

## Partie IV

# Comportement Mécanique des Stratifiés et des Sandwiches

Cette partie développe les éléments fondamentaux de la théorie des stratifiés et des plaques sandwichs. Les hypothèses générales de la théorie des stratifiés sont d'abord introduites dans le chapitre 13. La théorie classique des stratifiés est ensuite développée dans le chapitre 14. L'étude de l'effet de la séquence d'empilement des couches du stratifié est analysée dans le chapitre 15. Cette analyse nous permet de comprendre les phénomènes de couplage entre les comportements en membrane, flexion et torsion. La théorie classique des stratifiés est ensuite appliquée à l'évaluation du comportement élastique des couches avec renforts tissus ou mats. Le chapitre 16 établit les équations fondamentales de la théorie des stratifiés ainsi que la formulation énergétique. La prise en compte des effets du cisaillement transverse dans la théorie des stratifiés est ensuite développée au chapitre 17. Enfin, le chapitre 18 présente la théorie des plaques sandwichs qui est basée sur la théorie des stratifiés prenant en compte les effets du cisaillement transverse.



# Généralités sur la Théorie des Stratifiés

## 13.1 INTRODUCTION

### 13.1.1 Architecture

Au chapitre 3, nous avons mis en évidence l'architecture des stratifiés qui résulte de la conception des pièces en matériaux composites :

- suivant des plaques ou coques,
- par stratification de couches successives.

Ce mode de conception justifie l'importance des plaques dans l'analyse des structures en composites. En effet, outre les structures de type plaques, l'analyse des plaques permet également, dans le cadre de calcul par éléments finis, de modéliser les structures coques.

D'une manière générale, une plaque est un solide limité par deux plans parallèles (figure 13.1), dont la dimension transverse est petite en comparaison des deux autres dimensions. Il est alors possible de définir un plan de référence entre les deux plans extrêmes qui est pris comme plan  $Oxy$ . L'axe  $\overrightarrow{Oz}$  correspond à la direction suivant l'épaisseur.

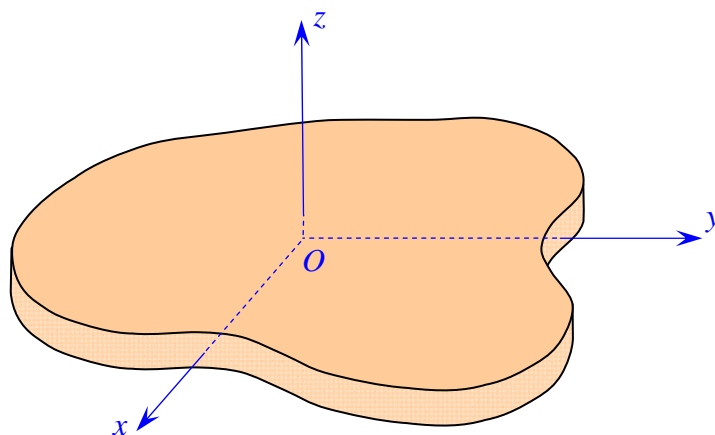


FIGURE 13.1. Élément de plaque.

### 13.1.2 Notations et objectif

Les notations utilisées sont reportées sur la figure 13.2. Le stratifié est constitué de  $n$  couches, numérotées de la face inférieure à la face supérieure. La surface moyenne est choisie comme plan de référence ( $Oxy$ ) et l'axe  $\vec{Oz}$  est dirigé dans le sens croissant des numéros des couches. Chaque couche  $k$  est repérée par les cotes algébriques de sa face inférieure ( $h_{k-1}$ ) et de sa face supérieure ( $h_k$ ).

Au chapitre 3, nous avons dégagé le processus d'étude du comportement mécanique d'une structure en matériau composite. Ce processus comporte trois étapes : l'analyse du comportement micromécanique d'une couche, la modélisation du comportement mécanique local du stratifié (analyse du comportement "macromécanique" du stratifié), puis l'analyse de la structure en composite. La troisième partie constitue la première étape dans le cadre d'une analyse du comportement élastique (chapitres 9 à 11) et du comportement à la rupture (chapitre 12) d'une couche. La quatrième partie, dont fait partie ce chapitre, a pour objet de répondre à la deuxième étape. Son objectif est de schématiser le comportement mécanique des plaques stratifiées, pour simplifier au mieux l'analyse de la structure. Nous verrons que cette simplification consiste à ramener le problème initialement à trois dimensions ( $x, y, z$ ) à un problème à deux dimensions ( $x, y$ ) de difficulté moindre. La théorie des stratifiés utilise les mêmes hypothèses que la théorie générale des plaques, hypothèses que nous développons dans ce chapitre.

## 13.2 CHAMP DES DÉPLACEMENTS

### 13.2.1 Expressions générales

L'hypothèse de base de la théorie générale des plaques réside dans l'expression des déplacements en tout point  $M$  d'une plaque, de coordonnées  $(x, y, z)$ , sous la forme de polynômes en  $z$ , généralement limités au degré 3, et de coefficients dépendant de  $(x, y)$ . Le champ des déplacements est alors écrit sous la forme :

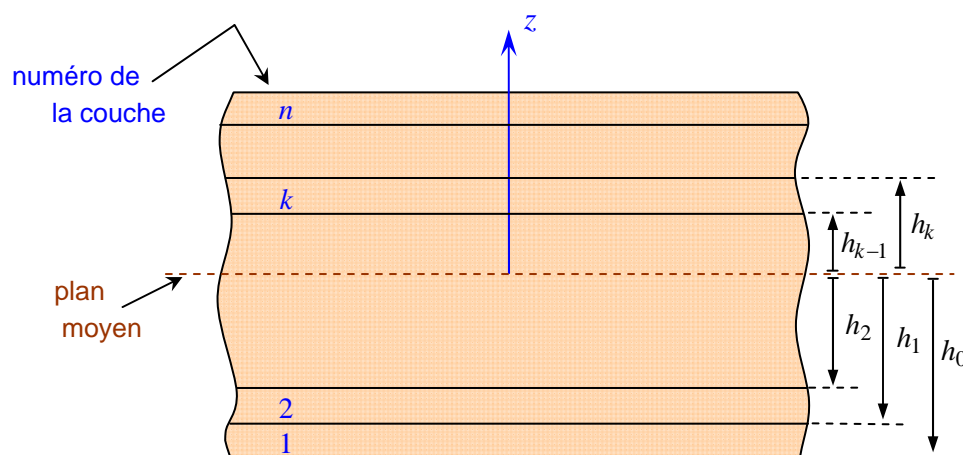


FIGURE 13.2. Élément de stratifié.

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u(x, y, 0) + z\varphi_x(x, y) + z^2\psi_x(x, y) + z^3\phi_x(x, y), \\
v(x, y, z) &= v(x, y, 0) + z\varphi_y(x, y) + z^2\psi_y(x, y) + z^3\phi_y(x, y), \\
w(x, y, z) &= w(x, y, 0) + z\varphi_z(x, y) + z^2\psi_z(x, y).
\end{aligned} \tag{13.1}$$

Cette forme du champ des déplacements répond aux conditions de compatibilité des déformations (6.18), et permet de prendre en compte un gauchissement éventuel de la section droite des plaques lors de la déformation. Dans le cas de problèmes de dynamique, le facteur temps doit être introduit dans les relations (13.1).

Le déplacement d'un point quelconque  $M(x, y, z)$  est donc développé, suivant (13.1), en série de la variable  $z$  à coefficients en  $(x, y)$ , à partir du point de référence  $M_0(x, y, 0)$  du plan  $(Oxy)$ . Le champ de déplacement du point  $M_0$  sera noté par la suite suivant l'une des notations :

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_0(x, y) = u(x, y, 0), \\
v_0 &= v_0(x, y) = v(x, y, 0), \\
w_0 &= w_0(x, y) = w(x, y, 0).
\end{aligned} \tag{13.2}$$

### 13.2.2 Déformation d'une normale

Cherchons la déformée d'une normale  $AB$  au plan de la plaque, définie par  $(x = a, y = b)$  (figure 13.3). Tout point  $M$  appartenant à la normale  $AB$  a pour coordonnées  $(a, b, z)$  et son déplacement s'écrit d'après (13.1) :

$$\begin{aligned}
u(a, b, z) &= u(a, b, 0) + z\varphi_x(a, b) + z^2\psi_x(a, b) + z^3\phi_x(a, b), \\
v(a, b, z) &= v(a, b, 0) + z\varphi_y(a, b) + z^2\psi_y(a, b) + z^3\phi_y(a, b), \\
w(a, b, z) &= w(a, b, 0) + z\varphi_z(a, b) + z^2\psi_z(a, b).
\end{aligned}$$

L'équation de la déformée de la normale  $AB$  s'écrit donc, avec des notations évidentes, sous la forme polynomiale en  $z$  :

$$\begin{aligned}
u(a, b, z) &= A_u + B_u z + C_u z^2 + D_u z^3, \\
v(a, b, z) &= A_v + B_v z + C_v z^2 + D_v z^3, \\
w(a, b, z) &= A_w + B_w z + C_w z^2.
\end{aligned}$$

Lors de la déformation de la plaque, la normale  $AB$  subit donc :

- une translation sans déformation suivant  $A'B'$ , composée d'une translation  $[A_u = u(a, b, 0), A_v = v(a, b, 0)]$  dans le plan  $(Oxy)$  et d'une translation  $[A_w = w(a, b, 0)]$  suivant l'axe  $\overrightarrow{Oz}$ ;
- puis une déformation suivant  $A''B''$ , exprimée par les termes en  $z$  et dont la forme dépend du degré en  $z$ .

Le champ des déplacements (13.1) prend donc en compte un gauchissement éventuel des normales lors de la déformation de la plaque.

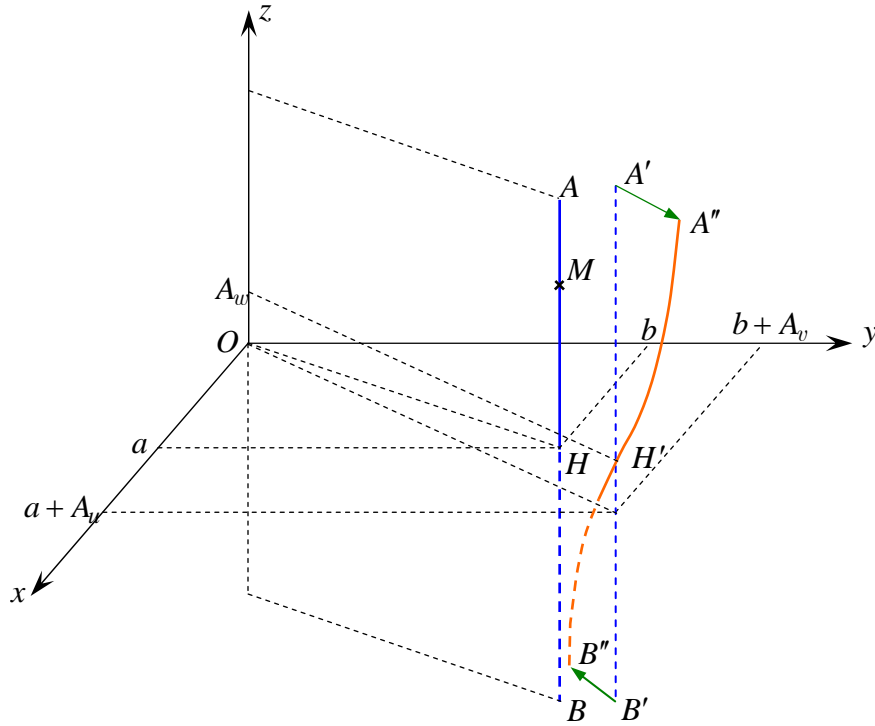


FIGURE 13.3. Déformée d'une normale  $AB$  au plan moyen, prenant en compte le gauçhissement.

### 13.2.3 Schémas du premier degré

Les schémas les plus simples et les plus utilisés (par exemple schéma de Hencky-Mindlin, schéma de Kirchhoff) pour décrire le comportement des plaques se réduisent à des schémas du premier degré de la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x, y, 0) + z\varphi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v(x, y, 0) + z\varphi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w(x, y, 0). \end{aligned} \quad (13.3)$$

ou

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad (13.4)$$

Dans un schéma du premier degré, la déformée d'une normale  $AB$  est donnée par :

$$\begin{aligned} u(a, b, z) &= A_u + B_u z, \\ v(a, b, z) &= A_v + B_v z, \\ w(a, b, z) &= A_w. \end{aligned}$$

La déformée  $A''B''$  reste dans ce cas un segment de droite : les points situés sur

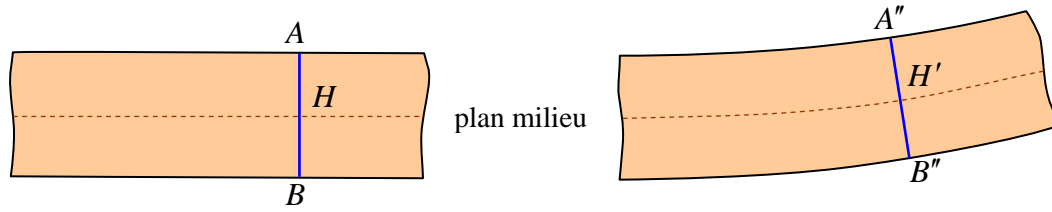


FIGURE 13.4. Déformation dans le cas d'un schéma du premier degré, en l'absence de cisaillement transverse.

une normale au plan moyen ( $Oxy$ ) avant déformation restent sur un segment de droite au cours de la déformation.

De plus, dans le cas où le cisaillement transverse n'est pas pris en compte (paragraphe 14.1.1), les angles ne sont pas modifiés lors de la déformation et la déformée de  $AB$  reste normale à la déformée du plan moyen (figure 13.4). Dans ce cas, la déformée en  $H$  (déformée du plan ( $Oxy$ ) et déformée de la normale  $AB$ ) pourra être caractérisée (figure 13.5) par :

- les déplacements du point  $H$ : déplacement dans le plan ( $Oxy$ ) [ $u(a, b, 0) = A_u$ ,  $v(a, b, 0) = A_v$ ] et déplacement transverse [ $w(a, b, 0) = A_w$ ];
- les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  autour des directions  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .

Dans la pratique, il est plus usuel de caractériser la rotation par les angles  $\beta_x$  et  $\beta_y$  (figure 13.5), reliés à  $\theta_x$  et  $\theta_y$  par :

$$\beta_x = \theta_y \quad \text{et} \quad \beta_y = -\theta_x. \quad (13.5)$$

Un schéma du premier degré permet de résoudre la plupart des problèmes élémentaires. Dans le cas où un schéma du premier degré ne permettrait pas d'approcher convenablement un problème donné, il serait alors nécessaire de considérer un schéma du deuxième ordre, voire du troisième ordre.

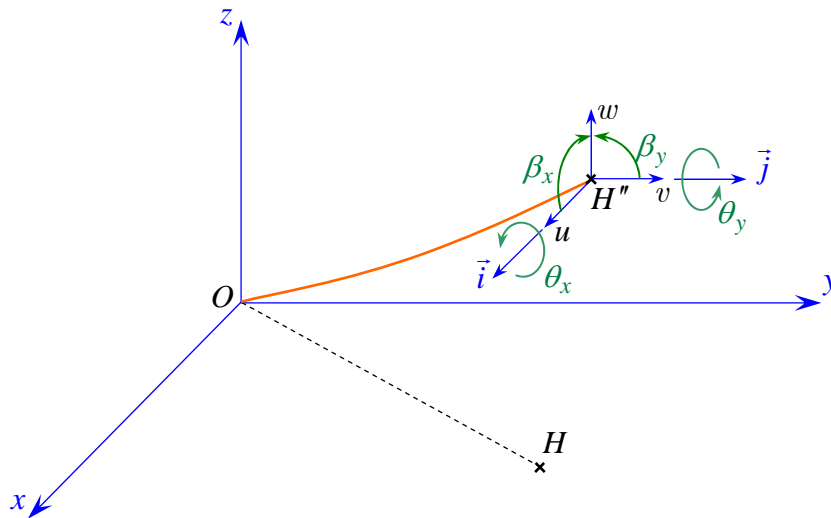


FIGURE 13.5. Caractérisation de la déformée en un point, en l'absence de cisaillement transverse.

## 13.3 CHAMP DES DÉFORMATIONS

### 13.3.1 Expressions générales

Le champ des déformations est exprimé en coordonnées cartésiennes par les expressions (8.19). Dans le cas d'une théorie générale du troisième ordre, le champ des déformations se déduit de l'expression (13.1) du champ des déplacements. Soit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + z^2 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + z^3 \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + z^2 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + z^3 \frac{\partial \phi_y}{\partial y}, \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \varphi_z(x, y) + 2z\psi_z(x, y), \\
 \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
 &= \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + z \left( 2\psi_y + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \right) + z^2 \left( 3\phi_y + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \right), \\
 \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
 &= \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + z \left( 2\psi_x + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right) + z^2 \left( 3\phi_x + \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right), \\
 \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + z^2 \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + z^3 \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right).
 \end{aligned} \tag{13.6}$$

Ces expressions montrent que la troncature utilisée dans les expressions (13.1) du déplacement est consistante, dans le sens que les déformations en cisaillement transverse résultant des déplacements dans le plan sont du même ordre en  $z$  que les déformations déterminées par le déplacement transverse  $w$ .

### 13.3.2 Schéma du premier degré

Dans le cas d'un schéma du premier degré, le champ des déplacements est exprimé par les relations (13.4). Le champ des déformations se déduit alors simplement des relations (13.6) et s'écrit :



$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \\
\gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\
\gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\
\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right).
\end{aligned} \tag{13.7}$$

Ce champ des déformations est celui d'un schéma du premier degré avec prise en compte du cisaillement transverse.

## 13.4 CHAMP DES CONTRAINTES

### 13.4.1 Expression générale

La forme de la matrice de rigidité d'une couche de composite unidirectionnel ou tissu, rapportée aux axes  $(Oxyz)$  du stratifié, a été étudiée au chapitre 11. L'état des contraintes en un point  $M$  du stratifié s'exprime en fonction du champ des déformations par la relation (11.3). Si le point  $M$  appartient à la couche  $k$  du stratifié, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \tag{13.8}$$

où  $C'_{ij}$  sont les coefficients de rigidité de la couche  $k$ .

Dans le cas général, le champ des déformations est donné par les expressions (13.6). Il en résulte que les contraintes dans la couche  $k$  sont des polynômes en  $z$ . La théorie des plaques a pour objet de simplifier le problème de l'analyse du comportement mécanique d'une plaque en trois dimensions  $(x, y, z)$  en un problème à deux dimensions  $(x, y)$ . La réduction du problème est obtenue par intégration des contraintes suivant l'épaisseur de la plaque. Cette intégration conduit à introduire les résultantes et moments, exercés sur la plaque, qui seront définis au paragraphe 13.5.

### 13.4.2 Simplification dans le cadre de la théorie des plaques

La théorie élémentaire des plaques fait l'hypothèse que les contraintes normales  $\sigma_{zz}$  sont négligeables dans le volume de la plaque, par rapport aux autres composantes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ . Cette hypothèse est étendue à la théorie des stratifiés, soit :

$$\sigma_{zz} = 0. \quad (13.9)$$

Cette hypothèse est généralement vérifiée dans la pratique. Si ce n'est pas le cas, la théorie élémentaire des plaques ne peut plus être utilisée.

Avec l'hypothèse précédente, la relation (13.8) contrainte-déformation s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (13.10)$$

Cette relation peut être réécrite en séparant les contraintes et déformations de cisaillement transverse suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & C'_{16} & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & C'_{26} & 0 & 0 \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & C'_{36} & 0 & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & C'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}. \quad (13.11)$$

L'état des contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  et des déformations  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\gamma_{xy}$  correspond à l'état de contraintes planes, étudié au paragraphe 11.3. En appliquant les résultats obtenus dans ce paragraphe, les contraintes dans la couche  $k$  s'expriment à l'aide des coefficients de rigidité  $Q'_{ij}$  suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}, \quad (13.12)$$

avec

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{1}{C'_{33}}(C'_{13}\varepsilon_{xx} + C'_{23}\varepsilon_{yy} + C'_{36}\gamma_{xy}). \quad (13.13)$$

Les coefficients  $Q'_{ij}$  de la matrice de rigidité réduite de la couche  $k$  ont été introduits en (11.43). Par la suite, ils seront notés suivant l'une des notations  $Q'_{ij}$  ou  $Q_{ij}^k$ . La discontinuité de la matrice de rigidité d'une couche à l'autre implique la discontinuité des contraintes au passage d'une couche à l'autre.

## 13.5 RÉSULTANTES ET MOMENTS

### 13.5.1 Résultantes en membrane

Le champ des résultantes en membrane, noté  $N(x, y)$ , est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_k(M) dz, \quad (13.14)$$

où  $\sigma_k(M)$  est la matrice des contraintes en membrane  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  dans la couche  $k$ . Soit :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz. \quad (13.15)$$

Les composantes  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  sont les résultantes, par unité de longueur de plaque, respectivement des contraintes normales (suivant  $x$  et suivant  $y$ ) et des contraintes de cisaillement, dans le plan  $(x, y)$ . Elles sont schématisées symboliquement sur la figure 13.6.

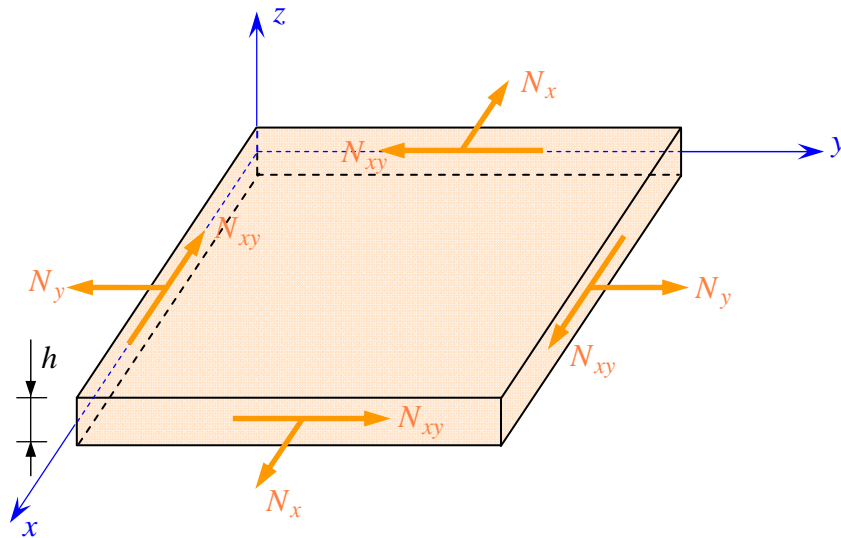


FIGURE 13.6. Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié.

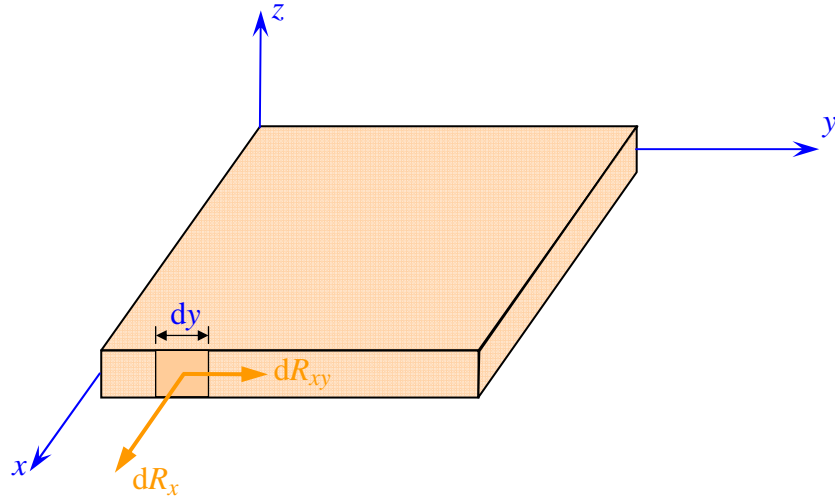


FIGURE 13.7. Résultantes de l'action exercée sur un élément de surface du stratifié.

Il faut bien noter que ces résultantes sont relatives à l'unité de longueur de section droite du stratifié. Ceci signifie que, par exemple, la résultante de l'action exercée sur un élément de surface normal à la direction  $\vec{i}$  et de longueur  $dy$  (figure 13.7) est la superposition de :

- la résultante normale  $dR_x = N_x dy$ ,
  - la résultante de cisaillement  $dR_{xy} = N_{xy} dy$ .
- (13.16)

La discontinuité des contraintes en passant d'une couche à l'autre conduit à réécrire la relation (13.15) sous la forme :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz. \quad (13.17)$$

### 13.5.2 Résultantes en cisaillement

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manière par :

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_k dz. \quad (13.18)$$

Comme les résultantes en membrane, les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié. Elles sont schématisées sur la figure (13.8).

### 13.5.3 Moments de flexion et de torsion

Les relations fondamentales des stratifiés font également intervenir les moments résultants des contraintes exercées sur un élément du stratifié. Les

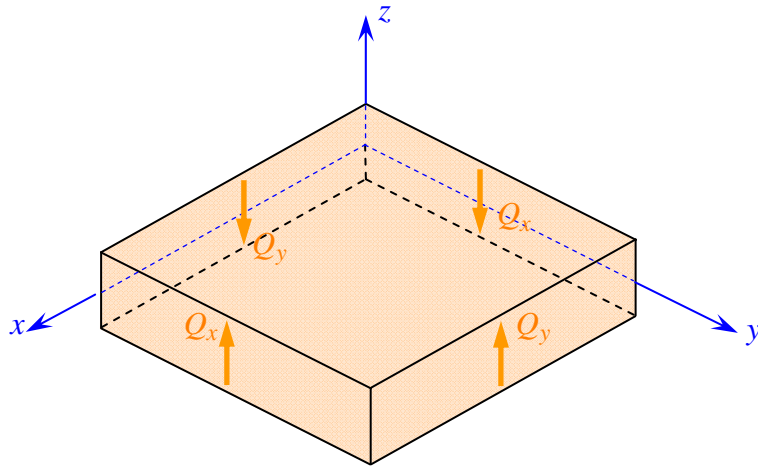


FIGURE 13.8. Représentation schématique des résultantes de cisaillement.

moments de flexion et de torsion sont définis par :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz. \quad (13.19)$$

Les composantes  $M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion suivant les directions  $x$  et  $y$ , respectivement, et la composante  $M_{xy}$  est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la figure 13.9.

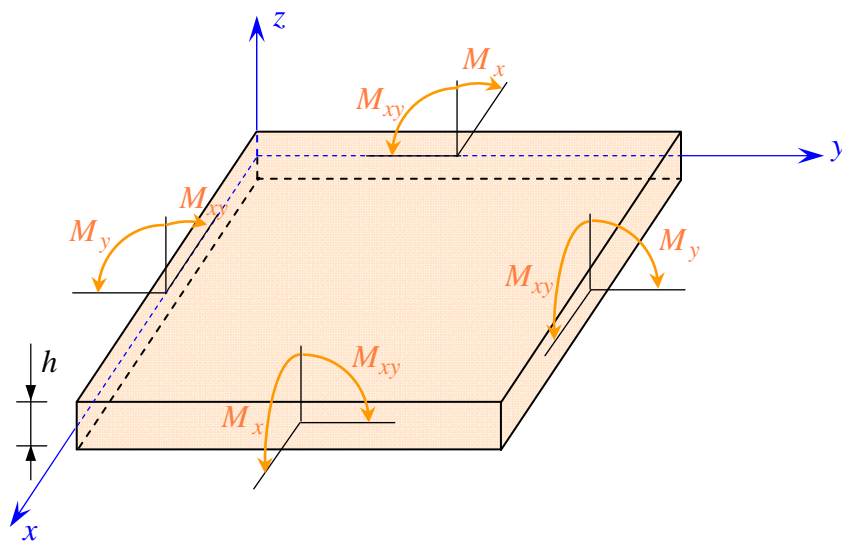


FIGURE 13.9. Schématisation des moments de flexion et de torsion.

## 13.6 RELATIONS FONDAMENTALES DES PLAQUES DANS LE CAS D'UN SCHÉMA DU PREMIER DEGRÉ

### 13.6.1 Relations fondamentales de la mécanique des matériaux

Les relations fondamentales des plaques sont tirées de la relation fondamentale (8.20) que nous écrivons sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{xz} + f_x &= \rho a_x, \\ \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xy} + f_y &= \rho a_y, \\ \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yz} + f_z &= \rho a_z,\end{aligned}\tag{13.20}$$

où  $f_x, f_y, f_z$  sont les composantes des forces volumiques exercées au point  $M$  du matériau ;  $a_x, a_y, a_z$  sont les composantes du vecteur accélération du point  $M$  ; et  $\rho$  est la masse volumique au point  $M$  du matériau.

L'objet de l'ensemble des paragraphes (13.6) est de déduire des relations (13.20) les relations fondamentales des plaques dans le cas d'un schéma du premier degré.

### 13.6.2 Relations fondamentales relatives aux résultantes en membrane

L'intégration des équations (13.20), suivant l'épaisseur du stratifié, conduit aux relations fondamentales d'un élément de plaque, relatives aux résultantes. L'intégration des deux premières aboutit aux relations relatives aux résultantes de membrane. Par exemple, l'intégration de la première équation s'écrit :

$$\begin{aligned}\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_x dz \\ = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz.\end{aligned}\tag{13.21}$$

Le premier terme de cette équation s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = \frac{\partial N_x}{\partial x}.\tag{13.22}$$

De même :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}.\tag{13.23}$$

Le troisième terme de l'équation (13.21) s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \sigma_{xz}(h/2) - \sigma_{xz}(-h/2),$$

où les contraintes  $\sigma_{xz}(h/2)$  et  $\sigma_{xz}(-h/2)$  sont les contraintes éventuelles de cisaillement exercées sur les faces supérieure et inférieure du stratifié. Ces contraintes sont généralement nulles. Dans le cas où il sera nécessaire d'en tenir compte, nous les noterons :

$$\sigma_{xz}(h/2) = \tau_{1x} \quad \text{et} \quad \sigma_{xz}(-h/2) = \tau_{2x}. \quad (13.24)$$

D'où :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz = \tau_{1x} - \tau_{2x}. \quad (13.25)$$

Enfin, nous poserons :

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = F_x. \quad (13.26)$$

L'intégration du second membre de l'équation (13.21) nécessite d'introduire les expressions des déplacements en fonction de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et du temps  $t$ . Dans un schéma du premier ordre, elles sont obtenues en introduisant le temps dans les expressions (13.4), soit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t). \end{aligned} \quad (13.27)$$

Le second membre s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x, y, z) \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \right) dz \\ &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz. \end{aligned}$$

Soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \quad (13.28)$$

en introduisant :

$$\rho_s = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \quad (13.29)$$

la masse surfacique du stratifié au point  $(x, y)$ , et la grandeur :

$$R = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z \, dz. \quad (13.30)$$

L'intégration de la première des équations (13.20) conduit donc finalement à :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}. \quad (13.31)$$

De même, l'intégration de la deuxième des équations (13.20) conduit à :

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}, \quad (13.32)$$

où les composantes  $\tau_{1y}$  et  $\tau_{2y}$  tiennent compte des contraintes éventuelles de cisaillement exercées sur les faces :

$$\sigma_{yz}(h/2) = \tau_{1y} \quad \text{et} \quad \sigma_{yz}(-h/2) = \tau_{2y}, \quad (13.33)$$

et en introduisant la composante :

$$F_y = \int_{-h/2}^{h/2} f_y \, dz. \quad (13.34)$$

### 13.6.3 Relation fondamentale relative aux résultantes de cisaillement

L'intégration suivant l'épaisseur du stratifié de la troisième des équations (13.20) conduit à :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \, dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} \, dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} \, dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_z \, dz \\ = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_z \, dz. \end{aligned} \quad (13.35)$$

Le second terme s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} \, dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} \, dz = \frac{\partial Q_y}{\partial y}. \quad (13.36)$$

De même :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} \, dz = \frac{\partial Q_x}{\partial x}. \quad (13.37)$$

Le troisième terme s'exprime sous la forme :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \, dz = \sigma_{zz}(h/2) - \sigma_{zz}(-h/2),$$



où les contraintes  $\sigma_{zz}(h/2)$  et  $\sigma_{zz}(-h/2)$  apparaissent comme des composantes de pression exercées sur chaque face de la plaque. Nous notons leur différence :

$$q(x, y) = q = \sigma_{zz}(h/2) - \sigma_{zz}(-h/2). \quad (13.38)$$

D'où

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz = q. \quad (13.39)$$

Enfin

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho a_z dz = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \quad (13.40)$$

L'introduction des équations (13.36) à (13.40) dans l'équation (13.35) conduit finalement à :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \quad (13.41)$$

en introduisant la composante :

$$F_z = \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz. \quad (13.42)$$

### 13.6.4 Relations fondamentales relatives aux moments

Les relations fondamentales relatives aux moments sont obtenues en multipliant par  $z$  les deux premières des équations (13.20), puis en intégrant suivant l'épaisseur du stratifié. Par exemple, la première conduit à :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_x dz. \quad (13.43)$$

En intégrant par parties, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz &= [z \sigma_{xz}]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \\ &= \frac{h}{2} \sigma_{xz}(h/2) + \frac{h}{2} \sigma_{xz}(-h/2) - Q_x. \end{aligned}$$

Soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) - Q_x. \quad (13.44)$$

Le second membre de l'équation (13.43) s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_x \, dz &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho z \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \right) dz \\ &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z \, dz + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 \, dz. \end{aligned}$$

Soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_x \, dz = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \quad (13.45)$$

en posant :

$$I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 \, dz. \quad (13.46)$$

La grandeur  $I_{xy}$  est le moment d'inertie par rapport au plan moyen ( $Oxy$ ) de l'élément de plaque localisé au point ( $x, y$ ) et ayant des côtés égaux à l'unité.

