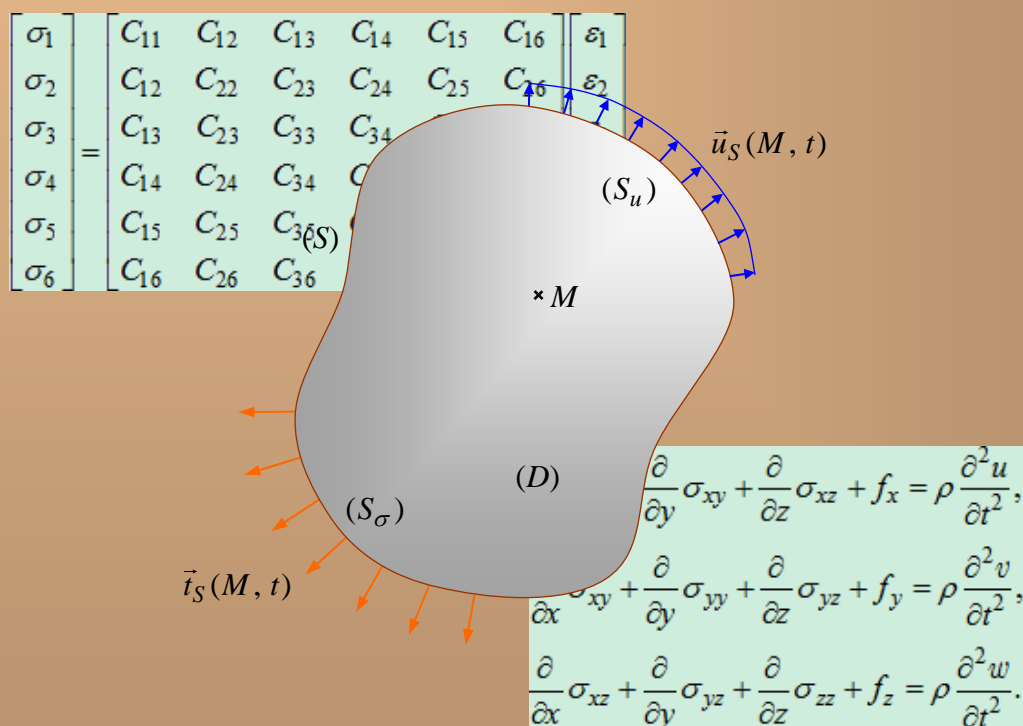


Jean-Marie Berthelot

Concepts de Base sur le Comportement Mécanique des Matériaux et des Structures



Jean-Marie Berthelot

**Concepts de Base sur le Comportement
des Matériaux et des Structures**

Jean-Marie Berthelot est Professeur Émérite à l'Institut Supérieur des Matériaux et Mécaniques Avancés (ISMANS), Le Mans, France. IL exerce ses compétences dans les domaines de la Mécanique des Matériaux et des Matériaux Composites. Spécialiste reconnu au niveau international, ses travaux dans le domaine du Comportement Mécanique des Matériaux Composites font l'objet de publications régulières dans des congrès et journaux scientifiques. Il est l'auteur de différents ouvrages de Mécanique et sur les Composites.

Jean-Marie Berthelot

**Concepts de Base
sur le Comportement
des Matériaux et des Structures**

ISMANS
Institut Supérieur des Matériaux
et Mécaniques Avancés

Le Mans, France

Avant-Propos

Ce court ouvrage développe une synthèse des concepts de base nécessaires pour l'analyse du Comportement Mécanique des Matériaux et des Structures. Après l'introduction d'éléments mathématiques (Chapitre 1), les outils usuels de l'analyse du Comportement Mécanique des Matériaux et des Structures sont considérés: contraintes (Chapitre 2); déformations (Chapitre 3); comportement élastique des matériaux (Chapitre 4); mécanique des structures déformables (Chapitre 5).

Vallouise, 27 Août 2009

Jean-Marie Berthelot

Table des Matières

Avant-Propos	v
Chapitre 1 Éléments Mathématiques	1
1.1 Changement de Base	1
1.1.1 Expression Générale	1
1.1.2 Expression dans la cas d'une Rotation autour d'un Axe	2
1.2 Tenseurs de Rang Deux	3
1.2.1 Introduction	3
1.2.2 Changement de Base	4
1.2.3 Diagonalisation d'une Matrice: Vecteurs et Valeurs Propres.	5
1.2.4 Inverse d'une Matrice Symétrique d'Ordre 3	6
Chapitre 2 Contraintes	7
2.1 État des Contraintes dans un Solide	7
2.1.1 Tenseur des Contraintes	7
2.1.2 Force Exercée en un Point sur un Élément des Surface	8
2.2 Propriétés du Tenseur des Contraintes	9
2.2.1 Signification Physique des Composantes du Tenseur.	9
2.2.2 Composantes Normale et Tangentielle du Vecteur Contrainte	10
2.2.3 Directions Principales. Contraintes Principales.	11
2.2.4 Change de Base	12
2.3 États Particuliers de Contraintes	12
2.3.1 Tenseur Sphérique et Déviateur des Contraintes	12
2.3.2 Compression ou Traction Sphérique	13
2.3.3 Traction ou Compression Simple dans une Direction.	13
2.3.4 Cisaillement Simple.	13
2.3.5 État de Contraintes Planes.	16
2.3.6 État de Contraintes Quelconque	17
2.4 Notation Matricielle de l'Ingénieur	17
2.4.1 Introduction de la Notation	17
2.4.2 Changement de Base	17
Exercices	19
Chapitre 3 Déformations	20
3.1 Le Tenseur des Déformations	20
3.1.1 Déformations en un Point	20
3.1.2 Tenseur des Déformations	22
3.1.3 Interprétation des Composantes du Tenseur des Déformations.	23
3.1.4 Conditions de Compatibilité.	25
3.2 État des Déformations en un Point	26
3.2.1 Allongement Unitaire	26
3.2.2 Déformation en Cisaillement	26
3.2.3 Tenseur des Déformations dans les Directions Principales	28
3.2.4 Changement de Base	29

3.3 États Particuliers de Déformations	30
3.3.1 Tenseur Sphérique et Déviateur des Contraintes	30
3.3.2 États Particuliers	30
3.4 Notation Matricielle de l'Ingénieur	30
3.4.1 Introduction de la Notation	30
3.4.2 Changement de Base	31
Exercices	32
 Chapitre 4 Comportement Élastique des Matériaux	 35
4.1 Schéma d'Élasticité Linéaire	35
4.1.1 Introduction	35
4.1.2 Matrice de Rigidité	35
4.1.3 Matrice de Flexibilité ou Souplesse	36
4.1.4 Changement de Base	36
4.1.5 Les Différents Types de Matériaux Anisotropes	37
4.2 Matériaux Isotropes	39
4.2.1 Relations d'Élasticité	39
4.2.2 Modules d'Élasticité	41
4.2.3 Relations entre les Coefficients d'Élasticité	43
4.2.4 Expressions des Matrices de Rigidité et Souplesse	43
Exercices	44
 Chapitre 5 Problème de Mécanique des Solides Déformables	 46
5.1 Relation fondamentale pour un Solide Déformable	46
5.2 Formulation de l'Analyse des Structures	48
5.2.1 Énoncé du Problème	48
5.2.2 Équations en Coordonnées Cartésiennes	50
5.2.3 Équations en Coordonnées Cylindriques	53
5.3 Théorèmes de l'Énergie	54
5.3.1 Variation d'une Fonctionnelle	54
5.3.2 Théorème des Travaux Virtuels	55
5.3.3 Dynamique des Solides	58
5.4 Méthodes Variationnelles	59
5.4.1 Principe	59
5.4.2 Convergence	61
5.5 Analyse par Éléments Finis	61
Exercices	63

Éléments Mathématiques

L'état des déformations et l'état des contraintes en un point d'un solide soumis à un chargement mécanique sont définis à partir de matrices carrées 3×3 . Nous rappelons dans ce chapitre quelques éléments relatifs aux concepts utilisés.

1.1 CHANGEMENT DE BASE

1.1.1 Expression générale

L'orientation d'un espace géométrique (S) par rapport à un système de référence (R) (figure 1.1) est caractérisée par les vecteurs de base $(\vec{e}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ d'un système d'axes $(1, 2, 3)$ lié à l'espace (S) , (\vec{e}) étant une base de l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 . Tout changement de ce système d'axes est caractérisé par une matrice de changement de base $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, permettant d'exprimer les nouveaux vecteurs de base $(\vec{e}') = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ en fonction des anciens suivant l'expression :

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_2 &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_3 &= a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3.\end{aligned}\tag{1.1}$$

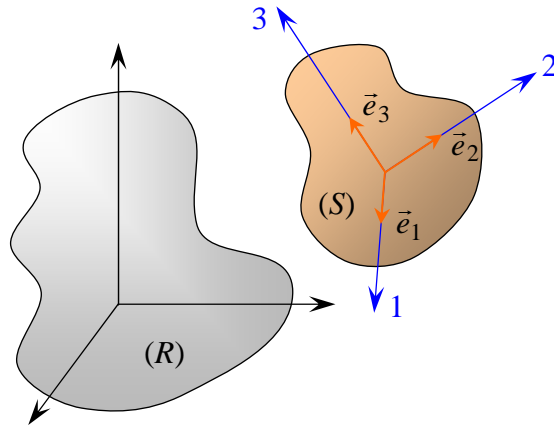


FIGURE 1.1. Orientation d'un espace géométrique (S) .

Nous écrivons cette relation sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

La relation inverse s'exprime, en introduisant la matrice inverse \mathbf{A}^{-1} de \mathbf{A} , suivant :

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Dans le cas de bases orthonormées directes, la matrice de changement de base est symétrique et unitaire : son déterminant est égal à 1 et son inverse est confondue avec la matrice transposée. La relation inverse est donc simplifiée suivant :

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^t \begin{bmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

où la matrice \mathbf{A}^t est la matrice transposée de \mathbf{A} .

1.1.2 Expression dans le cas de la rotation autour d'un axe

Dans le cas d'une rotation θ autour de la direction \vec{e}_3 (figure 1.2), la relation entre les bases $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \vec{e}_1 \cos \theta + \vec{e}_2 \sin \theta, \\ \vec{e}'_2 &= -\vec{e}_1 \sin \theta + \vec{e}_2 \cos \theta, \\ \vec{e}'_3 &= \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (1.5)$$

D'où la matrice de changement de base :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

La matrice de changement de base inverse est :

$$\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

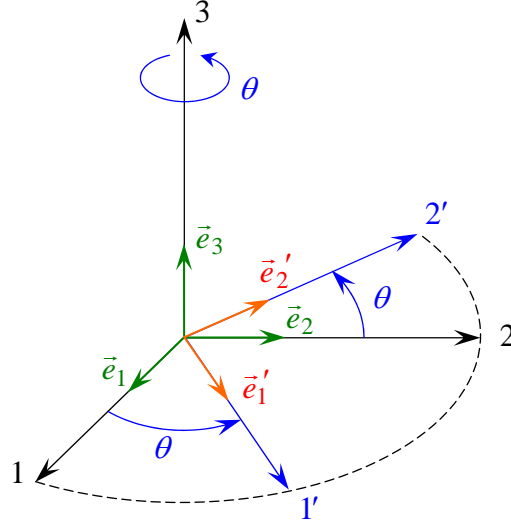


FIGURE 1.2. Rotation autour de la direction 3.

D'où la relation inverse :

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{e}_1' \cos \theta - \vec{e}_2' \sin \theta, \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}_1' \sin \theta + \vec{e}_2' \cos \theta, \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}_3'.\end{aligned}\tag{1.8}$$

1.2 TENSEUR DE RANG DEUX

1.2.1 Introduction

La notion de tenseur est nécessaire pour établir les relations entre effets physiques et causes dans les milieux anisotropes. Dans de tels milieux, une cause appliquée suivant une direction produit en général un effet orienté dans une autre direction. Les phénomènes physiques sont alors décrits par des *tenseurs*.

Les grandeurs, qui ne dépendent pas de la direction de mesure et qui sont mesurées par un seul nombre, sont représentées par des scalaires, ou tenseurs *d'ordre zéro*. Les vecteurs sont des tenseurs *d'ordre un*, qui représentent des grandeurs caractérisées par un nombre et une direction. Les grandeurs physiques plus complexes sont représentées par des tenseurs d'ordre supérieur à un.

D'une manière générale, un tenseur peut être défini comme établissant une application linéaire entre deux tenseurs d'ordres inférieurs. En particulier, un tenseur de *rang deux*, défini sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , est un opérateur linéaire qui fait correspondre à tout vecteur \vec{X} de l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 un vecteur \vec{Y} de \mathbb{R}^3 . Ce tenseur est représenté dans la base (\vec{e}) par un tableau d'éléments T_{kl} appelé tableau des composantes du tenseur dans la base (\vec{e}) . Ce tableau est

constitué de 9 nombres ($k, l = 1, 2, 3$). Dans la base (\vec{e}') , ce même tenseur est représenté par un tableau d'éléments reliés aux précédents par l'expression :

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (1.9)$$

où les termes a_{ik} et a_{jl} sont les éléments de la matrice de changement de base. La relation précédente utilise la *convention de sommation*, dans laquelle une répétition d'indice implique une sommation. La relation (1.9) est équivalente à :

$$T'_{ij} = a_{i1}a_{j1}T_{11} + a_{i1}a_{j2}T_{12} + \cdots + a_{i3}a_{j3}T_{33}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.10)$$

L'expression (1.9) peut être prise comme relation de définition d'un tenseur de rang deux : tableau se transformant dans un changement de base suivant la relation (1.9).

