas facile à déterminer, on montre que l'algorithme LMS converge si μ vérifie la condition $0 < \mu < 2/N_w\overline{|x|^2}$ où $\overline{|x|^2}$ est la valeur quadratique moyenne du signal de référence. On a alors : $\lim_{n\to\infty} J(n) = J(\infty) = \text{cte}$.

La valeur limite de la fonction de coût est donnée par la formule approchée :

$$J(\infty) \approx J_{min}\left(1 + \frac{1}{2}\mu N_w \overline{|x|^2}\right) \tag{37}$$

où J_{min} correspond au filtrage optimal de Wiener. On voit que la différence $J(\infty) - J_{min}$ (appelée **erreur quadratique moyenne excédentaire**) est proportionnelle au pas d'adaptation et à la longueur du filtre $\boldsymbol{w}$.

4.2.4.3 Rapidité de la convergence

Deux paramètres interviennent dans la rapidité de convergence : le pas d'adaptation μ et le conditionnement $\chi(\mathbf{R})$ de la matrice d'autocorrélation, qui correspond au rapport $\lambda_{max}/\lambda_{min}$ des valeurs propres maximale et minimale de cette matrice. Une valeur élevée du pas d'adaptation se traduit par une convergence rapide mais aussi, d'après la relation (37), par une erreur quadratique moyenne excédentaire importante. On montre qu'une valeur trop importante de $\chi(\mathbf{R})$ (on dit alors que la matrice **R** est mal conditionnée) peut se traduire par une augmentation prohibitive de la durée de la convergence ou même par une divergence de l'algorithme.

4.2.4.4 Algorithme *leaky* LMS

L'algorithme *leaky* LMS est une variante de l'algorithme LMS qui améliore les performances de l'algorithme lorsque la matrice **R** est mal conditionnée. Gitlin et coauteurs [59] ont montré que la divergence pouvait être évitée en utilisant une fonction de coût de la forme :

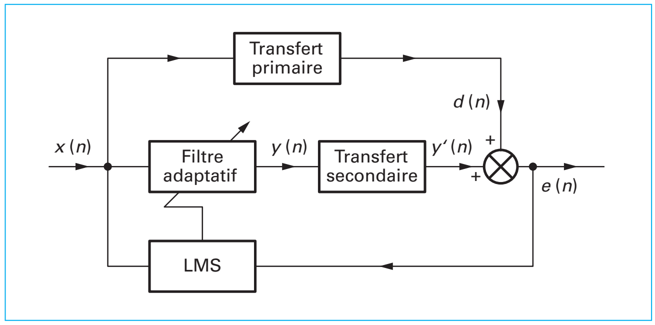


Figure 9 – Algorithme LMS en contrôle actif adaptatif

$$J_{\mathrm{L}}(n) = E[e^2(n)] + \beta\,\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(n)\,\boldsymbol{w}(n) \tag{38}$$

où $0 < \beta < 1$. La minimisation de $J_{\mathrm{L}}(n)$ conduit à une forme modifiée de la relation (35) qui définit l'algorithme *leaky* LMS :

$$\boldsymbol{w}(n+1) = (1 - \mu\beta)\,\boldsymbol{w}(n) - \mu\,\boldsymbol{x}(n)\,e(n) \tag{39}$$

L'introduction du coefficient β dégrade les performances du filtre adaptatif et on a, après convergence :

$$\boldsymbol{w}(\infty) = [\mathbf{I} + \beta\mathbf{R}^{-1}]\,\boldsymbol{w}_{opt} \tag{40}$$

La valeur de β est déterminée expérimentalement et résulte d'un compromis entre robustesse et performance.

4.2.5 Algorithme LMS avec référence filtrée

4.2.5.1 Inconvénient de l'algorithme LMS

Lorsque l'algorithme LMS est utilisé en filtrage adaptatif, la sortie $y(n)$ du filtre est additionnée à la séquence désirée $d(n)$ pour former le signal d'erreur :

$$e(n) = d(n) + \sum_{q=0}^{N_w-1} w_q(n)\,x(n-q)$$

En contrôle actif, il faut tenir compte du transfert secondaire (figure **9**) qui inclut la propagation acoustique entre la source secondaire et le capteur d'erreur, et les réponses des divers composants : circuit de sortie du contrôleur (convertisseur numérique-analogique et filtre de lissage), amplificateur d'alimentation de la source secondaire, microphone d'erreur et circuit de conditionnement du contrôleur (préamplificateur, filtre antirepliement et convertisseur analogique-numérique).

Si l'on représente ce transfert secondaire par un filtre à réponse impulsionnelle finie possédant N_h coefficients notés h_i, le signal d'erreur s'écrira : $e(n) = d(n) + \sum_{i=0}^{N_h-1} h_i\,y(n-i)$ soit, en développant :

$$e(n) = d(n) + \sum_{i=0}^{N_h-1}\sum_{q=0}^{N_w-1} h_i\,w_q(n-i)\,x(n-i-q) \tag{41}$$

Elliott et Nelson [60] ont montré que l'effet de la présence du terme de transfert secondaire dans la relation (41) était de rendre l'algorithme LMS instable. Une version modifiée de cet algorithme, l'**algorithme LMS avec référence filtrée** (*filtered-x LMS algorithm* ou FXLMS), dans laquelle cet effet est éliminé a été mise au point par Morgan [61] puis Widrow et coauteurs [62].

4.2.5.2 Algorithme FXLMS

Si l'échelle des temps d'adaptation des coefficients du filtre est beaucoup plus lente que le temps de réponse du transfert secondaire (hypothèse d'adaptation lente), on peut faire l'approximation $w_q(n-i) \approx w_q(n)$ qui permet la permutation des réponses du filtre adaptatif et du transfert secondaire dans l'équation (41). Le signal d'erreur devient :

$$e(n) = d(n) + \sum_{q=0}^{N_w-1} w_q(n) \sum_{i=0}^{N_h-1} h_i\, x(n-i-q) \qquad (42)$$

En posant :

$$r(n) = \sum_{i=0}^{N_h-1} h_i\, x(n-i) \qquad (43)$$

on aura :

$$e(n) = d(n) + \sum_{q=0}^{N_w-1} w_q(n)\, r(n-q) \qquad (44)$$

La quantité $r(n)$, définie par la relation (43), est le signal qu'on obtiendrait en sortie d'un filtre dont la réponse serait celle du transfert secondaire et l'entrée le signal de référence. Pour cette raison elle est appelée la **référence filtrée**.

La réécriture de la relation (36) en remplaçant $x(n)$ par $r(n)$ donne l'équation de définition de l'algorithme FXLMS :

$$w_q(n+1) = w_q(n) - \mu r(n-q)\, e(n) \qquad q = 0, 1, ..., N_w - 1 \qquad (45)$$

En pratique, on utilise une estimation du transfert secondaire qui est implémentée sous la forme d'un filtre RIF possédant N_h coefficients $\widehat{h}_i$ pour générer une approximation $\widehat{r}(n)$ de la référence filtrée (figure **10**) et l'algorithme FXLMS s'écrit :

$$w_q(n+1) = w_q(n) - \mu \widehat{r}(n-q)\, e(n) \qquad q = 0, 1, ..., N_w - 1 \qquad (46)$$

L'estimation peut se faire avant le traitement si ce transfert varie peu dans le temps, ou en ligne dans le cas contraire. Même dans le cas où l'approximation du transfert secondaire est peu précise (par exemple si le filtre RIF comporte trop peu de coefficients ou si le transfert secondaire se modifie au cours du temps), on peut montrer que la formule (46) converge. Pour cette raison, l'algorithme FXLMS est dit **robuste**.