La première relation des moments s'écrit donc :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \quad (13.47)$$

en introduisant la composante des moments des forces volumiques exercées :

$$P_x = \int_{-h/2}^{h/2} z f_x \, dz$$

De même, la deuxième équation (13.20) conduit à :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2} (\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}, \quad (13.48)$$

en introduisant la composante des moments :

$$P_y = \int_{-h/2}^{h/2} z f_y \, dz. \quad (13.49)$$

### 13.6.5 Résumé des relations fondamentales

Les relations fondamentales des plaques sont donc constituées des expressions (13.31), (13.32), (13.41), (13.47) et (13.48). Soit en les regroupant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x &= R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y &= R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{13.50}$$

avec

$$\rho_s, R, I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho dz.$$

Les trois dernières équations permettent d'obtenir une relation indépendante des résultantes de cisaillement suivant :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q \\
&= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + R \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_{xy} \left( \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial t^2} \right).
\end{aligned} \tag{13.51}$$

Les équations (13.50), (13.51) constituent les équations de mouvement de la théorie classique des plaques. Elles sont applicables aussi bien à des plaques homogènes qu'à des plaques stratifiées. Les deux premières équations (13.50), associées à (13.51), constituent les équations fondamentales des plaques en l'absence de cisaillement transverse, soit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q \\
&= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + R \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_{xy} \left( \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial t^2} \right).
\end{aligned} \tag{13.52}$$

Les grandeurs  $\rho_s$ ,  $R$  et  $I_{xy}$  se calculent sans difficulté dans le cas où la plaque est constituée de  $n$  couches, la couche  $k$  ayant une masse volumique  $\rho_k$ . Nous avons, d'après (13.29) :

$$\rho_s = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \, dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k \, dz = \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1}). \quad (13.53)$$

De même, les grandeurs  $R$  et  $I_{xy}$  s'expriment suivant :

$$R = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad (13.54)$$

$$I_{xy} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k^3 - h_{k-1}^3). \quad (13.55)$$

Dans la plupart des cas, les termes d'inertie de rotation peuvent être négligés et, en l'absence de forces volumiques et de contraintes de cisaillement sur les faces, les équations des plaques se simplifient suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0. \end{aligned} \quad (13.56)$$

Ces relations peuvent également être écrites en éliminant les résultantes de cisaillement, suivant une forme analogue à (13.52). Soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (13.57)$$

### 13.6.6 Problèmes de statique

Dans le cas de problèmes de statique, les déplacements sont indépendants du temps et les relations fondamentales des plaques se réduisent à :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \\
 \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0, \\
 \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0, \\
 \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0.
 \end{aligned} \tag{13.58}$$

ou en éliminant les résultantes de cisaillement :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \\
 \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q &= 0.
 \end{aligned} \tag{13.59}$$

## EXERCICES

**13.1** Un stratifié est constitué de trois couches 1, 2 et 3, orientées respectivement dans les directions  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  et  $45^\circ$ . Ces couches, de même épaisseur  $h = 1$  mm, ont les mêmes caractéristiques mécaniques :

$$E_L = 160 \text{ GPa}, \quad E_T = 15 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,32,$$

$$G_{LT} = 5 \text{ GPa}, \quad G_{TT'} = 4,5 \text{ GPa}.$$

En un point, le stratifié est soumis à l'état de déformation :

$$\varepsilon_{xx} = 0,40 \%, \quad \varepsilon_{yy} = 0,25 \%, \quad \gamma_{xy} = 0,50 \%, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0,50 \%.$$

Calculer les contraintes dans chaque couche du stratifié; puis les résultantes en membrane et cisaillement, les moments de flexion et torsion nécessaires pour obtenir cet état de déformation.

**13.2** Reprendre l'exercice précédent dans le cas où l'ordre des couches du stratifié est inversé. Comparer les résultats obtenus dans les deux cas.

# Théorie Classique des Stratifiés

## 14.1 CHAMP DES DÉFORMATIONS

### 14.1.1 Hypothèses de la théorie classique des stratifiés

La théorie classique des stratifiés utilise un schéma de déformation du premier degré (13.7). Elle fait ensuite une hypothèse supplémentaire qui consiste à négliger le cisaillement transverse. Dans ce schéma, les déformations en cisaillement transverse sont donc nulles, soit :

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0. \quad (14.1)$$

Cette hypothèse implique, d'après (13.7) :

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ \varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y}. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Le champ des déplacements s'écrit alors, d'après (13.4) :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad (14.3)$$

La déformée de la normale au plan moyen ( $Oxy$ ) est alors un segment de droite normal à la déformée du plan moyen (paragraphe 13.2.3 et figure 13.4). L'ensemble des notations, utilisées dans le cas du schéma de la théorie classique des stratifiés, est schématisé sur la figure 14.1.

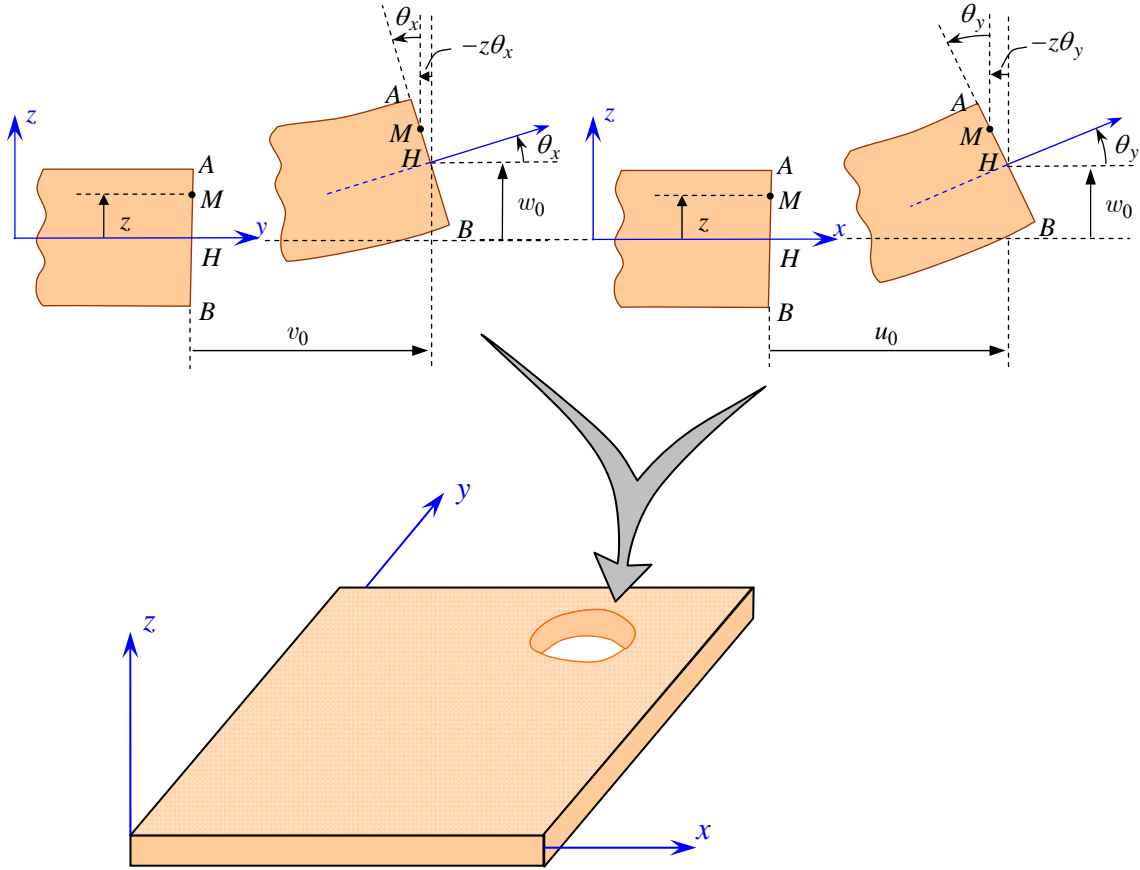


FIGURE 14.1. Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés.

### 14.1.2 Expression du champ des déformations

Le champ des déformations s'écrit, d'après (13.7) et en tenant compte des expressions (14.2) :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\
 \varepsilon_{zz} &= 0, \\
 \gamma_{yz} &= 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \\
 \gamma_{xy} &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned} \tag{14.4}$$



Le tenseur des déformations en un point  $M$  est :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (14.5)$$

et la matrice des déformations se réduit à trois composantes non nulles :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (14.6)$$

Le champ des déformations est la superposition :

— *des déformations en membrane :*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (14.7)$$

s'exprimant exclusivement en fonction des déplacements  $(u_0, v_0)$  dans le plan  $(Oxy)$  des points de ce plan ;

— *des déformations en flexion et torsion :*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad (14.8)$$

s'exprimant en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote  $z$  du point  $M$ . Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f(M) = z \boldsymbol{\kappa}(x, y), \quad (14.9)$$

en posant :

$$\mathbf{\kappa}(x, y) = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad (14.10)$$

La matrice  $\mathbf{\kappa}(x, y)$  est appelée *matrice des courbures* de la plaque sollicitée en flexion.

Les angles de rotation de la déformée du plan moyen au point  $H(x, y, 0)$  s'expriment (figure 14.1) en fonction du déplacement transversal  $w_0(x, y)$  de ce point par :

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial w_0}{\partial y} \text{ suivant la direction } \vec{i}, \\ \theta_y &= \frac{\partial w_0}{\partial x} \text{ suivant la direction } \vec{j}. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Le champ des déplacements (14.3) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\theta_y, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\theta_x, \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad (14.12)$$

Finalement, le champ des déformations s'écrit :

$$\mathbf{\epsilon}(M) = \mathbf{\epsilon}_m(M) + \mathbf{\epsilon}_f(M), \quad (14.13)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (14.14)$$

avec

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y), & \epsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}(x, y), & \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y), & \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y), & \kappa_{xy} &= -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(x, y). \end{aligned} \quad (14.15)$$

Sous forme abrégée, le champ des déformations s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z\boldsymbol{\kappa}(x, y). \quad (14.16)$$

Les déformations en membrane  $\boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y)$  et courbures  $\boldsymbol{\kappa}(x, y)$  ne dépendent que des coordonnées  $(x, y)$  du point  $H$  du plan moyen du stratifié.

## 14.2 CHAMP DES CONTRAINTES

### 14.2.1 Forme du champ des contraintes

Le champ des contraintes est obtenu à l'aide de la relation (13.12). Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, nous obtenons, pour la couche  $k$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= Q'_{11}\varepsilon_{xx} + Q'_{12}\varepsilon_{yy} + Q'_{16}\gamma_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= Q'_{12}\varepsilon_{xx} + Q'_{22}\varepsilon_{yy} + Q'_{26}\gamma_{xy}, \\ \sigma_{xy} &= Q'_{16}\varepsilon_{xx} + Q'_{26}\varepsilon_{yy} + Q'_{66}\gamma_{xy}, \\ \sigma_{yz} &= 0, \\ \sigma_{xz} &= 0. \end{aligned} \quad (14.17)$$

Le tenseur des contraintes en  $M$  est donc de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14.18)$$

Le champ des contraintes se réduit aux seules contraintes en membrane :  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$ .

### 14.2.2 Expression des contraintes

Les relations (14.17) montrent que les contraintes dans la couche  $k$  s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \mathbf{Q}'_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (14.19)$$

avec

$$\mathbf{Q}'_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k$$

où  $\mathbf{Q}'_k$  est la matrice de rigidité réduite de la couche  $k$  introduite en (11.43) et dont les termes sont exprimés en fonction des modules par les relations (11.52).

En tenant compte de (14.14), les contraintes dans la couche  $k$  s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (14.20)$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma}_k(M) = \boldsymbol{\sigma}_k(x, y, z) = \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\kappa}(x, y). \quad (14.21)$$

La matrice  $\boldsymbol{\sigma}_k(M)$  représente la matrice des contraintes dans la couche  $k$  :  $h_{k-1} \leq z \leq h_k$ . La matrice de rigidité réduite  $\mathbf{Q}'_k$  varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

## 14.3 EXPRESSION DES RÉSULTANTES ET MOMENTS

### 14.3.1 Résultantes en membrane

L'expression (13.17) associée à la relation (14.20) ou (14.21) conduit à l'expression des résultantes en membrane, dans le cadre de la théorie classique des stratifiés. Nous obtenons :

$$\mathbf{N}(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\kappa}(x, y)] dz.$$

Soit :

$$\mathbf{N}(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[ \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\kappa}(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right],$$

ou en intégrant dans l'épaisseur :

$$\mathbf{N}(x, y) = \left[ \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \mathbf{Q}'_k \right] \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \mathbf{Q}'_k \right] \boldsymbol{\kappa}(x, y).$$

L'expression précédente de la matrice des résultantes peut finalement s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{N}(x, y) = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}(x, y), \quad (14.22)$$

en introduisant les matrices :

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \mathbf{Q}'_k, \quad (14.23)$$

$$\mathbf{A} = [A_{ij}] \quad \text{avec} \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k,$$

et

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \mathbf{Q}'_k, \quad (14.24)$$

$$\mathbf{B} = [B_{ij}] \quad \text{avec} \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q'_{ij})_k.$$

L'expression développée des résultantes en membrane s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (14.25)$$

Ces équations montrent que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane ( $N_x, N_y, N_{xy}$ ) ne sont pas seulement fonctions des déformations en membrane ( $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \gamma_{xy}^0$ ) (comme dans le cas de plaques homogènes), mais sont également fonctions des courbures en flexion et en torsion ( $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ ).

### 14.3.2 Moments de flexion et de torsion

Le champ des moments s'explicite en introduisant l'expression (14.21) des contraintes dans l'expression (13.19). Soit :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[ z \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z^2 \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\kappa}(x, y) \right] dz,$$

ce qui conduit à :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \mathbf{Q}'_k \right] \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) \mathbf{Q}'_k \right] \boldsymbol{\kappa}(x, y).$$

La matrice des moments de flexion s'écrit donc suivant :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}(x, y), \quad (14.26)$$

en introduisant la nouvelle matrice :

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \mathbf{Q}'_k, \quad (14.27)$$

$$\mathbf{D} = [D_{ij}] \quad \text{avec} \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (\mathcal{Q}'_{ij})_k.$$

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (14.28)$$

Les moments de flexion et torsion sont donc fonctions des courbures en flexion et en torsion, mais sont également fonctions des déformations en membrane.

## 14.4 ÉQUATION DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE D'UN STRATIFIÉ

### 14.4.1 Équation constitutive

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures. Elle s'obtient en regroupant les expressions (14.25) et (14.28) suivant une seule écriture matricielle sous la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (14.29)$$

Cette équation constitutive peut également être écrite sous forme contractée suivant:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix}. \quad (14.30)$$

Les termes des matrices introduites  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  sont donnés par les expressions (14.23), (14.24) et (14.27). Ils peuvent être également exprimés, en introduisant l'épaisseur  $e_k$  et la cote  $z_k$  du centre de la couche  $k$ , sous la forme :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k, \quad (14.31)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k z_k, \quad (14.32)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right). \quad (14.33)$$

Les coefficients  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$  de l'équation constitutive (14.29) d'un stratifié s'expriment donc à partir des constantes de rigidité réduites des couches, obtenues, pour chaque couche, en fonction des modules de l'ingénieur à l'aide des relations (11.52) et des expressions reportées au tableau 11.6.

### 14.4.2 Matrice de rigidité

La matrice intervenant dans l'expression (14.29) est la matrice de rigidité du stratifié, décrivant le comportement élastique macroscopique du stratifié au point  $M_0(x, y) = M(x, y, 0)$ .

La matrice  $\mathbf{A}$  est la *matrice de rigidité en membrane*,  $\mathbf{D}$  est la *matrice de rigidité en flexion* et  $\mathbf{B}$  la *matrice de couplage membrane-flexion-torsion*. Ce couplage existe même si les matériaux des couches sont isotropes. Il résulte de la structure en couches de matériaux de caractéristiques mécaniques différentes. Le couplage est nul ( $\mathbf{B} = 0$ ), seulement dans le cas où le stratifié est symétrique. La symétrie implique une symétrie des propriétés des couches, de leurs cotes et de leurs orientations (chapitre 15).

Divers couplages peuvent être observés et mis en évidence (chapitre 15). Le couplage traction-cisaillement provient des termes  $A_{16}$  et  $A_{26}$ . Le couplage membrane-flexion résulte des termes  $B_{11}$ ,  $B_{12}$  et  $B_{22}$ , alors que le couplage membrane-torsion résulte des termes  $B_{16}$  et  $B_{26}$ . Enfin, le couplage flexion-torsion résulte des coefficients  $D_{16}$  et  $D_{26}$ . Différents types de stratifiés seront étudiés au chapitre 15.

### 14.4.3 Exemples

#### 14.4.3.1 Exemple 1

On considère un stratifié constitué de deux couches d'un composite unidirectionnel (figure 14.2). La couche inférieure de 3 mm d'épaisseur est orientée à  $45^\circ$  du repère  $(x, y, z)$  du stratifié. La couche supérieure est orientée à  $0^\circ$  et a une épaisseur de 5 mm. Le matériau composite unidirectionnel constituant les deux couches est un composite époxyde-fibres de verre de caractéristiques mécaniques :

$$E_L = 46 \text{ GPa}, \quad E_T = 10 \text{ GPa}, \quad G_{LT} = 4,6 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,31.$$

Expliciter l'équation constitutive du stratifié.

#### 1. Détermination des constantes de rigidité réduites dans les axes principaux

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = 46,982 \text{ GPa},$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} = 10,213 \text{ GPa},$$

$$Q_{12} = \nu_{LT} Q_{22} = 3,166 \text{ GPa},$$

$$Q_{66} = G_{LT} = 4,6 \text{ GPa}.$$

#### 2. Matrices de rigidité de chaque couche exprimées dans les axes du stratifié

Couche à  $0^\circ$

$$\mathbf{Q}'_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 46,982 & 3,166 & 0 \\ 3,166 & 10,213 & 0 \\ 0 & 0 & 4,6 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$$

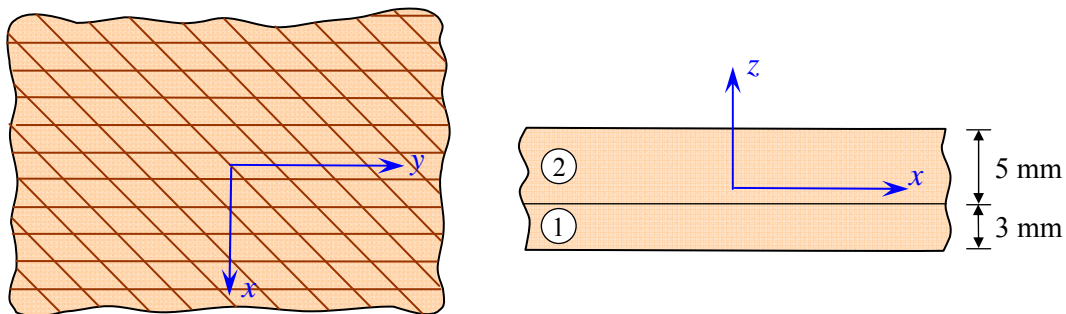


FIGURE 14.2. Stratifié à deux couches de l'exemple 1.



*Couche à 45°*

$$Q'_{11} = (Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \cos^4 45^\circ = 20,482 \text{ GPa},$$

$$Q'_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66} + 2Q_{12}) \cos^4 45^\circ = 11,282 \text{ GPa},$$

$$Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{22}) \cos^4 45^\circ = 9,192 \text{ GPa},$$

$$Q'_{22} = Q'_{11},$$

$$Q'_{26} = Q'_{16},$$

$$Q'_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}) \cos^4 45^\circ = 12,716 \text{ GPa}.$$

D'où :

$$\mathbf{Q}'_{45^\circ} = \begin{bmatrix} 20,482 & 11,282 & 9,192 \\ 11,282 & 20,482 & 9,192 \\ 9,192 & 9,192 & 12,716 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$$

### 3. Matrice A

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k \\ &= \left[ 3(Q'_{ij})_{45^\circ} + 5(Q'_{ij})_{0^\circ} \right] \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 296,35 & 49,676 & 27,576 \\ 49,676 & 112,51 & 27,576 \\ 27,576 & 27,576 & 61,147 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ Nm}^{-1}.$$

### 4. Matrice B

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q'_{ij})_k \\ &= 7,5 \left[ -(Q'_{ij})_{45^\circ} + (Q'_{ij})_{0^\circ} \right] \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 198,75 & -60,87 & -68,94 \\ -60,87 & -77,01 & -68,94 \\ -68,94 & -68,94 & -60,87 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N}.$$

## 5. Matrice D

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k$$

$$= \left[ 21(Q'_{ij})_{45^\circ} + \frac{65}{3}(Q'_{ij})_{0^\circ} \right] \times 10^{-9}.$$

Soit :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1448,07 & 305,52 & 193,03 \\ 305,52 & 651,40 & 193,03 \\ 193,03 & 193,03 & 366,70 \end{bmatrix} \text{ Nm.}$$

## 6. Équation constitutive du stratifié

En combinant les résultats précédents, l'équation constitutive du stratifié s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 296,35 \times 10^6 & 49,676 \times 10^6 & 27,576 \times 10^6 & 198,75 \times 10^3 & -60,87 \times 10^3 & -68,94 \times 10^3 \\ 49,676 \times 10^6 & 112,51 \times 10^6 & 27,576 \times 10^6 & -60,87 \times 10^3 & -77,01 \times 10^3 & -68,94 \times 10^3 \\ 27,576 \times 10^6 & 27,576 \times 10^6 & 61,147 \times 10^6 & -68,94 \times 10^3 & -68,94 \times 10^3 & -60,87 \times 10^3 \\ 198,75 \times 10^3 & -60,87 \times 10^3 & -68,94 \times 10^3 & 1448,07 & 305,52 & 193,03 \\ -60,87 \times 10^3 & -77,01 \times 10^3 & -68,94 \times 10^3 & 305,52 & 651,40 & 193,03 \\ -68,94 \times 10^3 & -68,94 \times 10^3 & -60,87 \times 10^3 & 193,03 & 193,03 & 366,70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

### 14.4.3.2 Exemple 2

Nous considérons maintenant le stratifié de la figure 14.3, constitué de quatre couches unidirectionnelles de mêmes propriétés :

$$E_L = 38 \text{ GPa}, \quad E_T = 9 \text{ GPa}, \quad G_{LT} = 3,6 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,32.$$

Les épaisseurs et les orientations des couches sont indiquées sur la figure 14.3. Ce stratifié est un stratifié antisymétrique (chapitre 15) :

- les épaisseurs des couches sont symétriques,
- les orientations des couches sont antisymétriques.

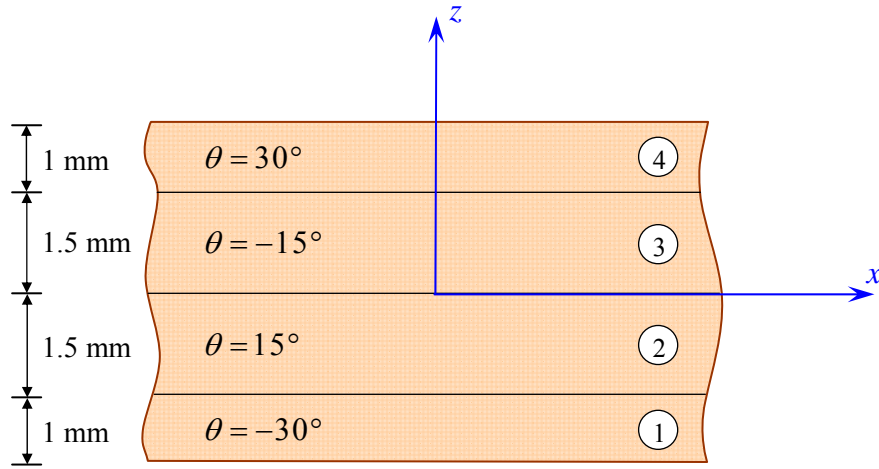


FIGURE 14.3. Stratifié à quatre couches de l'exemple 2.

### 1. Matrices de rigidité dans les axes principaux

$$\begin{aligned} Q_{11} &= 38,945 \text{ GPa}, & Q_{12} &= 2,952 \text{ GPa}, & Q_{16} &= 0, \\ Q_{22} &= 9,224 \text{ GPa}, & Q_{66} &= 3,6 \text{ GPa}, & Q_{26} &= 0. \end{aligned}$$

### 2. Matrices de rigidité de chaque couche exprimées dans les axes du stratifié

*Couche 1 à  $-30^\circ$*

$$\mathbf{Q}'_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} 26,290 & 8,176 & -9,451 \\ 8,176 & 11,429 & -3,418 \\ -9,451 & -3,418 & 8,825 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$$

*Couche 2 à  $15^\circ$*

$$\mathbf{Q}'_{15^\circ} = \begin{bmatrix} 35,212 & 4,693 & 6,732 \\ 4,693 & 9,473 & 0,699 \\ 6,732 & 0,699 & 5,342 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$$

*Couche 3 à  $-15^\circ$*

$$\mathbf{Q}'_{-15^\circ} = \begin{bmatrix} 35,212 & 4,693 & -6,732 \\ 4,693 & 9,473 & -0,699 \\ -6,732 & -0,699 & 5,342 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$$

*Couche 4 à 30°*

$$\mathbf{Q}'_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 26,290 & 8,176 & 9,451 \\ 8,176 & 11,429 & 3,418 \\ 9,451 & 3,418 & 8,825 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$$

### 3. Matrices **A**, **B** et **D**

$$A_{ij} = (Q'_{ij})_{-30} + (Q'_{ij})_{30} + 1,5 \left[ (Q'_{ij})_{15} + (Q'_{ij})_{-15} \right].$$

D'où :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 158,22 & 30,432 & 0 \\ 30,432 & 51,277 & 0 \\ 0 & 0 & 33,674 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ Nm}^{-1}.$$

De même :

$$B_{ij} = 2 \left[ (Q'_{ij})_{30} - (Q'_{ij})_{-30} \right] + 1,125 \left[ (Q'_{ij})_{-15} - (Q'_{ij})_{15} \right],$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \left\{ 12,25 \left[ (Q'_{ij})_{30} + (Q'_{ij})_{-30} \right] + 3,375 \left[ (Q'_{ij})_{15} + (Q'_{ij})_{-15} \right] \right\}.$$

D'où les matrices **B** et **D** :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 22,659 \\ 0 & 0 & 12,101 \\ 22,659 & 12,101 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 293,93 & 77,332 & 0 \\ 77,332 & 114,65 & 0 \\ 0 & 0 & 84,087 \end{bmatrix} \text{ Nm}.$$

### 4. Matrice de rigidité

La matrice de rigidité de l'équation constitutive s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 158,22 \times 10^6 & 30,432 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 22,659 \times 10^3 \\ 30,432 \times 10^6 & 51,277 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 12,101 \times 10^3 \\ 0 & 0 & 33,676 \times 10^6 & 22,659 \times 10^3 & 12,101 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 22,659 \times 10^3 & 293,93 & 77,332 & 0 \\ 0 & 0 & 12,101 \times 10^3 & 77,332 & 114,65 & 0 \\ 22,659 \times 10^3 & 12,101 \times 10^3 & 0 & 0 & 0 & 84,087 \end{bmatrix}.$$

### 14.4.3.3 Exemple 3

L'influence de l'alternance des couches peut être illustrée en considérant le stratifié de la figure 14.4, obtenu en intervertissant les couches 1 et 2, orientées respectivement à  $15^\circ$  et  $-30^\circ$ , du stratifié (figure 14.3) de l'exemple précédent. Les éléments de la matrice **A** sont exprimés suivant :

$$A_{ij} = (Q'_{ij})_{-30} + (Q'_{ij})_{30} + 1,5 \left[ (Q'_{ij})_{15} + (Q'_{ij})_{-15} \right].$$

La matrice **A** de l'empilement  $[15^\circ/-30^\circ/-15^\circ/30^\circ]$  reste donc inchangée par rapport à celle de l'empilement  $[-30^\circ/15^\circ/-15^\circ/30^\circ]$ .

Les matrices **B** et **D** se déterminent sans difficulté. Soit :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -13,384 & 5,2247 & -1,6154 \\ 5,2247 & 2,9342 & 5,9258 \\ -1,6154 & 5,9258 & 5,2247 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 327,38 & 64,271 & 60,686 \\ 64,271 & 107,32 & 15,438 \\ 60,686 & 15,438 & 71,025 \end{bmatrix} \text{ Nm}.$$

Le changement d'alternance des couches d'un empilement donné garde inchangée la matrice de rigidité en membrane, alors qu'il modifie les matrices de flexion-torsion et de couplage.

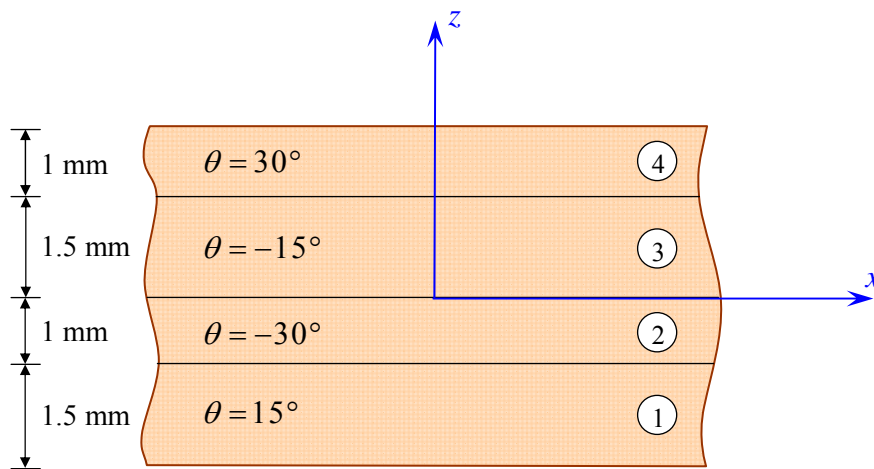


FIGURE 14.4. Stratifié à quatre couches de l'exemple 3.

## 14.5 DÉTERMINATION DES DÉFORMATIONS ET DES CONTRAINTES

### 14.5.1 Problème à résoudre

L'équation constitutive (14.29) exprime les résultantes en membrane  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  et les moments de flexion-torsion  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  en fonction des déformations en membrane  $\varepsilon_{xx}^0$ ,  $\varepsilon_{yy}^0$ ,  $\gamma_{xy}^0$  et des courbures  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$ ,  $\kappa_{xy}$ . Les problèmes de conception des structures en matériaux composites nécessite de résoudre le problème inverse : connaissant les résultantes en membrane et les moments, trouver les déformations en membrane et les courbures, puis les contraintes.

### 14.5.2 Déformations en membrane et courbures

L'expression (14.30) peut être écrite en séparant la matrice  $\mathbf{N}$  des résultantes en membrane et la matrice  $\mathbf{M}_f$  des moments :

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}, \quad (14.34)$$

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}. \quad (14.35)$$

De la première relation, nous pouvons extraire les déformations en membrane, soit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}, \quad (14.36)$$

et en reportant dans (14.35), la matrice des moments s'écrit :

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N} + (\mathbf{D} - \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}) \boldsymbol{\kappa}. \quad (14.37)$$

Les expressions (14.36) et (14.37) peuvent être réécrites sous une forme semi-inversée :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{A}^* \mathbf{N} + \mathbf{B}^* \boldsymbol{\kappa}, \quad (14.38)$$

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{C}^* \mathbf{N} + \mathbf{D}^* \boldsymbol{\kappa}. \quad (14.39)$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \mathbf{M}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{C}^* & \mathbf{D}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix}, \quad (14.40)$$

en introduisant les matrices  $\mathbf{A}^*$ ,  $\mathbf{B}^*$ ,  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{D}^*$ , telles que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^* &= \mathbf{A}^{-1}, \\
\mathbf{B}^* &= -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \\
\mathbf{C}^* &= \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{B}^{*t}, \\
\mathbf{D}^* &= \mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{B}^*.
\end{aligned} \tag{14.41}$$

Dans le cas général, les matrices  $\mathbf{A}^*$  et  $\mathbf{D}^*$  sont symétriques, alors que la matrice  $\mathbf{B}^*$  ne l'est pas.