Il y a en fait identité entre les composantes des tenseurs de rang deux et les éléments des matrices carrées. Dans le cas où l'espace vectoriel de référence est l'espace \mathbb{R}^3 , nous écrirons donc les éléments des tenseurs de rang 2 sous la forme matricielle :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

1.2.2 Changement de base

Dans le cas de bases orthonormées directes, la relation (1.9) de changement de base peut s'écrire :

$$T'_{ij} = a_{ik}T_{kl}a_{lk}. \quad (1.12)$$

Compte tenu des éléments apportés précédemment, cette relation peut se mettre sous la forme d'une écriture matricielle, suivant :

$$\mathbf{T}' = \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{A}^t, \quad (1.13)$$

où \mathbf{T}' est la matrice $\begin{bmatrix} T'_{ij} \end{bmatrix}$. La relation inverse s'écrit :

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}^t \mathbf{T}' \mathbf{A}. \quad (1.14)$$

1.2.3 Diagonalisation d'une matrice. Vecteurs propres et valeurs propres

On dit qu'un vecteur non nul \vec{u} est vecteur propre d'un tenseur \mathbf{T} si le vecteur $\mathbf{T}\vec{u}$ est colinéaire à \vec{u} . Tout vecteur colinéaire à un vecteur propre est également vecteur propre, et la direction d'un vecteur propre est, par définition, une *direction principale* du tenseur. Le vecteur \vec{u} doit donc vérifier l'équation :

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I})\vec{u} = \vec{0}, \quad (1.15)$$

où \mathbf{I} est le tenseur unité de rang deux, ou la matrice (3×3) unité. Cette relation s'écrit dans une base orthonormée (\vec{e}) :

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij})u_j = 0, \quad (1.16)$$

en introduisant le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (1.17)$$

Le vecteur \vec{u} étant différent du vecteur nul, ce système admet des solutions si :

$$\det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (1.18)$$

Cette équation possède généralement trois racines distinctes : $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$, appelées *valeurs propres* ou *valeurs principales*. À chaque valeur propre $\lambda^{(k)}$ correspond un vecteur propre $\vec{u}^{(k)}$ dont les composantes satisfont aux trois équations non indépendantes :

$$T_{ij}u_j^{(k)} = \lambda^{(k)}u_i^{(k)}. \quad (1.19)$$

Dans le cas de tenseurs symétriques, nous avons les deux propriétés fondamentales : 1) les valeurs propres sont réelles ; 2) les directions principales sont orthogonales. Dans la base des vecteurs propres supposés de plus normés ($u_i^{(k)} = \delta_{ik}$), la relation (1.19) s'écrit alors :

$$T'_{ij} \delta_{jk} = \lambda^{(k)} \delta_{ik}, \quad (1.20)$$

soit :

$$T'_{ij} = \lambda^{(j)} \delta_{ij}, \quad (1.21)$$

où T'_{ij} sont les nouvelles composantes dans la base des vecteurs propres. Le tableau T'_{ij} est donc diagonal :

$$\begin{bmatrix} T'_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

Dans la base principale, les éléments d'un tenseur de rang 2 s'écrivent suivant une matrice diagonale.

1.2.4 Inverse d'une matrice symétrique d'ordre 3

Les formules d'inversion d'une matrice symétrique 3×3 restent assez simples à

utiliser. Elles s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= [A_{ij}], & \mathbf{A}' &= \mathbf{A}^{-1} = [A'_{ij}] \\
 A'_{11} &= \frac{1}{\Delta} (A_{22}A_{33} - A_{23}^2), & A'_{22} &= \frac{1}{\Delta} (A_{11}A_{33} - A_{13}^2), \\
 A'_{33} &= \frac{1}{\Delta} (A_{11}A_{22} - A_{12}^2), & A'_{12} &= \frac{1}{\Delta} (A_{13}A_{23} - A_{12}A_{33}), \\
 A'_{13} &= \frac{1}{\Delta} (A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}), & A'_{23} &= \frac{1}{\Delta} (A_{12}A_{13} - A_{23}A_{11}), \\
 \Delta = \det \mathbf{A} &= A_{11}A_{22}A_{33} + 2A_{12}A_{13}A_{23} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{13}^2 - A_{33}A_{12}^2.
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

CHAPITRE 2

Contraintes

2.1 ÉTAT DES CONTRAINTES DANS UN SOLIDE

L'état des contraintes en un point M d'un solide soumis à un chargement mécanique (figure 2.1) permet de caractériser les actions mécaniques exercées sur la matière en ce point.

2.1.1 Tenseur des contraintes

En tout point M d'un milieu continu, l'état des contraintes est entièrement déterminé par la connaissance du *tenseur des contraintes*, noté $\boldsymbol{\sigma}(M)$. Ce tenseur est un tenseur de rang 2, symétrique, représenté par la matrice :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

avec

$$\sigma_{21} = \sigma_{12}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}, \quad \sigma_{32} = \sigma_{23}.$$

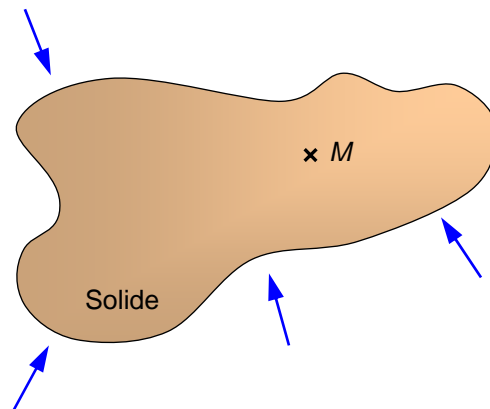


FIGURE 2.1. Solide soumis à un chargement mécanique.

2.1.2 Force exercée en un point sur un élément de surface

L'action mécanique exercée sur la surface unité (considérée comme infiniment petite) d'orientation \vec{n} (figure 2.2), par la matière située du côté de l'orientation positive définie par le vecteur \vec{n} (vecteur unitaire), est une force dont la résultante $\vec{t}(M, \vec{n})$, appelée *vecteur contrainte*, s'exprime par la relation :

$$\vec{t}(M, \vec{n}) = \vec{t} = \boldsymbol{\sigma}(M)\vec{n}. \quad (2.2)$$

La force \overrightarrow{dF} exercée sur l'élément dS de surface de même orientation s'exprime donc par :

$$\overrightarrow{dF} = \vec{t} \, dS. \quad (2.3)$$

L'expression (2.2) peut s'écrire sous forme matricielle en introduisant :

— la matrice des composantes du vecteur contrainte \vec{t} dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$[\vec{t}] = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

— la matrice des composantes du vecteur normale \vec{n} dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$[\vec{n}] = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

suivant :

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

D'où les composantes du vecteur \vec{t} dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\begin{aligned} t_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3, \\ t_2 &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3, \\ t_3 &= \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3, \end{aligned} \quad (2.7)$$

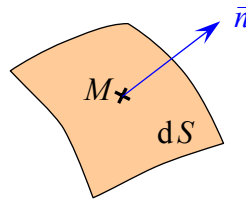


FIGURE 2.2. Élément de surface en un point M.

et le vecteur contrainte s'écrit :

$$\vec{t} = t_1 \vec{e}_1 + t_2 \vec{e}_2 + t_3 \vec{e}_3. \quad (2.8)$$

2.2 PROPRIÉTÉS DU TENSEUR DES CONTRAINTES

2.2.1 Signification physique des composantes du tenseur

Considérons un élément de surface dont la direction de la normale est confondue avec la direction de l'un des axes de référence (figure 2.3). Soit :

$$\vec{n} = \vec{e}_j \quad \text{avec } j = 1, 2, 3.$$

D'après la relation (2.7), les composantes du vecteur contrainte sont :

$$\begin{aligned} t_1 &= \sigma_{1j}, \\ t_2 &= \sigma_{2j}, \\ t_3 &= \sigma_{3j}, \\ \text{avec } \sigma_{ji} &= \sigma_{ij}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Les grandeurs σ_{1j} , σ_{2j} , σ_{3j} sont donc respectivement les composantes suivant les directions $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ du vecteur contrainte relatif à une surface de direction normale $\vec{n} = \vec{e}_j$ ($j = 1, 2$ ou 3). Par exemple, si $\vec{n} = \vec{e}_1$, les composantes sont respectivement σ_{11} , $\sigma_{21} = \sigma_{12}$, $\sigma_{31} = \sigma_{13}$, et le vecteur contrainte s'écrit :

$$\vec{t}(M, \vec{e}_1) = \sigma_{11} \vec{e}_1 + \sigma_{12} \vec{e}_2 + \sigma_{13} \vec{e}_3. \quad (2.10)$$

D'où le schéma de la figure 2.4.

Il est usuel de représenter les composantes des vecteurs contraintes exercées sur les faces d'un cube d'arêtes parallèles aux axes de référence. Deux notations sont utilisées et sont reportées sur la figure 2.5, suivant les directions considérées : $(1, 2, 3)$ ou (x, y, z) .

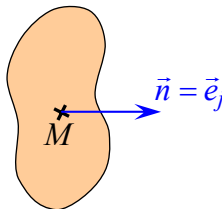


FIGURE 2.3. Élément de surface normal à la direction \vec{e}_j de l'un des axes de référence.

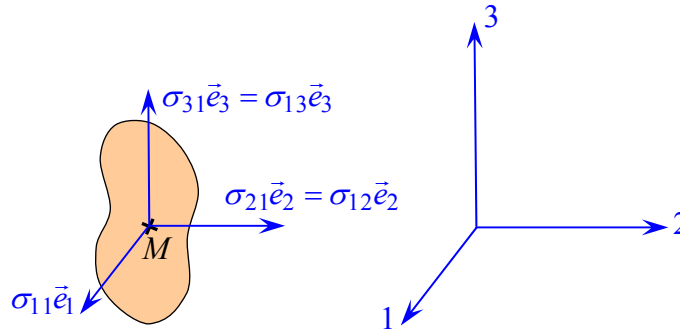


FIGURE 2.4. Composantes du vecteur contrainte sur une surface de direction normale \vec{e}_1 .

2.2.2 Composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte

Le vecteur contrainte \vec{t} est habituellement décomposé (figure 2.6) en :

- une *contrainte normale* \vec{t}_n de direction \vec{n} ,
- une *contrainte tangentielle* \vec{t}_t de direction contenue dans le plan vectoriel de l'élément de surface. Cette contrainte tangentielle est généralement appelée *contrainte de cisaillement*.

Le vecteur contrainte s'écrit alors :

$$\vec{t} = \vec{t}_n + \vec{t}_t. \quad (2.11)$$

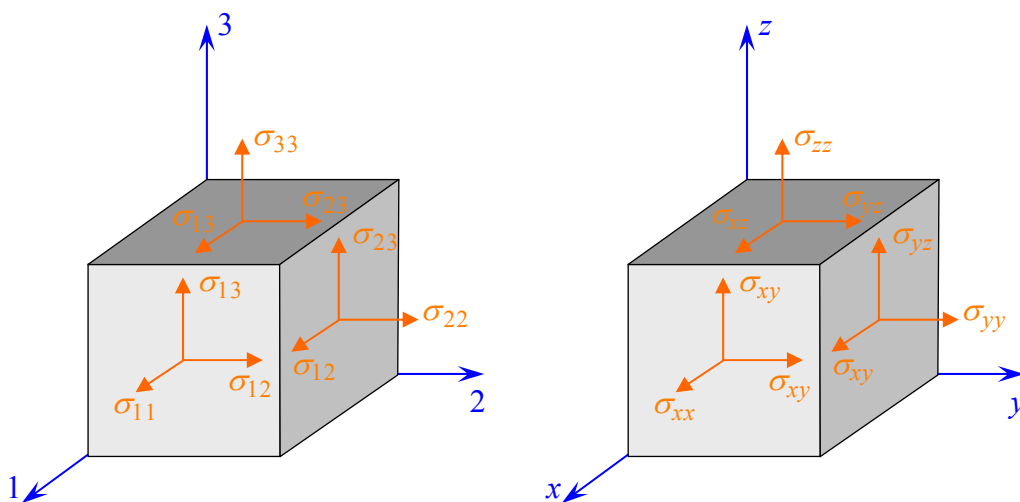


FIGURE 2.5. Composantes des vecteurs contraintes: (a) dans un système d'axes $(1, 2, 3)$; (b) dans un système d'axes (x, y, z) .

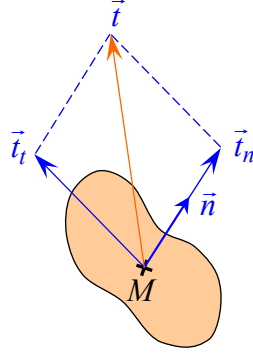


FIGURE 2.6. Composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte.

La contrainte normale s'exprime suivant :

$$\vec{t}_n = t_n \vec{n}, \text{ avec } t_n = \vec{n} \cdot \vec{t}, \quad (2.12)$$

où t_n est la composante normale du vecteur contrainte. Introduisant la relation (2.2), cette composante s'écrit suivant :

$$t_n = \vec{n} \cdot [\boldsymbol{\sigma}(M) \vec{n}]. \quad (2.13)$$

Cette relation peut être réécrite en utilisant la notation matricielle sous la forme :

$$t_n = \mathbf{n}^t \boldsymbol{\sigma}(M) \mathbf{n}, \quad (2.14)$$

en introduisant la matrice ligne $\mathbf{n}^t = [n_1 \ n_2 \ n_3]$ transposée de la matrice \mathbf{n} . Nous obtenons :

$$t_n = \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + \sigma_{33}n_3^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 + 2\sigma_{13}n_1n_3 + 2\sigma_{23}n_2n_3. \quad (2.15)$$

Si t_n est positif, on dit que le solide en M subit dans la direction \vec{n} une tension ou traction. Si t_n est négatif, le milieu subit une compression.

La contrainte de cisaillement peut être déterminée par la relation :

$$\vec{t}_t = \vec{n} \wedge \{[\boldsymbol{\sigma}(M) \vec{n}] \wedge \vec{n}\}. \quad (2.16)$$

2.2.3 Directions principales. Contraintes principales

Le tenseur des contraintes étant de rang 2, il existe au moins une base (chapitre 4), dite *base principale* du tenseur des contraintes, dans laquelle la matrice représentant ce tenseur est diagonale. Dans cette base principale, la matrice des contraintes s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{(3)} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Les trois composantes $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$, $\sigma^{(3)}$ sont les *contraintes principales*.

Si le tenseur des contraintes est exprimé dans une base non principale, les contraintes principales sont les racines de l'équation :

$$\det[\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}] = 0, \quad (2.18)$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, ($i, j = 1, 2, 3$).

Dans le cas où la surface au point M est normale à une direction principale $\vec{e}^{(i)}$, on trouve sans difficulté :

$$\begin{aligned} t_{ni} &= \sigma^{(i)}, \\ t_{ii} &= 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Pour une direction principale, la contrainte de cisaillement est nulle. Les directions principales sont donc telles que $\sigma(M)\vec{n}$ soit colinéaire à \vec{n} .