En reprenant les résultats obtenus pour l'algorithme LMS, on pourrait penser que la convergence du FXLMS est assurée si μ vérifie la condition $0 < \mu < 2 / N_w \overline{|r|^2}$ où $\overline{|r|^2}$ est la valeur quadratique moyenne de la référence filtrée. Elliott et Nelson [60] ont montré que la condition de convergence doit plutôt s'écrire $0 < \mu < 2/(N_w + \Delta)\overline{|r|^2}$ où Δ est le nombre d'échantillons correspondant au retard introduit par le transfert secondaire. Une méthode pratique de détermination *in situ* du coefficient de convergence consiste à augmenter progressivement celui-ci jusqu'à une valeur μ_{div} qui entraîne la divergence de l'algorithme puis à choisir une valeur de μ voisine de $\mu_{\text{div}}/2$.

4.2.5.3 Algorithme *leaky* FXLMS

L'algorithme FXLMS peut être stabilisé en introduisant, comme au § 4.2.4.4, un coefficient β dans la relation définissant l'algorithme qui devient :

$$w_q(n+1) = (1 - \mu\beta)\, w_q(n) - \mu \widehat{r}(n-q)\, e(n) \qquad q = 0, 1, ..., N_w - 1 \qquad (47)$$

On trouvera une étude détaillée de l'algorithme *leaky* FXLMS dans la référence [57]. On y montre que l'utilisation du coefficient β stabilise l'algorithme et limite la puissance de sortie de la source secondaire, réduisant ainsi les distorsions non linéaires.

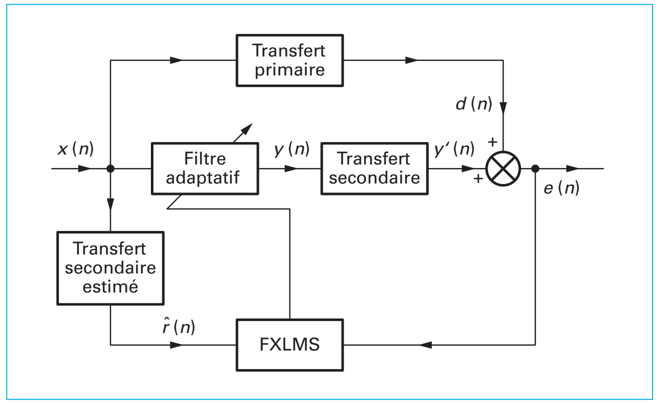


Figure 10 – Implémentation de l'algorithme FXLMS

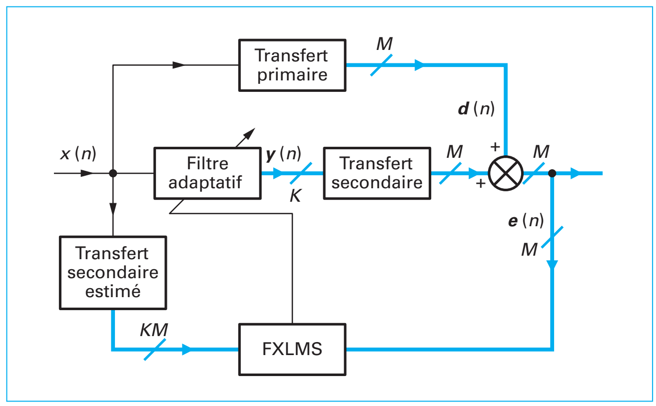


Figure 11 – Algorithme FXLMS multivoies à référence unique

4.3 Contrôle actif multivoies

Certaines applications du contrôle actif, comme la réduction du bruit dans des domaines de grandes dimensions ou dans des espaces clos, nécessitent l'emploi de **systèmes multivoies** comportant plusieurs sources secondaires et microphones d'erreur et, éventuellement, plusieurs microphones de référence.

4.3.1 Contrôle actif multivoies à référence unique

Un système de contrôle actif multivoies à référence unique se compose de K sources secondaires, de M microphones d'erreur et d'un seul microphone de référence. Il existera donc $K \times M$ transferts secondaires dont on peut représenter les réponses par les vecteurs :

$$\boldsymbol{h}_{km} = [h_{km,0}\ h_{km,1}\ ...\ h_{km,N_h-1}]^{\mathrm{T}}$$

avec $k = 1, 2, ..., K$ et $m = 1, 2, ..., M$.

Chaque source secondaire est commandée par un filtre adaptatif (figure **11**) :

$$\boldsymbol{w}_k(n) = [w_{k,0}(n)\ w_{k,1}(n)\ ...\ w_{k,N_w-1}(n)]^{\mathrm{T}}$$

qui délivre le signal :

$$y_k(n) = \sum_{q=0}^{N_w-1} w_{k,q}(n)\, x(n-q) \qquad k = 1, 2, ..., K \qquad (48)$$

Le signal d'erreur délivré par le m-ième capteur sera :

$$e_m(n) = d_m(n) + \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=0}^{N_h-1} h_{km,i}\; y_k(n-i)$$

soit, en développant :

$$e_m(n) = d_m(n) + \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=0}^{N_h-1} \sum_{q=0}^{N_w-1} h_{km,i}\, w_{k,q}(n-i)\; x\,(n-i-q) \qquad m = 1, 2, ..., M \tag{49}$$

Sous réserve de vérification de l'hypothèse d'adaptation lente des coefficients du filtre, on peut, comme précédemment, faire l'approximation $w_{k,j}(n-i) \approx w_{k,j}(n)$ et introduire les signaux de références filtrées en posant :

$$r_{km}(n) = \sum_{i=0}^{N_h-1} h_{km,i}\, x\,(n-i) \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, ..., K \\ m = 1, 2, ..., M \end{matrix} \tag{50}$$

On a alors :

$$e_m(n) = d_m(n) + \sum_{k=1}^{K} \sum_{q=0}^{N_w-1} w_{k,q}(n)\; r_{km}(n-q) \qquad m = 1, 2, ..., M \tag{51}$$

et l'équation qui définit l'algorithme FXLMS multivoies à référence unique s'écrit :

$$w_{k,q}(n+1) = w_{k,q}(n) - \mu \sum_{m=1}^{M} r_{km}(n-q)\; e_m(n) \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, ..., K \\ q = 0, 1, ..., N_w - 1 \end{matrix} \tag{52}$$

En pratique on utilise une estimation du transfert secondaire qui est implémentée sous la forme d'un ensemble de filtres RIF pour générer des approximations des références filtrées (figure **11**) et l'algorithme FXLMS s'écrit :

$$w_{k,q}(n+1) = w_{k,q}(n) - \mu \sum_{m=1}^{M} \widehat{r}_{km}(n-q)\; e_m(n) \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, ..., K \\ q = 0, 1, ..., N_w - 1 \end{matrix} \tag{53}$$

La programmation de l'algorithme FXLMS se fait à partir des relations (48), (50) et (53). L'algorithme peut être facilement parallélisé car les commandes des sources de contre-bruit peuvent être calculées indépendamment les unes des autres. On pourra donc réduire les temps de calcul si on affecte à chaque voie de sortie un processeur dédié au calcul de la commande de cette voie.

