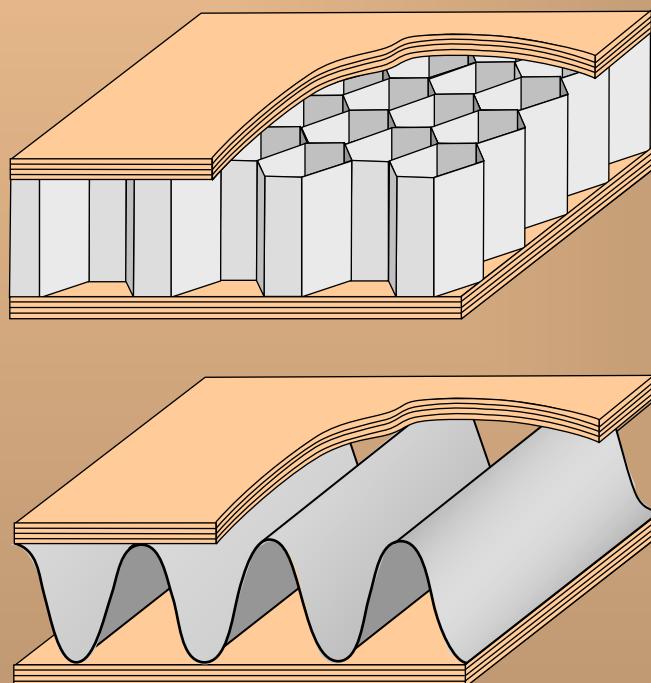


Jean-Marie Berthelot

# Mécanique des Matériaux et Structures Composites



**ISMANS**

**Institut Supérieur des Matériaux  
et Mécaniques Avancés**

**Le Mans, France**





**Jean-Marie Berthelot**

**Mécanique des Matériaux  
et Structures Composites**

Jean-Marie Berthelot est Professeur Émérite à l’Institut Supérieur des Matériaux et Mécaniques Avancés (ISMANS), Le Mans, France. Il exerce ses compétences dans les domaines de la Mécanique des Matériaux et des Matériaux Composites. Spécialiste reconnu au niveau international, ses travaux dans le domaine du Comportement Mécanique des Matériaux Composites font l’objet de publications régulières dans des congrès et journaux scientifiques. Il est l’auteur de différents ouvrages sur la Mécanique des Solides et sur le Comportement des Matériaux Composites.



**Jean-Marie Berthelot**

# **Mécanique des Matériaux et Structures Composites**

**ISMANS**  
**Institut Supérieur des Matériaux  
et Mécanique Avancés**

**Le Mans, France**

## Avant-propos

Les matériaux composites sont des matériaux à hautes performances mécaniques, façonnables à volonté au gré du concepteur et donc doué d'un potentiel illimité. Les matériaux composites se développent aujourd'hui dans pratiquement tous les domaines et sont à l'origine de formidables challenges dans diverses réalisations de haute technologie.

Ainsi, le développement de l'utilisation des matériaux composites dans les structures nécessite de mettre en place les outils nécessaires à la modélisation du comportement mécanique des matériaux composites et à l'analyse des structures stratifiées ou sandwiches. L'objet de cet ouvrage est d'établir une synthèse de l'analyse du comportement mécanique et de la théorie des plaques stratifiées ou sandwiches, et d'en appliquer les développements aux problèmes de flexion, de flambement et de vibrations.

Le contenu et la progression de cet ouvrage ont été conçus avec pour objectifs principaux : (1) traiter le matériau composite comme un matériau traditionnel, (2) apporter à l'ingénieur les éléments nécessaires pour aborder tous les problèmes de dimensionnement des structures en matériaux stratifiés ou matériaux sandwiches dans le cadre des techniques de conception assistée par ordinateur, (3) avoir une progression des difficultés de manière à faciliter l'accès aux lecteurs moins familiers avec les outils de la mécanique des milieux déformables, (4) confronter en permanence la modélisation avec le comportement réel des matériaux ou des structures.

L'ouvrage est divisé en cinq parties. La première partie, *Les matériaux composites*, a pour objet de situer le contexte dans lequel se pose le problème de l'analyse mécanique des structures en matériaux stratifiés ou sandwiches. Le chapitre 1 introduit les matériaux composites d'une manière générale. Les constituants (matrice et fibres) sont étudiés dans le chapitre 2. Le chapitre 3 dégage les principes de différents processus de mise en œuvre des structures composites, l'architecture des stratifiés et des sandwiches étant ensuite analysée.

Pour aborder les développements de l'analyse mécanique des matériaux composites et des structures, il est nécessaire de posséder les éléments théoriques de la mécanique des milieux déformables. Nous avons choisi de faire une synthèse des éléments nécessaires dans la deuxième partie, *Éléments sur la mécanique des matériaux*, où sont développés les outils classiques : contraintes (chapitre 5), déformations (chapitre 6), schéma élastique (chapitre 7) et formulation d'un problème de la mécanique des solides déformables (chapitre 8).

La troisième partie, *Comportement mécanique des matériaux composites*, développe l'analyse du comportement mécanique local des composites. Le chapitre 9 traite du comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel : loi de comportement, estimation des modules, comparaison avec les résultats expérimentaux. Les composites à base de tissus sont des matériaux orthotropes dont le comportement élastique est étudié au chapitre 10. Les matériaux composites stratifiés sont constitués de couches successives dont les directions principales sont décalées d'une couche à l'autre. Le chapitre 11 analyse le comportement élastique d'une couche en dehors de ses axes principaux. Une partie du chapitre est consacrée à l'état dit de contraintes planes, état dont l'importance apparaîtra dans le cadre de la théorie des stratifiés. Enfin, le chapitre 12 aborde les mécanismes de rupture observés dans les matériaux composites et dégage les critères de rupture que le concepteur aura à sa disposition pour évaluer la résistance mécanique d'un stratifié.

La quatrième partie, *Comportement mécanique des stratifiés et des sandwiches*, développe les aspects fondamentaux des théories des plaques stratifiées et des plaques sandwiches. Les hypothèses générales des diverses théories sont d'abord introduites au chapitre 13. Puis, la théorie classique des stratifiés est développée au chapitre 14. L'étude de l'influence de l'empilement des couches (chapitre 15) permet d'appréhender les phénomènes de couplage entre comportement en membrane, en flexion et en torsion. La théorie classique des stratifiés permet également d'estimer le comportement élastique des couches à renfort tissu ou à renfort mat. Le chapitre 16 développe les relations fondamentales de la théorie classique des stratifiés, ainsi que la formulation énergétique. Les conditions aux frontières sont également analysées. La prise en compte du cisaillement transverse dans la théorie des stratifiés est ensuite développée dans le chapitre 17. Enfin, le chapitre 18 analyse la théorie des plaques sandwiches.

La cinquième partie, *Analyse du comportement mécanique des structures en matériaux composites*, traite des problèmes de flexion, flambement et vibrations des structures en matériaux composites. Les chapitres 19 et 20 traitent des problèmes de flexion pour lesquels la théorie des plaques peut être ramenée à une analyse à une dimension. Le premier type de problème concerne la flexion cylindrique (chapitre 19). Le second type de problème est celui de l'analyse du comportement en flexion des poutres (chapitre 20). Le chapitre 21 s'intéresse ensuite à la flexion des plaques stratifiées orthotropes, pour lesquelles il n'existe ni couplage membrane-flexion/torsion, ni couplage flexion-torsion. Le chapitre 22 aborde la flexion de plaques constituées de stratifiés symétriques, croisés ou équilibrés et met en évidence la difficulté à trouver des solutions analytiques. Le chapitre 23 aborde l'étude du flambement des poutres et des plaques stratifiées ou sandwiches : relations fondamentales tenant compte du flambement, solutions analytiques. La détermination des fréquences propres de poutres et plaques stratifiées ou sandwiches est ensuite développée au chapitre 24. Les effets hygrothermiques sur le comportement des poutres et plaques stratifiées sont analysés dans le chapitre 25. Enfin, le dernier chapitre est consacré à l'analyse du prédimensionnement des structures stratifiées et sandwiches, faisant une synthèse des outils développés tout au long de l'ouvrage.

Finalement, l'objectif de cet ouvrage est de fournir une approche fondamentale et unifiée du comportement mécanique des matériaux composites et des structures en matériaux composites. Les différentes parties ont été développées avec soin de manière à aboutir à une continuité du développement des concepts et des théories. Des exercices sont proposés au lecteur tout au long de l'ouvrage de manière à illustrer et appliquer les divers concepts introduits. L'auteur espère ainsi que le lecteur y trouvera l'ensemble des éléments nécessaires à une bonne compréhension du comportement mécanique des matériaux et structures composites.

Au fil de la lecture et de la compréhension de cet ouvrage, l'utilisateur appréciera tout l'investissement que l'auteur a apporté à la réalisation de l'ouvrage. La connaissance scientifique de l'auteur dans le domaine abordé a été accumulée tout naturellement au cours du développement de ses activités de recherches et de son enseignement en troisième cycle. Pour réaliser ensuite l'ouvrage, l'auteur en a effectué la conception, la saisie, la mise en page, la réalisation des figures. Cette édition est la cinquième édition de l'ouvrage français. Le texte et les figures ont été repris de la quatrième édition, en les complétant et agrémentant.

Le Mans, Novembre 2010

Jean-Marie BERTHELOT



# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	V
<b>Partie I     Les Matériaux Composites</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1   Généralités sur les Matériaux Composites</b>	<b>3</b>
<b>1.1   Matériaux composites . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1.1   Définition . . . . .	3
1.1.2   Caractéristiques générales . . . . .	3
<b>1.2   Classification des matériaux composites . . . . .</b>	<b>5</b>
1.2.1   Classification suivant la forme des constituants . . . . .	5
1.2.2   Classification suivant la nature des constituants . . . . .	6
<b>1.3   Pourquoi des matériaux composites ? . . . . .</b>	<b>7</b>
1.3.1   Caractéristiques mécaniques spécifiques . . . . .	7
1.3.2   Caractéristiques mécaniques des matériaux . . . . .	9
1.3.3   Les matériaux composites . . . . .	10
<b>1.4   Fractions volumiques et massiques . . . . .</b>	<b>10</b>
1.4.1   Introduction . . . . .	10
1.4.2   Fractions volumiques . . . . .	11
1.4.3   Fractions massiques . . . . .	12
1.4.4   Relations entre fractions volumiques et massiques . . . . .	12
1.4.5   Présence de porosités . . . . .	14
<b>Exercices . . . . .</b>	<b>14</b>
<b>Chapitre 2   Éléments Constituants d'un Matériaux Composite</b>	<b>15</b>
<b>2.1   Introduction . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>2.2   Les résines . . . . .</b>	<b>15</b>
2.2.1   Les divers types de résines . . . . .	15
2.2.2   Les résines thermodurcissables . . . . .	16
2.2.3   Les résines thermoplastiques . . . . .	19
2.2.4   Les résines thermostables . . . . .	20
<b>2.3   Les charges et additifs . . . . .</b>	<b>20</b>
2.3.1   Introduction . . . . .	20
2.3.2   Les charges . . . . .	21
2.3.3   Les additifs . . . . .	23

<b>2.4 Les fibres et tissus . . . . .</b>	<b>24</b>
2.4.1 Généralités . . . . .	24
2.4.2 Formes linéiques . . . . .	24
2.4.3 Formes surfaciques . . . . .	25
2.4.4 Structures tissées multidirectionnelles . . . . .	28
<b>2.5 Les principales fibres . . . . .</b>	<b>28</b>
2.5.1 Les fibres de verre . . . . .	28
2.5.2 Les fibres de carbone . . . . .	41
2.5.3 Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées . . . . .	45
2.5.4 Les fibres céramiques . . . . .	46
2.5.5 Les fibres synthétiques thermostables . . . . .	48
2.5.6 Autres fibres . . . . .	48
<b>Chapitre 3 Mise en œuvre et Architecture des Matériaux Composites</b>	<b>50</b>
<b>3.1 Introduction . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>3.2 Mise en œuvre des matériaux composites . . . . .</b>	<b>50</b>
3.2.1 Moulages sans pression . . . . .	50
3.2.2 Moulage sous vide . . . . .	53
3.2.3 Moulage par compression . . . . .	53
3.2.4 Moulage en continu . . . . .	56
3.2.5 Moulage par pultrusion . . . . .	57
3.2.6 Moulage par centrifugation . . . . .	58
3.2.7 Moulage par enroulement filamentaire . . . . .	59
<b>3.3 Utilisation de demi-produits . . . . .</b>	<b>62</b>
3.3.1 Introduction . . . . .	62
3.3.2 Préimprégnés . . . . .	62
3.3.3 Les compounds de moulage . . . . .	64
<b>3.4 Architecture des matériaux composites . . . . .</b>	<b>68</b>
3.4.1 Introduction . . . . .	68
3.4.2 Stratifiés . . . . .	69
3.4.3 Composites sandwiches . . . . .	74
3.4.4 Autres architectures . . . . .	75
3.4.5 Conséquences sur l'étude du comportement mécanique des matériaux composites . . . . .	77
<b>Partie II Éléments sur la Mécanique des Matériaux</b>	<b>79</b>
<b>Chapitre 4 Éléments Mathématiques</b>	<b>81</b>
<b>4.1 Changement de base . . . . .</b>	<b>81</b>
4.1.1 Expression générale . . . . .	81
4.1.2 Expression dans le cas de la rotation autour d'un axe . . . . .	82
<b>4.2 Tenseur de rang deux . . . . .</b>	<b>83</b>
4.2.1 Introduction . . . . .	83
4.2.2 Changement de base . . . . .	84
4.2.3 Diagonalisation d'une matrice. Vecteurs propres et valeurs propres . . . . .	84
4.2.4 Inverse d'une matrice symétrique d'ordre 3 . . . . .	85

<b>Chapitre 5 Contraintes</b>	<b>91</b>
<b>5.1 État des contraintes dans un solide</b>	<b>91</b>
5.1.1 Tenseur des contraintes . . . . .	91
5.1.2 Force exercée en un point sur un élément de surface . . . . .	92
<b>5.2 Propriétés du tenseur des contraintes</b>	<b>93</b>
5.2.1 Signification physique des composantes du tenseur . . . . .	93
5.2.2 Composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte . . . . .	94
5.2.3 Directions principales. Contraintes principales . . . . .	95
5.2.4 Changement de base . . . . .	96
<b>5.3 États particuliers de contraintes</b>	<b>97</b>
5.3.1 Tenseur sphérique et déviateur des contraintes . . . . .	97
5.3.2 Compression ou tension sphérique . . . . .	97
5.3.3 Traction ou compression simple dans une direction . . . . .	97
5.3.4 Cisaillement simple . . . . .	98
5.3.5 État de contraintes planes . . . . .	100
5.3.6 État de contraintes quelconque . . . . .	101
<b>5.4 Notation matricielle de l'ingénieur</b>	<b>101</b>
5.4.1 Introduction de la notation . . . . .	101
5.4.2 Changement de base . . . . .	102
<b>Exercices</b>	<b>103</b>
<b>Chapitre 6 Déformations</b>	<b>104</b>
<b>6.1 État des déformations en un point</b>	<b>104</b>
6.1.1 Déformations en un point . . . . .	104
6.1.2 Tenseur des déformations . . . . .	106
6.1.3 Interprétation des termes du tenseur des déformations . . . . .	107
6.1.4 Conditions de compatibilité . . . . .	109
<b>6.2 Déformation en un point</b>	<b>110</b>
6.2.1 Allongement unitaire . . . . .	110
6.2.2 Déformation en cisaillement . . . . .	110
6.2.3 Tenseur des déformations dans les directions principales . . . . .	112
6.2.4 Changement de base . . . . .	113
<b>6.3 États particuliers de déformations</b>	<b>114</b>
6.3.1 Tenseur sphérique et déviateur des déformations . . . . .	114
6.3.2 États particuliers . . . . .	114
<b>6.4 Notation matricielle de l'ingénieur</b>	<b>114</b>
6.4.1 Introduction de la notation . . . . .	114
6.4.2 Changement de base . . . . .	115
<b>Exercices</b>	<b>116</b>
<b>Chapitre 7 Schéma Élastique</b>	<b>119</b>
<b>7.1 Schéma d'élasticité linéaire</b>	<b>119</b>
7.1.1 Introduction . . . . .	119
7.1.2 Matrice de rigidité . . . . .	119
7.1.3 Matrice de flexibilité et souplesse . . . . .	120

7.1.4	Changement de base . . . . .	120
7.1.5	Matériaux anisotropes . . . . .	121
<b>7.2</b>	<b>Matériaux isotropes . . . . .</b>	<b>123</b>
7.2.1	Relations d'élasticité . . . . .	123
7.2.2	Modules d'élasticité . . . . .	125
7.2.3	Relations entre les coefficients d'élasticité . . . . .	127
7.2.4	Expressions des matrices de rigidité et de souplesse . . . . .	127
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>128</b>

## Chapitre 8 Résolution d'un Problème de Mécanique des Solides Déformables 130

<b>8.1</b>	<b>Relation fondamentale pour un milieu continu . . . . .</b>	<b>130</b>
<b>8.2</b>	<b>Problème de la mécanique des solides déformables . . . . .</b>	<b>132</b>
8.2.1	Énoncé du problème . . . . .	132
8.2.2	Équations en coordonnées cartésiennes . . . . .	134
8.2.3	Équation en coordonnées cylindriques . . . . .	137
<b>8.3</b>	<b>Théorèmes de l'énergie . . . . .</b>	<b>138</b>
8.3.1	Variation d'une fonctionnelle . . . . .	138
8.3.2	Théorème des travaux virtuels . . . . .	139
8.3.3	Dynamique des solides . . . . .	142
<b>8.4</b>	<b>Méthodes variationnelles . . . . .</b>	<b>143</b>
8.4.1	Principe . . . . .	143
8.4.2	Convergence. . . . .	145

## Partie III Comportement Mécanique des Matériaux Composites 147

### Chapitre 9 Comportement Élastique d'un Matériau Composite Unidirectionnel 149

<b>9.1</b>	<b>Modules effectifs . . . . .</b>	<b>149</b>
9.1.1	Concept d'homogénéisation . . . . .	149
9.1.2	Modules homogénéisés. . . . .	150
<b>9.2</b>	<b>Loi de Hooke pour un composite unidirectionnel . . . . .</b>	<b>151</b>
9.2.1	Constitution d'un matériau composite unidirectionnel. . . . .	151
9.2.2	Matrices de rigidité et de souplesse. . . . .	152
<b>9.3</b>	<b>Modules de l'ingénieur . . . . .</b>	<b>153</b>
9.3.1	Traction longitudinale. . . . .	153
9.3.2	Traction transversale. . . . .	154
9.3.3	Cisaillement longitudinal . . . . .	155
9.3.4	Cisaillement transverse. . . . .	156
9.3.5	Compression hydrostatique latérale. . . . .	156
9.3.6	Modules en fonction des constantes de rigidité et de souplesse . . . . .	158
9.3.7	Constantes de rigidité et de souplesse en fonction des modules . . . . .	159
9.3.8	Restriction sur les modules . . . . .	160

<b>9.4 Approches théoriques de la détermination des modules d'élasticité . . . . .</b>	<b>160</b>
9.4.1 Problème – Diverses approches . . . . .	160
9.4.2 Bornes sur les modules d'élasticité . . . . .	163
9.4.3 Solutions exactes . . . . .	165
9.4.4 Approches simplifiées . . . . .	171
9.4.5 Équations d'Halpin-Tsai . . . . .	178
<b>9.5 Valeurs numériques des modules . . . . .</b>	<b>179</b>
9.5.1 Valeurs expérimentales des modules . . . . .	179
9.5.2 Comparaison entre valeurs expérimentales et calculées des modules . . . . .	181
9.5.3 Conclusions . . . . .	183
<b>Exercices . . . . .</b>	<b>183</b>
 <b>Chapitre 10 Comportement Élastique d'un Matériaux Composite Orthotrope . . . . .</b>	<b>186</b>
<b>10.1 Loi de Hooke pour un composite orthotrope . . . . .</b>	<b>186</b>
10.1.1 Composite orthotrope . . . . .	186
10.1.2 Matrices de rigidité et de souplesse . . . . .	187
<b>10.2 Modules de l'ingénieur . . . . .</b>	<b>188</b>
10.2.1 Traction dans le sens chaîne . . . . .	188
10.2.2 Traction dans le sens trame . . . . .	189
10.2.3 Traction transversale . . . . .	189
10.2.4 Relation entre modules d'Young et coefficients de Poisson . . . . .	190
10.2.5 Essais de cisaillement . . . . .	190
10.2.6 Conclusion . . . . .	191
<b>10.3 Constantes de rigidité et de souplesse en fonction des modules de l'ingénieur . . . . .</b>	<b>191</b>
10.3.1 Constantes de souplesse . . . . .	191
10.3.2 Constantes de rigidité . . . . .	192
10.3.3 Restriction sur les coefficients d'élasticité . . . . .	192
<b>Exercices . . . . .</b>	<b>193</b>
 <b>Chapitre 11 Matériaux Composite en dehors de ses Axes Principaux . . . . .</b>	<b>195</b>
<b>11.1 Relations d'élasticité dans un système d'axes quelconque . . . . .</b>	<b>195</b>
11.1.1 Introduction . . . . .	195
11.1.2 Matrices de rigidité et de souplesse . . . . .	195
11.1.3 Autres expressions des matrices de rigidité . . . . .	201
<b>11.2 Modules d'élasticité . . . . .</b>	<b>202</b>
11.2.1 Expression des modules hors axes . . . . .	202
11.2.2 Variations des modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel . . . . .	207
<b>11.3 État de contraintes planes . . . . .</b>	<b>212</b>
11.3.1 Introduction . . . . .	212
11.3.2 État de contraintes à deux dimensions . . . . .	212
11.3.3 Équations d'élasticité pour un état de contraintes planes . . . . .	212
11.3.4 Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux . . . . .	215

11.3.5	Relations entre les constantes de rigidité réduites hors axes et dans les axes principaux . . . . .	217
11.3.6	Conclusions . . . . .	219
11.3.7	Exemple d'application . . . . .	219
<b>11.4</b>	<b>Détermination expérimentale des modules.</b> . . . . .	<b>222</b>
11.4.1	Introduction . . . . .	222
11.4.2	Traction longitudinale. . . . .	222
11.4.3	Traction transverse . . . . .	223
11.4.4	Traction hors axes . . . . .	224
11.4.5	Réalisations pratiques des essais de traction . . . . .	225
	<b>Exercices</b> . . . . .	<b>226</b>

## Chapitre 12 Mécanismes de Rupture et Endommagement des Matériaux Composites 228

<b>12.1</b>	<b>Mécanismes de rupture dans les matériaux composites.</b> . . . . .	<b>228</b>
12.1.1	Introduction . . . . .	228
12.1.2	Les divers mécanismes de rupture dans un composite unidirectionnel . . . . .	228
12.1.3	Composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale . . . . .	231
12.1.4	Composite unidirectionnel soumis à une traction transverse . . . . .	235
12.1.5	Rupture des stratifiés . . . . .	236
12.1.6	Observation des mécanismes de rupture . . . . .	240
<b>12.2</b>	<b>Critères de rupture</b> . . . . .	<b>245</b>
12.2.1	Introduction . . . . .	245
12.2.2	Critère en contraintes maximales . . . . .	246
12.2.3	Critère en déformations maximales . . . . .	252
12.2.4	Critères interactifs . . . . .	256
	<b>Exercices</b> . . . . .	<b>264</b>

## Partie IV Comportement Mécanique des Stratifiés et des Sandwiches 265

<b>Chapitre 13</b>	<b>Généralités sur la Théorie des Stratifiés</b> <span style="float: right;">267</span>	
<b>13.1</b>	<b>Introduction.</b> . . . . .	<b>267</b>
13.1.1	Architecture . . . . .	267
13.1.2	Notations et objectif . . . . .	268
<b>13.2</b>	<b>Champ des déplacements</b> . . . . .	<b>268</b>
13.2.1	Expressions générales . . . . .	268
13.2.2	Déformation d'une normale . . . . .	269
13.2.3	Schémas du premier degré . . . . .	270
<b>13.3</b>	<b>Champ des déformations</b> . . . . .	<b>272</b>
13.3.1	Expressions générales . . . . .	272
13.3.2	Schéma du premier degré . . . . .	272
<b>13.4</b>	<b>Champ des contraintes</b> . . . . .	<b>273</b>
13.4.1	Expression générale . . . . .	273
13.4.2	Simplification dans le cadre de la théorie des plaques . . . . .	274

<b>13.5 Résultantes et moments . . . . .</b>	<b>275</b>
13.5.1 Résultantes en membrane . . . . .	275
13.5.2 Résultantes en cisaillement . . . . .	276
13.5.3 Moments de flexion et de torsion . . . . .	276
<b>13.6 Relations fondamentales des plaques dans le cas d'un schéma du premier degré . . . . .</b>	<b>278</b>
13.6.1 Relations fondamentales de la mécanique des matériaux . . . . .	278
13.6.2 Relations fondamentales relatives aux résultantes de membrane . . . . .	278
13.6.3 Relation fondamentale relative aux résultantes de cisaillement . . . . .	280
13.6.4 Relations fondamentales relatives aux moments . . . . .	281
13.6.5 Résumé des relations fondamentales . . . . .	282
13.6.6 Problèmes de statique . . . . .	285
<b>Exercices . . . . .</b>	<b>285</b>
<b>Chapitre 14 Théorie Classique des Stratifiés</b>	<b>287</b>
<b>14.1 Champ des déformations . . . . .</b>	<b>287</b>
14.1.1 Hypothèses de la théorie classique des stratifiés . . . . .	287
14.1.2 Expression du champ des déformations . . . . .	288
<b>14.2 Champ des contraintes . . . . .</b>	<b>291</b>
14.2.1 Forme du champ des contraintes . . . . .	291
14.2.2 Expression des contraintes . . . . .	291
<b>14.3 Expression des résultantes et moments . . . . .</b>	<b>292</b>
14.3.1 Résultantes en membrane . . . . .	292
14.3.2 Moments de flexion et de torsion . . . . .	293
<b>14.4 Équations du comportement mécanique d'un stratifié . . . . .</b>	<b>294</b>
14.4.1 Équation constitutive . . . . .	294
14.4.2 Matrice de rigidité . . . . .	295
14.4.3 Exemples . . . . .	295
<b>14.5 Détermination des déformations et des contraintes . . . . .</b>	<b>302</b>
14.5.1 Problème à résoudre . . . . .	302
14.5.2 Déformations en membrane et courbures . . . . .	302
14.5.3 Champ des déformations . . . . .	303
14.5.4 Champ des contraintes . . . . .	304
14.5.5 Exemple . . . . .	305
<b>Exercices . . . . .</b>	<b>311</b>
<b>Chapitre 15 Influence de l'Empilement des Couches Étude des Matériaux à Renfort Tissu</b>	<b>313</b>
<b>15.1 Influence de l'empilement des couches . . . . .</b>	<b>313</b>
15.1.1 Cas d'une couche . . . . .	313
15.1.2 Stratifiés symétriques . . . . .	317
15.1.3 Stratifiés antisymétriques . . . . .	319
15.1.4 Stratifiés croisés . . . . .	321
15.1.5 Stratifiés équilibrés et stratifiés alternés . . . . .	328
15.1.6 Stratifiés à couches isotropes . . . . .	331
15.1.7 Stratifié quelconque . . . . .	332

<b>15.2 Étude des matériaux à renfort tissu . . . . .</b>	<b>332</b>
15.2.1 Introduction . . . . .	332
15.2.2 Caractérisation d'un renfort tissu . . . . .	334
15.2.3 Analogie stratifié . . . . .	336
15.2.4 Modules du comportement en membrane d'une couche à renfort tissu . . . . .	338
15.2.5 Expressions des modules en membrane d'une couche à renfort tissu . . . . .	340
15.2.6 Applications numériques . . . . .	342
15.2.7 Couche à renfort mat . . . . .	343
15.2.8 Stratifié constitué de couches à renfort tissu et à renfort mat . . . . .	344
<b>Exercices . . . . .</b>	<b>347</b>
<b>Chapitre 16 Relations Fondamentales et Formulation Énergétique de la Théorie Classique des Stratifiés</b>	<b>349</b>
<b>16.1 Relations fondamentales</b>	<b>349</b>
16.1.1 Relations générales . . . . .	349
16.1.2 Stratifié symétrique . . . . .	350
16.1.3 Stratifié croisé antisymétrique . . . . .	351
16.1.4 Expressions des résultantes et moments . . . . .	352
16.1.5 Expression des contraintes . . . . .	353
<b>16.2 Conditions aux frontières . . . . .</b>	<b>355</b>
16.2.1 Généralités . . . . .	355
16.2.2 Appui simple . . . . .	355
16.2.3 Encastrement . . . . .	356
16.2.4 Bord libre . . . . .	357
<b>16.3 Formulation énergétique de la théorie des stratifiés . . . . .</b>	<b>358</b>
16.3.1 Introduction . . . . .	358
16.3.2 Énergie de déformation d'un stratifié . . . . .	358
16.3.3 Énergie cinétique d'un stratifié . . . . .	360
16.3.4 Travail des actions exercées sur le stratifié . . . . .	361
<b>Chapitre 17 Prise en Compte du Cisaillement Transverse dans la Théorie des Stratifiés</b>	<b>362</b>
<b>17.1 Limitation de la théorie classique des stratifiés . . . . .</b>	<b>362</b>
<b>17.2 Champs des déformations et des contraintes . . . . .</b>	<b>362</b>
17.2.1 Champ des déplacements . . . . .	362
17.2.2 Champ des déformations . . . . .	363
17.2.3 Champ des contraintes . . . . .	366
<b>17.3 Relations fondamentales du comportement d'un stratifié, tenant compte du cisaillement transverse . . . . .</b>	<b>367</b>
17.3.1 Équation constitutive . . . . .	367
17.3.2 Relations fondamentales . . . . .	369
17.3.3 Conditions aux frontières . . . . .	371
17.3.4 Contraintes dans les couches . . . . .	372
<b>17.4 Théorie modifiée des stratifiés avec cisaillement transverse . . . . .</b>	<b>374</b>
17.4.1 Hypothèses de la théorie stratifiée . . . . .	374

17.4.2	Évaluation des facteurs de correction en cisaillement dans le cas d'une plaque orthotrope . . . . .	375
17.4.3	Évaluation des facteurs de correction en cisaillement dans le cas d'une plaque stratifiée . . . . .	378
<b>17.5 Conclusions sur les théories des stratifiés avec cisaillement transverse . . . . .</b>	<b>384</b>	
<b>Exercices . . . . .</b>	<b>385</b>	
 <b>Chapitre 18 Théorie des Plaques Sandwiches</b>		<b>386</b>
<b>18.1 Introduction . . . . .</b>	<b>386</b>	
<b>18.2 Champs des déformations et des contraintes . . . . .</b>	<b>386</b>	
18.2.1 Hypothèses de la théorie des sandwiches . . . . .	386	
18.2.2 Champ des déplacements . . . . .	387	
18.2.3 Champ des déformations . . . . .	388	
18.2.4 Champ des contraintes . . . . .	389	
<b>18.3 Relations fondamentales des plaques sandwiches . . . . .</b>	<b>390</b>	
18.3.1 Équation constitutive . . . . .	390	
18.3.2 Relations fondamentales . . . . .	392	
<b>18.4 Sandwiches à peaux épaisses . . . . .</b>	<b>393</b>	
<b>Exercices . . . . .</b>	<b>395</b>	
 <b>Partie V Analyse du Comportement Mécanique des Structures en Matériaux Composites</b>		<b>397</b>
 <b>Chapitre 19 Flexion Cylindrique</b>		<b>399</b>
<b>19.1 Introduction . . . . .</b>	<b>399</b>	
<b>19.2 Théorie classique des stratifiés . . . . .</b>	<b>399</b>	
19.2.1 Équations . . . . .	399	
19.2.2 Charge uniforme . . . . .	401	
19.2.3 Charge sinusoïdale . . . . .	404	
<b>19.3 Prise en compte du cisaillement transverse . . . . .</b>	<b>405</b>	
19.3.1 Stratifié orthotrope . . . . .	405	
19.3.2 Stratifié équilibré . . . . .	408	
<b>19.4 Recherche d'une solution exacte . . . . .</b>	<b>410</b>	
<b>19.5 Comparaison entre les diverses théories . . . . .</b>	<b>413</b>	
<b>19.6 Flexion cylindrique des plaques sandwiches . . . . .</b>	<b>416</b>	
<b>Exercices . . . . .</b>	<b>420</b>	
 <b>Chapitre 20 Flexion des Poutres</b>		<b>422</b>
<b>20.1 Introduction . . . . .</b>	<b>422</b>	
<b>20.2 Théorie classique des stratifiés . . . . .</b>	<b>423</b>	
20.2.1 Expressions générales . . . . .	423	
20.2.2 Flexion 3-points . . . . .	427	
20.2.3 Flexion 4-points . . . . .	432	
<b>20.3 Prise en compte du cisaillement transverse . . . . .</b>	<b>435</b>	

20.3.1	Équations générales . . . . .	435
20.3.2	Flexion 3-points . . . . .	438
20.3.3	Flexion 4-points . . . . .	441
<b>20.4 Flexion des poutres sandwiches . . . . .</b>		<b>443</b>
20.4.1	Expressions générales . . . . .	443
20.4.2	Comparaison entre la théorie des sandwiches et la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse . . . . .	446
<b>Exercices . . . . .</b>		<b>451</b>
<b>Chapitre 21 Flexion des Plaques Stratifiées Orthotropes . . . . .</b>		<b>454</b>
<b>21.1 Introduction . . . . .</b>		<b>454</b>
<b>21.2 Plaques rectangulaires en appuis simples . . . . .</b>		<b>454</b>
21.2.1	Expressions générales . . . . .	454
21.2.2	Cas d'une charge uniforme . . . . .	457
21.2.3	Cas d'une charge distribuée sur un rectangle . . . . .	464
<b>21.3 Plaques rectangulaires en appuis simples sur deux côtés . . . . .</b>		<b>465</b>
21.3.1	Cas d'une charge quelconque . . . . .	465
21.3.2	Cas d'une charge uniforme . . . . .	468
<b>21.4 Plaques rectangulaires soumises à diverses conditions sur les côtés . . . . .</b>		<b>470</b>
<b>21.5 Plaques rectangulaires encastrées . . . . .</b>		<b>473</b>
21.5.1	Introduction . . . . .	473
21.5.2	Solution approchée par des fonctions polynômiales . . . . .	474
21.5.3	Solution approchée par des fonctions poutres . . . . .	475
21.5.4	Comparaison entre les solutions approchées . . . . .	479
<b>21.6 Plaques sandwiches en appuis simples . . . . .</b>		<b>483</b>
<b>Exercices . . . . .</b>		<b>487</b>
<b>Chapitre 22 Flexion de Plaques Constituées de Stratifiés Symétriques, Croisés, Équilibrés . . . . .</b>		<b>489</b>
<b>22.1 Plaques stratifiées symétriques . . . . .</b>		<b>489</b>
22.1.1	Expressions générales . . . . .	489
22.1.2	Plaques stratifiées symétriques en appuis simples . . . . .	490
22.1.3	Plaques stratifiées symétriques encastrées . . . . .	492
<b>22.2 Plaques rectangulaires croisées . . . . .</b>		<b>494</b>
22.2.1	Expressions générales . . . . .	494
22.2.2	Influence des modules . . . . .	496
22.2.3	Influence du rapport longueur sur largeur . . . . .	499
<b>22.3 Plaques rectangulaires équilibrées . . . . .</b>		<b>500</b>
<b>Exercices . . . . .</b>		<b>504</b>
<b>Chapitre 23 Flambement des Poutres et des Plaques Stratifiées et Sandwiches . . . . .</b>		<b>506</b>
<b>23.1 Relations fondamentales tenant compte du flambement . . . . .</b>		<b>506</b>
23.1.1	Introduction . . . . .	506
23.1.2	Équations des plaques tenant compte du flambement . . . . .	507

23.1.3	Équations de la théorie classique des stratifiés tenant compte de la déformation latérale . . . . .	510
23.1.4	Formulation énergétique du problème de flambement . . . . .	512
23.1.5	Équations de la théorie avec cisaillement transverse tenant compte de la déformation latérale . . . . .	514
23.1.6	Équations de la théorie des sandwiches tenant compte de la déformation latérale . . . . .	514
<b>23.2 Flambement suivant une flexion cylindrique</b>	.....	<b>515</b>
23.2.1	Théorie classique des stratifiés . . . . .	515
23.2.2	Prise en compte du cisaillement transverse . . . . .	517
23.2.3	Flambement d'une plaque sandwich . . . . .	519
<b>23.3 Flambement des poutres</b>	.....	<b>520</b>
23.3.1	Équation du flambement . . . . .	520
23.3.2	Poutre en appuis simples . . . . .	521
23.3.3	Poutre encastrée . . . . .	522
23.3.4	Autres conditions d'appuis . . . . .	523
23.3.5	Prise en compte du cisaillement transverse . . . . .	524
23.3.6	Flambement d'une poutre sandwich . . . . .	524
<b>23.4 Flambement de plaques orthotropes soumises à une compression biaxiale</b>	.....	<b>525</b>
23.4.1	Expressions générales . . . . .	525
23.4.2	Compression uniaxiale . . . . .	527
23.4.3	Plaque carrée soumise à une compression biaxiale . . . . .	528
<b>23.5 Flambement de plaques orthotropes soumises à des conditions quelconques</b>	.....	<b>529</b>
23.5.1	Expressions générales . . . . .	529
23.5.2	Plaques orthotropes encastrées soumises à un cisaillement uniforme . . . . .	531
<b>Exercices</b>	.....	<b>533</b>

## Chapitre 24 Vibration des Poutres et des Plaques Stratifiées et Sandwiches **535**

<b>24.1 Introduction</b>	.....	<b>535</b>
<b>24.2 Flexion cylindrique</b>	.....	<b>536</b>
24.2.1	Théorie classique des stratifiés . . . . .	536
24.2.2	Prise en compte du cisaillement transverse . . . . .	538
24.2.3	Vibrations de plaques sandwiches . . . . .	540
<b>24.3 Vibrations des poutres</b>	.....	<b>541</b>
24.3.1	Équation générale . . . . .	541
24.3.2	Poutre en appuis simples . . . . .	542
24.3.3	Poutre encastrée . . . . .	543
24.3.4	Poutre encastrée à une extrémité et en appui simple à l'autre . . . . .	544
24.3.5	Poutre encastrée à une extrémité, l'autre étant libre . . . . .	546
24.3.6	Poutre ayant ses deux extrémités libres . . . . .	548
<b>24.4 Vibrations de plaques orthotropes rectangulaires en appuis simples</b>	.....	<b>549</b>
<b>24.5 Vibrations de plaques orthotropes avec diverses conditions sur les côtés</b>	.....	<b>553</b>

24.5.1	Expressions générales . . . . .	553
24.5.2	Approximation de Rayleigh . . . . .	555
24.5.3	Approximation à deux termes . . . . .	556
24.5.4	Plaque orthotrope dont les côtés sont encastrés ou en appuis simples . . . . .	556
<b>24.6</b>	<b>Vibrations de plaques stratifiées symétriques . . . . .</b>	<b>561</b>
24.6.1	Expressions générales . . . . .	561
24.6.2	Plaque symétrique dont les côtés sont encastrés ou libres . . . . .	561
<b>24.7</b>	<b>Vibrations de plaques stratifiées non symétriques . . . . .</b>	<b>564</b>
24.7.1	Plaque constituée d'un stratifié croisé antisymétrique . . . . .	564
24.7.2	Plaque constituée d'un stratifié équilibré . . . . .	568
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>570</b>

## **Chapitre 25 Influence des Phénomènes de Dilatation sur le Comportement Mécanique des Stratifiés** **573**

<b>25.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>573</b>
<b>25.2</b>	<b>Équations du comportement des matériaux composites tenant compte des phénomènes de dilatation . . . . .</b>	<b>573</b>
25.2.1	Relations d'élasticité dans les axes principaux . . . . .	573
25.2.2	Relations d'élasticité en dehors des axes principaux . . . . .	575
<b>25.3</b>	<b>Équations du comportement d'un stratifié . . . . .</b>	<b>577</b>
25.3.1	Équation constitutive . . . . .	577
25.3.2	Exemples . . . . .	579
25.3.3	Relations fondamentales . . . . .	585
25.3.4	Énergie de déformation . . . . .	587
<b>25.4</b>	<b>Comportement de plaques rectangulaires . . . . .</b>	<b>588</b>
25.4.1	Plaque rectangulaire constituée d'un stratifié symétrique . . . . .	588
25.4.2	Plaque rectangulaire constituée d'un stratifié antisymétrique équilibré . . . . .	590
25.4.3	Effets thermiques . . . . .	593
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>595</b>

## **Chapitre 26 Prédimensionnement des Structures Composites et Sandwiches** **597**

<b>26.1</b>	<b>Problème du dimensionnement . . . . .</b>	<b>597</b>
<b>26.2</b>	<b>Éléments de base des structures en composites . . . . .</b>	<b>598</b>
26.2.1	Poutres simples . . . . .	598
26.2.2	Profilés . . . . .	602
26.2.3	Poutres sandwiches . . . . .	605
26.2.4	Plaques . . . . .	606
<b>26.3</b>	<b>Détermination des grandeurs du comportement mécanique . . . . .</b>	<b>606</b>
26.3.1	Modules . . . . .	606
26.3.2	Caractéristiques à la rupture . . . . .	606
<b>26.4</b>	<b>Analyse des structures par la méthode des éléments finis . . . . .</b>	<b>609</b>
26.4.1	Introduction . . . . .	609
26.4.2	Méthode des éléments finis . . . . .	611
26.4.3	Validation . . . . .	613

<b>26.5 Exemples de prédimensionnements . . . . .</b>	<b>614</b>
26.5.1    Prédimensionnement de la coque d'un voilier . . . . .	614
26.5.2    Prédimensionnement d'un capot d'automobile . . . . .	619
26.5.3    Conclusions sur le prédimensionnement . . . . .	625
<b>Annexe A     Fonction Polynomiale d'une Poutre ayant ses Deux Extrémités Encastrées</b>	<b>629</b>
<b>Annexe B     Fonction Caractéristique d'une Poutre ayant ses Deux Extrémités Encastrées</b>	<b>633</b>
<b>Références bibliographiques</b>	<b>637</b>
<b>Index</b>	<b>641</b>



## Partie I

# Les Matériaux Composites

L'objet de cette partie est de mettre en évidence le contexte dans lequel se pose le problème de l'analyse mécanique des structures en matériaux stratifiés ou sandwiches. Le chapitre 1 constitue une introduction des matériaux composites, donnant leurs caractéristiques générales. Les constituants (matrice et fibres) sont analysés dans le chapitre 2. Les principales mises en œuvre des matériaux stratifiés et sandwiches sont ensuite abordées au chapitre 3, puis l'architecture générale des matériaux est considérée dans ce même chapitre.