De l'expression (14.39), nous tirons :

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{D}^{*-1}\mathbf{M}_f - \mathbf{D}^{*-1}\mathbf{C}^*\mathbf{N}, \tag{14.42}$$

et en reportant dans (14.38) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = (\mathbf{A}^* - \mathbf{B}^*\mathbf{D}^{*-1}\mathbf{C}^*)\mathbf{N} + \mathbf{B}^*\mathbf{D}^{*-1}\mathbf{M}_f. \tag{14.43}$$

Les deux équations (14.42) et (14.43) peuvent être regroupées sous forme matricielle pour obtenir la forme inverse de l'équation constitutive des stratifiés, soit :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M}_f \end{bmatrix}, \tag{14.44}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}' &= \mathbf{A}^* - \mathbf{B}^*\mathbf{D}^{*-1}\mathbf{C}^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*\mathbf{D}^{*-1}\mathbf{B}^{*t}, \\
\mathbf{B}' &= \mathbf{B}^*\mathbf{D}^{*-1}, \\
\mathbf{C}' &= -\mathbf{D}^{*-1}\mathbf{C}^* = \mathbf{B}'^t, \\
\mathbf{D}' &= \mathbf{D}^{*-1}.
\end{aligned} \tag{14.45}$$

La forme inverse de l'équation constitutive est écrite (14.44) sous une forme analogue à la forme (14.30). Elle fait intervenir des inversions sur des sous-matrices  $3 \times 3$  de la forme directe. La matrice de rigidité inverse peut également être obtenue par inversion directe de la matrice de rigidité introduite en (14.29).

### 14.5.3 Champ des déformations

Le champ des déformations au point  $(x, y, z)$  est déterminé à partir des déformations en membrane et des courbures à l'aide de l'expression (14.14). Compte tenu des hypothèses faites (schéma du premier degré), les déformations  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  et  $\gamma_{xy}$  varient linéairement dans l'épaisseur du stratifié. Les déformations, exprimées dans les axes principaux de la couche d'orientation  $\theta$  par rapport aux axes du stratifié (figure 11.1) s'obtiennent ensuite à partir de la relation générale (6.41) de

changement de base. Dans le cas présent, ces relations sont limitées à trois déformations. Les déformations dans la couche  $k$ , et rapportées aux axes principaux  $(L, T, T')$  de cette couche, s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_k = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (14.46)$$

où la matrice de changement d'axes est exprimée suivant :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (14.47)$$

### 14.5.4 Champ des contraintes

Les contraintes dans la couche  $k$  sont ensuite obtenues par l'une des équations (14.19) ou (14.20). Par exemple :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (14.48)$$

Les contraintes, exprimées par rapport aux axes principaux de la couche, se calculent ensuite soit en effectuant un changement de base sur les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$ , soit directement à partir des déformations  $\varepsilon_L$ ,  $\varepsilon_T$ ,  $\gamma_{LT}$  dans les axes principaux.

Par changement de base, l'expression est obtenue à partir de la relation générale (5.44). Soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_k = \mathbf{T}' \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k, \quad (14.49)$$

en introduisant la matrice :

$$\mathbf{T}' = [\mathbf{T}(-\theta)]^t = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (14.50)$$



Les contraintes dans les axes principaux de la couche  $k$  peuvent également être obtenues à partir des déformations exprimées dans les axes principaux. Les contraintes s'expriment alors suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_k. \quad (14.51)$$

### 14.5.5 Exemple

Les efforts imposés à une structure constituée d'un matériau stratifié sont tels qu'ils se réduisent en un point à des résultantes de membrane  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  (figure 14.5). Déterminer au point considéré :

1. les déformations en membrane et les courbures ;
2. les déformations dans chaque couche rapportées aux axes du stratifié, puis aux axes principaux des couches ;
3. les contraintes dans chaque couche rapportées aux axes du stratifié, puis aux axes principaux des couches ;

dans le cas où le matériau stratifié est celui de l'exemple 3 du paragraphe 14.4.3.3 (figure 14.4) et les valeurs des résultantes de membrane sont :

$$N_x = 1\,000 \text{ N/mm}, \quad N_y = 500 \text{ N/mm}, \quad N_{xy} = 250 \text{ N/mm}.$$

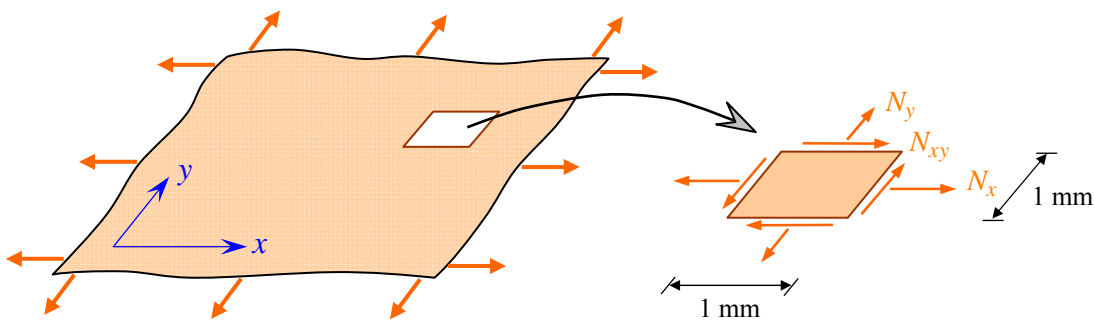


FIGURE 14.5. Efforts en membrane exercés en un point d'un stratifié.

### 1. Déformations en membrane et courbures

Compte tenu des résultats établis dans l'exemple 3 du paragraphe 14.4.3.3, l'équation constitutive du stratifié s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 250 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3 = \begin{bmatrix} 158,22 \times 10^6 & 30,432 \times 10^6 & 0 & -13,384 \times 10^3 & 5,2247 \times 10^3 & -1,6154 \times 10^3 \\ 30,432 \times 10^6 & 51,277 \times 10^6 & 0 & 5,2247 \times 10^3 & 2,9342 \times 10^3 & 5,9258 \times 10^3 \\ 0 & 0 & 33,674 \times 10^6 & -1,6154 \times 10^3 & 5,9258 \times 10^3 & 5,2247 \times 10^3 \\ -13,384 \times 10^3 & 5,2247 \times 10^3 & -1,6154 \times 10^3 & 327,38 & 64,271 & 60,686 \\ 5,2247 \times 10^3 & 2,9342 \times 10^3 & 5,9258 \times 10^3 & 64,271 & 107,32 & 15,438 \\ -1,6154 \times 10^3 & 5,9258 \times 10^3 & 5,2247 \times 10^3 & 60,686 & 15,438 & 71,025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}.$$

Par inversion directe ou par blocs, l'équation inverse s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,207 & -4,322 & 0,069 & 0,415 \times 10^3 & -0,525 \times 10^3 & 0,279 \times 10^3 \\ -4,322 & 22,297 & 0,279 & -0,187 \times 10^3 & -0,042 \times 10^3 & -1,810 \times 10^3 \\ 0,069 & 0,279 & 30,508 & 1,032 \times 10^3 & -1,920 \times 10^3 & -2,730 \times 10^3 \\ 0,415 \times 10^3 & -0,187 \times 10^3 & 1,032 \times 10^3 & 4,052 \times 10^6 & -2,058 \times 10^6 & -3,065 \times 10^6 \\ -0,525 \times 10^3 & -0,042 \times 10^3 & -1,920 \times 10^3 & -2,058 \times 10^6 & 10,747 \times 10^6 & -0,445 \times 10^6 \\ 0,279 \times 10^3 & -1,810 \times 10^3 & -2,730 \times 10^3 & -3,065 \times 10^6 & -0,445 \times 10^6 & 17,15 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

D'où les déformations en membrane et courbures :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= 5,064 \times 10^{-3}, & \kappa_x &= 0,580, \\ \varepsilon_{yy}^0 &= 6,897 \times 10^{-3}, & \kappa_y &= -1,027, \\ \gamma_{xy}^0 &= 7,836 \times 10^{-3}, & \kappa_{xy} &= -1,309. \end{aligned}$$

Dans l'équation inverse ci-dessus, nous noterons que la matrice inverse est

symétrique, comme la matrice de rigidité de l'équation constitutive. Il en est de même des matrices-blocs  $\mathbf{A}'$  et  $\mathbf{D}'$ . Par contre, les matrices-blocs  $\mathbf{C}'$  et  $\mathbf{B}'$  (transposées l'une de l'autre) ne sont pas symétriques.

## 2. Déformations dans les couches

Les déformations rapportées aux axes  $(x, y)$  de référence sont déduites de la relation (14.14) et sont exprimées suivant :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,064 \\ 6,897 \\ 7,836 \end{bmatrix} \times 10^{-3} + \begin{bmatrix} 0,580 \\ -1,027 \\ -1,309 \end{bmatrix} z.$$

Les variations des déformations  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  et  $\gamma_{xy}$  en fonction de  $z$  sont reportées sur la figure 14.6.

Les déformations dans chaque couche, rapportées aux axes principaux de la couche, sont ensuite obtenues à partir de la relation (14.46). Soit pour la couche  $k$  du stratifié considéré :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_k = \mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k z, \quad (14.52)$$

avec

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_k = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (14.53)$$

où  $\mathbf{T}$  est la matrice de changement d'axes définie en (14.47). Nous en déduisons :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 8,914 \\ 3,045 \\ 5,505 \end{bmatrix} \times 10^{-3} + \begin{bmatrix} -0,388 \\ -0,058 \\ -2,046 \end{bmatrix} z, \quad 1,5 \text{ mm} \leq z \leq 2,5 \text{ mm},$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} 2,129 \\ 9,831 \\ 2,330 \end{bmatrix} \times 10^{-3} + \begin{bmatrix} 0,745 \\ -1,192 \\ 0,737 \end{bmatrix} z, \quad -1 \text{ mm} \leq z \leq 0,$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_{15^\circ} = \begin{bmatrix} 7,145 \\ 4,815 \\ 7,702 \end{bmatrix} \times 10^{-3} + \begin{bmatrix} 0,145 \\ -0,592 \\ -1,937 \end{bmatrix} z, \quad -2,5 \text{ mm} \leq z \leq -1 \text{ mm},$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_{-15^\circ} = \begin{bmatrix} 3,227 \\ 8,733 \\ 5,869 \end{bmatrix} \times 10^{-3} + \begin{bmatrix} 0,799 \\ -1,246 \\ -0,330 \end{bmatrix} z, \quad 0 \leq z \leq 1,5 \text{ mm}.$$

D'où les relations donnant les déformations  $\varepsilon_L$ ,  $\varepsilon_T$ ,  $\gamma_{LT}$  en fonction de la coordonnée  $z$  :

|   |   |
|---|---|
| $-2,5 \text{ mm} \leq z \leq -1 \text{ mm}$<br>$\varepsilon_L = 7,145 \times 10^{-3} + 0,145z,$<br>$\varepsilon_T = 4,815 \times 10^{-3} - 0,592z,$<br>$\gamma_{LT} = 7,702 \times 10^{-3} - 1,936z.$ | $-1 \text{ mm} \leq z \leq 0$<br>$\varepsilon_L = 2,129 \times 10^{-3} + 0,745z,$<br>$\varepsilon_T = 9,831 \times 10^{-3} - 1,191z,$<br>$\gamma_{LT} = 2,330 \times 10^{-3} + 0,737z.$               |
| $0 \leq z \leq 1,5 \text{ mm}$<br>$\varepsilon_L = 3,227 \times 10^{-3} + 0,799z,$<br>$\varepsilon_T = 8,733 \times 10^{-3} - 1,246z,$<br>$\gamma_{LT} = 5,869 \times 10^{-3} - 0,330z.$              | $1,5 \text{ mm} \leq z \leq 2,5 \text{ mm}$<br>$\varepsilon_L = 8,914 \times 10^{-3} + 0,388z,$<br>$\varepsilon_T = 3,046 \times 10^{-3} - 0,058z,$<br>$\gamma_{LT} = 5,505 \times 10^{-3} - 2,046z.$ |

Les variations des déformations  $\varepsilon_L$ ,  $\varepsilon_T$ ,  $\gamma_{LT}$  dans l'épaisseur du stratifié sont reportées sur la figure 14.6.

### 3. Contraintes dans les couches

Les contraintes dans chaque couche, rapportées aux axes de référence  $(x, y)$ , s'écrivent, d'après les relations (14.19) ou (14.20), suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \mathbf{A}_{1k} + \mathbf{B}_{1k} z, \quad (14.54)$$

avec

$$\mathbf{A}_{1k} = \mathbf{Q}'_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{1k} = \mathbf{Q}'_k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (14.55)$$

où les matrices  $\mathbf{Q}'_k$  sont les matrices de rigidité des différentes couches, qui ont été déterminées dans l'exemple 2 (paragraphe 14.4.3.2). Nous en déduisons :

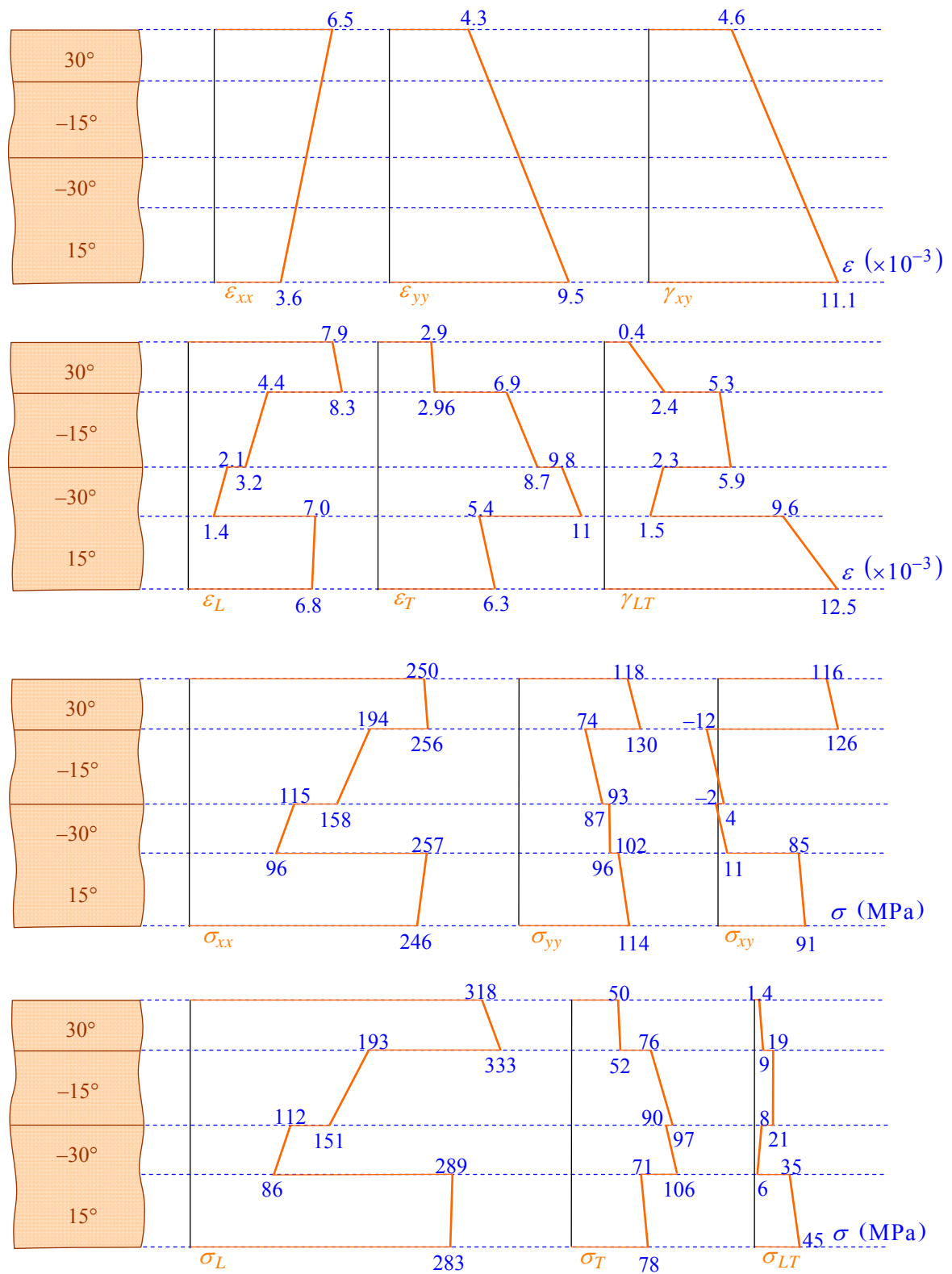


FIGURE 14.6. Contraintes et déformations dans l'épaisseur du stratifié.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 263,564 \\ 147,009 \\ 140,579 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5522,83 \\ -11467,79 \\ -9580,17 \end{bmatrix} z, \text{ (MPa)} \quad 1,5 \text{ mm} \leq z \leq 2,5 \text{ mm},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} 115,451 \\ 93,440 \\ -2,284 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 19217,67 \\ -2519,78 \\ -13520,26 \end{bmatrix} z, \text{ (MPa)} \quad -1 \text{ mm} \leq z \leq 0,$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{15^\circ} = \begin{bmatrix} 263,411 \\ 94,571 \\ 80,758 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6785,75 \\ -7919,24 \\ -3805,83 \end{bmatrix} z, \text{ (MPa)} \quad -2,5 \text{ mm} \leq z \leq -1 \text{ mm},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{-15^\circ} = \begin{bmatrix} 157,918 \\ 83,622 \\ 2,951 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24407,03 \\ -6090,45 \\ -10176,80 \end{bmatrix} z, \text{ (MPa)} \quad 0 \leq z \leq 1,5 \text{ mm}.$$

Les variations des contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  dans l'épaisseur du stratifié sont reportées sur la figure 14.6.

Les contraintes dans chaque couche, rapportées aux axes principaux de la couche considérée, sont ensuite déterminées à partir de la relation (14.49). Soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_k = \mathbf{A}_{2k} + \mathbf{B}_{2k} z, \quad (14.56)$$

avec

$$\mathbf{A}_{2k} = \mathbf{T}' \mathbf{A}_{1k}, \quad \mathbf{B}_{2k} = \mathbf{T}' \mathbf{B}_{1k}, \quad (14.57)$$

où  $\mathbf{T}'$  est la matrice de changement d'axes pour les contraintes définie en (14.50). Nous en déduisons :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 356,170 \\ 54,402 \\ 19,820 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15305,74 \\ -1684,88 \\ -7364,33 \end{bmatrix} z, \text{ (MPa)} \quad 1,5 \text{ mm} \leq z \leq 2,5 \text{ mm},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} 111,926 \\ 96,965 \\ 8,389 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25492,20 \\ -8794,31 \\ 2652,46 \end{bmatrix} z, \text{ (MPa)} \quad -1 \text{ mm} \leq z \leq 0,$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{15^\circ} = \begin{bmatrix} 292,480 \\ 65,502 \\ 27,728 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3987,79 \\ -5031,28 \\ -6972,19 \end{bmatrix} z, \quad (\text{MPa}) \quad -2,5 \text{ mm} \leq z \leq -1 \text{ mm},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{-15^\circ} = \begin{bmatrix} 151,466 \\ 90,074 \\ 21,130 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 27452,49 \\ -9135,91 \\ -1189,00 \end{bmatrix} z, \quad (\text{MPa}) \quad 0 \leq z \leq 1,5 \text{ mm}.$$

Les variations des contraintes  $\sigma_L$ ,  $\sigma_T$  et  $\sigma_{LT}$  dans l'épaisseur du stratifié sont reportées sur la figure 14.6. Ces variations permettent d'évaluer les conditions de première rupture du stratifié en appliquant, à chaque couche, les critères de rupture considérés au chapitre 12.

## EXERCICES

**14.1** Un stratifié  $[0/30/45]$  est constitué de trois couches de même épaisseur  $e = 1 \text{ mm}$  et de mêmes caractéristiques mécaniques :

$$E_L = 45 \text{ GPa}, \quad E_T = 10 \text{ GPa}, \quad G_{LT} = 4,5 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,31.$$

Calculer la matrice de rigidité du stratifié.

**14.2** Les couches considérées dans l'exercice 14.1, d'épaisseurs égales à  $0,5 \text{ mm}$ , constituent maintenant un stratifié symétrique  $[0/30/45]_s$ .

Calculer la nouvelle matrice de rigidité. Comparer avec la matrice précédente.

**14.3** Reprendre les exercices 14.1 et 14.2, en intervertissant l'ordre des couches :  $[45/30/0]$  et  $[45/30/0]_s$ . Comparer les résultats obtenus.

**14.4** Reprendre les exercices 14.1 et 14.2 dans le cas où l'orientation des couches est modifiée suivant  $[0/45/90]$ .

**14.5** Établir une procédure de calcul numérique ayant :

— pour entrées :

- le nombre de couches  $n$ ,
- les modules  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $G_{LT}$ , et l'orientation de chaque couche ;

— pour sortie : la matrice de rigidité du stratifié constitué des  $n$  couches.

Appliquer cette procédure pour retrouver les résultats des exercices 14.1 à 14.4.

**14.6** Établir une procédure de calcul numérique ayant :

- pour entrées :
  - la matrice de rigidité d'un stratifié,
  - les résultantes en membrane et les moments de flexions et de torsion ;
- pour sorties :
  - la matrice de rigidité inverse,
  - les déformations en membrane et les courbures,
  - les déformations dans les axes principaux de chaque couche,
  - les contraintes dans les axes principaux de chaque couche.

Coupler cette procédure à la procédure mise en place dans l'exercice précédent.

Appliquer l'ensemble aux cas où les stratifiés des exercices 14.1 et 14.2 sont soumis aux résultantes et moments de valeurs :

$$\begin{aligned} N_x &= 2,5 \text{ kN/mm}, & N_y &= 1,5 \text{ kN/mm}, & N_{xy} &= 1 \text{ kN/mm}, \\ M_x &= 20 \text{ Nm/mm}, & M_y &= 15 \text{ Nm/mm}, & M_{xy} &= 10 \text{ Nm/mm}. \end{aligned}$$



## CHAPITRE 15

# Influence de l'Empilement des Couches

## Étude des Matériaux à Renfort Tissue

L'empilement des couches (nature des couches, orientation, séquence d'empilement, etc.) conditionne la structure de la matrice de rigidité, dont la forme générale est donnée par la relation (14.29). La première partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de cas particuliers de stratifiés pour lesquels la matrice de rigidité a une forme simplifiée. L'étude sera effectuée en suivant approximativement un ordre croissant de complexité. L'ensemble des types de stratifiés étudiés constituera une bonne référence des stratifiés usuels. Assez souvent, la réalisation des stratifiés est faite à partir de couches, qui ont les mêmes caractéristiques (mêmes constituants, mêmes configurations géométriques, mêmes épaisseurs, etc.), mais ont des orientations différentes des axes des matériaux par rapport aux axes de référence du stratifié. Une attention particulière sera donc portée sur ce type de matériau. La deuxième partie du chapitre s'intéressera aux caractéristiques des couches à renfort tissu ou mat, en relation avec les divers paramètres du renfort tissu ou mat.

### 15.1 INFLUENCE DE L'EMPILEMENT DES COUCHES

#### 15.1.1 Cas d'une couche

##### 15.1.1.1 Couche isotrope

Dans le cas d'une plaque en matériau homogène isotrope, le comportement élastique est décrit par le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ . La matrice de rigidité réduite en contraintes planes est :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}. \quad (15.1)$$

Les matrices de rigidité de la couche sont aisément déduites des expressions (14.31) à (14.33). Soit :

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{Ee}{1-\nu^2} = A, & D_{11} &= \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} = D, \\
 A_{12} &= \frac{\nu Ee}{1-\nu^2} = \nu A, & D_{12} &= \nu D, \\
 A_{22} &= A_{11} = A, & B_{ij} &= 0, & D_{22} &= D_{11} = D, \\
 A_{16} &= A_{26} = 0, & D_{16} &= D_{26} = 0, \\
 A_{66} &= \frac{Ee}{2(1+\nu)} = \frac{1-\nu}{2} A, & D_{66} &= \frac{Ee^3}{24(1+\nu)} = \frac{1-\nu}{2} D,
 \end{aligned} \tag{15.2}$$

$$\text{avec } D = A \frac{e^2}{12},$$

où  $e$  est l'épaisseur de la plaque.

D'où l'équation constitutive :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \nu A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu A & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & \nu D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \tag{15.3}$$

Cette équation montre que les résultantes en membrane ( $N_x, N_y, N_{xy}$ ) dépendent uniquement des déformations en membrane ( $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \gamma_{xy}^0$ ) et les moments de flexion et torsion ( $M_x, M_y, M_{xy}$ ) dépendent uniquement des courbures du plan moyen ( $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ ). Dans le cas d'une plaque isotrope, il n'existe donc pas de couplage membrane-flexion/torsion.

### 15.1.1.2 Couche orthotrope rapportée à ses axes principaux

Pour une couche orthotrope, d'épaisseur  $e$ , dont les axes du matériau sont confondus avec les axes de référence de la plaque (axes de référence des contraintes et déformations exercées sur la plaque), la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, & Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11}, \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \nu_{LT} Q_{22}, & Q_{66} &= G_{LT}. \end{aligned}$$

D'où l'expression des coefficients de rigidité du stratifié, déduites des relations (14.31) à (14.33) :

$$\begin{aligned} A_{11} &= Q_{11}e, & D_{11} &= Q_{11} \frac{e^3}{12}, \\ A_{12} &= Q_{12}e, & D_{12} &= Q_{12} \frac{e^3}{12}, \\ A_{22} &= Q_{22}e, & B_{ij} &= 0, & D_{22} &= Q_{22} \frac{e^3}{12}, \\ A_{16} &= A_{26} = 0, & D_{16} &= D_{26} = 0, \\ A_{66} &= Q_{66}e, & D_{66} &= Q_{66} \frac{e^3}{12}, \end{aligned} \quad (15.4)$$

avec  $D_{ij} = A_{ij} \frac{e^2}{12}$ .

L'équation constitutive de la plaque s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (15.5)$$

Comme dans le cas d'un matériau isotrope, les résultantes en membrane ne dépendent que des déformations de membrane et les moments ne dépendent que des courbures.

### 15.1.1.3 Couche orthotrope non rapportée à ses axes

Dans le cas où les axes du matériau de la couche orthotrope ne coïncident pas avec les axes de référence des contraintes, la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$\mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix},$$

où les coefficients  $Q'_{ij}$  hors axes sont définis dans le tableau 11.6 en fonction des coefficients  $Q_{ij}$  dans les axes du matériau. Les coefficients de rigidité de la plaque s'expriment alors suivant :

$$A_{ij} = Q'_{ij}e, \quad B_{ij} = 0, \quad D_{ij} = Q'_{ij} \frac{e^3}{12} = A_{ij} \frac{e^2}{12}. \quad (15.6)$$

L'équation constitutive de la plaque orthotrope s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (15.7)$$

Nous constatons à nouveau l'absence de couplage membrane-flexion/torsion. Toutefois, contrairement au cas d'une plaque isotrope ou d'une plaque orthotrope dont les axes principaux coïncident avec les axes de référence de la plaque, nous observons que les résultantes normales ( $N_x$ ,  $N_y$ ) dépendent des déformations axiales  $\varepsilon_{xx}^0$  et  $\varepsilon_{yy}^0$ , ainsi que de la déformation en cisaillement  $\gamma_{xy}^0$ . Il existe donc dans ce cas un couplage traction-cisaillement.

De la même manière, les composantes des moments dépendent toutes des courbures en flexion  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$ , et de la courbure en torsion  $\kappa_{xy}$ . Il existe donc également un couplage flexion-torsion.

Le couplage traction-cisaillement peut être illustré en appliquant un déplacement  $(u, 0, 0)$  à une plaque orthotrope dont la direction  $L$  fait un angle  $\theta$  avec l'axe de référence des déplacements (figure 15.1). La figure 15.2 montre la déformée obtenue par un calcul d'éléments finis, dans le cas d'un composite unidirectionnel dont la direction  $L$  fait un angle  $\theta = 45^\circ$  avec la direction  $x$ . Le couplage traction-cisaillement introduit une déformation en S de la plaque.

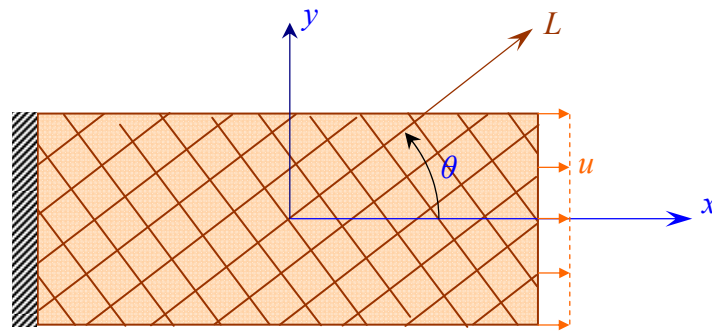


FIGURE 15.1. Plaque soumise à une traction suivant l'axe x.

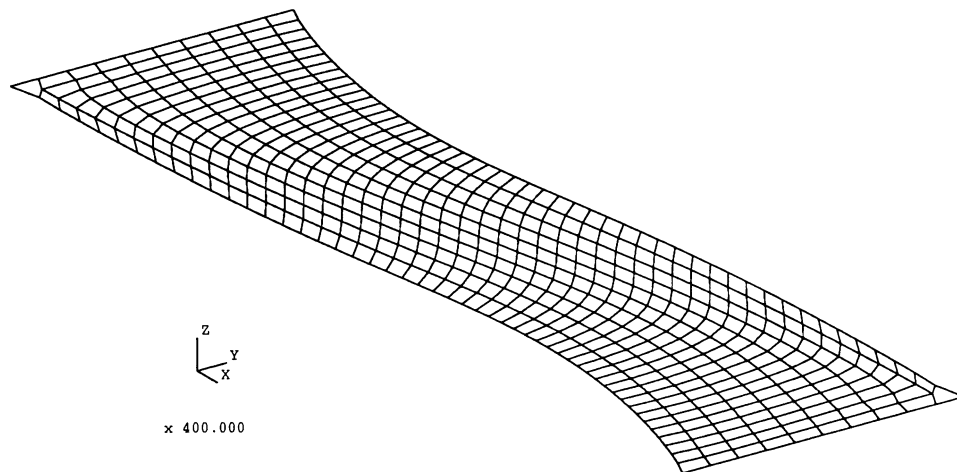


FIGURE 15.2. Déformée d'une plaque unidirectionnelle soumise à une traction à 45° des directions des fibres.

## 15.1.2 Stratifiés symétriques

### 15.1.2.1 Cas général

Un stratifié est symétrique (chapitre 3) si le plan moyen est plan de symétrie. Deux couches symétriques ont :

- la même matrice de rigidité réduite  $[Q'_{ij}]_k$ ,
- la même épaisseur  $e_k$ ,
- des cotes opposées  $z_k$  et  $-z_k$ .

Il en résulte que les coefficients  $B_{ij}$  de la matrice de rigidité du stratifié sont nuls. L'équation constitutive est de la forme générale :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (15.8)$$

La matrice de rigidité est de la même forme que celle obtenue en (15.7). Il n'existe donc pas de couplage membrane-flexion dans le cas des stratifiés symétriques. Il en résulte que le comportement des stratifiés symétriques est plus simple à analyser que celui des stratifiés présentant un couplage membrane-flexion/torsion. En outre, les stratifiés symétriques ne présentent pas une tendance au gauchissement due aux déformations (contractions) induites lors du refroidissement consécutif au processus de mise en œuvre des matériaux.

Les stratifiés symétriques sont donc largement utilisés, à moins que des conditions spécifiques nécessitent un stratifié non symétrique. Par exemple, un stratifié utilisé comme bouclier thermique, et exposé à une source thermique sur une seule de ses faces, sera conçu suivant une structure non symétrique.