4.3.2 Contrôle actif multivoies à références multiples

Un système de contrôle actif multivoies à références multiples se compose de J microphones de référence, de M microphones d'erreur et de K sources secondaires. Dans ce cas, le signal de commande $y_k(n)$ d'une source secondaire va dépendre de l'ensemble des signaux de référence. On aura :

$$y_k(n) = \sum_{j=1}^{J} y_{kj}(n) \qquad k = 1, 2, ..., K \tag{54}$$

où $y_{kj}(n)$ désigne la composante de la k-ième sortie du filtre créée par le j-ième signal de référence. Si l'on représente le filtre par le vecteur $\boldsymbol{w}_{kj}(n) = [w_{kj,0}(n)\; w_{kj,1}(n) \ldots w_{kj,N_w-1}(n)]^{\mathrm{T}}$ cette composante est donnée par :

$$y_{kj}(n) = \sum_{q=0}^{N_w-1} w_{kj,q}(n)\; x_j(n-q) \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, ..., K \\ j = 1, 2, ..., J \end{matrix} \tag{55}$$

d'où :

$$y_k(n) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{q=0}^{N_w-1} w_{kj,q}(n)\; x_j(n-q) \qquad k = 1, 2, ..., K \tag{56}$$

Le signal d'erreur délivré par le m-ième capteur s'écrira :

$$e_m(n) = d_m(n) + \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=0}^{N_h-1} h_{km,i}\, y_k(n-i) \qquad m = 1, 2, ..., M \tag{57}$$

soit, en développant :

$$e_m(n) = d_m(n) + \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=0}^{N_h-1} \sum_{j=1}^{J} \sum_{q=0}^{N_w-1} h_{km,i}\, w_{kj,q}(n-i)\; x_j(n-i-q) \qquad m = 1, 2, ..., M \tag{58}$$

En supposant, comme précédemment, que l'hypothèse d'adaptation lente des coefficients du filtre est vérifiée, on peut introduire les signaux de références filtrées en posant :

$$r_{kmj}(n) = \sum_{i=0}^{N_h-1} h_{km,i}\, x_j(n-i) \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, ..., K \\ m = 1, 2, ..., M \\ j = 1, 2, ..., J \end{matrix} \tag{59}$$

et réécrire le signal d'erreur sous la forme :

$$e_m(n) = d_m(n) + \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \sum_{q=0}^{N_w-1} w_{kj,q}(n)\; r_{kmj}(n-q) \qquad m = 1, 2, ..., M \tag{60}$$

L'équation de définition de l'algorithme FXLMS multivoies à références multiples s'obtient en généralisant la relation (52). On trouve :

$$w_{kj,q}(n+1) = w_{kj,q}(n) - \mu \sum_{m=1}^{M} r_{kmj}(n-q)\; e_m(n) \quad \begin{matrix} k = 1, 2, ..., K \\ j = 1, 2, ..., J \\ q = 0, 1, ..., N_w - 1 \end{matrix} \tag{61}$$

Les principaux résultats relatifs à l'algorithme FXLMS sont regroupés dans le tableau **1**.

On trouvera des informations détaillées sur les algorithmes FXLMS multivoies dans les références [55], [57] et [61] [62] [63] [64] [65] [66] [67].

5. Contrôle actif en boucle fermée

5.1 Systèmes analogiques

5.1.1 Principe

Lorsqu'on ne dispose pas d'un signal de référence fortement corrélé avec le bruit à réduire pour piloter le système de contrôle, on peut utiliser le signal d'erreur pour commander, après traitement par le contrôleur, la source secondaire : on parle alors de contrôle actif en boucle fermée (figure **5*c***).

Le schéma fonctionnel électrique d'un tel système, supposé monovoie pour simplifier, est représenté sur la figure **12**. La quantité $W(\omega)$ désigne la fonction de transfert du contrôleur, $H(\omega)$ est la fonction de transfert entre l'entrée de la source secondaire et la sortie du microphone, et $D(\omega)$ est la grandeur électrique correspondant au bruit primaire au microphone d'erreur.

Tableau 1 – Algorithme FXLMS

Grandeurs	Monovoie	Multivoies	
		Référence unique	Références multiples
Nombre de microphones de référence	1	1	J
Nombre de microphones d'erreur	1	M	M
Nombre de sources secondaires	1	K	K
Signal de référence	$x(n)$	$x(n)$	$x_j(n)$ $j = 1, 2, \ldots, J$
Filtre adaptatif	$\boldsymbol{w}(n) = [w_0(n)\, w_1(n) \ldots w_{N_w-1}(n)]^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{w}_k(n) = [w_{k,0}(n)\, w_{k,1}(n) \ldots w_{k,N_w-1}(n)]^{\mathrm{T}}$ $k = 1, 2, \ldots, K$	$\boldsymbol{w}_{kj}(n) = [w_{kj,0}(n)\, w_{kj,1}(n) \ldots w_{kj,N_w-1}(n)]^{\mathrm{T}}$ $k = 1, 2, \ldots, K \quad j = 1, 2, \ldots, J$
Signal de commande des sources	$y(n) = \sum_{q=0}^{N_w-1} w_q(n)\, x(n-q)$	$y_k(n) = \sum_{q=0}^{N_w-1} w_{k,q}(n)\, x(n-q)$ $k = 1, 2, \ldots, K$	$y_k(n) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{q=0}^{N_w-1} w_{kj,q}(n)\, x_j(n-q)$ $k = 1, 2, \ldots, K$
Référence filtrée	$r(n) = \sum_{i=0}^{N_h-1} s_i\, x(n-i)$	$r_{km}(n) = \sum_{i=0}^{N_h-1} s_{km,i}\, x(n-i)$ $k = 1, 2, \ldots, K \quad m = 1, 2, \ldots, M$	$r_{kmj}(n) = \sum_{i=0}^{N_h-1} s_{km,i}\, x_j(n-i)$ $k = 1, 2, \ldots, K \quad m = 1, 2, \ldots, M \quad j = 1, 2, \ldots, J$
Signal d'erreur	$e(n) = d(n) + \sum_{q=0}^{N_w-1} w_q(n)\, r(n-q)$	$e_m(n) = d_m(n) + \sum_{k=1}^{K} \sum_{q=0}^{N_w-1} w_{k,q}(n)\, r_{km}(n-q)$ $m = 1, 2, \ldots, M$	$e_m(n) = d_m(n) + \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \sum_{q=0}^{N_w-1} w_{kj,q}(n)\, r_{kmj}(n-q)$ $m = 1, 2, \ldots, M$
Algorithme	$w_q(n+1) = w_q(n) - \mu r(n-q)\, e(n)$ $q = 0, 1, \ldots, N_w - 1$	$w_{k,q}(n+1) = w_{k,q}(n) - \mu \sum_{m=1}^{M} r_{km}(n-q)\, e_m(n)$ $q = 0, 1, \ldots, N_w - 1 \quad k = 1, 2, \ldots, K$	$w_{kj,q}(n+1) = w_{kj,q}(n) - \mu \sum_{m=1}^{M} r_{kmj}(n-q)\, e_m(n)$ $q = 0, 1, \ldots, N_w - 1 \quad k = 1, 2, \ldots, K \quad j = 1, 2, \ldots, J$

De la relation :

$$E(\omega) = D(\omega) + W(\omega)\, H(\omega)\, E(\omega) \tag{62}$$

on déduit la fonction de transfert du système :

$$H_{\mathrm{CL}}(\omega) = \frac{E(\omega)}{D(\omega)} = \frac{1}{1 - W(\omega)\, H(\omega)} = \frac{1}{1 + H_{\mathrm{OL}}(\omega)} \tag{63}$$

Les quantités $H_{\mathrm{OL}}(\omega) = -W(\omega)\ H(\omega)$ et $H_{\mathrm{CL}}(\omega)$ correspondent respectivement aux fonctions de **transfert en boucle ouverte** et en **boucle fermée** du système.