## CHAPITRE 1

# Généralités sur les Matériaux Composites

## 1.1 MATÉRIAUX COMPOSITES

### 1.1.1 Définition

Dans un sens large, le mot “composite” signifie “constitué de deux ou plusieurs parties différentes”. En fait, l’appellation *matériau composite* ou *composite* est utilisée dans un sens beaucoup plus restrictif, qui sera précisé tout au long de ce chapitre. Nous en donnons pour l’instant la définition générale suivante. Un matériau composite est constitué de l’assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d’aboutir à un matériau dont l’ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. Des exemples de matériaux composites pris au sens large sont donnés au tableau 1.1.

### 1.1.2 Caractéristiques générales

Un matériau composite consiste dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. Dans le cas de plusieurs phases discontinues de natures différentes, le composite est dit hybride. La phase discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue. La phase continue est appelée la *matrice*. La phase discontinue est appelée le *renfort* ou *matériau renforçant* (figure 1.1). Une exception importante à la description précédente est le cas de polymères modifiés par des élastomères, pour lesquels une matrice polymère rigide est chargée avec des particules élastomères. Pour ce type de matériau, les caractéristiques statiques du polymère (module d'Young, contrainte à la rupture, etc.) ne sont pratiquement pas modifiées par l'adjonction de particules élastomères, alors que les caractéristiques au choc sont améliorées.

Les propriétés des matériaux composites résultent :

- des propriétés des matériaux constituants,
- de leur distribution géométrique,
- de leurs interactions, etc.

TABLEAU 1.1. Exemples de matériaux composites, pris au sens large.

Type de composite	Constituants	Domaines d'application
1. <i>Composites à matrice organique</i>		
Papier, carton	Résine/charges/fibres cellulaires	Imprimerie, emballage, etc.
Panneaux de particules	Résine/copeaux de bois	Menuiserie
Panneaux de fibres	Résine/fibres de bois	Bâtiment
Toiles enduites	Résines souples/tissus	Sports, bâtiment
Matériaux d'étanchéité	Elastomères/bitume/textiles	Toiture, terrasse, etc.
Pneumatiques	Caoutchouc/toile/acier	Automobile
Stratifiés	Résine/charges/fibres de verre, de carbone, etc.	Domaines multiples
Plastiques renforcés	Résines/microsphères	
2. <i>Composites à matrice minérale</i>		
Béton	Ciment/sable/granulats	Génie civil
Composite carbone-carbone	Carbone/fibres de carbone	Aviation, espace, sports, bio-médecine, etc.
Composite céramique	Céramique/fibres céramiques	Pièces thermo-mécaniques
3. <i>Composites à matrice métallique</i>		Espace
	Aluminium/fibres de bore	
	Aluminium/fibres de carbone	
4. <i>Sandwiches</i>		
{ Peaux	Métaux, stratifiés, etc.	Domaines multiples
Ames	Mousses, nids d'abeilles, balsa, plastiques renforcés, etc.	

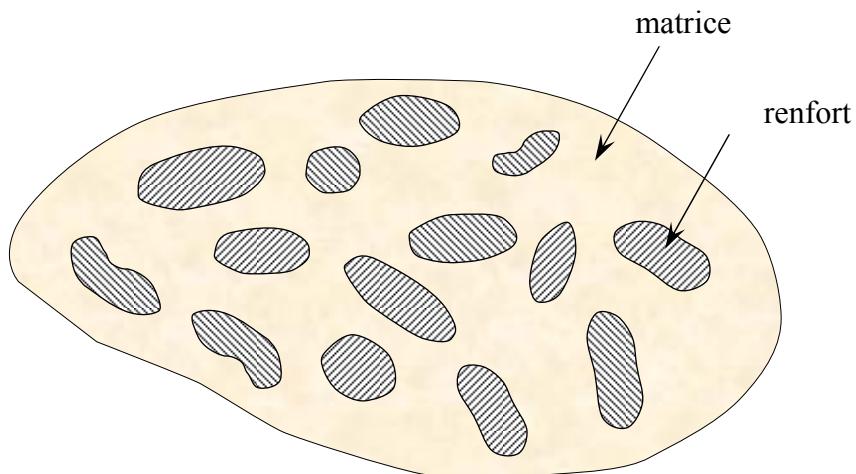


FIGURE 1.1. Matériau composite.

Ainsi, pour accéder à la description d'un matériau composite, il sera nécessaire de spécifier :

- la nature des constituants et leurs propriétés,
- la géométrie du renfort, sa distribution,
- la nature de l'interface matrice-renfort.

La géométrie du renfort sera caractérisée par : sa forme, sa taille, la concentration du renfort, sa disposition (son orientation), etc. Si l'ensemble de ces paramètres concourt à déterminer les propriétés du composite, les modélisations descriptives ne tiendront compte que de certains paramètres, du fait de la complexité des phénomènes mis en jeu. Par exemple, la forme du renfort sera schématiquement approchée soit par des sphères, soit par des cylindres.

La concentration du renfort est habituellement mesurée par la fraction volumique (fraction en volume) ou par la fraction massique (fraction en masse). La concentration du renfort est un paramètre déterminant des propriétés du matériau composite.

Pour une concentration donnée, la distribution du renfort dans le volume du composite est également un paramètre important. Une distribution uniforme assurera une "homogénéité" du matériau : les propriétés du composite seront indépendantes du point de mesure. Dans le cas d'une distribution non uniforme du renfort, la rupture du matériau sera initiée dans les zones pauvres en renfort, diminuant ainsi la résistance du composite.

Dans le cas de matériaux composites dont le renfort est constitué de fibres, l'orientation des fibres détermine l'anisotropie du matériau composite. Cet aspect constitue une des caractéristiques fondamentales des composites : la possibilité de contrôler l'anisotropie du produit fini par une conception et une fabrication adaptées aux propriétés souhaitées.

## 1.2 CLASSIFICATION DES MATÉRIAUX COMPOSITES

Les composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants.

### 1.2.1 Classification suivant la forme des constituants

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres.

#### 1.2.1.1 Composites à fibres

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous forme de fibres. Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues, soit sous forme de fibres discontinues : fibres coupées, fibres courtes,

etc. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de moduler à la carte les propriétés mécaniques des matériaux composites, pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan. Le concepteur possède donc là un type de matériau dont il peut modifier et moduler à volonté les comportements mécanique et physique en jouant sur :

- la nature des constituants,
- la proportion des constituants,
- l'orientation des fibres,

suivant le cahier des charges imposées.

L'importance des matériaux composites à fibres justifie une étude exhaustive de leurs comportements mécaniques. En conséquence, le présent ouvrage sera essentiellement consacré par la suite à l'étude de ce type de matériaux.

### **1.2.1.2 Composites à particules**

Un matériau composite est un composite à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de particules. Une particule, par opposition aux fibres, ne possède pas de dimension privilégiée.

Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait, etc. Dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le coût du matériau, sans en diminuer les caractéristiques.

Le choix de l'association matrice-particules dépend des propriétés souhaitées. Par exemple, des inclusions de plomb dans des alliages de cuivre augmenteront leur facilité d'usinage. Des particules de métaux fragiles tels le tungstène, le chrome et le molybdène, incorporées dans des métaux ductiles, augmenteront leurs propriétés à températures élevées, tout en conservant le caractère ductile à température ambiante.

Les cermets sont également des exemples de composites métal-céramique à particules, adaptés à des utilisations à températures élevées. Par exemple, les cermets à base d'oxydes sont utilisés pour les outils de coupe à vitesse élevée, et pour les protections à hautes températures.

Également, des particules d'élastomère peuvent être incorporées dans des matrices polymères fragiles, de manière à améliorer leurs propriétés à la rupture et au choc, par diminution de la sensibilité à la fissuration.

Ainsi, les composites à particules recouvrent un domaine étendu dont le développement s'accroît sans cesse. Toutefois, compte tenu de leurs diversités, ce type de matériaux ne sera pas étudié dans le cadre de cet ouvrage.

### **1.2.2 Classification suivant la nature des constituants**

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés suivant des composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale. Divers renforts sont associés à ces matrices. Seuls certains couples d'associations

ont actuellement un usage industriel, d'autres faisant l'objet d'un développement dans les laboratoires de recherche. Parmi ces composites, nous pouvons citer :

1. Composites à *matrice organique* (résine, charges), avec :
  - des fibres minérales : verre, carbone, etc.
  - des fibres organiques : Kevlar, polyamides, etc.
  - des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.
2. Composites à *matrice métallique* (alliages légers et ultra-légers d'aluminium, de magnésium, de titane), avec :
  - des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC),
  - des fibres métalliques : bore,
  - des fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de carbure de silicium (BorSiC).
3. Composites à *matrice minérale* (céramique), avec :
  - des fibres métalliques : bore,
  - des particules métalliques : cermets,
  - des particules minérales : carbures, nitrures, etc.

Les matériaux composites à matrice organique ne peuvent être utilisés que dans le domaine des températures ne dépassant pas 200 à 300 °C, alors que les matériaux composites à matrices métallique ou minérale sont utilisés au-delà : jusqu'à 600 °C pour une matrice métallique, jusqu'à 1000 °C pour une matrice céramique.

## 1.3 POURQUOI DES MATÉRIAUX COMPOSITES ?

Nous avons indiqué l'aptitude des matériaux composites à être conçus à la carte. D'autres raisons justifient leur développement, et nous en donnons ici quelques éléments.

### 1.3.1 Caractéristiques mécaniques spécifiques

Considérons une poutre chargée en traction par une charge  $F$  (figure 1.2). La relation entre la charge et l'allongement  $\Delta l$  de la poutre est :

$$F = \frac{ES}{l} \Delta l, \quad (1.1)$$

où  $E$  est le module d'Young du matériau,  $S$  la section de la poutre et  $l$  sa longueur. La rigidité  $K = ES/l$  caractérise les performances mécaniques de la poutre dans le

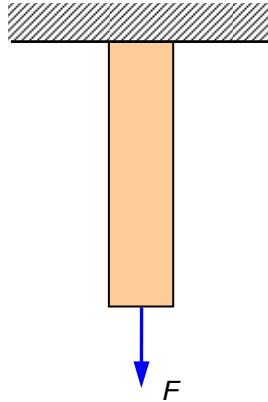


FIGURE 1.2. Poutre chargée en traction.

domaine élastique. Dans le cas de deux matériaux 1 et 2, le rapport des rigidités est :

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{E_1 S_1}{E_2 S_2} \frac{l_2}{l_1}, \quad (1.2)$$

et le rapport des masses des deux poutres s'écrit :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{S_1 l_1}{S_2 l_2} \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad (1.3)$$

en introduisant les masses volumiques des matériaux. La combinaison des relations (1.2) et (1.3) conduit à :

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{E_1/\rho_1}{E_2/\rho_2} \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{l_2}{l_1} \right)^2. \quad (1.4)$$

Dans une structure, l'encombrement des éléments est donné, et la comparaison des rigidités doit se faire à longueurs identiques. Soit, pour  $l_1 = l_2$  :

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{E_1/\rho_1}{E_2/\rho_2} \frac{m_1}{m_2}. \quad (1.5)$$

Enfin, l'utilisation des matériaux dans le domaine de l'espace et de l'aviation, et au-delà dans les domaines du sport, du bâtiment, etc., a conduit à opérer une comparaison des performances mécaniques des structures à masses égales. Pour  $m_1 = m_2$ , le rapport des rigidités s'écrit :

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{E_1/\rho_1}{E_2/\rho_2}. \quad (1.6)$$

Ainsi, il apparaît que le meilleur matériau est celui qui possède la valeur de  $E/\rho$  la plus élevée, conduisant à la valeur de la rigidité la plus élevée de la poutre. Le terme  $E/\rho$  est appelé le module *spécifique* d'Young du matériau.

Un calcul semblable peut être mené dans le cas d'une poutre en flexion trois points soumise à une charge  $F$  (figure 1.3). La relation charge-flèche s'écrit :

$$F = 48 \frac{EI}{l^3} f = Kf, \quad (1.7)$$

où  $f$  est la flèche de la poutre,  $I$  le moment d'inertie de sa section droite et  $l$  la distance entre appuis. Le coefficient  $K$  est la rigidité de la poutre sollicitée en flexion. Dans le cas d'une poutre cylindrique de rayon  $r$ ,

- le moment est donné par  $I = \frac{\pi}{4} r^4$ ,
- la masse s'écrit  $m = \rho \pi r^2 l$ .

Il en résulte que, dans le cas de deux matériaux 1 et 2, le rapport des rigidités s'écrit :

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{E_1/\rho_1^2}{E_2/\rho_2^2} \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^2 \left( \frac{l_2}{l_1} \right)^5. \quad (1.8)$$

Il apparaît donc ici que le meilleur matériau est celui qui possède la valeur  $E/\rho^2$  la plus élevée.

Des raisonnements analogues peuvent être repris pour diverses formes de structures : plaques, coques, structures complexes. La conclusion est toujours de même nature : à masse et encombrement identiques, les constructions les plus rigides sont celles qui possèdent la masse volumique la plus faible. De même, la comparaison des résistances à la rupture conduit à des conclusions semblables sur les contraintes à la rupture. Ainsi, il est devenu usuel de comparer les performances mécaniques des matériaux en considérant les valeurs spécifiques (rapportées à la masse volumique) du module et de la contrainte à la rupture.

### 1.3.2 Caractéristiques mécaniques des matériaux

Partant des considérations précédentes, il reste à rechercher les matériaux les plus performants : module élevé, masse volumique faible. Il est évident également que l'élaboration de ces matériaux ne doit pas aboutir à un coût prohibitif, qui dépend d'ailleurs du domaine d'utilisation. Par exemple, dans le domaine de l'espace, de l'aviation, de hautes performances sont recherchées, et le coût matériau a une incidence faible. Par contre, dans le domaine de l'automobile,

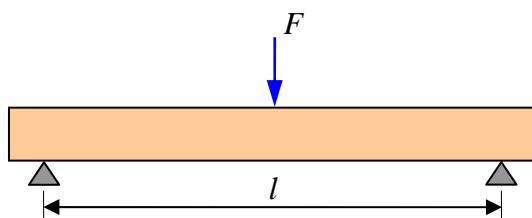


FIGURE 1.3. Poutre chargée en flexion trois points.

l'amélioration des performances ne peut pas se faire au détriment du coût du produit fini. L'incidence du coût matériau est élevée.

Le tableau 1.2 donne les performances spécifiques de matériaux usuels élaborés sous forme massive. Les matériaux traditionnels tels l'acier, les alliages d'aluminium, le bois, le verre ont des modules spécifiques comparables. Par contre, on constate que la contrainte spécifique du verre est nettement supérieure à celle de l'acier et des alliages d'aluminium. D'autre part, il est un fait établi que les contraintes à la rupture mesurées sur les matériaux sont bien plus faibles que les contraintes théoriques. Cette différence est attribuée à la présence de défauts ou de microfissures dans les matériaux. Pour augmenter les valeurs des contraintes à la rupture, il est alors nécessaire de rechercher des processus d'élaboration qui conduisent à une diminution des défauts. Cet objectif est atteint en élaborant les matériaux sous forme de fibres de très faibles diamètres de quelques dizaines de micromètres. Il est évident qu'il est nécessaire de partir de matériaux qui ont déjà des caractéristiques spécifiques élevées, lorsqu'ils sont élaborés sous forme massive. Les caractéristiques mécaniques de matériaux élaborés sous forme de fibres sont reportées dans le tableau 1.3. Ces valeurs montrent nettement l'intérêt de l'élaboration des matériaux sous forme de fibres, relativement à la contrainte spécifique à la rupture. Du fait de leur faible coût, les fibres de verre sont les plus utilisées, avec une rigidité toutefois limitée. Les autres fibres présentent par contre un module spécifique élevé, d'où leur intérêt.

### 1.3.3 Les matériaux composites

Du fait de leurs faibles sections (diamètres de 10 à 20 µm), les fibres ne peuvent toutefois être utilisées directement dans des applications mécaniques. D'où l'idée de les incorporer dans une matrice polymère pour constituer un *composite* à fibres. La matrice a alors diverses fonctions : lier les fibres entre elles, transférer les charges mécaniques aux fibres, protéger les fibres de l'environnement extérieur, etc. Ainsi est né un nouveau matériau, modulable et présentant des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées. Les composants et la structure générale des matériaux composites seront étudiés plus en détail au chapitre 2.

## 1.4 FRACTIONS VOLUMIQUES ET MASSIQUES

### 1.4.1 Introduction

Un des facteurs les plus importants qui déterminent les caractéristiques mécaniques d'un matériau composite est la proportion relative de matrice et de renfort. Cette proportion peut être exprimée soit en fraction volumique (ou fraction en volume), soit en fraction massique (ou fraction en masse). Les fractions massiques sont plus faciles à mesurer lors de l'élaboration des matériaux. Par contre, les fractions volumiques interviennent directement dans les modèles théoriques

TABLEAU 1.2. Caractéristiques spécifiques des matériaux usuels, élaborés sous forme massive.

	Module $E$ (GPa)	Contrainte à la rupture $\sigma_u$ (MPa)	Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Module spécifique $E/\rho$ (MN m/kg)	Contrainte spécifique $\sigma_u/\rho$ (kN m/kg)
Acier	210	340–2 100	7 800	26,9	43–270
Alliages d'aluminium	70	140–620	2 700	25,9	52–230
Bois	30	—	390	33,3	—
Verre	70	700–2 100	2 500	28	280–840
Tungstène	350	1 100–4 100	19 300	18,1	57–210
Béryllium	300	700	1 830	164	380

TABLEAU 1.3. Caractéristiques mécaniques spécifiques des matériaux élaborés sous forme de fibres.

Fibres de	Module $E$ (GPa)	Contrainte à la rupture $\sigma_u$ (MPa)	Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Module spécifique $E/\rho$ (MN m/kg)	Contrainte spécifique $\sigma_u/\rho$ (kN m/kg)
Verre-E	72,4	3 500	2 540	28,5	1 380
Verre-S	85,5	4 600	2 480	34,5	1 850
Carbone à – haut module	390	2 100	1 900	205	1 100
– contrainte élevée	240	3 500	1 850	130	1 890
Kevlar (aramide)	130	2 800	1 500	87	1 870
Bore	385	2 800	2 630	146	1 100

décrivant le comportement mécanique des matériaux. Il est donc nécessaire de savoir passer de l'une à l'autre de ces fractions. Ces expressions seront établies pour un matériau à deux phases, puis étendues à un matériau à plus de deux phases.

### 1.4.2 Fractions volumiques

Considérons un volume  $v_c$  de matériau composite, composé d'un volume  $v_f$  de fibres et d'un volume  $v_m$  de matrice. Par la suite, les indices c, f et m seront

systématiquement utilisés comme indices respectifs des caractéristiques du matériau composite, des fibres et de la matrice. La fraction volumique de fibres est :

$$V_f = \frac{v_f}{v_c}. \quad (1.9)$$

La fraction volumique de matrice est :

$$V_m = \frac{v_m}{v_c}, \quad (1.10)$$

avec

$$V_m = 1 - V_f, \quad (1.11)$$

puisque

$$v_c = v_f + v_m. \quad (1.12)$$

### 1.4.3 Fractions massiques

Les fractions massiques sont définies de la même manière à partir des masses  $p_c$ ,  $p_f$ ,  $p_m$  respectives de matériau composite, de fibres, de matrice. Les fractions massiques ou fractions en masse de fibres et de matrice s'écrivent respectivement :

$$P_f = \frac{p_f}{p_c}, \quad (1.13)$$

$$P_m = \frac{p_m}{p_c}, \quad (1.14)$$

avec

$$P_m = 1 - P_f. \quad (1.15)$$

### 1.4.4 Relations entre fractions volumiques et massiques

Les relations entre les fractions volumiques et massiques font intervenir les masses volumiques  $\rho_c$ ,  $\rho_f$ ,  $\rho_m$  respectives du matériau composite, des fibres, de la matrice. Les masses et volumes sont liés par les relations :

$$p_c = \rho_c v_c, \quad p_f = \rho_f v_f, \quad p_m = \rho_m v_m. \quad (1.16)$$

La masse totale du matériau composite est :

$$p_c = p_f + p_m, \quad (1.17)$$

ou

$$\rho_c v_c = \rho_f v_f + \rho_m v_m. \quad (1.18)$$

La masse volumique du matériau composite s'écrit donc en fonction des fractions volumiques suivant :

$$\rho_c = \rho_f V_f + \rho_m (1 - V_f). \quad (1.19)$$

De même, en partant du volume total du composite :

$$v_c = v_f + v_m, \quad (1.20)$$

nous obtenons :

$$\frac{p_c}{\rho_c} = \frac{p_f}{\rho_f} + \frac{p_m}{\rho_m}. \quad (1.21)$$

D'où l'expression de la masse volumique en fonction des fractions massiques :

$$\rho_c = \frac{1}{\frac{P_f}{\rho_f} + \frac{P_m}{\rho_m}}. \quad (1.22)$$

Les relations entre fractions massiques et fractions volumiques peuvent maintenant être établies, en partant des relations de définition :

$$P_f = \frac{p_f}{p_c} = \frac{\rho_f v_f}{\rho_c v_c} = \frac{\rho_f}{\rho_c} V_f, \quad (1.23)$$

et

$$P_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} V_m, \quad (1.24)$$

la masse volumique du matériau composite étant déterminée par la relation (1.19). Les relations inverses s'obtiennent de la même manière, soit :

$$V_f = \frac{\rho_c}{\rho_f} P_f, \quad (1.25)$$

$$V_m = \frac{\rho_c}{\rho_m} P_m, \quad (1.26)$$

où la masse volumique du matériau composite est déterminée cette fois par l'expression (1.22).

Les expressions précédentes entre fractions volumiques et fractions massiques peuvent être étendues au cas d'un nombre quelconque de constituants. Les expressions générales s'écrivent pour  $n$  constituants :

$$P_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} V_i, \quad (1.27)$$

avec

$$\rho_c = \sum_{i=1}^n \rho_i V_i, \quad (1.28)$$

et

$$V_i = \frac{\rho_c}{\rho_i} P_i, \quad (1.29)$$

avec

$$\rho_c = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{P_i}{\rho_i}}. \quad (1.30)$$

### 1.4.5 Présence de porosités

Il peut arriver que la masse volumique mesurée expérimentalement ne coïncide pas avec la valeur calculée par l'expression (1.22) à partir des masses des constituants introduites. Dans le cas où ce désaccord dépasse les précisions expérimentales, il peut être attribué à la présence de porosité. La différence entre la masse volumique  $\rho_{ct}$  calculée par l'expression (1.22) et la masse volumique  $\rho_{ce}$  mesurée expérimentalement permettra d'estimer la fraction volumique  $V_p$  de porosité par l'expression :

$$V_p = \frac{\rho_{ct} - \rho_{ce}}{\rho_{ct}}. \quad (1.31)$$

La présence de porosité dans un composite peut entraîner une diminution significative de ses caractéristiques mécaniques, en augmentant la dispersion de ses valeurs. La présence de porosité augmente également la sensibilité du matériau composite à l'environnement extérieur : augmentation de l'absorption de l'humidité, diminution de la résistance aux produits chimiques, etc. Il sera donc important d'avoir une estimation de la proportion de porosité, de manière à évaluer la qualité d'un composite. Un matériau composite de qualité contiendra moins de 1 % en volume de porosité, alors qu'un composite de médiocre qualité pourra atteindre 5 %.

## EXERCICES

**1.1** Exprimer la fraction volumique  $V_f$  de fibres d'un composite en fonction de la fraction massique en faisant intervenir le rapport  $\rho_f/\rho_m$  des masses volumiques et le rapport  $(1 - P_f)/P_f$  des fractions massiques de la matrice et des fibres.

**1.2** Tracer la courbe fraction volumique de fibres en fonction de la fraction massique de fibres pour des composites à fibres de verre ( $\rho_f = 2500 \text{ kg/m}^3$ ), à fibres de carbone ( $\rho_f = 1900 \text{ kg/m}^3$ ), de Kevlar ( $\rho_f = 1500 \text{ kg/m}^3$ ), pour une même matrice  $\rho_m = 1200 \text{ kg/m}^3$ .

**1.3** Une structure en composite doit être réalisée en un composite contenant une proportion  $V_f$  en volume de fibres. La structure à réaliser a un volume  $v_c$ . Calculer les masses de fibres et de matrice nécessaires.

Application :  $V_f = 50\%$ ,  $v_c = 0,01 \text{ m}^3$ . Calculer les masses dans le cas des composites considérés dans l'exercice 1.2.

## CHAPITRE 2

# Les Éléments Constituants d'un Matériau Composite

## 2.1 INTRODUCTION

Un matériau composite (pris au sens adopté dans cet ouvrage) est constitué d'une matrice et d'un renfort, constitué de fibres.

La matrice est elle-même composée d'une résine (polyester, époxyde, etc.) et de charges dont le but est d'améliorer les caractéristiques de la résine tout en diminuant le coût de production. D'un point de vue mécanique, l'ensemble résine-charges se comporte comme un matériau homogène, et le composite est considéré comme constitué d'une matrice et d'un renfort.

Le renfort apporte au matériau composite ses performances mécaniques élevées, alors que la matrice a pour rôle de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de protéger les fibres vis-à-vis des agressions extérieures.

Le type d'association matrice-renfort dépend des contraintes imposées au concepteur : caractéristiques mécaniques élevées, tenue en température, coût, résistance à la corrosion, etc.

L'objet de ce chapitre est de dégager une synthèse générale mais non exhaustive des divers constituants. Cette synthèse est abordée avec l'œil d'un mécanicien. Pour une étude plus approfondie, le lecteur pourra se reporter à divers ouvrages [1 à 5].

## 2.2 LES RÉSINES

### 2.2.1 Les divers types de résines

Les résines utilisées dans les matériaux composites ont pour rôle de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et de les protéger de l'environnement extérieur. Les résines doivent donc être assez déformables et présenter une bonne compatibilité avec les fibres. En outre, elles doivent avoir une masse volumique faible de manière à conserver aux matériaux composites des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées.

Compte tenu de ces contraintes, les résines utilisées sont des polymères, modifiés par différents adjuvants et additifs : agents de démolage, stabilisants, pigments, etc. Les résines sont livrées en solution, sous forme de polymères non réticulés en suspension dans des solvants qui empêchent le pontage entre les macromolécules prépolymérisées. Sous l'action de la chaleur, des liaisons se développent entre les chaînes du prépolymère pour constituer un polymère réticulé suivant une structure tridimensionnelle. Deux grandes familles de résines polymères existent : les résines thermoplastiques et les résines thermodurcissables. Ces deux types de résine possèdent la faculté de pouvoir être moulés ou mis en forme, pour donner soit un produit fini, soit un produit semi-fin dont la forme peut être modifiée.

Les résines thermoplastiques, dont la fabrication atteint de loin le plus gros tonnage du fait d'un faible coût, possèdent la propriété de pouvoir être mises en forme plusieurs fois par chauffages et refroidissements successifs. Ces résines peuvent donc être récupérées et facilement recyclées.

Par contre, les résines thermodurcissables ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. En effet, après polymérisation par apport de chaleur en présence d'un catalyseur, ces résines conduisent à une structure géométrique qui ne peut être détruite que par un apport important d'énergie thermique. Ainsi, les résines thermodurcissables possèdent des propriétés mécaniques et surtout thermomécaniques plus élevées que les résines thermoplastiques.

Du fait de ces caractéristiques plus élevées, les résines thermodurcissables sont les plus employées actuellement dans la mise en œuvre des matériaux composites. Cependant, l'amélioration des caractéristiques des résines thermoplastiques conduit à une utilisation qui ne cesse de croître.

Deux autres classes de résines à usages spécifiques sont également utilisées, ce sont :

- les résines thermoplastiques qui peuvent résister en service continu à des températures de l'ordre de 200 °C et plus,
- les élastomères dont le renforcement par différentes fibres conduit à diverses applications dans le domaine de l'automobile.

## 2.2.2 Les résines thermodurcissables

Les principales résines thermodurcissables utilisées dans la mise en œuvre des matériaux composites sont par ordre décroissant en tonnage :

- les résines polyesters insaturées : polyesters condensés, vinylesters, dérivés allyliques, etc.,
- les résines de condensation : phénoliques, aminoplastes, furaniques (peu utilisées en France), etc.,
- les résines époxydes.

### 2.2.2.1 Les résines polyesters

Les résines polyesters insaturées viennent de très loin en tête dans la mise en œuvre des matériaux composites. Leur développement est le résultat :

- d'un faible coût de production,
- de leur diversité offrant de multiples possibilités,
- d'une adaptation à des procédés de fabrication faciles à mettre en œuvre et à automatiser.

D'où un développement industriel sans cesse croissant.

Suivant leur module d'élasticité, les résines polyesters sont classées en : résines souples, résines semi-rigides et résines rigides. Les résines habituellement utilisées dans la mise en œuvre des matériaux composites sont du type rigide, et nous retiendrons pour ces résines durcies les caractéristiques suivantes :

Masse volumique	1 200 kg/m <sup>3</sup>
Module d'élasticité en traction	2,8 à 3,5 GPa
Module d'élasticité en flexion	3 à 4,5 GPa
Contrainte à la rupture en traction	50 à 80 MPa
Contrainte à la rupture en flexion	90 à 130 MPa
Allongement à la rupture en traction	2 à 5 %
Allongement à la rupture en flexion	7 à 9 %
Résistance en compression	90 à 200 MPa
Résistance au cisaillement	10 à 20 MPa
Température de fléchissement sous charge (1,8 MPa)	60 à 100 °C

Parmi les avantages des polyesters insaturés, nous retiendrons :

- une bonne rigidité résultant d'un module d'élasticité assez élevé,
- une bonne stabilité dimensionnelle,
- une bonne mouillabilité des fibres et des tissus,
- la facilité de mise en œuvre,
- une bonne tenue chimique,
- un faible coût de production,
- une bonne résistance chimique aux hydrocarbures (essence, fuel, etc.) à température ambiante, etc.

Parmi les inconvénients, nous noterons :

- une tenue médiocre en température : inférieure à 120 °C en service continu,
- une sensibilité à la fissuration, essentiellement dans le cas de chocs,
- un retrait important de l'ordre de 8 à 10 %,
- un mauvais comportement à la vapeur, à l'eau bouillante avec risque d'hydrolyse, d'où la nécessité de recouvrir les matériaux composites à résines polyesters d'une couche de "gel-coat" de manière à les rendre étanches,
- une dégradation à la lumière par les rayons ultraviolets,
- une inflammabilité.

### 2.2.2.2 *Les résines de condensation*

Les résines de condensation comportent les résines phénoliques, les amionoplastes et les résines furaniques.

1. Les *résines phénoliques* sont les plus anciennes des résines thermodynamiques dont la plus connue est la bakélite. Les caractéristiques de ces résines sont les suivantes :

Massé volumique	1 200 kg/m <sup>3</sup>
Module d'élasticité en flexion	3 GPa
Contrainte à la rupture en traction	40 MPa
Allongement à la rupture en traction	2,5 %
Contrainte à la rupture en flexion	90 MPa
Résistance à la compression	250 MPa
Température de fléchissement sous charge	120 °C

Parmi les avantages, nous citerons :

- une excellente stabilité dimensionnelle,
- une bonne tenue à la chaleur et au fluage,
- une bonne résistance aux agents chimiques,
- un faible retrait,
- de bonnes caractéristiques mécaniques,
- un faible coût.

Parmi les inconvénients, nous noterons :

- une mise en œuvre sous pression, donc à faibles cadences,
- les couleurs foncées des résines,
- une non adaptation à des utilisations alimentaires.

Les résines phénoliques seront donc utilisées dans le cas de pièces nécessitant une tenue élevée en température ou une bonne résistance aux agents chimiques.

2. Les caractéristiques des *résines aminoplastes* sont voisines de celles des résines phénoliques. Aux avantages de ces résines, il faut ajouter :

- la possibilité d'utilisations alimentaires,
- la possibilité de colorer les résines.

3. Les *résines furaniques* sont assez peu utilisées en France à cause de leur coût, trois fois plus élevé que les résines polyesters. Parmi leurs avantages :

- un durcissement plus rapide que les résines phénoliques,
- une grande inertie vis-à-vis des agents chimiques corrosifs.

Cette dernière caractéristique conduit à utiliser les résines furaniques dans le cas de matériaux devant résister aux produits chimiques : citernes, tuyaux, bacs, etc.

### 2.2.2.3 *Les résines époxydes*

Les résines les plus utilisées après les résines polyesters insaturées sont les résines époxydes. Elles ne représentent cependant que de l'ordre de 5 % du marché composite, à cause de leur prix élevé (de l'ordre de cinq fois plus que celui des résines polyesters).

Du fait de leurs bonnes caractéristiques mécaniques, les résines époxydes, généralement utilisées sans charges, sont les matrices des composites à hautes performances (constructions aéronautiques, espace, missiles, etc.).

Les caractéristiques mécaniques générales des résines époxydes sont les suivantes :

Masse volumique	1 100 à 1 500 kg/m <sup>3</sup>
Module d'élasticité en traction	3 à 5 GPa
Contrainte à la rupture en traction	60 à 80 MPa
Contrainte à la rupture en flexion	100 à 150 MPa
Allongement à la rupture	2 à 5 %
Résistance au cisaillement	30 à 50 MPa
Température de fléchissement sous charge	290 °C

Les résines époxydes conduisent donc à un ensemble de performances élevées. Toutefois, pour bénéficier réellement de ces performances, il est nécessaire d'avoir des durées de transformation et surtout de recuisson très longues (de plusieurs heures à plusieurs dizaines d'heures), à des températures relativement élevées (50 à 100 °C).

Parmi les avantages des résines époxydes, nous retiendrons :

- de bonnes propriétés mécaniques (en traction, flexion, compression, choc, fluage, etc.) supérieures à celles des polyesters,
- une bonne tenue aux températures élevées : jusqu'à 150 °C à 190 °C en continu;
- une excellente résistance chimique,
- un faible retrait au moulage (de 0,5 à 1 %),
- une très bonne mouillabilité des renforts,
- une excellente adhérence aux matériaux métalliques.

Parmi les inconvénients, nous citerons :

- un temps de polymérisation long,
- un coût élevé,
- la nécessité de prendre des précautions lors de la mise en œuvre,
- une sensibilité à la fissuration.

### 2.2.3 Les résines thermoplastiques

La famille des résines thermoplastiques (on parle de "plastiques") est très vaste, et peut être séparée en plastiques de grande diffusion et plastiques techniques (ou technopolymères).

Les plastiques de grande diffusion sont mis en œuvre soit par injection pour obtenir des objets moulés, soit par extrusion pour obtenir des films, des plaques, des tubes, des profilés, etc. Les plastiques techniques sont généralement mis en œuvre par injection.

Parmi les résines thermoplastiques, nous citerons : le polychlorure de vinyle (PVC), le polyéthylène, le polypropylène, le polystyrène, le polyamide, le polycarbonate, etc. L'intérêt des thermoplastiques réside dans leur faible coût, résultant à la fois de matières premières disponibles et des procédés de fabrication (injection, extrusion). Toutefois, ce faible coût est lié à des propriétés mécaniques et thermomécaniques faibles. Nous donnons ci-après quelques caractéristiques pour le polypropylène et le polyamide.

	<b>Polypropylène</b>	<b>Polyamide</b>
Masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )	900	1 140
Contrainte à la rupture (MPa)	20–35	60–85
Module d'élasticité (GPa)	1,1–1,4	1,2–2,5
Température de fléchissement sous charge (°C)	50–60	65–100

Les divers thermoplastiques peuvent être renforcés par des fibres et font partie alors des matériaux composites. Cependant, dans le domaine des composites, les résines thermoplastiques ont un développement limité, du fait de la nécessité de faire appel à des transformations à hautes températures de produits solides.