### 15.1.2.2 *Stratifiés symétriques dont les axes des matériaux de toutes les couches coïncident avec les axes du stratifié*

La matrice de rigidité réduite de chaque couche est dans ce cas de la forme :

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & 0 \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^k \end{bmatrix},$$

où les coefficients de rigidité réduite s'expriment en fonction des modules de l'ingénieur de chaque couche suivant les relations :

$$\begin{aligned} Q_{11}^k &= \frac{E_L^k}{1 - \nu_{LT}^k \frac{E_T^k}{E_L^k}}, & Q_{22}^k &= \frac{E_T^k}{1 - \nu_{LT}^k \frac{E_T^k}{E_L^k}} = \frac{E_T^k}{E_L^k} Q_{11}^k, \\ Q_{12}^k &= \frac{\nu_{LT}^k E_T^k}{1 - \nu_{LT}^k \frac{E_T^k}{E_L^k}} = \nu_{LT}^k Q_{22}^k, & Q_{66}^k &= G_{LT}^k. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Les coefficients de rigidité du stratifié s'expriment donc suivant :

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \sum_{k=1}^n Q_{11}^k e_k, & D_{11} &= \sum_{k=1}^n Q_{11}^k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right), \\
A_{12} &= \sum_{k=1}^n Q_{12}^k e_k, & D_{12} &= \sum_{k=1}^n Q_{12}^k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right), \\
A_{22} &= \sum_{k=1}^n Q_{22}^k e_k, & B_{ij} &= 0, & D_{22} &= \sum_{k=1}^n Q_{22}^k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right), \\
A_{16} &= A_{26} = 0, & D_{16} &= D_{26} = 0, \\
A_{66} &= \sum_{k=1}^n Q_{66}^k e_k, & D_{66} &= \sum_{k=1}^n Q_{66}^k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right).
\end{aligned} \tag{15.10}$$

D'où l'équation constitutive du stratifié :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \tag{15.11}$$

Nous retrouvons une équation identique à (15.5). Outre l'absence de couplage membrane-flexion/torsion, il y a également absences de couplages en traction-cisaillement et en torsion-flexion.

### 15.1.3 Stratifiés antisymétriques

Les stratifiés symétriques sont utilisés afin d'éliminer le couplage entre membrane et flexion. Par contre, certaines applications nécessitent l'utilisation de stratifiés non symétriques. Par exemple, le couplage membrane-flexion est nécessaire dans la conception de turbine à ailettes ayant un profil gauche. Également, dans le cas où une meilleure rigidité en cisaillement est recherchée, il est nécessaire d'avoir des couches possédant différentes orientations.

Un stratifié antisymétrique est constitué de couches en nombre pair, dont la répartition des épaisseurs est symétrique, et celle des orientations des axes des matériaux est antisymétrique par rapport au plan moyen. Deux couches de cotes symétriques ont donc :

- des cotes opposées  $z_k$  et  $-z_k$ ,
- la même épaisseur  $e_k$ ,
- des orientations  $\theta$  et  $-\theta$  par rapport aux axes de référence du stratifié.

La matrice de rigidité réduite de la couche d'orientation  $\theta$  est :

$$\mathbf{Q}'_{+\theta} = \begin{bmatrix} Q'_{11+\theta} & Q'_{12+\theta} & Q'_{16+\theta} \\ Q'_{12+\theta} & Q'_{22+\theta} & Q'_{26+\theta} \\ Q'_{16+\theta} & Q'_{26+\theta} & Q'_{66+\theta} \end{bmatrix}$$

Celle de la couche d'orientation  $-\theta$  :

$$\mathbf{Q}'_{-\theta} = \begin{bmatrix} Q'_{11-\theta} & Q'_{12-\theta} & Q'_{16-\theta} \\ Q'_{12-\theta} & Q'_{22-\theta} & Q'_{26-\theta} \\ Q'_{16-\theta} & Q'_{26-\theta} & Q'_{66-\theta} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} Q'_{16-\theta} &= -Q'_{16+\theta}, & Q'_{26-\theta} &= -Q'_{26+\theta}, \\ Q'_{ij-\theta} &= Q'_{ij+\theta} \quad \text{si } ij = 11, 12, 22, 66. \end{aligned} \quad (15.12)$$

D'où les coefficients de rigidité d'un stratifié antisymétrique constitué de  $n = 2p$  couches :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 2 \sum_{k=1}^p Q'_{ij}{}^k e_k & \text{si } ij &= 11, 12, 22, 66, \\ A_{ij} &= 0 & \text{si } ij &= 16, 26, \\ B_{ij} &= 0 & \text{si } ij &= 11, 12, 22, 66, \\ B_{ij} &= 2 \sum_{k=1}^p Q'_{ij}{}^k e_k z_k & \text{si } ij &= 16, 26, \\ D_{ij} &= 2 \sum_{k=1}^p Q'_{ij}{}^k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) & \text{si } ij &= 11, 12, 22, 66, \\ D_{ij} &= 0 & \text{si } ij &= 16, 26. \end{aligned} \quad (15.13)$$

L'équation constitutive d'un stratifié antisymétrique s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (15.14)$$



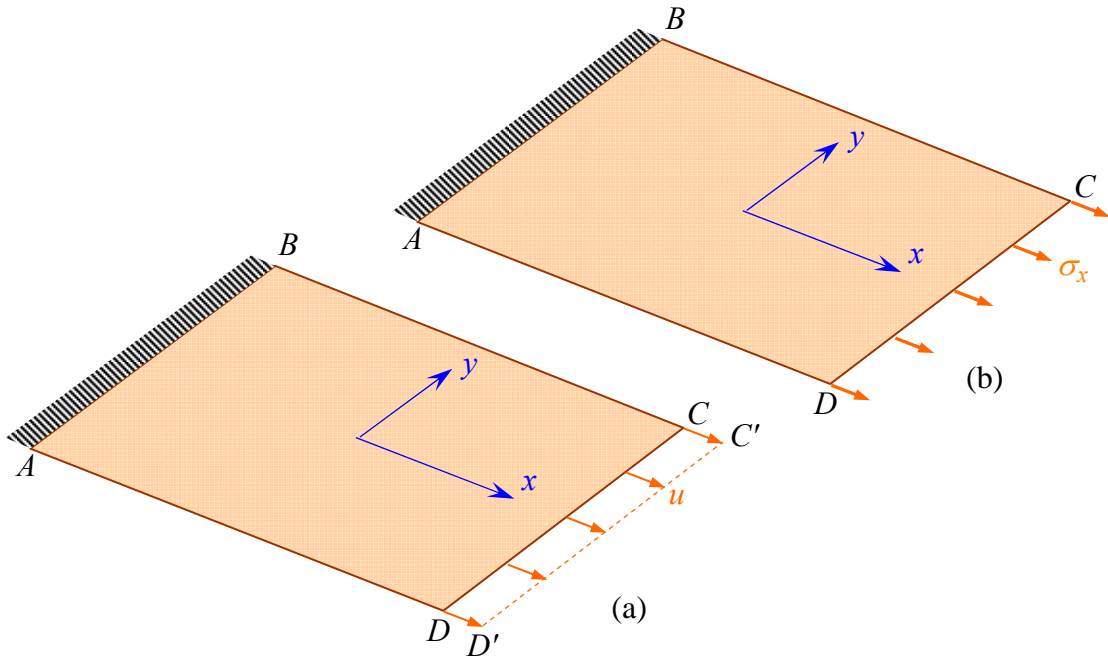


FIGURE 15.3. Plaque soumise à une traction suivant la direction  $x$  : (a) déplacements imposés et (b) contraintes imposées.

L'équation constitutive (15.14) montre l'existence d'un couplage membrane-torsion, résultant des termes  $B_{16}$  et  $B_{26}$ . L'effet de ce couplage peut être illustré en imposant à une plaque constituée d'un stratifié antisymétrique et encastree sur le côté  $AB$ , d'une part un déplacement  $(u, 0, 0)$  du côté  $CD$  (figure 15.3.1) et d'autre part une contrainte  $(\sigma_x, 0, 0)$  sur la face  $CD$  (figure 15.3.2).

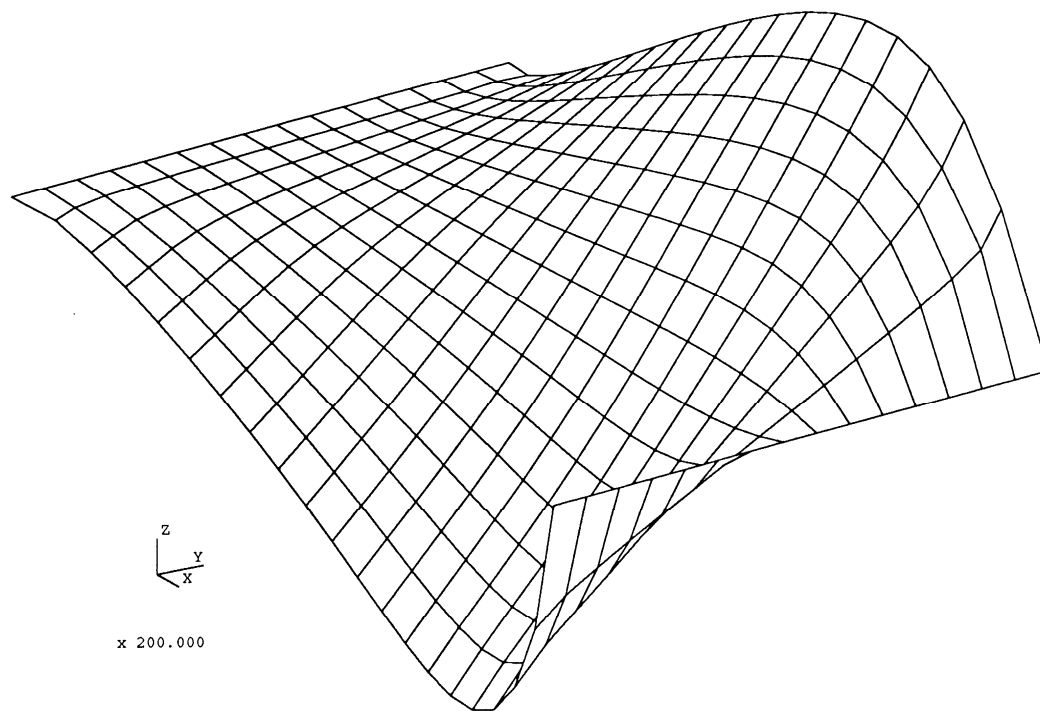
Les figures 15.4 montrent les déformées obtenues dans les deux modes de sollicitations. Les déformations sont amplifiées de manière à montrer les effets du couplage. Ces figures mettent en évidence la déformation en torsion qui se superpose à la déformation en traction de la plaque.

## 15.1.4 Stratifiés croisés

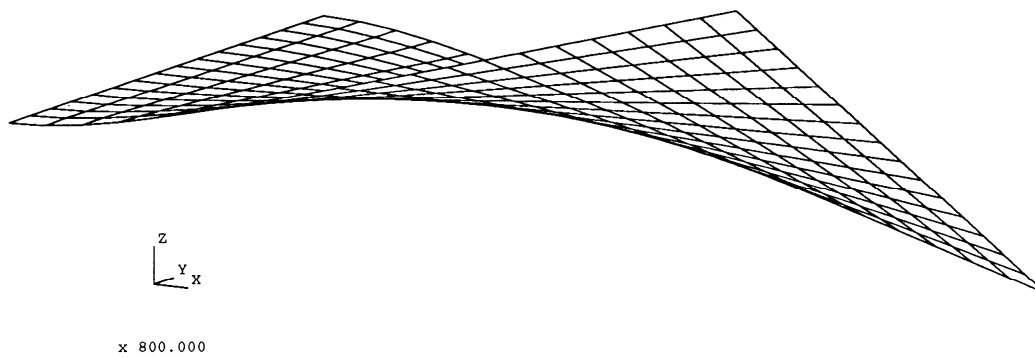
### 15.1.4.1 Cas général

Un stratifié croisé est constitué de couches dont les directions principales sont orientées alternativement à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport aux directions de référence du stratifié (figure 15.5). La matrice de rigidité réduite des couches à  $0^\circ$  est :

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}. \quad (15.15)$$



(a)



(b)

FIGURE 15.4. Couplage traction-torsion dans le cas d'un stratifié antisymétrique : (a) déplacements imposés et (b) contraintes imposées.

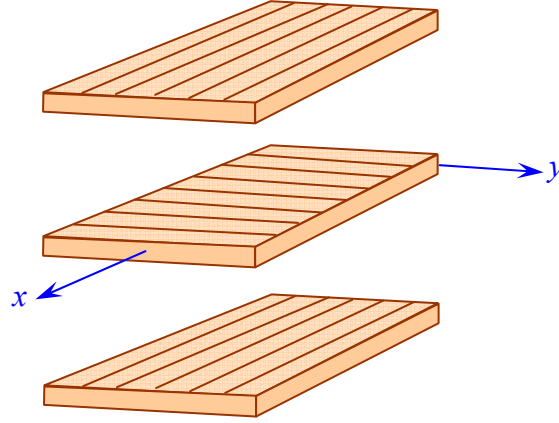


FIGURE 15.5. Stratifié croisé.

Les coefficients de rigidité des couches à  $90^\circ$  sont :

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{22}, & Q'_{12} &= Q_{12}, & Q'_{16} &= 0, \\ Q'_{22} &= Q_{11}, & Q'_{26} &= 0, & Q'_{66} &= Q_{66}, \end{aligned} \quad (15.16)$$

et la matrice de rigidité des couches à  $90^\circ$  s'exprime suivant :

$$\mathbf{Q}_{90} = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}. \quad (15.17)$$

Les coefficients de rigidité  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  et  $D_{ij}$  déduits des expressions (14.31) à (14.33) pour un stratifié croisé sont reportés dans le tableau 15.1. Compte tenu de ces résultats, l'équation constitutive d'un stratifié croisé est donc de la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (15.18)$$

#### 15.1.4.2 Cas particuliers pratiques

Un cas particulier mais de grande importance pratique est le cas où les couches à  $0^\circ$  ont même épaisseur, les couches à  $90^\circ$  ayant également la même épaisseur,

TABLEAU 15.1. Expression des coefficients de rigidité d'un stratifié croisé.

---

|      |   |                     |                     |
|------|---|---------------------|---------------------|
|      | $A_{11} = Q_{11}e_0 + Q_{22}e_{90},$  | $A_{12} = Q_{12}e,$ | $A_{16} = 0,$       |
|      | $A_{22} = Q_{22}e_0 + Q_{11}e_{90},$  | $A_{26} = 0,$       | $A_{66} = Q_{66}e,$ |
| avec | $e_0 = \text{épaisseur totale des couches à } 0^\circ,$<br>$e_{90} = \text{épaisseur totale des couches à } 90^\circ,$<br>$e = \text{épaisseur du stratifié} \quad e = e_0 + e_{90}. $  |                     |                     |
|      | $B_{11} = Q_{11}b_0 + Q_{22}b_{90},$  | $B_{12} = Q_{12}b,$ | $B_{16} = 0,$       |
|      | $B_{22} = Q_{22}b_0 + Q_{11}b_{90},$  | $B_{26} = 0,$       | $B_{66} = Q_{66}b,$ |
| avec | $b_0 = \sum_{\text{couches à } 0^\circ} e_p z_p, \quad b_{90} = \sum_{\text{couches à } 90^\circ} e_q z_q,$<br>$b = \sum_{k=1}^n e_k z_k = b_0 + b_{90}. $  |                     |                     |
|      | $D_{11} = Q_{11}d_0 + Q_{22}d_{90},$  | $D_{12} = Q_{12}d,$ | $D_{16} = 0,$       |
|      | $D_{22} = Q_{22}d_0 + Q_{11}d_{90},$  | $D_{26} = 0,$       | $D_{66} = Q_{66}d,$ |
| avec | $d_0 = \sum_{\text{couches à } 0^\circ} \left( \frac{e_p^3}{12} + e_p z_p^2 \right),$<br>$d_{90} = \sum_{\text{couches à } 90^\circ} \left( \frac{e_q^3}{12} + e_q z_q^2 \right),$<br>$d = \sum_{k=1}^n \left( \frac{e_k^3}{12} + e_k z_k^2 \right) = d_0 + d_{90}. $ |                     |                     |

---

mais pas nécessairement une épaisseur identique à celle des couches à  $0^\circ$ . Il est toujours possible de choisir l'axe  $x$  de référence de la plaque de manière qu'il coïncide avec la direction  $0^\circ$  de la couche inférieure du stratifié. Il en résulte que les couches orientées à  $0^\circ$  coïncident avec les couches impaires et les couches orientées à  $90^\circ$  avec les couches paires. Si le nombre total de couches est impair (figure 15.6a), le stratifié est symétrique. Si le nombre total de couches est pair (figure 15.6b), le stratifié est dit antisymétrique. Ce n'est toutefois pas un stratifié antisymétrique au sens des stratifiés considérés au paragraphe 15.1.2. Un stratifié croisé est caractérisé par le nombre total  $n$  de couches à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$ , ainsi que par le rapport entre l'épaisseur totale des couches orientées à  $0^\circ$  et l'épaisseur totale

| $n$ impair |   | $n$ pair |   |
|------------|---|----------|---|
| 0°         | 5 | 90°      | 6 |
| 90°        | 4 | 0°       | 5 |
| 0°         | 3 | 90°      | 4 |
| 90°        | 2 | 0°       | 3 |
| 0°         | 1 | 90°      | 2 |
|            |   | 0°       | 1 |

(a) symétrique
(b) antisymétrique

FIGURE 15.6. Stratifiés croisés symétrique et antisymétrique.

des couches orientées à 90° :

$$R_e = \frac{e_0}{e_{90}}. \quad (15.19)$$

Dans le cas où les épaisseurs des couches sont identiques :  $R_e = 1$ , les coefficients de rigidité peuvent alors être exprimés (paragraphes 15.1.4.3 et 15.1.4.4) en fonction de  $n$ ,  $R_e$  et du rapport entre les modules :

$$R_Q = \frac{Q_{22}}{Q_{11}} = \frac{E_T}{E_L}. \quad (15.20)$$

### 15.1.4.3 Stratifiés croisés symétriques

Dans le cas d'un stratifié croisé symétrique (nombre impair de couches), les termes  $B_{ij}$  sont nuls conformément aux propriétés des stratifiés symétriques. L'équation constitutive des stratifiés croisés symétriques combine les relations (15.8) et (15.18). Soit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (15.21)$$

À l'absence de couplage membrane-flexion/torsion des stratifiés symétriques s'ajoute l'absence des couplages traction-cisaillement et flexion-torsion. Le comportement d'un stratifié croisé symétrique est donc identique au comportement d'une plaque orthotrope rapportée à ses axes principaux (15.5).

L'expression des coefficients de rigidité en fonction du nombre de couches  $n$ , de  $R_e$  et  $R_Q$  est reportée dans le tableau 15.2.

TABLEAU 15.2. Expression des coefficients de rigidité d'un stratifié croisé symétrique (nombre impair de couches).

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{1}{1+R_e} (R_e + R_Q) Q_{11} e, & A_{12} &= Q_{12} e, & A_{16} &= 0, \\
A_{22} &= \frac{1}{1+R_e} (1 + R_e R_Q) Q_{11} e = \frac{1 + R_e R_Q}{R_e + R_Q} A_{11}, \\
A_{26} &= 0, & A_{66} &= Q_{66} e. \\
B_{ij} &= 0, & i, j &= 1, 2, 6. \\
D_{11} &= \left[ (R_Q - 1) \alpha + 1 \right] \frac{Q_{11} e^3}{12} = \left[ (R_Q - 1) \alpha + 1 \right] \frac{1 + R_e}{R_e + R_Q} \frac{A_{11} e^2}{12}, \\
D_{12} &= \frac{Q_{12} e^3}{12}, & D_{16} &= 0, \\
D_{22} &= \left[ (1 - R_Q) \alpha + R_Q \right] \frac{Q_{11} e^3}{12} = \left[ (1 - R_Q) \alpha + R_Q \right] \frac{1 + R_e}{R_e + R_Q} \frac{A_{11} e^2}{12}, \\
D_{26} &= 0, & D_{66} &= \frac{Q_{66} e^3}{12},
\end{aligned}$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{(1 + R_e)^3} + \frac{R_e (n - 3) [R_e (n - 1) + 2(n + 1)]}{(n^2 - 1)(1 + R_e)^3}.$$

#### 15.1.4.4 Stratifiés croisés antisymétriques

Dans le cas d'un stratifié croisé antisymétrique (nombre pair de couches), les coefficients de rigidité exprimés en fonction de  $n$ , de  $R_e$  et  $R_Q$  sont reportés dans le tableau 15.3. Les résultats de ce tableau montrent que l'équation constitutive est alors de la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (15.22)$$

TABLEAU 15.3. Coefficients de rigidité d'un stratifié croisé antisymétrique (nombre pair de couches).

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{1}{1+R_e} (R_e + R_Q) Q_{11} e, & A_{12} &= Q_{12} e, & A_{16} &= 0, \\
A_{22} &= \frac{1}{1+R_e} (1 + R_e R_Q) Q_{11} e = \frac{1 + R_e R_Q}{R_e + R_Q} A_{11}, \\
A_{26} &= 0, & A_{66} &= Q_{66} e. \\
B_{11} &= \frac{R_e (R_Q - 1)}{n(1+R_e)^2} Q_{11} e^2 = \frac{R_e (R_Q - 1)}{n(1+R_e)(R_e + R_Q)} A_{11} e, & B_{12} &= B_{16} = 0, \\
B_{22} &= -B_{11}, & B_{26} &= B_{66} = 0. \\
D_{11} &= \left[ (R_Q - 1) \beta + 1 \right] \frac{Q_{11} e^3}{12} = \left[ (R_Q - 1) \beta + 1 \right] \frac{1 + R_e}{R_e + R_Q} \frac{A_{11} e^2}{12}, \\
D_{12} &= \frac{Q_{12} e^3}{12}, & D_{16} &= 0, \\
D_{22} &= \left[ (1 - R_Q) \beta + R_Q \right] \frac{Q_{11} e^3}{12} = \left[ (1 - R_Q) \beta + R_Q \right] \frac{1 + R_e}{R_e + R_Q} \frac{A_{11} e^2}{12}, \\
D_{26} &= 0, & D_{66} &= \frac{Q_{66} e^3}{12},
\end{aligned}$$

avec

$$\beta = \frac{1}{1+R_e} + \frac{8R_e(R_e-1)}{n^2(1+R_e)^3}.$$

Dans le cas où toutes les couches ont même épaisseur :

$$R_e = 1, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

Dans le cas où les couches à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  ont même épaisseur, nous avons :

$$A_{22} = A_{11}, \quad D_{22} = D_{11}. \quad (15.23)$$

L'équation constitutive (15.22) d'un stratifié croisé antisymétrique montre qu'il existe uniquement un couplage traction-flexion. L'effet de ce couplage peut être illustré en imposant à une plaque constituée d'un stratifié croisé antisymétrique les deux types de conditions déjà considérées (figure 15.3). Les figures 15.7 montrent les déformées obtenues dans les deux cas. À la déformation en traction de la plaque se superpose une déformation en flexion. Il est également important de noter que le coefficient de couplage  $B_{11}$  est (tableau 15.3) inversement proportionnel au nombre total de couches. Il en résulte que le couplage membrane-flexion décroît rapidement lorsque le nombre de couches croît.

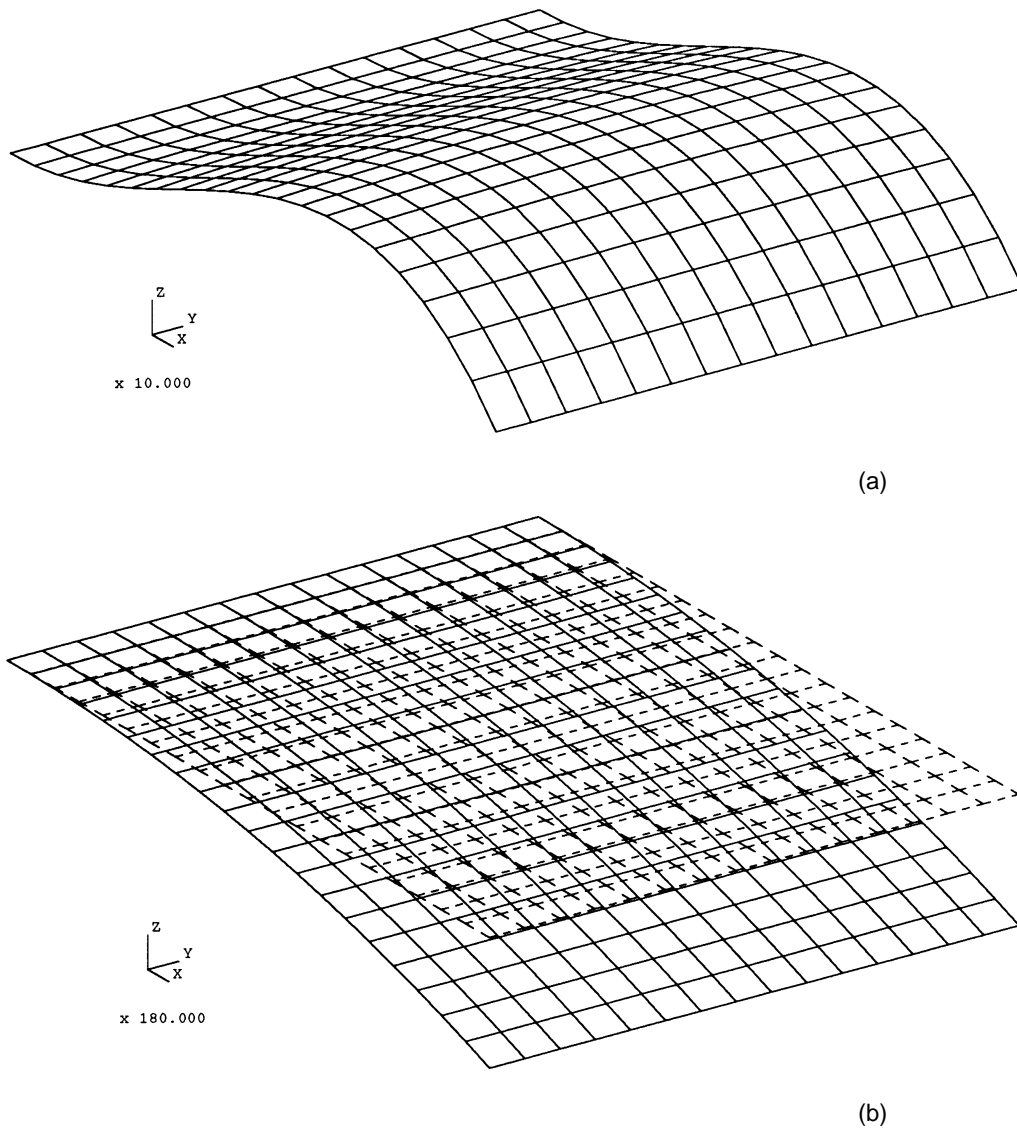


FIGURE 15.7. Couplage traction-flexion dans le cas d'un stratifié croisé antisymétrique : (a) déplacements imposés et (b) contraintes imposées.

## 15.1.5 Stratifiés équilibrés et stratifiés alternés

### 15.1.5.1 Cas général

Un stratifié est équilibré s'il comporte autant de couches orientées suivant un angle  $\theta$  que de couches orientées suivant un angle  $-\theta$ . Un stratifié équilibré peut être quelconque, symétrique ou antisymétrique (figure 15.8).

Un stratifié alterné est constitué de couches orientées alternativement suivant les directions  $\theta$  et  $-\theta$ , relativement aux axes de référence du stratifié. Le stratifié



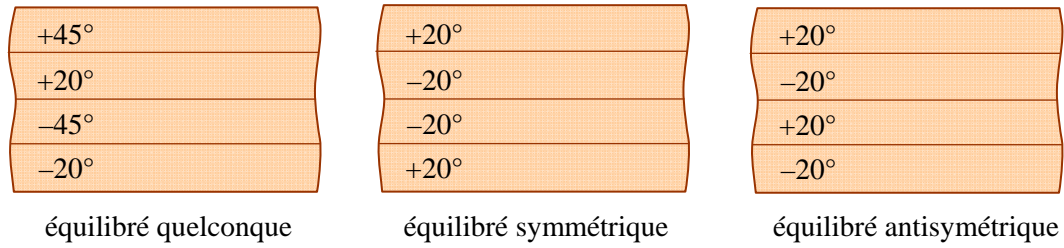


FIGURE 15.8. Divers types de stratifiés équilibrés.

équilibré antisymétrique de la figure 15.8 est un stratifié alterné. La figure 15.9 donne un exemple de stratifié alterné symétrique.

Les équations constitutives de ces stratifiés se déduisent des équations générales (14.29), (15.8) et (15.14).

### 15.1.5.2 Stratifiés particuliers

Dans le cas pratique où les couches ont la même épaisseur, les coefficients de rigidité du stratifié s'expriment en fonction des coefficients  $Q'_{ij}$  de chaque couche, du nombre de couches  $n$  et de l'épaisseur  $e$  du stratifié. Dans le cas de couches constituées du même matériau, les coefficients de rigidité des couches sont liés par les expressions :

$$\begin{aligned}
 Q'_{11-\theta} &= Q'_{11+\theta}, & Q'_{12-\theta} &= Q'_{12+\theta}, & Q'_{16-\theta} &= -Q'_{16+\theta}, \\
 Q'_{22-\theta} &= Q'_{22+\theta}, & Q'_{26-\theta} &= -Q'_{26+\theta}, & Q'_{66-\theta} &= Q'_{66+\theta},
 \end{aligned} \quad (15.24)$$

où les relations entre les coefficients  $Q'_{ij+\theta}$  et les coefficients  $Q_{ij}$  rapportés aux axes principaux sont données dans le tableau 11.6. Les coefficients  $Q'_{ij+\theta}$  se rapportent aux couches impaires, et les coefficients  $Q'_{ij-\theta}$  aux couches paires. Pour le stratifié équilibré symétrique de la figure 15.8 et le stratifié alterné symétrique de la figure 15.9,  $+\theta$  est égal à  $20^\circ$  et  $Q'_{ij+\theta} = Q'_{ij+20^\circ}$ ; alors que dans le cas du stratifié équilibré antisymétrique de la figure 15.8,  $+\theta = -20^\circ$  et  $Q'_{ij+\theta} = Q'_{ij-20^\circ}$ .

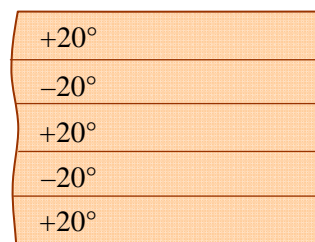


FIGURE 15.9. Stratifié alterné symétrique.

### 1. Stratifié équilibré symétrique

Dans le cas d'un stratifié équilibré symétrique, le nombre de couches est pair. Les coefficients de rigidité sont déduits des relations (14.23), (14.24) et (14.27), associées aux relations (15.24). Ils s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= eQ'_{ij} & \text{si } ij &= 11, 12, 22, 66, \\
 A_{ij} &= 0 & \text{si } ij &= 16, 26. \\
 B_{ij} &= 0 & i, j &= 1, 2, 6. \\
 D_{ij} &= \frac{e^3}{12} Q'_{ij} & \text{si } ij &= 11, 12, 22, 66, \\
 D_{ij} &= 0 & \text{si } ij &= 16, 26.
 \end{aligned} \tag{15.25}$$

### 2. Stratifié alterné antisymétrique

Pour un stratifié alterné antisymétrique, le nombre de couches est pair et les relations (15.13) et (15.24) conduisent à :

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= eQ'_{ij} & \text{si } ij &= 11, 12, 22, 66, \\
 A_{ij} &= 0 & \text{si } ij &= 16, 26. \\
 B_{ij} &= 0 & \text{si } ij &= 11, 12, 22, 66, \\
 B_{ij} &= -\frac{e^2}{2n} Q'_{ij} & \text{si } ij &= 16, 26. \\
 D_{ij} &= \frac{e^3}{12} Q'_{ij} & \text{si } ij &= 11, 12, 22, 66, \\
 D_{ij} &= 0 & \text{si } ij &= 16, 26.
 \end{aligned} \tag{15.26}$$

### 3. Stratifié alterné symétrique

Enfin, dans le cas d'un stratifié alterné symétrique, le nombre de couches est impair. Les coefficients de rigidité s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= eQ'_{ij} & \text{si } ij &= 11, 12, 22, 66, \\
 A_{ij} &= 0 & \text{si } ij &= 16, 26. \\
 B_{ij} &= 0 & i, j &= 1, 2, 6. \\
 D_{ij} &= \frac{e^3}{12} Q'_{ij} & \text{si } ij &= 11, 12, 22, 66, \\
 D_{ij} &= \frac{e^3}{12} \frac{3n^2 - 2}{n^3} Q'_{ij} & \text{si } ij &= 16, 26.
 \end{aligned} \tag{15.27}$$

Nous observons que les coefficients  $A_{ij}$  sont indépendants du nombre de couches et du type de stratifié. Les coefficients  $A_{16}$  et  $A_{26}$  sont nuls.

Les coefficients de rigidité en flexion et en torsion  $D_{11}$ ,  $D_{12}$  et  $D_{66}$  sont également indépendants du nombre de couches et du type de stratifié. Les coefficients de couplage flexion-torsion  $D_{16}$  et  $D_{26}$ , nuls dans le cas de stratifiés équilibrés symétriques et de stratifiés alternés antisymétriques, décroissent avec le nombre de couches dans les autres cas.