La densité spectrale de puissance du signal d'erreur s'écrit :

$$S_{ee}(\omega) = \frac{S_{dd}(\omega)}{\left|1 + H_{\mathrm{OL}}(\omega)\right|^2} \tag{64}$$

où $S_{\mathrm{dd}}(\omega)$ désigne la densité spectrale de puissance du signal primaire.

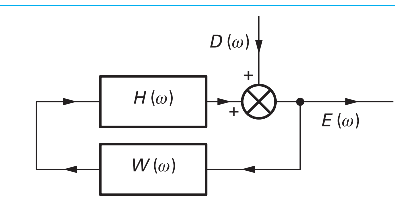


Figure 12 – Schéma fonctionnel électrique du contrôle actif en boucle fermée

Pour minimiser $S_{ee}(\omega)$ à une fréquence donnée, il faut maximiser son dénominateur à cette même fréquence. Cette opération peut sembler *a priori* assez simple à mettre en œuvre. Si on pose $H_{\mathrm{OL}}(\omega) = K(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Phi(\omega)}$, on a :

$$S_{ee}(\omega) = \frac{S_{dd}(\omega)}{1 + 2K(\omega)\cos\Phi(\omega) + K^2} \tag{65}$$

La fonction de transfert secondaire étant donnée, il s'agit donc de choisir une fonction de transfert du contrôleur $W(\omega)$ conduisant à une valeur maximale de $K(\omega)$ dans toute la bande de fréquence à traiter et à un déphasage $-180^o < \Phi(\omega) < 180^o$ dans cette même bande.

Malheureusement, les choses sont plus compliquées en pratique, et cela pour deux raisons :

– le choix de la fonction de transfert $W(\omega)$ ne peut être totalement arbitraire : il doit correspondre à une réponse impulsionnelle $w(t)$ **causale** pour que le filtre correspondant soit **physiquement réalisable** ;

– toute augmentation du gain en boucle ouverte se traduit par une **diminution de la stabilité** du système.

5.1.2 Stabilité du contrôle actif en boucle fermée

La stabilité d'un système de contrôle actif en boucle fermée dépend des pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée, obtenus en résolvant l'équation $1 + H_{OL}(\omega) = 0$. Pour que le système soit stable, il faut que ces pôles soient situés dans la partie gauche du plan complexe [68]. Comme on ne dispose pas de modèle analytique de $H_{OL}(\omega)$ dans la plupart des applications de contrôle actif, on étudie **graphiquement** la stabilité du système correspondant à l'aide du **critère de Nyquist**. Nous ne donnerons ici que quelques notions succinctes relatives à ce critère. Le lecteur intéressé pourra se reporter au fascicule [R 7 200], *Performances d'un système asservi*.

Si l'on appelle **point critique** le point du plan complexe de coordonnées (– 1, 0), le critère de Nyquist peut s'énoncer ainsi : *un système bouclé est stable si son lieu de transfert en boucle ouverte, parcouru de $\omega = -\infty$ à $\omega = +\infty$ entoure le point critique un nombre de fois égal au nombre de pôles instables en boucle ouverte.*

Pour les systèmes **stables en boucle ouverte**, l'énoncé du critère de Nyquist se simplifie et devient : *un système bouclé est stable si son lieu de transfert en boucle ouverte n'entoure pas le point critique.*

Une autre version du critère de Nyquist, très utilisée en pratique, est le **critère du revers** : *un système bouclé est stable si son lieu de transfert en boucle ouverte, parcouru dans le sens des fréquences croissantes, laisse le point critique à sa gauche* (figure **13**).

En pratique, le lieu de transfert en boucle ouverte ne doit pas être situé « trop près » du point critique. On chiffre le degré de stabilité d'un système bouclé par sa **marge de phase** et sa **marge de gain** :

– la marge de phase (exprimée en degrés) est le déphasage supplémentaire qui ferait passer le lieu de transfert en boucle ouverte de l'autre côté du point critique ;

– la marge de gain (exprimée en décibels) est l'augmentation maximale du gain qui ne crée pas d'instabilité.

5.1.3 Compensation

La **compensation** consiste à modifier la forme du lieu de transfert en boucle ouverte au moyen d'un filtre *ad hoc*, de façon à minimiser la densité spectrale de puissance du signal d'erreur tout en conservant une marge de phase et une marge de gain acceptables. On peut montrer [54] [55] que les méthodes classiques de compensation des systèmes bouclés (compensation par avance ou par retard de phase, compensation par action proportionnelle, intégrale et dérivée...) ne sont pas utilisables en contrôle actif. Les filtres de compensation sont généralement obtenus à partir de cellules biquadratiques [68], qui permettent d'obtenir un gain élevé dans les bandes de fréquence à contrôler et un faible déphasage en dehors de cette bande.

Par exemple, Carme [69] propose d'utiliser un filtre passe-bande du second ordre qui permet d'obtenir un fort gain autour de sa fréquence centrale avec un déphasage toujours compris entre – 90° et + 90°.

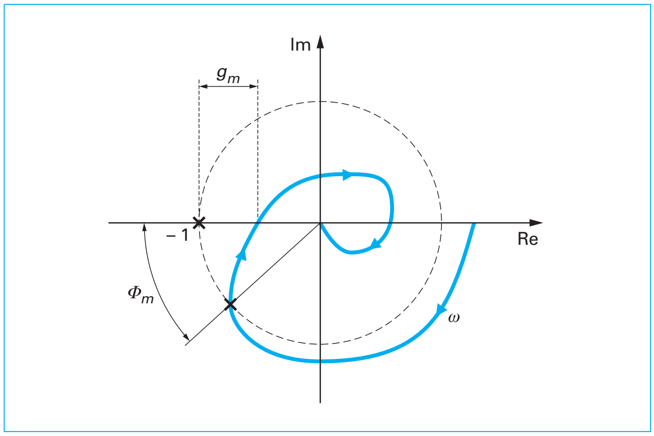


Figure 13 – Exemple de lieu de transfert en boucle ouverte pour un système stable en boucle fermée (critère du revers). La marge de phase est Φ_m et la marge de gain est 20 log g_m

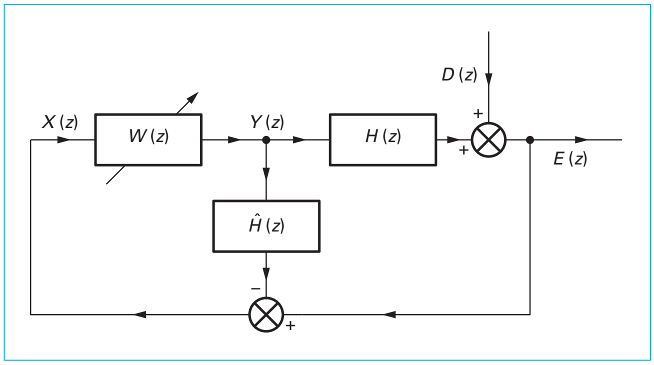


Figure 14 – Schéma fonctionnel du contrôle actif adaptatif en boucle fermée

5.2 Systèmes adaptatifs

Les systèmes adaptatifs nécessitent un signal de référence corrélé avec le bruit à réduire. Le signal $E(\omega)$ ne peut pas jouer directement ce rôle puisque le but du contrôle est, par définition, de l'annuler ou tout au moins de le réduire fortement. L'idée de base du contrôle actif adaptatif en boucle fermée est d'**estimer** en temps réel le signal primaire $D(\omega)$ et de s'en servir comme signal de référence.