## 2.2.4 Les résines thermostables

Les résines thermostables se distinguent des autres résines, précédemment considérées, essentiellement par leurs performances thermiques qui conservent leurs propriétés mécaniques pour des températures plus élevées que 200°C. Dans la pratique nous retrouvons pour ces résines les deux grandes familles des résines thermoplastiques et thermodurcissables.

Les résines thermostables sont développées surtout dans les domaines de l'aviation et de l'espace, où les laboratoires cherchent à mettre au point de nouvelles résines. Parmi les résines thermostables, les résines bismaléimides et polyimides sont les plus utilisées.

Les résines bismaléimides sont des résines dont le réseau est élaboré à des températures de 180 à 200°C. Les procédés de moulage sont identiques à ceux des composites à matrice thermodurcissable de type polyester ou époxyde.

Les résines polyimides sont apparues sur le marché vers 1970. Ce sont des résines à haute résistance thermique, mais de prix très élevé. Ces résines permettent d'obtenir des composites de résistance supérieure, à 250 °C, à la résistance de l'aluminium.

## 2.3 LES CHARGES ET ADDITIFS

### 2.3.1 Introduction

Différents produits peuvent être incorporés à la résine pour lui conférer des

caractéristiques particulières ou en réduire le coût. La quantité des produits ajoutés peut varier de :

- quelques dizaines de % dans le cas de *charges*,
- à quelques % et moins dans le cas d'*additifs*.

L'addition de ces produits a pour fonction soit d'améliorer les caractéristiques mécaniques et physiques du produit fini, soit d'en faciliter la mise en œuvre. Nous donnons dans ce paragraphe des exemples de charges et d'additifs.

## 2.3.2 Les charges

### 2.3.2.1 Charges renforçantes

L'objet de l'incorporation de charges renforçantes est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine. Ces charges peuvent être classées suivant leur forme géométrique en :

- charges sphériques et
- charges non sphériques.

#### 2.3.2.1.1 Charges sphériques

L'intérêt essentiel de ces charges réside dans leur forme sphérique qui évite les concentrations de contraintes et, par conséquent, diminue la susceptibilité à la fissuration de la matrice par rapport à des charges non sphériques. Les charges sphériques se présentent sous forme de sphères, appelées généralement microbilles ou microsphères. Ces sphères pleines ou creuses ont un diamètre généralement compris entre 10 et 150 µm. Elles peuvent être en verre, en carbone ou en matière organique (époxyde, phénolique, polystyrène, etc.). Les microbilles de verre creuses représentent plus de 99 % des charges sphériques utilisées.

##### *Les microbilles de verre creuses*

Le principal avantage des microbilles de verre creuses réside dans une masse volumique faible (100 à 400 kg/m<sup>3</sup>), apportant une augmentation du module spécifique de la résine chargée et de sa tenue en compression.

La fabrication des microbilles de verre creuses se fait par passage dans une zone à haute température, de fines particules de verre contenant un gaz d'expansion (généralement un mélange d'azote et de gaz carbonique). Lors de l'élévation de température des particules, le gaz est expansé dans la particule de verre en fusion. Les particules sont ensuite refroidies rapidement, provoquant une solidification de la paroi des microbilles avant que la pression du gaz ne diminue. Les microbilles ainsi obtenues ont un diamètre de l'ordre de 20 à 130 µm, avec une épaisseur de paroi de 0,5 à 2 µm. Les microbilles peuvent être ensuite sélectionnées en fonction de leurs dimensions. Les microbilles sont enfin soumises à des traitements de surface permettant d'améliorer la liaison des microbilles avec la résine.

Les microbilles de verre creuses sont le plus souvent incorporées à des résines époxydes ou polyesters. Leur usage est limité à des mises en œuvre à basse pression du fait de la faible résistance à l'écrasement des sphères creuses.

Les avantages essentiels de leur incorporation dans une résine sont :

- la diminution de la masse volumique,
- l'augmentation du module de la résine,
- l'amélioration de la tenue en compression.

### **Autres microbilles**

Il existe d'autres microbilles creuses :

- Microbilles de carbone :

Masse volumique       $120 \text{ kg/m}^3$

Diamètre                 $5 \text{ à } 150 \mu\text{m}$

- Microbilles organiques (époxyde, phénolique, etc.) :

Masse volumique       $100 \text{ à } 500 \text{ kg/m}^3$

Diamètre                 $10 \text{ à } 800 \mu\text{m}$

Ces microbilles sont généralement plus chères (jusqu'à 5 fois pour les microbilles de carbone) que les microbilles de verre.

Parmi les autres microbilles utilisées figurent les microbilles de verre pleines. Par rapport aux microbilles de verre creuses, les caractéristiques des microbilles pleines sont :

- Masse volumique élevée :  $2\ 500 \text{ kg/m}^3$ ,
- Prix plus faible,
- Possibilité de mise en œuvre avec les résines à des pressions élevées.

#### **2.3.2.1.2. Charges non sphériques**

Parmi les charges renforçantes non sphériques, le mica est le matériau le plus utilisé. Il est alors incorporé sous forme d'écaillles de dimensions de  $100 \text{ à } 500 \mu\text{m}$ , et d'épaisseur de  $1 \text{ à } 20 \mu\text{m}$ . Le mica est ajouté à des résines thermoplastiques ou thermodurcissables, pour des applications électriques ou électroniques.

#### **2.3.2.2 Charges non renforçantes**

Les charges non renforçantes ont pour rôle soit de diminuer le coût des résines en conservant les performances des résines, soit d'améliorer certaines propriétés des résines.

##### **2.3.2.2.1. Charges de faible coût**

Ces charges sont extraites de roches ou de minerais, d'où leur faible coût. Généralement, l'incorporation de ces charges conduit à :

- une augmentation :
  - de la masse volumique de la matrice,
  - du module d'élasticité,
  - de la dureté,
  - de la viscosité,
  - de la stabilité dimensionnelle.
- une diminution :
  - du prix,
  - de la résistance à la traction et à la flexion.

Les principales charges sont :

- les *carbonates* : craies ou calcites ( $\text{CaCO}_3$ ). Ce sont les charges les plus utilisées,
- les *silicates* : talc, kaolin, feldspath, wollastonite,
- les *silices*, obtenues par broyage et tamisage de sable de quartz.

### 2.3.2.2. Charges ignifugeantes

Ces charges ajoutées aux résines ont pour rôle de réduire ou d'empêcher les phénomènes de combustion. Parmi les charges solides utilisées dans les résines thermodurcissables, nous citons :

- l'*hydrate d'alumine*, produit le plus utilisé dans les résines thermodurcissables,
- l'*oxyde d'antimoine*.

### 2.3.2.3. Charges conductrices et antistatiques

Les résines organiques sont des isolants thermiques et électriques. Pour certaines applications, il est donc nécessaire d'ajouter un élément conducteur. Les principales charges utilisées sont :

- des poudres ou paillettes métalliques : cuivre, fer, aluminium, etc.,
- des microbilles de verre métallisées (cuivre, argent),
- des particules de carbone (noir de carbone),
- des filaments métalliques.

## 2.3.3 Les additifs

Les additifs se trouvent en faible quantité (quelques % et moins) et interviennent comme :

- lubrifiants et agents de démoulage,
- pigments et colorants,
- agents anti-retrait,
- agents anti-ultraviolets.

### 2.3.3.1. Lubrifiants et agents de démoulage

Ces additifs ont pour objet de faciliter le façonnage de la résine et de réduire la tendance de la résine à adhérer aux moules, aux mandrins, etc.

### 2.3.3.2. Pigments et colorants

Les *pigments* sont des produits insolubles se présentant sous forme de poudres ou de paillettes. Ils sont obtenus à partir d'oxydes ou de sels métalliques. À partir de ces pigments, il est possible d'obtenir des pâtes colorantes constituées de dispersions de pigments dans une pâte (résine, plastifiant), pour une utilisation aisée.

Les *colorants* sont des composés organiques solubles dans un solvant adapté. Leur emploi est limité, du fait d'une mauvaise tenue chimique et thermique.

### **2.3.3.3. Agents anti-retrait et agents de fluage**

La polymérisation des résines conduit à une diminution des distances interatomiques du monomère initial. Il s'ensuit un retrait de la résine polymérisée, qui peut aboutir à un mauvais état de surface, à un gauchissement ou à des microfissurations des pièces moulées. Bien que l'incorporation des charges à la résine en limite le retrait, il est souvent nécessaire d'ajouter des produits spécifiques anti-retrait (additifs dits "low profile" et "low shrink"), qui diminuent ou annulent le phénomène de retrait. Ces produits améliorent également l'écoulement de la matière dans certaines techniques de moulage. Ces agents anti-retrait sont généralement des produits à base de thermoplastiques ou d'élastomères, se présentant sous forme de poudre ou en solution dans du styrène.

### **2.3.3.4. Agents anti-ultraviolets**

Les agents anti-ultraviolets ont pour fonction de protéger les résines de l'action des rayons ultraviolets contenus dans le rayonnement solaire. Le principe de ces agents est d'absorber le rayonnement ultraviolet et d'éviter ainsi une détérioration prématuée de la résine par rupture de liaisons atomiques ou par passage à un état excité qui favorise l'oxydation (phénomène de photo-oxydation).

## 2.4 LES FIBRES ET TISSUS

### **2.4.1 Généralités**

Les matériaux de renfort confèrent aux composites leurs caractéristiques mécaniques : rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc. Ces renforts permettent également d'améliorer certaines des propriétés physiques : comportement thermique, tenue en température, tenue au feu, résistance à l'abrasion, propriétés électriques, etc. Les caractéristiques recherchées pour les renforts sont : des caractéristiques mécaniques élevées, une masse volumique faible, une bonne compatibilité avec les résines, une bonne facilité de mise en œuvre, un faible coût, etc. En fonction des utilisations, les renforts peuvent être d'origines diverses : végétale, minérale, artificielle, synthétique, etc. Toutefois, les renforts les plus utilisés se présentent sous forme de fibres ou formes dérivées, et constituent une fraction volumique du matériau composite généralement comprise entre 0,3 et 0,7. Les renforts fibres se présentent sous diverses formes commerciales :

- sous forme linéique (fils, mèches, etc.),
- sous forme de tissus surfaciques (tissus simples, mats, etc.),
- sous forme multidirectionnelle (tresses, tissus complexes, etc.).

### **2.4.2 Formes linéiques**

Les fibres sont élaborées suivant un diamètre de quelques micromètres (une dizaine), et ne peuvent par conséquent pas être utilisées sous forme unitaire. Pour

leur utilisation pratique, ces fibres sont réunies en fils ou en mèches de différentes formes. La nomenclature générale des diverses formes linéaires est encore mal déterminée, et généralement dérivée de celle utilisée pour les fibres de verre.

La fibre unitaire est généralement appelée filament élémentaire ou *monofilament*. Les monofilaments sont ensuite réunis en *fils* ou *mèches*. Les fils continus ou discontinus sont caractérisés par leur masse linéaire ou titre. Cette masse linéaire est une mesure de la finesse des fils, et elle dépend du diamètre et du nombre de monofilaments. L'unité de masse linéaire est le *tex*, masse d'un fil de longueur égale à 1 000 m. Soit :

$$1 \text{ tex} = 1 \text{ g/km.}$$

En fait, on devrait plutôt écrire :

$$1 \text{ tex} = 10^{-6} \text{ kg/m.}$$

conformément au système S.I. d'unités. La première définition est toutefois mieux adaptée à l'usage pratique.

### 2.4.3 Formes surfaciques

Les fils peuvent être utilisés pour réaliser des formes surfaciques de divers types : mats, tissus ou rubans, essentiellement développés dans le cas de fibres de verre.

#### 2.4.3.1. *Les mats*

Les mats sont des nappes de fils continus ou discontinus, disposés dans un plan sans aucune orientation préférentielle. Ils sont maintenus ensemble par un liant soluble ou non dans les résines, suivant la mise en œuvre. L'absence d'orientation préférentielle des fibres conduit à une isotropie des propriétés mécaniques du mat dans son plan.

La différence entre les mats à fils coupés et les mats à fils continus se situe essentiellement au niveau de leur propriété de déformabilité. Les premiers sont peu déformables alors que les seconds permettent d'obtenir des "emboutis" profonds par un allongement régulier du mat dans toutes les directions. Une des principales applications des mats à fils continus est le moulage entre moule et contre-moule, de pièces pouvant avoir des formes complexes, par compression, injection ou moulage sous vide.

#### 2.4.3.2. *Les tissus et rubans*

Un tissu (ou ruban) est un ensemble surfacique de fils, de mèches, etc., réalisé sur un métier à tisser. Il est constitué (figure 2.1) :

- d'une chaîne, ensemble de fils parallèles répartis dans un plan suivant la longueur du tissu,
- d'une trame, ensemble de fils s'entrecroisant avec les fils de chaîne.

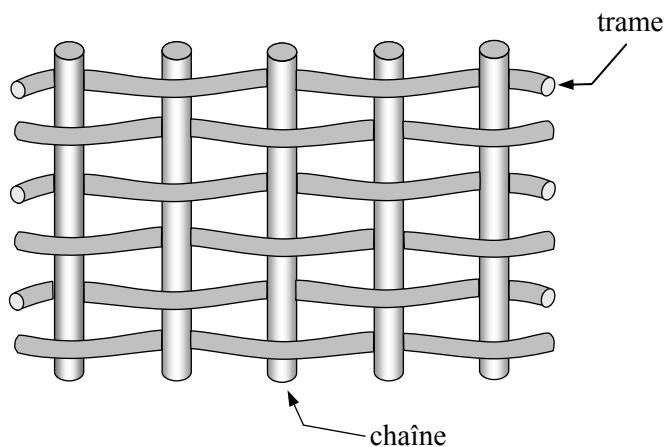


FIGURE 2.1. Chaîne et trame d'un tissu.

Les tissus diffèrent par le type de fils utilisés (fils simples, mèches, etc.), donc par la masse linéique des fils, et par le mode d'entrecroisement (ou *armure*) des fils de chaîne et des fils de trame. La figure 2.2 illustre les armures classiques utilisées : toile ou taffetas, sergé, satin, armure croisée, armure unidirectionnelle.

### **Taffetas**

Dans l'armure taffetas (figure 2.2), les fils de chaîne et de trame s'entrecroisent alternativement, conduisant à un tissu très plat, stable, mais peu déformable. Cette armure confère au tissu des propriétés mécaniques sensiblement identiques dans les deux directions chaîne et trame (pour des fils de tissage identiques). Toutefois, l'armure taffetas conduit à un haut degré de courbure des fibres qui induit une diminution des performances mécaniques des composites.

### **Sergé**

Pour l'armure sergé, le nombre de fils chaîne et de fils trame qui s'entrecroisent peut varier. Dans un sergé  $2 \times 1$ , les fils trame passent sur un fil chaîne et sous deux fils chaînes, et dans un sergé  $2 \times 2$ , les fils trame passent sur deux fils chaîne et sous deux fils chaîne. Ce type d'entrecroisement conduit à un motif répétitif du tissu (Figure 2.16) sous forme de nervures diagonales. L'armure sergé offre l'avantage d'être à la fois souple et dense. Le tissu sergé permet ainsi un glissement entre les fils chaîne et trame et s'adapte bien à des mouvements de formes complexes.

### **Satin**

L'armure satin est assez semblable à celle du sergé, mais le nombre de fils chaîne et de fils trame qui passent les uns sur les autres avant de s'entrecroiser est plus élevé. Chaque tissu satin est caractérisé par un nombre, usuellement 4 ou 8, indiquant que les fils chaîne passent sur 4 ou 8 fils trame. Il en résulte un tissu avec une face qui contient plus de fils chaîne et une autre face plus de fils trame. L'armure satin est bien adaptée au mouvement de formes complexes.

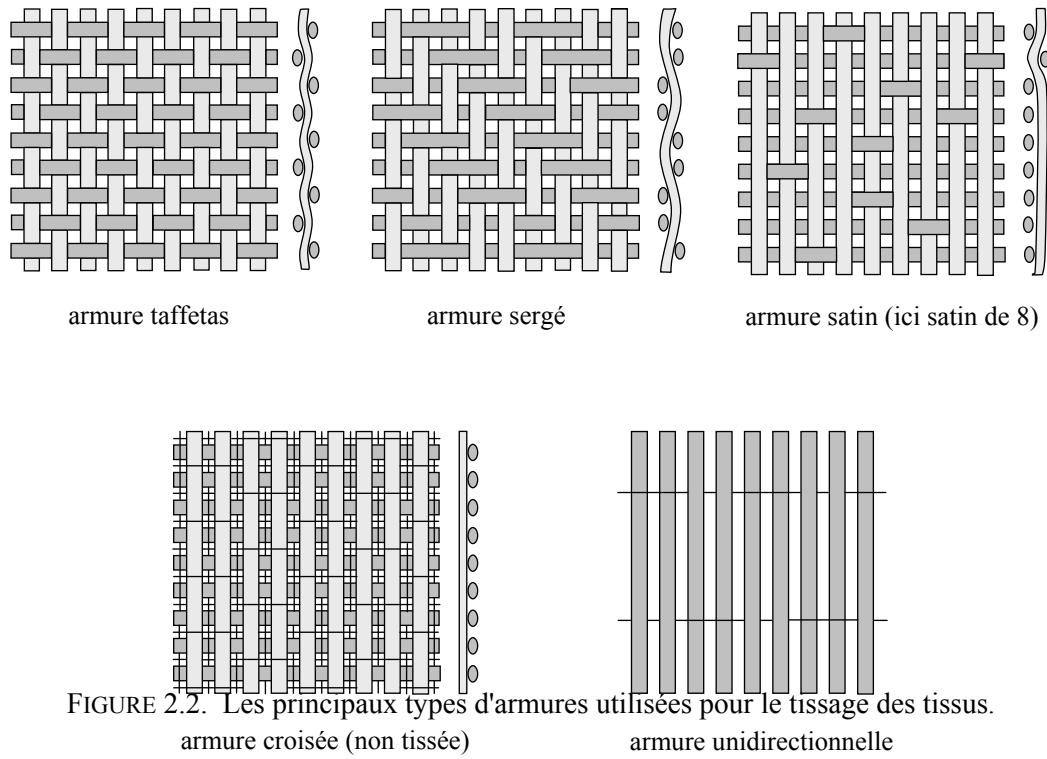


FIGURE 2.2. Les principaux types d'armures utilisées pour le tissage des tissus.  
 — armure croisée (non tissée) — armure unidirectionnelle

### ***Tissu croisé sans entrecroisement***

Dans un tissu croisé, deux nappes de fils sont superposées sans entrecroisement des fils, et réunies par une chaîne et une trame de fils fins, n'intervenant pratiquement pas sur les performances mécaniques du tissu. L'absence d'entrecroisement supprime les effets de cisaillement et donne un tissu très performant mais coûteux.

### ***Tissu à armure unidirectionnelle***

Dans un tissu unidirectionnel, les fils sont alignés parallèlement à la direction chaîne, et ils sont réunis par un fil fin dans la direction trame. Ainsi, le tissu est unidirectionnel avec des performances élevées dans la direction chaîne.

Les performances mécaniques des divers tissus dépendent :

- du type de fils constituant le tissu : nature (verre, carbone, etc.), fils avec ou sans torsion, etc.
- de l'armure. Les armures unidirectionnelles et haut module donnent les meilleures performances. L'armure satin et, à un degré moindre, le serge ont des performances supérieures à celles de l'armure toile.
- de la contexture, par le taux de renfort global et selon chacune des directions chaîne et trame du tissu.

## 2.4.4 Structures tissées multidirectionnelles

### 2.4.4.1 Tresses et préformes

Il est possible de réaliser des tresses ou préformes par tissage cylindrique ou conique d'un tissu tubulaire. Les fils s'entrecroisent en hélice, dont la variation du pas (figure 2.3) permet d'ajuster la tresse à la forme qu'elle doit recouvrir. Il est ainsi possible de réaliser une pièce de révolution ayant un diamètre variable le long de son arc. Par ce procédé, divers tissus peuvent être obtenus en forme de "chaussettes" coniques, ogivales ou hémisphériques, utilisées pour satisfaire aux besoins de la construction aéronautique (cône de rentrée, tuyères, etc.).

### 2.4.4.2 Tissus multidirectionnels

Des tissages volumiques sont également utilisés, et caractérisés par le nombre de directions de tissage : 3D, 4D, etc. La structure la plus simple est celle du tissage 3D, où les fils sont disposés suivant 3 directions orthogonales (figure 2.4). Dans un tissage 4D, les fils sont disposés suivant 4 directions (figure 2.5). L'objectif est d'obtenir des matériaux composites isotropes.

## 2.5 LES PRINCIPALES FIBRES

### 2.5.1 Les fibres de verre

#### 2.5.1.1 Généralités

Le verre sous forme massive est caractérisé par une très grande fragilité, attribuée à une sensibilité élevée à la fissuration. Par contre, élaboré sous forme de fibres de faibles diamètres (quelques dizaines de micromètres), le verre perd ce

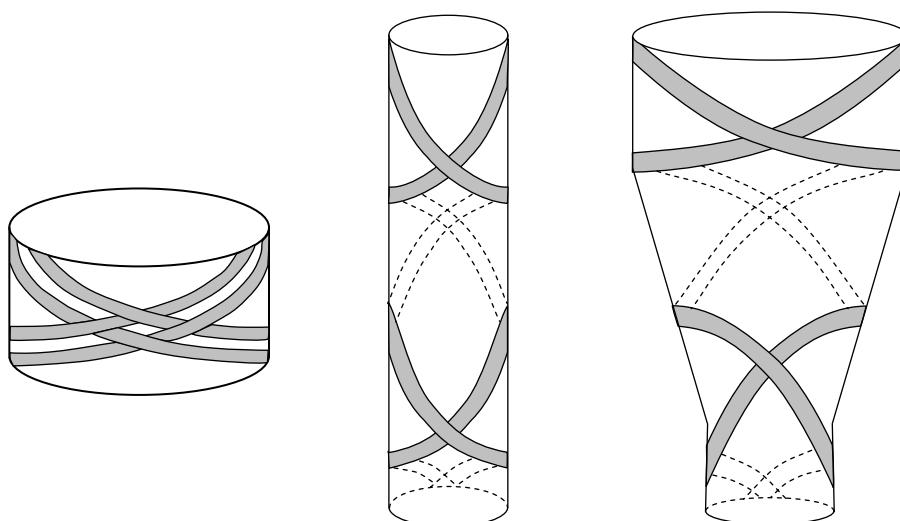


FIGURE 2.3. Tissages cylindrique et conique.

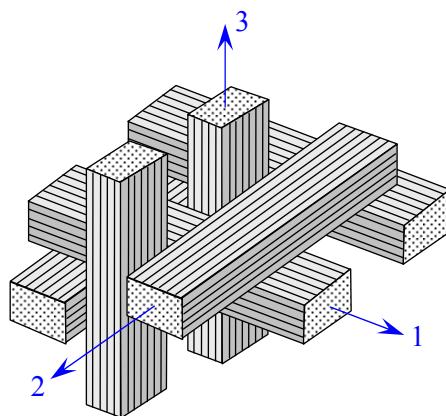


FIGURE 2.4. Tissage 3D orthogonal.

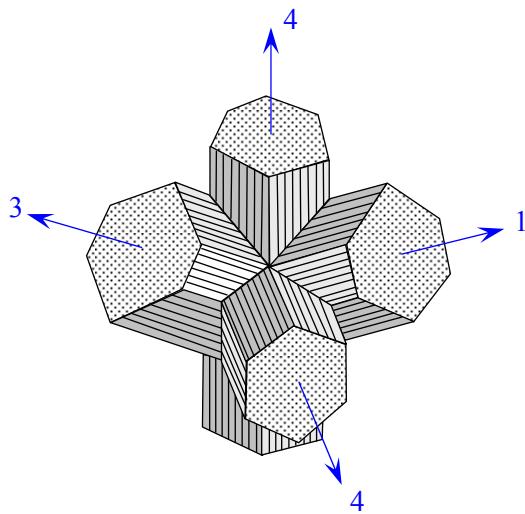


FIGURE 2.5. Tissage 4D.

caractère et possède alors de bonnes caractéristiques mécaniques. Les fibres de verre sont élaborées à partir d'un verre filable, appelé verre textile, composé de silice, alumine, chaux, magnésie, etc. Ces produits peu coûteux, associés à des procédés assez simples d'élaboration, confèrent aux fibres de verre un excellent rapport performances/prix, qui les place de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans les matériaux composites.

Suivant leurs compositions, différents types de verres filables peuvent être obtenus (tableau 2.1). Dans la pratique, les verres de type E constituent la presque totalité du tonnage de verre textile produit actuellement. Les autres verres, représentant globalement une faible quantité (environ 1 %), sont réservés à des applications spécifiques :

- le verre D, à hautes propriétés diélectriques, pour la construction de matériel électronique de télécommunications, en particulier les radomes;
- le verre C, résistant aux agents chimiques pour les couches superficielles des structures particulièrement exposées sur le plan chimique;
- les verres R et S, à caractéristiques mécaniques élevées pour la réalisation de structures à hautes performances mécaniques.

TABLEAU 2.1. Différents types de verres filables.

Type	Caractéristiques générales
E	à usage général; bonnes propriétés électriques
D	hautes propriétés diélectriques
A	haute teneur en alcali
C	bonne résistance chimique
R, S	haute résistance mécanique

Nous ne considérerons par la suite que les fibres de verre de type E et de type R, dont les compositions sont reportées au tableau 2.2. Il est à noter la très faible proportion ou l'absence d'oxydes alcalins à la différence des verres d'usage courant. Ce fait conduit à des températures de transformation élevées, avec des conséquences techniques et économiques.

### 2.5.1.2 Élaboration des fibres de verre

Les fibres de verre sont élaborées par fibrage du verre fondu (figure 2.6) à travers des filières, sortes de bacs réalisés en alliage platine-rhodium, et percés à leurs bases d'orifices calibrés d'environ 2 mm de diamètre. Le verre fondu est maintenu dans les filières, chauffées par effet Joule, aux environs de 1 250 °C. À cette température, la viscosité du verre permet un écoulement par gravitation à travers les orifices, sous forme de fibres de quelques dixièmes de millimètres. À la sortie de la filière, le verre en phase plastique est simultanément étiré à grande vitesse et refroidi. Les conditions de refroidissement et de vitesse d'étirage permettent d'obtenir des fibres discontinues de diamètres différents (généralement

TABLEAU 2.2. Compositions des verres de type E, D et R.

Constituants	Composition en masse (%)		
	Verre E	Verre D	Verre R
Silice	SiO <sub>2</sub>	53–54	73–74
Alumine	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	14–15,5	25
Chaux	CaO	20 - 24	0,5 - 0,6
Magnésie	MgO		9
Oxyde de bore	B <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	6,5–9	6
Fluor	F	0-0,7	22–23
Oxyde de fer	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	< 1	
Oxyde de titane	TiO <sub>2</sub>		0,1–0,2
Oxyde de sodium	Na <sub>2</sub> O	< 1	
Oxyde de potassium	K <sub>2</sub> O		1,3 1,5

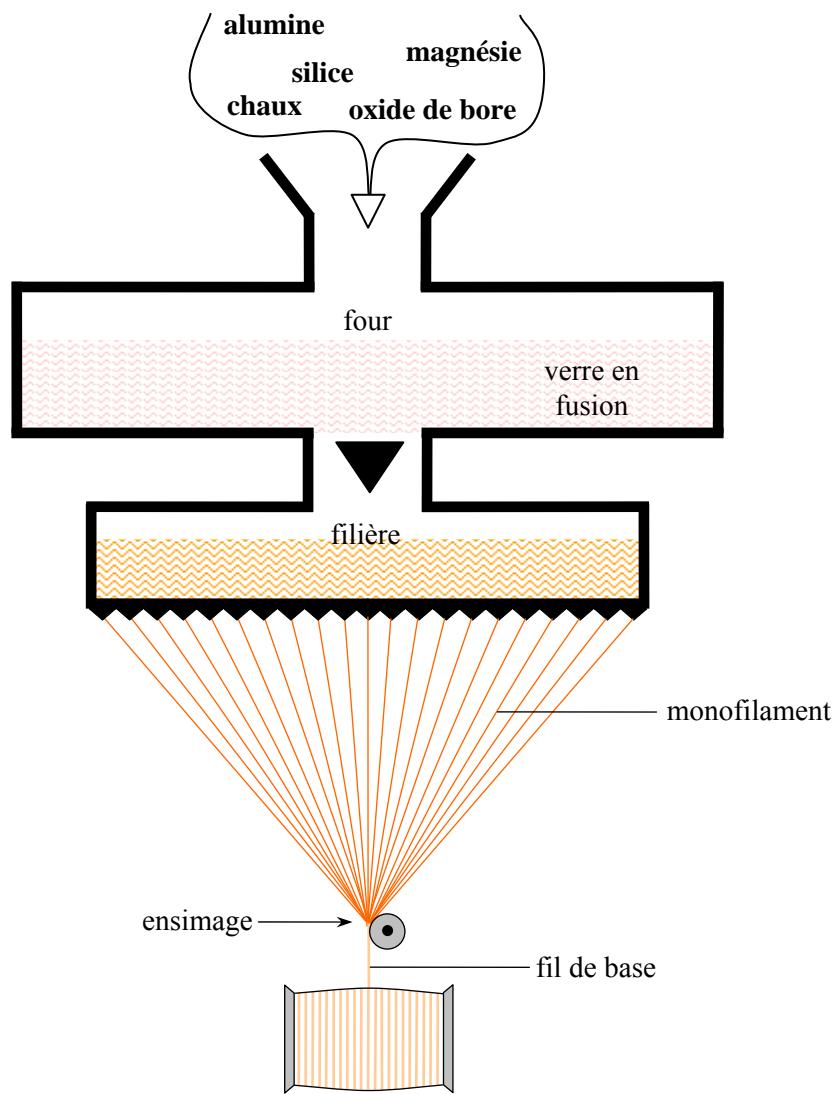


FIGURE 2.6. Schéma de principe du procédé d'étirage mécanique ou silionne.

de 5 à 15 µm).

Les monofilaments sont ensuite rassemblés sans torsion pour constituer un fil de base (appelé fil silionne), qui est enroulé sur une bobine ou sous forme de pelote. Ces fils de base sont les plus utilisés comme renforts verre dans les matériaux composites.

Des fibres de verre discontinues peuvent également être élaborées et assemblées suivant un assemblage appelé *verranne*. Les fils verranne se distinguent des fils continus par un aspect pelucheux.

### 2.5.1.3 *Ensimage des fibres de verre*

Les filaments de verre issus de la filière ne peuvent pas être utilisés directement pour diverses raisons :

- l'absence de cohésion entre les filaments, qui s'oppose à la constitution de fils;
- la sensibilité du verre à l'abrasion, conduisant à une détérioration lors des manipulations postérieures au fibrage;
- la sensibilité à l'attaque de l'eau;
- la création de charges électrostatiques consécutive aux divers frottements.

Pour pallier ces défauts, on réalise à la sortie de la filière une opération dite d'ensimage, qui consiste à déposer à la surface des filaments de verre un produit d'ensimage de composition complexe. A la lumière des défauts évoqués ci-dessus, les diverses fonctions de l'ensimage sont :

- établir une certaine cohésion entre les filaments;
- donner une plus ou moins grande raideur aux fils (un fil destiné à être coupé doit être raide, un fil destiné au moulage ou au tissage doit être souple);
- protéger les filaments contre l'abrasion;
- éviter l'apparition de charges électrostatiques;
- faciliter l'imprégnation des filaments par la résine (mouillage superficiel et pénétration au cœur des filaments);
- favoriser la liaison verre-résine dont dépendent les performances mécaniques du composite, mais également le comportement du matériau au vieillissement, la sensibilité à l'humidité, à la corrosion, etc.

#### **2.5.1.4 Propriétés mécaniques des fibres de verre**

Il est de coutume de donner comme caractéristiques mécaniques de référence les caractéristiques mesurées sur monofilaments prélevés à la sortie de la filière. Le tableau 2.3 donne les valeurs usuelles de ces grandeurs.

À la suite du fibrage, les filaments de verre sont soumis à diverses sollicitations mécaniques (abrasion, etc.), chimiques (humidité, etc.) qui réduisent leurs caractéristiques mécaniques initiales. Le tableau 2.4 donne les valeurs de la contrainte à la rupture, mesurées sur monofilaments et fils de base ayant subi un ensimage. Les valeurs obtenues semblent indiquer une chute des caractéristiques lorsque le nombre de filaments augmente. En fait, les valeurs mesurées sur les fils

TABLEAU 2.3. Caractéristiques mécaniques des verres types E et R, mesurées sur filaments à la sortie de la filière.

Caractéristiques			Verre E	Verre R
Masse volumique	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	2 600	2 550
Module d'Young	$E_f$	GPa	73	86
Contrainte à la rupture	$\sigma_{fu}$	MPa	3 400	4 400
Allongement à la rupture	$\varepsilon_{fu}$	%	4,4	5,2
Coefficient de Poisson	$\nu_f$		0,22	—

TABLEAU 2.4. Contraintes à la rupture mesurées sur monofilaments et fils de base (en MPa).

	Verre E	Verre R
Monofilament prélevé à la sortie de la filière	3 400	4 400
Monofilament prélevé sur fil sillionne industriel	2 000–2 400	3 600
Fil sillionne industriel comportant un grand nombre de filaments	1 200–1 550	1 700–2 000

TABLEAU 2.5. Caractéristiques à la rupture d'un fil sillionne industriel, déduites des caractéristiques mesurées sur un composite unidirectionnel résine époxyde/fil de verre.

	Verre E	Verre R
Contrainte à la rupture (MPa)	2 400–2 600	3 000–3 600
Allongement à la rupture (%)	3,4	4

ne sont pas réellement significatives en raison des difficultés à charger simultanément et uniformément tous les filaments constituant le fil. Dans les matériaux composites, la liaison verre-résine par l'intermédiaire de l'ensimage assure une répartition assez homogène de la charge. Les mesures, déduites de la rupture de matériaux composites unidirectionnels, conduisent aux valeurs des contraintes et allongement à la rupture des fibres reportées au tableau 2.5.

Ces valeurs, voisines de celles mesurées sur monofilament prélevé sur fil industriel (tableau 2.4), doivent être considérées comme étant représentatives des caractéristiques à la rupture des fibres de verre.

Enfin, il est intéressant de noter que les fibres de verre conservent leurs caractéristiques mécaniques jusqu'à des températures assez élevées, de l'ordre de 200 °C pour le verre E et de 250 °C pour le verre R. Ces fibres sont donc bien adaptées pour le renforcement des résines à tenue thermique élevée.

### 2.5.1.5 *Produits industriels en verre textile*

#### 2.5.1.5.1. Les fils de base

Nous avons vu que les fils de base étaient élaborés par assemblage parallèle sans torsion des monofilaments à la sortie de la filière, pour aboutir soit à des fils continus (fils sillionne), soit à des fils discontinus (fils verranne). Ces fils ne sont qu'un intermédiaire dans l'élaboration des produits industriels en verre textile, et ne présentent pas un intérêt direct pour le fabricant de matériaux composites. Les fils de base sont caractérisés par :

- la désignation du verre utilisé (E, R, etc.),
- le type de fil : sillionne (C : continu) ou verranne (D : discontinu),
- le diamètre nominal des filaments,
- la masse linéique du fil exprimée en tex.

Nous aurons par exemple, le fil de base EC 9 34 : fil silionne de verre E, diamètre des filaments : 9 µm, masse linéique du fil : 34 tex. Cette désignation est conforme à la norme ISO 2078.

#### 2.5.1.5.2. Fibres broyées

Ces fibres sont obtenues par broyage des fils de base. Leur longueur est de l'ordre de quelques dixièmes de millimètre, avec un rapport longueur sur diamètre de 10 à 40 environ. Les fibres broyées sont utilisées pour le renforcement de certaines résines thermoplastiques, de résines de coulée, de mastics, etc.

#### 2.5.1.5.3. Fils de base coupés

Les fils de base coupés sont obtenus par coupe des fils de base silionne. Les longueurs les plus courantes sont : 3, 4,5, 5, 13, 25 et 50 mm. Les fils de base coupés sont utilisés pour le renforcement de divers matériaux, en particulier les résines thermoplastiques.

#### 2.5.1.5.4. Stratifil

Le stratifil (ou “roving” en anglais) est obtenu par assemblage sans torsion de fils de base silionne, et présenté en pelotes (sans tubes) ou en bobines (sur tubes) (figure 2.7).

La désignation du stratifil indique soit la masse linéique, soit le nombre de fils de base (norme ISO 2078). Par exemple, pour le stratifil EC 10 2400 (désignation globale), ou stratifil EC 10 40×60 (désignation complète), EC 10 40 désigne le fil de base, ×60 désigne le nombre de fils de base assemblés sans torsion et 2400 indique la masse linéique globale en tex.

Les divers types de stratifils varient suivant :

- le nombre de fils de base : 2, 8, 15, 30, 60 par exemple ;
- la masse linéique globale : 600, 1 200, 2 400, 4 800, 9 600 tex.

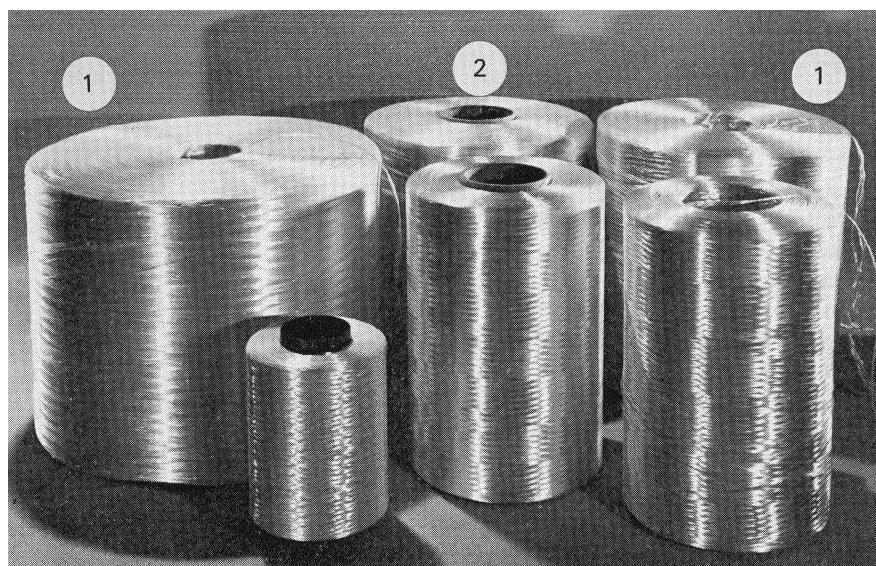


FIGURE 2.7. Différentes présentations des stratifils : 1. Pelotes – 2. Bobines (sur tubes) (Documentation Vetrotex).

Les utilisations du stratifil sont nombreuses :

- coupe pour la fabrication de mats, pour le moulage par projection;
- tissage pour la fabrication de tissus ;
- imprégnation en continu : enroulement filamentaire, pultrusion.