2.2.4 Changement de base

Les relations entre les contraintes σ_{ij} exprimées dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, et les contraintes σ'_{ij} exprimées dans la base $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ s'obtiennent dans le cas d'une rotation autour de la direction \vec{e}_3 en combinant les relations (4.6), (4.7) et (4.13). Soit :

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= \sigma_{11} \cos^2 \theta + 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta, \\ \sigma'_{12} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\ \sigma'_{13} &= \sigma_{13} \cos \theta + \sigma_{23} \sin \theta, \\ \sigma'_{21} &= \sigma'_{12}, \\ \sigma'_{22} &= \sigma_{11} \sin^2 \theta - 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta, \\ \sigma'_{23} &= -\sigma_{13} \sin \theta + \sigma_{23} \cos \theta, \\ \sigma'_{31} &= \sigma'_{13}, \quad \sigma'_{32} = \sigma'_{23}, \quad \sigma'_{33} = \sigma_{33}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dans le cas où la base initiale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la base principale $(\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}, \vec{e}^{(3)})$ du tenseur des contraintes, les relations précédentes se réduisent à :

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= \sigma^{(1)} \cos^2 \theta + \sigma^{(2)} \sin^2 \theta, \\ \sigma'_{12} &= (\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}) \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma'_{13} &= 0, \quad \sigma'_{21} = \sigma'_{12}, \\ \sigma'_{22} &= \sigma^{(1)} \sin^2 \theta + \sigma^{(2)} \cos^2 \theta, \\ \sigma'_{23} &= 0, \quad \sigma'_{31} = 0, \quad \sigma'_{32} = 0, \\ \sigma'_{33} &= \sigma^{(3)}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.3 ÉTATS PARTICULIERS DE CONTRAINTES

2.3.1 Tenseur sphérique et déviateur des contraintes

Il est toujours possible de décomposer le tenseur des contraintes $\sigma(M)$ en un point M , comme la somme de deux tenseurs : l'un $\sigma_S(M)$ appelé *tenseur sphérique*, et l'autre $\sigma_D(M)$ appelé *déviateur* ; soit :

$$\sigma(M) = \sigma_S(M) + \sigma_D(M). \quad (2.22)$$

Ces tenseurs sont définis de la manière suivante :

$$\sigma_S(M) = \frac{s}{3} \mathbf{I}, \quad (2.23)$$

où \mathbf{I} est le tenseur unitaire et s la trace de $\sigma(M)$: $s = \text{tr } \sigma(M)$. Le tenseur $\sigma_D(M)$ est un tenseur de trace nulle, ayant mêmes directions principales que $\sigma(M)$ et pour contraintes principales :

$$\sigma^{(1)} - \frac{s}{3}, \quad \sigma^{(2)} - \frac{s}{3}, \quad \sigma^{(3)} - \frac{s}{3}. \quad (2.24)$$

2.3.2 Compression ou tension sphérique

Un état de contraintes en un point est un état de compression ou tension sphérique, lorsque *le déviateur est le tenseur nul*. Soit :

$$\sigma(M) = \sigma_S(M) = \frac{s}{3} \mathbf{I}. \quad (2.25)$$

Cet état est donc caractérisé par les propriétés suivantes :

- le vecteur contrainte $\vec{t}(M, \vec{n})$ est colinéaire à \vec{n} ;
- les contraintes principales sont égales :

$$\sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} = \sigma^{(3)} = \frac{s}{3}, \quad (2.26)$$

- quel que soit \vec{n} , nous avons :

$$t_n = \frac{s}{3}, \quad t_t = 0. \quad (2.27)$$

2.3.3 Traction ou compression simple dans une direction

Un état de contraintes est un état de traction ou compression simple dans une direction si, et seulement si, deux des contraintes principales sont nulles.

Par exemple : $\sigma^{(2)} = \sigma^{(3)} = 0$. On a alors un état de contrainte uniaxiale dans la direction $\vec{e}^{(1)}$. Si $\sigma^{(1)} > 0$, on a une traction simple. Si $\sigma^{(1)} < 0$, on a une compression simple. On trouve aisément que la matrice des contraintes n'est pas modifiée par rotation autour de la direction $\vec{e}^{(1)}$.

Comme autres propriétés, nous avons :

- le vecteur $\vec{t}(M, \vec{n})$ est toujours colinéaire à $\vec{e}^{(1)}$;
- si \vec{n} est orthogonal à $\vec{e}^{(1)}$, alors : $\vec{t}(M, \vec{n}) = \vec{0}$.

2.3.4 Cisaillement simple

En un point M , un état de contraintes est un état de cisaillement simple (ou pur), lorsque l'une des contraintes principales est nulle et les deux autres opposées. Le déterminant et la trace de la matrice des contraintes sont nuls.

Par exemple :

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)} &= \tau, \\ \sigma^{(2)} &= -\tau, \\ \sigma^{(3)} &= 0.\end{aligned}\tag{2.28}$$

La matrice des contraintes s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\tag{2.29}$$

Cherchons les contraintes dans le plan principal, c'est-à-dire les contraintes exercées sur un élément de surface de direction \vec{n} contenue dans le plan principal $(\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)})$ (figure 2.7). Soit θ l'angle que fait la normale \vec{n} avec la direction $\vec{e}^{(1)}$: $\vec{n} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$. Le vecteur contrainte en M dans la direction \vec{n} est donné par l'expression :

$$[\vec{t}(M, \vec{n})] = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit :

$$\vec{t}(M, \vec{n}) = (\tau \cos \theta, -\tau \sin \theta, 0),\tag{2.30}$$

où les composantes sont exprimées dans la base principale $(\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}, \vec{e}^{(3)})$.

Cherchons maintenant les composantes du vecteur contrainte dans la base $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{e}^{(3)})$ (figure 2.7) obtenue par rotation θ autour de la direction $\vec{e}^{(3)}$. Elles se déterminent par l'expression :

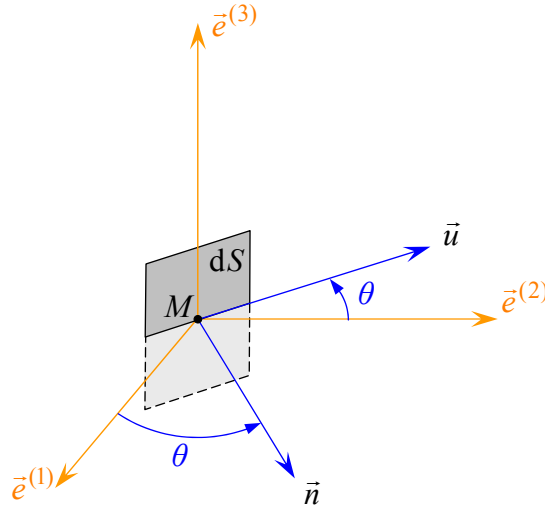


FIGURE 2.7. Éléments de surface orthogonaux au plan principal.

$$[\vec{t}(M, \vec{n})] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau \cos \theta \\ -\tau \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ -2\tau \sin \theta \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Les composantes dans la base $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{e}^{(3)})$ s'écrivent donc :

$$\vec{t}(M, \vec{n}) = (\tau \cos 2\theta, -\tau \sin 2\theta, 0). \quad (2.32)$$

La composante normale est :

$$t_n = \tau \cos 2\theta, \quad (2.33)$$

et la composante tangentielle :

$$t_t = -\tau \sin 2\theta. \quad (2.34)$$

Ces expressions montrent les propriétés suivantes :

1. Pour :

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4} + \pi \quad \begin{cases} t_n = 0, \\ t_t = -\tau, \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\theta = 3\frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad 3\frac{\pi}{4} + \pi \quad \begin{cases} t_n = 0, \\ t_t = \tau, \end{cases} \quad (2.36)$$

résultats schématisés sur la figure 2.8a.

2. Pour :

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad \pi \quad \begin{cases} t_n = \tau, \\ t_t = 0, \end{cases} \quad (2.37)$$

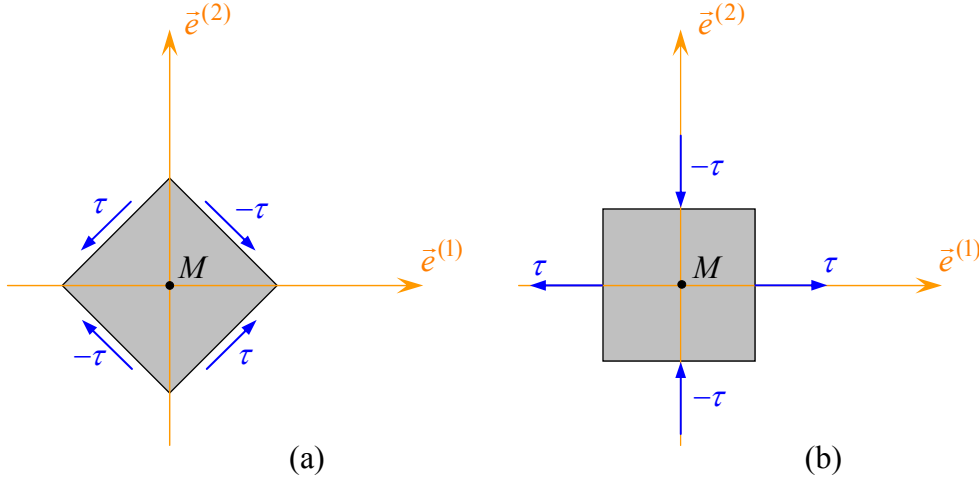


FIGURE 2.8. États des contraintes dans le cas d'un cisaillement simple.

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} + \pi \quad \begin{cases} t_n = -\tau, \\ t_t = 0, \end{cases} \quad (2.38)$$

résultats schématisés sur la figure 2.8b.

Enfin, on trouve sans difficulté que la matrice des contraintes s'écrit dans une base obtenue à partir de la base principale par rotation θ de la direction $\vec{e}^{(3)}$ normale au plan de cisaillement (base $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{e}^{(3)})$), suivant :

$$\begin{bmatrix} \tau \cos 2\theta & -\tau \sin 2\theta & 0 \\ -\tau \sin 2\theta & -\tau \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi$ (figure 2.8a), la matrice s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

2.3.5 État de contraintes planes

Un état est un état de contraintes planes en un point si, et seulement si, l'une des contraintes principales est nulle. Par exemple : $\sigma^{(3)} = 0$. La matrice des contraintes s'écrit alors dans la base principale suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Dans une base obtenue à partir de la base principale par rotation autour de la direction $\vec{e}^{(3)}$, on trouve que la matrice des contraintes s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Comme propriétés, nous avons :

- si \vec{n} est colinéaire à $\vec{e}^{(3)}$, $\vec{t}(M, \vec{n}) = \vec{0}$,
- tout vecteur contrainte est contenu dans le plan vectoriel $(\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)})$.

2.3.6 État de contraintes quelconque

Etant donné le caractère linéaire des tenseurs, un état quelconque de contraintes en un point M peut toujours être considéré comme la superposition (ou plus généralement comme une combinaison linéaire) d'états de contraintes particuliers.

Par exemple :

- un état quelconque peut toujours être considéré comme la superposition de trois tractions (ou compressions) simples suivant les directions principales;
- un état de cisaillement simple peut être considéré comme la superposition d'une traction et d'une compression de mêmes intensités (paragraphe 2.3.4).

2.4 NOTATION MATRICIELLE DE L'INGÉNIEUR

2.4.1 Introduction de la notation

La symétrie du tenseur des contraintes ramène à 6 le nombre de composantes nécessaires pour définir ce tenseur. Pour cette raison, l'ingénieur utilise une notation qui consiste à remplacer le tableau matriciel des 9 composantes du tenseur par une matrice colonne à 6 composantes, suivant l'une des notations :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Cette notation permet de condenser l'écriture des relations d'élasticité (chapitre 4).

Toutefois, la détermination du vecteur contrainte nécessite de revenir à la notion matricielle 3×3 .

2.4.2 Changement de base

Avec cette nouvelle notation, les relations entre les contraintes σ_i exprimées dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et les contraintes σ'_i exprimées dans la base $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$, obtenue par rotation autour de la direction \vec{e}_3 , peuvent s'écrire sous une forme matricielle déduite des expressions (2.20), suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Soit, sous forme condensée :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.45)$$

où \mathbf{T}_σ est la matrice de changement de base des contraintes exprimée par :

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

La relation de changement de base inverse est obtenue en inversant l'expression (2.45), soit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \boldsymbol{\sigma}'. \quad (2.47)$$

La matrice inverse \mathbf{T}_σ^{-1} est en fait facilement exprimée à partir de \mathbf{T}_σ en changeant θ en $-\theta$ puisque le changement de base inverse correspond à une rotation de $-\theta$ autour de la direction \vec{e}_3 . Soit :

$$\mathbf{T}_\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

EXERCICES

2.1 Un état de contraintes en un point M d'une structure est défini dans les axes $(Mxyz)$ par :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} 30 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

Déterminer les valeurs des contraintes principales en M et les directions principales des contraintes.

Exprimer le vecteur contrainte $\vec{t}(M, \vec{n})$ qui s'exerce au point M sur la surface unité d'orientation \vec{n} de composantes (n_x, n_y, n_z) par rapport aux axes $(Mxyz)$.

Étudier le cas où la surface unité est orthogonale à \vec{Mx} ; orthogonale à \vec{My} ; orthogonale à \vec{Mz} .

Trouver la valeur maximale de la contrainte tangentielle et les directions des surfaces correspondantes.

2.2 Exprimer les matrices \mathbf{T}_σ de changement de base des contraintes, dans le cas où la direction \vec{e}_3 est inversée : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rightarrow (\vec{e}_1, \vec{e}_2, -\vec{e}_3)$; puis dans le cas où la direction \vec{e}_2 est inversée : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rightarrow (\vec{e}_1, -\vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

2.3 Dans le cas d'un état de contraintes planes dans le plan $(1, 2)$, expliciter la matrice 3×3 de changement de base, dans le cas d'une rotation θ autour de la direction 3.

CHAPITRE 3

Déformations

3.1 ÉTAT DES DÉFORMATIONS EN UN POINT

3.1.1 Déformations en un point

Soit un solide (S) déformable (figure 3.1). Dans son état non déformé, la position d'un point M quelconque du solide (S) est définie, dans un repère $(O/\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, par le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3. \quad (3.1)$$

Sous l'effet d'actions mécaniques extérieures, le solide se déforme, et les points du solide se déplacent : le point M vient en M' . La position du point M dans l'état déformé est définie par :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'}. \quad (3.2)$$

Le vecteur déplacement $\overrightarrow{MM'}$ est une fonction du point M , généralement notée $\vec{u}(M)$. Ce déplacement varie d'une manière continue à l'intérieur du solide.

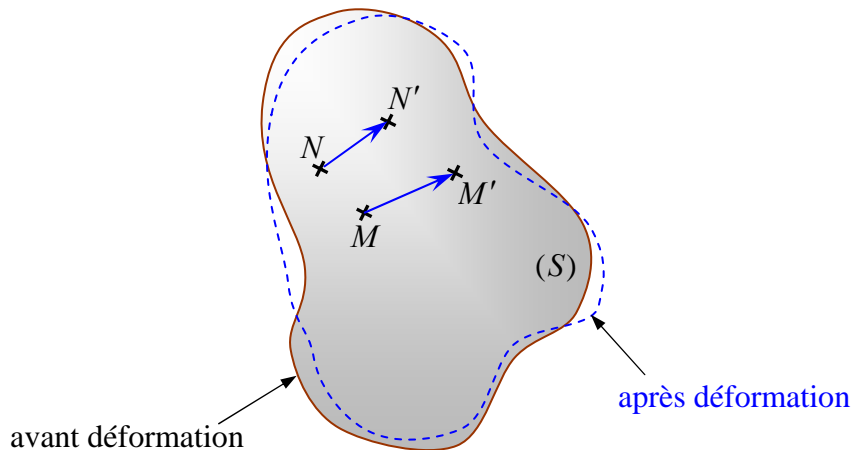


FIGURE 3.1. Solide déformable.

Pour un autre point N du solide, nous avons de même :

$$\overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NN'} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{NN'} = \vec{u}(N), \quad (3.3)$$

où N et N' sont les positions respectives dans les états non déformé et déformé.