Reprenons le schéma fonctionnel de la figure **12** en nous plaçant dans le plan complexe Z. La relation (62) peut être réécrite sous la forme :

$$E(z) = D(z) + H(z)\,Y(z) \quad \textbf{(66)}$$

où $Y(z)$ est le signal de sortie du filtre, maintenant adaptatif, $W(z)$. Si on dispose d'une estimation $\widehat{H}(z)$ du transfert secondaire $H(z)$, on peut s'en servir pour calculer une estimation $\widehat{D}(z)$ du bruit primaire qu'on pourra utiliser comme signal de référence $X(z)$ comme indiqué sur la figure **14**.

Le signal de référence s'écrit :

$$X(z) = \widehat{D}(z) = E(z) - \widehat{H}(z)\,Y(z) \quad \textbf{(67)}$$

et le signal de sortie du contrôleur a pour expression :

$$Y\,(z) = \frac{W\,(z)}{1+\widehat{H}\,(z)\,W\,(z)}\,E\,(z) \qquad \textbf{(68)}$$

Un tel contrôle est dit **contrôle par modèle interne** ou **IMC** (pour *Internal Model Control*) car la fonction de transfert $W\,(z)/[1+\widehat{H}\,(z)\,W(z)]$ du contrôleur équivalent inclut l'estimation du transfert secondaire.

La fonction de transfert en boucle fermée du système s'écrit :

$$H_{\text{CL}}(z) = \frac{E\,(z)}{D\,(z)} = \frac{1+\widehat{H}\,(z)\,W\,(z)}{1-W\,(\omega)\,[H\,(\omega)-\widehat{H}\,(z)]} \qquad \textbf{(69)}$$

Sous réserve que l'hypothèse d'adaptation lente soit vérifiée, on peut modifier le schéma de la figure **14** pour implémenter l'algorithme FXLMS. On obtient le schéma représenté sur la figure **15**.

Avec un filtre adaptatif possédant N_w coefficients w_q, l'équation de l'algorithme FXLMS s'écrit :

$$w_q(n+1) = w_q(n) - \mu\,\widehat{r}\,(n-q)\,e\,(n) \qquad q = 0, 1, \ldots, N_w - 1 \qquad \textbf{(70)}$$

où $\widehat{r}\,(n)$ est la référence filtrée.

Si on utilise une estimation du transfert secondaire implémentée sous la forme d'un filtre RIF possédant N_h coefficients $\hat{h}_i$, on aura :

$$\widehat{r}\,(n) = \sum_{i=0}^{N_h-1} \widehat{h}_i\,\widehat{d}\,(n-i) \qquad \textbf{(71)}$$

Bien entendu, les équations du contrôle actif adaptatif en boucle fermée peuvent être étendues au cas du contrôle multivoies. Le lecteur trouvera une description détaillée de ces équations dans la référence [55].

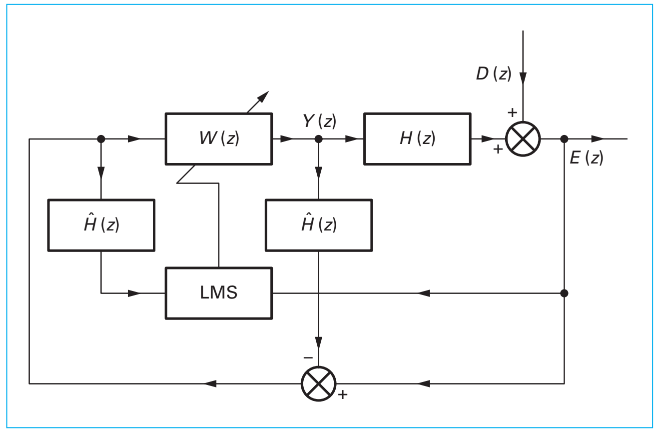


Figure 15 – Contrôle actif adaptatif en boucle fermée utilisant l'algorithme FXLMS

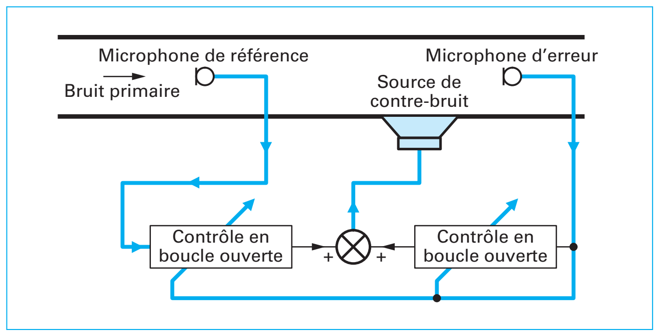


Figure 16 – Système hybride numérique de contrôle actif

5.3 Systèmes hybrides

On peut améliorer les performances du contrôle actif en boucle fermée en utilisant des **systèmes hybrides**. Ces systèmes sont de deux types :

– ceux qui combinent l'utilisation d'un contrôleur analogique et d'un contrôleur numérique ;

– ceux, purement numériques, qui combinent le contrôle actif en boucle fermée et le contrôle actif en boucle ouverte (systèmes hybrides adaptatifs).

5.3.1 Systèmes hybrides analogiques et numériques

Les contrôleurs numériques sont bien adaptés pour la réduction des bruits à bande étroite car on peut leur donner une réponse en fréquence spécifique dans une portion de spectre donnée. Ils sont plus difficiles à mettre en œuvre lorsque le bruit à réduire est à large bande à cause des retards (liés au temps de travail des processeurs et aux réponses des convertisseurs et des filtres) qu'ils introduisent dans la chaîne de commande.

Si l'on se souvient que le contrôle actif adaptatif en boucle fermée est basé sur la possibilité de modéliser les évolutions prévisibles du bruit à réduire pour les anticiper, on conçoit que ces retards risquent de dégrader les performances du système en limitant les possibilités, pour le contrôleur, de prédire le comportement futur de ce bruit.

À l'inverse, lorsque le contrôleur est réalisé à partir de composants analogiques, les retards dans la boucle de commande sont très faibles, et un contrôle actif à large bande peut être obtenu à condition que le bruit à réduire soit raisonnablement stationnaire.

Dans le cas où ce bruit contient à la fois des composantes stationnaires à large bande et des composantes déterministes à bande étroite, les avantages complémentaires des deux types de contrôleurs peuvent engendrer une amélioration importante des performances s'ils sont utilisés de façon combinée [57].