Chez le fournisseur de verre textile, le stratifil constitue une étape dans la fabrication des tissus stratifiés et mats à fils coupés. En excluant cette part, le reste du marché stratifil (moulage, imprégnation, etc.) représente plus de 40 % de l'ensemble du marché du verre textile, tous produits confondus.

#### 2.5.1.5.5. Stratifil bouclé

Le stratifil bouclé (figures 2.8 et 2.9) est constitué par assemblage de fils silionne “bouclés”. Du fait de sa structure, le stratifil bouclé donne des possibilités de renforcement dans la direction transverse (ou voisine) de l'axe des fils. Le stratifil bouclé est essentiellement utilisé dans le tissage des tissus lourds. Ce tissu permet une amélioration de la tenue des stratifiés, en cisaillement interlaminaires entre couches de tissus.

#### 2.5.1.5.6. Mats à fils coupés

Les mats à fils coupés (figures 2.10 et 2.11) se différencient les uns des autres par :

- les caractéristiques du fil de base: type de verre, diamètre nominal, masse linéique, ensimage ;
- les caractéristiques du liage, quelquefois mécanique (aiguilletage), mais généralement chimique. Le taux de liant varie alors d'environ 3 à 15 %, et confère au mat une plus ou moins grande souplesse.

La longueur de coupe du fil de base est généralement de 50 mm. La masse surfacique est couramment de 300, 450 et 600 g/m<sup>2</sup>. Pour des besoins spécifiques, il est possible d'obtenir des produits de masses surfaciennes inférieures à 300 g/m<sup>2</sup>, ou supérieures à 600 g/m<sup>2</sup>, par exemple 900, 1 200 g/m<sup>2</sup>.

#### 2.5.1.5.7. Mats à fils continus

Les mats à fils continus (figures 2.12 et 2.13) sont caractérisés (paragraphe 2.4.3) par une meilleure déformabilité que les mats à fils coupés. Généralement, les mats à fils continus sont élaborés à partir de fils de base ayant une masse linéique faible, de l'ordre de 25 tex, et un diamètre nominal supérieur à celui des fils utilisés pour les mats à fils coupés.

#### 2.5.1.5.8. Tissus (figures 2.14 à 2.18)

Nous avons présenté (paragraphe 2.4.3) les divers types de tissus dans le cas général. Les tissus de verre textile sont présentés en rouleaux :

- soit de grande largeur (figures 2.14 à 2.16), voisine du mètre pour les tissus “silicone” ou “verranne” ou jusqu'à environ 3 m dans le cas des tissus stratifiés ;
- soit de largeur réduite sous forme de rubans (figure 2.17).



FIGURE 2.8. Stratifil bouclé : présentation commerciale (Documentation Vetrotex).



FIGURE 2.9. Stratifil bouclé : vue de détail (Documentation Vetrotex).

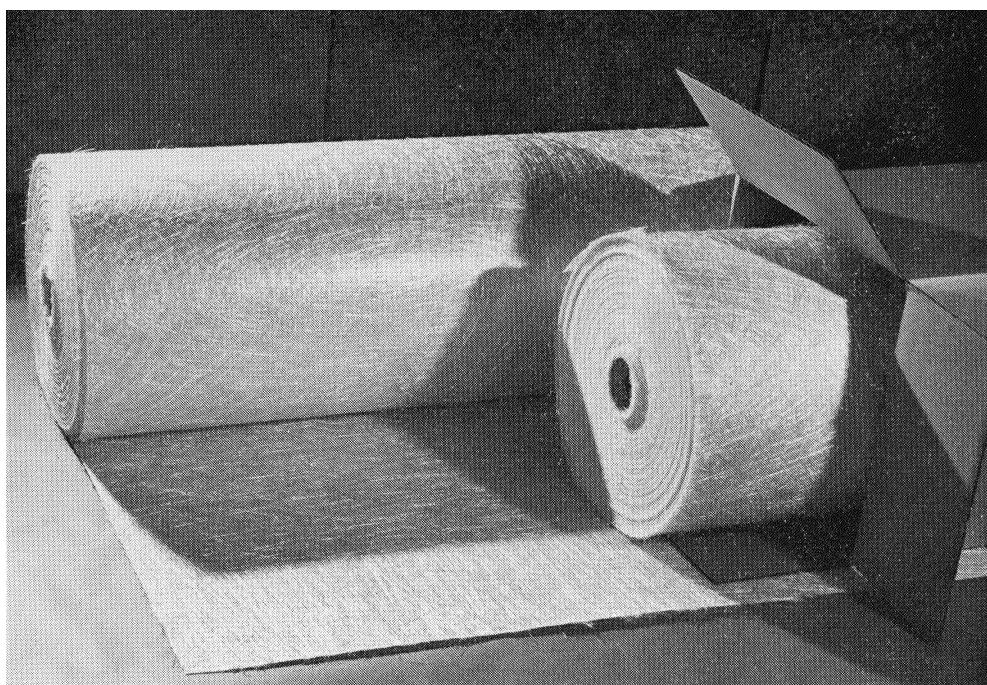


FIGURE 2.10. Présentation commerciale d'un mat à fils coupés (Documentation Vetrotex).

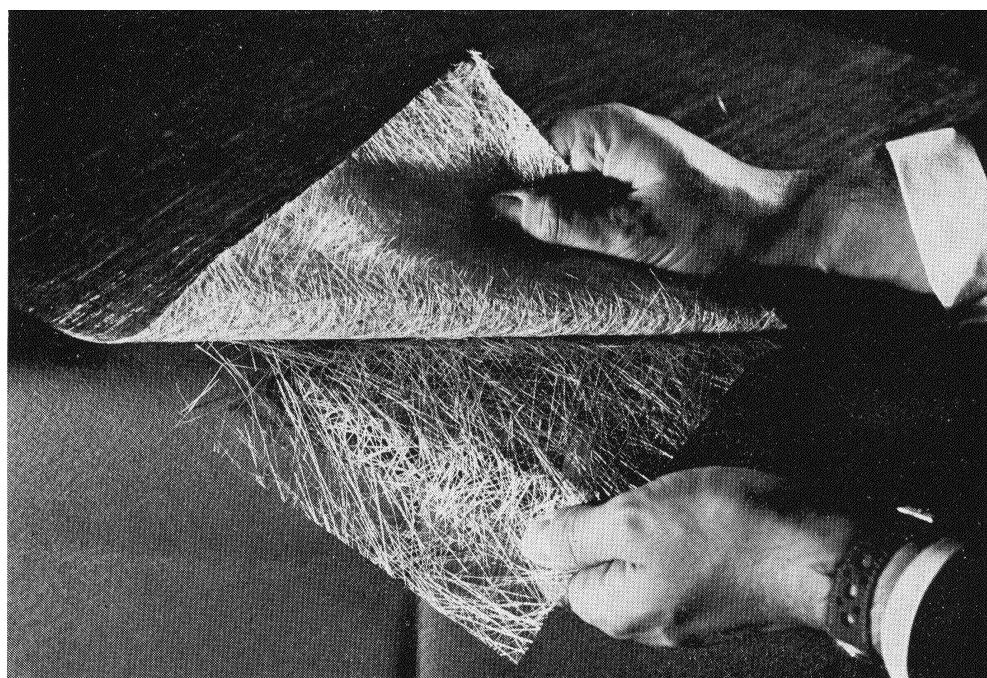


FIGURE 2.11. Vue de détail d'un mat à fils coupés (Documentation Vetrotex).

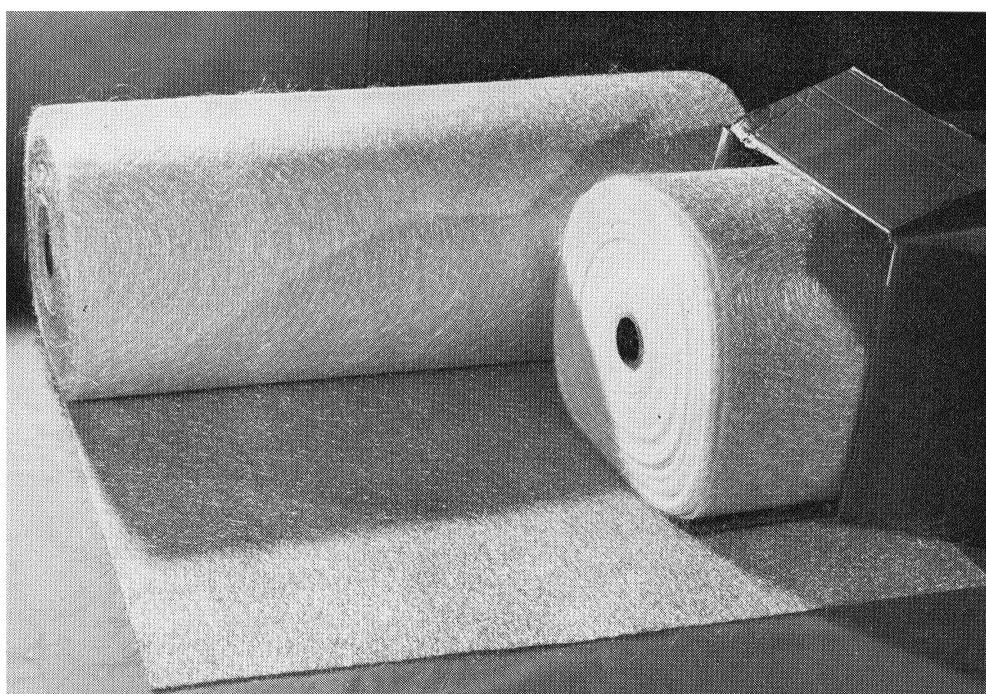


FIGURE 2.12. Présentation commerciale d'un mat à fils continus (Documentation Vetrotex).

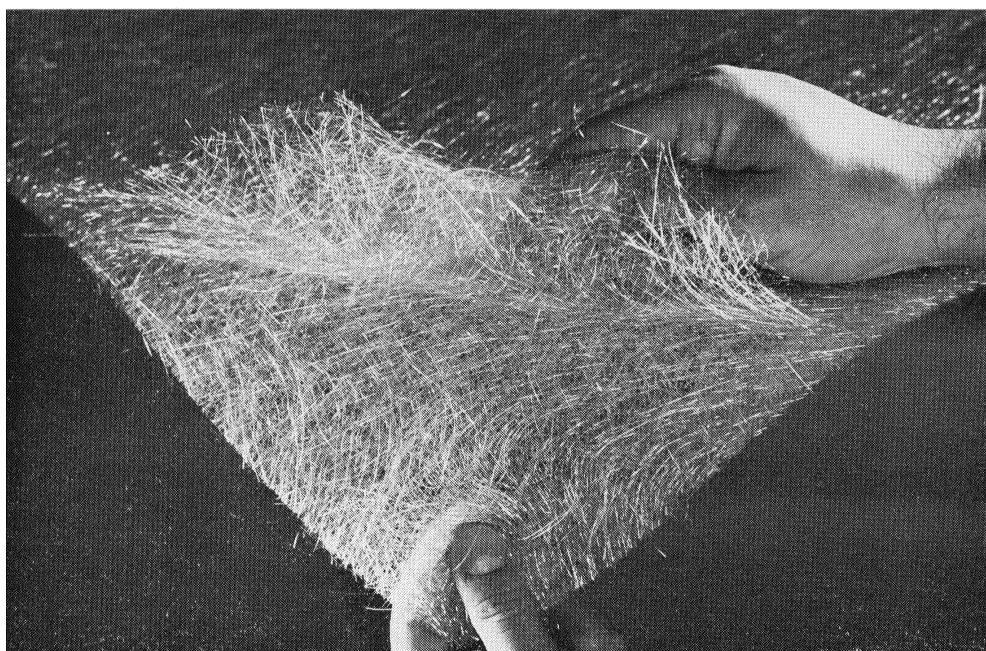


FIGURE 2.13. Vue de détail d'un mat à fils continus (Documentation Vetrotex).

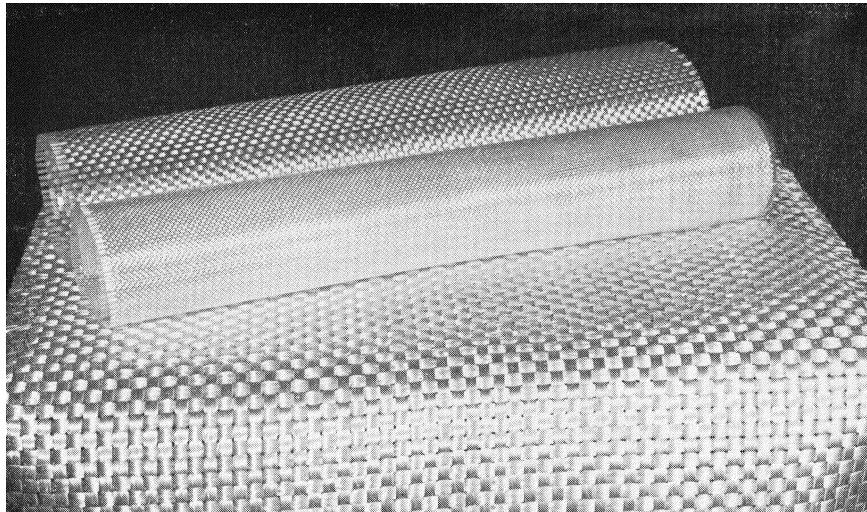


FIGURE 2.14. Exemples de trois tissus, armure toile, réalisés à partir de stratifils de masses linéaires différente : 2 400, 1 200 et 320 tex (Documentation Vetrotex).

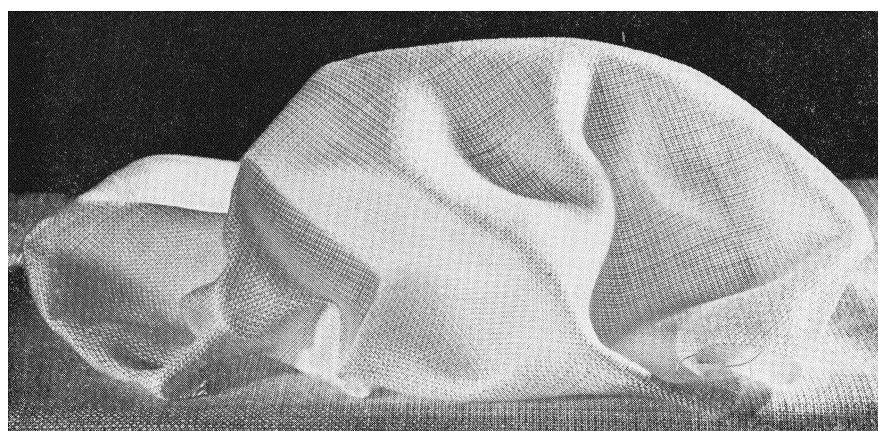


FIGURE 2.15. Tissu verranne, armure toile (Documentation Vetrotex).

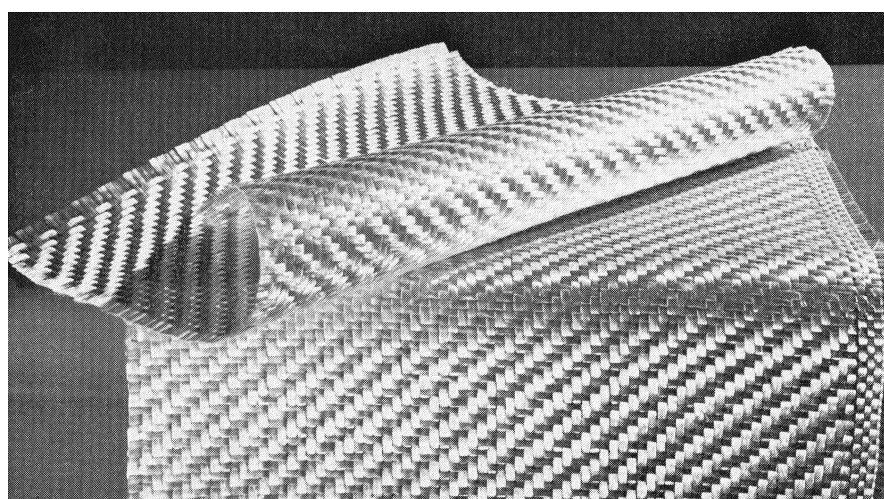


FIGURE 2.16. Tissu stratifil, armure sergé (Documentation Vetrotex).

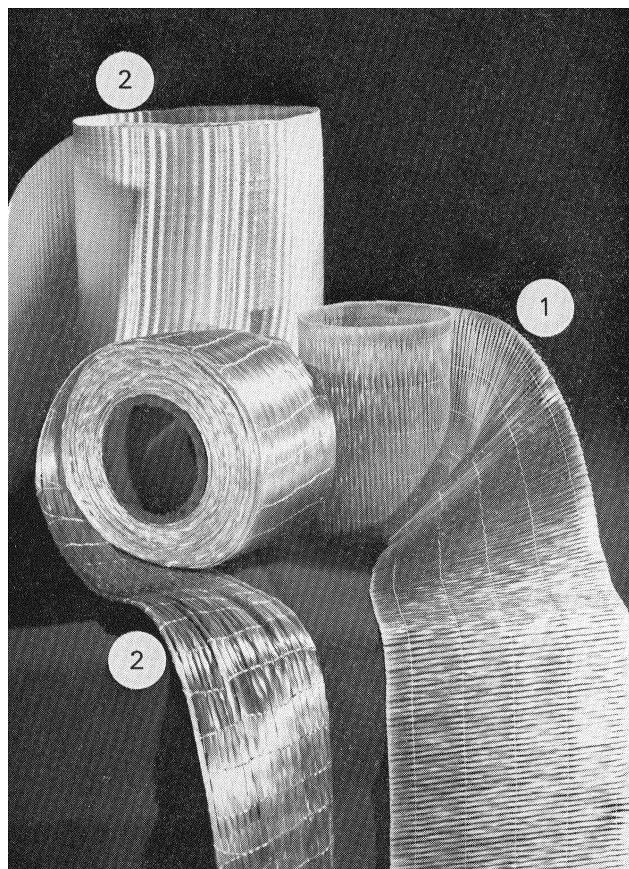


FIGURE 2.17. Tissus stratifiés, armures unidirectionnelles: 1. Tissu unidirectionnel, sens trame, 2. Tissus unidirectionnels, sens chaîne (DocumentationVetrotex).

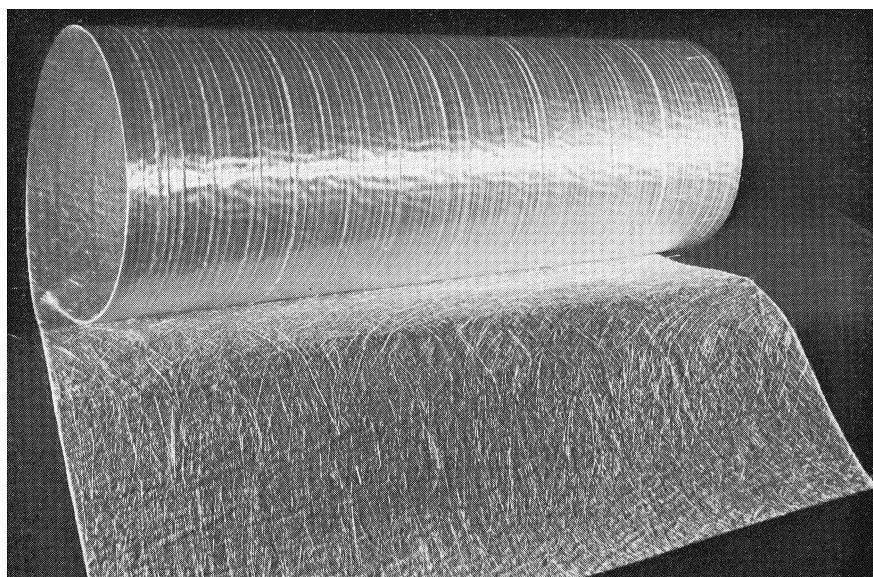


FIGURE 2.18. Complex mat-tissu stratifié unidirectionnel, avec liage chimique (Documentation Vetrotex).

Les masses surfaciques sont fonction de la référence du fil et des paramètres de tissage. Elles s'échelonnent couramment:

- de 50 à 500 g/m<sup>2</sup> pour les tissus silionne ou verranne,
- de 150 à 1 000 g/m<sup>2</sup> pour les tissus stratifiés.

Il existe également des complexes mats-tissus (figure 2.18) mis au point pour répondre à des exigences particulières. Leur principale application est le renforcement de pièces de formes planes ou à grands rayons de courbure, et plus particulièrement de grandes dimensions. Dans de telles pièces sollicitées en flexion, le tissu est disposé dans la zone sollicitée en traction, et le mat dans la zone sollicitée en compression, compte tenu de leurs bonnes adéquations respectives à ces deux types de sollicitations.

## 2.5.2 Les fibres de carbone

### 2.5.2.1 Généralités

Le graphite a une structure hexagonale d'atomes de carbone, disposés en plans cristallographiques parallèles (figure 2.19). Ces plans sont décalés de telle sorte qu'un atome de carbone se projette au milieu d'un hexagone des plans voisins. Les liaisons entre atomes de carbone de plans voisins sont faibles, et confèrent au graphite de bonnes propriétés de conduction thermique et électrique. Par contre, les liaisons entre atomes voisins d'un même plan sont fortes, et donnent au graphite des propriétés mécaniques élevées dans la direction parallèle aux plans cristallographiques. L'étude théorique des liaisons prévoit dans cette direction un module d'Young de 1 200 GPa et une résistance à la rupture de 20 000 MPa. D'autre part, la masse volumique faible (inférieure à 2 000 kg/m<sup>3</sup>) conduit à des

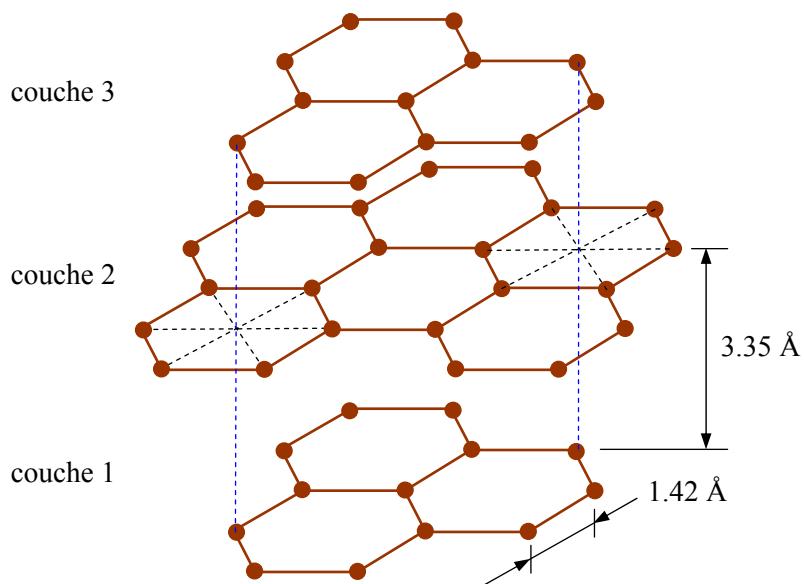


FIGURE 2.19. Structure cristalline du graphite.

propriétés mécaniques spécifiques théoriques remarquablement élevées. Ces faits expliquent les nombreux développements de différents procédés d'élaboration, permettant d'obtenir des fibres de carbone les plus parfaites possibles, et dont la direction des plans cristallographiques soit le plus parallèle possible à l'axe des fibres. Les fibres industrielles n'atteignent toutefois pas les valeurs mécaniques théoriques, du fait des imperfections des structures cristallines obtenues. Les caractéristiques des fibres élaborées restent cependant élevées et peuvent atteindre aujourd'hui pour les fibres les plus performantes de l'ordre de 650 GPa pour le module d'Young et de 4 000 MPa pour la contrainte à la rupture.

### 2.5.2.2 Élaboration des fibres de carbone

#### 2.5.2.2.1 À partir des fibres acryliques

Les fibres de carbone sont élaborées à partir d'un polymère de base appelé *précurseur*, se présentant lui-même sous forme de fibres orientées et réticulées. Actuellement, les fibres utilisées sont les fibres acryliques élaborées à partir du polyacrylonitrile (PAN). Ces fibres acryliques sont connues sous divers noms commerciaux: crylor, courtelle, dralon, orlon, etc. La qualité des fibres de carbone finales dépend des qualités du précurseur.

Le principe d'élaboration est de faire subir aux fibres acryliques une décomposition thermique, sans fusion des fibres, aboutissant à une graphitation dans laquelle on retrouve la structure initiale des fibres. Les procédés actuels utilisent des mèches de filaments acryliques assemblés sans torsion (généralement 500, 1 000, 6 000, 10 000, etc. filaments), et leur font subir quatre traitements successifs: une oxydation, une carbonisation, une graphitation et un traitement de surface (figure 2.20).

**L'oxydation.** Les fibres acryliques étant fusibles, la phase d'oxydation a pour but de supprimer artificiellement le point de fusion. Cette opération est effectuée en chauffant les fibres à environ 300 °C en atmosphère d'oxygène. Il se produit

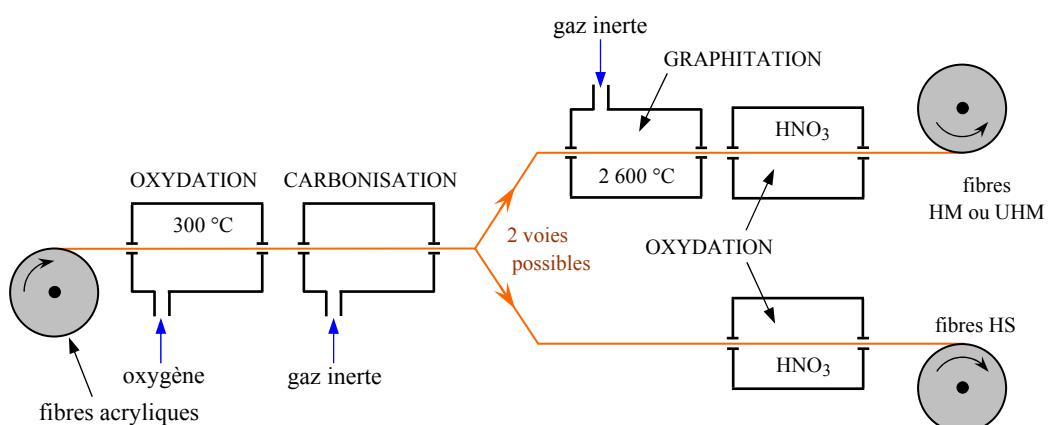
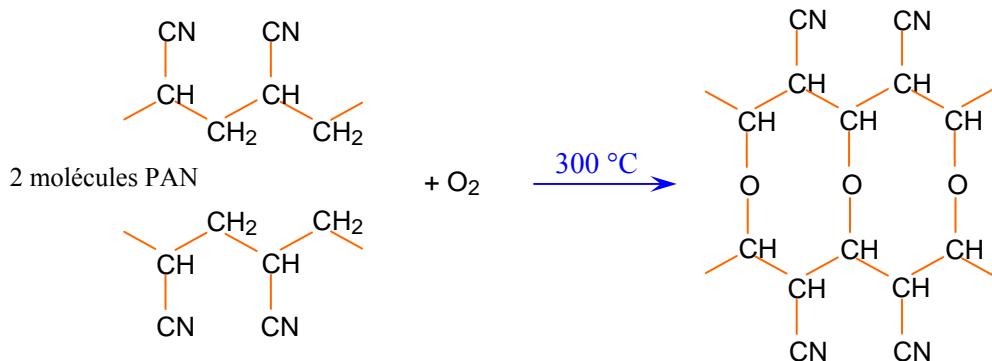
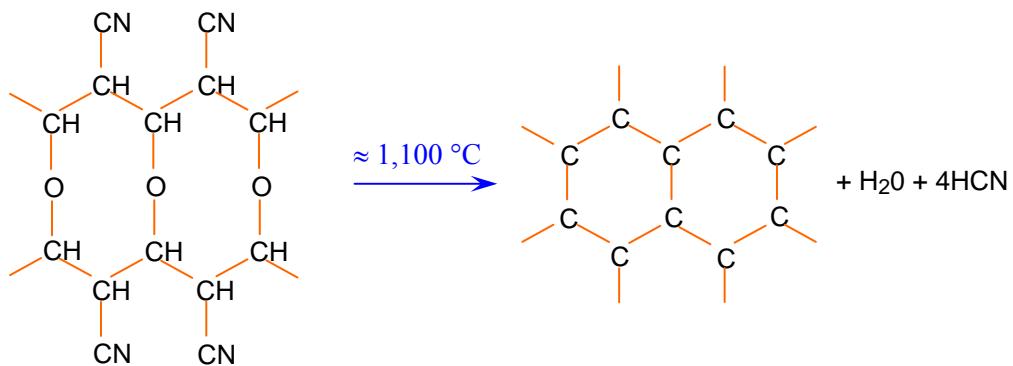


FIGURE 2.20. Élaboration des fibres de carbone.

alors une oxydation conduisant à une réticulation des chaînes moléculaires et à la création d'un réseau tridimensionnel :



**La carbonisation.** La deuxième phase consiste à chauffer progressivement les fibres réticulées de 300 °C à 1 100 °C environ, en atmosphère inerte. Il y a alors élimination de l'eau et de l'acide cyanhydrique, seuls les carbones étant conservés dans la chaîne :



Les fibres obtenues après cette phase ont de bonnes caractéristiques mécaniques et peuvent être utilisées après traitement de surface (figure 2.20). Les fibres sont alors dénommées fibres HR (haute résistance) ou fibres HT (haute ténacité).

**La graphitation.** La phase de graphitation est utilisée lorsque l'on souhaite obtenir des fibres à module d'Young élevé. Cette phase consiste à effectuer à la suite de la carbonisation, une pyrolyse des fibres, en atmosphère inerte, jusqu'à 2 600 °C ou à des températures supérieures. La graphitation provoque une réorientation des réseaux hexagonaux de carbone suivant l'axe des fibres, ce qui aboutit à une augmentation du module d'Young. Toutefois, simultanément à cette réorientation, des défauts se créent dans la structure, entraînant une diminution de la contrainte à la rupture. Suivant le taux de graphitation, on obtient des fibres HM (fibres à haut module) ou des fibres THM (à très haut module).

**Le traitement de surface.** – La dernière phase de l'élaboration consiste en un traitement de surface, par oxydation ménagée en milieu acide (nitrique ou sulfurique). Cette phase a pour objet d'accroître la rugosité des filaments ainsi que la nature des liaisons chimiques, afin d'améliorer la liaison fibre-résine.

### 2.5.2.2.2. À partir du précurseur brai

Depuis les années 1970, des procédés d'élaboration de fibres de carbone ont été développés à partir du brai, qui est un résidu de raffinerie issu du pétrole ou de la houille. Dans ce procédé, le brai est chauffé à 350 °C- 450 °C pour obtenir une mésophase (intermédiaire entre liquide et cristal), puis filé pour améliorer l'orientation. Comme dans le cas du procédé PAN, les filaments sont oxydés et carbonisés, et enfin pyrolyses à des températures supérieures à 2 000 °C pour obtenir des fibres haut module.

Les fibres de carbone produites par ce processus ont divers avantages:

- un rendement massique filaments/précurseur élevé de l'ordre de 75 à 90 % (50 % for le procédé PAN),
- une vitesse de graphitation plus élevée,
- une matière première bon marché.

Le développement de cette technique devrait permettre aux fibres de carbone d'atteindre les grands marchés industriels (type industrie automobile, etc.), par diminution notable du prix de revient, par rapport aux fibres obtenues à l'aide du précurseur PAN.

### 2.5.2.3 Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone

Les fibres de carbone possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques, d'autant plus que leur masse volumique est faible (généralement inférieure à 2 000 kg/m<sup>3</sup>). Le tableau 2.6 compare les caractéristiques des fibres de carbone à celles des fibres de verre E. En outre, il faut noter que les fibres de carbone ont une excellente tenue en température, en atmosphère non oxydante. En effet, leurs caractéristiques mécaniques sont maintenues jusqu'à 1 500 °C environ. Cette propriété a conduit à développer des composites fibres de carbone/matrice de carbone, à haute tenue thermique, utilisés dans les tuyères de fusée, les plaquettes de freins (camions, formule 1, avions), les éléments de fours, etc. Ces matériaux, revêtus d'une couche protectrice anti-oxydante, trouvent également des applications en atmosphère oxydante dans le domaine spatial : bords d'attaque, tuiles, etc.

### 2.5.2.4 Produits industriels

Le produit de base est le fil continu ou stratifil carbone, constitué de mono-filaments de carbone (par exemple: 500, 1 000, 3 000, 6 000, 10 000, etc. filaments) assemblés sans torsion. Ces stratifils peuvent être utilisés directement pour les procédés de fabrication de composites par pultrusion ou par enroulement filamentaire. Les stratifils peuvent également tissés pour obtenir des rubans, des tresses, des tissus unidirectionnels ou multidirectionnels, des tissus hybrides (verre-carbone, Kevlar-carbone).etc.

Ces diverses formes peuvent éventuellement être préimprégnées.

Les stratifils peuvent également être coupés à des longueurs de quelques millimètres et utilisés pour l'élaboration de résines chargées.

TABLEAU 2.6. Caractéristiques des fibres de carbone, comparées à celles des fibres de verre E.

Caractéristiques	Verre E	Carbone HR	Carbone HM	Carbone THM	Carbone HM (brai)
Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2 600	1 750	1 810	1 950	2 000
Diamètre (μm)	10 à 20	5 à 7	5 à 7	5 à 7	12
Module d'Young $E_f$ (GPa)	73	230	400	600	280
Module spécifique $E_f/\rho$ (MNm/kg)	28	130	210	310	140
Contrainte à la rupture $\sigma_{fu}$ (MPa)	3 400	3 000–4 000	2 800	2 000	2 000–2 400
Contrainte spécifique $\sigma_{fu}/\rho$ (kNm/kg)	1 300	1 710–2 290	1 550	1 030	1 000–1 200
Prix de revient rapporté aux fibres de verre E	1*	10–15	30–50	200–400	50–100

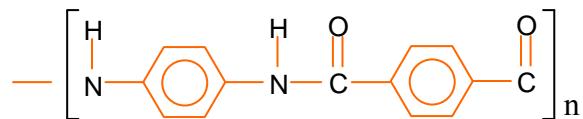
1\* ≈ 4 €/kg en 2009 HM (brai): fibres élaborées à partir du brai.

### 2.5.3 Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées

#### 2.5.3.1 Généralités

Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées sont généralement connues sous le nom de “Kevlar”, nom commercial de la fibre mise au point par Dupont de Nemours (USA), et commercialisée en 1972. D'autres groupes élaborent également des fibres aramides, en particulier le groupe AKZO (Allemagne-Hollande) qui produit des fibres aramides sous la désignation de fibres “Twaron”, et le groupe japonais Teijin Ltd les fibres “Technora”.

Les fibres aramides sont des fibres polyaramides ou polyamides aromatiques de synthèse dont la structure est constituée de noyaux benzéniques reliés par des groupes CO et HN :



L'élaboration des fibres aramides est effectuée par synthèse à basse température (−10 °C), puis par filage en solution. Les fibres sont ensuite étirées et traitées thermiquement pour augmenter leur module d'élasticité.

### 2.5.3.2 Caractéristiques

Les caractéristiques mécaniques des fibres aramides sont reportées dans le tableau 2.7 pour des monofilaments. Sur fils multifilaments, les caractéristiques sont généralement plus faibles. Le tableau montre une contrainte spécifique à la rupture élevée, du même ordre de grandeur que les fibres de carbone haute résistance HR (tableau 2.6), toutefois avec un prix de revient 4 à 6 fois moindre. Néanmoins, leur utilisation est limitée par diverses faiblesses des matériaux composites à fibres aramides :

- résistances faibles à la compression, à la flexion, au flambement;
- sensibilité au cisaillement interlamininaire.

Ces faiblesses sont généralement attribuées à une mauvaise adhérence fibre-matrice. Pour y remédier, des ensimages adaptés sont développés. Des composites hybrides (verre-Kevlar, carbone-Kevlar) sont également utilisés.

### 2.5.3.3 Utilisations industrielles

Les fibres aramides sont disponibles sous forme de stratifils, de tissus, de tresses et de rubans. L'une de leurs premières utilisations grand public a été de remplacer les armatures d'acier dans les pneumatiques, les courroies et les tuyaux. Compte tenu de leur légèreté et de leur bonne résistance au choc, à l'impact et à l'abrasion, les fibres aramides sont utilisées pour la fabrication de certains articles de sports (skis, raquettes de tennis, etc.) et pour la fabrication de protections contre les projectiles (blindages, gilets pare-balles, casques, gants, etc.), de produits de friction et de joints, de renforcement de câbles, etc.

TABLEAU 2.7. Caractéristiques mécaniques de monofilaments aramides.

Caractéristiques	Kevlar 29	Kevlar 49	Kevlar 149	Twaron	Technora
Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1 440	1 450	1 470	1 440	1 390
Diamètre (μm)	12	12	12	12	12
Module d'Young $E_f$ (GPa)	60	120	160	60	90
Module spécifique $E_f/\rho$ (MNm/kg)	42	83	110	42	65
Contrainte à la rupture $\sigma_{fu}$ (MPa)	3 000	3 000	2 400	2 600	2 800
Contrainte spécifique $\sigma_{fu}/\rho$ (kNm/kg)	2 080	2 070	1 630	1 800	2 010
Allongement à la rupture (%)	3,6	1,9	1,5	3	4

## 2.5.4 Les fibres céramiques

### 2.5.4.1 Généralités

Diverses fibres de matériaux réfractaires ou céramiques (carbures, borures, nitrures, etc.) peuvent être élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Actuellement, les fibres obtenues par ce procédé, et faisant l'objet d'une production, sont :

- les fibres de bore (B),
- les fibres de bore (B)-carbure de bore ( $B_4C$ ),
- les fibres de carbure de silicium (SiC),
- les fibres de bore-carbure de silicium, appelées BorSiC.

Les fibres sont en réalité de gros filaments (diamètre de l'ordre de 100 µm), formés d'une âme (le fil support) en tungstène ou en carbone d'un diamètre d'environ 10 µm, recouverts :

- d'une couche de bore d'épaisseur environ 40 µm (fibres de bore),
- d'une couche de bore d'épaisseur 40 µm et d'une couche de carbure de bore de 4 µm d'épaisseur (fibres B-B<sub>4</sub>C),
- d'une couche de carbure de silicium (fibres SiC),
- d'une couche de bore et d'une couche de carbure de silicium (fibres BorSiC).

### 2.5.4.2 Caractéristiques mécaniques et utilisation

Les caractéristiques mécaniques des diverses fibres sont assez voisines (par exemple, tableau 2.8). Ces caractéristiques sont maintenues jusqu'à des températures pouvant aller de 500 à 1 000 °C.

Du fait d'un prix de revient élevé, l'utilisation de ces fibres est limitée. Actuellement, les fibres SiC et BorSiC sont essentiellement utilisées avec des matrices métalliques (aluminium, par exemple) ou des matrices céramiques, conduisant à des matériaux composites de coûts très élevés, utilisés pour les aubes de compresseur, les turbines, etc.