La position relative entre les points N et M , après déformation, s'exprime suivant :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} + \vec{u}(N) - \vec{u}(M),$$

soit :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} + \vec{u}(N) - \vec{u}(M). \quad (3.4)$$

Si les points M et N sont infiniment voisins, nous avons :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OM}.$$

Le vecteur $d\overrightarrow{OM}$ représente la variation du vecteur position \overrightarrow{OM} , lorsque l'on passe du point M au point N . De même :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = d\overrightarrow{OM'}.$$

L'expression (3.4) s'écrit alors :

$$d\overrightarrow{OM'} = d\overrightarrow{OM} + d\vec{u}(M). \quad (3.5)$$

Les modules $\|d\overrightarrow{OM}\|$ et $\|d\overrightarrow{OM'}\|$ représentent les distances entre les points M et N infiniment voisins, respectivement dans l'état non déformé et dans l'état déformé. Nous pouvons écrire :

$$\|d\overrightarrow{OM'}\|^2 = (d\overrightarrow{OM'})^2 = (d\overrightarrow{OM})^2 + 2d\overrightarrow{OM} \cdot d\vec{u}(M) + (d\vec{u}(M))^2.$$

La variation entre le carré des distances des points M et N de l'état non déformé à l'état déformé s'écrit donc :

$$\|d\overrightarrow{OM'}\|^2 - \|d\overrightarrow{OM}\|^2 = 2d\overrightarrow{OM} \cdot d\vec{u}(M) + (d\vec{u}(M))^2. \quad (3.6)$$

Le vecteur $d\overrightarrow{OM}$ s'exprime dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par la relation :

$$d\overrightarrow{OM} = \vec{e}_1 dx_1 + \vec{e}_2 dx_2 + \vec{e}_3 dx_3,$$

ou

$$d\overrightarrow{OM} = \vec{e}_i dx_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

en introduisant la convention de sommation, dans laquelle une répétition d'indice implique une sommation. Le vecteur déplacement $\vec{u}(M)$ s'écrit de la même façon :

$$\vec{u}(M) = \vec{e}_j u_j,$$

où u_j sont les composantes du vecteur $\vec{u}(M)$. D'où :

$$d\vec{u}(M) = \vec{e}_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx_j \quad j, k = 1, 2, 3, \quad (3.7)$$

avec une double sommation sur les indices j et k .

L'expression (3.6) s'écrit donc :

$$(\overrightarrow{dOM'})^2 - (\overrightarrow{dOM})^2 = 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i dx_j.$$

La permutation des indices i et j ne change pas la valeur de la somme, puisque :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_j dx_i.$$

D'où l'écriture de l'expression précédente sous la forme :

$$(\overrightarrow{dOM'})^2 - (\overrightarrow{dOM})^2 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j. \quad (3.8)$$

3.1.2 Tenseur des déformations

La relation (3.8) peut se mettre sous la forme :

$$(\overrightarrow{dOM'})^2 - (\overrightarrow{dOM})^2 = 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j, \quad (3.9)$$

en posant :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (3.10)$$

Les 9 quantités ε_{ij} constituent les composantes du *tenseur des déformations* dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Dans le cadre d'une théorie linéarisée, dite des *petites déformations*, l'infiniment petit du deuxième ordre $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ est négligé par

rapport à ceux du premier ordre. Les composantes du tenseur des déformations se réduisent alors à :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.11)$$

Le tenseur des déformations est un tenseur de rang 2, symétrique :

$$\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}. \quad (3.12)$$

Il s'écrit sous forme matricielle suivant :

$$\mathbf{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), & \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.1.3 Interprétation des termes du tenseur des déformations

Considérons au point M (figure 3.2) deux éléments infinitésimaux MN_1 et MN_2 , dans l'état non déformé, parallèles respectivement aux axes Ox_1 et Ox_2 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN_1} &= \vec{e}_1 dx_1, \\ \overrightarrow{MN_2} &= \vec{e}_2 dx_2. \end{aligned}$$

Après déformation, les points M , N_1 et N_2 sont respectivement en M' , N'_1 et N'_2 .

Nous avons :

$$\overrightarrow{MN'_1} = \vec{u}(M) + d_1 \vec{u}(M),$$

avec d'après (3.7) :

$$d_1 \vec{u}(M) = \vec{e}_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \vec{e}_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1. \quad (3.15)$$

La grandeur $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 = \varepsilon_{11} dx_1$ représente donc l'allongement de MN_1 suivant la direction \vec{e}_1 . Il en résulte que ε_{11} représente *l'allongement unitaire* au point M dans la direction \vec{e}_1 .

De même :

$$\overrightarrow{MN'_2} = \vec{u}(M) + d_2 \vec{u}(M),$$

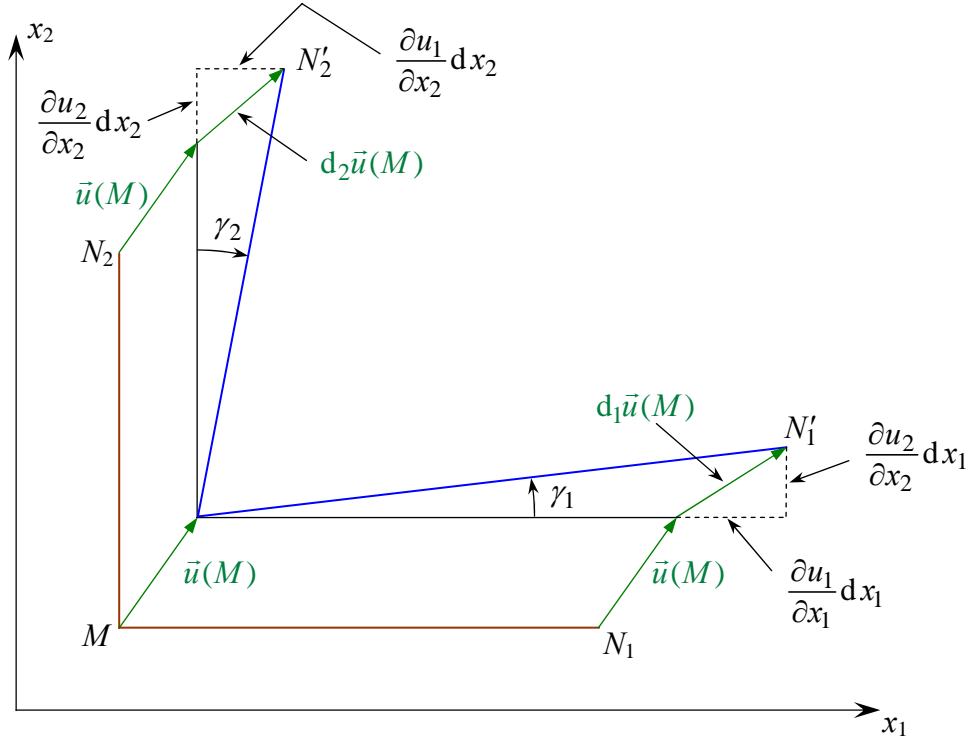


FIGURE 3.2. Déformations en un point.

avec :

$$d_2 \vec{u}(M) = \vec{e}_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \vec{e}_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2. \quad (3.16)$$

La grandeur $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{22}$ représente donc l'allongement unitaire au point M dans la direction \vec{e}_2 .

L'angle γ_1 entre les directions $\overrightarrow{MN_1}$ et $\overrightarrow{MN'_1}$ avant et après déformation est tel que :

$$\tan \gamma_1 = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1}{dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}} \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1},$$

puisque les déformations sont petites $\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \ll 1 \right)$. Soit, en définitive :

$$\gamma_1 \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1}.$$

De même, l'angle γ_2 entre les directions $\overrightarrow{MN_2}$ et $\overrightarrow{MN'_2}$ est :

$$\gamma_2 \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

On en déduit que l'angle, primitivement égal à $\pi/2$ que faisaient les directions $\overrightarrow{MN_1}$ et $\overrightarrow{MN_2}$ au point M avant déformation, est diminué après déformation de l'angle $\gamma_{12} = \gamma_1 + \gamma_2$, avec :

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}. \quad (3.17)$$

La composante ε_{12} du tenseur des déformations représente donc la moitié de la déformation angulaire au point M entre les directions $\overrightarrow{MN_1}$ et $\overrightarrow{MN_2}$. Cette déformation angulaire γ_{12} est appelée *déformation en cisaillement* au point M entre les directions \vec{e}_1 et \vec{e}_2 .

De la même manière :

- la composante $\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ représente l'allongement unitaire au point M dans la direction \vec{e}_3 ;
- la composante $\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)$ représente la moitié de la déformation en cisaillement γ_{13} entre les directions \vec{e}_1 et \vec{e}_3 ;
- la composante $\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)$ représente la moitié de la déformation en cisaillement γ_{23} entre les directions \vec{e}_2 et \vec{e}_3 .

3.1.4 Conditions de compatibilité

Le champ des déplacements correspondant à un état de déformation donné est obtenu par intégration des équations (3.14). Soit au total six équations pour déterminer les trois composantes (u_1, u_2, u_3) du déplacement. Pour que la solution soit unique, les composantes du tenseur des déformations doivent vérifier les six relations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial^2 x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial^2 x_i^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \right), \quad i \neq j \neq k, \\ \text{avec } i, j, k &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ces expressions constituent les six *relations de compatibilité*.

3.2 DÉFORMATION EN UN POINT

3.2.1 Allongement unitaire

Soit un élément quelconque MN du solide de longueur dl et de direction définie par le vecteur directeur unitaire \vec{u}_α du bipoint (M, N) . Nous avons :

$$\overrightarrow{MN} = \vec{u}_\alpha dl.$$

Les composantes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ du vecteur \vec{u}_α dans la base $(\vec{e}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont les cosinus directeurs définissant la direction du segment MN . Les composantes du vecteur \overrightarrow{MN} dans la base (\vec{e}) sont :

$$\overrightarrow{MN} \begin{cases} dx_1 = \alpha_1 dl, \\ dx_2 = \alpha_2 dl, \\ dx_3 = \alpha_3 dl. \end{cases} \quad (3.19)$$

Cherchons l'allongement unitaire ε_α de MN , lors de la déformation (allongement unitaire dans la direction $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$). Nous avons après déformation :

$$M'N' = dl + \varepsilon_\alpha dl.$$

L'expression (3.9) s'écrit :

$$\left[(1 + \varepsilon_\alpha)^2 - 1 \right] (dl)^2 = 2\varepsilon_{ij} \alpha_i \alpha_j (dl)^2.$$

Soit en négligeant ε_α^2 :

$$\varepsilon_\alpha = \alpha_i \alpha_j \varepsilon_{ij}. \quad (3.20)$$

Développée, cette relation s'écrit :

$$\varepsilon_\alpha = \alpha_1^2 \varepsilon_{11} + \alpha_2^2 \varepsilon_{22} + \alpha_3^2 \varepsilon_{33} + 2\alpha_1 \alpha_2 \varepsilon_{12} + 2\alpha_1 \alpha_3 \varepsilon_{13} + 2\alpha_2 \alpha_3 \varepsilon_{23}. \quad (3.21)$$

L'expression (3.21) a la même forme que l'expression (2.15) qui permet de calculer la composante normale t_n de la contrainte. On en déduit donc, pour l'allongement unitaire, des expressions analogues aux expressions (2.13) et (2.14). Soit :

$$\varepsilon_\alpha = \vec{u}_\alpha \cdot [\mathbf{\varepsilon}(M) \vec{u}_\alpha], \quad (3.22)$$

ou sous forme matricielle :

$$\varepsilon_\alpha = \mathbf{u}_\alpha^t \mathbf{\varepsilon}(M) \mathbf{u}_\alpha. \quad (3.23)$$

3.2.2 Déformation en cisaillement

La déformation en cisaillement permet de calculer la variation de l'angle $\theta_{\alpha\beta}$

entre les deux directions \vec{u}_α et \vec{u}_β , dans l'état non déformé, qui deviennent $\vec{u}_{\alpha'}$ et $\vec{u}_{\beta'}$, après déformation (figure 3.3). Après déformation, l'angle entre les deux directions $\vec{u}_{\alpha'}$ et $\vec{u}_{\beta'}$ est $\theta_{\alpha\beta} + d\theta_{\alpha\beta}$, où $d\theta_{\alpha\beta}$ est la déformation en cisaillement. On montre que l'on a sous forme matricielle :

$$d(\cos \theta_{\alpha\beta}) = d(\mathbf{u}_\alpha^t \mathbf{u}_\beta) = 2\mathbf{u}_\alpha^t \boldsymbol{\varepsilon}(M) \mathbf{u}_\beta - (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) \mathbf{u}_\alpha^t \mathbf{u}_\beta, \quad (3.24)$$

expression qui permet de déterminer $d\theta_{\alpha\beta}$. Le développement de cette expression conduit à :

$$\begin{aligned} d(\cos \theta_{\alpha\beta}) = & 2(\alpha_1\beta_1\varepsilon_{11} + \alpha_2\beta_2\varepsilon_{22} + \alpha_3\beta_3\varepsilon_{33}) + 2(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\varepsilon_{12} \\ & + 2(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2)\varepsilon_{23} + 2(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3)\varepsilon_{13} \\ & - (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta)(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3), \end{aligned} \quad (3.25)$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ sont les composantes des directions \vec{u}_α et \vec{u}_β , et ε_α et ε_β sont les allongements unitaires dans ces mêmes directions.

La relation (3.24) peut être réécrite suivant :

$$-\sin \theta_{\alpha\beta} d\theta_{\alpha\beta} = 2\mathbf{u}_\alpha^t \boldsymbol{\varepsilon}(M) \mathbf{u}_\beta - (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) \cos \theta_{\alpha\beta},$$

puisque :

$$\mathbf{u}_\alpha^t \mathbf{u}_\beta = \cos \theta_{\alpha\beta}.$$

Finalement, la déformation en cisaillement s'exprime par :

$$d\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{\tan \theta_{\alpha\beta}} (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) - \frac{2}{\sin \theta_{\alpha\beta}} \mathbf{u}_\alpha^t \boldsymbol{\varepsilon}(M) \mathbf{u}_\beta. \quad (3.26)$$

Dans le cas où les deux directions α et β sont orthogonales, nous avons :

$$\vec{u}_\alpha \cdot \vec{u}_\beta = \mathbf{u}_\alpha^t \mathbf{u}_\beta = \cos \theta_{\alpha\beta} = 0.$$

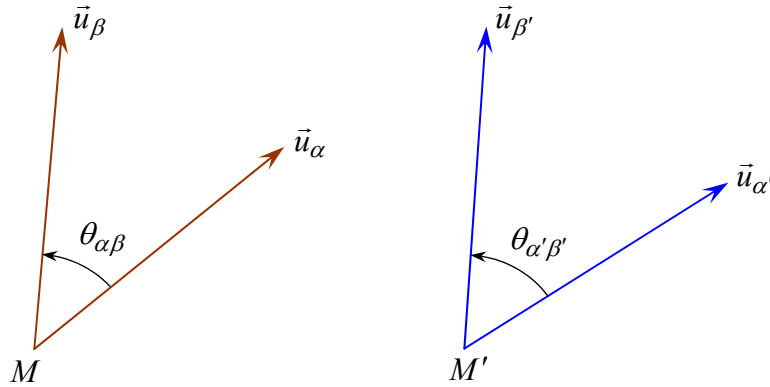


FIGURE 3.3. Déformation en cisaillement.