5.3.2 Systèmes hybrides numériques

Les systèmes hybrides numériques utilisent à la fois le contrôle actif en boucle ouverte et le contrôle actif en boucle fermée [70], ce qui leur donne une grande flexibilité (figure **16**) et permet de réduire l'ordre des filtres utilisés et, donc, les temps de calcul. Le contrôle en boucle fermée est généralement adaptatif mais il peut aussi être obtenu par un dispositif analogique. Les filtres utilisés pour le contrôle actif en boucle ouverte peuvent être à réponse impulsionnelle finie ou infinie [55].

Les composantes du bruit primaire corrélées avec le signal de référence sont réduites par contrôle en boucle ouverte et le contrôle en boucle fermée réduit les composantes éventuelles à bande étroite non perçues par le microphone de référence.

5.3.3 Comparaison des stratégies de commande

Les diverses stratégies de commande sont comparées dans le tableau **2**.

Tableau 2 – Comparaison des stratégies de commande

	Contrôle en boucle ouverte	Contrôle en boucle fermée		Contrôle hybride		
		Analogique	Numérique	Analogique et numérique	Numérique	
					Filtres RIF	Filtres RII
Nécessité d'un signal de référence	OUI	NON	NON	NON	OUI	OUI
Contrôle adaptatif	OUI	NON	OUI	En partie	OUI	OUI
Bande de fréquence traitée	Large bande et bande étroite	Large bande	Bande étroite	Large bande et bande étroite	Large bande et bande étroite	Large bande et bande étroite
Ordre du filtre	Moyen	Faible	Élevé	Faible	Faible	Faible

6. Annexe : signaux et systèmes

(tableaux **3**, **4**, **5**)

Pour des informations plus détaillées, le lecteur pourra se reporter aux fascicules Filtres analogiques [E 3 100] [E 3 110] et [E 3 130], Filtres numériques [E 3 160] et [E 3 162], Traitement numérique du signal [E 3 087] dans le traité Électronique.

Tableau 3 – Signaux aléatoires

	Signaux à temps continu	Signaux à temps discret	Observations
Représentation temporelle	$x(t)$	$x(n)$	Signal dont l'amplitude est définie à chaque instant par une loi de probabilité
Moment d'ordre 1	$m_1(t) = \mathrm{E}[x(t)]$ $\mathrm{E}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot p_x(u, t)\,\mathrm{d}u$	$m_1(n) = \mathrm{E}[x(n)]$	$p_x(u, t)$: densité de probabilité de $x(t)$. Le moment d'ordre 1 est aussi appelé moyenne ou espérance mathématique
Moment d'ordre 2	$m_2(t_1, t_2) = \mathrm{E}[x(t_1)\,x(t_2)]$ $\mathrm{E}[x(t_1)\,x(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u_1 \cdot u_2 \cdot p_x(u_1, u_2, t_1, t_2)\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2$	$m_2(k,n) = \mathrm{E}[x(k)\,x(n)]$	$p_x(u_1, u_2, t_1, t_2)$: densité de probabilité du couple $\{x(t_1)\ x(t_2)\}$
Variance	$\sigma_x^2(t) = \mathrm{E}[\lvert x(t) - m_1(t)\rvert^2]$	$\sigma_x^2(n) = \mathrm{E}[\lvert x(n) - m_1(n)\rvert^2]$	
Signaux stationnaires au sens large	$m_1(t) = \mathrm{cte}$ $m_2(t_1, t_2) = m_2(t_1 - t_2)$	$m_1(n) = \mathrm{cte}$ $m_2(k, n) = m_2(k - n)$	$\sigma_x^2 = \mathrm{cte}$
Ergodicité	$\mathrm{E}[x(t)] = \overline{x(t)}$	$\mathrm{E}[x(n)] = \overline{x(n)}$	
Signaux stationnaires et ergodiques	$R_{xx}(\tau) = \mathrm{E}[x(t+\tau)\,x^*(t)]$	$R_{xx}(k) = \mathrm{E}[x(n+k)\,x^*(n)]$	
	$R_{xy}(\tau) = \mathrm{E}[x(t+\tau)\,y^*(t)]$	$R_{xy}(k) = \mathrm{E}[x(n+k)\,y^*(n)]$	

Tableau 4 – Signaux déterministes

	Signaux à temps continu	Signaux à temps discret	Observations
Représentation temporelle	$x(t)$	$x(n)$	$x(n) \equiv x(nT_e)$ T_e période d'échantillonnage
Valeur moyenne	$\overline{x(t)} = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x(t)\,\mathrm{d}t$	$\overline{x(n)} = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N} x(n)$	
Valeur quadratique moyenne	$\overline{\lvert x(t)\rvert^2} = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \lvert x(t)\rvert^2\,\mathrm{d}t$	$\overline{\lvert x(n)\rvert^2} = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N} \lvert x(n)\rvert^2$	
Puissance moyenne	$\overline{P}_x = \overline{\lvert x(t)\rvert^2}$	$\overline{P}_x = \overline{\lvert x(n)\rvert^2}$	
Causalité	$x(t) = 0$ pour $t < 0$	$x(n) = 0$ pour $n < 0$	
Fonction d'autocorrélation	$R_{xx}(\tau) = \overline{x(t)\,x^*(t+\tau)}$ $R_{xx}(0) = \overline{P}_x$	$R_{xx}(k) = \overline{x(n)\,x^*(n+k)}$ $R_{xx}(0) = \overline{P}_x$	
Fonction d'intercorrélation	$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)\,y^*(t+\tau)}$	$R_{xy}(k) = \overline{x(n)\;y^*(n+k)}$	
Transformée de Fourier	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$	$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$	
Transformée en z		$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\,z^{-n}$ $z \in \mathrm{D}_1$ (domaine de convergence de la série)	La transformée de Fourier et la transformée en z coïncident pour $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$
Densité spectrale de puissance	$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau$	$S_{xx}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{xx}(n)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$	
Densité spectrale d'interaction	$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau$	$S_{xy}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{xy}(n)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$	

Tableau 5 – Filtres

	Signaux à temps continu	Signaux à temps discret	Observations
Système	$x(t) \xrightarrow{\text{Système}} y(t)$	$x(n) \xrightarrow{\text{Système}} y(n)$	
Système linéaire	$\left.\begin{matrix} x_1(t) \to y_1(t) \\ x_2(t) \to y_2(t) \end{matrix}\right\} \Rightarrow ax_1(t)+bx_2(t) \to ay_1(t)+by_2(t)$	Id.	
Système stationnaire	$x(t) \to y(t) \Rightarrow x(t-\tau) \to y(t-\tau)$	Id.	Invariant par décalage temporel
Filtre	Système linéaire invariant par décalage temporel	Système linéaire invariant par décalage temporel	
Réponse impulsionnelle	$\delta(t) \to h(t)$	$\delta(n) \to h_n$	$\delta(t)$: impulsion de Dirac. $\delta(n)$: échantillon unité $\delta(n) = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$
Fonction de transfert	$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$	$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n z^{-n}$	
Réponse à une entrée quelconque	$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t_0)\,x(t_0)\,\mathrm{d}t_0$ $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$	$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k\,x(n-k)$ $Y(z) = H(z) \cdot X(z)$	
Condition de stabilité	La fonction de transfert ne doit pas posséder de pôles dans le demi-plan complexe droit	La fonction de transfert ne doit pas posséder de pôles à l'extérieur du cercle unité du plan complexe Z	
Condition de causalité	$h(t) = 0$ pour $t < 0$	$h_n = 0$ pour $n < 0$	
Réponse des filtres causaux	$y(t) = \int_0^t h(t-t_0)\,x(t_0)\,\mathrm{d}t_0$	Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k\,x(n-k) \quad a_k = 0$ si $k < 0$ $H(z) = a_0 + \ldots + a_{N-1} z^{-(N-1)}$	La fonction de transfert ne possédant pas de pôles, la stabilité est assurée.
		Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII) $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k\,x(n-k) - \sum_{k=0}^{M-1} b_k\,y(n-k)$ $H(z) = \dfrac{a_0 + \ldots + a_{N-1} z^{-(N-1)}}{1 + b_0 + \ldots + b_{M-1} z^{-(M-1)}}$	La fonction de transfert possédant des pôles, la stabilité n'est pas assurée.