TABLEAU 2.8. Caractéristiques mécaniques des fibres de bore, bore-carbure de bore et carbure de silicium.

Caractéristiques		Bore	Bore + B <sub>4</sub> C	SiC
Masse volumique	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2 600	2 600	3 000
Diamètre	(µm)	100–150	100–150	100–150
Module d'Young	$E_f$ (GPa)	430	430	410
Module spécifique	$E_f/\rho$ (MNm/kg)	165	165	140
Contrainte à la rupture	$\sigma_{fu}$ (MPa)	3 800	4 000	3 900
Contrainte spécifique	$\sigma_{fu}/\rho$ (kNm/kg)	1 460	1 540	1 300

Les fibres de bore et les fibres bore-carbure de silicium sont disponibles sous forme :

- de fils continus constitués de monofilaments parallèles,
- de rubans préimprégnés pour enroulement filamentaire,
- de tissus unidirectionnels.

Ces fibres associées avec des résines époxydes, avec lesquelles l'adhérence est très bonne, ou avec d'autres résines thermoplastiques ou thermodurcissables, sont utilisées dans les domaines des sports et des loisirs.

#### **2.5.4.3 Autres générations de fibres céramiques**

D'autres générations de fibres céramiques en carbure de silicium (SiC) ou carbotitanate de silicium (SiCTi) sont obtenues par la voie précurseur, suivant un procédé comparable à celui de l'élaboration des fibres de carbone via le polyacrylonitrile. Cette voie précurseur conduit, contrairement au procédé précédent, à des fibres céramiques de faibles diamètres. Les caractéristiques mécaniques de ces fibres sont reportées dans le tableau 2.9. Ces fibres présentent une bonne stabilité de leurs propriétés jusqu'à des températures de 1 200 °C à 1 600 °C.

Des fibres céramiques à base d'alumine sont également développées, telles des fibres d'alumine ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), des fibres d'aluminosilicate ( $\text{Al}_2\text{O}_3, \text{SiO}_2$ ), des fibres de boroaluminosilicate ( $\text{Al}_2\text{O}_3, \text{SiO}_2, \text{B}_2\text{O}_3$ ). Les caractéristiques mécaniques des ces fibres, obtenues par voie sol-gel, sont reportées dans le tableau 2.10.

#### **2.5.5 Les fibres synthétiques thermostables**

Les fibres synthétiques thermostables sont des fibres organiques obtenues par synthèse, et qui conservent leurs caractéristiques mécaniques à températures élevées. Associées à des résines thermostables, elles permettent d'obtenir des matériaux dont les caractéristiques mécaniques en température sont conservées. Les caractéristiques mécaniques de ces fibres sont toutefois nettement plus faibles que celles des fibres usuelles. Elles sont utilisées dans les isolants électriques et thermiques, les protections thermiques: boucliers de missiles, cônes de rentrée de véhicule spatial, etc.

#### **2.5.6 Autres fibres**

Il existe diverses autres fibres utilisées pour des applications particulières. Ces fibres sont généralement à faibles module et contrainte à la rupture, excepté les fibres métalliques. Généralement, leur utilisation est réservée à une recherche de :

- produits à bas prix de revient,
- produits à haute isolation thermique,
- produits à bonne conductibilité thermique ou électrique,
- produits à haute absorption acoustique,
- etc.

TABLEAU 2.9. Caractéristiques mécaniques des fibres SiC, SiNC et SiCTi.

Caractéristiques		SiC Nicalon	SiNC HPZ	SiCTi Tyranno
Masse volumique	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2 550	2 350	2 400
Module d'Young	$E_f$ (GPa)	180–200	170	200
Module spécifique	$E_f/\rho$ (MNm/kg)	70–80	70	85
Contrainte à la rupture	$\sigma_{fu}$ (MPa)	3 000	2 400	3 000
Contrainte spécifique	$\sigma_{fu}/\rho$ (kNm/kg)	1 200	1 000	1 250

TABLEAU 2.10. Caractéristiques mécaniques des fibres céramiques à base d'alumine.

Caractéristiques		Alumine $Al_2O_3$	Alumino- silicate $Al_2O_3, SiO_2$	Borosilico- aluminate $Al_2O_3, SiO_2,$ $B_2O_3$
Masse volumique	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	3 400– 3 950	3 100– 3 200	2 700– 3 100
Module d'Young	$E_f$ (GPa)	300–390	190–250	150–200
Module spécifique	$E_f/\rho$ (MNm/kg)	90–100	60–80	55–65
Contrainte à la rupture	$\sigma_{fu}$ (MPa)	1 500– 2 000	2 100– 2 200	1 700– 1 800
Contrainte spécifique	$\sigma_{fu}/\rho$ (kNm/kg)	440–500	685	580–630

Parmi ces fibres nous avons:

1. **Les fibres d'origine végétale**, telles que le bois utilisé sous forme de fibres orientées, le sisal, le jute, le lin, etc.
2. **Les fibres synthétiques**, telles les fibres polyester (tergal, dacron, térylène, etc.), les fibres polyamides, les fibres polyéthylène, les fibres polypropylène, etc.
3. **Les fibres métalliques**, comme les fibres d'acier, de cuivre, d'aluminium. Ces fibres sont utilisées avec des matrices métalliques pour leurs bonnes conductibilités thermique et électrique et leurs caractéristiques thermomécaniques élevées.

## CHAPITRE 3

# Mise en œuvre et Architecture des Matériaux Composites

## 3.1 INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre n'est pas de faire une étude approfondie de la technologie de mise en œuvre des matériaux composites. Il se propose simplement de dégager les principes de différents processus de mise en œuvre, et de constituer une introduction à l'étude du comportement mécanique des matériaux composites.

La plupart des méthodes de mise en œuvre consistent à élaborer les pièces en matériaux composites par couches successives comportant matrice et renfort. Cette technique générale appelée *stratification*, conduisant à l'élaboration de *stratifiés*, nous amènera ensuite à nous intéresser à l'architecture des matériaux composites.

## 3.2 MISE EN ŒUVRE DES MATÉRIAUX COMPOSITES

### 3.2.1 Moulages sans pression

Les méthodes de moulage à froid et sans intervention d'une presse sont les méthodes les plus simples à mettre en œuvre. Elles nécessitent un minimum d'équipement et par conséquent d'amortissement. Cette facilité a été à l'origine du succès des matériaux composites à fibres de verre, dans l'industrie et l'artisanat.

Ces méthodes permettent la réalisation de pièces en petites et moyennes séries, sans restriction de formes et dimensions. Bien que la proportion de fibres puisse varier, elle reste toutefois limitée. Les pièces comportent une seule face lisse, reproduisant l'aspect du moule. Enfin, la qualité de la pièce moulée dépend dans une large mesure du savoir-faire du mouleur.

#### 3.2.1.1 Moulage au contact (figure 3.1)

Avant moulage, le moule est revêtu d'un agent de démoulage, puis généralement d'une fine couche de résine de surface, souvent colorée, dénommée "gel coat".

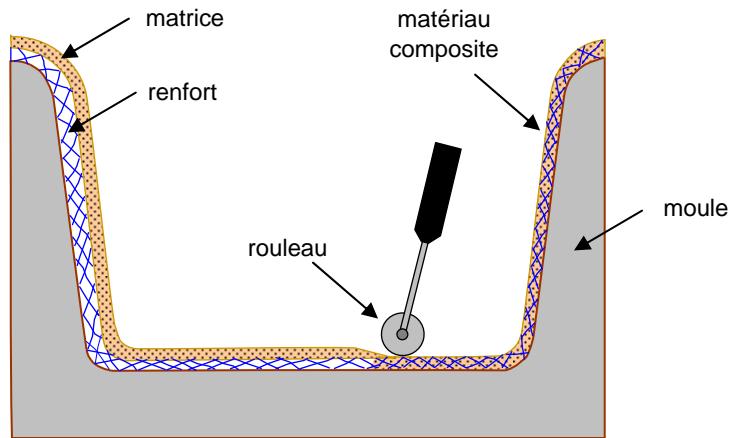


FIGURE 3.1. Principe du moulage au contact.

Le moulage est ensuite effectué selon les opérations suivantes :

1. Le moule est enduit avec de la résine catalysée et accélérée, au pinceau ou au rouleau.
2. Le renfort : mat, tissu, etc., est disposé dans le moule. Divers types de renforts peuvent être utilisés suivant les différentes parties de la pièce. Les renforts doivent alors se superposer.
3. Le renfort est ensuite imprégné avec la matrice, puis un ébullage est effectué avec un rouleau cannelé.
4. Après gélification de la première couche, les couches suivantes sont appliquées, en utilisant la même technique. Des inserts peuvent être mis entre ces couches : tubes, vis, écrous, armatures, etc.
5. Le démoulage est ensuite effectué après un temps qui dépend de la résine et de la température (de l'ordre de 10 heures).
6. La polymérisation est ensuite effectuée en milieu ambiant pendant plusieurs semaines. Cette polymérisation peut éventuellement être accélérée par étuvage (par exemple 5 à 10 heures, aux environs de 80 °C).
7. Après polymérisation, on procède à la finition de la pièce : ébarbage, ponçage, éventuellement peinture, etc.

### **3.2.1.2 Moulage par projection simultanée (figure 3.2)**

Le moulage est effectué par projection simultanée de fibres coupées et résine catalysée sur un moule. L'équipement à projeter est constitué d'une machine à couper le stratifil et d'un pistolet projetant la résine et les fibres coupées, l'ensemble fonctionnant par air comprimé. La couche de fibres imprégnées de résine est ensuite compactée et débarrassée des bulles au rouleau cannelé.

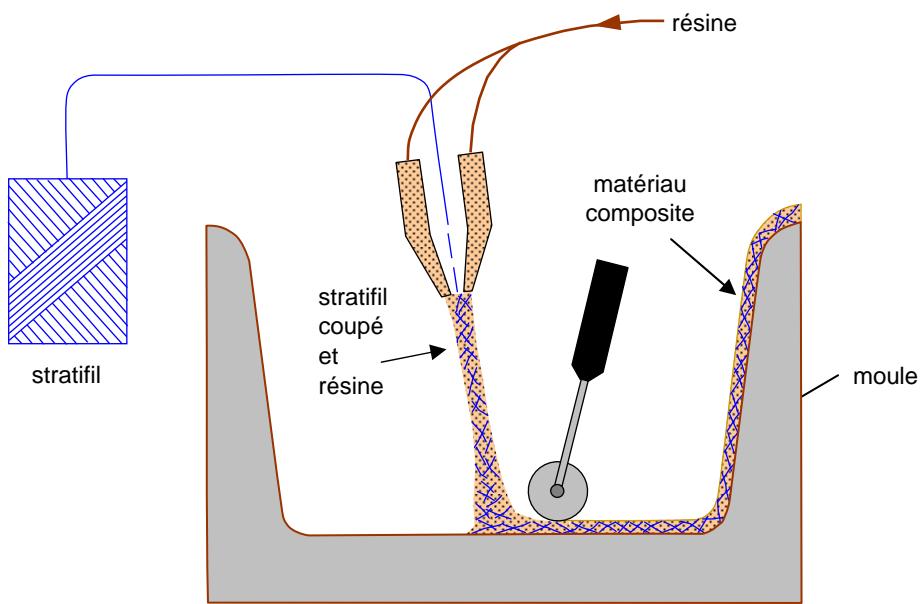


FIGURE 3.2. Principe du moulage par projection simultanée.

Le moulage par projection permet d'obtenir de grandes séries de pièces, avec un bas prix de revient. Le renfort est toutefois limité à des fibres coupées, et les caractéristiques mécaniques du matériau restent moyennes.

Il est possible d'obtenir deux faces lisses en utilisant un moule et contre-moule, chargés séparément, puis accolés. Ce procédé réserve également la possibilité d'interposer une couche de tissu entre les deux, et permet alors d'obtenir des pièces ayant de meilleures caractéristiques mécaniques.

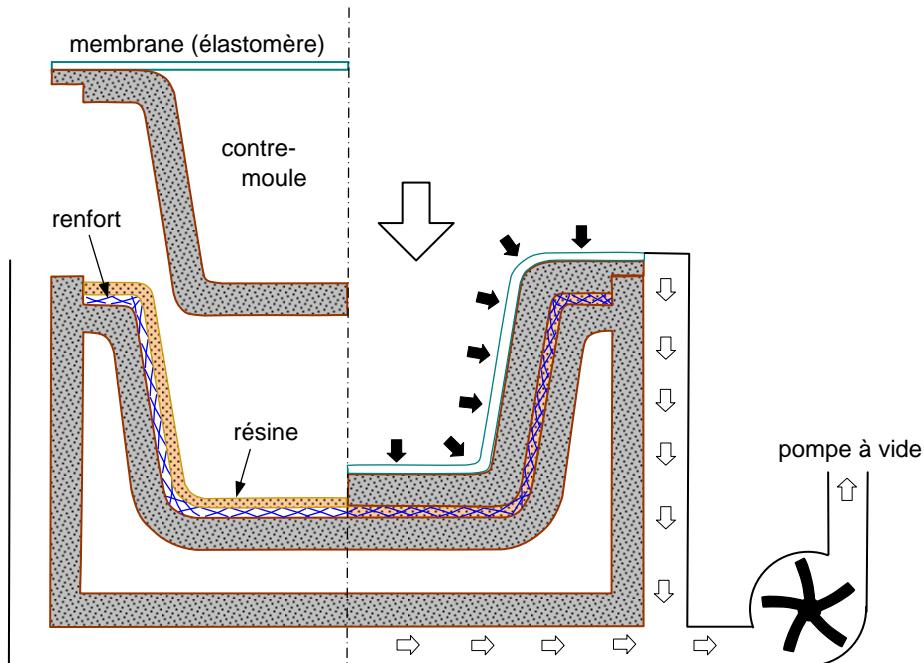


FIGURE 3.3. Moulage sous vide.

### 3.2.2 Moulage sous vide (figure 3.3)

Le moulage sous vide consiste à utiliser simultanément le vide et la pression atmosphérique. Après enduction de gel-coat, on dispose le renfort sur un moule rigide, puis on coule la matrice. Le contre-moule, recouvert d'une membrane assurant l'étanchéité (feuille de caoutchouc, nylon, etc.), est ensuite emboîté. Une pompe à vide crée une dépression à travers le moule et le contre-moule poreux, qui étale et débulle la résine. Le contre-moule peut éventuellement être limité à la seule membrane d'étanchéité.

Ce procédé de moulage convient pour la fabrication de pièces en petites et moyennes séries. Il permet d'obtenir de bonnes qualités mécaniques, grâce à une proportion de résine uniforme et à une diminution des inclusions d'air. Dans le cas de l'utilisation d'un contre-moule rigide, un bel aspect de surface est obtenu sur les deux faces. Les cadences de production sont toutefois assez lentes.

### 3.2.3 Moulage par compression

#### 3.2.3.1 Moulage par injection de résine (figure 3.4)

Le moulage consiste, par injection de résine sous pression, à imprégner un renfort placé à l'intérieur d'un ensemble moule et contre-moule très rigide et fermé. L'alimentation automatique des résines élimine leur manipulation. La proportion de renfort peut être élevée, d'où l'obtention de pièces à caractéristiques mécaniques élevées.

Ce procédé de moulage convient à la réalisation de pièces profondes et de formes compliquées.

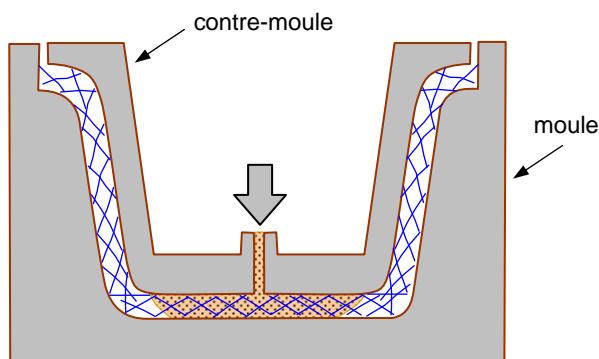


FIGURE 3.4. Moulage par injection de résine.

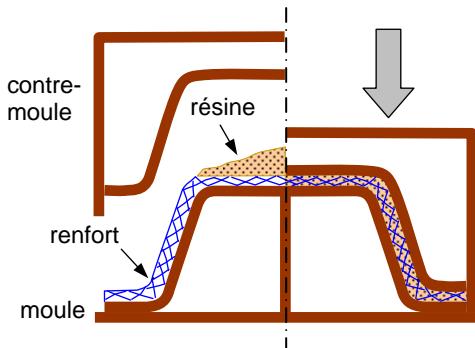


Figure 3.5.1. À froid

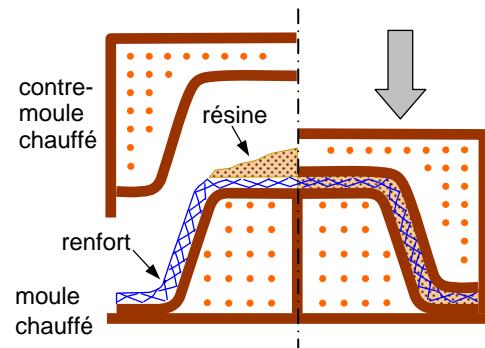


Figure 3.5.2. À chaud

FIGURE 3.5. Principe du moulage par compression.

### 3.2.3.2 *Moulage par compression à froid (figure 3.5.1)*

Le moulage est effectué à basse pression (< 5 bars) sans chauffage du moule, en utilisant l'exothermie de polymérisation de la résine. L'énergie calorifique accumulée par le moulage des pièces est alors suffisante pour maintenir le moule à des températures de 50 à 70 °C, en fonctionnement permanent.

Moule et contre-moule sont enduits d'agent de démoulage et de gel-coat. Puis le renfort et la matrice sont déposés sur le moule. L'ensemble moule/contre-moule est fermé, puis pressé. Le temps de polymérisation est lié au type de résine, au catalyseur et à la température atteinte par le moule en régime continu de production.

Ce procédé de moulage est adapté à la fabrication de pièces de moyennes séries (4 à 12 pièces par heure). L'investissement (matériel et moule) est moins important que le procédé de compression à chaud. La presse basse pression est simplifiée. Les moules peuvent être réalisés par le transformateur en matériaux composites. Les pièces possèdent un bel aspect de surface sur chaque face. La productivité est inférieure au moulage à la presse à chaud.

### 3.2.3.3 *Moulage par compression à chaud (figure 3.5.2)*

Cette technique permet d'obtenir des pièces en grandes séries au moyen de presses hydrauliques et de moules métalliques chauffants.

Le renfort, constitué par du mat à fils coupés ou à fils continus, par des tissus ou par des préformes, est déposé sur le moule chauffant, enduit au préalable d'un agent de démoulage. Puis la résine catalysée est coulée en vrac sur le renfort. Le moule est fermé suivant un cycle déterminé par descente et pressage du contre-moule. Le temps de pressage est lié au temps de polymérisation de la résine,

fonction de la réactivité de la résine et de l'épaisseur de la pièce. Le moule est ensuite ouvert, et la pièce éjectée.

Ce procédé de moulage permet d'obtenir des proportions importantes de renfort, et par conséquent des pièces de bonnes caractéristiques mécaniques. Les dimensions des pièces sont fonction de l'importance de la presse. La pression de moulage est de l'ordre de 10 à 50 bars, la température des moules de l'ordre de 80 à 150 °C. Les cadences de fabrication peuvent atteindre 15 à 30 pièces par heure. Elles nécessitent un investissement important en matériel, presse et moule.

### 3.2.3.4 Moulage par injection (figure 3.6)

La méthode de moulage par injection est la méthode la plus répandue des méthodes de mise en œuvre des thermoplastiques armés (les autres méthodes étant l'extrusion, l'extrusion soufflage, le thermoformage, etc.).

Le moulage par injection est réalisé sur les presses conventionnelles utilisées pour l'injection des résines thermoplastiques.

Des granulés comportant la résine et le renfort (fibres courtes, billes, etc.) ou des mats préimprégnés sont extrudés par une vis d'Archimède. La matrice est fluidifiée par chauffage et injectée sous pression élevée dans un moule chauffé, où a lieu la polymérisation.

Le type de matériaux obtenus est plus généralement appelé "plastiques renforcés" que matériaux composites. En effet, compte tenu de la nature des renforts (fibres courtes, sphères, etc.), la contrainte à la rupture et le module d'Young des résines sont multipliés par un facteur de l'ordre de 2 à 4. Cette technique est adaptée à la production de pièces en très grandes séries.

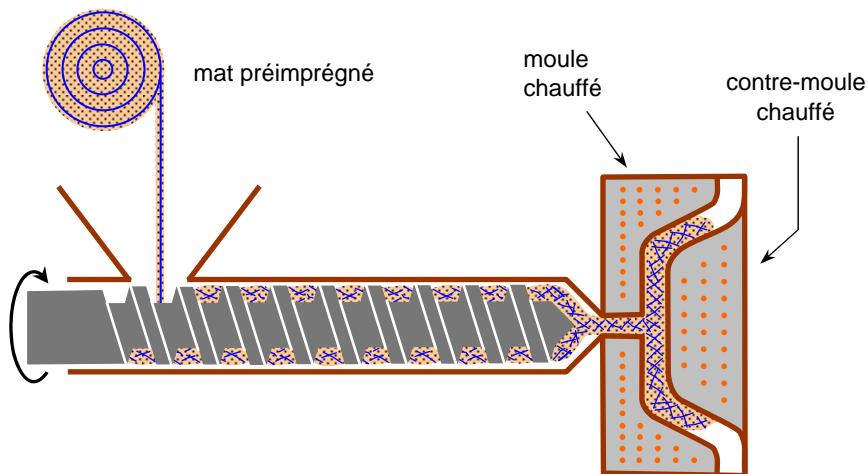


FIGURE 3.6. Moulage par injection.

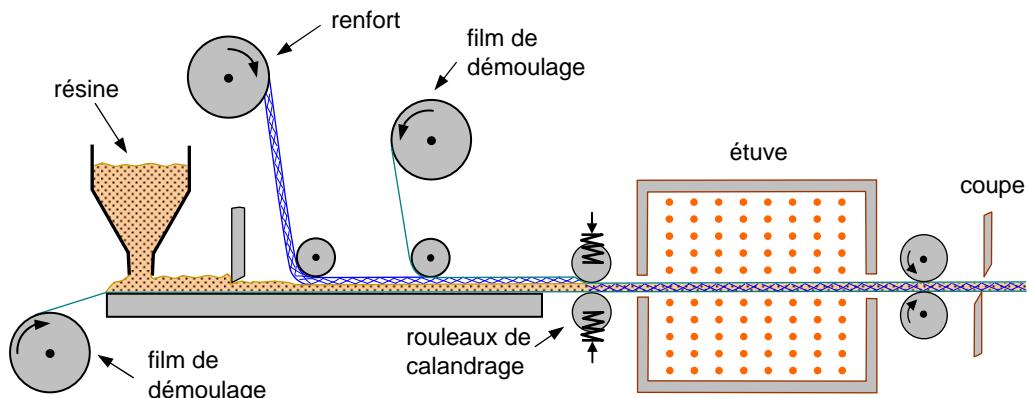


FIGURE 3.7. Moulage en continu de plaques.

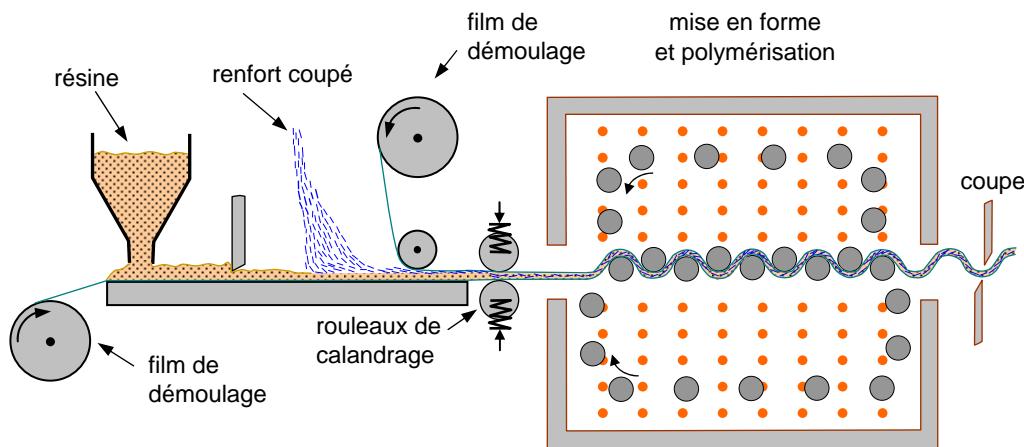


FIGURE 3.8. Moulage en continu de panneaux ondulés.

### 3.2.4 Moulage en continu

Le moulage en continu permet la fabrication de plaques planes, panneaux, sandwiches (figure 3.7), de panneaux ondulés pour toitures (figure 3.8), plaques nervurées, etc.

Schématiquement, ce procédé peut être séparé en plusieurs phases.

1. Une phase d'imprégnation des renforts : fibres, mats ou tissus. La résine catalysée et le renfort sont véhiculés sur un film de démoulage (cellophane, mylar, polyéthylène, etc.).
2. Une phase de mise en forme.

3. Une phase de polymérisation, effectuée dans une étuve (60 à 150 °C) en forme de tunnel, dont la longueur est fonction de la température et de la résine (15 à 50 m de long).
4. Une phase de refroidissement et découpage.

Dans le cas de la fabrication de plaques planes (figure 3.7), la mise en forme est simplement réalisée par une mise à l'épaisseur de la plaque, par pressage entre des rouleaux de calandrage.

Dans le cas de panneaux ondulés, la mise en forme intervient au cours de la polymérisation (figure 3.8), par l'intermédiaire de rouleaux mobiles.

Le procédé de moulage en continu peut être entièrement automatisé, et permet alors d'élaborer des plaques ou panneaux en continu. Il nécessite toutefois un investissement très important en matériel.

### 3.2.5 Moulage par pultrusion

Le procédé de moulage par pultrusion sert pour la fabrication de profilés, rectilignes ou courbes, à section constante, hautement renforcés dans la direction principale.

Dans cette technique (figure 3.9), les renforts : fils, stratifils, rubans, etc., passent dans un bain de résine catalysée où ils sont imprégnés. Ils traversent ensuite une filière chauffée dans laquelle ont lieu simultanément mise en forme du profilé et polymérisation de la résine.

Ce procédé est applicable aux résines thermoplastiques et thermodurcissables. Les profilés obtenus ont des caractéristiques mécaniques élevées, compte tenu de la possibilité d'obtenir des proportions de renfort élevées jusqu'à 80 % en volume. Le procédé est adapté aux productions d'assez grandes séries (vitesse de défilement jusqu'à 20 m/h). Il nécessite un investissement important de matériel. Exemples de fabrication : cannes à pêche, profilés divers, raidisseurs, etc.

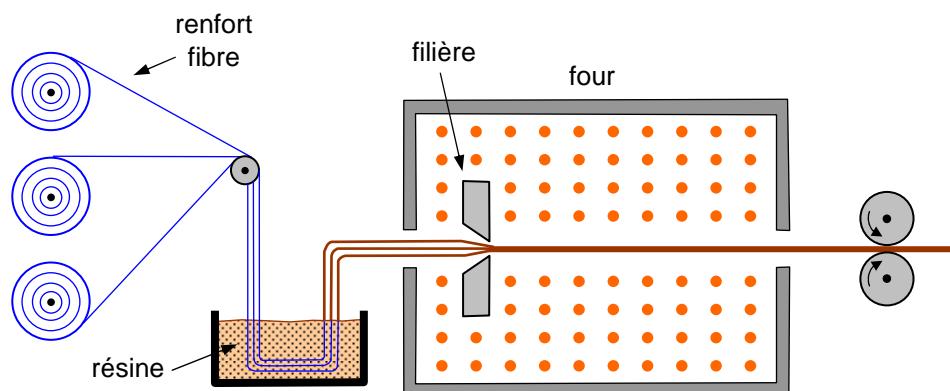


FIGURE 3.9. Moulage par pultrusion.

### 3.2.6 Moulage par centrifugation

Cette technique est réservée au moulage de pièces de révolution, en particulier tubes, tuyaux, cuves, etc. Elle est une extrapolation (figure 3.10) de la technique de fabrication des tuyaux en fonte ou en béton centrifugé.

Le moule de révolution, enduit d'agent de démoulage, est mis en rotation (à environ 2 000 tours/min). Après dépôt éventuel de gel coat, on introduit simultanément en continu :

- le renfort : fibres coupées ou stratifil coupé;
- la résine catalysée et accélérée (résines époxydes, polyesters, etc.) durcissant à froid.

L'imprégnation du renfort par la résine est réalisée sous l'effet de la centrifugation. La stratification s'effectue par passages successifs de la buse d'alimentation en résine et renfort. La polymérisation est effectuée à température ambiante, ou éventuellement accélérée dans une étuve.

Un renfort sous forme de rouleau (mat, tissu, etc.) peut être introduit éventuellement en discontinu avant rotation du moule. La résine est introduite ensuite lors de la centrifugation.

Après polymérisation, la pièce cylindrique est extraite du moule, le retrait des résines permettant le démoulage. Cette technique permet d'obtenir un bel aspect de surface à l'extérieur, avec un diamètre et une épaisseur des pièces bien calibrés. Ce processus d'élaboration nécessite un matériel de grande précision et un très bon équilibrage du moule.

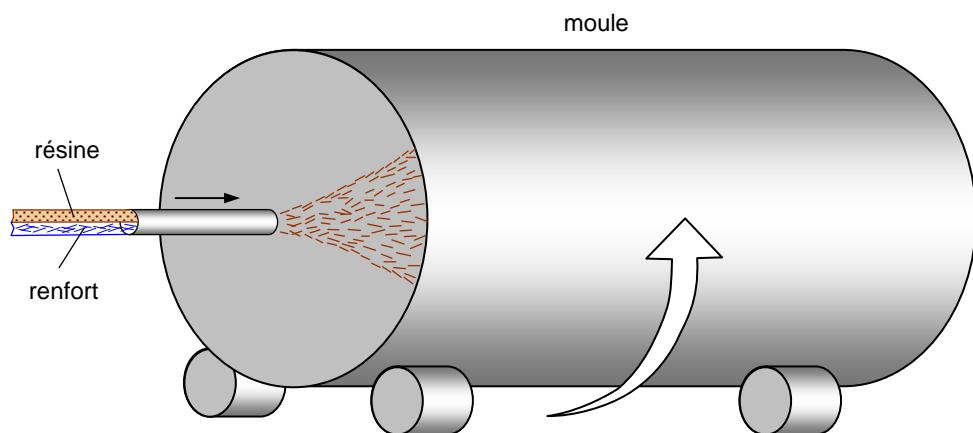


FIGURE 3.10. Moulage par centrifugation.

### 3.2.7 Moulage par enroulement filamentaire

#### 3.2.7.1 Principe

Le renfort (fil continu, ruban, etc.) imprégné de résine catalysée est enroulé avec une légère tension, sur un mandrin cylindrique ou de révolution en rotation.

Ce type de moulage est bien adapté aux surfaces cylindriques et sphériques, et permet une conception avancée des pièces. Les stratifiés obtenus peuvent comporter des proportions élevées de renfort (jusqu'à 80 % en volume), permettant donc d'obtenir de hautes caractéristiques mécaniques. L'investissement en matériel est très important.

Suivant les mouvements relatifs du mandrin et du système d'approvisionnement en renfort, divers types d'enroulements (et par conséquent de stratifications) sont obtenus. On distingue : l'enroulement circonférentiel, l'enroulement hélicoïdal, l'enroulement polaire.

#### 3.2.7.2 Enroulement circonférentiel (figure 3.11)

Le bobinage est effectué à 90 ° par rapport à l'axe du mandrin et confère une résistance tangentielle élevée. Pour obtenir une résistance longitudinale satisfaisante, il est nécessaire d'intercaler des couches de tissus unidirectionnels dans le sens axial du mandrin.

Ce type d'enroulement est assez peu utilisé.

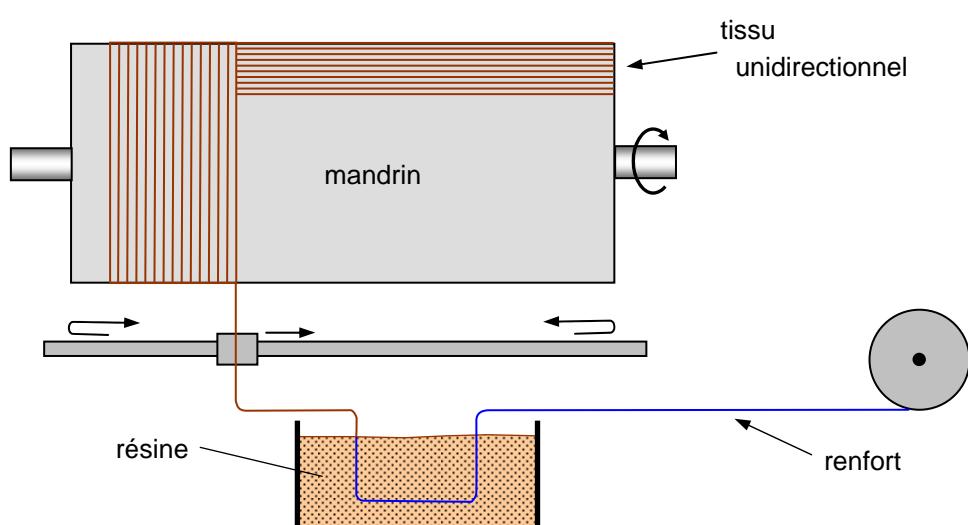


FIGURE 3.11. Principe de l'enroulement circonférentiel.

### 3.2.7.3 Enroulement hélicoïdal

#### 1. Enroulement discontinu

La direction d'enroulement des fils est inclinée par rapport à l'axe du mandrin d'un angle dont la valeur est déterminée par le mouvement relatif du guide-fils par rapport à la rotation du mandrin (figure 3.12). La valeur de l'angle est choisie en fonction du rapport souhaité entre la résistance tangentielle et la résistance transversale. La nappe de fils est régulièrement répartie et stratifiée sur toute la surface du mandrin par des mouvements alternatifs du guide-fils parallèlement à l'axe du mandrin. Ce type d'enroulement donne une grande liberté pour la disposition angulaire des fils. Il permet en particulier de réaliser des couches successives avec des angles différents.

Ce procédé d'enroulement a de nombreuses applications pour la fabrication de pièces de grandes dimensions comme des conteneurs, la fabrication d'enveloppes de fusées, de torpilles, de tubes de forage pétrolier, de bouteilles de gaz, etc.

#### 2. Enroulement continu

L'enroulement continu (figure 3.13) permet la fabrication industrielle de tubes et tuyaux hautes performances de divers diamètres et grandes longueurs.

### 3.2.7.4 Enroulement polaire

L'enroulement polaire permet de fabriquer des pièces à extrémités sphériques sans discontinuité de l'enroulement (figure 3.14). Dans ce type d'enroulement, le mandrin doit posséder trois degrés de liberté en rotation, permettant de commander 3 rotations simultanées ou non.

Cette technologie sert à fabriquer des réservoirs haute pression, des réservoirs de moteurs de fusée, des équipements spatiaux, etc.

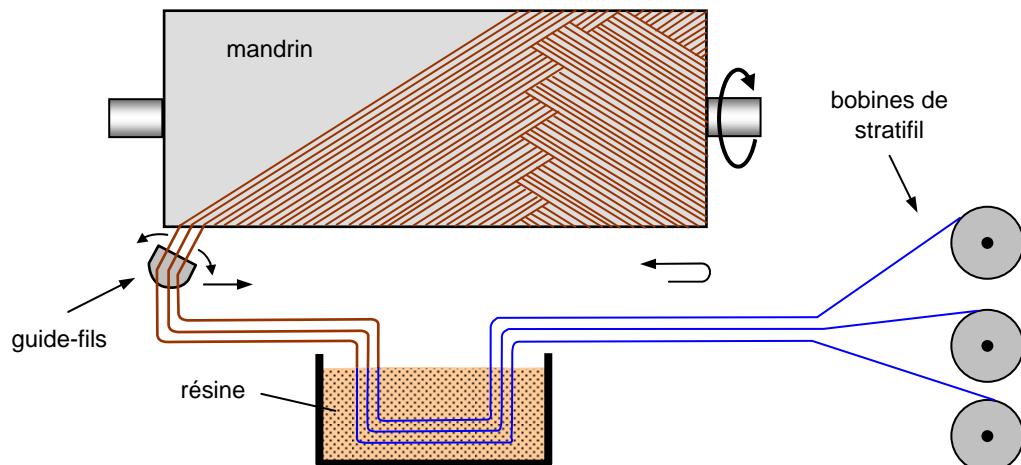


FIGURE 3.12. Principe de l'enroulement hélicoïdal.

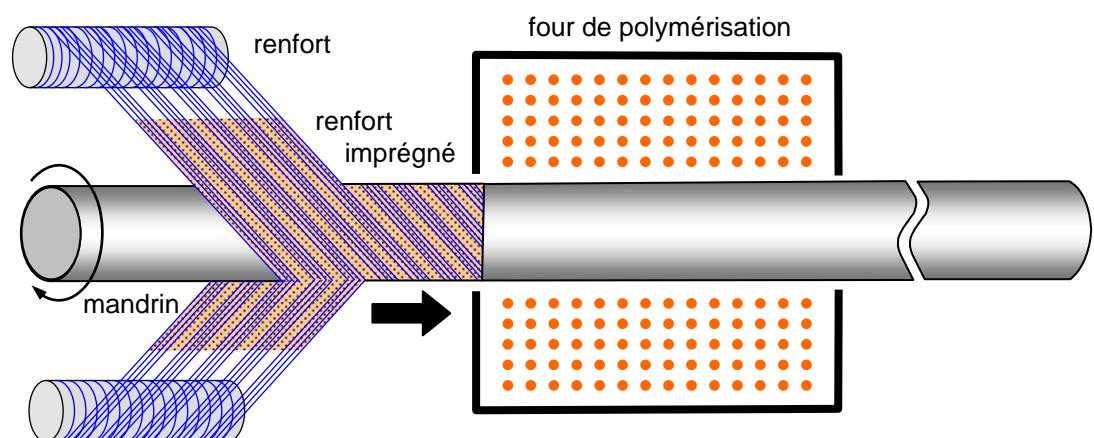


FIGURE 3.13. Enroulement hélicoïdal continu.