Dans le cas de stratifiés symétriques, il n'existe pas de couplage membrane-flexion/torsion ( $B_{ij} = 0$ ). Par contre, les stratifiés équilibrés antisymétriques présentent un couplage membrane-torsion qui décroît lorsque le nombre de couches augmente.

### 15.1.6 Stratifiés à couches isotropes

La matrice de rigidité réduite d'une couche isotrope est donnée par la relation (15.1). Les coefficients de rigidité d'un stratifié constitué de  $n$  couches isotropes de propriétés différentes s'expriment alors suivant les relations :

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \sum_{k=1}^n \frac{E_k e_k}{1 - \nu_k^2}, & A_{12} &= \sum_{k=1}^n \frac{\nu_k E_k e_k}{1 - \nu_k^2}, & A_{16} &= 0, \\
 A_{22} &= A_{11}, & A_{26} &= 0, & A_{66} &= \sum_{k=1}^n \frac{E_k e_k}{2(1 + \nu_k)}, \\
 B_{11} &= \sum_{k=1}^n \frac{E_k e_k z_k}{1 - \nu_k^2}, & B_{12} &= \sum_{k=1}^n \frac{\nu_k E_k e_k z_k}{1 - \nu_k^2}, & B_{16} &= 0, \\
 B_{22} &= B_{11}, & B_{26} &= 0, & B_{66} &= \sum_{k=1}^n \frac{E_k e_k z_k}{2(1 + \nu_k)}, \\
 D_{11} &= \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{1 - \nu_k^2} \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right), & D_{12} &= \sum_{k=1}^n \frac{\nu_k E_k}{1 - \nu_k^2} \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right), \\
 D_{22} &= D_{11}, & D_{16} &= D_{26} = 0, & D_{66} &= \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)} \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right),
 \end{aligned} \tag{15.28}$$

L'équation constitutive d'un stratifié à couches isotropes s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \tag{15.29}$$

L'équation constitutive a la même forme que l'équation constitutive (15.18) d'un stratifié croisé.

Dans le cas d'un stratifié symétrique à couches isotropes, l'équation constitutive se simplifie conformément à l'équation générale (15.8) des stratifiés symétriques et s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (15.30)$$

les coefficients de rigidité  $A_{ij}$  et  $D_{ij}$  étant donnés par les relations (15.28).

### 15.1.7 Stratifié quelconque

Les divers stratifiés étudiés dans les paragraphes précédents montrent l'influence de l'empilement des couches les unes par rapport aux autres et par rapport aux axes de référence du stratifié. Les cas particuliers étudiés correspondent à des applications importantes. Les divers stratifiés étudiés ont mis en évidence les divers couplages entre traction, cisaillement, flexion et torsion. Dans le cas d'un empilement quelconque, l'équation constitutive du stratifié s'écrit sous la forme générale (14.29).

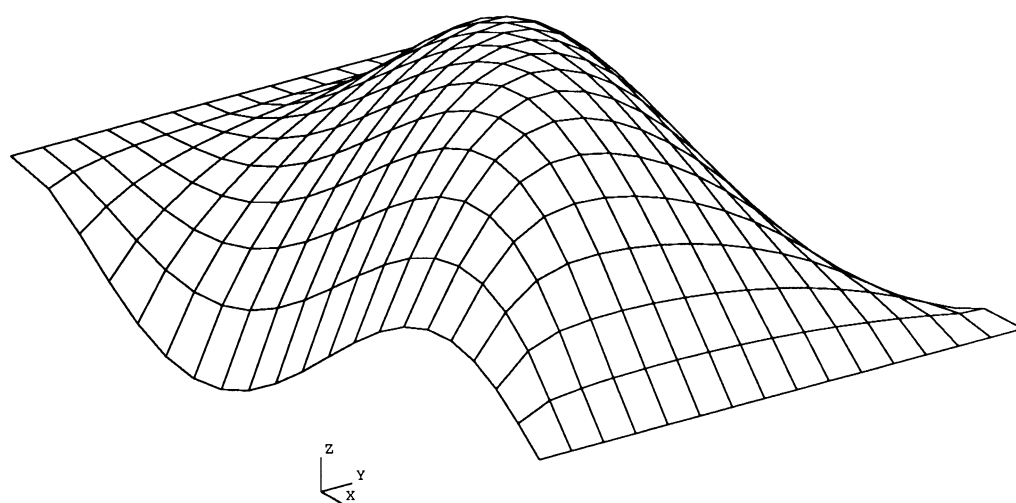
Dans ce cas, les divers couplages existent simultanément. L'effet de ces couplages peut être mis en évidence en imposant à une plaque constituée d'un stratifié quelconque une traction (figure 15.3) en déplacements imposés et en contraintes imposées. Les figures 15.10 montrent les résultats obtenus. À la déformation de traction se superposent des déformations en cisaillement, flexion et torsion. Nous avons déjà noté l'influence néfaste de ces divers couplages.

## 15.2 ÉTUDE DES MATÉRIAUX À RENFORT TISSU

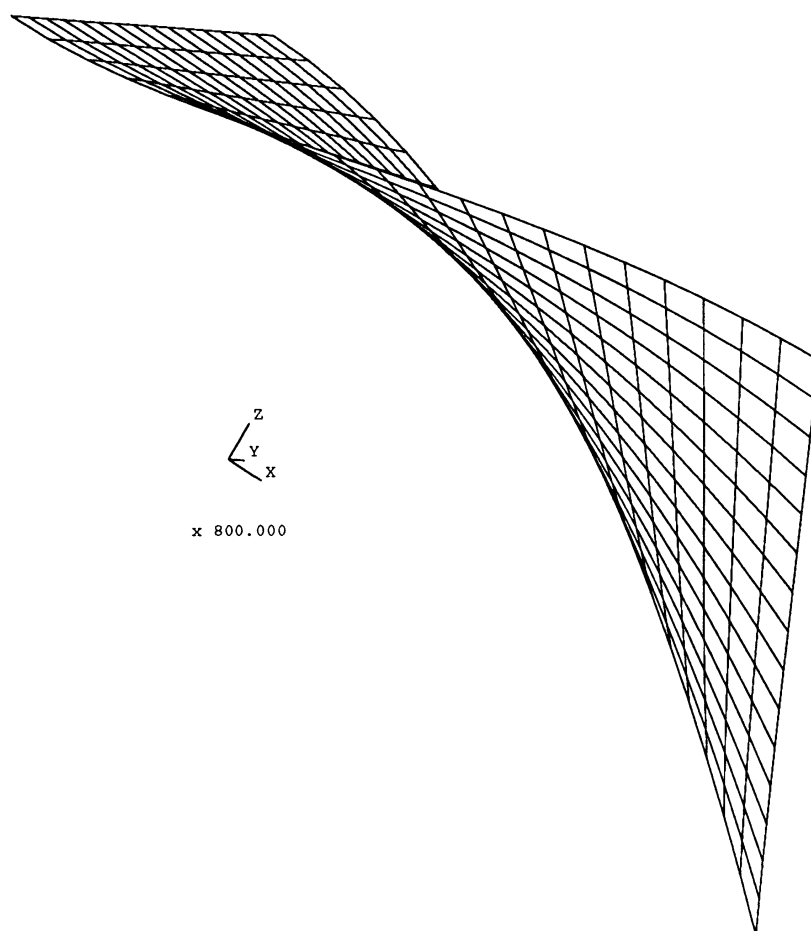
### 15.2.1 Introduction

Les divers tissus utilisés dans la fabrication des stratifiés ou des sandwichs ont été étudiés au chapitre 2. Les principaux paramètres relatifs à la caractérisation d'un tissu sont :

- le type de l'armure (unidirectionnel, toile, satin, sergé, etc.),
- la nature des fils de chaîne et de trame : verre, carbone, Kevlar, stratifil, etc.,
- le titre des fils exprimé en tex (masse par unité de longueur),



(a)



x 800.000

(b)

FIGURE 15.10. Couplage général dans le cas d'un stratifié quelconque : (a) déplacements imposés et (b) contraintes imposées.

- le nombre de fils de chaîne et de trame par unité de longueur et largeur du tissu,
- la masse surfacique : masse du tissu par mètre carré,
- etc.

Les valeurs expérimentales obtenues montrent que le comportement élastique d'un composite à renfort tissu est pratiquement indépendant du type de l'armure, contrairement aux caractéristiques à la rupture.

L'objet du paragraphe 15.2 est d'établir une formulation des modules des composites à renfort tissu 2D à partir d'une analogie stratifié.

### 15.2.2 Caractérisation d'un renfort tissu

Un tissu est constitué (chapitre 2) de fils tissés dans deux directions (figure 15.11) : la direction chaîne (correspondant à la direction  $L$  de la couche composite orthotrope) et la direction trame (correspondant à la direction  $T$  de la couche).

La chaîne est caractérisée par :

$n_{ch}$  : le nombre de fils par unité de largeur du tissu (figure 15.11),

$T_{ch}$  : le titre des fils (masse par unité de longueur de fils).

La masse de fils chaîne par unité de largeur est donc :

$$m_{ch} = n_{ch} T_{ch}, \quad (15.31)$$

et le volume de fils chaîne par unité de largeur du tissu s'exprime suivant :

$$v_{ch} = \frac{m_{ch}}{\rho_{ch}} = \frac{n_{ch} T_{ch}}{\rho_{ch}}, \quad (15.32)$$

où  $\rho_{ch}$  est la masse volumique des fils sens chaîne.

De même, la trame est caractérisée par :

$n_{tr}$  : le nombre de fils par unité de longueur (figure 15.11),

$T_{tr}$  : le titre des fils (masse par unité de longueur de fils).

La masse de fils trame par unité de longueur est :

$$m_{tr} = n_{tr} T_{tr}, \quad (15.33)$$

et le volume de fils trame par unité de longueur s'écrit :

$$v_{tr} = \frac{m_{tr}}{\rho_{tr}} = \frac{n_{tr} T_{tr}}{\rho_{tr}}, \quad (15.34)$$

en introduisant la masse volumique  $\rho_{tr}$  des fils sens trame.

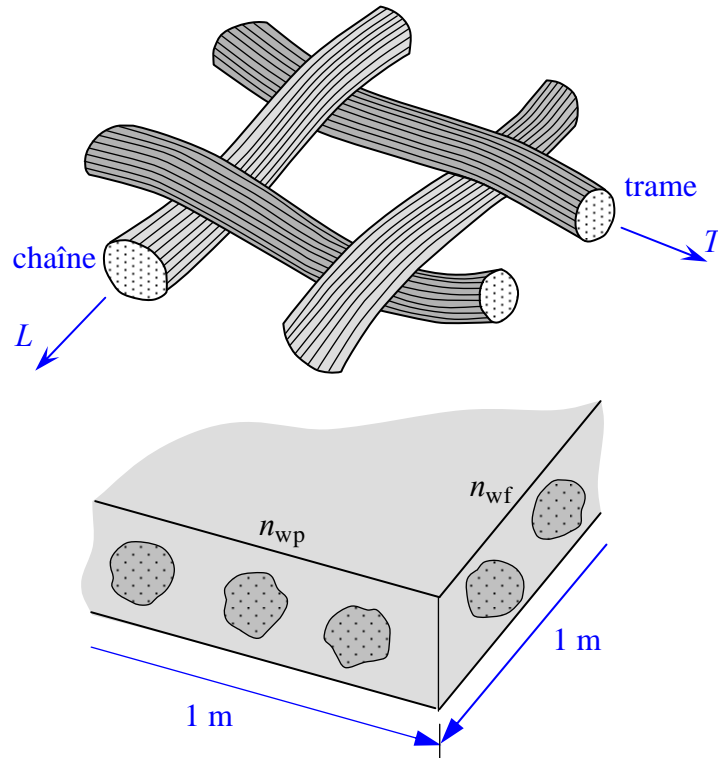


FIGURE 15.11. Schématisation d'un tissu.

Le coefficient d'équilibrage en chaîne  $k$  d'un tissu mesure la proportion relative en volume de fils sens chaîne et s'écrit sous la forme générale :

$$k = \frac{v_{\text{ch}}}{v_{\text{ch}} + v_{\text{tr}}} = \frac{\frac{n_{\text{ch}} T_{\text{ch}}}{\rho_{\text{ch}}}}{\frac{n_{\text{ch}} T_{\text{ch}}}{\rho_{\text{ch}}} + \frac{n_{\text{tr}} T_{\text{tr}}}{\rho_{\text{tr}}}}. \quad (15.35)$$

Dans le cas de fibres de même nature en chaîne et en trame ( $\rho_{\text{ch}} = \rho_{\text{tr}}$ ), le coefficient d'équilibrage s'exprime suivant :

$$k = \frac{n_{\text{ch}} T_{\text{ch}}}{n_{\text{ch}} T_{\text{ch}} + n_{\text{tr}} T_{\text{tr}}}. \quad (15.36)$$

Dans le cas de titres identiques en chaîne et en trame, l'expression de  $k$  se réduit à :

$$k = \frac{n_{\text{ch}}}{n_{\text{ch}} + n_{\text{tr}}}. \quad (15.37)$$

Dans le cas de fibres de même nature, on distingue divers types de tissus suivant la valeur du coefficient d'équilibrage  $k$  :

- si  $k = 1$ , le tissu est unidirectionnel dans le sens chaîne,
- si  $k = 0$ , le tissu est unidirectionnel dans le sens trame,
- si  $k = 1/2$ , le tissu est dit équilibré.

Le renfort tissu est également caractérisé par sa masse surfacique  $M_s$ . Lors de la mise en œuvre d'un stratifié, le tissu est imprégné par la résine pour constituer une couche d'épaisseur  $e_c$ . La fraction volumique de fibres peut alors être calculée en considérant le volume  $v_t$  d'une couche de surface unité :  $v_t = e_c$ . Le volume de fibres contenu dans le volume  $v_t$  est :

$$v_f = \frac{M_s}{\rho_f}, \quad (15.38)$$

en introduisant la masse volumique des fibres. Il en résulte que la fraction volumique de fibres s'exprime par :

$$V_f = \frac{v_f}{v_t} = \frac{M_s}{\rho_f} \frac{1}{e_c}. \quad (15.39)$$

En exprimant, dans la relation précédente, la fraction volumique en fonction de la fraction en masse  $P_f$  de fibres (1.19), l'épaisseur de la couche s'écrit :

$$e_c = M_s \frac{P_f \rho_m + (1 - P_f) \rho_f}{P_f \rho_f \rho_m}, \quad (15.40)$$

où  $\rho_m$  est la masse volumique de la matrice.

### 15.2.3 Analogie stratifié

L'analogie stratifié, utilisée pour modéliser le comportement élastique d'une couche à renfort tissu, consiste à considérer la couche de tissu comme constituée de deux couches unidirectionnelles (figure 15.12) : une couche chaîne orientée à  $0^\circ$ , une couche trame orientée à  $90^\circ$ . Les hauteurs respectives de ces couches sont proportionnelles à la fraction volumique des fibres : la hauteur  $h_{ch}$  de la couche sens chaîne est proportionnelle à  $V_{ch}$  et la hauteur  $h_{tr}$  de la couche sens trame est

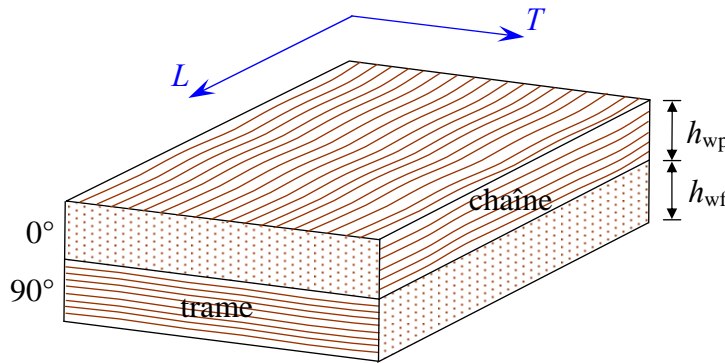


FIGURE 15.12. Analogie stratifié d'une couche à renfort tissu.



proportionnelle à  $V_{tr}$ . Ces hauteurs s'expriment en fonction de l'épaisseur  $e_c$  de la couche et du coefficient  $k$  d'équilibrage en chaîne, suivant :

$$h_{ch} = k e_c, \quad (15.41)$$

$$h_{tr} = (1 - k) e_c. \quad (15.42)$$

Le comportement élastique de chaque couche peut être décrit par leurs modules :

$$\text{couche chaîne : } E_{Lch} \quad E_{Tch} \quad \nu_{LTch} \quad G_{LTch},$$

$$\text{couche trame : } E_{Ltr} \quad E_{Ttr} \quad \nu_{LTtr} \quad G_{LTtr}.$$

Ces modules sont rapportés aux axes respectifs des matériaux de chaque couche : axe  $L$  dans le sens chaîne pour la couche chaîne, axe  $L$  dans le sens trame pour la couche trame. Il en résulte que la matrice de rigidité réduite de la couche chaîne, rapportée aux axes du matériau de cette couche, donc rapportée aux axes de la couche à renfort tissu, s'exprime d'après (11.52) suivant :

$$\begin{aligned} Q_{11}^{ch} &= \alpha_{ch} E_{Lch}, & Q_{12}^{ch} &= \alpha_{ch} \nu_{LTch} E_{Tch}, \\ Q_{16}^{ch} &= 0, & Q_{26}^{ch} &= 0, \\ Q_{22}^{ch} &= \alpha_{ch} E_{Tch}, & Q_{66}^{ch} &= G_{LTch}, \end{aligned} \quad (15.43)$$

avec

$$\alpha_{ch} = \frac{1}{1 - \nu_{LTch}^2 \frac{E_{Tch}}{E_{Lch}}}. \quad (15.44)$$

De même, les coefficients de rigidité de la couche trame s'expriment par rapport à ses axes matériau, suivant :

$$\begin{aligned} Q_{11}^{tr} &= \alpha_{tr} E_{Ltr}, & Q_{12}^{tr} &= \alpha_{tr} \nu_{LTtr} E_{Ttr}, \\ Q_{16}^{tr} &= 0, & Q_{26}^{tr} &= 0, \\ Q_{22}^{tr} &= \alpha_{tr} E_{Ttr}, & Q_{66}^{tr} &= G_{LTtr}. \end{aligned} \quad (15.45)$$

avec

$$\alpha_{tr} = \frac{1}{1 - \nu_{LTtr}^2 \frac{E_{Ttr}}{E_{Ltr}}}. \quad (15.46)$$

Les coefficients de rigidité de la couche trame, rapportés aux axes matériau de la couche à renfort tissu sont donc :

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{22}^{tr}, & Q'_{12} &= Q_{12}^{tr}, & Q'_{16} &= 0, \\ Q'_{22} &= Q_{11}^{tr}, & Q'_{26} &= 0, \\ Q'_{66} &= Q_{66}^{tr}. \end{aligned} \quad (15.47)$$

D'après l'expression (14.31), les coefficients  $A_{ij}$  décrivant le comportement en

membrane de la couche à renfort tissu s'écrivent :

$$A_{ij} = h_{ch} Q_{ij}^{ch} + h_{tr} Q_{ij}^{tr}, \quad (15.48)$$

ou

$$A_{ij} = e_c \left[ k Q_{ij}^{ch} + (1-k) Q_{ij}^{tr} \right]. \quad (15.49)$$

Soit, en tenant compte de (15.43) à (15.47) :

$$\begin{aligned} A_{11} &= e_c \left[ k \alpha_{ch} E_{Lch} + (1-k) \alpha_{tr} E_{Ttr} \right], \\ A_{12} &= e_c \left[ k \alpha_{ch} \nu_{LTch} E_{Tch} + (1-k) \alpha_{tr} \nu_{LTtr} E_{Ttr} \right], \\ A_{22} &= e_c \left[ k \alpha_{ch} E_{Tch} + (1-k) \alpha_{tr} E_{Ltr} \right], \\ A_{66} &= e_c \left[ k G_{LTch} + (1-k) G_{LTtr} \right], \\ A_{16} &= A_{16} = 0. \end{aligned} \quad (15.50)$$

Ces relations négligent la courbure (figure 15.11) des fils résultant du tissage. J.C. Halpin, K. Jerine et J.M. Whitney [21] ont étudié l'influence de cette courbure qui conduit à une diminution des paramètres. De même, l'analyse précédente ne prend pas en compte un désalignement éventuel des fils, désalignement qui conduit également à une diminution des propriétés.

### 15.2.4 Modules du comportement en membrane d'une couche à renfort tissu

Le comportement en membrane d'une couche à renfort tissu est donc décrit par l'équation constitutive :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}, \quad (15.51)$$

où les coefficients  $A_{ij}$  sont exprimés en (15.50).

#### 1. Traction suivant la direction chaîne (direction $L$ )

Dans le cas d'une traction dans le sens chaîne, les résultantes en membrane sont :

$$N_x \neq 0, \quad N_y = 0, \quad N_{xy} = 0. \quad (15.52)$$

Soit :

$$\begin{aligned}
N_x &= A_{11}\varepsilon_{xx}^0 + A_{12}\varepsilon_{yy}^0, \\
0 &= A_{12}\varepsilon_{xx}^0 + A_{22}\varepsilon_{yy}^0, \\
0 &= \gamma_{xy}^0.
\end{aligned} \tag{15.53}$$

D'où l'expression de la résultante en membrane :

$$N_x = \left( A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right) \varepsilon_{xx}^0. \tag{15.54}$$

Le module d'Young  $E_L$  dans le sens chaîne s'exprime suivant :

$$E_L = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}^0} = \frac{N_x/e_c}{\varepsilon_{xx}^0}. \tag{15.55}$$

Il en résulte que le module s'exprime suivant la relation :

$$E_L = \frac{1}{e_c} \left( A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right). \tag{15.56}$$

D'après les expressions (15.53), la déformation dans le sens trame est donnée par la relation :

$$\varepsilon_{yy}^0 = -\frac{A_{12}}{A_{22}} \varepsilon_{xx}^0. \tag{15.57}$$

Il en résulte que le coefficient de Poisson  $\nu_{LT}$  est exprimé par la relation :

$$\nu_{LT} = \frac{A_{12}}{A_{22}}. \tag{15.58}$$

## 2. Traction suivant la direction trame (direction $T$ )

Un raisonnement analogue au précédent conduit au module d'Young  $E_T$  dans le sens trame :

$$E_T = \frac{1}{e_c} \left( A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right), \tag{15.59}$$

et au coefficient de Poisson  $\nu_{TL}$  :

$$\nu_{TL} = \frac{A_{12}}{A_{11}} = \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L}. \tag{15.60}$$

## 3. Cisaillement dans les axes de la couche

Un essai de cisaillement dans les axes de la couche conduit à la détermination

du module de cisaillement  $G_{LT}$  dans le plan de la couche. Soit :

$$G_{LT} = G_{TL} = \frac{1}{e_c} A_{66}. \quad (15.61)$$

### 15.2.5 Expressions des modules en membrane d'une couche à renfort tissu

Les expressions (15.56) à (15.61) peuvent être regroupées suivant :

$$\begin{aligned} E_L &= \frac{1}{e_c} \left( A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right), \\ E_T &= \frac{1}{e_c} \left( A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right), \\ \nu_{LT} &= \frac{A_{12}}{A_{22}}, \quad \nu_{TL} = \frac{A_{12}}{A_{11}} = \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L}, \\ G_{LT} &= G_{TL} = \frac{1}{e_c} A_{66}. \end{aligned} \quad (15.62)$$

Les expressions des modules d'Young peuvent être simplifiées suivant :

$$E_L = (1 - \alpha) \frac{1}{e_c} A_{11}, \quad (15.63)$$

$$E_T = (1 - \alpha) \frac{1}{e_c} A_{22}, \quad (15.64)$$

en introduisant le paramètre

$$\alpha = \frac{A_{12}^2}{A_{11} A_{22}}, \quad (15.65)$$

dont la valeur est voisine de zéro.

En tenant compte des expressions (15.50) des coefficients  $A_{ij}$ , les modules s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} E_L &= (1 - \alpha) \left[ k \alpha_{\text{ch}} E_{L\text{ch}} + (1 - k) \alpha_{\text{tr}} E_{T\text{tr}} \right], \\ E_T &= (1 - \alpha) \left[ k \alpha_{\text{ch}} E_{T\text{ch}} + (1 - k) \alpha_{\text{tr}} E_{L\text{tr}} \right], \\ \nu_{LT} &= \frac{k \alpha_{\text{ch}} \nu_{LT\text{ch}} E_{T\text{ch}} + (1 - k) \alpha_{\text{tr}} \nu_{LT\text{tr}} E_{L\text{tr}}}{k \alpha_{\text{ch}} E_{T\text{ch}} + (1 - k) \alpha_{\text{tr}} E_{L\text{tr}}}, \\ G_{LT} &= k G_{LT\text{ch}} + (1 - k) G_{LT\text{tr}}, \end{aligned} \quad (15.66)$$

avec

$$\alpha = \frac{\left[ k\alpha_{\text{ch}}\nu_{LT\text{ch}}E_{T\text{ch}} + (1-k)\alpha_{\text{tr}}\nu_{LT\text{tr}}E_{L\text{tr}} \right]^2}{\left[ k\alpha_{\text{ch}}E_{L\text{ch}} + (1-k)\alpha_{\text{tr}}E_{T\text{tr}} \right] \left[ k\alpha_{\text{ch}}E_{T\text{ch}} + (1-k)\alpha_{\text{tr}}E_{L\text{tr}} \right]}.$$

Les expressions (15.66) donnent dans le cas d'un renfort tissu quelconque 2D les modules d'une couche à renfort tissu. Les modules  $E_{L\text{ch}}, E_{T\text{ch}}, \dots, E_{L\text{tr}}, E_{T\text{tr}}, \dots$  peuvent être exprimés eux-mêmes (chapitre 9) en fonction des caractéristiques des fibres ( $E_f, \nu_f$ ), de la résine ( $E_m, \nu_m$ ), du coefficient d'équilibrage  $k$ , de la masse surfacique  $M_s$  du tissu et de l'épaisseur  $e_c$  de la couche.

Les expressions (15.66) peuvent être simplifiées dans le cas où les fibres dans le sens chaîne et le sens trame sont identiques, et dans le cas où le tissu est équilibré. En effet, dans ce cas,  $k = 1/2$ , et les modules dans le sens chaîne et dans le sens trame sont identiques :

$$\begin{aligned} E_{L\text{ch}} &= E_{L\text{tr}} = E_{L\text{u}}, \\ E_{T\text{ch}} &= E_{T\text{tr}} = E_{T\text{u}}, \\ \nu_{LT\text{ch}} &= \nu_{LT\text{tr}} = \nu_{LT\text{u}}, \\ G_{LT\text{ch}} &= G_{LT\text{tr}} = G_{LT\text{u}}, \end{aligned} \quad (15.67)$$

où  $E_{L\text{u}}, E_{T\text{u}}, \nu_{LT\text{u}}$  et  $G_{LT\text{u}}$  sont les modules d'une couche unidirectionnelle ayant une fraction volumique égale à celle de la couche à renfort tissu considéré. Les expressions (15.66) des modules se réduisent alors à :

$$\begin{aligned} E_L &= E_T = \frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha_u(E_{L\text{u}} + E_{T\text{u}}), \\ \nu_{LT} &= \frac{2\nu_{LT\text{u}}}{1 + \frac{E_{L\text{u}}}{E_{T\text{u}}}}, \\ G_{LT} &= G_{LT\text{u}}, \end{aligned} \quad (15.68)$$

avec

$$\alpha = \frac{4\nu_{LT\text{u}}^2}{\left(1 + \frac{E_{L\text{u}}}{E_{T\text{u}}}\right)^2}, \quad \alpha_u = \frac{1}{1 - \nu_{LT\text{u}}^2 \frac{E_{T\text{u}}}{E_{L\text{u}}}}. \quad (15.69)$$

Les expressions de  $\alpha$  et  $\alpha_u$  montrent que :

$$E_L = E_T \approx \frac{1}{2}(E_{L\text{u}} + E_{T\text{u}}). \quad (15.70)$$

Dans le cas d'un tissu déséquilibré de fils de même nature dans le sens chaîne et dans le sens trame, les valeurs des modules doivent être calculées à partir des expressions générales (15.66). L'exploitation de ces expressions est complexe à mettre en œuvre. Une approximation peut en être donnée en introduisant dans (15.66) les modules (15.67). Les modules de la couche tissu s'expriment alors suivant :

$$\begin{aligned}
E_L &= (1-\alpha)\alpha_u \left[ kE_{Lu} + (1-k)E_{Tu} \right], \\
E_T &= (1-\alpha)\alpha_u \left[ kE_{Tu} + (1-k)E_{Lu} \right], \\
\nu_{LT} &= \frac{1}{k + (1-k)\frac{E_{Lu}}{E_{Tu}}} \nu_{LTu}, \\
G_{LT} &= G_{LTu},
\end{aligned} \tag{15.71}$$

avec

$$\alpha = \frac{\nu_{LTu}^2}{\left[ k \frac{E_{Lu}}{E_{Tu}} + 1 - k \right] \left[ k + (1-k) \frac{E_{Lu}}{E_{Tu}} \right]}, \quad \alpha_u = \frac{1}{1 - \nu_{LTu}^2 \frac{E_{Tu}}{E_{Lu}}}. \tag{15.72}$$

### 15.2.6 Applications numériques

Nous étudions le cas de deux tissus : un tissu équilibré et un tissu déséquilibré constitués de fibres de verre. Les caractéristiques des constituants sont :

$$\begin{aligned}
\text{— fibres de verre :} \quad & E_f = 73 \text{ GPa}, \quad \nu_f = 0,22, \quad \rho_f = 2\,600 \text{ kg/m}^3, \\
\text{— matrice :} \quad & E_m = 3 \text{ GPa}, \quad \nu_m = 0,35, \quad \rho_m = 1\,200 \text{ kg/m}^3.
\end{aligned}$$

#### 1. Couche à renfort tissu équilibré

Le renfort tissu considéré a une masse surfacique égale à 500 g/m<sup>2</sup> et l'épaisseur de la couche réalisée est 0,7 mm.

La fraction volumique de fibres déterminée par (15.39) conduit à :  $V_f = 27,5 \%$ , correspondant à une fraction massique  $P_f = 45,1 \%$ .

En utilisant les résultats obtenus au chapitre 9, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
E_{Lu} &= 22,2 \text{ GPa}, & \nu_{LTu} &= 0,31, \\
G_{LTu} &= 1,87 \text{ GPa}, & E_{Tu} &= 5,12 \text{ GPa}.
\end{aligned} \tag{15.73}$$

D'où les caractéristiques de la couche à renfort tissu équilibré :

$$E_L = E_T = 13,8 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,12, \quad G_{LT} = 1,87 \text{ GPa}. \tag{15.74}$$

#### 2. Couche à renfort tissu déséquilibré

Le renfort tissu a une masse surfacique de 650 g/m<sup>2</sup>, et son déséquilibre en chaîne est caractérisé par  $k = 0,6$ . On constitue une couche de même fraction massique que la couche précédente réalisée avec le tissu équilibré. L'épaisseur de la couche réalisée peut être calculée à partir de (15.39). Nous obtenons :

$$e_c = 0,91 \text{ mm}.$$

Les caractéristiques de la couche sont obtenues à partir des mêmes valeurs (15.73) du composite unidirectionnel à 27,5 % de fibres en volume. Les relations (15.72) conduisent aux valeurs :

$$\begin{aligned} E_L &= 15,5 \text{ GPa}, & E_T &= 12,1 \text{ GPa}, \\ \nu_{LT} &= 0,135, & G_{LT} &= 1,87 \text{ GPa}. \end{aligned} \quad (15.75)$$

### 15.2.7 Couche à renfort mat

Un mat (chapitre 2) est constitué de fils coupés ou non d'orientation aléatoire dans le plan du mat. Une couche à renfort mat peut alors être considérée comme un stratifié comportant un nombre infini de couches, orientées suivant toutes les directions. Une couche d'orientation  $\theta$  contenant des fibres orientées entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  a donc, d'après l'analogie introduite au paragraphe 15.2.3, une épaisseur égale à :

$$\frac{e_c}{2\pi} d\theta. \quad (15.76)$$

Dans le cas d'un renfort mat, la relation (14.31) des coefficients  $A_{ij}$  en membrane s'exprime donc suivant :

$$A_{ij} = \frac{e_c}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} (Q'_{ij})_{\theta} d\theta. \quad (15.77)$$

Pour calculer ces intégrales, il est intéressant d'utiliser les expressions du tableau 11.7, puisque les intégrales de  $\sin 2\theta$ ,  $\sin 4\theta$ ,  $\cos 2\theta$ ,  $\cos 4\theta$  sont nulles. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} A_{11} &= e_c V_1, & A_{12} &= e_c V_4, & A_{16} &= 0, \\ A_{22} &= e_c V_1, & A_{26} &= 0, \\ A_{66} &= e_c V_5 = \frac{e_c}{2} (V_1 - V_4). \end{aligned} \quad (15.78)$$

avec

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{8} (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}), \\ V_4 &= \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}), \\ V_5 &= \frac{1}{2} (V_1 - V_4) = \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}), \end{aligned} \quad (15.79)$$

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \alpha_u E_{Lu}, & Q_{22} &= \alpha_u E_{Tu}, \\ Q_{12} &= \alpha_u \nu_{LTu} E_{Tu}, & Q_{66} &= G_{LTu}, \\ \alpha_u &= \frac{1}{1 - \nu_{LTu}^2 \frac{E_{Tu}}{E_{Lu}}}, \end{aligned} \quad (15.80)$$

où  $E_{Lu}$ ,  $E_{Tu}$ ,  $\nu_{LTu}$  et  $G_{LTu}$  sont les modules (introduits en (15.67)) d'une couche unidirectionnelle de fraction volumique égale à celle de la couche à renfort mat considérée. Les modules de la couche à renfort mat sont ensuite déterminés à partir des relations (15.62), soit :

$$\begin{aligned} E_{Lmat} = E_{Tmat} &= \frac{(V_1 - V_4)(V_1 + V_4)}{V_1}, \\ \nu_{LTmat} &= \frac{V_4}{V_1}, \\ G_{LTmat} &= V_5 = \frac{1}{2}(V_1 - V_4). \end{aligned} \quad (15.81)$$

Nous vérifions que :

$$G_{LTmat} = \frac{E_{Lmat}}{2(1 + \nu_{LTmat})}. \quad (15.82)$$

Il résulte de cette relation que le module  $E_x$  (relation (11.9)) ne dépend pas de la direction de mesure. Le matériau se comporte dans le plan de la couche comme un matériau isotrope.