Contrôle actif des bruits

Bases théoriques

par **Gérard MANGIANTE**

Professeur des universités
Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (CNRS Marseille)

Références bibliographiques

Dans les Éditions Techniques de l'Ingénieur

GARNIER (B.). – *Contrôle actif des vibrations.* [R 6 200], Bruit et vibrations (2002).

[1] COANDA (H.). – *Procédé de protection contre les bruits.* Brevet français n° 722.274, déposé le 21 octobre 1930, délivré le 29 déc. 1931.

[2] COANDA (H.). – *Procédé et dispositif de protection contre les bruits.* Brevet français n° 762.121, déposé le 31 décembre 1932, délivré le 18 janv. 1934.

[3] LUEG (P.). – *Process of silencing sound oscillations.* Brevet américain n° 2,043,416, déposé le 8 mars 1934, délivré le 9 juin 1936.

[4] LUEG (P.). – *Verfahren zur Dämpfung von Schallschingungen.* Brevet allemand 655508, déposé le 27 janvier 1933, délivré le 30 déc. 1937.

[5] GUICKING (D.). – *On the invention of active noise control by Paul Lueg.* J. Acoust. Soc. Am. *87*, n° 5, p. 2251-4 (1990).

[6] HEERING (P. de). – *Comments on on the invention of active noise control by Paul Lueg.* J. Acoust. Soc. Am. *93*, n° 5, p. 2989 (1993).

[7] OLSON (H.F.) et MAY (E.G.). – *Electronic sound absorber.* J. Acoust. Soc. Am. *25*, n° 6, p. 1130-6 (1953).

[8] OLSON (H.F.). – *Electronic control of noise, vibration and reverberation.* J. Acoust. Soc. Am. *28*, n° 5, p. 966-72 (1956).

[9] CONOVER (W.B.) et RINGLEE (R.J.). – *Recent contribution to transformer audible noise control.* AIIE Transactions, Applications and Industry n° 64 D, p. 77-90 (1955).

[10] CONOVER (W.B.). – *Fighting noise with noise.* Noise Control, *2*, p. 78-82 (1956).

[11] CONOVER (W.B.). – *Noise Reducing System for Transformers.* Brevet américain n° 2,776,020, déposé le 9 février 1955, délivré le 1er janv. 1957.

[12] JESSEL (M.). – *Procédé électroacoustique d'absorption des sons et bruits gênants dans des zones étendues.* Brevet français n° 1.494.967, déposé le 4 août 1966, délivré le 7 août 1967.

[13] JESSEL (M.). – *Sur les absorbeurs actifs.* Proc. of the 6th Int. Congress on Acoustics, Tokyo, vol. 4 F56 (1968).

[14] JESSEL (M.). – *La question des absorbeurs actifs.* Revue d'Acoustique, *5*, n° 18, p. 37-42 (1972).

[15] CANÉVET (G.) et MANGIANTE (G.). – *Absorption acoustique active et antibruit à une dimension.* ACUSTICA, *30*, n° 1, p. 40-8 (1974).

[16] JESSEL (M.). – *Théorie et pratique des absorbeurs actifs dans les conduits et les pavillons.* Revue d'Acoustique, *7*, n° 31, p. 11-5 (1974).

[17] MANGIANTE (G.) et CANÉVET (G.). – *Principe de Huygens et absorption acoustique active.* Revue du Cethedec, n° 13, p. 109-137 (1976).

[18] MANGIANTE (G.). – *Application du principe de Huygens aux absorbeurs acoustiques actifs. – I. Théorie des absorbeurs actifs.* ACUSTICA, *36*, n° 4, p. 287-93 (1976).

[19] MANGIANTE (G.). – *Active sound absorption.* J. Acoust. Soc. Am., *61*, n° 6, p. 1516-23 (1977).

[20] JESSEL (M.). – *Secondary sources and their energy transfer.* Acoustic Letters, *4*, n° 9, p. 174-9 (1981).

[21] JESSEL (M.). – *Active noise and vibration control (ANVC) : current trends, permanent aims and future possibilities.* Archives of Acoustics, *10*, n° 4, p. 345-56 (1985).

[22] MANGIANTE (G.). – *Quelques applications de la méthode JMC en holochorie acoustique.* ACUSTICA, *74*, n° 1, p. 41-50 (1991).

[23] MAZANIKOV (A.A.) et TYUTEKIN (V.V.). – *Experimental study of an active system for the suppression of sound fields.* Sov. Phys. Acoust., *20*, n° 5, p. 493-4 (1975).

[24] FEDORYUK (M.V.). – *An active noise– suppression method.* Sov. Phys. Acoust., *20*, n° 5, p. 495-6 (1975).

[25] ZAVADSKAYA (M.P.), POPOV (A.V.) et EGEL'SKII (B.L.). – *An approximate solution of the problem of active suppression of sound fields by the Malyuzhinets method.* Sov. Phys. Acoust., *21*, n° 5, p. 451-4 (1975).

[26] ROURE (A.). – *Self-adaptive broadband active sound control system.* J. of Sound and Vibration, *101*, n° 3, p. 429-41 (1985).

[27] KEMPTON (A.J.). – *The ambiguity of acoustic sources – a possibility for active control ?* J. of Sound Vibration, *48*, n° 4, p. 475-83 (1976).

[28] BEAUVILAIN (T.A.) et BOLTON (J.S.). – *Cancellation of radiated sound fields by the use of multipole secondary sources.* Proc. of the 2nd Conference on Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration, Blacksburg, Virginie, p. 957-68 (1993).

[29] MORSE (P.M.) et FESHBACK (H.). – *Methods of Theoretical Physics.* Vol. II, McGraw-Hill Book Company Inc., New-York (1953).

[30] KONYAEV (S.I.), LEBEDEV (V.I.) et FEDORYUK (M.V.). – *Factorization of a sound field by means of two concentric spherical sensing surfaces.* Sov. Phys. Acoust., *25*, n° 5, p. 413-5 (1979).

[31] WEINRICH (G.) et ARNOLD (E.B.). – *Method for measuring acoustic radiation field.* J. Acoust. Soc. Am., *68*, n° 2, p. 404-11 (1980).

[32] MAZANIKOV (A.A.), TYUTEKIN (V.V.) et FEDORYUK (M.V.). – *Active suppression of sound fields by the method of spatial harmonics.* Sov. Phys. Acoust., *26*, n° 5, p. 428-30 (1980).