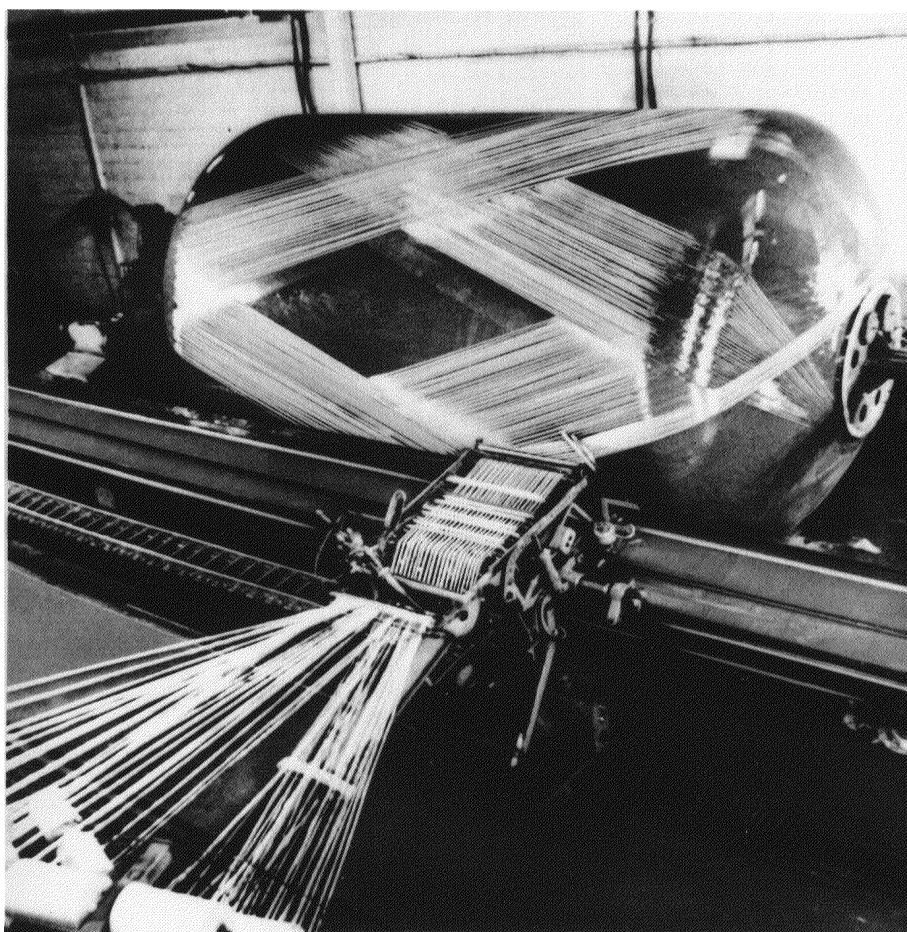


FIGURE 3.14. Enroulement polaire (Documentation Vetrotex).

### 3.2.7.5 *Mandrins*

Les mandrins pour l'enroulement filamentaire doivent permettre le démoulage. Ils peuvent être :

- en métal, en bois, etc., monobloc ou en plusieurs éléments démontables;
- en matériau à bas point de fusion ;
- en matériau soluble : par exemple grains de sable agglomérés dans un liant soluble dans l'eau ;
- en élastomère gonflable.

### 3.2.7.6 *Applications*

Les applications de l'enroulement filamentaire ont été dégagées dans les paragraphes précédents. D'une manière générale, ce processus de mise en œuvre est utilisé pour fabriquer des pièces ayant une symétrie de révolution : tuyaux, tubes, réservoirs, bouteilles de gaz, enveloppes cylindriques, etc. Des pièces de grandes dimensions peuvent être réalisées : conteneurs, silos, etc. Les dimensions des pièces sont limitées par le type de machine utilisée. L'intérêt de l'enroulement filamentaire réside également dans la possibilité d'une automatisation assistée par ordinateur.

Le procédé d'enroulement filamentaire est également applicable à des pièces sans symétrie de révolution : pales d'hélicoptères et de turbines, réservoirs à sections rectangulaires, etc.

## 3.3 UTILISATION DE DEMI-PRODUITS

### 3.3.1 *Introduction*

La mise en œuvre de demi-produits (*préimprégnés, compounds*) fait appel aux mêmes techniques que le moulage (paragraphe 3.2) à partir de fils ou tissus, dont l'imprégnation par la résine est effectuée au moment de la mise en œuvre. Nous en avons séparé la présentation, compte tenu du caractère propre de ces demi-produits : facilité de manipulation, possibilité d'automatisation avancée des procédés de mise en œuvre à partir de ces produits, etc. Il est ainsi concevable de penser que l'utilisation et le développement de préimprégnés et compounds de divers types, associés à une conception assistée par ordinateur et à une robotisation, permettront de pénétrer de plus en plus les marchés industriels : construction automobile, construction navale, armement, etc.

### 3.3.2 *Préimprégnés*

#### 3.3.2.1 *Principe*

Les préimprégnés (en anglais : les “prepregs” de pre-impregnated) sont des

produits vendus sous forme de stratifils, rubans, tissus, etc., imprégnés de résine généralement dissoute dans un solvant.

Les résines peuvent être phénoliques, des polyesters, des résines époxydes, des polyimides, etc. Le pourcentage en volume de fibres est élevé (50 à 80 %) de manière à obtenir des composites à hautes performances mécaniques.

Le stratifil imprégné ou “stratipreg” (désignation de Vetrotex-Saint Gobain dans le cas de fibres de verre) est principalement destiné à l'enroulement filamentaire. Les tissus imprégnés sont généralement minces (de l'ordre de 1/10 mm), et par conséquent de faible masse surfacique : 100 à 300 g/m<sup>2</sup>. Toutefois, pour les besoins de la construction navale, certains préimprégnés épais ont été mis au point pour simplifier la mise en œuvre.

### 3.3.2.2 Élaboration

La fabrication des préimprégnés se fait sur une machine verticale ou horizontale, suivant le schéma de principe de la figure 3.15. Le fil ou tissu est déroulé à vitesse lente (1 à 10 m/min), et passe dans un bac contenant une résine d'imprégnation diluée dans un solvant. À la sortie, des racleurs et des rouleaux essoreurs éliminent l'excès de résine. En effet, nous avons indiqué qu'un des intérêts des préimprégnés est d'être à faible proportion de résine. Le fil ou tissu imprégné passe ensuite dans un four, où la plus grande partie du solvant s'évapore, et où s'amorce un début de polymérisation. A la sortie du four, le préimprégné est refroidi par ventilation, de manière à stopper la polymérisation qui doit rester inachevée. Le tissu est ensuite :

- soit enroulé entre deux feuilles de polyéthylène pour être livré en rouleau,
- soit coupé et empilé entre deux feuilles de polyéthylène pour être livré en plaques.

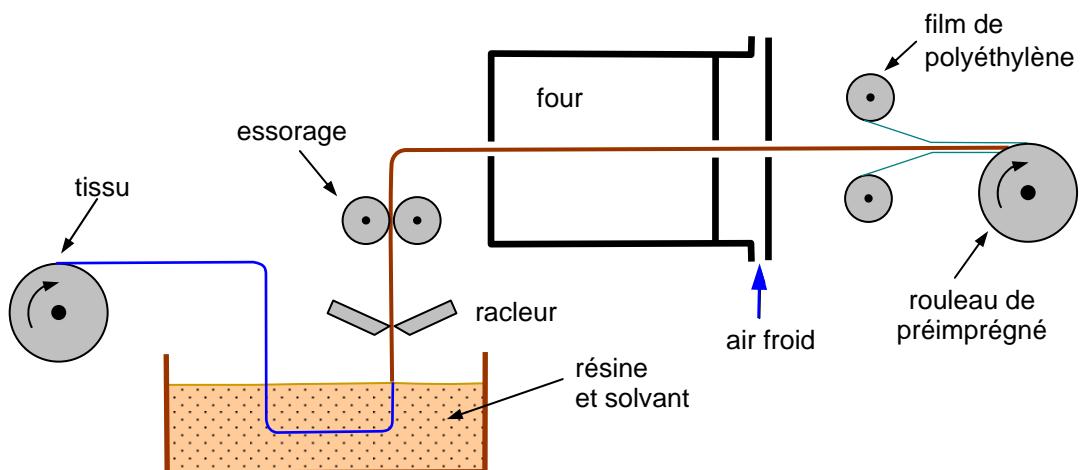


FIGURE 3.15. Schéma de principe de l'élaboration d'un préimprégné.

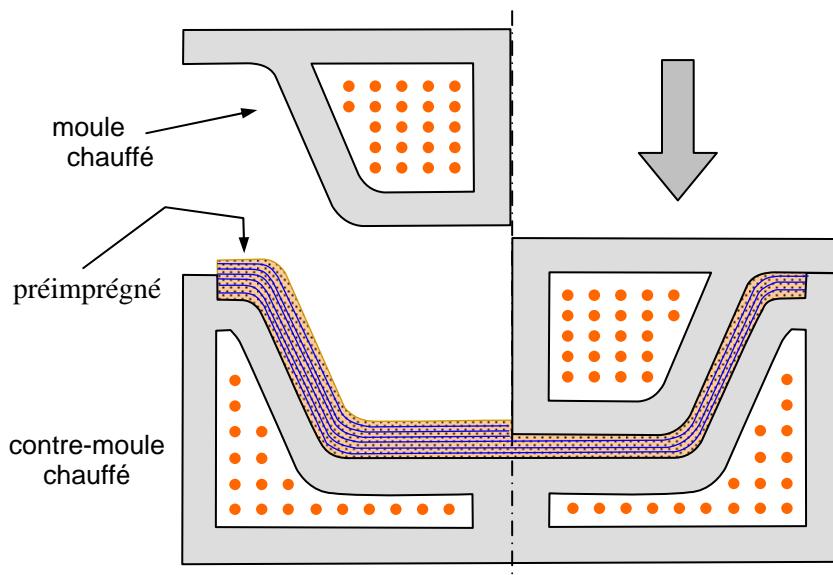


FIGURE 3.16. Moulage par compression à partir d'un préimprégné.

### 3.3.2.3 *Intérêt des préimprégnés*

Les avantages essentiels des préimprégnés résident dans :

- des performances mécaniques élevées du stratifié obtenu, résultant de la forte proportion de fibres ;
- une amélioration des conditions de travail et de sécurité, du fait de la suppression des manipulations de résine et du dégagement de vapeurs toxiques ;
- une automatisation possible par drapage, à l'aide d'automates ou de robots, permettant de diminuer les prix de revient des produits finis.

### 3.3.2.4 *Mise en œuvre*

Les préimprégnés peuvent être mis en œuvre :

- par compression à chaud, puis cuisson ;
- par moulage sous vide, avec cuisson dans des moules chauffants.

Lors de la mise en œuvre, les préimprégnés doivent être découpés aux dimensions des pièces à réaliser (figure 3.16). Il en résulte que seules les formes simples peuvent être réalisées. Après mise en place des préimprégnés dans le moule, sous l'action de la chaleur, la résine redevient fluide, puis durcit pour obtenir la pièce finale.

## 3.3.3 Les compounds de moulage

### 3.3.3.1 *Généralités*

Les “compounds” (composés) de moulage sont des demi-produits livrés en rouleaux ou feuilles d'épaisseur d'environ 3 mm, composés généralement de

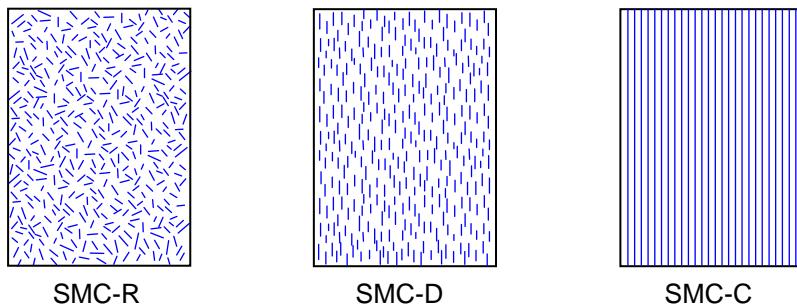


FIGURE 3.17. Différentes distributions des fibres dans les SMC.

résine polyester-fibres de verre, placés entre deux films de polyéthylène. Ils sont parfois considérés comme des préimprégnés, leur utilisation les différencie toutefois nettement. Parmi ces compounds, les plus utilisés sont :

- les SMC : Sheet Moulding Compounds,
- les HMC : High Moulding Compounds.

Divers autres types de compounds existent et sont développés pour chaque utilisation spécifique. Un des intérêts des compounds polyesters réside dans un temps de polymérisation très court (quelques minutes), d'où la possibilité de les utiliser dans des productions de grandes séries.

### 3.3.3.2 *Principe*

Le SMC est un composé de moulage lamifié (“sheet” signifie “feuille”), comportant une proportion de fibres assez faible (30 % en masse), et une forte proportion de charges (50 % en masse) dans la résine. Les fibres peuvent être (figure 3.17) :

- soit des fibres coupées (généralement 25 à 50 mm), réparties au hasard dans le plan de la feuille (SMC-R) ;
- soit des fibres coupées unidirectionnelles (SMC-D) ;
- soit des fibres continues unidirectionnelles (SMC-C).

Il existe également des SMC mixtes : par exemple SMC-D/R (fibres coupées unidirectionnelles et réparties au hasard), SMC-C/R (fibres continues unidirectionnelles et fibres coupées réparties au hasard).

Les fibres peuvent être de diverses natures : verre, carbone, Kevlar, ou mixtes. En diminuant la proportion des charges dans la résine, il est possible d'augmenter la proportion de fibres de 30 à 50 % en masse. Le compound est alors appelé HMC et possède des caractéristiques mécaniques élevées.

### 3.3.3.3 *Élaboration*

Le principe d'élaboration des compounds est donné à la figure 3.18 pour les SMC-R et à la figure 3.19 pour les SMC-D/R. La résine sous forme de pâte est

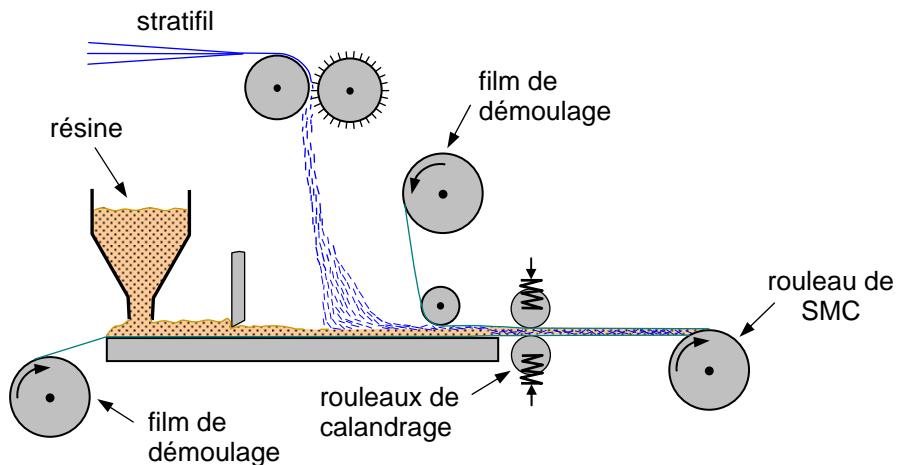


FIGURE 3.18. Principe d'élaboration d'un SMC-R.

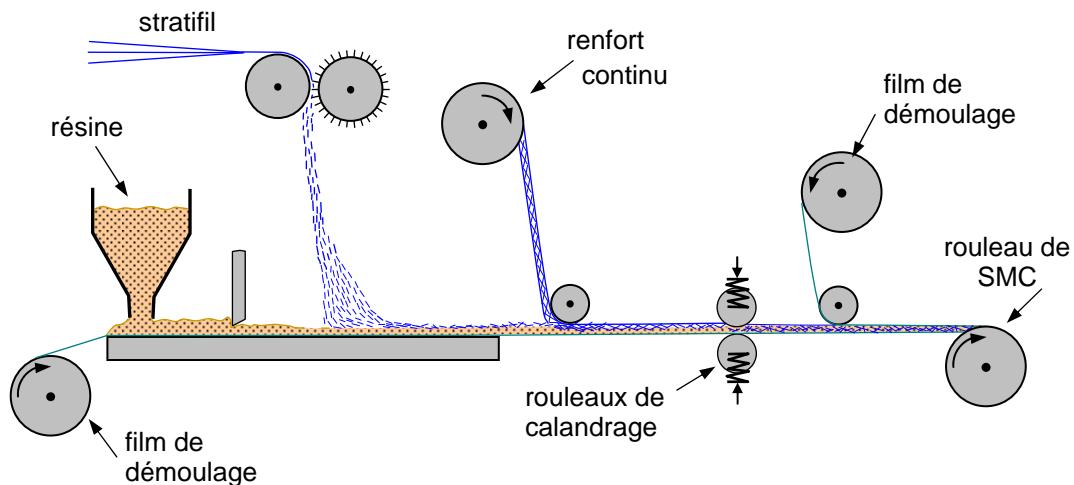


FIGURE 3.19. Principe d'élaboration d'un SMC-C/R.

véhiculée sur une feuille de polyéthylène. Les fibres sont déposées sur la résine, puis recouvertes par une deuxième feuille de polyéthylène. L'ensemble passe dans un système de compactage, pour être ensuite enroulé.

La polymérisation de la résine est retardée par adjonction d'oxyde de magnésium. Le compound se présente alors sous forme de feuilles molles et poisseuses.

### 3.3.3.4 Mise en œuvre

Le moulage est effectué selon les techniques traditionnelles de moulage par compression (figure 3.20). Des “flans” de compounds sont découpés dans les feuilles et placés entre le moule et le contre-moule. La forme des flans ne doit pas nécessairement être adaptée aux dimensions du moule. En effet, à la différence des préimprégnés, les compounds ont une proportion élevée (50 à 70 % en masse) de matrice. Lors de la compression à chaud, la matière s'écoule (on dit qu'elle “flue”), et vient remplir tout le moule. Lors de cet écoulement, il peut y avoir réorientation des fibres. Le rôle du concepteur sera de rechercher la forme et l'épaisseur optimales des flans pour obtenir les caractéristiques finales souhaitées de la pièce après durcissement.

Ainsi les compounds permettent la fabrication de très grandes pièces à formes éventuellement complexes comportant nervures et bossages à embouti profond, telles que cabines de camions, de voitures, etc. Le fait de mouler des pièces de surfaces de plus en plus grandes conduit à utiliser des presses de plus en plus puissantes.

Les gros tonnages ont d'abord été réalisés dans le domaine de l'électrotechnique (figure 3.21), puis dans celui de l'automobile (par exemple pare-chocs d'automobiles, capot-moteur d'automobiles, etc.). Les applications des compounds touchent aujourd'hui tous les secteurs industriels.

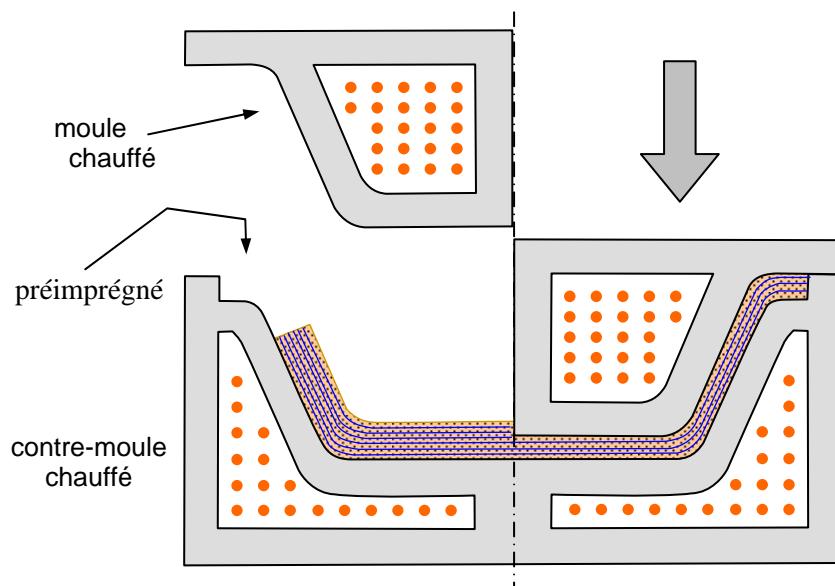


FIGURE 3.20. Moulage par compression à partir d'un compound.



FIGURE 3.21. Coffret de comptage électrique pour maisons individuelles.

## 3.4 ARCHITECTURE DES MATÉRIAUX COMPOSITES

### 3.4.1 Introduction

L'ensemble des procédés de mise en œuvre montre la prépondérance d'une conception des pièces en matériaux composites :

- par surface: plaques, coques,
- par stratification de couches successives.

Ce concept justifie l'importance qui sera donnée par la suite à l'étude des matériaux composites considérés sous la forme de plaques ou de coques, constituées de couches différentes (ou non). Les coques peuvent être modélisées comme un ensemble de plaques, et leur étude déduite de l'étude des plaques.

L'objet de ce paragraphe est de dégager l'architecture générale des matériaux composites.

### 3.4.2 Stratifiés

Les stratifiés sont constitués (figure 3.22) de couches successives (appelées parfois plis) de renforts (fils, stratifils, mats, tissus, etc.) imprégnés de résines. Nous examinons les divers types de stratifiés.

#### 3.4.2.1 Stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels

Les stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels constituent un type de stratifié de base auquel peut se ramener en théorie tout autre type de stratifié. Ces stratifiés sont constitués (figure 3.23) de couches de fils ou de tissus unidirectionnels, dont la direction est décalée dans chaque couche.

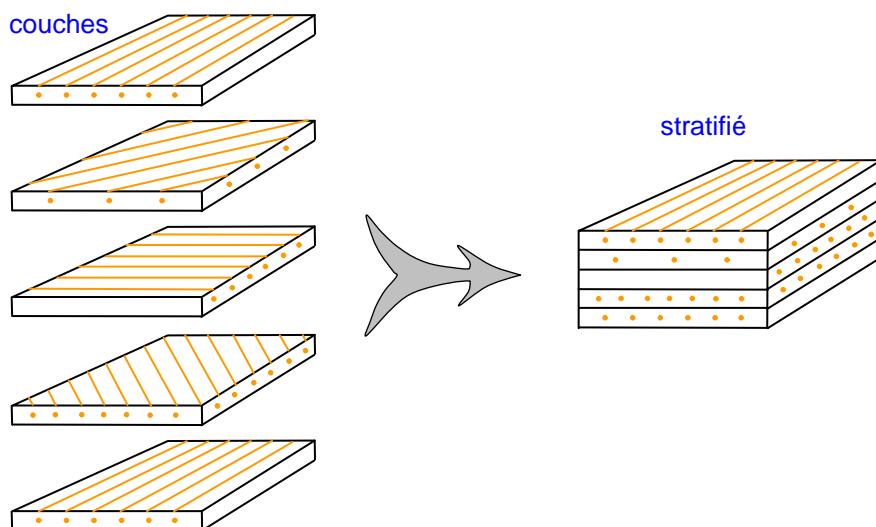


FIGURE 3.22. Constitution d'un stratifié.

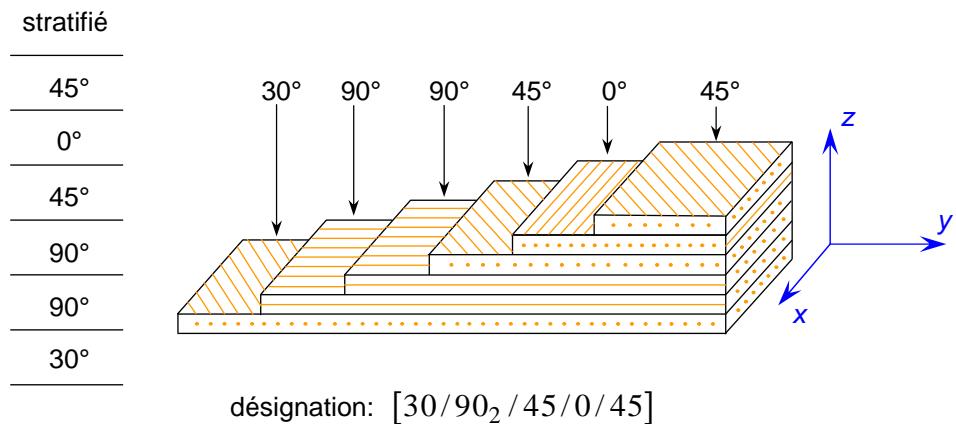


FIGURE 3.23. Désignation d'un stratifié.

La désignation de ces stratifiés est généralement effectuée selon le code suivant :

1. Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degrés de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe  $x$  de référence.
2. Les couches successives sont séparées par un / si leurs angles sont différents.
3. Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique.
4. Les couches sont nommées successivement en allant d'une face à l'autre. Des crochets (ou parenthèses) indiquent le début et la fin du code.

La désignation dépend du système d'axes choisi. Un exemple est donné à la figure 3.23.

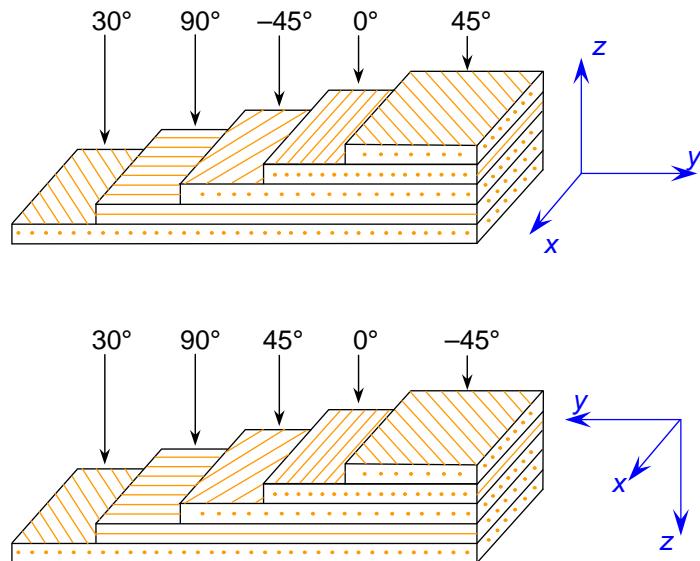


FIGURE 3.24. Convention de signe pour la désignation des stratifiés.

### *Angles positifs et négatifs*

Lorsque des couches sont orientées à des angles égaux en valeurs absolues, mais de signes opposés, les signes + ou – sont utilisés. La convention pour les angles positifs ou négatifs dépend du système d'axes choisi : une inversion peut apparaître suivant le choix effectué (figure 3.24).

Nous donnons ci-après quelques exemples de désignation de stratifiés.

<b>Stratifié</b>	<b>Désignation</b>
$\overline{0^\circ}$ $\overline{30^\circ}$ $\overline{-30^\circ}$ $\overline{-45^\circ}$ $\overline{45^\circ}$	$[\pm 45 / \mp 30 / 0]$
$\overline{30^\circ}$ $\overline{-60^\circ}$ $\overline{-60^\circ}$ $\overline{0^\circ}$ $\overline{45^\circ}$	$[45 / 0 / -60_2 / 30]$
$\overline{0^\circ}$ $\overline{-45^\circ}$ $\overline{-45^\circ}$ $\overline{45^\circ}$ $\overline{45^\circ}$	$[45_2 / -45_2 / 0]$
$\overline{0^\circ}$ $\overline{-45^\circ}$ $\overline{45^\circ}$ $\overline{45^\circ}$ $\overline{-45^\circ}$ $\overline{-45^\circ}$ $\overline{45^\circ}$	$[\pm \mp \pm 45 / 0]$ ou $[45 / -45_2 / 45_2 / -45 / 0]$

### *Stratifiés symétriques*

Un stratifié est symétrique si son plan moyen est plan de symétrie. Sa désignation ne nécessite alors que la moitié des couches successives.

Si le stratifié a un nombre pair de couches, la désignation débute sur une face pour finir au plan de symétrie. Un indice S indique que le stratifié est symétrique. Par exemple :

<u>90 °</u>	
<u>45 °</u>	
<u>45 °</u>	[ 90 / 45 <sub>2</sub> / 0 ] <sub>S</sub>
<u>0 °</u>	
<u>0 °</u>	
<u>45 °</u>	
<u>45 °</u>	
<u>90 °</u>	

Si le stratifié comporte un nombre impair de couches, la désignation est semblable à la précédente, la couche centrale étant surlignée. Par exemple :

<u>90 °</u>	
<u>45 °</u>	
<u>45 °</u>	[ 90 / 45 <sub>2</sub> / <u>0</u> ] <sub>S</sub>
<u>0 °</u>	
<u>45 °</u>	
<u>45 °</u>	
<u>90 °</u>	

### *Séquences*

La répétition de séquences peut être indiquée par un indice indiquant le nombre de fois où une séquence est successivement répétée. Par exemple :

<u>0 °</u>	
<u>45 °</u>	
<u>90 °</u>	[ (0 / 45 / 90) <sub>2</sub> ] <sub>S</sub>
<u>0 °</u>	
<u>45 °</u>	ou [ 0 / 45 / 90 ] <sub>2S</sub>
<u>90 °</u>	
<u>90 °</u>	
<u>45 °</u>	
<u>0 °</u>	
<u>90 °</u>	
<u>45 °</u>	
<u>0 °</u>	

$\overline{0^\circ}$	
$\overline{\overline{45^\circ}}$	
$\overline{\overline{90^\circ}}$	
$\overline{0^\circ}$	$[(30 / 60)_3 (90 / 45 / 0)_2]$
$\overline{45^\circ}$	
$\overline{90^\circ}$	
$\overline{60^\circ}$	
$\overline{30^\circ}$	
$\overline{60^\circ}$	
$\overline{30^\circ}$	
$\overline{60^\circ}$	
$\overline{30^\circ}$	

L'alternance  $[0 / 90]_n$  est souvent désignée par *stratifié croisé*.

### Stratifiés hybrides

Les stratifiés hybrides sont constitués de couches successives comportant des fibres de natures différentes. Il sera alors nécessaire de les mentionner dans la désignation. Par exemple, pour des stratifiés avec la même résine :

$\overline{0^\circ \quad V}$	
$\overline{45^\circ \quad C}$	
$\overline{-45^\circ \quad C}$	
$\overline{90^\circ \quad C}$	$[0_V / \pm 45_C / 90_C]_S$
$\overline{90^\circ \quad C}$	
$\overline{-45^\circ \quad C}$	
$\overline{45^\circ \quad C}$	
$\overline{0^\circ \quad V}$	

$\overline{0^\circ \quad K}$	
$\overline{0^\circ \quad K}$	
$\overline{45^\circ \quad V}$	
$\overline{90^\circ \quad V}$	$[0_{2C} / (45 / \overline{90})_{SV} / 0_{2K}]$
$\overline{45^\circ \quad V}$	
$\overline{0^\circ \quad C}$	
$\overline{0^\circ \quad C}$	

avec V : verre, C : carbone, K : Kevlar

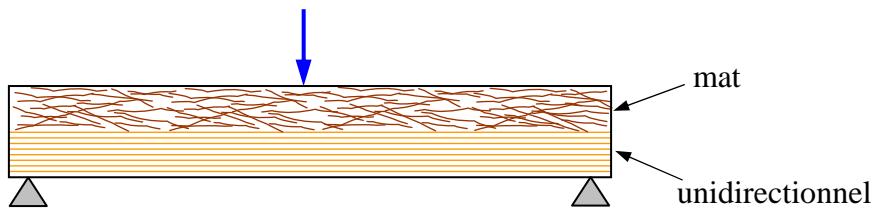


FIGURE 3.25. Poutre sollicitée en flexion.

### 3.4.2.2 Structure générale d'un stratifié

Dans le cas général, le renfort de chaque couche sera de natures diverses : fils, stratifils, mats, tissus, fibres de verre, fibres de carbone, etc. Chaque couche doit alors être désignée par l'indication de la nature des fibres, du type de renfort : fils, mat, tissu avec indication de la proportion de fibres suivant le sens chaîne et trame.

Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation du matériau composite, en l'adaptant au mieux au champ des contraintes imposé :

- les couches unidirectionnelles ont de bonnes performances mécaniques dans la direction des fibres ;
- les mats sont peu résistants en traction et devront être réservés aux zones comprimées : par exemple (figure 3.25) couches unidirectionnelles dans la zone de traction, mat dans la zone de compression d'une poutre sollicitée en flexion ;
- une stratification croisée sera sensible au déclavement interlaminaire ;
- une stratification avec au moins trois directions de fibres sera nécessaire pour avoir une pseudo-isotropie dans le plan du stratifié.

Enfin, il est intéressant de noter qu'une stratification symétrique garantira généralement une bonne planéité du stratifié après démoulage.

#### Stratifiés hybrides

Les stratifiés hybrides permettent d'être plus performants en utilisant au mieux les propriétés des diverses fibres disponibles. Parmi les différents hybrides, on peut distinguer :

- des *hybrides intercouches*, constitués d'une suite de couches, chacune de nature différente ;
- des *hybrides intracouches*, constitués par une séquence de couches identiques, chaque couche étant constituée de renforts différents ;
- des couches métalliques peuvent également être intercalées entre les couches.

### 3.4.3 Composites sandwiches

#### 3.4.3.1 Généralités

Le principe de la technique sandwich consiste à appliquer sur une *âme*

(constituée d'un matériau ou d'une structure légère possédant de bonnes propriétés en compression) deux "feuilles", appelées *peaux*, possédant de bonnes caractéristiques en traction. L'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier *légèreté* et *rigidité*.

Généralement, le choix des matériaux est fait avec pour objectif initial d'avoir une masse minimale en tenant compte ensuite des conditions d'utilisation (conditions thermiques, corrosion, prix, etc.).

Les matériaux les plus couramment utilisés sont :

- pour les *âmes pleines* (figure 3.26) :
  - le balsa ou bois cellulaire ;
  - diverses mousses cellulaires ;
  - des résines chargées de microsphères creuses de verre, appelées mousses syntactiques ;
  - etc. ;
- pour les *âmes creuses* (figure 3.27), essentiellement nid d'abeilles et profilés :
  - des alliages métalliques légers ;
  - du papier kraft (enduit ou non de résine) ;
  - du papier polyamide, type papier Nomex ;
  - etc. ;

Des âmes mixtes peuvent être utilisées.

Les peaux sont le plus souvent des stratifiés (verre, carbone, Kevlar) ou des feuilles d'alliages légers.

Pour que les structures sandwichs jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme-peaux, de manière à répartir les efforts entre âme et peaux. L'assemblage est réalisé par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.

### 3.4.4 Autres architectures

Les autres architectures des matériaux composites peuvent être schématiquement classées en : plastiques renforcés et composites volumiques.

#### 3.4.4.1 Plastiques renforcés

Ces matériaux sont constitués de résines ou matrices dans lesquelles sont introduits des renforts de type :

- fibres courtes,
- billes pleines ou billes creuses,
- poudres : métalliques, de graphite.

Les renforts permettent généralement d'augmenter le module d'élasticité d'un facteur 2 à 5. Le comportement mécanique de ces matériaux peut être homogénéisé, et son étude est ramenée à celle d'un matériau usuel isotrope.

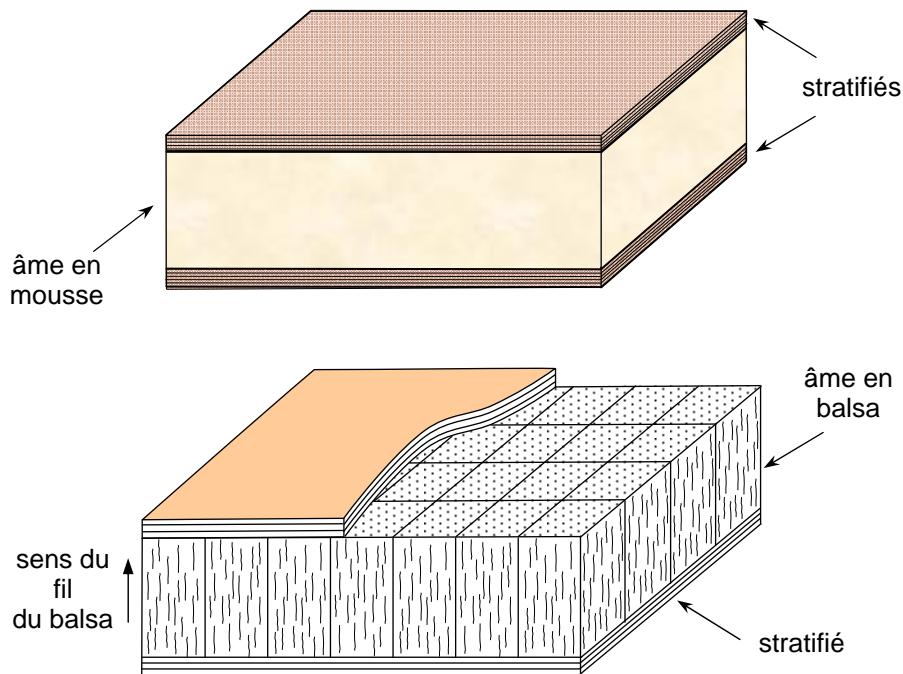


FIGURE 3.26. Matériaux sandwiches à âmes pleines.

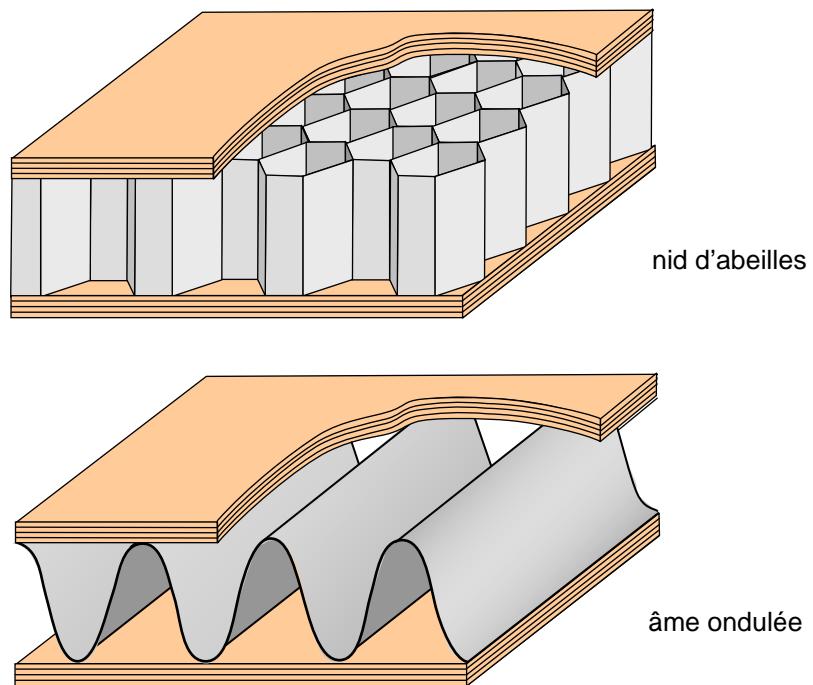


FIGURE 3.27. Matériaux sandwiches à âmes creuses.

### 3.4.4.2 Composites volumiques

Les composites volumiques ont été introduits pour des besoins spécifiques de l'aéronautique. Ils sont élaborés à partir de tissages volumiques (paragraphe 2.4.4.2). Ces matériaux sont très onéreux. Outre des intérêts spécifiques, ils permettent d'obtenir des caractéristiques mécaniques très élevées, avec un comportement sensiblement isotrope en volume.