Comme application numérique, nous considérons le cas d'une couche à renfort mat de masse surfacique égale à 450 g/m<sup>2</sup> et dont l'épaisseur est 1 mm. Les caractéristiques des matériaux sont les mêmes que celles du paragraphe 15.2.6. La fraction volumique calculée à partir de (15.39) est :

$$V_f = 17,3 \%$$

Ce qui conduit à des modules du matériau unidirectionnel égaux à :

$$\begin{aligned} E_{Lu} &= 15,1 \text{ GPa}, & \nu_{LTu} &= 0,327, \\ G_{LTu} &= 1,54 \text{ GPa}, & E_{Tu} &= 4,30 \text{ GPa}. \end{aligned} \quad (15.83)$$

Les caractéristiques de la couche à renfort mat déterminées à partir de (15.81) sont donc :

$$\begin{aligned} E_{Lmat} = E_{Tmat} &= 7,72 \text{ GPa}, & \nu_{LTmat} &= 0,33, \\ G_{LTmat} &= 2,91 \text{ GPa}. \end{aligned} \quad (15.84)$$

## 15.2.8 Stratifié constitué de couches à renfort tissu et à renfort mat

Les résultats établis dans le paragraphe 15.1 s'appliquent aux stratifiés constitués de couches à renfort tissu et à renfort mat. Dans ce paragraphe, nous traitons, comme exemples, le cas de deux stratifiés symétriques (figure 15.13) constitués de quatre couches à renfort tissu et quatre couches à renfort mat. La couche à renfort tissu a les caractéristiques déterminées en (15.74) :



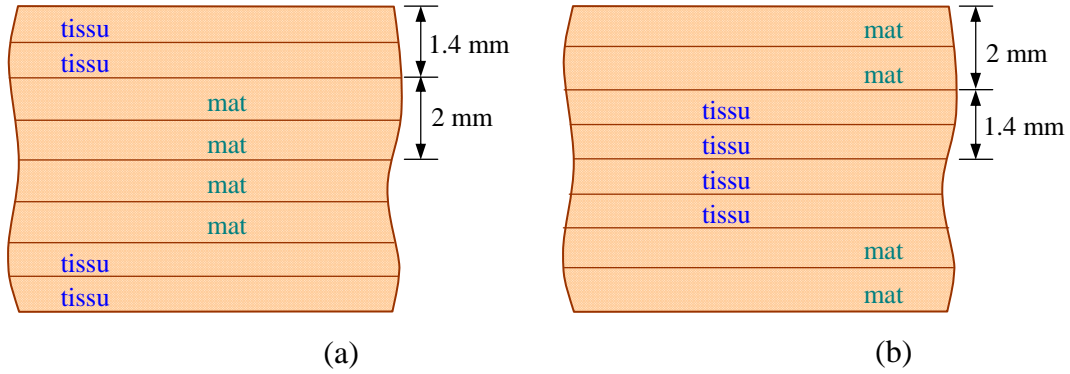


FIGURE 15.13. Stratifiés constitués de couches à renfort tissu et à renfort mat.

$$E_L = E_T = 13,8 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,12, \quad G_{LT} = 1,87 \text{ GPa}, \quad (15.85)$$

$$e_c = 0,7 \text{ mm}.$$

et la couche à renfort mat a les caractéristiques déterminées dans les relations (15.84) :

$$E_{Lmat} = E_{Tmat} = 7,72 \text{ GPa}, \quad \nu_{LTmat} = 0,33, \quad G_{LTmat} = 2,91 \text{ GPa}, \quad (15.86)$$

$$e_c = 1 \text{ mm}.$$

Les coefficients de rigidité réduite des couches se déterminent à l'aide des relations (11.52). Soit :

— pour les couches à renfort tissu :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2} = 14,0 \text{ GPa},$$

$$Q_{12} = \nu_{LT} Q_{22} = 1,68 \text{ GPa}, \quad (15.87)$$

$$Q_{66} = G_{LT} = 1,87 \text{ GPa},$$

$$Q_{16} = Q_{26} = 0.$$

— pour les couches à renfort mat :

$$Q_{11}^m = Q_{22}^m = \frac{E_{Lmat}}{1 - \nu_{LTmat}^2} = 8,66 \text{ GPa},$$

$$Q_{12}^m = \nu_{LTmat} Q_{22}^m = 2,86 \text{ GPa}, \quad (15.88)$$

$$Q_{66}^m = G_{LTmat} = 2,91 \text{ GPa},$$

$$Q_{16}^m = Q_{26}^m = 0.$$

Les stratifiés étant symétriques, les matrices de rigidité des équations constitutives se réduisent aux matrices de membrane et aux matrices de flexion/torsion. D'autre part, dans les calculs, les couches adjacentes de même nature peuvent être regroupées en une seule couche.

### 1. Stratifié avec renfort tissu à l'extérieur (figure 15.13a)

D'après la relation (14.31), les coefficients de rigidité  $A_{ij}$  en membrane s'écrivent sous la forme :

$$A_{ij} = 2 \left[ Q_{ij}^m \times 2 \times 10^{-3} + Q_{ij} \times 1,4 \times 10^{-3} \right]. \quad (15.89)$$

D'où

$$\begin{aligned} A_{11} &= 73,858 \times 10^6 \text{ N/m}, & A_{12} &= 16,140 \times 10^6 \text{ N/m}, \\ A_{22} &= A_{11}, & A_{66} &= 16,876 \times 10^6 \text{ N/m}, \\ A_{16} &= A_{26} = 0. \end{aligned} \quad (15.90)$$

D'après la relation (14.33), les coefficients de rigidité  $D_{ij}$  en flexion et torsion s'écrivent :

$$D_{ij} = 2 \left[ Q_{ij}^m \left( 2 + \frac{2^3}{12} \right) + Q_{ij} \left( 1,4 \times 2,7^2 + \frac{1,4^3}{12} \right) \right] \times 10^{-9}. \quad (15.91)$$

D'où

$$\begin{aligned} D_{11} &= 338,41 \text{ Nm}, & D_{12} &= 50,312 \text{ Nm}, \\ D_{22} &= D_{11}, & D_{66} &= 54,546 \text{ Nm}, \\ D_{16} &= D_{26} = 0. \end{aligned} \quad (15.92)$$

L'équation constitutive du stratifié est donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73,858 \times 10^6 & 16,140 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16,140 \times 10^6 & 73,858 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16,876 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 338,41 & 50,312 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50,312 & 338,41 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54,546 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (15.93)$$

### 2. Stratifié à renfort mat à l'extérieur (figure 15.13b)

La différence d'empilement ne modifie que les coefficients  $D_{ij}$  en flexion et torsion, qui s'expriment ici, d'après (14.33), suivant :

$$D_{ij} = 2 \left[ Q_{ij} \left( 1,4 \times 0,7^2 + \frac{1,4^3}{12} \right) + Q_{ij}^m \left( 2 \times 2,4^2 + \frac{2^3}{12} \right) \right] \times 10^{-9}. \quad (15.94)$$

Soit :

$$\begin{aligned} D_{11} &= 236,77 \text{ Nm}, & D_{12} &= 72,755 \text{ Nm}, \\ D_{22} &= D_{11}, & D_{66} &= 73,347 \text{ Nm}, \\ D_{16} &= D_{26} = 0. \end{aligned} \quad (15.95)$$

L'équation constitutive du stratifié s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73,858 \times 10^6 & 16,140 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16,140 \times 10^6 & 73,858 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16,876 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 236,77 & 72,755 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 72,755 & 236,77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 74,347 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (15.96)$$

La comparaison des équations (15.93) et (15.96) montre que les comportements en membrane des deux stratifiés sont identiques (termes  $A_{ij}$  égaux). Les termes  $D_{11}$  et  $D_{22}$  sont supérieurs dans le cas où le renfort tissu est situé à l'extérieur, d'où des rigidités en flexion supérieures. Cette propriété résulte du fait que les couches à plus forts modules ( $E_L$  et  $E_T$ ) sont les plus éloignées du plan moyen. Par contre, les termes  $D_{12}$  de couplage flexion-torsion et  $D_{66}$  sont supérieurs dans le cas où le renfort mat est situé à l'extérieur, d'où dans ce cas une meilleure rigidité en torsion.

## EXERCICES

**15.1** Établir les relations du tableau 15.2.

**15.2** Établir les relations du tableau 15.3.

**15.3** On considère les stratifiés croisés symétriques  $[0/90]_{kS}$ , d'épaisseur donnée  $h$ , constitués de  $4k$  couches orientées à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$ . Les couches ont même épaisseur  $h/4k$  et mêmes caractéristiques mécaniques.

Comment évolue la matrice de rigidité lorsque  $k$  augmente à partir de  $k = 1$  (stratifié  $[0/90]_S$ ) ?

**15.4** On considère les stratifiés croisés antisymétriques  $[0/90]_k$ , d'épaisseur donnée  $h$ , constitués de  $2k$  couches orientées alternativement à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$ . Les couches ont même épaisseur  $h/2k$  et mêmes caractéristiques mécaniques.

Comment évolue la matrice de rigidité lorsque  $k$  augmente à partir de 1 (stratifié  $[0/90]$ ) ?

**15.5** Reprendre la question précédente dans le cas des stratifiés antisymétriques  $[90/0]_k$ , où les couches sont orientées alternativement à  $90^\circ$  et à  $0^\circ$ . Comparer aux résultats précédents.

**15.6** Un tissu hybride est tissé à partir de stratifils de carbone en chaîne et de stratifils de verre en trame. La chaîne comporte 600 fils par unité de largeur de tissu. Les fils ont un titre de 1000 tex et une masse volumique de  $1800 \text{ kg/m}^3$ . Les caractéristiques mécaniques des fils sont  $E_f = 250 \text{ GPa}$  et  $\nu_f = 0,32$ . La trame comporte 200 fils par unité de longueur de tissu. Les fils ont un titre de 2400 tex et une masse volumique de  $2600 \text{ kg/m}^3$ . Les caractéristiques mécaniques des fils sont  $E_f = 72 \text{ GPa}$  et  $\nu_f = 0,22$ .

Calculer la masse surfacique du tissu et le coefficient d'équilibrage.

Le tissu est utilisé avec une matrice de caractéristiques mécaniques  $E_m = 3,5 \text{ GPa}$  et  $\nu_m = 0,30$  pour constituer une couche de 1,4 mm d'épaisseur.

Calculer les fractions volumiques des fils en chaîne et en trame.

En utilisant l'analogie stratifié, calculer les modules chaîne et trame, puis les rigidités en membrane du tissu et les modules de la couche.

# Relations Fondamentales et Formulation Énergétique de la Théorie Classique des Stratifiés

## 16.1 RELATIONS FONDAMENTALES

### 16.1.1 Relations générales

Les relations fondamentales de la théorie classique des stratifiés sont obtenues en introduisant l'équation constitutive (14.29) des stratifiés dans les relations (13.52) ou (13.57) dans le cas de problèmes de dynamique, ou dans les relations (13.59) dans le cas de problèmes de statique. En reportant, par exemple, l'équation (14.29) dans la relation (13.57), puis en tenant compte des expressions (14.15) liant les déformations aux déplacements, nous obtenons les trois relations fondamentales de la théorie classique des stratifiés :

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ & - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\ & = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (16.1)$$

$$\begin{aligned} & A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ & - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\ & = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (16.2)$$

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\
& - B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} \\
& - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
& = q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{16.3}$$

Les équations précédentes ne prennent pas en compte les forces volumiques, les contraintes éventuelles de cisaillement sur les faces du stratifié, et négligent les effets d'inertie en rotation. La prise en compte de ces facteurs conduit à introduire des termes complémentaires dans les équations (16.1) à (16.3), conformément aux relations (13.52). Les équations (16.1) à (16.3) constituent les équations fondamentales de la théorie classique des stratifiés. Ces équations, associées aux conditions imposées sur les frontières de la structure (paragraphe 16.2), permettent de trouver, en principe, les déplacements  $u_0(x, y, t)$ ,  $v_0(x, y, t)$  et  $w_0(x, y, t)$ , solutions du problème d'élasticité. La résolution de ces équations est toutefois complexe, et ne peut être menée de manière analytique que dans quelques cas particuliers.

Une simplification importante apparaît lorsque tous les termes  $B_{ij}$  sont nuls (cas des stratifiés symétriques par exemple). Dans ce cas, les équations (16.1) à (16.3) sont partiellement découplées : les équations (16.1) et (16.2) ne contiennent que les déplacements  $u_0(x, y, t)$  et  $v_0(x, y, t)$ , alors que l'équation (16.3) ne fait intervenir que le déplacement  $w_0(x, y, t)$ . Dans tous les autres cas, il est nécessaire de résoudre des équations couplées.

### 16.1.2 Stratifié symétrique

Dans le cas où le stratifié est symétrique, tous les termes  $B_{ij}$  sont nuls (chapitre 15), ainsi que les grandeurs  $R$ . Les relations fondamentales s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{aligned}
& A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{16.4}$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{16.5}$$

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\
& = q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_{xy} \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right).
\end{aligned} \tag{16.6}$$

Dans le cas de problèmes de statique, ces relations se réduisent à :

$$\begin{aligned}
& A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\
& + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0,
\end{aligned} \tag{16.7}$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\
& + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0,
\end{aligned} \tag{16.8}$$

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = q.
\end{aligned} \tag{16.9}$$

Le comportement en membrane ( $u_0, v_0$ ) est découplé du comportement en flexion ( $w_0$ ). Si, en outre, le stratifié est équilibré :  $A_{16} = A_{26} = 0$ , les relations (16.4), (16.5) ou (16.7), (16.8) sont simplifiées, les relations (16.6) ou (16.9) restent inchangées.

### 16.1.3 Stratifié croisé antisymétrique

Comme autre exemple, nous considérons le cas d'un stratifié croisé antisymétrique, pour lequel (chapitre 15) : les rigidités de membrane sont  $A_{11}, A_{12}, A_{22} = A_{11}, A_{66}$ , les rigidités de flexion-torsion sont  $D_{11}, D_{12}, D_{22} = D_{11}, D_{66}$ , et les rigidités de couplage  $B_{11}, B_{22} = -B_{11}$ . Dans le cas d'un problème de statique, les relations fondamentales s'écrivent dans ce cas :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0, \quad (16.10)$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{11} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0, \quad (16.11)$$

$$D_{11} \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - B_{11} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) = q. \quad (16.12)$$

Du fait de la présence des termes  $B_{11}$  et  $B_{22} = -B_{11}$ , les équations différentielles sont couplées.

### 16.1.4 Expressions des résultantes et moments

Les expressions des résultantes et moments en fonction des déplacements sont obtenues en reportant les expressions (14.15) des déformations dans l'équation constitutive (14.29) :

$$\begin{aligned} N_x = & A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{16} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ & - 2B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (16.13)$$

$$\begin{aligned} N_y = & A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ & - 2B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (16.14)$$

$$\begin{aligned} N_{xy} = & A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ & - 2B_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (16.15)$$

$$\begin{aligned} M_x = & B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{16} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ & - 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (16.16)$$

$$\begin{aligned} M_y = & B_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{26} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ & - 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (16.17)$$



$$\begin{aligned}
M_{xy} = & B_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
& - 2D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}.
\end{aligned} \tag{16.18}$$

Les expressions des résultantes de cisaillement peuvent être obtenues en reportant les expressions précédentes des moments dans les équations (13.56) :

$$\begin{aligned}
Q_x = & B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\
& + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - D_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 3D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
& - (D_{12} + 2D_{16}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3},
\end{aligned} \tag{16.19}$$

$$\begin{aligned}
Q_y = & B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\
& + 2B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
& - 3D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}.
\end{aligned} \tag{16.20}$$

La théorie classique des stratifiés est basée sur l'hypothèse de nullité (14.1) des déformations en cisaillement  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ . Cette hypothèse n'est satisfaite que si les résultantes de cisaillement  $Q_x$  et  $Q_y$  sont nulles. En fait, les relations précédentes (16.19) et (16.20) montrent que ces résultantes ne sont pas nulles. Cette incohérence apparente est admise dans le cadre de la théorie classique des plaques.

### 16.1.5 Expression des contraintes

Les expressions des contraintes en membrane en fonction des déplacements sont obtenues, pour chaque couche, en reportant les relations (14.15) des déformations et des courbures dans les expressions (14.20) des contraintes :

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^k = & Q_{11}^k \frac{\partial u_0}{\partial x} + Q_{16}^k \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + Q_{12}^k \frac{\partial v_0}{\partial y} \\
& - z \left( Q_{11}^k \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2Q_{16}^k \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + Q_{12}^k \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right),
\end{aligned} \tag{16.21}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^k &= Q_{12}^k \frac{\partial u_0}{\partial x} + Q_{26}^k \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + Q_{22}^k \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ &\quad - z \left( Q_{12}^k \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2Q_{26}^k \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + Q_{22}^k \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right),\end{aligned}\quad (16.22)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^k &= Q_{16}^k \frac{\partial u_0}{\partial x} + Q_{66}^k \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + Q_{26}^k \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ &\quad - z \left( Q_{16}^k \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2Q_{66}^k \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + Q_{26}^k \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right).\end{aligned}\quad (16.23)$$

Les contraintes de cisaillement transverse  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$ , appelées également contraintes de cisaillement interlaminaires, peuvent être déterminées à partir des deux premières relations fondamentales (13.20) de la mécanique des matériaux. En reportant les expressions précédentes (16.21) à (16.23) des contraintes, puis en intégrant suivant la variable  $z$  dans l'épaisseur de chaque couche, il vient dans le cas d'un problème de statique :

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^k &= \frac{z^2}{2} \left[ Q_{11}^k \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + 3Q_{16}^k \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + (Q_{12}^k + 2Q_{66}^k) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + Q_{26}^k \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right] \\ &\quad - z \left[ Q_{11}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2Q_{16}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + Q_{66}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + Q_{16}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + (Q_{12}^k + 2Q_{66}^k) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + Q_{26}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right] + a^k(x, y),\end{aligned}\quad (16.24)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yz}^k &= \frac{z^2}{2} \left[ Q_{16}^k \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (Q_{12}^k + 2Q_{66}^k) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + 3Q_{26}^k \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + Q_{22}^k \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right] \\ &\quad - z \left[ Q_{16}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (Q_{12}^k + 2Q_{66}^k) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + Q_{26}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + Q_{66}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + 2Q_{26}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + Q_{22}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right] + b^k(x, y).\end{aligned}\quad (16.25)$$

Les fonctions  $a^k(x, y)$  et  $b^k(x, y)$  sont des fonctions d'intégration, déterminées en exprimant la continuité des contraintes de cisaillement transverse  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  entre les couches et en annulant ces contraintes de cisaillement sur les faces inférieure et supérieure du stratifié.

## 16.2 CONDITIONS AUX FRONTIÈRES

### 16.2.1 Généralités

Les conditions imposées aux frontières d'une structure sont celles qui garantissent des solutions uniques aux relations fondamentales (16.1) à (16.3). Ces relations étant des équations aux dérivées partielles du quatrième ordre en  $x$  et en  $y$ , quatre conditions doivent être imposées sur les frontières. Un élément de frontière (figure 16.1) est repéré en un point  $P(x, y, 0)$  de la frontière par sa normale unitaire  $\vec{n}$  et le vecteur unitaire orthogonal  $\vec{t}$  dans le plan moyen. La déformée en  $P$  du stratifié est caractérisée par le déplacement du point  $P$  exprimé dans la base  $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{k})$  par ses composantes :  $u_{0n}(x, y)$ ,  $u_{0t}(x, y)$ ,  $w_0(x, y)$  et par l'orientation de la déformée caractérisée par  $\frac{\partial w_0}{\partial n}$ . Les actions exercées au point  $P$  sont caractérisées par les résultantes en membrane  $N_n$ ,  $N_{nt}$ , les résultantes de cisaillement  $Q_n$ , et les moments de flexion  $M_n$  et de torsion  $M_{nt}$ . Les conditions imposées en  $P$  portent sur l'une des grandeurs de chacune des paires suivantes :

$$u_{0n}, N_n; \quad u_{0t}, N_t; \quad \frac{\partial w_0}{\partial n}, M_n; \quad w_0, \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n. \quad (16.26)$$

La grandeur  $\frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n$  est connue comme étant la condition de frontière de Kirchhoff. Les valeurs imposées (généralement nulles) seront notées à l'aide d'un surlignement dans les paragraphes suivants.

### 16.2.2 Appui simple

Dans le cas d'un appui simple (figure 16.2), généralement quatre possibilités de conditions imposées sont retenues et classées suivant :

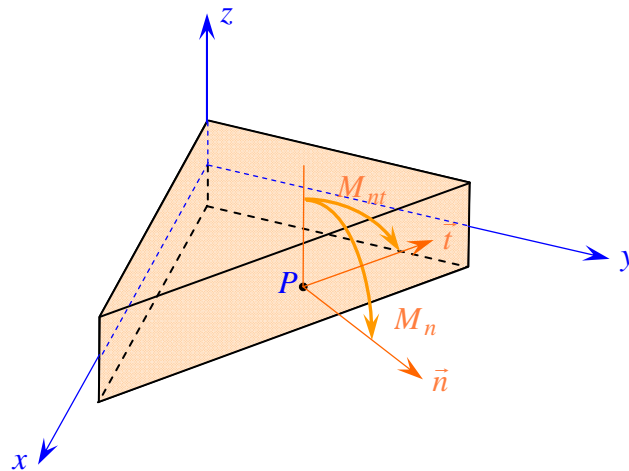


FIGURE 16.1. Élément de frontière.

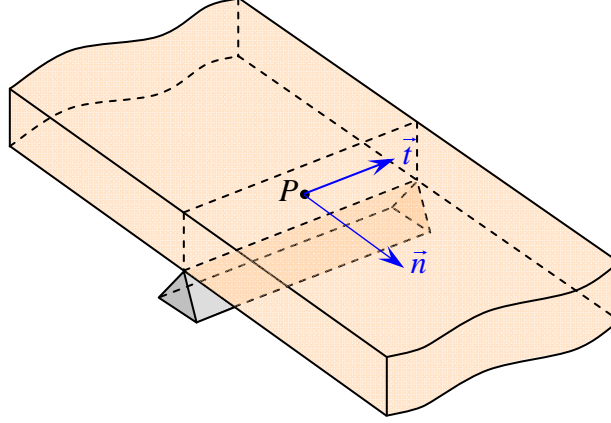


FIGURE 16.2. Appui simple.

$$\begin{aligned}
 A_1 : \quad & w_0 = 0, \quad M_n = 0, \quad u_{0n} = \bar{u}_{0n}, \quad u_{0t} = \bar{u}_{0t}, \\
 A_2 : \quad & w_0 = 0, \quad M_n = 0, \quad N_n = \bar{N}_n, \quad u_{0t} = \bar{u}_{0t}, \\
 A_3 : \quad & w_0 = 0, \quad M_n = 0, \quad u_{0n} = \bar{u}_{0n}, \quad N_{nt} = \bar{N}_{nt}, \\
 A_4 : \quad & w_0 = 0, \quad M_n = 0, \quad N_n = \bar{N}_n, \quad N_{nt} = \bar{N}_{nt}.
 \end{aligned} \tag{16.27}$$

Dans la pratique, la condition retenue est :

$$w_0 = 0, \quad M_n = 0, \quad N_n = 0, \quad N_{nt} = 0. \tag{16.28}$$

### 16.2.3 Encastrement

Dans le cas d'un encastrement (figure 16.3), quatre possibilités sont également considérées :

$$\begin{aligned}
 E_1 : \quad & w_0 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0, \quad u_{0n} = \bar{u}_{0n}, \quad u_{0t} = \bar{u}_{0t}, \\
 E_2 : \quad & w_0 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0, \quad N_n = \bar{N}_n, \quad u_{0t} = \bar{u}_{0t}, \\
 E_3 : \quad & w_0 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0, \quad u_{0n} = \bar{u}_{0n}, \quad N_{nt} = \bar{N}_{nt}, \\
 E_4 : \quad & w_0 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0, \quad N_n = \bar{N}_n, \quad N_{nt} = \bar{N}_{nt}.
 \end{aligned} \tag{16.29}$$

Dans la pratique, la condition retenue est :

$$w_0 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0, \quad u_{0n} = 0, \quad u_{0t} = 0. \tag{16.30}$$

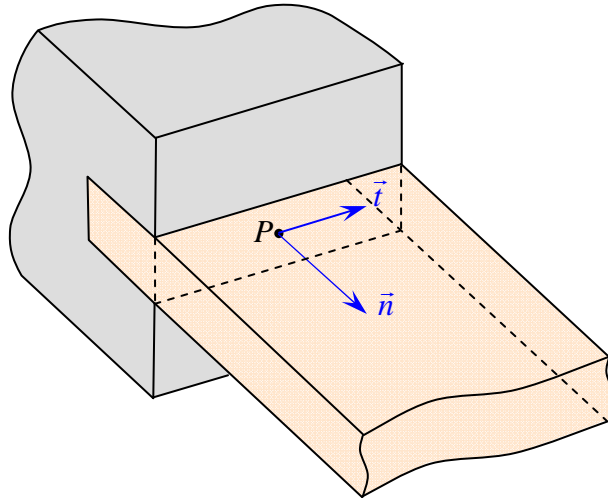


FIGURE 16.3. Encastrement.

### 16.2.4 Bord libre

Dans le cas d'un bord libre (figure 16.4), les efforts exercés sont nuls, soit  $N_n$ ,  $N_{nt}$ ,  $Q_n$ ,  $M_n$  et  $M_{nt}$ . Il en résulte que cinq conditions doivent être vérifiées, alors que seulement quatre conditions sont nécessaires. Pour lever cette difficulté, il est usuel de procéder de la manière suivante. Le couple de torsion exercé sur un élément de longueur  $dt$  est considéré comme étant constitué de deux forces de résultantes  $M_{nt}$  et  $M_{nt} + dM_{nt}$  dont les supports sont distants de  $dt$ . La variation de  $M_{nt}$  est donnée par :

$$dM_{nt} = \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} dt.$$

L'équilibre de l'élément de surface sous l'effet du couple de torsion et de la résultante  $Q_n dt$  de cisaillement s'écrit :

$$-M_{nt} + M_{nt} + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} dt + Q_n dt = 0,$$

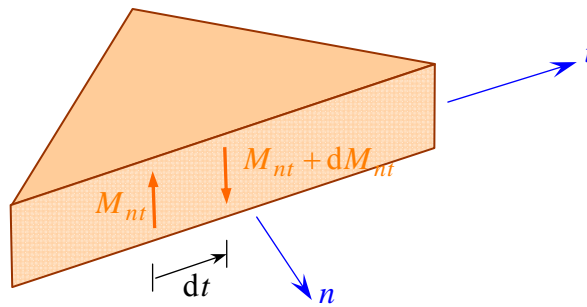


FIGURE 16.4. Bord libre.

ou

$$\frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n = 0. \quad (16.31)$$

Cette relation constitue la condition de frontière de Kirchhoff. Et les conditions imposées pour un bord libre s'écrivent :

$$N_n = 0, \quad N_{nt} = 0, \quad M_n = 0, \quad \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n = 0. \quad (16.32)$$

## 16.3 FORMULATION ÉNERGETIQUE DE LA THÉORIE DES STRATIFIÉS

### 16.3.1 Introduction

Les théorèmes de l'énergie (paragraphe 8.3) peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des stratifiés. Cette formulation associée aux conditions aux frontières permet, dans le cadre du calcul variationnel, de développer des méthodes (paragraphe 8.4) de recherche de solutions approchées du comportement mécanique des stratifiés. Les théorèmes de l'énergie sont également à la base de l'analyse du comportement mécanique des stratifiés à l'aide des éléments finis.

### 16.3.2 Énergie de déformation d'un stratifié

L'énergie de déformation (8.50) d'un solide élastique s'écrit en coordonnées cartésiennes suivant :

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz} + \sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{xy}\gamma_{xy}) dx dy dz, \quad (16.33)$$

où l'intégration est étendue à l'ensemble du volume du solide. En tenant compte des hypothèses de la théorie des stratifiés :  $\sigma_{zz} = 0$ ,  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  et des relations (14.19) exprimant les contraintes en fonction des déformations, l'énergie de déformation s'écrit :

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint \left( Q_{11}^k \varepsilon_{xx}^2 + Q_{22}^k \varepsilon_{yy}^2 + Q_{66}^k \gamma_{xy}^2 + 2Q_{12}^k \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + 2Q_{16}^k \varepsilon_{xx} \gamma_{xy} + 2Q_{26}^k \varepsilon_{yy} \gamma_{xy} \right) dx dy dz. \quad (16.34)$$

Cette relation peut être exprimée en fonction des déplacements  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$ , en

introduisant dans l'expression précédente les relations déformations-déplacements (14.14) et (14.15), établies au chapitre 14. En intégrant ensuite en  $z$  suivant l'épaisseur du stratifié, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 U_d = \frac{1}{2} \iint \left\{ A_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \right. \\
 + 2 \left( A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \\
 - B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2B_{12} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
 - B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2B_{16} \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] \\
 - 2B_{26} \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] \\
 - 4B_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
 + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\
 \left. + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy. \tag{16.35}
 \end{aligned}$$

Dans cette expression, l'intégration doit se faire dans le plan de la plaque du matériau stratifié. Cette expression introduit les coefficients de rigidité  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  et  $D_{ij}$  exprimés respectivement par les relations (14.23), (14.24) et (14.27). L'expression de l'énergie de déformation fait apparaître une énergie de déformation en membrane introduite par les coefficients de rigidité en membrane  $A_{ij}$  et une énergie de déformation en flexion associée aux coefficients de rigidité en flexion  $D_{ij}$ . L'expression de l'énergie de déformation contient également des termes de couplage entre les déplacements en membrane  $u_0$ ,  $v_0$  et les déplacements transverses  $w_0$ . Ces termes de couplage sont introduits, comme dans le cas des relations fondamentales (paragraphe 16.1), par la présence des coefficients de rigidité  $B_{ij}$ .