[33] KONYAEV (S.I.) et FEDORYUK (M.V.). – *Spherical Huygens surfaces and their discrete approximation.* Sov. Phys. Acoust., *33*, n° 6, p. 622-5 (1987).

[34] FILIPPI (P.J.T.) et PIRAUX (J.). – *Noise source modelling and identification.* J. of Sound Vibration, *98*, n° 4, p. 596-600 (1985).

[35] FILIPPI (P.J.T.), HABAULT (D.) et PIRAUX (J.). – *Noise source modelling and intensimetry using antenna measurement and identification procedures.* J. of Sound Vibration, *124*, n° 2, p. 285-96 (1988).

[36] MARTIN (T.) et ROURE (A.). – *Optimization of an active noise control system using spherical harmonics expansion of the primary field.* J. of Sound Vibration, *201*, n° 5, p. 577-93 (1997).

[37] JESSEL (M.). – *Contribution aux théories du Principe de Huygens et de la diffraction.* Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air, Sedocar, Paris, n° 401, 128 p. (1963).

[38] MANGIANTE (G.). – *Absorption active : Une méthode de calcul des sources secondaires.* Journal d'Acoustique, *3*, n° 11, p. 47-52 (1990).

[39] MANGIANTE (G.). – *Sur une généralisation du principe de Huygens.* Publications du LMA, CNRS, n° 139, 36 p, avr. 1994.

[40] MANGIANTE (G.), ROURE (A.) et MATHEVON (V.). – *Active control of sound in ducts using self directional secondary sources.* Proc. of Active 97, Budapest, Hongrie, p. 307-18 (1997).

[41] MANGIANTE (G.), ROURE (A.) et WININGER (M.). – *Optimized unidirectional system for active control of sound in ducts.* Proc. of Active 99, Fort Lauderdale, USA, p. 493-502 (1999).

[42] NELSON (P.A.) et ELLIOTT (S.J.). – *Active minimisation of acoustic fields.* J. of Theoretical and Applied Mechanics, *6*, p. 39-89 (1987).

[43] KONYAEV (S.I.), LEBEDEV (V.I.) et FEDORYUK (M.V.). – *Discrete approximation of a Spherical Huygens Surface.* Sov. Phys. Acoust., *23*, n° 4, p. 373-4 (1977).

Doc. BR 3 010   4 - 2008

[44] VIAN (J.P.). – *Élimination du bruit par absorption active.* Rev. d'Ac., *43*, p. 322-34 (1977).

[45] MANGIANTE (G.) et VIAN (J.P.). – *Application du principe de Huygens aux absorbeurs acoustiques actif.* II : Approximations du principe de Huygens, ACUSTICA, *37*, n° 3, p. 175-82 (1977).

[46] ANGEVINE (O.L.). – *Active Systems for Attenuation of Noise*. Intern. Journal of Active Control, *1*, n° 1, p. 65-78 (1995).

[47] ANGEVINE (O.L.). – *Active cancellation of the hum of large electric transformers.* Proc. of Internoise 92, Toronto, Canada vol. 1, p. 383-90 (1992).

[48] HASEBE (M.), OBATA (K.) et KANEYASU (K.). – *An experiment of active noise control in three-dimensional space.* Proc. of the International Symposium of Active Control of Sound and Vibration, Tokyo, Japon, p. 303-8 (1991).

[49] HASEBE (M.) et KAIDA (M.). – *Study on active noise attenuation in three-dimensional sound field.* Proc. of Inter-Noise 93, Leuven, Belgique, p. 773-5 (1993).

[50] HASEBE (M.). – *Experimental study on active noise control using tripole secondary sources.* Noise Control Engineering Journal, *45*, n° 3, p. 119-22 (1997).

[51] UOSUKAINEN (S.). – *Modified JMC method in active control of sound.* ACUSTICA United with Acta Acustica, *83*, p. 105–12 (1997).

[52] UOSUKAINEN (S.). – *Active sound scatterers based on the JMC method.* J. of Sound Vibration, *267*, n° 5, p. 979-1005 (2003).

[53] ROSENHOUSE (G.). – *Active Noise Control – Fundamentals for Acoustic design.* Witpress, Southampton, 407 p. (2001).

[54] NELSON (P.A.) et ELLIOTT (S.J.). – *Active Control of Sound.* Academic Press, Londres, 436 p. (1992).

[55] KUO (S.M.) et MORGAN (D.R.). – *Active Noise Control Systems – Algorithms and DSP Implementations.* Wiley, New-York, 389 p. (1996).

[56] HANSEN (C.H.) et SNYDER (S.D.). – *Active control of noise and vibration.* E & FN Spon, Londres, 1267 p. (1997).

[57] ELLIOTT (S.J.). – *Signal Processing for Active Control.* Academic Press, Londres, 511 p. (2001).

[58] WIDROW (B.) et HOFF (M.). – *Adaptive switching circuits.* Proc. of IRE WESCON Convention Record, Part 4, Session 6, p. 96-104 (1960).

[59] GITLIN (R.D.), MEADORS (H.C.) et WEINSTEIN (S.B.). – *The tapleakage algorithm.* An algorithm for the stable operation of a digitally implemented fractional adaptive spaced equalizer. Bell System Techn. J., *61*, p. 1817-39 (1982).

[60] ELLIOTT (S. J.) et NELSON (P.A.). – *The application of adaptive filtering to the active control of sound and vibration.* ISVR Univ. of Southampton, UK, Techn. Report, n° 136, sept. 1985.

[61] MORGAN (D.R.). – *An analysis of multiple correlation cancellation loops with a filter in the auxiliary path.* IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-28, p. 454-67 (1980).

[62] WIDROW (B.), SHUR (D.) et SHAFFER (S.). – *On adaptive inverse control.* Proc. of 15th ASILOMAR Conf., p. 185-9 (1981).

[63] MANGIANTE (G.), ROURE (A.) et WINNINGER (M.). – *Multiprocessor controller for Active Noise and Vibration Control.* Proc. of Active 95, Newport Beach, USA, p. 1183-90 (1995).

[64] MANGIANTE (G.). – *Architectures parallèles pour le contrôle actif.* Publications du Cetim « Applications du contrôle actif à la réduction des bruits et vibrations », p. 217-24 (1995).

[65] ELLIOTT (S.J.) et NELSON (P.A.). – *Active noise control.* IEEE Signal Processing Mag., vol. 10, p. 12-35 (1993).

[66] ELLIOTT (S.J.) et NELSON (P.A.). – *Algorithms for multichannel LMS adaptive filtering.* Electronics Letters, *21*, p. 979-81 (1985).

[67] ELLIOTT (S.J.), STOTHERS (I.M.) et NELSON (P.A.). – *A multiple error LMS algorithm and its applications to the active control of sound and vibration.* IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-35, p. 1423-34 (1987).

[68] MANGIANTE (G.). – *Analyse et synthèse des filtres actifs analogiques.* Lavoisier, Tec & Doc, Paris, 380 p. (2005).

[69] CARME (C.). – *Absorption acoustique active dans les cavités.* Thèse, Université d'Aix-Marseille II, Marseille, France (1987).

[70] SWANSON (D.C.). – *Active noise attenuation using a self-tuning regulator as the adaptive algorithm.* Proc. of InterNoise 89, Newport Beach, USA, p. 467-70 (1989).