En notant alors les deux directions \vec{u}_α et \vec{u}_β par \vec{u}_1 et \vec{u}_2 , l'expression (3.24) s'écrit :

$$d(\cos \theta_{12}) = d(\mathbf{u}_1^t \mathbf{u}_2) = 2\mathbf{u}_1^t \boldsymbol{\varepsilon}(M) \mathbf{u}_2, \quad (3.27)$$

ou

$$d(\cos \theta_{12}) = d(\mathbf{u}_2^t \mathbf{u}_1) = 2\mathbf{u}_2^t \boldsymbol{\varepsilon}(M) \mathbf{u}_1.$$

La déformation en cisaillement est alors donnée par :

$$d\theta_{12} = -2\mathbf{u}_1^t \boldsymbol{\varepsilon}(M) \mathbf{u}_2 = -2\mathbf{u}_2^t \boldsymbol{\varepsilon}(M) \mathbf{u}_1. \quad (3.28)$$

3.2.3 Tenseur des déformations dans les directions principales

Rapporté à ses directions principales, le tenseur des déformations s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

où $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ et $\varepsilon^{(3)}$ sont les *déformations principales*.

L'allongement unitaire dans la direction $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, rapporté aux directions principales $(\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}, \vec{e}^{(3)})$ s'exprime, d'après (3.21), par :

$$\varepsilon_\alpha = \alpha_1^2 \varepsilon^{(1)} + \alpha_2^2 \varepsilon^{(2)} + \alpha_3^2 \varepsilon^{(3)}. \quad (3.30)$$

Les allongements unitaires suivant les trois directions principales sont :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^{(1)}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon^{(2)}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon^{(3)}. \quad (3.31)$$

La déformation en cisaillement s'écrit d'après (3.25) :

$$\begin{aligned} d(\cos \theta_{\alpha\beta}) &= 2(\alpha_1 \beta_1 \varepsilon^{(1)} + \alpha_2 \beta_2 \varepsilon^{(2)} + \alpha_3 \beta_3 \varepsilon^{(3)}) \\ &\quad - (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta)(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Si les deux directions α et β sont orthogonales, l'expression précédente se simplifie suivant :

$$d(\cos \theta_{\alpha\beta}) = 2(\alpha_1 \beta_1 \varepsilon^{(1)} + \alpha_2 \beta_2 \varepsilon^{(2)} + \alpha_3 \beta_3 \varepsilon^{(3)}). \quad (3.33)$$

Si, de plus, ces deux directions coïncident avec les directions principales, nous avons : $d(\cos \theta_{\alpha\beta}) = 0$. Il n'y a pas de déformation en cisaillement.

Enfin, dans le cas où la direction \vec{u}_β est confondue avec une direction principale (par exemple $\vec{u}_\beta = \vec{u}^{(3)}$), la relation (3.24) peut être réécrite en tenant

compte de :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) \mathbf{u}_\beta = \boldsymbol{\varepsilon}(M) \mathbf{u}^{(3)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} \mathbf{u}^{(3)}.$$

Soit, alors :

$$d(\cos \theta_{\alpha(3)}) = (\boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} - \varepsilon_\alpha) \mathbf{u}_\alpha^t \mathbf{u}^{(3)}. \quad (3.34)$$

En particulier, si la direction $\bar{\mathbf{u}}_\alpha$ est orthogonale à la direction principale $\bar{\mathbf{u}}^{(3)}$, nous avons $\mathbf{u}_\alpha^t \mathbf{u}^{(3)} = 0$, et donc $d(\cos \theta_{\alpha(3)}) = 0$. Dans le plan orthogonal à une direction propre, toutes les directions varient lors de la déformation en restant dans ce plan.

3.2.4 Changement de base

Le tenseur des déformations ayant un tableau des composantes semblable à celui des contraintes, les relations de changement de base s'expriment sous la même forme que dans le cas du tenseur des contraintes. Pour une rotation autour de la direction $\vec{\mathbf{e}}_3$, les relations sont transposées des expressions (5.20), soit :

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{11} &= \varepsilon_{11} \cos^2 \theta + 2\varepsilon_{12} \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{22} \sin^2 \theta, \\ \varepsilon'_{12} &= (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\ \varepsilon'_{13} &= \varepsilon_{13} \cos \theta + \varepsilon_{23} \sin \theta, \\ \varepsilon'_{21} &= \varepsilon'_{12}, \\ \varepsilon'_{22} &= \varepsilon_{11} \sin^2 \theta - 2\varepsilon_{12} \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{22} \cos^2 \theta, \\ \varepsilon'_{23} &= -\varepsilon_{13} \sin \theta + \varepsilon_{23} \cos \theta, \\ \varepsilon'_{31} &= \varepsilon'_{13}, \quad \varepsilon'_{32} = \varepsilon'_{23}, \quad \varepsilon'_{33} = \varepsilon_{33}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Dans le cas où la base initiale est la base principale, les relations précédentes se réduisent à :

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{11} &= \varepsilon^{(1)} \cos^2 \theta + \varepsilon^{(2)} \sin^2 \theta, \\ \varepsilon'_{12} &= (\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}) \sin \theta \cos \theta, \\ \varepsilon'_{13} &= 0, \\ \varepsilon'_{21} &= \varepsilon'_{12}, \\ \varepsilon'_{22} &= \varepsilon^{(1)} \sin^2 \theta + \varepsilon^{(2)} \cos^2 \theta, \\ \varepsilon'_{23} &= 0, \quad \varepsilon'_{31} = 0, \quad \varepsilon'_{32} = 0, \\ \varepsilon'_{33} &= \varepsilon^{(3)}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.3 ÉTATS PARTICULIERS DE DÉFORMATIONS

3.3.1 Tenseur sphérique et déviateur des déformations

Comme dans le cas du tenseur des contraintes, il est possible de décomposer le tenseur des déformations en un tenseur sphérique et un déviateur, suivant :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \boldsymbol{\varepsilon}_S(M) + \boldsymbol{\varepsilon}_D(M), \quad (3.37)$$

avec

$$\boldsymbol{\varepsilon}_S(M) = \frac{e}{3} \mathbf{I} \quad \text{et} \quad e = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(M). \quad (3.38)$$

Le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}_D(M)$ est un tenseur de trace nulle, ayant mêmes directions principales que $\boldsymbol{\varepsilon}(M)$ et pour déformations principales :

$$\varepsilon^{(1)} - \frac{e}{3}, \quad \varepsilon^{(2)} - \frac{e}{3}, \quad \varepsilon^{(3)} - \frac{e}{3}. \quad (3.39)$$

La déformation résultant de $\boldsymbol{\varepsilon}_D(M)$ est de dilatation cubique nulle : la déformation se fait sans changement de volume.

3.3.2 États particuliers

1. Un état de déformation en un point est un état de *dilatation uniforme* si, et seulement si, le déviateur est nul. Les allongements unitaires sont égaux quelle que soit la direction.
2. Un état de déformation est uniaxial (extension simple) si, et seulement si, deux des déformations principales sont nulles.
3. Un état de déformation en un point est un état de glissement simple lorsque l'une des déformations principales est nulle et les deux autres opposées.
4. Un état en un point est un état de déformations planes si, et seulement si, l'une des déformations principales est nulle.
5. Un état de déformation quelconque peut toujours être considéré comme la superposition d'états de déformations particuliers.

3.4 NOTATION MATRICIELLE DE L'INGÉNIEUR

3.4.1 Introduction de la notation

Comme pour le tenseur des contraintes, la symétrie ramène à 6 le nombre de composantes nécessaires pour définir le tenseur des déformations. Pour cette raison, l'ingénieur utilise une notation qui consiste à remplacer le tableau matriciel

des 9 composantes du tenseur par une matrice colonne à 6 composantes et à substituer aux composantes ε_{12} , ε_{13} , ε_{23} les déformations en cisaillement γ_{12} , γ_{13} , γ_{23} . L'ingénieur utilise donc l'une des notations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

3.4.2 Changement de base

Avec cette nouvelle notation, les relations entre les déformations ε_i exprimées dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et les déformations ε'_i exprimées dans la base $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}_3)$, obtenue par rotation autour de la direction \vec{e}_3 , peuvent s'écrire sous une forme matricielle déduite des expressions (3.35), suivant :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Soit, sous forme condensée :

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{T}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.42)$$

où \mathbf{T}_ε est la matrice de changement de base des déformations :

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

La relation de changement de base inverse est obtenue en inversant l'expression (3.42), soit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}_{\varepsilon}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}', \quad (3.44)$$

où la matrice inverse $\mathbf{T}_{\varepsilon}^{-1}$ est obtenue à partir de la matrice \mathbf{T}_{ε} en changeant θ en $-\theta$:

$$\mathbf{T}_{\varepsilon}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

La différence entre les expressions de changement de base des contraintes et déformations résulte de l'introduction d'un facteur 2, lors de la contraction des indices pour ε_4 , ε_5 et ε_6 . En fonction des résultats obtenus, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{T}_{\varepsilon} = (\mathbf{T}_{\sigma}^{-1})^t \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_{\varepsilon}^{-1} = \mathbf{T}_{\sigma}^t. \quad (3.46)$$

Ces relations ne sont pas générales. Elles ne sont applicables que dans le cas d'une rotation autour de la direction 3 de la base initiale.

EXERCICES

3.1 On considère une plaque de surface limite (S), sur laquelle est dessinée un quadrillage de côté l (figure 3.4) Cette plaque est soumise à un état de déformation, tel que :

1. la direction orthogonale à la surface (S) reste orthogonale à la surface au cours de la déformation; l'allongement unitaire suivant l'épaisseur est ε_3 ;

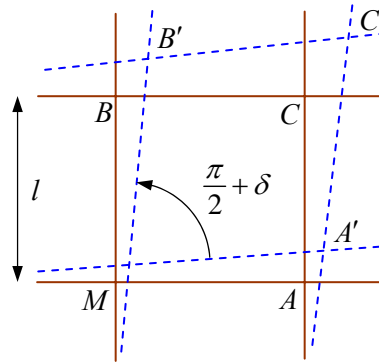


FIGURE 3.4. Exercice 3.1.

2. après déformation, le quadrillage $MACB$ au point M a subi une déformation $M'A'C'B'$ définie par :

$$\delta MA = MA' - MA = \delta l_1,$$

$$\delta MB = MB' - MB = \delta l_2,$$

les directions $\overrightarrow{MB'}$ et $\overrightarrow{MA'}$ font un angle de $\frac{\pi}{2} + \delta\theta$.

- 3.1.1 Déterminer le tenseur des déformations au point M dans le cas où :

$$l = 1 \text{ cm}, \quad \delta l_1 = 3 \text{ } \mu\text{m}, \quad \delta l_2 = 1 \text{ } \mu\text{m},$$

$$\delta\theta = 5 \times 10^{-4} \text{ rad}, \quad \varepsilon_3 = -3 \times 10^{-4}.$$

- 3.1.2 Montrer que la direction orthogonale à la plaque est direction principale. Déterminer les déformations principales et les directions principales.

- 3.1.3 Déterminer dans le plan de la plaque : les directions d'allongement nul ; les directions pour lesquelles l'allongement est extrémal ; les directions pour lesquelles il n'y a pas de déformation angulaire.

- 3.1.4 On considère maintenant les directions $\overrightarrow{Mx'_1}$ et $\overrightarrow{My'_1}$ du plan de la plaque, obtenues à partir des directions \overrightarrow{MA} et \overrightarrow{MB} par une rotation d'angle $\theta = 20^\circ$.

Déterminer : la déformation dans la direction $\overrightarrow{Mx'_1}$; la déformation dans la direction $\overrightarrow{My'_1}$; la déformation en cisaillement des deux directions $\overrightarrow{Mx'_1}$ et $\overrightarrow{My'_1}$.

- 3.1.5 En explicitant les relations de changement de base, déterminer les éléments des tenseurs des déformations dans le système d'axes $(\overrightarrow{Mx'_1}, \overrightarrow{My'_1})$, direction orthogonale à la plaque).

Comparer avec les résultats obtenus dans la question 3.1.4.

- 3.2** Dans le cas d'un état de déformations planes dans le plan (1, 2), expliciter la matrice 3×3 de changement de base, dans le cas d'une rotation θ autour de la direction 3.

- 3.3** On considère un solide réel. En un point M de la surface libre du solide, le plan tangent (P) au solide peut être considéré comme confondu avec cette surface. Ce plan est plan principal du tenseur des déformations au point M .

Pour déterminer le tenseur des déformations, on place au point M une rosette extensométrique à trois jauges dont les directions $(\overrightarrow{Mx_1}, \overrightarrow{Mx_2}, \overrightarrow{Mx_3})$ font entre elles des angles $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$. (La résistance électrique d'une jauge varie en fonction de l'allongement de la jauge et la mesure de cette variation de résistance permet de mesurer l'allongement correspondant).

Lors d'une sollicitation, les allongements mesurés sont $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ respectivement suivant les directions. L'objet du problème est de déterminer : les valeurs propres $\varepsilon^{(1)}$ et $\varepsilon^{(2)}$ du plan principal (P) , l'orientation de la direction propre (1) avec la

direction $\overrightarrow{Mx_1}$ par exemple. On appellera par la suite θ , l'angle (figure 3.5) que fait la direction $\overrightarrow{Mx_1}$ avec la direction propre (1).

3.3.1 Trouver les relations exprimant ε_1 , ε_2 et ε_3 en fonction de $\sin \theta$, $\cos \theta$ et des valeurs principales $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$.

3.3.2 Les trois jauges sont généralement disposées à 45° ($\theta_{12} = \theta_{13} = \pi/4$).

Expliciter, dans ce cas, les relations exprimant ε_1 , ε_2 , ε_3 en fonction de $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\sin \theta$ et $\cos \theta$.

En déduire l'expression qui permet de trouver, en fonction de ε_1 , ε_2 et ε_3 , l'angle θ que fait la direction propre (1) avec la direction $\overrightarrow{Mx_1}$.

Application : $\varepsilon_1 = 4 \times 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 5 \times 10^{-4}$, $\varepsilon_3 = 2 \times 10^{-4}$.

Trouver ensuite les expressions des valeurs propres $\varepsilon^{(1)}$ et $\varepsilon^{(2)}$. Faire l'application numérique.

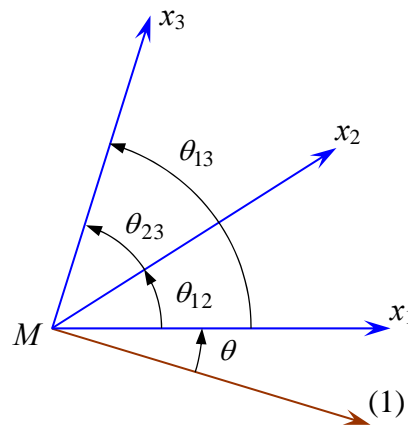


FIGURE 3.5. Exercice 3.3.