Dans le cas de stratifiés symétriques, les termes  $B_{ij}$  de couplage membrane-flexion sont nuls, et l'expression (16.35) de l'énergie de déformation se réduit suivant :

$$\begin{aligned}
U_d = \frac{1}{2} \iint & \left[ A_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \right. \\
& + 2 \left( A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \Big] dx dy \\
& + \frac{1}{2} \iint \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\
& + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \Big] dx dy.
\end{aligned} \tag{16.36}$$

L'énergie de déformation apparaît comme la somme de deux termes : l'un fonction uniquement des déplacements  $u_0$  et  $v_0$  de membrane, l'autre fonction uniquement des déplacements transverses  $w_0$ . Dans le cas de problèmes de flexion pure, le premier terme est réduit à une constante  $C$ , et l'énergie de déformation s'écrit suivant :

$$\begin{aligned}
U_d = \frac{1}{2} \iint & \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\
& + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \Big] dx dy + C.
\end{aligned} \tag{16.37}$$

De plus, si le stratifié est tel que  $D_{16} = D_{26} = 0$  (stratifié orthotrope d'axes confondus avec les axes  $x$  et  $y$ ), l'énergie de déformation est encore simplifiée selon :

$$\begin{aligned}
U_d = \frac{1}{2} \iint & \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\
& + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \Big] dx dy + C.
\end{aligned} \tag{16.38}$$

### 16.3.3 Énergie cinétique d'un stratifié

L'énergie cinétique d'un solide (8.54) s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz, \tag{16.39}$$



où  $\rho$  est la masse volumique en un point et l'intégration est étendue à l'ensemble du solide. Dans le cas de la théorie classique des stratifiés, le champ des déplacements (14.3) s'écrit :

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ v &= v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ w &= w_0(x, y), \end{aligned} \quad (16.40)$$

où  $w_0$  est indépendant de  $z$ . En substituant ces relations dans l'expression (16.39), l'énergie cinétique du stratifié s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz. \quad (16.41)$$

En négligeant les dérivées par rapport au temps des rotations (négligeant donc les termes d'inertie de rotation), puis en intégrant en  $z$  suivant l'épaisseur, l'énergie cinétique du stratifié se réduit à :

$$E_c = \frac{1}{2} \iint \rho_s \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy, \quad (16.42)$$

en introduisant la masse surfacique (13.29) du stratifié au point  $(x, y)$ .

### 16.3.4 Travail des actions exercées sur le stratifié

Dans le cas d'une flexion transversale, les actions exercées se réduisent aux charges transverses exercées sur les faces inférieure et supérieure du stratifié. La variation du travail de ces actions s'écrit :

$$\delta W_f = \iint [\sigma_{zz}(h/2) - \sigma_{zz}(-h/2)] \delta w_0 dx dy. \quad (16.43)$$

Soit en introduisant les contraintes  $q$  définies en (13.38) :

$$\delta W_f = \iint q \delta w_0 dx dy. \quad (16.44)$$

La fonction énergie  $W_f$  s'écrit donc :

$$W_f = \iint q w_0 dx dy. \quad (16.45)$$

# Prise en Compte du Cisaillement Transverse dans la Théorie des Stratifiés

## 17.1 LIMITATION DE LA THÉORIE DES STRATIFIÉS

La théorie classique des stratifiés (chapitre 14), basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, permet de décrire avec une bonne précision les champs des contraintes et déformations dans les matériaux composites stratifiés peu épais, excepté dans les régions peu étendues près des bords des stratifiés. La validité de la théorie des stratifiés a pu être établie en comparant les résultats obtenus à partir de cette théorie aux solutions exactes des équations d'élasticité, solutions qui peuvent être explicitées dans le cas de certaines configurations particulières (chapitre 19).

Par contre, dans le cas de stratifiés épais (rapport largeur sur épaisseur inférieur à 10), la théorie classique devient assez mal adaptée à la description du comportement mécanique : flèche du stratifié, répartition des contraintes, etc. Une première amélioration consiste à tenir compte du cisaillement transverse, avec une théorie des plaques du premier degré (paragraphes 17.2 et 17.3). Une deuxième amélioration consiste à modifier cette théorie, en introduisant des facteurs de correction aux modules de cisaillement transverse du stratifié. Cette approche, présentée au paragraphe 17.4, est une extension, aux cas des stratifiés, des théories développées par E. Reissner [22] et R.D. Mindlin [23] dans le cas de plaques homogènes isotropes. Cette analyse a été initialement développée par J.M. Whitney et N.J. Pagano [24, 25].

## 17.2 CHAMPS DES DÉFORMATIONS ET DES CONTRAINTES

### 17.2.1 Champ des déplacements

Le schéma utilisé est un schéma du premier degré de la forme générale (13.3), soit :

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t), \\v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t), \\w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t).\end{aligned}\tag{17.1}$$

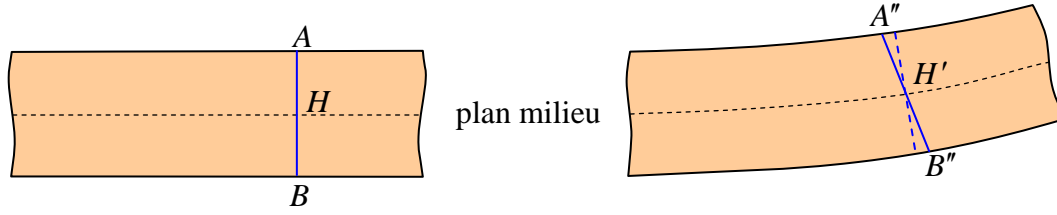


FIGURE 17.1. Déformation dans le cas d'un schéma du premier degré avec cisaillement transverse.

avec

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= u(x, y, 0, t), \\ v_0(x, y, t) &= v(x, y, 0, t), \\ w_0(x, y, t) &= w(x, y, 0, t). \end{aligned}$$

Nous avons montré (paragraphe 13.2.3) que, dans un schéma du premier ordre, la déformée d'une normale  $AB$  du stratifié reste un segment de droite lors de la déformation. Toutefois, contrairement à la théorie classique, cette déformée ne reste pas normale à la déformée du plan moyen (figure 17.1) dans le cas où l'on tient compte du cisaillement transverse.

## 17.2.2 Champ des déformations

Le champ des déformations est déduit du champ des déplacements (17.1). Il s'écrit (13.7) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \tag{17.2}$$

Le tenseur des déformations en un point  $M$  du stratifié est donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & 0 \end{bmatrix}, \quad (17.3)$$

et la matrice des déformations comporte cinq composantes non nulles :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}. \quad (17.4)$$

Le champ des déformations peut être sous-divisé en deux champs :

— *le champ des déformations en membrane-flexion* :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{mf}}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (17.5)$$

— *le champ des déformations en cisaillement transverse* :

$$\boldsymbol{\gamma}_c(M) = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{bmatrix}. \quad (17.6)$$

Le champ des déformations en cisaillement varie a priori d'une couche à l'autre. Dans la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse, on admet toutefois que le champ est identique dans toutes les couches. La première approche consiste à admettre que les déformations en cisaillement sont égales aux déformations moyennes  $\gamma_{yz}^0$  et  $\gamma_{xz}^0$  du stratifié, soit :

$$\boldsymbol{\gamma}_c(M) = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}. \quad (17.7)$$

Comme dans le cas de la théorie classique des stratifiés, le champ des déformations en membrane-flexion est la superposition :

— *des déformations en membrane* :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (17.8)$$

s'exprimant exclusivement en fonction des déplacements  $(u_0, v_0)$  dans le plan moyen  $(Oxy)$  des points de ce plan ;

— des déformations en flexion et torsion :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \end{bmatrix}. \quad (17.9)$$

Les déformations en flexion et torsion s'expriment en fonction de la matrice des courbures suivant la relation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f(M) = z \boldsymbol{\kappa}(x, y), \quad (17.10)$$

avec

$$\boldsymbol{\kappa}(x, y) = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (17.11)$$

Finalement, le champ  $\boldsymbol{\varepsilon}_{mf}(M)$  s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{mf} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (17.12)$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, & \varepsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, & \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \\ \kappa_x &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, & \kappa_y &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, & \kappa_{xy} &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}. \end{aligned} \quad (17.13)$$

Le champ des déformations s'écrit donc sous une forme analogue à la relation (14.16) de la théorie classique des stratifiés :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{mf}}(M) = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{m}}(x, y) + z \boldsymbol{\kappa}(x, y). \quad (17.14)$$

Seules les expressions des courbures sont modifiées.

### 17.2.3 Champ des contraintes

Les contraintes dans la couche  $k$  s'expriment suivant la relation générale (13.12), soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}. \quad (17.15)$$

Les paramètres  $Q'_{ij}$  et  $C'_{ij}$  de la couche  $k$  sont rapportés aux axes de référence du stratifié. Ils s'expriment en fonction des paramètres exprimés dans les axes des matériaux des couches (tableaux 11.3 et 11.6). Leurs expressions sont reportées dans le tableau 17.1.

Le champ des contraintes est constitué des contraintes en membrane :  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  et des contraintes en cisaillement transverse :  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{xz}$ . L'expression (17.15) montre que ces deux champs sont découplés.

TABLEAU 17.1. Coefficients de rigidité rapportés aux axes du stratifié en fonction des coefficients rapportés aux axes principaux des couches.

---


$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\ Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\ Q'_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta, \\ Q'_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\ C'_{44} &= C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta, \\ C'_{45} &= (C_{55} - C_{44}) \sin \theta \cos \theta, \\ C'_{55} &= C_{44} \sin^2 \theta + C_{55} \cos^2 \theta. \end{aligned}$$


---

Les contraintes en membrane dans la couche  $k$  s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix},$$

ou sous forme contractée :

$$\boldsymbol{\sigma}_k(M) = \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\kappa}(x, y). \quad (17.16)$$

Ces expressions semblables aux relations (14.20) et (14.21) de la théorie classique des stratifiés en diffèrent par les expressions des courbures (17.13).

Les contraintes en cisaillement transverse dans la couche  $k$  s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}. \quad (17.17)$$

## 17.3 RELATIONS FONDAMENTALES DU COMPORTEMENT D'UN STRATIFIÉ, TENANT COMPTE DU CISAILLEMENT TRANSVERSE

### 17.3.1 Équation constitutive

L'équation constitutive d'un stratifié, tenant compte du cisaillement transverse, est d'après (17.16) et (17.17) la superposition de la relation (14.29) de la théorie classique des stratifiés, et de l'équation faisant intervenir les résultantes en cisaillement  $Q_x$  et  $Q_y$  introduites en (13.18). Soit :

$$\mathbf{Q}(x, y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_k dz. \quad (17.18)$$

Compte tenu des expressions (17.17) et (17.18), l'équation des résultantes en cisaillement s'écrit :

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}, \quad (17.19)$$

avec

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (C'_{ij})_k, \quad i, j = 4, 5. \quad (17.20)$$

Les coefficients  $F_{ij}$  ont même forme que les coefficients  $A_{ij}$  (14.23). Ils en

diffèrent par l'utilisation des coefficients  $C'_{ij}$  de rigidité en cisaillement transverse au lieu des coefficients  $Q'_{ij}$  de rigidité réduite (14.23).

L'équation constitutive des stratifiés avec cisaillement transverse s'écrit en rassemblant les résultantes et les moments sous la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (17.21)$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, & \varepsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, & \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \\ \kappa_x &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, & \kappa_y &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, & \kappa_{xy} &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}, \\ \gamma_{yz}^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y, & \gamma_{xz}^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x. \end{aligned} \quad (17.22)$$

L'équation constitutive peut également être écrite sous forme contractée suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M}_f \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma}_c \end{bmatrix}. \quad (17.23)$$

Les coefficients des matrices sont exprimés par :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k, \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k z_k, \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right), \\ F_{ij} &= \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (C'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (C'_{ij})_k e_k. \end{aligned} \quad (17.24)$$



TABLEAU 17.2. Coefficients de rigidité dans les axes principaux en fonction des modules de l'ingénieur.

---

|  |                                    |
|--|------------------------------------|
| $Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}},$ | $Q_{22} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11},$ |
| $Q_{22} = \nu_{LT} Q_{22},$                            | $Q_{66} = G_{LT},$                 |
| $C_{44} = G_{TT'},$                                    | $C_{55} = G_{LT'}.$                |

---

Les coefficients  $Q'_{ij}$  et  $C'_{ij}$ , rapportés aux axes de référence du stratifié, sont exprimés dans le tableau 17.1, en fonction des coefficients rapportés aux axes principaux des couches. Ces paramètres s'expriment eux-mêmes (chapitres 9 et 10) en fonction des six modules de l'ingénieur :  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $G_{LT}$ ,  $G_{LT'}$  et  $G_{TT'}$ . Ces expressions sont rappelées dans le tableau 17.2.

L'équation constitutive (17.21) et (17.23) est la superposition

— de l'équation constitutive de la même forme (14.30) que la théorie classique des stratifiés :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix}, \quad (17.25)$$

(les équations (14.30) et (17.25) diffèrent par les expressions de la matrice  $\boldsymbol{\kappa}$  des courbures dans la théorie classique et dans la théorie avec cisaillement),

— de l'équation relative au cisaillement transverse :

$$[\mathbf{Q}] = [\mathbf{F}][\boldsymbol{\gamma}_c]. \quad (17.26)$$

### 17.3.2 Relations fondamentales

Les relations fondamentales des stratifiés, tenant compte du cisaillement transverse, sont obtenues en introduisant l'équation constitutive (17.21) dans les relations fondamentales (13.50) des plaques. Soit :

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ & + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \\ & + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (17.27)$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \\
& = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}, \tag{17.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F_{55} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + F_{45} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + F_{44} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q \\
& = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \tag{17.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \\
& + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{55} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{45} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
& = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \tag{17.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \\
& + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{45} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{44} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
& = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}. \tag{17.31}
\end{aligned}$$

Ces cinq équations permettent en principe de déterminer les cinq fonctions solutions  $u_0(x, y, t)$ ,  $v_0(x, y, t)$ ,  $w_0(x, y, t)$ ,  $\varphi_x(x, y, t)$  et  $\varphi_y(x, y, t)$ . Ces fonctions doivent vérifier en outre les conditions imposées sur les frontières de la structure étudiée.

Dans le cas de stratifiés symétriques,  $B_{ij} = 0$  et  $R = 0$ , les équations (17.27) et (17.28) se réduisent respectivement aux équations (16.4) et (16.5) de la

théorie classique. L'équation (17.29) est inchangée, alors que les équations (17.30) et (17.31) se simplifient suivant :

$$\begin{aligned}
 & D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \\
 & + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{55} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{45} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
 & = I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \tag{17.32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \\
 & + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{45} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{44} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
 & = I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}. \tag{17.33}
 \end{aligned}$$

### 17.3.3 Conditions aux frontières

Les conditions aux frontières sont obtenues par application des théorèmes variationnels à l'énergie de déformation des plaques, tenant compte du cisaillement transverse. Les équations obtenues conduisent à des conditions imposées à une des variables de chacune des paires suivantes :

$$u_{0n}, N_n; \quad u_{0t}, N_t; \quad \varphi_n, M_n; \quad \varphi_t, M_t; \quad w_0, Q_n,$$

où  $n$  et  $t$  sont les directions normale et tangentielle (figure 16.1) en un point de la frontière où les conditions sont imposées. Dans le cas de la théorie avec cisaillement transverse, cinq conditions aux frontières sont donc imposées. Par exemple :

#### 1. Bord libre.

Pour tout point  $P$  d'un bord libre (figure 16.4), les conditions aux frontières s'écrivent :

$$N_n = 0, \quad N_t = 0, \quad M_n = 0, \quad \varphi_t = 0, \quad w_0 = 0. \tag{17.34}$$

#### 2. Appui simple (figure 16.2).

Les conditions s'écrivent :

$$N_n = 0, \quad u_{0t} = 0, \quad M_n = 0, \quad \varphi_t = 0, \quad w_0 = 0, \tag{17.35}$$

ou

$$N_n = 0, \quad N_t = 0, \quad M_n = 0, \quad \varphi_t = 0, \quad w_0 = 0. \tag{17.36}$$

### 3. Bord encastré (figure 16.3).

Les conditions aux frontières peuvent s'écrire :

$$u_{0n} = 0, \quad u_{0t} = 0, \quad \varphi_n = 0, \quad \varphi_t = 0, \quad w_0 = 0. \quad (17.37)$$

### 17.3.4 Contraintes dans les couches

Les fonctions  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  étant déterminées, les contraintes en membrane dans la couche  $k$  s'écrivent d'après l'expression (17.16) suivant :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k &= \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \\ &+ z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17.38)$$

Les contraintes en cisaillement transverse dans la couche  $k$  s'expriment d'après l'expression (17.17) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (17.39)$$

Ces expressions conduisent à des contraintes de cisaillement qui sont uniformes dans chaque couche et discontinues entre les couches. Une telle répartition, uniforme dans chaque couche, n'est pas très réaliste. Une meilleure estimation des contraintes de cisaillement transverse peut alors être obtenue en reportant les expressions (17.38) des contraintes en membrane dans les relations fondamentales (8.20) de la mécanique des matériaux. Par exemple, dans le cas d'un problème statique, les relations (8.20) s'écrivent dans la couche  $k$  :

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx}^k + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy}^k + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz}^k = 0, \quad (17.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy}^k + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz}^k + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy}^k = 0. \quad (17.41)$$

Soit :

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz}^k = -\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx}^k - \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy}^k, \quad (17.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz}^k = -\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy}^k - \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy}^k. \quad (17.43)$$

En combinant les relations (17.38), (17.42) et (17.43), nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz}^k = a_1^k(x, y) + z a_2^k(x, y), \quad (17.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz}^k = b_1^k(x, y) + z b_2^k(x, y), \quad (17.45)$$

en introduisant les fonctions :

$$\begin{aligned} a_1^k(x, y) = & -Q_{11}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - 2Q_{16}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - Q_{66}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \\ & - Q_{16}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - (Q_{12}^k + Q_{66}^k) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - Q_{26}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (17.46)$$

$$\begin{aligned} a_2^k(x, y) = & -Q_{11}^k \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - 2Q_{16}^k \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} - Q_{66}^k \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \\ & - Q_{16}^k \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} - (Q_{12}^k + Q_{66}^k) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - Q_{26}^k \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (17.47)$$

$$\begin{aligned} b_1^k(x, y) = & -Q_{16}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - (Q_{12}^k + Q_{66}^k) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - Q_{26}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \\ & - Q_{66}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - 2Q_{26}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - Q_{22}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (17.48)$$

$$\begin{aligned} b_2^k(x, y) = & -Q_{16}^k \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - (Q_{12}^k + Q_{66}^k) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} - Q_{26}^k \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \\ & - Q_{66}^k \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} - 2Q_{26}^k \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - Q_{22}^k \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (17.49)$$

Dans les expressions de ces fonctions, les coefficients  $Q'_{ij}$  de la couche  $k$  sont notés  $Q_{ij}^k$ . L'intégration des relations (17.44) et (17.45) conduit ensuite aux

expressions des contraintes dans la couche  $k$  :

$$\sigma_{xz}^k(x, y) = a_0^k(x, y) + z a_1^k(x, y) + \frac{z^2}{2} a_2^k(x, y), \quad (17.50)$$

$$\sigma_{yz}^k(x, y) = b_0^k(x, y) + z b_1^k(x, y) + \frac{z^2}{2} b_2^k(x, y). \quad (17.51)$$

Les fonctions d'intégration  $a_0^k(x, y)$  et  $b_0^k(x, y)$  sont déterminées en exprimant :

- la continuité de  $\sigma_{xz}^k$  et  $\sigma_{yz}^k$  au passage d'une couche à l'autre,
- la nullité de  $\sigma_{xz}^k$  et  $\sigma_{yz}^k$  sur les deux faces extrêmes du stratifié ( $k = 1, n$ ).

Cette méthode de détermination des contraintes de cisaillement transverse conduit à une répartition parabolique des contraintes dans l'épaisseur de chaque couche du stratifié.

## 17.4 THÉORIE MODIFIÉE DES STRATIFIÉS AVEC CISAILLEMENT TRANSVERSE

### 17.4.1 Hypothèses de la théorie stratifiée

Une amélioration de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse, explicitée dans les paragraphes 17.2 et 17.3, consiste à adopter le schéma suivant :

1. La partie de l'équation constitutive (17.21) relative aux résultantes en membrane et aux moments ( $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$ ) n'est pas modifiée.
2. La partie relative aux résultantes en cisaillement transverse est modifiée en remplaçant les coefficients de rigidité  $F_{ij}$  par de nouveaux coefficients de rigidité en cisaillement  $H_{ij}$  du stratifié :

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}, \quad (17.52)$$

avec

$$H_{ij} = k_{ij} F_{ij}, \quad i, j = 4, 5. \quad (17.53)$$

Les paramètres  $k_{ij}$  sont des facteurs de correction en cisaillement transverse, à déterminer.

La relation inverse exprimant les déformations moyennes en fonction des résultantes en cisaillement s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} \\ K_{45} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix}. \quad (17.54)$$

Les matrices  $[H_{ij}]$  et  $[K_{ij}]$  sont inverses l'une de l'autre. Par exemple :

$$\begin{aligned} H_{44} &= \frac{K_{55}}{\Delta K}, & H_{45} &= H_{54} = -\frac{K_{45}}{\Delta K}, \\ H_{55} &= \frac{K_{44}}{\Delta K}, & \Delta K &= K_{44}K_{55} - K_{45}^2. \end{aligned} \quad (17.55)$$

L'équation constitutive s'écrit sous une forme analogue à (17.21) en changeant les coefficients de cisaillement, soit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}. \quad (17.56)$$

Les expressions des déformations et courbures sont données par les relations (17.22). Il en résulte que les relations fondamentales sont identiques aux équations (17.27) à (17.33), en y remplaçant les termes  $F_{ij}$  par les nouveaux coefficients de cisaillement (17.55).

### 17.4.2 Évaluation des facteurs de correction en cisaillement dans le cas d'une plaque orthotrope

Nous considérons dans ce paragraphe le cas d'une plaque homogène constituée d'un matériau orthotrope dont les axes principaux sont confondus avec les axes de référence de la plaque. Dans le cas d'une flexion pure, l'équation (17.38) des contraintes en membrane se réduit suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (17.57)$$

Soit, d'après la relation (17.42) :

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz} = -z \left[ \frac{\partial}{\partial x} (Q_{11}\kappa_x + Q_{12}\kappa_y) + \frac{\partial}{\partial x} (Q_{66}\kappa_{xy}) \right]. \quad (17.58)$$

L'intégration, en tenant compte de  $\sigma_{xz}(\pm h/2) = 0$ , conduit à :

$$\sigma_{xz} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} (Q_{11}\kappa_x + Q_{12}\kappa_y) + \frac{\partial}{\partial y} (Q_{66}\kappa_{xy}) \right] \left( \frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right), \quad (17.59)$$

où  $h$  est l'épaisseur de la plaque. L'équation constitutive (17.56), compte tenu des expressions (15.4), conduit à :

$$M_x = \frac{h^3}{12} (Q_{11}\kappa_x + Q_{12}\kappa_y), \quad (17.60)$$

$$M_{xy} = \frac{h^3}{12} Q_{66}\kappa_{xy}. \quad (17.61)$$

L'expression (17.59) de la contrainte en cisaillement s'écrit donc :

$$\sigma_{xz} = \frac{3}{2h} \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right). \quad (17.62)$$

Soit en tenant compte de l'équation (13.56) :

$$\sigma_{xz} = \frac{3}{2h} \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) Q_x. \quad (17.63)$$

Un raisonnement identique conduit à :

$$\sigma_{yz} = \frac{3}{2h} \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) Q_y. \quad (17.64)$$

Une première méthode pour déterminer les paramètres  $k_{ij}$  consiste à exprimer les résultantes en cisaillement par la relation (17.52). Dans le cas d'une plaque homogène orthotrope, cette relation s'écrit :

$$Q_y = k_{44} F_{44} \gamma_{yz}^0, \quad (17.65)$$

$$Q_x = k_{55} F_{55} \gamma_{xz}^0, \quad (17.66)$$

avec

$$F_{44} = h C_{44}, \quad F_{55} = h C_{55}. \quad (17.67)$$

La relation d'élasticité (10.1) s'écrit dans le cas d'un matériau orthotrope :

$$\sigma_{yz} = C_{44} \gamma_{yz}, \quad (17.68)$$

$$\sigma_{xz} = C_{55} \gamma_{xz}. \quad (17.69)$$

Il en résulte que les contraintes moyennes déterminées par la relation (17.52) sont :

$$\sigma_{yz}^0 = \frac{Q_y}{k_{55}h}, \quad \sigma_{xz}^0 = \frac{Q_x}{k_{44}h}. \quad (17.70)$$



Les coefficients  $k_{55}$  et  $k_{44}$  sont déterminés de manière à rendre ces contraintes moyennes égales aux contraintes déterminées par (17.63) et (17.64), pour  $z = 0$  :

$$\sigma_{yz} = \frac{3Q_y}{2h}, \quad \sigma_{xz} = \frac{3Q_x}{2h}. \quad (17.71)$$

La comparaison des expressions (17.70) et (17.71) conduit à :

$$k_{44} = k_{55} = k = \frac{2}{3}. \quad (17.72)$$

De la même manière, on aurait pu ajuster les contraintes moyennes (17.70) aux valeurs moyennes des contraintes (17.63) et (17.64) :

$$\bar{\sigma}_{yz} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{3}{2h} \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) Q_y \, dz, \quad (17.73)$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{3}{2h} \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) Q_x \, dz. \quad (17.74)$$

Soit :

$$\bar{\sigma}_{yz} = \frac{Q_y}{h}, \quad \bar{\sigma}_{xz} = \frac{Q_x}{h}. \quad (17.75)$$

L'ajustement conduit dans ce cas à :

$$k_{44} = k_{55} = k = 1. \quad (17.76)$$

Nous sommes alors dans le cas de la théorie initiale (paragraphe 17.2 et 17.3).

Une deuxième méthode consiste à considérer l'énergie de déformation par unité de surface du stratifié. L'énergie de déformation résultant du cisaillement transverse est par unité de volume :

$$u_{dc} = \frac{1}{2} (\sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz}). \quad (17.77)$$

L'énergie de déformation par unité de surface s'écrit donc :

$$U_{dc} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz}) \, dz. \quad (17.78)$$

L'énergie calculée en introduisant les déformations moyennes (17.65) et (17.66) s'exprime suivant :

$$U_{dc}^0 = \frac{1}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \sigma_{xz} \frac{Q_x}{k_{55} C_{55}} + \sigma_{yz} \frac{Q_y}{k_{44} C_{44}} \right) dz. \quad (17.79)$$

Soit, en introduisant les expressions (17.73) et (17.74) des contraintes :

$$U_{dc}^0 = \frac{1}{2h} \left( \frac{Q_x^2}{k_{55} C_{55}} + \frac{Q_y^2}{k_{44} C_{44}} \right). \quad (17.80)$$

Dans le cas d'une plaque homogène orthotrope, l'énergie peut également être calculée en reportant dans (17.78) les relations d'élasticité (17.68) et (17.69) :

$$U_{dc} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\sigma_{xz}^2}{C_{55}} + \frac{\sigma_{yz}^2}{C_{44}} \right) dz. \quad (17.81)$$

En substituant les contraintes données par (17.63) et (17.64), puis en intégrant, nous obtenons :

$$U_{dc} = \frac{1}{2h} \frac{6}{5} \left( \frac{Q_x^2}{C_{55}} + \frac{Q_y^2}{C_{44}} \right). \quad (17.82)$$

La comparaison des expressions (17.80) et (17.82) conduit à :

$$k_{44} = k_{55} = k = \frac{5}{6}. \quad (17.83)$$

### 17.4.3 Évaluation des facteurs de correction en cisaillement dans le cas d'une plaque stratifiée

#### 17.4.3.1 Contraintes de cisaillement

Les contraintes en membrane  $\sigma_{xx}^k$ ,  $\sigma_{yy}^k$  et  $\sigma_{xy}^k$  dans la couche  $k$  s'expriment d'après (17.16) suivant :

$$\sigma_{xx}^k = Q_{11}^k \varepsilon_{xx}^0 + Q_{12}^k \varepsilon_{yy}^0 + Q_{16}^k \gamma_{xy}^0 + z \left( Q_{11}^k \kappa_x + Q_{12}^k \kappa_y + Q_{16}^k \kappa_{xy} \right), \quad (17.84)$$

$$\sigma_{yy}^k = Q_{12}^k \varepsilon_{xx}^0 + Q_{22}^k \varepsilon_{yy}^0 + Q_{26}^k \gamma_{xy}^0 + z \left( Q_{12}^k \kappa_x + Q_{22}^k \kappa_y + Q_{26}^k \kappa_{xy} \right), \quad (17.85)$$

$$\sigma_{xy}^k = Q_{16}^k \varepsilon_{xx}^0 + Q_{26}^k \varepsilon_{yy}^0 + Q_{66}^k \gamma_{xy}^0 + z \left( Q_{16}^k \kappa_x + Q_{26}^k \kappa_y + Q_{66}^k \kappa_{xy} \right). \quad (17.86)$$

Ces expressions peuvent se mettre sous la forme :

$$\sigma_{xx}^k = [\mathbf{Q}_1]_k [\mathbf{\varepsilon}_m(x, y) + z \mathbf{\kappa}(x, y)], \quad (17.87)$$

$$\sigma_{yy}^k = [\mathbf{Q}_2]_k [\mathbf{\varepsilon}_m(x, y) + z \mathbf{\kappa}(x, y)], \quad (17.88)$$

$$\sigma_{xy}^k = [\mathbf{Q}_6]_k [\mathbf{\varepsilon}_m(x, y) + z \mathbf{\kappa}(x, y)], \quad (17.89)$$

où  $\mathbf{\varepsilon}_m$  est la matrice des déformations en membrane (17.8),  $\mathbf{\kappa}$  est la matrice des courbures (17.11), et en introduisant les matrices  $[\mathbf{Q}_i]_k$  définies dans chaque couche suivant :

$$[\mathbf{Q}_1]_k = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{16}^k \end{bmatrix}, \quad (17.90)$$

$$[\mathbf{Q}_2]_k = \begin{bmatrix} Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{26}^k \end{bmatrix}, \quad (17.91)$$

$$[\mathbf{Q}_6]_k = \begin{bmatrix} Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k \end{bmatrix}. \quad (17.92)$$

Les contraintes de cisaillement transverse  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  peuvent être déterminées ensuite à l'aide des relations d'équilibre (17.42) et (17.43), soit :

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz}^k = -[\mathbf{Q}_1]_k \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m}{\partial x} + z \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial x} \right) - [\mathbf{Q}_6]_k \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m}{\partial y} + z \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial y} \right), \quad (17.93)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz}^k = -[\mathbf{Q}_2]_k \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m}{\partial y} + z \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial y} \right) - [\mathbf{Q}_6]_k \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m}{\partial x} + z \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial x} \right). \quad (17.94)$$

Les déformations en membrane  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  et les courbures  $\boldsymbol{\kappa}$  s'expriment en fonction des résultantes en membrane  $\mathbf{N}$  et des moments  $\mathbf{M}_f$  à l'aide de l'expression (14.44) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{A}' \mathbf{N} + \mathbf{B}' \mathbf{M}_f, \quad (17.95)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{C}' \mathbf{N} + \mathbf{D}' \mathbf{M}_f. \quad (17.96)$$

En reportant ces expressions dans les relations (17.93) et (17.94), les contraintes de cisaillement transverse s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz}^k = -[\mathbf{Q}_1]_k [\mathbf{A}' + z \mathbf{C}' \quad \mathbf{B}' + z \mathbf{D}'] \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_f}{\partial x} \end{bmatrix} - [\mathbf{Q}_6]_k [\mathbf{A}' + z \mathbf{C}' \quad \mathbf{B}' + z \mathbf{D}'] \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_f}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (17.97)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz}^k = -[\mathbf{Q}_2]_k [\mathbf{A}' + z \mathbf{C}' \quad \mathbf{B}' + z \mathbf{D}'] \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_f}{\partial y} \end{bmatrix} - [\mathbf{Q}_6]_k [\mathbf{A}' + z \mathbf{C}' \quad \mathbf{B}' + z \mathbf{D}'] \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_f}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (17.98)$$

où les matrices  $[\mathbf{A}' + z \mathbf{C}' \quad \mathbf{B}' + z \mathbf{D}']$  sont des matrices à trois lignes et six colonnes.

### 17.4.3.2 Flexions cylindriques

Dans le cas d'une flexion cylindrique autour de l'axe  $y$  (chapitre 19), les résultantes et moments ne sont fonction que de  $x$ , et les équations (13.56) des plaques se réduisent à :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = Q_x, \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y, \quad (17.99)$$

ce qui conduit à la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_f}{\partial x} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_x \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}, \quad (17.100)$$

en introduisant la matrice :

$$\mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (17.101)$$

Dans le cas d'une flexion cylindrique autour de l'axe  $y$ , l'expression (17.97) de la contrainte de cisaillement  $\sigma_{xz}^k$  se réduit donc à :

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz}^k = -[\mathbf{Q}_1]_k [\mathbf{A}' + z\mathbf{C}' \quad \mathbf{B}' + z\mathbf{D}'] \mathbf{F}_x \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}, \quad (17.102)$$

De même, dans le cas d'une flexion cylindrique autour de l'axe  $x$ , les équations (13.56) des plaques se réduisent à :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y, \quad (17.103)$$

d'où la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_f}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_y \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}, \quad (17.104)$$

en introduisant la matrice :

$$\mathbf{F}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (17.105)$$

La contrainte de cisaillement transverse (17.98) s'écrit dans la couche  $k$  :

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz}^k = -[\mathbf{Q}_2]_k [\mathbf{A}' + z\mathbf{C}' \quad \mathbf{B}' + z\mathbf{D}'] \mathbf{F}_y \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}. \quad (17.106)$$

### 17.4.3.3 Intégration dans l'épaisseur du stratifié

L'intégration des expressions (17.102) et (17.106), dans l'épaisseur du stratifié, conduit à :

$$\sigma_{xz}^k = \left\{ [C_{xz}]_k - [Q_1]_k \left[ z\mathbf{A}' + \frac{z^2}{2}\mathbf{C}' \quad z\mathbf{B}' + \frac{z^2}{2}\mathbf{D}' \right] \right\} \mathbf{F}_x \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}, \quad (17.107)$$

$$\sigma_{yz}^k = \left\{ [C_{yz}]_k - [Q_2]_k \left[ z\mathbf{A}' + \frac{z^2}{2}\mathbf{C}' \quad z\mathbf{B}' + \frac{z^2}{2}\mathbf{D}' \right] \right\} \mathbf{F}_y \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}. \quad (17.108)$$

Les constantes d'intégration  $[C_{xz}]_k$  et  $[C_{yz}]_k$  dans chaque couche sont déterminées en exprimant la continuité de  $\sigma_{xz}^k$  et  $\sigma_{yz}^k$  au passage d'une couche à l'autre, et la nullité de  $\sigma_{xz}^k$  et  $\sigma_{yz}^k$  sur les deux faces extrêmes ( $k = 1, n$ ).