## 3.4.5 Conséquences sur l'étude du comportement mécanique des matériaux composites

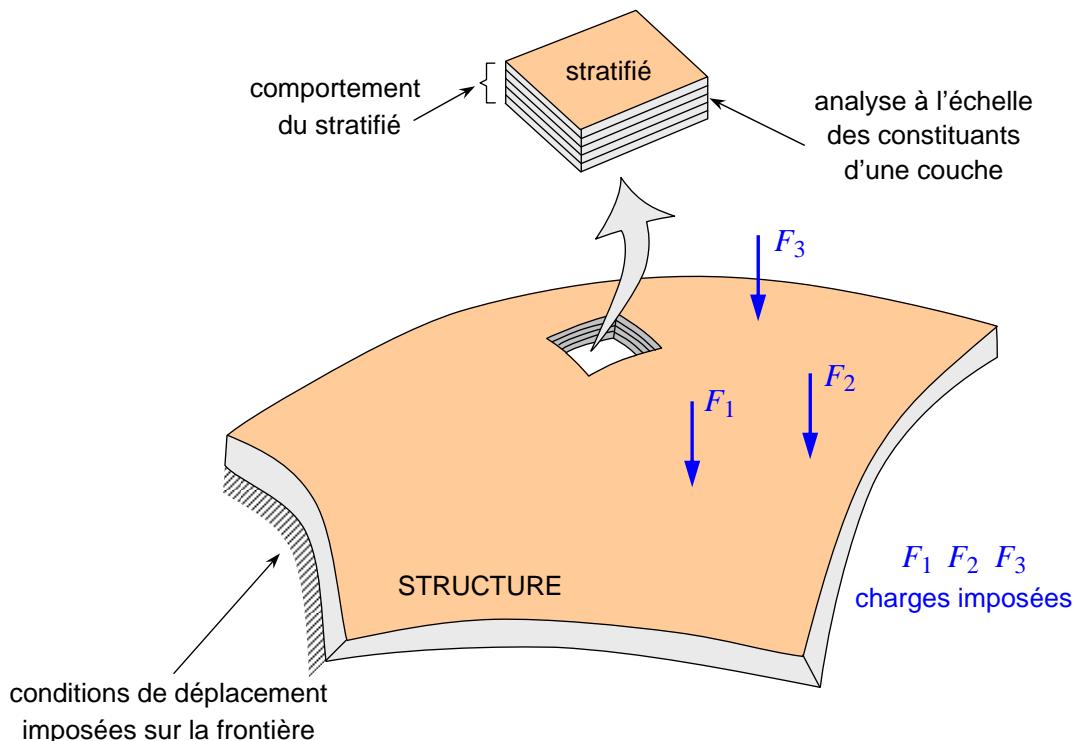
L'étude de la mise en œuvre des matériaux composites a montré l'importance des stratifiés et des matériaux sandwiches. L'architecture de ces matériaux nous permet maintenant de dégager les grandes lignes de l'étude de leur comportement mécanique.

Cette étude comportera deux phases :

1. L'étude du comportement mécanique de chaque couche, parfois appelé comportement micromécanique ou microscopique du matériau composite. Cette étude est assez souvent désignée par microanalyse du matériau composite.
2. L'étude du comportement global du matériau constitué de plusieurs couches, et désigné généralement par comportement macroscopique du matériau composite ou comportement du stratifié.

Ces deux études étant effectuées, le comportement mécanique global d'une structure en composite sera ensuite analysé en adaptant les outils classiques du calcul des structures au comportement macroscopique des matériaux composites. L'analyse des structures simples (poutres et plaques) peut généralement être abordée par une méthode analytique, alors que l'étude de structures complexes nécessite l'utilisation de la méthode des éléments finis.

L'analyse du comportement mécanique d'une structure en matériau composite est schématisée sur la figure 3.28.



#### Pour caractériser le comportement mécanique de la structure composite

il est nécessaire de connaître le champ des contraintes et celui des déplacements en tout point de la structure

#### Processus d'étude



#### Analyse à l'échelle des constituants

Analyse des propriétés élastiques et du comportement à la rupture d'une couche en fonction des constituants

#### Comportement du stratifié ou sandwich

Étude des propriétés élastiques et du comportement à la rupture du matériau stratifié ou sandwich en fonction des couches

FIGURE 3.28. Schéma d'étude du comportement mécanique d'une structure en matériau composite.

## Partie II

# Éléments sur la Mécanique des Matériaux

Pour développer les concepts de l'analyse mécanique des matériaux composites et des structures, il est nécessaire de bien connaître les fondements théoriques de la mécanique des structures déformables. Une synthèse des éléments de base est présentée dans cette partie considérant les concepts usuels : contraintes (Chapitre 5), déplacements (Chapitre 6), comportement élastique des matériaux (Chapitre 7) et éléments fondamentaux de l'analyse du comportement mécanique des structures déformables (Chapitre 8).



## CHAPITRE 4

# Éléments Mathématiques

L'état des déformations et l'état des contraintes en un point d'un solide soumis à un chargement mécanique sont définis à partir de matrices carrées  $3 \times 3$ . Nous rappelons dans ce chapitre quelques éléments relatifs aux concepts utilisés.

## 4.1 CHANGEMENT DE BASE

### 4.1.1 Expression générale

L'orientation d'un espace géométrique ( $S$ ) par rapport à un système de référence ( $R$ ) (figure 4.1) est caractérisée par les vecteurs de base  $(\vec{e}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  d'un système d'axes (1, 2, 3) lié à l'espace ( $S$ ),  $(\vec{e})$  étant une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ . Tout changement de ce système d'axes est caractérisé par une matrice de changement de base  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ , permettant d'exprimer les nouveaux vecteurs de base  $(\vec{e}') = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  en fonction des anciens suivant l'expression :

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_2 &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_3 &= a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3.\end{aligned}\tag{4.1}$$

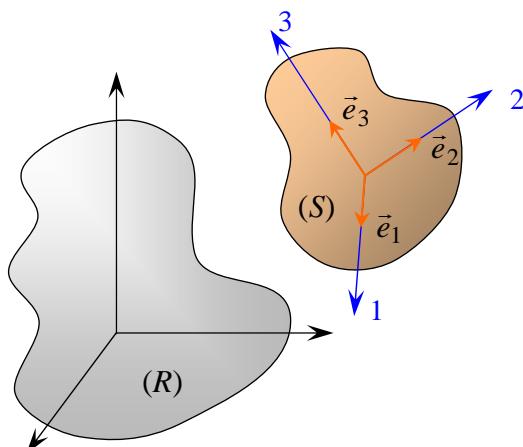


FIGURE 4.1. Orientation d'un espace géométrique ( $S$ ).

Nous écrirons cette relation sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

La relation inverse s'exprime, en introduisant la matrice inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  de  $\mathbf{A}$ , suivant :

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Dans le cas de bases orthonormées directes, la matrice de changement de base est symétrique et unitaire : son déterminant est égal à 1 et son inverse est confondue avec la matrice transposée. La relation inverse est donc simplifiée suivant :

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^t \begin{bmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

où la matrice  $\mathbf{A}^t$  est la matrice transposée de  $\mathbf{A}$ .

### 4.1.2 Expression dans le cas de la rotation autour d'un axe

Dans le cas d'une rotation  $\theta$  autour de la direction  $\vec{e}_3$  (figure 4.2), la relation entre les bases  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  et  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \vec{e}_1 \cos \theta + \vec{e}_2 \sin \theta, \\ \vec{e}'_2 &= -\vec{e}_1 \sin \theta + \vec{e}_2 \cos \theta, \\ \vec{e}'_3 &= \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (4.5)$$

D'où la matrice de changement de base :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

La matrice de changement de base inverse est :

$$\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

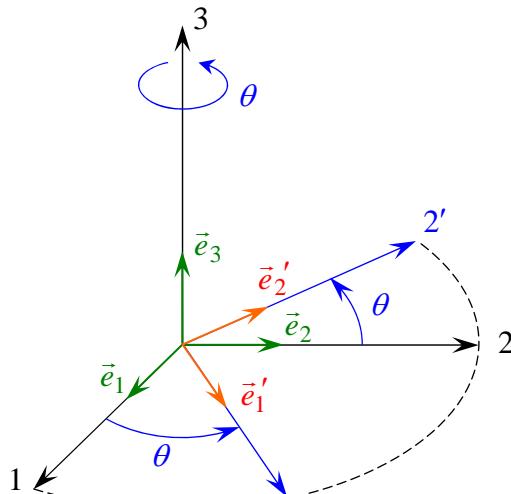


FIGURE 4.2. Rotation autour de la direction 3.

D'où la relation inverse :

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{e}'_1 \cos \theta - \vec{e}'_2 \sin \theta, \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}'_1 \sin \theta + \vec{e}'_2 \cos \theta, \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}'_3.\end{aligned}\tag{4.8}$$

## 4.2 TENSEUR DE RANG DEUX

### 4.2.1 Introduction

La notion de tenseur est nécessaire pour établir les relations entre effets physiques et causes dans les milieux anisotropes. Dans de tels milieux, une cause appliquée suivant une direction produit en général un effet orienté dans une autre direction. Les phénomènes physiques sont alors décrits par des *tenseurs*.

Les grandeurs, qui ne dépendent pas de la direction de mesure et qui sont mesurées par un seul nombre, sont représentées par des scalaires, ou tenseurs *d'ordre zéro*. Les vecteurs sont des tenseurs *d'ordre un*, qui représentent des grandeurs caractérisées par un nombre et une direction. Les grandeurs physiques plus complexes sont représentées par des tenseurs d'ordre supérieur à un.

D'une manière générale, un tenseur peut être défini comme établissant une application linéaire entre deux tenseurs d'ordres inférieurs. En particulier, un tenseur de *rang deux*, défini sur l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ , est un opérateur linéaire qui fait correspondre à tout vecteur  $\vec{X}$  de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  un vecteur  $\vec{Y}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Ce tenseur est représenté dans la base  $(\vec{e})$  par un tableau d'éléments  $T_{kl}$  appelé tableau des composantes du tenseur dans la base  $(\vec{e})$ . Ce tableau est

constitué de 9 nombres ( $k, l = 1, 2, 3$ ). Dans la base  $(\vec{e}')$ , ce même tenseur est représenté par un tableau d'éléments reliés aux précédents par l'expression :

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (4.9)$$

où les termes  $a_{ik}$  et  $a_{jl}$  sont les éléments de la matrice de changement de base. La relation précédente utilise la *convention de sommation*, dans laquelle une répétition d'indice implique une sommation. La relation (4.9) est équivalente à :

$$T'_{ij} = a_{i1} a_{j1} T_{11} + a_{i1} a_{j2} T_{12} + \cdots + a_{i3} a_{j3} T_{33}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.10)$$

L'expression (4.9) peut être prise comme relation de définition d'un tenseur de rang deux : tableau se transformant dans un changement de base suivant la relation (4.9).

Il y a en fait identité entre les composantes des tenseurs de rang deux et les éléments des matrices carrées. Dans le cas où l'espace vectoriel de référence est l'espace  $\mathbb{R}^3$ , nous écrirons donc les éléments des tenseurs de rang 2 sous la forme matricielle :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

## 4.2.2 Changement de base

Dans le cas de bases orthonormées directes, la relation (4.9) de changement de base peut s'écrire :

$$T'_{ij} = a_{ik} T_{kl} a_{lk}. \quad (4.12)$$

Compte tenu des éléments apportés précédemment, cette relation peut se mettre sous la forme d'une écriture matricielle, suivant :

$$\mathbf{T}' = \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{A}^t, \quad (4.13)$$

où  $\mathbf{T}'$  est la matrice  $[T'_{ij}]$ . La relation inverse s'écrit :

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}^t \mathbf{T}' \mathbf{A}. \quad (4.14)$$

## 4.2.3 Diagonalisation d'une matrice. Vecteurs propres et valeurs propres

On dit qu'un vecteur non nul  $\vec{u}$  est vecteur propre d'un tenseur  $\mathbf{T}$  si le vecteur  $\mathbf{T}\vec{u}$  est colinéaire à  $\vec{u}$ . Tout vecteur colinéaire à un vecteur propre est également vecteur propre, et la direction d'un vecteur propre est, par définition, une *direction principale* du tenseur. Le vecteur  $\vec{u}$  doit donc vérifier l'équation :

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \vec{u} = \vec{0}, \quad (4.15)$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur unité de rang deux, ou la matrice  $(3 \times 3)$  unité. Cette relation s'écrit dans une base orthonormée ( $\vec{e}$ ) :

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) u_j = 0, \quad (4.16)$$

en introduisant le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (4.17)$$

Le vecteur  $\vec{u}$  étant différent du vecteur nul, ce système admet des solutions si :

$$\det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (4.18)$$

Cette équation possède généralement trois racines distinctes :  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$ , appelées *valeurs propres* ou *valeurs principales*. À chaque valeur propre  $\lambda^{(k)}$  correspond un vecteur propre  $\vec{u}^{(k)}$  dont les composantes satisfont aux trois équations non indépendantes :

$$T_{ij} u_j^{(k)} = \lambda^{(k)} u_i^{(k)}. \quad (4.19)$$

Dans le cas de tenseurs symétriques, nous avons les deux propriétés fondamentales : 1) les valeurs propres sont réelles ; 2) les directions principales sont orthogonales. Dans la base des vecteurs propres supposés de plus normés ( $u_i^{(k)} = \delta_{ik}$ ), la relation (4.19) s'écrit alors :

$$T'_{ij} \delta_{jk} = \lambda^{(k)} \delta_{ik}, \quad (4.20)$$

soit :

$$T'_{ij} = \lambda^{(j)} \delta_{ij}, \quad (4.21)$$

où  $T'_{ij}$  sont les nouvelles composantes dans la base des vecteurs propres. Le tableau  $T'_{ij}$  est donc diagonal :

$$\left[ T'_{ij} \right] = \begin{bmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Dans la base principale, les éléments d'un tenseur de rang 2 s'écrivent suivant une matrice diagonale.

#### 4.2.4 Inverse d'une matrice symétrique d'ordre 3

Les formules d'inversion d'une matrice symétrique  $3 \times 3$  restent assez simples à

utiliser. Elles s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A_{ij} \end{bmatrix}, & \mathbf{A}' = \mathbf{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} A'_{ij} \end{bmatrix} \\
 A'_{11} &= \frac{1}{\Delta} (A_{22}A_{33} - A_{23}^2), & A'_{22} &= \frac{1}{\Delta} (A_{11}A_{33} - A_{13}^2), \\
 A'_{33} &= \frac{1}{\Delta} (A_{11}A_{22} - A_{12}^2), & A'_{12} &= \frac{1}{\Delta} (A_{13}A_{23} - A_{12}A_{33}), \\
 A'_{13} &= \frac{1}{\Delta} (A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}), & A'_{23} &= \frac{1}{\Delta} (A_{12}A_{13} - A_{23}A_{11}), \\
 \Delta &= \det \mathbf{A} = A_{11}A_{22}A_{33} + 2A_{12}A_{13}A_{23} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{13}^2 - A_{33}A_{12}^2.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

## CHAPITRE 5

# Contraintes

## 5.1 ÉTAT DES CONTRAINTES DANS UN SOLIDE

L'état des contraintes en un point  $M$  d'un solide soumis à un chargement mécanique (figure 5.1) permet de caractériser les actions mécaniques exercées sur la matière en ce point.

### 5.1.1 Tenseur des contraintes

En tout point  $M$  d'un milieu continu, l'état des contraintes est entièrement déterminé par la connaissance du *tenseur des contraintes*, noté  $\sigma(M)$ . Ce tenseur est un tenseur de rang 2, symétrique, représenté par la matrice :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

$$\sigma_{21} = \sigma_{12}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}, \quad \sigma_{32} = \sigma_{23}.$$

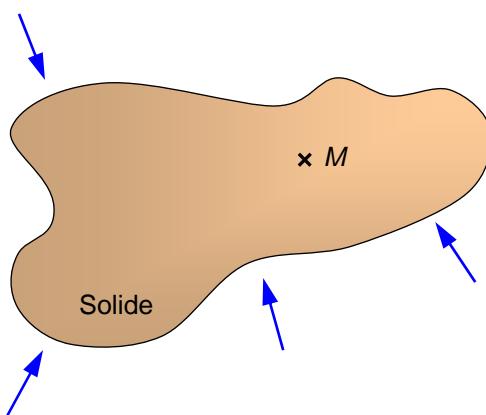


FIGURE 5.1. Solide soumis à un chargement mécanique.

### 5.1.2 Force exercée en un point sur un élément de surface

L'action mécanique exercée sur la surface unité (considérée comme infiniment petite) d'orientation  $\vec{n}$  (figure 5.2), par la matière située du côté de l'orientation positive définie par le vecteur  $\vec{n}$  (vecteur unitaire), est une force dont la résultante  $\vec{t}(M, \vec{n})$ , appelée *vecteur contrainte*, s'exprime par la relation :

$$\vec{t}(M, \vec{n}) = \vec{t} = \boldsymbol{\sigma}(M)\vec{n}. \quad (5.2)$$

La force  $\overrightarrow{dF}$  exercée sur l'élément  $dS$  de surface de même orientation s'exprime donc par :

$$\overrightarrow{dF} = \vec{t} dS. \quad (5.3)$$

L'expression (5.2) peut s'écrire sous forme matricielle en introduisant :

— la matrice des composantes du vecteur contrainte  $\vec{t}$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ :

$$[\vec{t}] = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

— la matrice des composantes du vecteur normale  $\vec{n}$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ :

$$[\vec{n}] = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

suivant :

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

D'où les composantes du vecteur  $\vec{t}$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ :

$$\begin{aligned} t_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3, \\ t_2 &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3, \\ t_3 &= \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3, \end{aligned} \quad (5.7)$$

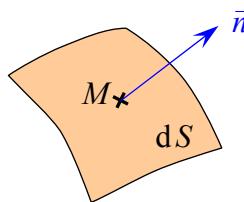


FIGURE 5.2. Élément de surface en un point M.

et le vecteur contrainte s'écrit :

$$\vec{t} = t_1 \vec{e}_1 + t_2 \vec{e}_2 + t_3 \vec{e}_3. \quad (5.8)$$

## 5.2 PROPRIÉTÉS DU TENSEUR DES CONTRAINTES

### 5.2.1 Signification physique des composantes du tenseur

Considérons un élément de surface dont la direction de la normale est confondue avec la direction de l'un des axes de référence (figure 5.3). Soit :

$$\vec{n} = \vec{e}_j \quad \text{avec } j = 1, 2, 3.$$

D'après la relation (5.7), les composantes du vecteur contrainte sont :

$$\begin{aligned} t_1 &= \sigma_{1j}, \\ t_2 &= \sigma_{2j}, \\ t_3 &= \sigma_{3j}, \\ \text{avec } \sigma_{ji} &= \sigma_{ij}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Les grandeurs  $\sigma_{1j}$ ,  $\sigma_{2j}$ ,  $\sigma_{3j}$  sont donc respectivement les composantes suivant les directions ( $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$ ) du vecteur contrainte relatif à une surface de direction normale  $\vec{n} = \vec{e}_j$  ( $j = 1, 2$  ou  $3$ ). Par exemple, si  $\vec{n} = \vec{e}_1$ , les composantes sont respectivement  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{21} = \sigma_{12}$ ,  $\sigma_{31} = \sigma_{31}$ , et le vecteur contrainte s'écrit :

$$\vec{t}(M, \vec{e}_1) = \sigma_{11} \vec{e}_1 + \sigma_{12} \vec{e}_2 + \sigma_{13} \vec{e}_3. \quad (5.10)$$

D'où le schéma de la figure 5.4.

Il est usuel de représenter les composantes des vecteurs contraintes exercées sur les faces d'un cube d'arêtes parallèles aux axes de référence. Deux notations sont utilisées et sont reportées sur la figure 5.5, suivant les directions considérées : (1, 2, 3) ou ( $x, y, z$ ).

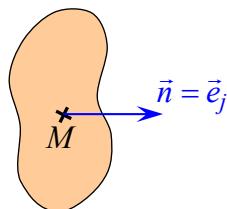


FIGURE 5.3. Élément de surface normal à la direction  $\vec{e}_j$  de l'un des axes de référence.

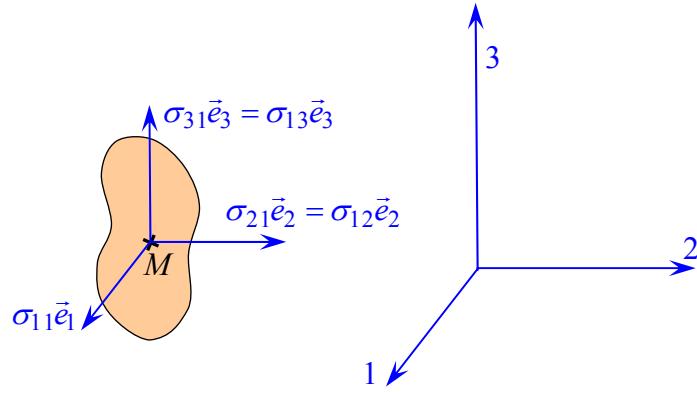


FIGURE 5.4. Composantes du vecteur contrainte sur une surface de direction normale.

### 5.2.2 Composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte

Le vecteur contrainte  $\vec{t}$  est habituellement décomposé (figure 5.6) en :

- une *contrainte normale*  $\vec{t}_n$  de direction  $\vec{n}$ ,
- une *contrainte tangentielle*  $\vec{t}_t$  de direction contenue dans le plan vectoriel de l'élément de surface. Cette contrainte tangentielle est généralement appelée *contrainte de cisaillement*.

Le vecteur contrainte s'écrit alors :

$$\vec{t} = \vec{t}_n + \vec{t}_t. \quad (5.11)$$

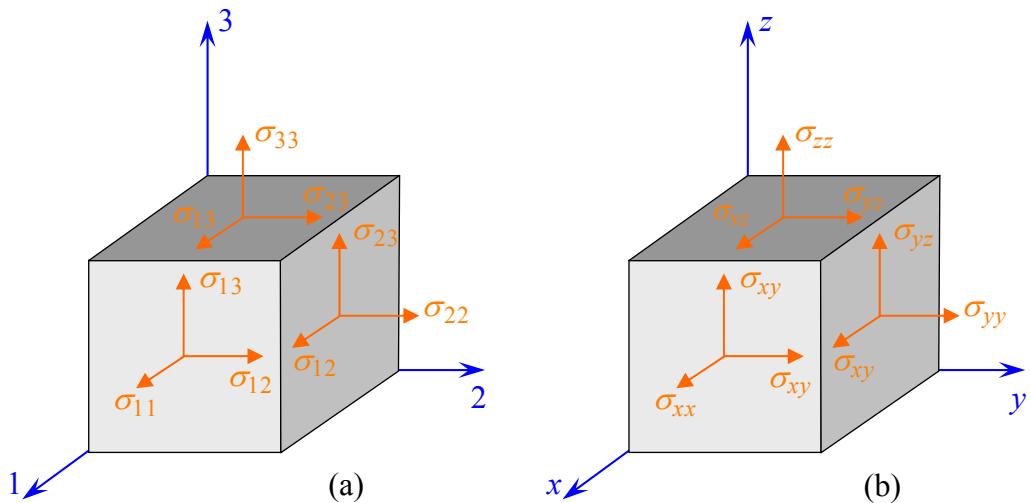


FIGURE 5.5. Composantes des vecteurs contraintes: (a) dans un système d'axes (1,2,3); (b) dans un système d'axes ( $x, y, z$ ).

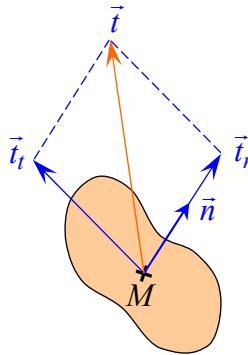


FIGURE 5.6. Composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte.

La contrainte normale s'exprime suivant :

$$\vec{t}_n = t_n \vec{n}, \text{ avec } t_n = \vec{n} \cdot \vec{t}, \quad (5.12)$$

où  $t_n$  est la composante normale du vecteur contrainte. Introduisant la relation (5.2), cette composante s'écrit suivant :

$$t_n = \vec{n} \cdot [\boldsymbol{\sigma}(M) \vec{n}]. \quad (5.13)$$

Cette relation peut être réécrite en utilisant la notation matricielle sous la forme :

$$t_n = \mathbf{n}^t \boldsymbol{\sigma}(M) \mathbf{n}, \quad (5.14)$$

en introduisant la matrice ligne  $\mathbf{n}^t = [n_1 \ n_2 \ n_3]$  transposée de la matrice  $\mathbf{n}$ . Nous obtenons :

$$t_n = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + 2\sigma_{12} n_1 n_2 + 2\sigma_{13} n_1 n_3 + 2\sigma_{23} n_2 n_3. \quad (5.15)$$

Si  $t_n$  est positif, on dit que le solide en  $M$  subit dans la direction  $\vec{n}$  une tension ou traction. Si  $t_n$  est négatif, le milieu subit une compression.

La contrainte de cisaillement peut être déterminée par la relation :

$$\vec{t}_t = \vec{n} \wedge \{[\boldsymbol{\sigma}(M) \vec{n}] \wedge \vec{n}\}. \quad (5.16)$$

### 5.2.3 Directions principales. Contraintes principales

Le tenseur des contraintes étant de rang 2, il existe au moins une base (chapitre 4), dite *base principale* du tenseur des contraintes, dans laquelle la matrice représentant ce tenseur est diagonale. Dans cette base principale, la matrice des contraintes s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{(3)} \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Les trois composantes  $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}$  sont les *contraintes principales*.

Si le tenseur des contraintes est exprimé dans une base non principale, les contraintes principales sont les racines de l'équation :

$$\det[\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}] = 0, \quad (5.18)$$

où  $\delta_{ij} = 1$  si  $i=j$ , et  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Dans le cas où la surface au point  $M$  est normale à une direction principale  $\vec{e}^{(i)}$ , on trouve sans difficulté :

$$\begin{aligned} t_{ni} &= \sigma^{(i)}, \\ t_{ti} &= 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Pour une direction principale, la contrainte de cisaillement est nulle. Les directions principales sont donc telles que  $\sigma(M)\vec{n}$  soit colinéaire à  $\vec{n}$ .

## 5.2.4 Changement de base

Les relations entre les contraintes  $\sigma_{ij}$  exprimées dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , et les contraintes  $\sigma'_{ij}$  exprimées dans la base  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  s'obtiennent dans le cas d'une rotation autour de la direction  $\vec{e}_3$  en combinant les relations (4.6), (4.7) et (4.13). Soit :

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= \sigma_{11} \cos^2 \theta + 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta, \\ \sigma'_{12} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\ \sigma'_{13} &= \sigma_{13} \cos \theta + \sigma_{23} \sin \theta, \\ \sigma'_{21} &= \sigma'_{12}, \\ \sigma'_{22} &= \sigma_{11} \sin^2 \theta - 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta, \\ \sigma'_{23} &= -\sigma_{13} \sin \theta + \sigma_{23} \cos \theta, \\ \sigma'_{31} &= \sigma'_{13}, \quad \sigma'_{32} = \sigma'_{23}, \quad \sigma'_{33} = \sigma_{33}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Dans le cas où la base initiale  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est la base principale  $(\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}, \vec{e}^{(3)})$  du tenseur des contraintes, les relations précédentes se réduisent à :

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= \sigma^{(1)} \cos^2 \theta + \sigma^{(2)} \sin^2 \theta, \\ \sigma'_{12} &= (\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}) \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma'_{13} &= 0, \quad \sigma'_{21} = \sigma'_{12}, \\ \sigma'_{22} &= \sigma^{(1)} \sin^2 \theta + \sigma^{(2)} \cos^2 \theta, \\ \sigma'_{23} &= 0, \quad \sigma'_{31} = 0, \quad \sigma'_{32} = 0, \\ \sigma'_{33} &= \sigma^{(3)}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

## 5.3 ÉTATS PARTICULIERS DE CONTRAINTES

### 5.3.1 Tenseur sphérique et déviateur des contraintes

Il est toujours possible de décomposer le tenseur des contraintes  $\sigma(M)$  en un point  $M$ , comme la somme de deux tenseurs : l'un  $\sigma_S(M)$  appelé *tenseur sphérique*, et l'autre  $\sigma_D(M)$  appelé *déviateur*; soit :

$$\sigma(M) = \sigma_S(M) + \sigma_D(M). \quad (5.22)$$

Ces tenseurs sont définis de la manière suivante :

$$\sigma_S(M) = \frac{s}{3} \mathbf{I}, \quad (5.23)$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur unitaire et  $s$  la trace de  $\sigma(M)$  :  $s = \text{tr } \sigma(M)$ . Le tenseur  $\sigma_D(M)$  est un tenseur de trace nulle, ayant mêmes directions principales que  $\sigma(M)$  et pour contraintes principales :

$$\sigma^{(1)} - \frac{s}{3}, \quad \sigma^{(2)} - \frac{s}{3}, \quad \sigma^{(3)} - \frac{s}{3}. \quad (5.24)$$

### 5.3.2 Compression ou tension sphérique

Un état de contraintes en un point est un état de compression ou tension sphérique, lorsque *le déviateur est le tenseur nul*. Soit :

$$\sigma(M) = \sigma_S(M) = \frac{s}{3} \mathbf{I}. \quad (5.25)$$

Cet état est donc caractérisé par les propriétés suivantes :

- le vecteur contrainte  $\vec{t}(M, \vec{n})$  est colinéaire à  $\vec{n}$  ;
- les contraintes principales sont égales :

$$\sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} = \sigma^{(3)} = \frac{s}{3}, \quad (5.26)$$

- quel que soit  $\vec{n}$ , nous avons :

$$t_n = \frac{s}{3}, \quad t_t = 0. \quad (5.27)$$

### 5.3.3 Traction ou compression simple dans une direction

Un état de contraintes est un état de traction ou compression simple dans une direction si, et seulement si, deux des contraintes principales sont nulles.

Par exemple :  $\sigma^{(2)} = \sigma^{(3)} = 0$ . On a alors un état de contrainte uniaxiale dans la direction  $\vec{e}^{(1)}$ . Si  $\sigma^{(1)} > 0$ , on a une traction simple. Si  $\sigma^{(1)} < 0$ , on a une compression simple. On trouve aisément que la matrice des contraintes n'est pas modifiée par rotation autour de la direction  $\vec{e}^{(1)}$ .

Comme autres propriétés, nous avons :

- le vecteur  $\vec{t}(M, \vec{n})$  est toujours colinéaire à  $\vec{e}^{(1)}$  ;
- si  $\vec{n}$  est orthogonal à  $\vec{e}^{(1)}$ , alors :  $\vec{t}(M, \vec{n}) = \vec{0}$ .

### 5.3.4 Cisaillement simple

En un point  $M$ , un état de contraintes est un état de cisaillement simple (ou pur), lorsque l'une des contraintes principales est nulle et les deux autres opposées. Le déterminant et la trace de la matrice des contraintes sont nuls.

Par exemple :

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)} &= \tau, \\ \sigma^{(2)} &= -\tau, \\ \sigma^{(3)} &= 0.\end{aligned}\tag{5.28}$$

La matrice des contraintes s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\tag{5.29}$$

Cherchons les contraintes dans le plan principal, c'est-à-dire les contraintes exercées sur un élément de surface de direction  $\vec{n}$  contenue dans le plan principal  $(\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)})$  (figure 5.7). Soit  $\theta$  l'angle que fait la normale  $\vec{n}$  avec la direction  $\vec{e}^{(1)}$  :  $\vec{n} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ . Le vecteur contrainte en  $M$  dans la direction  $\vec{n}$  est donné par l'expression :

$$[\vec{t}(M, \vec{n})] = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit :

$$\vec{t}(M, \vec{n}) = (\tau \cos \theta, -\tau \sin \theta, 0),\tag{5.30}$$

où les composantes sont exprimées dans la base principale  $(\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}, \vec{e}^{(3)})$ .

Cherchons maintenant les composantes du vecteur contrainte dans la base  $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{e}^{(3)})$  (figure 5.7) obtenue par rotation  $\theta$  autour de la direction  $\vec{e}^{(3)}$ . Elles se déterminent par l'expression :

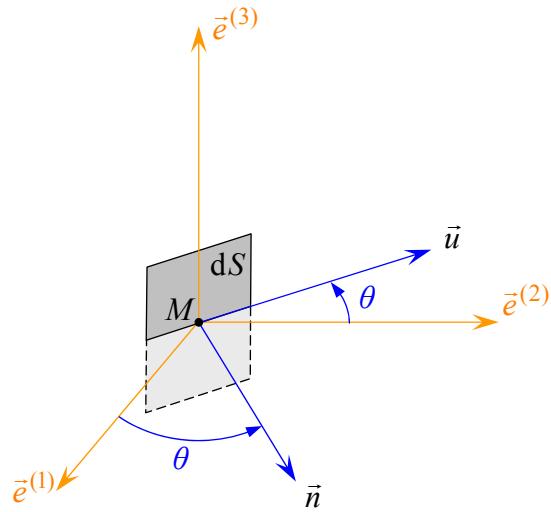


FIGURE 5.7. Élément de surface orthogonal au plan principal.

$$[\vec{t}(M, \vec{n})] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau \cos \theta \\ -\tau \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ -2\tau \sin \theta \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Les composantes dans la base  $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{e}^{(3)})$  s'écrivent donc :

$$\vec{t}(M, \vec{n}) = (\tau \cos 2\theta, -\tau \sin 2\theta, 0). \quad (5.32)$$

La composante normale est :

$$t_n = \tau \cos 2\theta, \quad (5.33)$$

et la composante tangentielle :

$$t_t = -\tau \sin 2\theta. \quad (5.34)$$

Ces expressions montrent les propriétés suivantes :

1. Pour :

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4} + \pi \quad \begin{cases} t_n = 0, \\ t_t = -\tau, \end{cases} \quad (5.35)$$

$$\theta = 3\frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad 3\frac{\pi}{4} + \pi \quad \begin{cases} t_n = 0, \\ t_t = \tau, \end{cases} \quad (5.36)$$

résultats schématisés sur la figure 5.8a.

2. Pour :

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad \pi \quad \begin{cases} t_n = \tau, \\ t_t = 0, \end{cases} \quad (5.37)$$

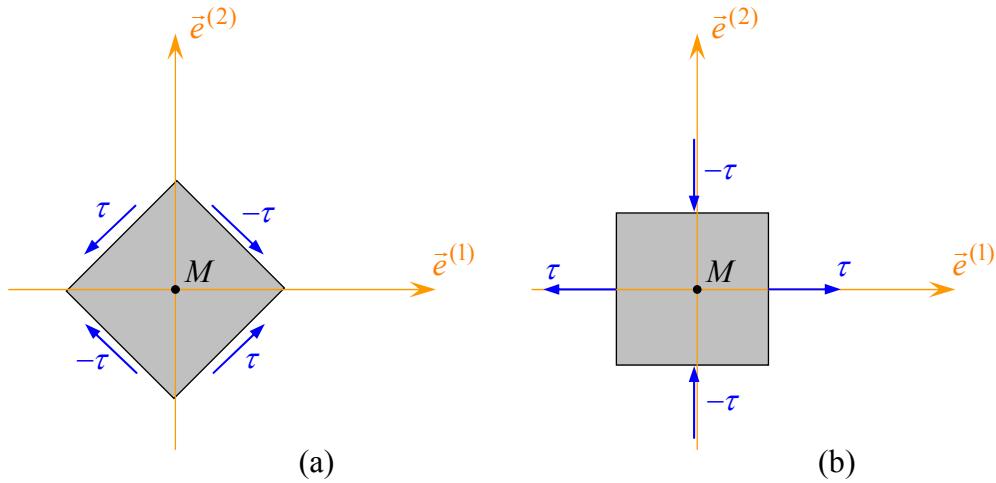


FIGURE 5.8. États des contraintes dans le cas d'un cisaillement simple.

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} + \pi \quad \begin{cases} t_n = -\tau, \\ t_t = 0, \end{cases} \quad (5.38)$$

résultats schématisés sur la figure 5.8b.

Enfin, on trouve sans difficulté que la matrice des contraintes s'écrit dans une base obtenue à partir de la base principale par rotation  $\theta$  de la direction  $\vec{e}^{(3)}$  normale au plan de cisaillement (base  $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{e}^{(3)})$ ), suivant :

$$\begin{bmatrix} \tau \cos 2\theta & -\tau \sin 2\theta & 0 \\ -\tau \sin 2\theta & -\tau \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

Dans le cas où  $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi$  (figure 5.8a), la matrice s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

### 5.3.5 État de contraintes planes

Un état est un état de contraintes planes en un point si, et seulement si, l'une des contraintes principales est nulle. Par exemple :  $\sigma^{(3)} = 0$ . La matrice des contraintes s'écrit alors dans la base principale suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

Dans une base obtenue à partir de la base principale par rotation autour de la direction  $\vec{e}^{(3)}$ , on trouve que la matrice des contraintes s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

Comme propriétés, nous avons :

- si  $\vec{n}$  est colinéaire à  $\vec{e}^{(3)}$ ,  $\vec{t}(M, \vec{n}) = \vec{0}$ ,
- tout vecteur contrainte est contenu dans le plan vectoriel  $(\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)})$ .

### 5.3.6 État de contraintes quelconque

Étant donné le caractère linéaire des tenseurs, un état quelconque de contraintes en un point  $M$  peut toujours être considéré comme la superposition (ou plus généralement comme une combinaison linéaire) d'états de contraintes particuliers.

Par exemple :

- un état quelconque peut toujours être considéré comme la superposition de trois tractions (ou compressions) simples suivant les directions principales;
- un état de cisaillement simple peut être considéré comme la superposition d'une traction et d'une compression de mêmes intensités (paragraphe 5.3.4).

## 5.4 NOTATION MATRICIELLE DE L'INGÉNIEUR

### 5.4.1 Introduction de la notation

La symétrie du tenseur des contraintes ramène à 6 le nombre de composantes nécessaires pour définir ce tenseur. Pour cette raison, l'ingénieur utilise une notation qui consiste à remplacer le tableau matriciel des 9 composantes du tenseur par une matrice colonne à 6 composantes, suivant l'une des notations :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Cette notation permet de condenser l'écriture des relations d'élasticité (chapitre 7).

Toutefois, la détermination du vecteur contrainte nécessite de revenir à la notion matricielle  $3 \times 3$ .

### 5.4.2 Changement de base

Avec cette nouvelle notation, les relations entre les contraintes  $\sigma_i$  exprimées dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et les contraintes  $\sigma'_i$  exprimées dans la base  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ , obtenue par rotation autour de la direction  $\vec{e}_3$ , peuvent s'écrire sous une forme matricielle déduite des expressions (5.20), suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

Soit, sous forme condensée :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma}, \quad (5.45)$$

où  $\mathbf{T}_\sigma$  est la matrice de changement de base des contraintes exprimée par :

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (5.46)$$

La relation de changement de base inverse est obtenue en inversant l'expression (5.45), soit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \boldsymbol{\sigma}'. \quad (5.47)$$

La matrice inverse  $\mathbf{T}_\sigma^{-1}$  est en fait facilement exprimée à partir de  $\mathbf{T}_\sigma$  en changeant  $\theta$  en  $-\theta$  puisque le changement de base inverse correspond à une rotation de  $-\theta$  autour de la direction  $\vec{e}_3$ . Soit :

$$\mathbf{T}_\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (5.48)$$

## EXERCICES

**5.1** Un état de contraintes en un point  $M$  d'une structure est défini dans les axes ( $Mxyz$ ) par :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} 30 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

Déterminer les valeurs des contraintes principales en  $M$  et les directions principales des contraintes.

Exprimer le vecteur contrainte  $\vec{t}(M, \vec{n})$  qui s'exerce au point  $M$  sur la surface unité d'orientation  $\vec{n}$  de composantes  $(n_x, n_y, n_z)$  par rapport aux axes ( $Mxyz$ ).