CHAPITRE 4

Schéma élastique

4.1 SCHÉMA D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

4.1.1 Introduction

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées *lois de comportement*, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. L'expérience montre que de nombreux milieux solides déformables ont, pour une température donnée, un *comportement élastique linéaire*, que nous considérons dans le présent chapitre.

4.1.2 Matrice de rigidité

La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

ou sous forme condensée :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (4.2)$$

Cette loi, généralement appelée loi de Hooke généralisée, introduit la *matrice de rigidité* \mathbf{C} , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants, ici les 21 *constantes de rigidité* C_{ij} .

4.1.3 Matrice de flexibilité ou souplesse

La relation d'élasticité (4.2) peut être écrite sous la forme inverse, suivant :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}, \quad (4.3)$$

en introduisant la matrice inverse de la matrice de rigidité. La matrice \mathbf{S} est appelée *matrice de flexibilité* ou *matrice de souplesse*, et s'écrit dans le cas général :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

avec

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}. \quad (4.5)$$

Les coefficients S_{ij} sont appelés *constantes de flexibilité* ou *constantes de souplesse*.

4.1.4 Changement de base

Soit $\mathbf{C} = [C_{ij}]$ la matrice de rigidité exprimée dans une base $(\vec{e}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $\mathbf{C}' = [C'_{ij}]$ la matrice de rigidité exprimée dans la base $(\vec{e}') = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$. Ces matrices relient les contraintes et déformations exprimées dans les bases respectives :

$$\text{— dans la base } (\vec{e}) : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.6)$$

$$\text{— dans la base } (\vec{e}') : \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}' \boldsymbol{\varepsilon}'. \quad (4.7)$$

Les relations de changements de base, relatives aux contraintes et déformations, peuvent être écrites d'une manière générale sous les formes (2.45)–(2.47) et (3.42)–(3.44). En combinant les relations (2.47) et (4.6), il vient :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_\sigma \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon},$$

puis, en tenant compte de (3.44) :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{T}_\sigma \mathbf{C} \mathbf{T}_\varepsilon^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}'. \quad (4.8)$$

L'identification des expressions (4.7) et (4.8) conduit alors à la relation de changement de base des matrices de rigidité :

$$\mathbf{C}' = \mathbf{T}_\sigma \mathbf{C} \mathbf{T}_\varepsilon^{-1}. \quad (4.9)$$

Par un raisonnement analogue, on trouve de même la relation de changement de base des matrices de souplesse :

$$\mathbf{S}' = \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{S} \mathbf{T}_\sigma^{-1}. \quad (4.10)$$

Les relations inverses s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{T}_\varepsilon, \quad (4.11)$$

et

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}_\varepsilon^{-1} \mathbf{S}' \mathbf{T}_\sigma. \quad (4.12)$$

4.1.5 Matériaux anisotropes

4.1.5.1 Introduction

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé *matériau triclinique*.

La plupart des matériaux anisotropes possèdent une structure présentant une ou plusieurs symétries : par exemple, les monocristaux, les structures fibreuses, les matériaux composites à fibres ou tissus, etc. Les propriétés de symétries géométriques réduisent alors le nombre de constantes indépendantes nécessaires pour décrire le comportement du matériau. Cette réduction est fonction des symétries présentées par le matériau considéré.

4.1.5.2 Matériau monoclinique

Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un plan de symétrie. La forme de la matrice de rigidité (ou de souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Dans le cas où le plan de symétrie est le plan (1, 2), l'exploitation des changements de base conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

4.1.5.3 Matériau orthotrope

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième : la forme de la matrice de rigidité est donc obtenue en ajoutant au matériau monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent. L'invariance de la matrice dans un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce deuxième plan conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est ramené à 9.

4.1.5.4 Matériau unidirectionnel

La cellule élémentaire d'un matériau composite unidirectionnel peut être considérée comme constituée d'une fibre entourée d'un cylindre de matrice (figure 4.1). Le matériau se comporte donc comme un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution. Le matériau est alors appelé *matériau orthotrope de révolution* ou *isotrope transverse*. Il en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe doit laisser inchangée la matrice de rigidité (ou de souplesse). L'exploitation de cette propriété conduit à :

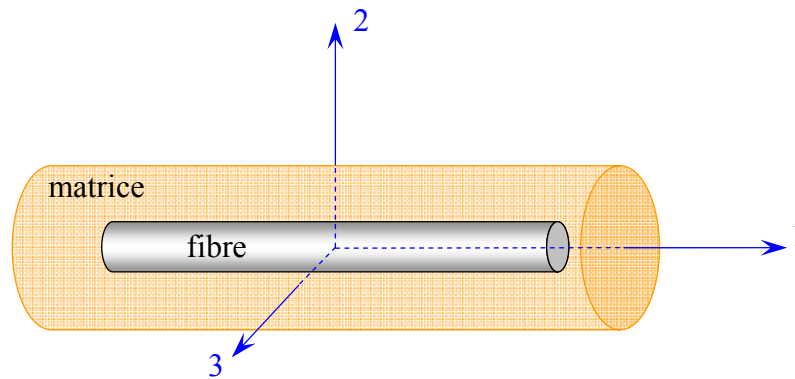


FIGURE 4.1. Matériau composite unidirectionnel.

$$\begin{aligned} C_{13} &= C_{12}, & C_{33} &= C_{22}, \\ C_{55} &= C_{66}, & C_{44} &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

et

$$\begin{aligned} S_{13} &= S_{12}, & S_{33} &= S_{22}, \\ S_{55} &= S_{66}, & S_{44} &= 2(S_{22} - S_{23}). \end{aligned} \quad (4.16)$$

La matrice de rigidité s'écrit donc suivant :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

et la matrice de souplesse :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Les propriétés du matériau unidirectionnel sont déterminées par 5 constantes d'élasticité indépendantes.

4.2 MATÉRIAUX ISOTROPES

4.2.1 Relations d'élasticité

Un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence. Les matériaux usuels (excepté le bois) répondent généralement à cette modélisation établie à l'échelle macroscopique. Il n'existe alors pas de direction privilégiée, et la matrice de rigidité (ou de souplesse) doit être invariante dans tout changement de bases orthonormées. L'application de cette propriété au matériau unidirectionnel conduit aux relations :

$$C_{22} = C_{11}, \quad C_{23} = C_{12}, \quad C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22}). \quad (4.19)$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit à 2, et conduit à la matrice de rigidité :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Généralement, les constantes de rigidité sont exprimées en introduisant les coefficients de Lamé λ et μ :

$$C_{12} = \lambda, \quad \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22}) = \mu, \quad (4.21)$$

d'où :

$$C_{11} = \lambda + 2\mu. \quad (4.22)$$

La relation d'élasticité (4.1) peut donc s'écrire suivant l'expression :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (4.23)$$

ou encore

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (4.24)$$

où $\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ est la déformation volumique du matériau.

Les contraintes normales ($j = i$) s'écrivent alors :

$$\sigma_{ii} = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu \varepsilon_{ii}, \quad (4.25)$$

et les contraintes tangentielles ($j \neq i$) :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (4.26)$$

De la relation (4.25), nous déduisons :

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = (3\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}),$$

ou

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} = (3\lambda + 2\mu) \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (4.27)$$

Les déformations en fonction des contraintes s'obtiennent facilement à partir des relations (4.25) à (4.27). Les déformations normales s'écrivent :

$$\varepsilon_{ii} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ii}, \quad (4.28)$$

et les déformations tangentielles :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}. \quad (4.29)$$

Les deux relations (4.28) et (4.29) peuvent être résumées suivant l'expression :

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}. \quad (4.30)$$

4.2.2 Modules d'élasticité

Les relations d'élasticité sont généralement exprimées en fonction des modules d'élasticité déterminés dans des essais mécaniques où le matériau est soumis à un état particulier de contraintes et déformations.

4.2.2.1 Essais de traction ou compression simple

Dans le cas d'un essai dans la direction 1, la matrice des contraintes est (paragraphe 2.3.3) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il en résulte que les déformations tangentielles (ε_{ij} , avec $j \neq i$) sont nulles. La déformation normale dans la direction de l'essai s'écrit, d'après (4.28) :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_1 + \frac{1}{2\mu} \sigma_1.$$

Soit :

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1, \quad (4.31)$$

en posant :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (4.32)$$

La relation (4.31) est la loi de Hooke, et le coefficient E est appelé le *module de Young*. Les déformations normales transversales sont de même données, d'après (4.28) par :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_1 = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \varepsilon_1,$$

ou

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 = -\nu \varepsilon_1, \quad (4.33)$$

en posant :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (4.34)$$

Le paramètre ν est le *coefficient de Poisson* du matériau.

4.2.2.2 Essai de cisaillement simple

Dans un essai de cisaillement simple, la matrice des contraintes rapportée à des axes (1, 2) faisant un angle de $\frac{\pi}{4} + \pi$ par rapport aux directions principales s'exprime suivant (2.40). Soit :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{12} = \tau. \quad (4.35)$$

Les relations contraintes-déformations se réduisent alors à :

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} = \mu\gamma_{12}, \quad (4.36)$$

où γ_{12} est la déformation en cisaillement des deux directions orthogonales 1 et 2. Le coefficient μ apparaît comme étant le *module de cisaillement*. Ce module est plus généralement noté G . Les autres déformations sont nulles.

4.2.2.3 Essai de compression ou tension sphérique

Dans un tel essai, les contraintes sont sphériques, soit :

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij}. \quad (4.37)$$

Dans la pratique, on utilise une compression hydrostatique : $p < 0$. Les contraintes principales sont égales :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma} = p, \quad (4.38)$$

et les autres contraintes tangentielles sont nulles : $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$. Il en résulte que les déformations sont également sphériques :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.39)$$

avec

$$p = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (4.40)$$

Le coefficient :

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (4.41)$$

est appelé *module de compressibilité*.

4.2.3 Relations entre les coefficients d'élasticité

Les propriétés élastiques d'un matériau isotrope sont déterminées par deux paramètres indépendants. Le tableau 4.1 résume les relations qui lient les paramètres en fonction des couples (λ, μ) , (E, ν) et (E, G) . Le choix des couples est un problème de convenance. Toutefois, les coefficients E et ν sont les plus utilisés, puisqu'étant simplement déterminés dans un essai de traction. La relation d'élasticité (4.30) s'écrit alors :

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \delta_{ij} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}. \quad (4.42)$$

4.2.4 Expressions des matrices de rigidité et de souplesse

En fonction des divers coefficients d'élasticité introduits, les matrices de rigidité et de souplesse peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

TABLEAU 4.1. Relations entre les coefficients d'élasticité d'un matériau isotrope.

	λ, μ	E, ν	E, G
λ	λ	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$
μ	μ	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	G
E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	E	E
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	ν	$\frac{E-2G}{2G}$
k	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{GE}{3(3G-E)}$

avec, pour la matrice de rigidité \mathbf{C} :

$$\begin{aligned} a &= \lambda + 2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = G \frac{4G-E}{3G-E}, \\ b &= \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = G \frac{E-2G}{3G-E}, \\ c &= \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G, \end{aligned} \quad (4.44)$$

et, pour la matrice de souplesse \mathbf{S} :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} = \frac{1}{E}, \\ b &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} = -\frac{\nu}{E}, \\ c &= \frac{1}{\mu} = \frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{1}{G}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

EXERCICES

4.1 Montrer que dans le cas d'un matériau monoclinique de plan de symétrie (1, 2), la matrice de rigidité est de la forme (4.13).

4.2 Au matériau monoclinique, on ajoute le plan de symétrie (1, 3) pour obtenir un matériau orthotrope. Montrer que la matrice de rigidité est de la forme (4.14).

4.3 On considère une rotation d'angle θ autour de l'axe 1 d'un matériau orthotrope. Exprimer la matrice de rigidité dans les nouveaux axes.

4.4 Dédurre de l'exercice précédent la forme (4.17) de la matrice de rigidité d'un matériau isotrope transverse.

4.5 On considère un matériau orthotrope d'axes (1, 2, 3) et en un point de ce matériau, on exerce un état de déformation de directions principales (1', 2', 3) et de déformations principales $\varepsilon_1' = 5 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_2' = 2 \times 10^{-3}$ et $\varepsilon_3 = 4 \times 10^{-3}$. Les directions (1', 2') font un angle $\theta = 30^\circ$ avec les directions (1, 2) du matériau de constantes de rigidité :

$$\begin{aligned}C_{11} &= 32 \text{ GPa}, & C_{12} &= 4,2 \text{ GPa}, & C_{13} &= 3,8 \text{ GPa}, \\C_{22} &= 20 \text{ GPa}, & C_{23} &= 4 \text{ GPa}, & C_{33} &= 12 \text{ GPa}, \\C_{44} &= 2,5 \text{ GPa}, & C_{55} &= 3,5 \text{ GPa}, & C_{66} &= 4 \text{ GPa}.\end{aligned}$$

Déterminer la matrice des contraintes dans les axes (1, 2, 3), puis les contraintes et directions principales.

Problème de mécanique des solides déformables

5.1 RELATION FONDAMENTALE POUR UN MILIEU CONTINU

Soit (D) un domaine d'un milieu continu, de frontière (S) (figure 5.1). Les forces exercées sur le domaine (D) sont de deux sortes :

1. Les forces volumiques (par exemple forces de pesanteur, d'inertie, etc.) qui s'exercent dans tout le volume, caractérisées par la densité de force $\vec{f}(M, t)$ par unité de volume. La force qui s'exerce sur l'élément de volume dV entourant le point M est :

$$d\vec{f}(M, t) = \vec{f}(M, t) dV . \quad (5.1)$$

2. Les forces surfaciques qui ne s'exercent que sur la frontière (S) du domaine (D) . Elles sont caractérisées par la densité de force (vecteur contrainte) $\vec{t}(M, t)$ par unité de surface. La force qui s'exerce sur l'élément de surface dS entourant le point M de (S) s'écrit :

$$d\vec{t}(M, t) = \vec{t}(M, t) dS . \quad (5.2)$$

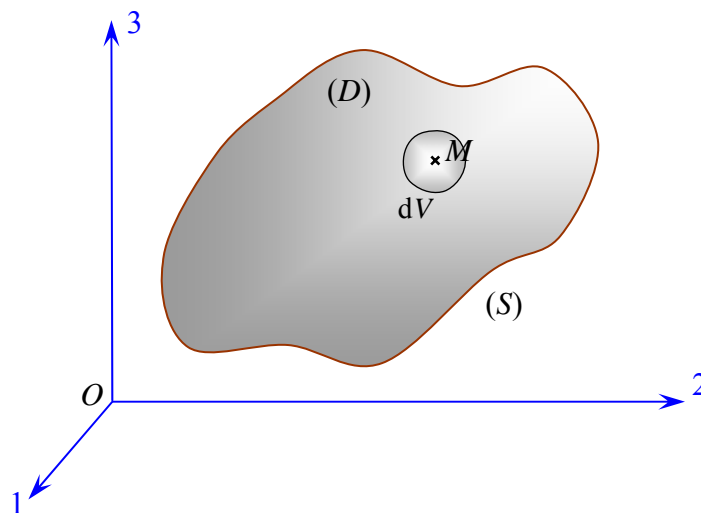


FIGURE 5.1. Domaine d'un milieu continu.