Sur la face inférieure,  $k = 1$ ,  $z = h_0 = -h/2$ ,  $\sigma_{xz} = 0$ , soit :

$$\sigma_{xz}^1(h_0) = 0 = \left\{ [C_{xz}]_1 - [Q_1]_1 \left[ h_0\mathbf{A}' + \frac{h_0^2}{2}\mathbf{C}' \quad h_0\mathbf{B}' + \frac{h_0^2}{2}\mathbf{D}' \right] \right\} \mathbf{F}_x \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}.$$

D'où

$$[C_{xz}]_1 = [Q_1]_1 \left[ h_0\mathbf{A}' + \frac{h_0^2}{2}\mathbf{C}' \quad h_0\mathbf{B}' + \frac{h_0^2}{2}\mathbf{D}' \right],$$

et

$$\sigma_{xz}^1 = -[Q_1]_1 \left[ (z - h_0)\mathbf{A}' + \frac{1}{2}(z^2 - h_0^2)\mathbf{C}' \quad (z - h_0)\mathbf{B}' + \frac{1}{2}(z^2 - h_0^2)\mathbf{D}' \right] \mathbf{F}_x \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}.$$

À la frontière entre les couches 1 et 2,  $z = h_1$  et les contraintes s'écrivent :

$$\sigma_{xz}^1(h_1) = -[Q_1]_1 \left[ (h_1 - h_0)\mathbf{A}' + \frac{1}{2}(h_1^2 - h_0^2)\mathbf{C}' \quad (h_1 - h_0)\mathbf{B}' + \frac{1}{2}(h_1^2 - h_0^2)\mathbf{D}' \right] \times \mathbf{F}_x \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix},$$

$$\sigma_{xz}^2(h_1) = \left\{ [C_{xz}]_2 - [Q_1]_2 \left[ h_1\mathbf{A}' + \frac{h_1^2}{2}\mathbf{C}' \quad h_1\mathbf{B}' + \frac{h_1^2}{2}\mathbf{D}' \right] \right\} \mathbf{F}_x \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}.$$

L'égalité de continuité  $\sigma_{xz}^1(h_1) = \sigma_{xz}^2(h_1)$  conduit à :

$$[C_{xz}]_2 = [Q_1]_1 \left[ h_0\mathbf{A}' + \frac{h_0^2}{2}\mathbf{C}' \quad h_0\mathbf{B}' + \frac{h_0^2}{2}\mathbf{D}' \right] + ([Q_1]_2 - [Q_1]_1) \left[ h_1\mathbf{A}' + \frac{h_1^2}{2}\mathbf{C}' \quad h_1\mathbf{B}' + \frac{h_1^2}{2}\mathbf{D}' \right].$$

Cette dernière expression montre que d'une manière générale :

$$[C_{xz}]_k = [Q_1]_1 \left[ h_0 \mathbf{A}' + \frac{h_0^2}{2} \mathbf{C}' \quad h_0 \mathbf{B}' + \frac{h_0^2}{2} \mathbf{D}' \right] + \sum_{i=2}^k ([Q_1]_i - [Q_1]_{i-1}) \left[ h_{i-1} \mathbf{A}' + \frac{h_{i-1}^2}{2} \mathbf{C}' \quad h_{i-1} \mathbf{B}' + \frac{h_{i-1}^2}{2} \mathbf{D}' \right]. \quad (17.109)$$

De la même manière :

$$[C_{yz}]_k = [Q_2]_1 \left[ h_0 \mathbf{A}' + \frac{h_0^2}{2} \mathbf{C}' \quad h_0 \mathbf{B}' + \frac{h_0^2}{2} \mathbf{D}' \right] + \sum_{i=2}^k ([Q_2]_i - [Q_2]_{i-1}) \left[ h_{i-1} \mathbf{A}' + \frac{h_{i-1}^2}{2} \mathbf{C}' \quad h_{i-1} \mathbf{B}' + \frac{h_{i-1}^2}{2} \mathbf{D}' \right]. \quad (17.110)$$

La matrice des contraintes de cisaillement transverse s'exprime donc en fonction des résultantes de cisaillement sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz}^k \\ \sigma_{xz}^k \end{bmatrix} = [\mathbf{g}_k] \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix}, \quad (17.111)$$

en introduisant la matrice :

$$[\mathbf{g}_k] = \begin{bmatrix} g_{44}^k & g_{45}^k \\ g_{54}^k & g_{55}^k \end{bmatrix}, \quad (17.112)$$

exprimée d'après (17.107) et (17.108) suivant :

$$\begin{bmatrix} g_{44}^k & g_{45}^k \end{bmatrix} = \left\{ [C_{xz}]_k - [Q_2]_k \left[ z \mathbf{A}' + \frac{z^2}{2} \mathbf{C}' \quad z \mathbf{B}' + \frac{z^2}{2} \mathbf{D}' \right] \right\} \mathbf{F}_y, \quad (17.113)$$

$$\begin{bmatrix} g_{54}^k & g_{55}^k \end{bmatrix} = \left\{ [C_{yz}]_k - [Q_1]_k \left[ z \mathbf{A}' + \frac{z^2}{2} \mathbf{C}' \quad z \mathbf{B}' + \frac{z^2}{2} \mathbf{D}' \right] \right\} \mathbf{F}_x, \quad (17.114)$$

où les constantes  $[C_{xz}^k]$  et  $[C_{yz}^k]$  sont exprimées en (17.109) et (17.110).

#### 17.4.3.4 Estimation des facteurs de correction en cisaillement

L'énergie de déformation résultant du cisaillement transverse est par unité de volume donnée par l'expression (17.77). L'énergie de déformation par unité de surface du stratifié s'écrit donc :

$$U_{dc} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} (\sigma_{xz}^k \gamma_{xz}^k + \sigma_{yz}^k \gamma_{yz}^k) dz. \quad (17.115)$$

Dans la couche  $k$ , les déformations en cisaillement transverse sont liées aux contraintes de cisaillement par la relation d'élasticité :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz}^k \\ \gamma_{xz}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{44} & S'_{45} \\ S'_{45} & S'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{yz}^k \\ \sigma_{xz}^k \end{bmatrix}, \quad (17.116)$$

où les termes  $S'_{ij}$  sont les constantes de souplesse de la couche  $k$ , rapportées aux axes de référence du stratifié. Leurs expressions en fonction des constantes rapportées aux axes principaux de la couche  $k$  sont données dans le tableau 11.4. L'énergie de déformation (17.115) peut alors s'écrire sous la forme matricielle :

$$U_{dc} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{yz}^k & \sigma_{xz}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S'_{44} & S'_{45} \\ S'_{45} & S'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{yz}^k \\ \sigma_{xz}^k \end{bmatrix} dz, \quad (17.117)$$

ou en tenant compte de (17.111) :

$$U_{dc} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^t \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\mathbf{g}_k]^t \begin{bmatrix} S'_{44} & S'_{45} \\ S'_{45} & S'_{55} \end{bmatrix} [\mathbf{g}_k] dz \right\} \mathbf{Q}, \quad (17.118)$$

où  $\mathbf{Q}^t$  est la matrice  $\begin{bmatrix} Q_y & Q_x \end{bmatrix}$  transposée de la matrice  $\mathbf{Q}$  des résultantes en cisaillement. Le calcul de l'énergie de déformation s'exprime également en fonction des déformations moyennes suivant :

$$U_{dc} = \frac{1}{2} (Q_y \gamma_{yz}^0 + Q_x \gamma_{xz}^0), \quad (17.119)$$

ou en tenant compte de (17.54) :

$$U_{dc} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^t \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} \\ K_{45} & K_{55} \end{bmatrix} \mathbf{Q}. \quad (17.120)$$

D'où l'expression de la matrice  $\begin{bmatrix} K_{ij} \end{bmatrix}$  :

$$\begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} \\ K_{45} & K_{55} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\mathbf{g}_k]^t \begin{bmatrix} S'_{44} & S'_{45} \\ S'_{45} & S'_{55} \end{bmatrix} [\mathbf{g}_k] dz. \quad (17.121)$$

Ce qui conduit à :

$$K_{44} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[ S_{44}^k (g_{44}^k)^2 + 2S_{45}^k g_{44}^k g_{54}^k + S_{55}^k (g_{54}^k)^2 \right] dz, \quad (17.122)$$

$$K_{45} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[ S_{44}^k g_{44}^k g_{45}^k + S_{45}^k (g_{44}^k g_{55}^k + g_{54}^k g_{45}^k) + S_{55}^k g_{54}^k g_{55}^k \right] dz, \quad (17.123)$$

$$K_{55} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[ S_{44}^k (g_{45}^k)^2 + 2S_{45}^k g_{45}^k g_{55}^k + S_{55}^k (g_{55}^k)^2 \right] dz, \quad (17.124)$$

où les coefficients  $S'_{ij}$  de la couche  $k$  sont notés  $S_{ij}^k$ .

Les paramètres  $K_{ij}$  étant déterminés, les coefficients de cisaillement  $H_{ij}$  introduits en (17.52) s'en déduisent à l'aide des relations (17.55), puis les facteurs de correction  $k_{ij}$  à l'aide de la relation (17.53).

## 17.5 CONCLUSIONS SUR LES THÉORIES DES STRATIFIÉS AVEC CISAILLEMENT TRANSVERSE

Les diverses théories des stratifiés, qui prennent en compte le cisaillement transverse, diffèrent par l'expression des coefficients de cisaillement  $H_{ij}$  intervenant dans l'équation (17.52). L'ensemble de ces théories peut être formulé de manière unique en introduisant les facteurs de correction  $k_{ij}$ , définis en (17.53).

Dans le cas de la théorie initiale (paragraphe 17.2 et 17.3) :

$$k_{ij} = 1, \quad i, j = 4, 5. \quad (17.125)$$

D'autres valeurs (17.72) et (17.83), obtenues dans le cas de plaques homogènes isotropes, puis dans le cas de plaques orthotropes (paragraphe 17.4.2), sont également appliquées aux cas des plaques stratifiées :

$$k_{ij} = \frac{2}{3}, \quad i, j = 4, 5, \quad (17.126)$$

$$k_{ij} = \frac{5}{6}, \quad i, j = 4, 5. \quad (17.27)$$

D'une manière plus générale (paragraphe 17.4.3), les paramètres  $k_{ij}$  peuvent être évalués en considérant des flexions cylindriques respectivement autour des directions  $x$  et  $y$ . Dans ce cas, les paramètres sont définis, d'après (17.53) et (17.55), par :

$$\begin{aligned} k_{44} &= \frac{K_{55}}{F_{44}\Delta K}, & k_{45} &= \frac{K_{45}}{F_{45}\Delta K}, \\ k_{55} &= \frac{K_{44}}{F_{55}\Delta K}, & \Delta K &= K_{44}K_{55} - K_{45}^2. \end{aligned} \quad (17.128)$$

Les coefficients  $K_{ij}$  sont alors exprimés par les relations (17.122) à (17.124).

Les coefficients  $k_{ij}$  peuvent donc être interprétés comme des facteurs correctifs à la théorie initiale (paragraphe 17.2 et 17.3). Les relations relatives aux diverses théories sont alors obtenues, en remplaçant dans les expressions (17.1) à (17.51) de la théorie initiale les coefficients  $F_{ij}$  par les coefficients  $H_{ij} = k_{ij} F_{ij}$ , avec les valeurs correspondantes de  $k_{ij}$  (relations (17.126) à (17.128)).



## EXERCICES

**17.1** Un stratifié symétrique (figure 17.2) est constitué de quatre couches à renfort tissu et deux couches à renfort mat. Les couches à renfort tissu, d'épaisseur 0,7 mm, ont les caractéristiques mécaniques suivantes :

$$\begin{aligned} E_L &= 25 \text{ GPa}, & E_T &= 15 \text{ GPa}, \\ G_{LT} &= 2,2 \text{ GPa}, & G_{LT'} &= 2,5 \text{ GPa}, & G_{TT'} &= 2,4 \text{ GPa}. \end{aligned}$$

Les couches à renfort mat ont une épaisseur de 1mm et leurs caractéristiques mécaniques sont :

$$\begin{aligned} E_{L\text{mat}} &= E_{T\text{mat}} = 8,4 \text{ GPa}, & \nu_{LT\text{mat}} &= 0,40, \\ G_{LT'\text{mat}} &= G_{TT'\text{mat}} = 2,5 \text{ GPa}. \end{aligned}$$

Calculer la matrice de rigidité.

Le stratifié est soumis à un état de cisaillement transverse de résultantes :  $Q_x = 48 \text{ kN/m}$ ,  $Q_y = 0$ .

Calculer les déformations moyennes de cisaillement transverse du stratifié, puis les contraintes de cisaillement transverse dans chaque couche.

**17.2** Entre les deux couches de mat du stratifié de l'exercice précédent, on insère une couche de mousse expansée isotrope, de modules :  $E_a = 80 \text{ MPa}$  et  $\nu_a = 0,40$ .

Reprendre l'exercice précédent, dans le cas de trois valeurs différentes de l'épaisseur de la mousse :  $h = 3 \text{ mm}$ ,  $h = 10 \text{ mm}$  et  $h = 30 \text{ mm}$ .

Comparer les résultats obtenus dans le cas des trois épaisseurs, ainsi qu'aux résultats obtenus dans l'exercice précédent.

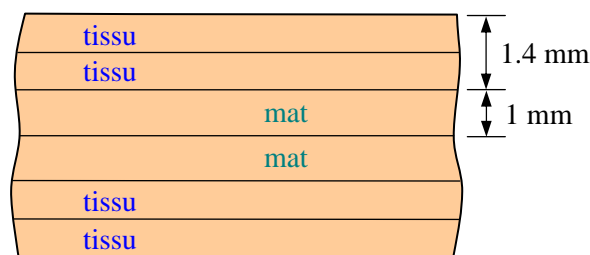


FIGURE 17.2. Stratifié de l'exercice 17.1.

# Théorie des Plaques Sandwiches

## 18.1 INTRODUCTION

L'objet de ce chapitre est d'établir les équations relatives au comportement mécanique des plaques sandwiches. Un matériau sandwich est constitué (chapitre 3) d'un matériau de faible masse volumique (l'âme) sur lequel sont collées des feuilles ou plaques (les peaux). La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre, par cisaillement, les actions mécaniques d'une peau à l'autre.

Dans le cas général, les peaux sont des stratifiés d'épaisseur  $h_1$  (peau inférieure) et d'épaisseur  $h_2$  (peau supérieure) (figure 18.1). L'épaisseur de l'âme sera notée  $h$ . Le système de coordonnées est choisi de manière que le plan  $(x, y)$  soit le plan moyen.

## 18.2 CHAMPS DES DÉFORMATIONS ET DES CONTRAINTES

### 18.2.1 Hypothèses de la théorie des sandwichs

La théorie des plaques sandwichs repose sur les hypothèses fondamentales suivantes :

1. L'épaisseur de l'âme est bien plus élevée que celle des peaux :  $h \gg h_1, h_2$ .
2. Les déplacements de l'âme  $u_a$  et  $v_a$  suivant les directions  $x$  et  $y$  sont des fonctions linéaires de la coordonnée  $z$ .
3. Les déplacements  $u$  et  $v$  suivant les directions  $x$  et  $y$  sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.
4. Le déplacement transverse  $w$  est indépendant de la variable  $z$  : la déformation  $\varepsilon_{zz}$  est négligée.
5. L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  : les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{zz}$  sont négligées.
6. Les contraintes de cisaillement transverse  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  sont négligées dans les peaux.

Enfin, la théorie traite les problèmes d'élasticité de faibles déformations.

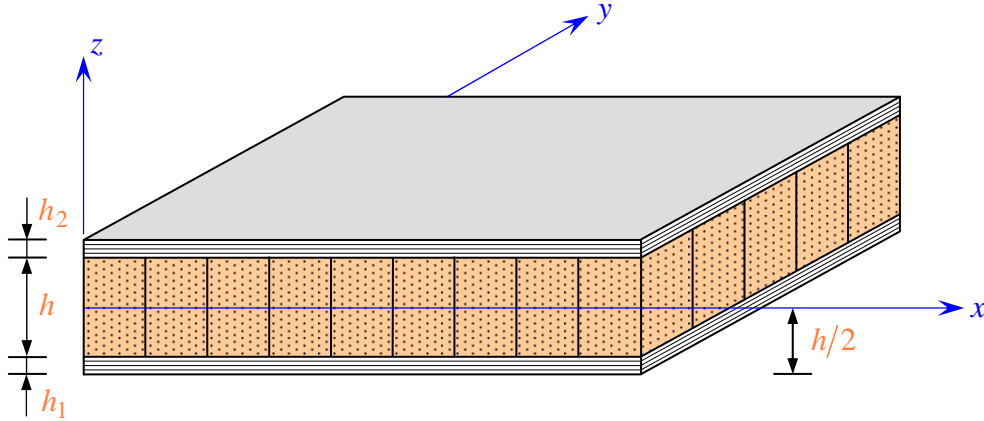


FIGURE 18.1. Notations d'une plaque sandwich.

### 18.2.2 Champ des déplacements

L'hypothèse 2 implique un schéma du premier ordre pour les déplacements de l'âme :

$$\begin{aligned} u_a(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y), \\ v_a(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y), \end{aligned} \quad (18.1)$$

avec

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= u_a(x, y, 0), \\ v_0(x, y) &= v_a(x, y, 0). \end{aligned}$$

La continuité des déplacements aux interfaces âme-peaux, associée à l'hypothèse 3, conduit aux expressions suivantes des déplacements dans les peaux :

— *peau inférieure* :

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u_0(x, y) - \frac{h}{2}\varphi_x(x, y), \\ v_1(x, y, z) &= v_0(x, y) - \frac{h}{2}\varphi_y(x, y), \end{aligned} \quad (18.2)$$

— *peau supérieure* :

$$\begin{aligned} u_2(x, y, z) &= u_0(x, y) + \frac{h}{2}\varphi_x(x, y), \\ v_2(x, y, z) &= v_0(x, y) + \frac{h}{2}\varphi_y(x, y). \end{aligned} \quad (18.3)$$

L'hypothèse 4 s'écrit :

$$w(x, y, z) = w_0(x, y). \quad (18.4)$$

La théorie des plaques sandwichs est donc basée sur la détermination de cinq

fonctions de déplacement et rotation :  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$ , analogues à celles introduites dans la théorie des stratifiés tenant compte du cisaillement transverse (chapitre 17).

### 18.2.3 Champ des déformations

Le champ des déformations dans la peau inférieure est déduit du champ (18.2) des déplacements. Il s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\
 \varepsilon_{yy}^1 &= \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\
 \varepsilon_{zz}^1 &= 0, \\
 \gamma_{yz}^1 &= \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\
 \gamma_{xz}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\
 \gamma_{xy}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right).
 \end{aligned} \tag{18.5}$$

Les déformations en cisaillement transverse  $\gamma_{yz}^1$  et  $\gamma_{xz}^1$  dans la peau sont négligées et le champ des déformations se réduit au champ des déformations en membrane qui s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} - \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \tag{18.6}$$

avec des notations déjà introduites au chapitre 17 :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, & \varepsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, & \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \\
 \kappa_x &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, & \kappa_y &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, & \kappa_{xy} &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{18.7}$$

De même, le champ des déformations dans la peau supérieure s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{yy}^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \tag{18.8}$$

Le champ des déformations dans l'âme se déduit du champ (18.1) des déplacements. Soit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^a &= \frac{\partial u_a}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\
 \varepsilon_{yy}^a &= \frac{\partial v_a}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\
 \varepsilon_{zz}^a &= \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \\
 \gamma_{yz}^a &= \frac{\partial v_a}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y, \\
 \gamma_{xz}^a &= \frac{\partial u_a}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x, \\
 \gamma_{xy}^a &= \frac{\partial u_a}{\partial y} + \frac{\partial v_a}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right).
 \end{aligned} \tag{18.9}$$

Le champ des déformations a la même écriture que le champ des déformations (17.2) de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse. Il est la superposition de deux champs de déformation :

— le champ des déformations en membrane-flexion :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^a \\ \varepsilon_{yy}^a \\ \gamma_{xy}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \tag{18.10}$$

— le champ des déformations en cisaillement transverse :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz}^a \\ \gamma_{xz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{bmatrix}. \tag{18.11}$$

### 18.2.4 Champ des contraintes

Le champ des contraintes dans l'âme est déduit de l'hypothèse 5 :

$$\sigma_{xx}^a = \sigma_{yy}^a = \sigma_{xy}^a = \sigma_{zz}^a = 0. \tag{18.12}$$

L'âme ne transmet que les contraintes en cisaillement :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz}^a \\ \sigma_{xz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44}'^a & C_{45}'^a \\ C_{45}'^a & C_{55}'^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^a \\ \gamma_{xz}^a \end{bmatrix}, \tag{18.13}$$

où les coefficients  $C_{ij}'^a$  s'expriment en fonction des coefficients  $C_{ij}^a$  rapportés aux

axes principaux de l'âme (tableau 11.3) suivant :

$$\begin{aligned} C_{44}'^a &= C_{44}^a \cos^2 \theta + C_{55}^a \sin^2 \theta, \\ C_{45}'^a &= (C_{55}^a - C_{44}^a) \sin \theta \cos \theta, \\ C_{55}'^a &= C_{44}^a \sin^2 \theta + C_{55}^a \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (18.14)$$

où  $\theta$  est l'angle que font les axes principaux de l'âme avec les axes de référence de la plaque sandwich. Les coefficients  $C_{ij}^a$  dans les axes principaux s'expriment (10.26) eux-mêmes en fonction des coefficients de cisaillement de l'âme, mesurés dans les axes principaux, selon :

$$C_{44}^a = G_{23}^a, \quad C_{55}^a = G_{13}^a. \quad (18.15)$$

L'hypothèse 6 implique que les contraintes en cisaillement transverse sont nulles dans toutes les couches  $k$  de la peau inférieure ou supérieure :

$$\sigma_{xz}^k = \sigma_{yz}^k = 0. \quad (18.16)$$

Les autres contraintes sont déduites des déformations dans les peaux par la relation :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \sigma_{xy}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^i \\ \varepsilon_{yy}^i \\ \varepsilon_{xy}^i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad (18.17)$$

pour la couche  $k$  de la peau inférieure ( $i = 1$ ) ou de la peau supérieure ( $i = 2$ ).

## 18.3 RELATIONS FONDAMENTALES DES PLAQUES SANDWICHES

### 18.3.1 Équation constitutive

L'équation constitutive des plaques sandwiches fait intervenir les résultantes et moments déjà introduits dans la théorie des stratifiés :

— les résultantes en membrane :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz + \int_{h/2}^{h/2+h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz, \quad (18.18)$$

— les moments en flexion-torsion :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz + \int_{h/2}^{h/2+h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz, \quad (18.19)$$

— les résultantes en cisaillement :

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} dz. \quad (18.20)$$

En substituant les expressions des contraintes (18.13) à (18.17) dans les expressions précédentes des résultantes et moments, nous obtenons l'équation constitutive :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (18.21)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij}^1 + A_{ij}^2, \\ B_{ij} &= \frac{h}{2} (A_{ij}^2 - A_{ij}^1), \\ C_{ij} &= C_{ij}^1 + C_{ij}^2, \\ D_{ij} &= \frac{h}{2} (C_{ij}^2 - C_{ij}^1), \end{aligned} \quad (18.22)$$

et

$$A_{ij}^1 = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} (Q'_{ij})_k e_k, \quad (18.23)$$

$$C_{ij}^1 = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} z (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} (Q'_{ij})_k e_k z_k, \quad (18.24)$$

$$A_{ij}^2 = \int_{h/2}^{h/2+h_2} (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} (Q'_{ij})_k e_k, \quad (18.25)$$

$$C_{ij}^2 = \int_{h/2}^{h/2+h_2} z (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} (Q'_{ij})_k e_k z_k, \quad (18.26)$$

$$F_{ij} = h C_{ij}^{\prime a}. \quad (18.27)$$

Dans les expressions précédentes des coefficients de rigidité,  $n_1$  et  $n_2$  sont les nombres de couches respectivement dans la peau inférieure et dans la peau supérieure, et  $C_{ij}^a$  sont les coefficients relatifs au cisaillement transverse de l'âme exprimés en (18.14).

L'équation constitutive (18.21) a une forme semblable à l'équation (17.21), obtenue dans le cas de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse. Elle en diffère par la présence des termes  $C_{ij}$  qui impliquent une dissymétrie de la matrice de rigidité. Comme développé dans la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse (paragraphe 17.4), les coefficients de rigidité  $F_{ij}$  sont parfois corrigés par des facteurs de correction  $k_{ij}$ , et remplacés par les paramètres de cisaillement  $H_{ij}$  définis de la même manière qu'en (17.53) :

$$H_{ij} = k_{ij} F_{ij}. \quad (18.28)$$

Dans le cas de plaques sandwichs symétriques, les peaux inférieure et supérieure sont identiques, d'où :

$$A_{ij}^1 = A_{ij}^2, \quad C_{ij}^1 = -C_{ij}^2. \quad (18.29)$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 2A_{ij}^2, & D_{ij} &= hC_{ij}^2, \\ B_{ij} &= 0, & C_{ij} &= 0. \end{aligned} \quad (18.30)$$

Dans le cas des plaques sandwichs symétriques, il y a donc découplage des comportements en membrane et en flexion. L'équation constitutive prend alors une forme identique à l'équation constitutive de stratifiés symétriques avec cisaillement transverse.

### 18.3.2 Relations fondamentales

Les relations fondamentales des plaques sandwichs sont obtenues en introduisant l'équation constitutive (18.21) dans les relations fondamentales (13.50) des plaques. Les trois premières équations sont identiques aux équations (17.27), (17.28) et (17.29) avec  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  et  $F_{ij}$  définis en (18.22) et (18.27). Les deux dernières équations s'écrivent suivant :

$$\begin{aligned} & C_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + C_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ & + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \\ & + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{55} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{45} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ & = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (18.31)$$



$$\begin{aligned}
& C_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \\
& + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{45} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{44} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
& = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{18.32}$$

Ces équations diffèrent des relations (17.30) et (17.31) par la substitution des coefficients  $C_{ij}$  aux coefficients  $B_{ij}$ .

Les conditions aux frontières sont identiques aux conditions introduites dans le paragraphe 17.3.3.

Dans le cas de matériaux sandwichs symétriques, la forme des relations fondamentales est identique à celle des stratifiés symétriques avec cisaillement transverse (paragraphe 17.3.2). Il en résulte une identité du comportement mécanique entre les matériaux sandwichs symétriques et les stratifiés symétriques. Les deux comportements diffèrent uniquement par les expressions des coefficients  $A_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $F_{ij}$ . L'ensemble des analyses du comportement mécanique qui seront développés sur les stratifiés symétriques avec cisaillement pourront donc être transposées aux plaques sandwichs symétriques.

## 18.4 SANDWICHES À PEAUX ÉPAISSES

La théorie des plaques sandwichs implique que l'épaisseur des peaux soit bien plus faible que l'épaisseur de l'âme (hypothèse 1). Dans le cas de peaux épaisses, il est possible de conduire l'analyse des plaques sandwichs à l'aide de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse. Nous développons cette analyse dans le cas d'un matériau sandwich symétrique (figure 18.2), et dans le cas où les axes principaux de l'âme et des peaux coïncident avec les axes de référence de la plaque. Les comportements des matériaux sont caractérisés :

— pour la peau par :

- les coefficients  $Q_{ij}^p$  de rigidité réduite,

— pour l'âme par :

- les coefficients  $Q_{ij}^a$  de rigidité réduite,
- les modules  $G_{ij}^a$  de cisaillement transverse.

L'application de la théorie sandwich conduit aux expressions suivantes des coefficients de l'équation constitutive :

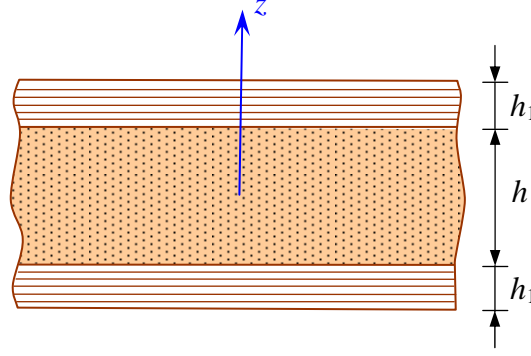


FIGURE 18.2. Sandwich symétrique à peaux épaisses.

$$\begin{aligned}
 A_{ij}^s &= 2h_1 Q_{ij}^p, \\
 B_{ij}^s &= 0, \\
 D_{ij}^s &= \frac{1}{2} Q_{ij}^p (h_1 + h) h h_1, \\
 F_{ij}^s &= h G_{kl}^a \quad (F_{44}^s = h G_{23}^a, \quad F_{55}^s = h G_{13}^a).
 \end{aligned} \tag{18.33}$$

L'application de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse conduit à :

$$A_{ij} = 2h_1 Q_{ij}^p + h Q_{ij}^a, \tag{18.34}$$

$$B_{ij} = 0, \tag{18.35}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} Q_{ij}^p h_1 \left[ (h + h_1)^2 + \frac{h_1^2}{3} \right] + Q_{ij}^a \frac{h^3}{12}, \tag{18.36}$$

$$F_{ij} = 2h_1 G_{ij}^p + h G_{ij}^a. \tag{18.37}$$

Soit :

$$A_{ij} = A_{ij}^s \left( 1 + \frac{h}{2h_1} \frac{Q_{ij}^a}{Q_{ij}^p} \right), \tag{18.38}$$

$$D_{ij} = D_{ij}^s \left[ 1 + \frac{h_1}{h} \frac{h + \frac{4}{3} h_1}{h + h_1} + \frac{Q_{ij}^a}{Q_{ij}^p} \frac{h^2}{6h_1 (h + h_1)} \right], \tag{18.39}$$

$$F_{ij} = F_{ij}^s \left( 1 + 2 \frac{h_1}{h} \frac{G_{ij}^p}{G_{ij}^a} \right). \tag{18.40}$$

Les expressions (18.38), (18.39) et (18.40) établissent les relations entre les coefficients de rigidité de la théorie stratifié avec cisaillement transverse et ceux

de la théorie sandwich. L'âme étant moins rigide que les peaux, nous avons :

$$Q_{ij}^a \ll Q_{ij}^p, \quad (18.41)$$

et les relations peuvent être simplifiées suivant :

$$A_{ij} \approx A_{ij}^s, \quad (18.42)$$

$$D_{ij} \approx D_{ij}^s \left( 1 + \frac{h_1}{h} \frac{h + \frac{4}{3}h_1}{h + h_1} \right), \quad (18.43)$$

$$F_{ij} = F_{ij}^s \left( 1 + 2 \frac{h_1}{h} \frac{G_{ij}^p}{G_{ij}^a} \right). \quad (18.44)$$

Nous retrouvons le comportement du matériau sandwich : le comportement en membrane-flexion est déterminé par les peaux et le comportement en cisaillement transverse est imposé essentiellement par l'âme. Les coefficients de flexion  $D_{ij}$  sont toutefois modifiés par rapport à la théorie des sandwiches. L'expression (18.43) permet ainsi d'évaluer l'influence de l'épaisseur des peaux. Par exemple, dans le cas où :

$$h_1 = 3 \text{ mm}, \quad h = 10 \text{ mm},$$

nous trouvons que :

$$D_{ij} = 1,323 D_{ij}^s$$

soit un écart supérieur à 30 % entre les deux analyses.

## EXERCICES

**18.1** On considère le matériau sandwich de l'exercice 17.2.

Calculer, pour chaque épaisseur de l'âme, la matrice de rigidité en utilisant la théorie des plaques sandwiches.

Comparer aux résultats trouvés dans l'exercice 17.2, en utilisant la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse.