L'orientation du vecteur contrainte est prise, conformément au Chapitre 2, positive de l'intérieur vers l'extérieur de l'élément et correspond dans ce cas à une tension ou traction au point M . Dans le cas contraire, s'exerce en M une compression.

Dans le cas où le repère de référence $(T) = (O / 123)$ est un repère galiléen, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'élément entourant un point M s'écrit :

$$\rho(M, t) \vec{a}^{(T)}(M, t) dV = \vec{f}(M, t) dV + \vec{t}(M, t) dS, \quad (5.3)$$

où $\rho(M, t)$ est la masse volumique en M à l'instant t ; $\vec{a}^{(T)}(M, t)$ est le vecteur accélération du point M , par rapport au repère (T) , à l'instant t .

Étendue à l'ensemble du domaine (D) , la relation fondamentale conduit à une équation de résultante :

$$\int_V (\rho \vec{a} - \vec{f}) dV - \int_S \vec{t} dS = \vec{0}, \quad (5.4)$$

et une équation de moment en un point de référence, par exemple le point O :

$$\int_V \overrightarrow{OM} \wedge (\rho \vec{a} - \vec{f}) dV - \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{t} dS = \vec{0}, \quad (5.5)$$

où les intégrales sont étendues au volume V du domaine et à la surface S de la frontière. Chaque équation conduit dans une base donnée à trois équations scalaires. Par exemple, en introduisant les composantes des différents vecteurs, l'équation de la résultante s'écrit pour la direction i :

$$\int_V (f_i - \rho a_i) dV + \int_S t_i dS = 0,$$

ou en tenant compte de (2.7) :

$$\int_V (f_i - \rho a_i) dV + \int_S \sigma_{ij} n_j dS = 0. \quad (5.6)$$

L'intégrale de surface peut être transformée en une intégrale de volume en utilisant la formule générale de Gauss qui permet de transformer une intégrale de surface en intégrale de volume et conduit ici à :

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV.$$

La relation (5.6) s'écrit alors :

$$\int_V \left(f_i - \rho a_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \right) dV = 0. \quad (5.7)$$

Cette équation devant être vérifiée pour toute partie du domaine (D) se réduit à :

$$f_i - \rho a_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0. \quad (5.8)$$

L'exploitation de l'équation du moment conduit à la même relation, appelée relation fondamentale. Cette relation, écrite sous la forme (5.8), est applicable aux cas de petites déformations. La composante a_i du vecteur accélération s'exprime en fonction de la composante u_i du vecteur déplacement suivant :

$$a_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

et la relation fondamentale conduit aux trois équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

5.2 PROBLÈME DE LA MÉCANIQUE DES SOLIDES DÉFORMABLES

5.2.1 Énoncé du problème

Le problème général de la mécanique des solides déformables se pose de la manière suivante. Soit un ensemble solide déformable (D), délimité par une frontière (S) (figure 5.2). Cet ensemble est soumis à des forces volumiques $\vec{f}(M, t)$ de composantes f_i et à des conditions sur la frontière (S) dites *conditions aux limites* ou *conditions aux frontières*. Ces conditions schématisées sur la figure 5.2 peuvent être de deux types :

1. Sur une partie (S_u) de la frontière (S) sont imposés des déplacements donnés $\vec{u}_S(M, t)$:

$$\vec{u}(M, t) = \vec{u}_S(M, t) \quad \forall M \in (S_u). \quad (5.10)$$

Aucune force surfacique n'est exercée sur (S_u).

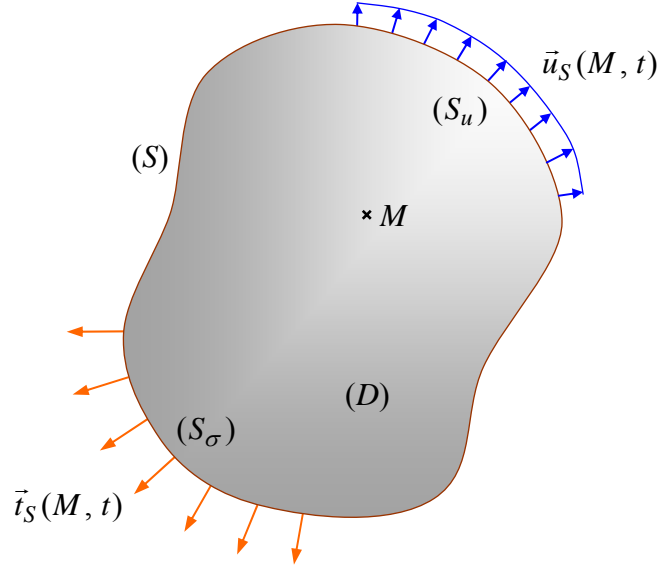


FIGURE 5.2. Conditions aux limites.

2. Sur la partie complémentaire (S_σ) de (S) :

$$(S_u) \cup (S_\sigma) = (S), \quad (S_u) \cap (S_\sigma) = \emptyset,$$

sont imposées des forces surfaciques données (ou l'absence de forces surfaciques) : $\vec{t}_S(M, t) = \vec{0}$:

$$\vec{t}(M, t) = \vec{t}_S(M, t) \quad \forall M \in (S_\sigma). \quad (5.11)$$

Sous l'effet des actions imposées (forces volumiques et conditions aux limites), l'ensemble (D) se déforme. Le problème de la mécanique des solides déformables consiste à rechercher le champ des déplacements $\vec{u}(M, t)$ et le champ des contraintes $\sigma(M, t)$ en tout point M de l'ensemble (D) , vérifiant :

1. La *relation fondamentale* (5.8) :

1.1 pour un problème de dynamique :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (5.12)$$

1.2 pour un problème de statique :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + f_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5.13)$$

2. Les relations *déformations-déplacements* (3.11) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

dans le cas de petites déformations.

3. Les *conditions de compatibilité* (3.18) :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \quad (5.14)$$

$$i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

4. Les *conditions aux frontières* (5.10) et (5.11) :

$$\vec{u}(M, t) = \vec{u}_S(M, t) \quad \text{sur } (S_u),$$

$$\vec{t}(M, t) = \vec{t}_S(M, t) \quad \text{sur } (S_\sigma).$$

5. La *loi de comportement* du matériau caractérisant son comportement mécanique. Cette loi relie le champ des contraintes à celui des déformations :

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{kl}), \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (5.15)$$

Dans le cas d'un comportement élastique linéaire, la loi de comportement est décrite suivant l'une des relations (4.1) ou (4.3).

Le problème de mécanique peut être résolu suivant une approche *déplacements* ou une approche *contraintes*. Dans l'approche déplacements, la résolution consiste à rechercher le champ des déplacements $\vec{u}(M, t)$ ou le champ du tenseur des déformations $\varepsilon(M, t)$, guidé par les conditions imposées sur la frontière (S_u) :

$$\vec{u}(M, t) = \vec{u}_S(M, t) \quad \forall M \in (S_u).$$

On en déduit le tenseur des déformations, puis celui des contraintes qui doivent vérifier les diverses conditions 1 à 5.

Dans l'approche contraintes, la solution consiste à rechercher le tenseur des contraintes $\sigma(M, t)$, guidé par les conditions imposées sur la frontière (S_σ) :

$$\vec{t}(M, t) = \boldsymbol{\sigma}(M, t) \vec{n} = \vec{t}_S(M, t) \quad \forall M \in (S_\sigma), \quad (5.16)$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire de la normale en M à la surface du solide. Le tenseur des contraintes doit également vérifier la relation fondamentale. On en déduit ensuite le tenseur des déformations et le champ des déplacements qui doit vérifier les conditions imposées sur (S_u) .

5.2.2 Équations en coordonnées cartésiennes

Dans ce qui précède, nous nous sommes implicitement référés à un système d'axes cartésiens $(Ox_1x_2x_3)$, les points de l'espace étant repérés par leurs coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) , et le vecteur déplacement ayant pour composantes (u_1, u_2, u_3) . Une telle notation est bien adaptée au calcul tensoriel ou

matriciel. Une autre notation usuellement utilisée par l'ingénieur consiste à noter ($Oxyz$) le système d'axes. Les coordonnées des points sont (x, y, z) et les composantes du vecteur déplacement sont notées (u, v, w). Nous reprenons les diverses relations dans le cadre de cette notation.

1. *Contraintes*. Le tableau du tenseur des contraintes s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

et la matrice colonne des contraintes est :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

2. *Déformations*. Le tableau du tenseur des déformations a la même forme que celui du tenseur des contraintes et les éléments de la matrice colonne sont donnés par les expressions :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_4 &= \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_5 &= \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \varepsilon_6 &= \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

3. *Relation fondamentale.* Cette relation est transposée de (5.9) suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{xz} + f_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{yz} + f_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} + f_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.\end{aligned}\tag{5.20}$$

4. *Conditions de compatibilité.* Les six équations de compatibilité sont dérivées des expressions (3.18) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right).\end{aligned}\tag{5.21}$$

5. *Conditions aux limites.* Les conditions sur les contraintes sont :

$$\vec{t}(M, t) = \vec{t}_S(M, t) \text{ sur la frontière } (S_\sigma).$$

Si (t_{Sx}, t_{Sy}, t_{Sz}) sont les composantes du vecteur contrainte \vec{t}_S imposé en M et (n_x, n_y, n_z) les composantes du vecteur unitaire de la normale au point M orientée de l'intérieur vers l'extérieur du solide, la condition sur les contraintes s'écrit :

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{Sx} \\ t_{Sy} \\ t_{Sz} \end{bmatrix},\tag{5.22}$$

Soit :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z &= t_{Sx}, \\ \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z &= t_{Sy}, \\ \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z &= t_{Sz}.\end{aligned}\tag{5.23}$$

5.2.3 Équations en coordonnées cylindriques

L'utilisation de coordonnées cylindriques s'impose dans de nombreux problèmes, en particulier lorsque le problème est de révolution. Le point M est repéré par ses coordonnées (r, θ, z) (figure 5.3). Les matrices des contraintes et déformations sont de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_{\theta z} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \tag{5.24}$$

avec :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \\ 2\varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \\ 2\varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z},\end{aligned}\tag{5.25}$$

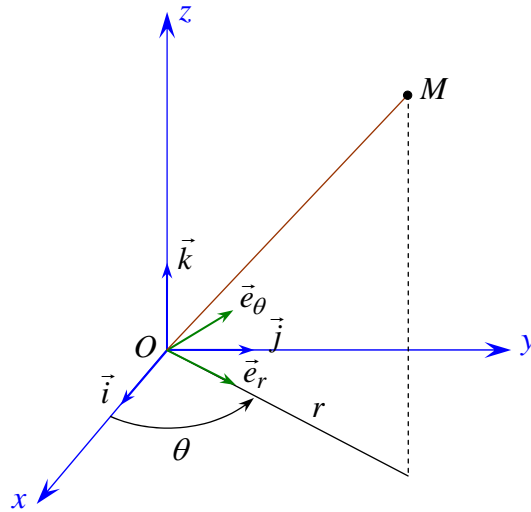


FIGURE 5.3. Coordonnées cylindriques.

en introduisant les composantes (u_r, u_θ, w) du vecteur déplacement \vec{u} dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ obtenue à partir de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ des coordonnées cartésiennes, par rotation θ autour de la direction \vec{k} . Les relations entre les composantes des matrices des contraintes exprimées dans la base des coordonnées cartésiennes et des coordonnées cylindriques s'obtiennent aisément à l'aide de la relation (1.13).

Les relations fondamentales en coordonnées cylindriques sont ensuite déduites en transposant les relations (5.20) dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ et s'écrivent dans le cas d'un problème de statique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + f_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\sigma_{r\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + f_\theta &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \sigma_{rz} \right) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

5.3 THÉORÈMES DE L'ÉNERGIE

5.3.1 Variation d'une fonctionnelle

D'une manière générale, une fonctionnelle F peut être définie comme étant une fonction d'un ensemble de fonctions : $u(x, y, \dots)$, $v(x, y, \dots)$, et de leurs dérivées par rapport à l'ensemble des variables (x, y, \dots) , soit :

$$F = F \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right). \quad (5.27)$$

La première variation de F est définie par :

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \dots, \quad (5.28)$$

où δu , $\delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$, $\delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$, \dots , δv , $\delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)$, $\delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)$, \dots sont des variations quelconques des fonctions u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, \dots , v , $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, \dots

La dérivée $\frac{\partial F}{\partial u}$ est obtenue par dérivation formelle de F par rapport à la variable u .

La dérivée $\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}$ est obtenue par dérivation formelle de F par rapport à la variable $\frac{\partial u}{\partial x}$. Il en est de même des autres dérivées. L'opérateur δ a les propriétés de l'opérateur variation d usuel.

5.3.2 Théorème des travaux virtuels

Nous revenons au problème de la mécanique (paragraphe 5.2.1) en nous limitant pour l'instant à un problème de statique. Soit $\vec{u}(M)$ le champ des déplacements solution du problème qui s'écrit dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\vec{u}(M) = u_i \vec{e}_i. \quad (5.29)$$

Considérons maintenant le champ des déplacements obtenu en prenant la première variation de \vec{u} :

$$\delta \vec{u} = \vec{e}_i \delta u_i, \quad (5.30)$$

et tel que ce champ vérifie les conditions imposées sur la frontière (S); soit :

$$\delta \vec{u} = \vec{0}, \quad \text{ou} \quad \delta u_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{sur } (S_u), \quad (5.31)$$

puisque les déplacements sont imposés sur (S_u) . Ce champ est appelé champ des déplacements *virtuels*. Calculons alors le travail effectué lors de ce déplacement, travail appelé *travail virtuel*.

Le travail des forces surfaciques se réduit d'après (5.31) à :

$$\delta W_S = \int_S \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, dS = \int_{S_\sigma} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, dS. \quad (5.32)$$

Soit :

$$\delta W_S = \int_{S_\sigma} t_i \delta u_i \, dS = \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_{ij} \delta u_i \, dS. \quad (5.33)$$

Le travail des forces volumiques s'écrit :

$$\delta W_V = \int_V \vec{f} \cdot \delta \vec{u} \, dV = \int_V f_i \delta u_i \, dV, \quad (5.34)$$

ou en tenant compte de (5.12) dans le cas d'un problème statique :

$$\delta W_V = - \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i \, dV. \quad (5.35)$$

En remarquant que :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \delta u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \delta u_i + \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i,$$

la relation (5.35) s'écrit :

$$\delta W_V = \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i dV - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \delta u_i) dV.$$

La deuxième intégrale peut être transformée en une intégrale de surface à l'aide de la relation de Gauss, ce qui conduit à :

$$\delta W_V = \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i dV - \int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS.$$

En tenant compte de (5.31), nous obtenons :

$$\delta W_V = \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i dV - \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS. \quad (5.36)$$

Les relations (5.33) et (5.36) montrent que la variation totale δW du travail des forces volumiques et surfaciques exercées (travail virtuel) s'écrit finalement :

$$\delta W = \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i dV, \quad (5.37)$$

avec :

$$\delta W = \delta W_S + \delta W_V = \int_{S_\sigma} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} dS + \int_V \vec{f} \cdot \delta \vec{u} dV. \quad (5.38)$$

La relation (5.37) traduit sous sa forme la plus générale le théorème dit des travaux virtuels pour un ensemble déformable.

Dans le cas de l'hypothèse des petites déformations (3.11) et en tenant compte des symétries de σ_{ij} et ε_{ij} , nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i + \sigma_{ji} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta u_j &= \sigma_{ij} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= 2\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ji} \delta \varepsilon_{ji}, \end{aligned}$$

et la relation (5.37) s'écrit :

$$\delta W = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV. \quad (5.39)$$

L'écriture de cette relation peut être transformée dans le cas où $\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$ peut

s'exprimer comme la variation d'une fonction $u_d(\varepsilon_{ij})$ des déformations :

$$\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \delta u_d . \quad (5.40)$$

La fonction u_d est l'énergie de déformation par unité de volume. Elle peut également être interprétée comme la fonction de contrainte du champ des contraintes, suivant la relation :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial u_d}{\partial \varepsilon_{ij}} , \quad (5.41)$$

puisque :

$$\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_d}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} = \delta u_d .$$

L'intégrale de volume s'écrit alors :

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \delta u_d dV = \delta \int_V u_d dV = \delta U_d , \quad (5.42)$$

en posant :

$$U_d = \int_V u_d dV , \quad (5.43)$$

où U_d est l'énergie de déformation totale. Le théorème (5.39) s'écrit dans ce cas :

$$\delta W = \delta U_d . \quad (5.44)$$

Le travail virtuel est égal à la variation de l'énergie de déformation totale.

Généralement, cette dernière forme du théorème des travaux virtuels s'écrit sous la forme équivalente :

$$\delta U = 0 , \quad (5.45)$$

en introduisant l'énergie potentielle totale :

$$U = U_d - W . \quad (5.46)$$

Le théorème des travaux virtuels équivaut sous cette forme à rendre stationnaire (extrémale) la fonctionnelle énergie potentielle totale.

Pour un matériau ayant un comportement élastique linéaire, l'énergie de déformation est définie d'après (5.41) et (4.1) par :

$$\sigma_i = \frac{\partial u_d}{\partial \varepsilon_i} = C_{ij} \varepsilon_j \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad (5.47)$$

en utilisant, pour les contraintes et déformations, la notation matricielle à un seul indice. Nous en déduisons que u_d est une forme quadratique linéaire et symétrique des déformations (puisque $C_{ij} = C_{ji}$), qui s'écrit à une constante près :

$$u_d(\varepsilon_i) = \frac{1}{2} C_{ij} \varepsilon_j \varepsilon_i = \frac{1}{2} \sigma_i \varepsilon_i \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, \quad (5.48)$$

ou sous la forme de la notation tensorielle à deux indices :

$$u_d(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5.49)$$

L'énergie totale de déformation s'écrit alors :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5.50)$$

5.3.3 Dynamique des solides

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes limités au cas d'un problème statique. Dans le cas d'un ensemble déformable en mouvement, l'expression (5.34) du travail des forces volumiques est modifiée, conformément à la relation (5.12). En reprenant les résultats établis précédemment, nous trouvons aisément que le travail des forces volumiques et surfaciques s'exprime suivant :

$$\delta W = \delta W_V + \delta W_S = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dV. \quad (5.51)$$

Pour faire apparaître une fonctionnelle, la relation précédente est intégrée entre deux instants t_1 et t_2 , tels que les variations δu_i satisfassent aux conditions aux limites :

$$\delta u_i = 0 \text{ sur } (S_u) \text{ pour } t = t_1 \text{ et } t_2. \quad (5.52)$$

En intégrant par parties, on montre que :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dV dt = -\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} E_c dt \right], \quad (5.53)$$

où E_c est l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dV \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.54)$$

L'intégration entre les instants t_1 et t_2 de la relation (5.51) conduit finalement à :

$$\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} (E_c + W) dt \right] = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV dt. \quad (5.55)$$

Cette relation constitue l'expression variationnelle sous sa forme la plus générale, du mouvement d'un ensemble déformable.

L'intégrale $\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$ représente l'énergie mise en jeu lors de la déformation. Son expression dépend de la loi de comportement du matériau, loi qui fait éventuellement intervenir le temps. Dans le cas où il existe une fonction énergie de déformation (5.40), la relation (5.55) s'écrit sous la forme :

$$\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} (E_c + W - U_d) dt \right] = 0. \quad (5.56)$$

Généralement, cette relation est écrite sous la forme :

$$\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right] = 0, \quad (5.57)$$

en introduisant le Lagrangien :

$$\mathcal{L} = E_c + W - U_d = E_c - U. \quad (5.58)$$

La relation (5.57) constitue la formulation variationnelle du problème du mouvement d'un ensemble déformable.

5.4 MÉTHODES VARIATIONNELLES

5.4.1 Principe

Les méthodes d'approximation sont utilisées lorsque les solutions exactes du problème de la mécanique des solides déformables ne peuvent être trouvées. Le principe général de l'approximation d'une solution $u(M)$ consiste à rechercher la meilleure approximation, que nous noterons $\tilde{u}(M)$, satisfaisant au mieux les conditions physiques auxquelles obéit la solution $u(M)$ sur son domaine d'étude. Parmi les méthodes d'approximation, la méthode de Ritz, basée sur une approche variationnelle, fournit une méthode efficace pour obtenir des solutions approchées au problème de la mécanique des solides déformables. Dans l'approche déplacements, la solution exacte du problème variationnel est celle qui, appartenant à l'espace des fonctions admissibles et satisfaisant les conditions aux limites, rend extrémale, dans le cas d'un problème statique, l'énergie potentielle totale (relation (5.45)). Cette relation implique que la solution exacte est caractérisée par un *extremum* absolu. La méthode de Ritz consiste à rechercher une approximation appartenant au sous-espace de n fonctions de base $\varphi_i(M)$ sous la forme :

$$\tilde{u}(M) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(M). \quad (5.59)$$

Les fonctions $\varphi_i(M)$ sont des fonctions connues, qui sont choisies a priori et dont

l'ensemble constitue la base fonctionnelle. Les coefficients a_i , à déterminer, sont appelés les *coordonnées généralisées*. Les fonctions de base $\varphi_i(M)$ doivent satisfaire les conditions de continuité, les déplacements imposés aux frontières, et former une base fonctionnelle complète pour assurer les conditions de convergence de l'approximation. Les fonctions de base doivent également être dérivables à un ordre au moins égal à celui correspondant aux équations différentielles. L'approximation recherchée est alors celle qui rend extrémale l'énergie potentielle totale approchée :

$$\tilde{U}(\tilde{u}) = \tilde{U}(a_i) \quad (5.60)$$

suivant la relation :

$$\delta \tilde{U}(a_i) = 0. \quad (5.61)$$

Cette approximation est caractérisée par un *extremum relatif*. L'énergie potentielle totale approchée apparaît donc sous forme d'une fonction des coefficients a_i . Et l'approximation recherchée est caractérisée par les n conditions de stationnarité de la fonction approchée \tilde{U} par rapport aux coefficients a_i , déduites de la relation (5.61). Soit :

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.62)$$

L'énergie potentielle totale s'écrit sous une forme quadratique des coefficients a_i , et il en résulte que les conditions de stationnarité (5.62) conduisent à un système de n équations linéaires, permettant de déterminer les n coefficients a_i .

Dans le cas du mouvement d'un ensemble déformable, la forme variationnelle (5.45) doit être remplacée par la forme (5.57). Dans le cas de l'étude des vibrations libres, le champ approché des déplacements peut être écrit en séparant les variables, sous la forme :

$$\tilde{u}(M, t) = \tilde{u}(M) e^{i\omega t} = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i e^{i\omega t}. \quad (5.63)$$

L'énergie cinétique (5.54) s'écrit alors :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \omega^2 \tilde{u}_i \tilde{u}_i dV, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.64)$$

Le problème des vibrations libres peut alors être traité comme un problème statique, en considérant simplement l'énergie cinétique comme une énergie additionnelle, la relation (5.57) s'écrivant sous la forme :

$$\delta(U - E_c) = 0. \quad (5.65)$$

Cette relation conduit à l'équation classique d'un problème aux valeurs propres. Les fréquences propres de l'ensemble déformable sont obtenues en annulant le déterminant des coefficients a_i dans l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial a_i} [\tilde{U}(a_i) - \tilde{E}_c(a_i)] = 0. \quad (5.66)$$

5.4.2 Convergence

Pour assurer une convergence des solutions approchées lorsque n augmente, la base fonctionnelle $\varphi_i(M)$ doit être *complète*. Une base fonctionnelle est dite complète si elle permet de représenter n'importe quelle fonction $u(M)$ dans le domaine de définition, en augmentant le nombre de coordonnées généralisées. Soit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[u(M) - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(M) \right] = 0. \quad (5.67)$$

Les fonctions polynômiales, trigonométriques, les polynômes de Tchebyshev sont des exemples de bases fonctionnelles complètes.

Dans la pratique, à cause de la troncature limitée à n termes, la base sera dite relativement complète. La troncature se fera en excluant les termes d'ordre élevé, et devra pouvoir représenter les états de déformation constante ou nulle. La rapidité de convergence dépendra de la manière dont les fonctions de base choisies seront aptes à s'approcher de la solution exacte. Dans le cas d'une mauvaise approximation, la convergence sera lente. La convergence sera d'autant plus rapide que les conditions aux limites seront vérifiées par les fonctions de base. La clef de la méthode de Ritz réside dans le choix de la base fonctionnelle. Ce choix n'est pas toujours facile.

En fait, les conditions de contraintes imposées sur les frontières sont potentiellement incluses dans l'expression de l'énergie potentielle totale. Il en résulte que, dans l'analyse de Ritz, les fonctions de base peuvent seulement ne satisfaire que les conditions des déplacements imposées sur les frontières. La raison pour laquelle il n'est pas nécessaire de vérifier les conditions imposées sur les contraintes résulte du fait que les conditions de stationnarité (5.62) minimisent l'écart entre la solution déduite de l'approximation (5.63) et la solution exacte.

5.5 ANALYSE PAR ÉLÉMENTS FINIS

L'analyse du comportement d'une structure par la méthode des éléments finis consiste à découper la structure considérée en éléments (Figure 5.4) et à établir aux noeuds du maillage les relations force-déplacement, en tenant compte des conditions de charges et d'appuis imposées à la structure. On obtient alors un système d'équations linéaires de grande dimension, dont la résolution numérique conduit à la valeur du déplacement en chacun des noeuds. Le champ des contraintes est ensuite déterminé à partir du champ des déplacements.

L'analyse par la méthode des éléments finis nécessite le découpage préalable de la structure en éléments. Cette fonction de découpage est effectuée par un processus dit de maillage de la structure, permettant à l'opérateur d'obtenir un découpage automatisé de la structure. Le maillage peut être effectué directement dans le cas de structures simples. Dans le cas de structures complexes, le maillage

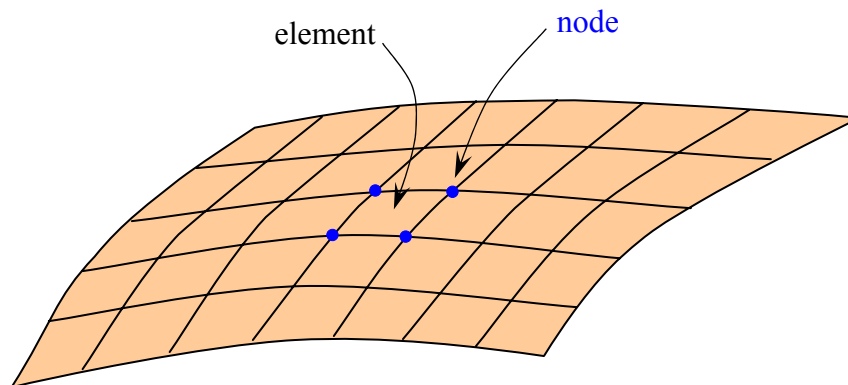


FIGURE 5.4. Maillage d'une structure.

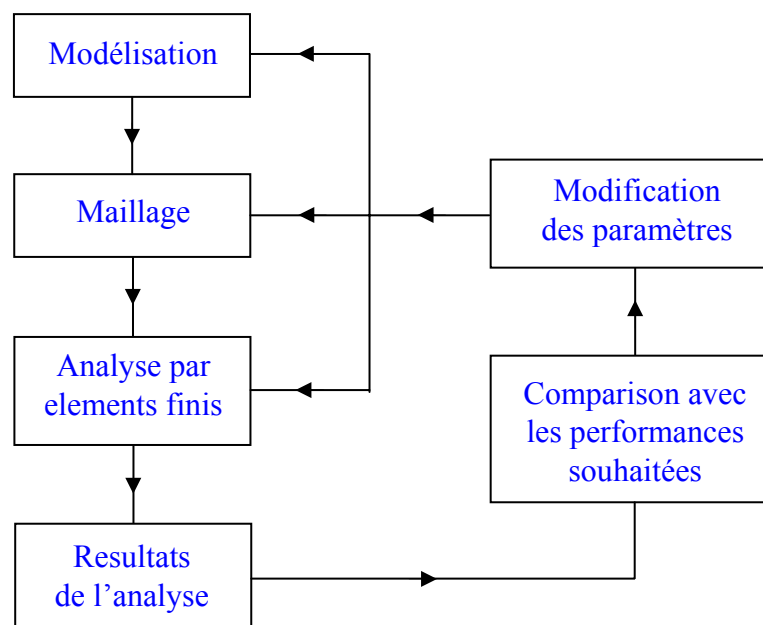


FIGURE 5.5. Processus de prédimensionnement.

ne peut être effectué aisément qu'après modélisation géométrique de la structure, reposant par exemple sur un formalisme de type Bézier ou Spline.

L'analyse par éléments finis apparaît ainsi comme l'une des étapes intégrée dans un système de conception, assistée par ordinateur, partant de la définition de la structure (modélisation géométrique) pour aboutir à son prédimensionnement par la méthode des éléments finis. Le processus de conception est alors schématisé sur la figure 5.5. Dans ce cadre, il est à noter la complexité du processus d'optimisation dans le cas du prédimensionnement des structures constituées de matériaux composites, le processus incluant alors l'optimisation des matériaux à l'échelle de chaque couche et de l'arrangement des couches.

EXERCICES

5.1 Établir les expressions (5.25) des déformations en coordonnées cylindriques.

5.2 Établir les équations fondamentales en coordonnées cylindriques (5.26) dans le cas d'un problème de statique. Considérer ensuite le cas d'un problème de dynamique.