Étudier le cas où la surface unité est orthogonale à  $\overrightarrow{Mx}$ ; orthogonale à  $\overrightarrow{My}$ ; orthogonale à  $\overrightarrow{Mz}$ .

Trouver la valeur maximale de la contrainte tangentielle et les directions des surfaces correspondantes.

**5.2** Exprimer les matrices  $\mathbf{T}_\sigma$  de changement de base des contraintes, dans le cas où la direction  $\vec{e}_3$  est inversée :  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rightarrow (\vec{e}_1, \vec{e}_2, -\vec{e}_3)$ ; puis dans le cas où la direction  $\vec{e}_2$  est inversée :  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rightarrow (\vec{e}_1, -\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

**5.3** Dans le cas d'un état de contraintes planes dans le plan (1, 2), expliciter la matrice  $3 \times 3$  de changement de base, dans le cas d'une rotation  $\theta$  autour de la direction 3.

## CHAPITRE 6

# Déformations

## 6.1 ÉTAT DES DÉFORMATIONS EN UN POINT

### 6.1.1 Déformations en un point

Soit un solide ( $S$ ) déformable (figure 6.1). Dans son état non déformé, la position d'un point  $M$  quelconque du solide ( $S$ ) est définie, dans un repère  $(O/\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , par le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3. \quad (6.1)$$

Sous l'effet d'actions mécaniques extérieures, le solide se déforme, et les points du solide se déplacent : le point  $M$  vient en  $M'$ . La position du point  $M$  dans l'état déformé est définie par :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'}. \quad (6.2)$$

Le vecteur déplacement  $\overrightarrow{MM'}$  est une fonction du point  $M$ , généralement notée  $\vec{u}(M)$ . Ce déplacement varie d'une manière continue à l'intérieur d'un solide.

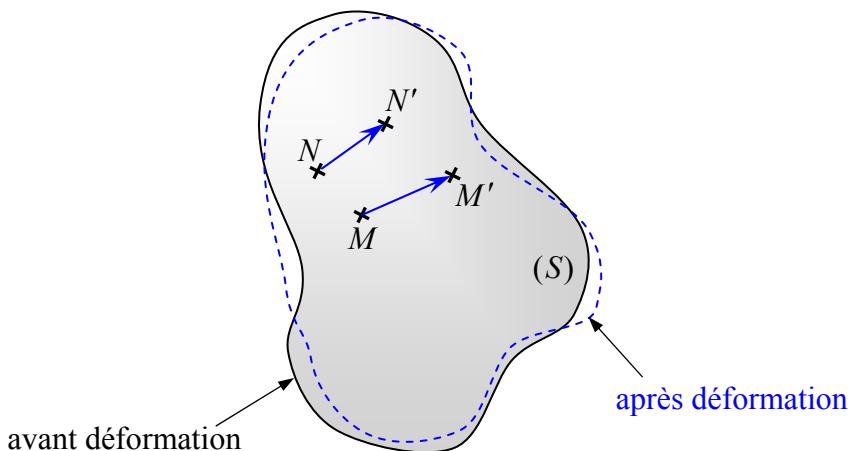


FIGURE 6.1. Solide déformable.

Pour un autre point  $N$  du solide, nous avons de même :

$$\overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NN'} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{NN'} = \vec{u}(N), \quad (6.3)$$

où  $N$  et  $N'$  sont les positions respectives dans les états non déformé et déformé.

La position relative entre les points  $N$  et  $M$ , après déformation, s'exprime suivant :

$$\overrightarrow{MN'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} + \vec{u}(N) - \vec{u}(M),$$

soit :

$$\overrightarrow{MN'} = \overrightarrow{MN} + \vec{u}(N) - \vec{u}(M). \quad (6.4)$$

Si les points  $M$  et  $N$  sont infiniment voisins, nous avons :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OM}.$$

Le vecteur  $d\overrightarrow{OM}$  représente la variation du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$ , lorsque l'on passe du point  $M$  au point  $N$ . De même :

$$\overrightarrow{MN'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = d\overrightarrow{OM'}.$$

L'expression (6.4) s'écrit alors :

$$d\overrightarrow{OM'} = d\overrightarrow{OM} + d\vec{u}(M). \quad (6.5)$$

Les modules  $\|d\overrightarrow{OM}\|$  et  $\|d\overrightarrow{OM'}\|$  représentent les distances entre les points  $M$  et  $N$  infiniment voisins, respectivement dans l'état non déformé et dans l'état déformé. Nous pouvons écrire :

$$\|d\overrightarrow{OM'}\|^2 = (d\overrightarrow{OM'})^2 = (d\overrightarrow{OM})^2 + 2d\overrightarrow{OM} \cdot d\vec{u}(M) + (d\vec{u}(M))^2.$$

La variation entre le carré des distances des points  $M$  et  $N$  de l'état non déformé à l'état déformé s'écrit donc :

$$\|d\overrightarrow{OM'}\|^2 - \|d\overrightarrow{OM}\|^2 = 2d\overrightarrow{OM} \cdot d\vec{u}(M) + (d\vec{u}(M))^2. \quad (6.6)$$

Le vecteur  $d\overrightarrow{OM}$  s'exprime dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  par la relation :

$$d\overrightarrow{OM} = \vec{e}_1 dx_1 + \vec{e}_2 dx_2 + \vec{e}_3 dx_3,$$

ou

$$d\overrightarrow{OM} = \vec{e}_i dx_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

en introduisant la convention de sommation, dans laquelle une répétition d'indice implique une sommation. Le vecteur déplacement  $\vec{u}(M)$  s'écrit de la même façon :

$$\vec{u}(M) = \vec{e}_j u_j,$$

où  $u_j$  sont les composantes du vecteur  $\vec{u}(M)$ . D'où :

$$d\vec{u}(M) = \vec{e}_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx_j \quad j, k = 1, 2, 3, \quad (6.7)$$

avec une double sommation sur les indices  $j$  et  $k$ .

L'expression (6.6) s'écrit donc :

$$(d\overrightarrow{OM'})^2 - (d\overrightarrow{OM})^2 = 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i dx_j.$$

La permutation des indices  $i$  et  $j$  ne change pas la valeur de la somme, puisque :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_j dx_i.$$

D'où l'écriture de l'expression précédente sous la forme :

$$(d\overrightarrow{OM'})^2 - (d\overrightarrow{OM})^2 = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j. \quad (6.8)$$

## 6.1.2 Tenseur des déformations

La relation (6.8) peut se mettre sous la forme :

$$(d\overrightarrow{OM'})^2 - (d\overrightarrow{OM})^2 = 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j, \quad (6.9)$$

en posant :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (6.10)$$

Les 9 quantités  $\varepsilon_{ij}$  constituent les composantes du *tenseur des déformations* dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Dans le cadre d'une théorie linéarisée, dite des *petites déformations*, l'infiniment petit du deuxième ordre  $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$  est négligé par rapport à ceux du premier ordre. Les composantes du tenseur des déformations se réduisent alors à :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (6.11)$$

Le tenseur des déformations est un tenseur de rang 2, symétrique :

$$\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}. \quad (6.12)$$

Il s'écrit sous forme matricielle suivant :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

### 6.1.3 Interprétation des termes du tenseur des déformations

Considérons au point  $M$  (figure 6.2) deux éléments infinitésimaux  $MN_1$  et  $MN_2$ , dans l'état non déformé, parallèles respectivement aux axes  $Ox_1$  et  $Ox_2$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN_1} &= \vec{e}_1 dx_1, \\ \overrightarrow{MN_2} &= \vec{e}_2 dx_2. \end{aligned}$$

Après déformation, les points  $M$ ,  $N_1$  et  $N_2$  sont respectivement en  $M'$ ,  $N'_1$  et  $N'_2$ .

Nous avons :

$$\overrightarrow{M'N'_1} = \vec{u}(M) + d_1 \vec{u}(M),$$

avec d'après (6.7) :

$$d_1 \vec{u}(M) = \vec{e}_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \vec{e}_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1. \quad (6.15)$$

La grandeur  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 = \varepsilon_{11} dx_1$  représente donc l'allongement de  $MN_1$  suivant la direction  $\vec{e}_1$ . Il en résulte que  $\varepsilon_{11}$  représente *l'allongement unitaire* au point  $M$  dans la direction  $\vec{e}_1$ .

De même :

$$\overrightarrow{M'N'_2} = \vec{u}(M) + d_2 \vec{u}(M),$$

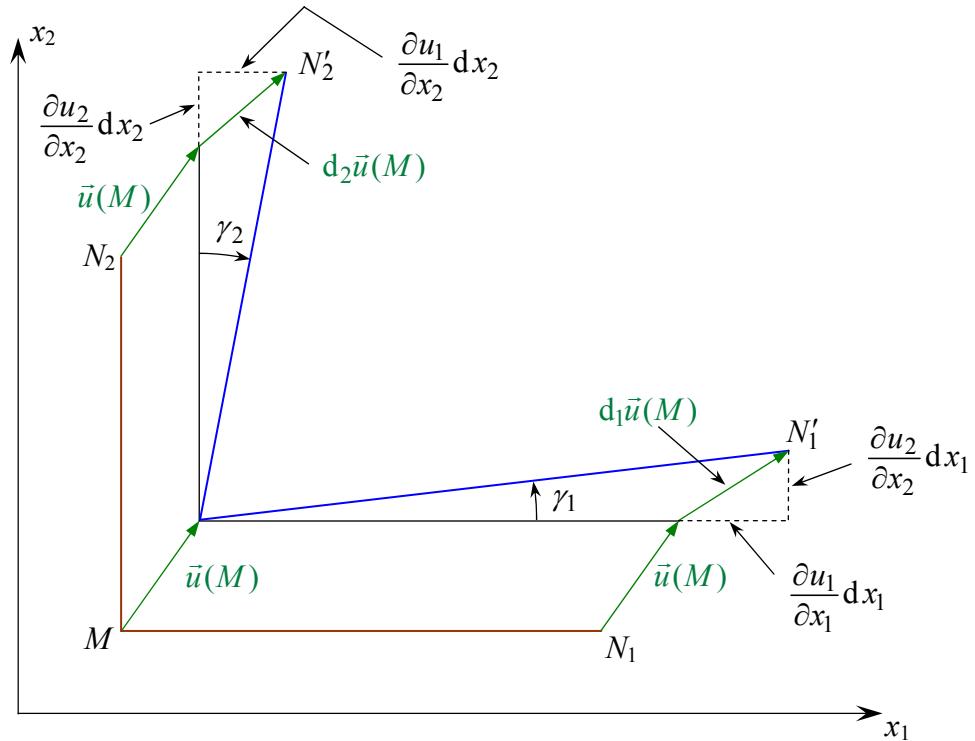


FIGURE 6.2. Déformations en un point.

avec :

$$d_2\vec{u}(M) = \vec{e}_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \vec{e}_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2. \quad (6.16)$$

La grandeur  $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{22}$  représente donc l'allongement unitaire au point  $M$  dans la direction  $\vec{e}_2$ .

L'angle  $\gamma_1$  entre les directions  $\overrightarrow{MN_1}$  et  $\overrightarrow{MN'_1}$  avant et après déformation est tel que :

$$\tan \gamma_1 = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1}{dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}} \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1},$$

puisque les déformations sont petites  $\left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \ll 1 \right)$ . Soit, en définitive :

$$\gamma_1 \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1}.$$

De même, l'angle  $\gamma_2$  entre les directions  $\overrightarrow{MN_2}$  et  $\overrightarrow{MN'_2}$  est :

$$\gamma_2 \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

On en déduit que l'angle, primitivement égal à  $\pi/2$  que faisaient les directions  $\overrightarrow{MN_1}$  et  $\overrightarrow{MN_2}$  au point  $M$  avant déformation, est diminué après déformation de l'angle  $\gamma_{12} = \gamma_1 + \gamma_2$ , avec :

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}. \quad (6.17)$$

La composante  $\varepsilon_{12}$  du tenseur des déformations représente donc la moitié de la déformation angulaire au point  $M$  entre les directions  $\overrightarrow{MN_1}$  et  $\overrightarrow{MN_2}$ . Cette déformation angulaire  $\gamma_{12}$  est appelée *déformation en cisaillement* au point  $M$  entre les directions  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ .

De la même manière :

- la composante  $\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$  représente l'allongement unitaire au point  $M$  dans la direction  $\vec{e}_3$  ;
- la composante  $\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)$  représente la moitié de la déformation en cisaillement  $\gamma_{13}$  entre les directions  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_3$  ;
- la composante  $\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)$  représente la moitié de la déformation en cisaillement  $\gamma_{23}$  entre les directions  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$ .

#### 6.1.4 Conditions de compatibilité

Le champ des déplacements correspondant à un état de déformation donné est obtenu par intégration des équations (6.14). Soit au total six équations pour déterminer les trois composantes  $(u_1, u_2, u_3)$  du déplacement. Pour que la solution soit unique, les composantes du tenseur des déformations doivent vérifier les six relations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial^2 x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial^2 x_i^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \right), \quad i \neq j \neq k, \end{aligned} \quad (6.18)$$

avec  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

Ces expressions constituent les six *relations de compatibilité*.

## 6.2 DÉFORMATION EN UN POINT

### 6.2.1 Allongement unitaire

Soit un élément quelconque  $MN$  du solide de longueur  $dl$  et de direction définie par le vecteur directeur unitaire  $\vec{u}_\alpha$  du bipoint  $(M, N)$ . Nous avons :

$$\overrightarrow{MN} = \vec{u}_\alpha dl.$$

Les composantes  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  du vecteur  $\vec{u}_\alpha$  dans la base  $(\vec{e}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  sont les cosinus directeurs définissant la direction du segment  $MN$ . Les composantes du vecteur  $\overrightarrow{MN}$  dans la base  $(\vec{e})$  sont :

$$\overrightarrow{MN} \begin{cases} dx_1 = \alpha_1 dl, \\ dx_2 = \alpha_2 dl, \\ dx_3 = \alpha_3 dl. \end{cases} \quad (6.19)$$

Cherchons l'allongement unitaire  $\varepsilon_\alpha$  de  $MN$ , lors de la déformation (allongement unitaire dans la direction  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ). Nous avons après déformation :

$$M'N' = dl + \varepsilon_\alpha dl.$$

L'expression (6.9) s'écrit :

$$[(1 + \varepsilon_\alpha)^2 - 1](dl)^2 = 2\varepsilon_{ij}\alpha_i\alpha_j(dl)^2.$$

Soit en négligeant  $\varepsilon_\alpha^2$  :

$$\varepsilon_\alpha = \alpha_i\alpha_j\varepsilon_{ij}. \quad (6.20)$$

Développée, cette relation s'écrit :

$$\varepsilon_\alpha = \alpha_1^2\varepsilon_{11} + \alpha_2^2\varepsilon_{22} + \alpha_3^2\varepsilon_{33} + 2\alpha_1\alpha_2\varepsilon_{12} + 2\alpha_1\alpha_3\varepsilon_{13} + 2\alpha_2\alpha_3\varepsilon_{23}. \quad (6.21)$$

L'expression (6.21) a la même forme que l'expression (5.15) qui permet de calculer la composante normale  $t_n$  de la contrainte. On en déduit donc, pour l'allongement unitaire, des expressions analogues aux expressions (5.13) et (5.14). Soit :

$$\varepsilon_\alpha = \vec{u}_\alpha \cdot [\boldsymbol{\varepsilon}(M) \vec{u}_\alpha], \quad (6.22)$$

ou sous forme matricielle :

$$\varepsilon_\alpha = \mathbf{u}_\alpha^t \boldsymbol{\varepsilon}(M) \mathbf{u}_\alpha. \quad (6.23)$$

### 6.2.2 Déformation en cisaillement

La déformation en cisaillement permet de calculer la variation de l'angle  $\theta_{\alpha\beta}$

entre les deux directions  $\vec{u}_\alpha$  et  $\vec{u}_\beta$ , dans l'état non déformé, qui deviennent  $\vec{u}_{\alpha'}$  et  $\vec{u}_{\beta'}$ , après déformation (figure 6.3). Après déformation, l'angle entre les deux directions  $\vec{u}_{\alpha'}$  et  $\vec{u}_{\beta'}$  est  $\theta_{\alpha'\beta'} + d\theta_{\alpha\beta}$ , où  $d\theta_{\alpha\beta}$  est la déformation en cisaillement. On montre que l'on a sous forme matricielle :

$$d(\cos \theta_{\alpha\beta}) = d(\mathbf{u}_\alpha^t \mathbf{u}_\beta) = 2\mathbf{u}_\alpha^t \boldsymbol{\varepsilon}(M) \mathbf{u}_\beta - (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) \mathbf{u}_\alpha^t \mathbf{u}_\beta, \quad (6.24)$$

expression qui permet de déterminer  $d\theta_{\alpha\beta}$ . Le développement de cette expression conduit à :

$$\begin{aligned} d(\cos \theta_{\alpha\beta}) &= 2(\alpha_1\beta_1\varepsilon_{11} + \alpha_2\beta_2\varepsilon_{22} + \alpha_3\beta_3\varepsilon_{33}) + 2(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\varepsilon_{12} \\ &\quad + 2(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2)\varepsilon_{23} + 2(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3)\varepsilon_{13} \\ &\quad - (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta)(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3), \end{aligned} \quad (6.25)$$

où  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  et  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  sont les composantes des directions  $\vec{u}_\alpha$  et  $\vec{u}_\beta$ , et  $\varepsilon_\alpha$  et  $\varepsilon_\beta$  sont les allongements unitaires dans ces mêmes directions.

La relation (6.24) peut être réécrite suivant :

$$-\sin \theta_{\alpha\beta} d\theta_{\alpha\beta} = 2\mathbf{u}_\alpha^t \boldsymbol{\varepsilon}(M) \mathbf{u}_\beta - (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) \cos \theta_{\alpha\beta},$$

puisque :

$$\mathbf{u}_\alpha^t \mathbf{u}_\beta = \cos \theta_{\alpha\beta}.$$

Finalement, la déformation en cisaillement s'exprime par :

$$d\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{\tan \theta_{\alpha\beta}} (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) - \frac{2}{\sin \theta_{\alpha\beta}} \mathbf{u}_\alpha^t \boldsymbol{\varepsilon}(M) \mathbf{u}_\beta. \quad (6.26)$$

Dans le cas où les deux directions  $\alpha$  et  $\beta$  sont orthogonales, nous avons :

$$\vec{u}_\alpha \cdot \vec{u}_\beta = \mathbf{u}_\alpha^t \mathbf{u}_\beta = \cos \theta_{\alpha\beta} = 0.$$

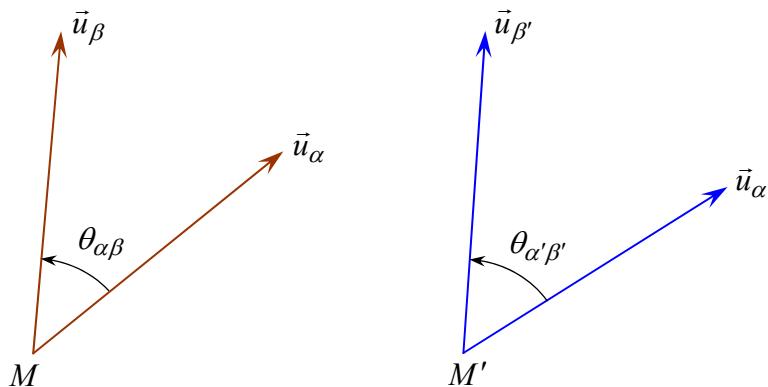


FIGURE 6.3. Déformation en cisaillement.

En notant alors les deux directions  $\vec{u}_\alpha$  et  $\vec{u}_\beta$  par  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ , l'expression (6.24) s'écrit :

$$\begin{aligned} d(\cos \theta_{12}) &= d(\mathbf{u}_1^t \mathbf{u}_2) = 2\mathbf{u}_1^t \boldsymbol{\varepsilon}(M) \mathbf{u}_2, \\ \text{ou} \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$d(\cos \theta_{12}) = d(\mathbf{u}_2^t \mathbf{u}_1) = 2\mathbf{u}_2^t \boldsymbol{\varepsilon}(M) \mathbf{u}_1.$$

La déformation en cisaillement est alors donnée par :

$$d\theta_{12} = -2\mathbf{u}_1^t \boldsymbol{\varepsilon}(M) \mathbf{u}_2 = -2\mathbf{u}_2^t \boldsymbol{\varepsilon}(M) \mathbf{u}_1. \quad (6.28)$$

### 6.2.3 Tenseur des déformations dans les directions principales

Rapporté à ses directions principales, le tenseur des déformations s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

où  $\varepsilon^{(1)}$ ,  $\varepsilon^{(2)}$  et  $\varepsilon^{(3)}$  sont les *déformations principales*.

L'allongement unitaire dans la direction  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , rapporté aux directions principales  $(\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}, \vec{e}^{(3)})$  s'exprime, d'après (6.21), par :

$$\varepsilon_\alpha = \alpha_1^2 \varepsilon^{(1)} + \alpha_2^2 \varepsilon^{(2)} + \alpha_3^2 \varepsilon^{(3)}. \quad (6.30)$$

Les allongements unitaires suivant les trois directions principales sont :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^{(1)}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon^{(2)}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon^{(3)}. \quad (6.31)$$

La déformation en cisaillement s'écrit d'après (6.25) :

$$\begin{aligned} d(\cos \theta_{\alpha\beta}) &= 2(\alpha_1 \beta_1 \varepsilon^{(1)} + \alpha_2 \beta_2 \varepsilon^{(2)} + \alpha_3 \beta_3 \varepsilon^{(3)}) \\ &\quad - (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta)(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Si les deux directions  $\alpha$  et  $\beta$  sont orthogonales, l'expression précédente se simplifie suivant :

$$d(\cos \theta_{\alpha\beta}) = 2(\alpha_1 \beta_1 \varepsilon^{(1)} + \alpha_2 \beta_2 \varepsilon^{(2)} + \alpha_3 \beta_3 \varepsilon^{(3)}). \quad (6.33)$$

Si, de plus, ces deux directions coïncident avec les directions principales, nous avons :  $d(\cos \theta_{\alpha\beta}) = 0$ . Il n'y a pas de déformation en cisaillement.

Enfin, dans le cas où la direction  $\vec{u}_\beta$  est confondue avec une direction principale (par exemple  $\vec{u}_\beta = \vec{u}^{(3)}$ ), la relation (6.24) peut être réécrite en tenant

compte de :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M)\mathbf{u}_\beta = \boldsymbol{\varepsilon}(M)\mathbf{u}^{(3)} = \varepsilon^{(3)}\mathbf{u}^{(3)}.$$

Soit, alors :

$$d(\cos \theta_{\alpha(3)}) = (\varepsilon^{(3)} - \varepsilon_\alpha) \mathbf{u}_\alpha^t \mathbf{u}^{(3)}. \quad (6.34)$$

En particulier, si la direction  $\vec{u}_\alpha$  est orthogonale à la direction principale  $\vec{u}^{(3)}$ , nous avons  $\mathbf{u}_\alpha^t \mathbf{u}^{(3)} = 0$ , et donc  $d(\cos \theta_{\alpha(3)}) = 0$ . Dans le plan orthogonal à une direction propre, toutes les directions varient lors de la déformation en restant dans ce plan.

## 6.2.4 Changement de base

Le tenseur des déformations ayant un tableau des composantes semblable à celui des contraintes, les relations de changement de base s'expriment sous la même forme que dans le cas du tenseur des contraintes. Pour une rotation autour de la direction  $\vec{e}_3$ , les relations sont transposées des expressions (5.20), soit :

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{11} &= \varepsilon_{11} \cos^2 \theta + 2\varepsilon_{12} \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{22} \sin^2 \theta, \\ \varepsilon'_{12} &= (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\ \varepsilon'_{13} &= \varepsilon_{13} \cos \theta + \varepsilon_{23} \sin \theta, \\ \varepsilon'_{21} &= \varepsilon'_{12}, \\ \varepsilon'_{22} &= \varepsilon_{11} \sin^2 \theta - 2\varepsilon_{12} \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{22} \cos^2 \theta, \\ \varepsilon'_{23} &= -\varepsilon_{13} \sin \theta + \varepsilon_{23} \cos \theta, \\ \varepsilon'_{31} &= \varepsilon'_{13}, \quad \varepsilon'_{32} = \varepsilon'_{23}, \quad \varepsilon'_{33} = \varepsilon_{33}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Dans le cas où la base initiale est la base principale, les relations précédentes se réduisent à :

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{11} &= \varepsilon^{(1)} \cos^2 \theta + \varepsilon^{(2)} \sin^2 \theta, \\ \varepsilon'_{12} &= (\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}) \sin \theta \cos \theta, \\ \varepsilon'_{13} &= 0, \\ \varepsilon'_{21} &= \varepsilon'_{12}, \\ \varepsilon'_{22} &= \varepsilon^{(1)} \sin^2 \theta + \varepsilon^{(2)} \cos^2 \theta, \\ \varepsilon'_{23} &= 0, \quad \varepsilon'_{31} = 0, \quad \varepsilon'_{32} = 0, \\ \varepsilon'_{33} &= \varepsilon^{(3)}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

## 6.3 ÉTATS PARTICULIERS DE DÉFORMATIONS

### 6.3.1 Tenseur sphérique et déviateur des déformations

Comme dans le cas du tenseur des contraintes, il est possible de décomposer le tenseur des déformations en un tenseur sphérique et un déviateur, suivant :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \boldsymbol{\varepsilon}_S(M) + \boldsymbol{\varepsilon}_D(M), \quad (6.37)$$

avec

$$\boldsymbol{\varepsilon}_S(M) = \frac{e}{3} \mathbf{I} \quad \text{et} \quad e = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}(M). \quad (6.38)$$

Le tenseur  $\boldsymbol{\varepsilon}_D(M)$  est un tenseur de trace nulle, ayant mêmes directions principales que  $\boldsymbol{\varepsilon}(M)$  et pour déformations principales :

$$\varepsilon^{(1)} - \frac{e}{3}, \quad \varepsilon^{(2)} - \frac{e}{3}, \quad \varepsilon^{(3)} - \frac{e}{3}. \quad (6.39)$$

La déformation résultant de  $\boldsymbol{\varepsilon}_D(M)$  est de dilatation cubique nulle : la déformation se fait sans changement de volume.

### 6.3.2 États particuliers

1. Un état de déformation en un point est un état de *dilatation uniforme* si, et seulement si, le déviateur est nul. Les allongements unitaires sont égaux quelle que soit la direction.
2. Un état de déformation est uniaxial (extension simple) si, et seulement si, deux des déformations principales sont nulles.
3. Un état de déformation en un point est un état de glissement simple lorsque l'une des déformations principales est nulle et les deux autres opposées.
4. Un état en un point est un état de déformations planes si, et seulement si, l'une des déformations principales est nulle.
5. Un état de déformation quelconque peut toujours être considéré comme la superposition d'états de déformations particuliers.

## 6.4 NOTATION MATRICIELLE DE L'INGÉNIEUR

### 6.4.1 Introduction de la notation

Comme pour le tenseur des contraintes, la symétrie ramène à 6 le nombre de composantes nécessaires pour définir le tenseur des déformations. Pour cette raison, l'ingénieur utilise une notation qui consiste à remplacer le tableau matriciel

des 9 composantes du tenseur par une matrice colonne à 6 composantes et à substituer aux composantes  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{23}$  les déformations en cisaillement  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{13}$ ,  $\gamma_{23}$ . L'ingénieur utilise donc l'une des notations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}. \quad (6.40)$$

### 6.4.2 Changement de base

Avec cette nouvelle notation, les relations entre les déformations  $\varepsilon_i$  exprimées dans la base  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  et les déformations  $\varepsilon'_i$  exprimées dans la base  $(\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3)$ , obtenue par rotation autour de la direction  $\bar{e}_3$ , peuvent s'écrire sous une forme matricielle déduite des expressions (6.35), suivant :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \quad (6.41)$$

Soit, sous forme condensée :

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{T}_{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6.42)$$

où  $\mathbf{T}_{\varepsilon}$  est la matrice de changement de base des déformations :

$$\mathbf{T}_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (6.43)$$

La relation de changement de base inverse est obtenue en inversant l'expression (6.42), soit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}_\varepsilon^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}', \quad (6.44)$$

où la matrice inverse  $\mathbf{T}_\varepsilon^{-1}$  est obtenue à partir de la matrice  $\mathbf{T}_\varepsilon$  en changeant  $\theta$  en  $-\theta$ :

$$\mathbf{T}_\varepsilon^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (6.45)$$

La différence entre les expressions de changement de base des contraintes et déformations résulte de l'introduction d'un facteur 2, lors de la contraction des indices pour  $\varepsilon_4$ ,  $\varepsilon_5$  et  $\varepsilon_6$ . En fonction des résultats obtenus, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{T}_\varepsilon = (\mathbf{T}_\sigma^{-1})^t \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_\varepsilon^{-1} = \mathbf{T}_\sigma^t. \quad (6.46)$$

Ces relations ne sont pas générales. Elles ne sont applicables que dans le cas d'une rotation autour de la direction 3 de la base initiale.

## EXERCICES

**6.1** On considère une plaque de surface limite ( $S$ ), sur laquelle est dessinée un quadrillage de côté  $l$  (figure 6.4). Cette plaque est soumise à un état de déformation, tel que :

1. la direction orthogonale à la surface ( $S$ ) reste orthogonale à la surface au cours de la déformation; l'allongement unitaire suivant l'épaisseur est  $\varepsilon_3$ ;

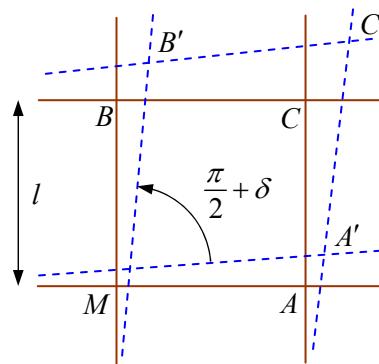


FIGURE 6.4. Exercice 6.1.

2. après déformation, le quadrillage  $MACB$  au point  $M$  a subi une déformation  $M'A'C'B'$  définie par :

$$\delta MA = MA' - MA = \delta l_1,$$

$$\delta MB = MB' - MB = \delta l_2,$$

les directions  $\overrightarrow{MB'}$  et  $\overrightarrow{MA'}$  font un angle de  $\frac{\pi}{2} + \delta\theta$ .

- 6.1.1 Déterminer le tenseur des déformations au point  $M$  dans le cas où :

$$l = 1 \text{ cm}, \quad \delta l_1 = 3 \mu\text{m}, \quad \delta l_2 = 1 \mu\text{m},$$

$$\delta\theta = 5 \times 10^{-4} \text{ rad}, \quad \varepsilon_3 = -3 \times 10^{-4}.$$

- 6.1.2 Montrer que la direction orthogonale à la plaque est direction principale. Déterminer les déformations principales et les directions principales.

- 6.1.3 Déterminer dans le plan de la plaque : les directions d'allongement nul; les directions pour lesquelles l'allongement est extrémal; les directions pour lesquelles il n'y a pas de déformation angulaire.

- 6.1.4 On considère maintenant les directions  $\overrightarrow{Mx'_1}$  et  $\overrightarrow{My'_1}$  du plan de la plaque, obtenues à partir des directions  $\overrightarrow{MA}$  et  $\overrightarrow{MB}$  par une rotation d'angle  $\theta = 20^\circ$ .

- Déterminer : la déformation dans la direction  $\overrightarrow{Mx'_1}$ ; la déformation dans la direction  $\overrightarrow{My'_1}$ ; la déformation en cisaillement des deux directions  $\overrightarrow{Mx'_1}$  et  $\overrightarrow{My'_1}$ .

- 6.1.5 En explicitant les relations de changement de base, déterminer les éléments des tenseurs des déformations dans le système d'axes ( $\overrightarrow{Mx'_1}$ ,  $\overrightarrow{My'_1}$ , direction orthogonale à la plaque).

Comparer avec les résultats obtenus dans la question 6.1.4.

- 6.2** Dans le cas d'un état de déformations planes dans le plan (1, 2), expliciter la matrice  $3 \times 3$  de changement de base, dans le cas d'une rotation  $\theta$  autour de la direction 3.

- 6.3** On considère un solide réel. En un point  $M$  de la surface libre du solide, le plan tangent ( $P$ ) au solide peut être considéré comme confondu avec cette surface. Ce plan est plan principal du tenseur des déformations au point  $M$ .

Pour déterminer le tenseur des déformations, on place au point  $M$  une rosette extensométrique à trois jauge dont les directions  $(\overrightarrow{Mx_1}, \overrightarrow{Mx_2}, \overrightarrow{Mx_3})$  font entre elles des angles  $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ . (La résistance électrique d'une jauge varie en fonction de l'allongement de la jauge et la mesure de cette variation de résistance permet de mesurer l'allongement correspondant).

Lors d'une sollicitation, les allongements mesurés sont  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  respectivement suivant les directions. L'objet du problème est de déterminer : les valeurs propres  $\varepsilon^{(1)}$  et  $\varepsilon^{(2)}$  du plan principal ( $P$ ), l'orientation de la direction propre (1) avec la

direction  $\overrightarrow{Mx_1}$  par exemple. On appellera par la suite  $\theta$ , l'angle (figure 6.5) que fait la direction  $\overrightarrow{Mx_1}$  avec la direction propre (1).

6.3.1 Trouver les relations exprimant  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  en fonction de  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  et des valeurs principales  $\varepsilon^{(1)}$ ,  $\varepsilon^{(2)}$ .

6.3.2 Les trois jauge sont généralement disposées à  $45^\circ$  ( $\theta_{12} = \theta_{13} = \pi/4$ ).

Expliciter, dans ce cas, les relations exprimant  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  en fonction de  $\varepsilon^{(1)}$ ,  $\varepsilon^{(2)}$ ,  $\sin \theta$  et  $\cos \theta$ .

En déduire l'expression qui permet de trouver, en fonction de  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$ , l'angle  $\theta$  que fait la direction propre (1) avec la direction  $\overrightarrow{Mx_1}$ .

Application :  $\varepsilon_1 = 4 \times 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_2 = 5 \times 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_3 = 2 \times 10^{-4}$ .

Trouver ensuite les expressions des valeurs propres  $\varepsilon^{(1)}$  et  $\varepsilon^{(2)}$ . Faire l'application numérique.

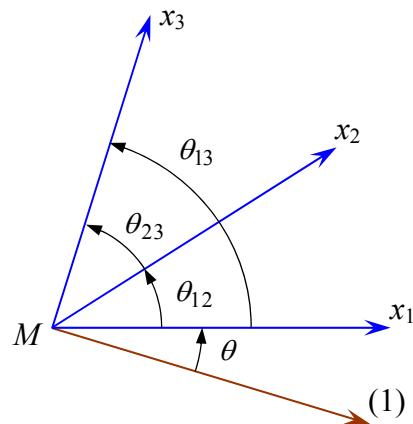


FIGURE 6.5. Exercice 6.3.

## CHAPITRE 7

# Schéma Élastique

## 7.1 SCHÉMA D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

### 7.1.1 Introduction

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées *lois de comportement*, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. L'expérience montre que de nombreux milieux solides déformables ont, pour une température donnée, un *comportement élastique linéaire*.

### 7.1.2 Matrice de rigidité

La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (7.1)$$

ou sous forme condensée :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (7.2)$$

Cette loi, généralement appelée loi de Hooke généralisée, introduit la *matrice de rigidité*  $\mathbf{C}$ , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants, ici les 21 *constantes de rigidité*  $C_{ij}$ .

### 7.1.3 Matrice de flexibilité ou souplesse

La relation d'élasticité (7.2) peut être écrite sous la forme inverse, suivant :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}, \quad (7.3)$$

en introduisant la matrice inverse de la matrice de rigidité. La matrice  $\mathbf{S}$  est appelée *matrice de flexibilité* ou *matrice de souplesse*, et s'écrit dans le cas général :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix}, \quad (7.4)$$

avec

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}. \quad (7.5)$$

Les coefficients  $S_{ij}$  sont appelés *constantes de flexibilité* ou *constantes de souplesse*.

### 7.1.4 Changement de base

Soit  $\mathbf{C} = [C_{ij}]$  la matrice de rigidité exprimée dans une base  $(\vec{e}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $\mathbf{C}' = [C'_{ij}]$  la matrice de rigidité exprimée dans la base  $(\vec{e}') = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ . Ces matrices relient les contraintes et déformations exprimées dans les bases respectives :

$$\text{— dans la base } (\vec{e}): \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}, \quad (7.6)$$

$$\text{— dans la base } (\vec{e}'): \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}' \boldsymbol{\epsilon}'. \quad (7.7)$$

Les relations de changements de base, relatives aux contraintes et déformations, peuvent être écrites d'une manière générale sous les formes (5.45)–(5.47) et (6.42)–(6.44). En combinant les relations (5.47) et (7.6), il vient :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_\sigma \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon},$$

puis, en tenant compte de (6.44) :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{T}_\sigma \mathbf{C} \mathbf{T}_\epsilon^{-1} \boldsymbol{\epsilon}'. \quad (7.8)$$

L'identification des expressions (7.7) et (7.8) conduit alors à la relation de changement de base des matrices de rigidité :

$$\mathbf{C}' = \mathbf{T}_\sigma \mathbf{C} \mathbf{T}_\varepsilon^{-1}. \quad (7.9)$$

Par un raisonnement analogue, on trouve de même la relation de changement de base des matrices de souplesse :

$$\mathbf{S}' = \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{S} \mathbf{T}_\sigma^{-1}. \quad (7.10)$$

Les relations inverses s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{T}_\varepsilon, \quad (7.11)$$

et

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}_\varepsilon^{-1} \mathbf{S}' \mathbf{T}_\sigma. \quad (7.12)$$

## 7.1.5 Matériaux anisotropes

### 7.1.5.1 Introduction

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé *matériau triclinique*.

La plupart des matériaux anisotropes possèdent une structure présentant une ou plusieurs symétries : par exemple, les monocristaux, les structures fibreuses, les matériaux composites à fibres ou tissus, etc. Les propriétés de symétries géométriques réduisent alors le nombre de constantes indépendantes nécessaires pour décrire le comportement du matériau. Cette réduction est fonction des symétries présentées par le matériau considéré.

### 7.1.5.2 Matériau monoclinique

Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un plan de symétrie. La forme de la matrice de rigidité (ou de souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Dans le cas où le plan de symétrie est le plan (1, 2), l'exploitation des changements de base conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (7.13)$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

### 7.1.5.3 Matériau orthotrope

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième : la forme de la matrice de rigidité est donc obtenue en ajoutant au matériau monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent. L'invariance de la matrice dans un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce deuxième plan conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (7.14)$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est ramené à 9.

### 7.1.5.4 Matériau unidirectionnel

La cellule élémentaire d'un matériau composite unidirectionnel peut être considérée comme constituée d'une fibre entourée d'un cylindre de matrice (figure 7.1). Le matériau se comporte donc comme un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution. Le matériau est alors appelé matériau *orthotrope de révolution* ou *isotrope transverse*. Il en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe doit laisser inchangée la matrice de rigidité (ou de souplesse). L'exploitation de cette propriété conduit à :

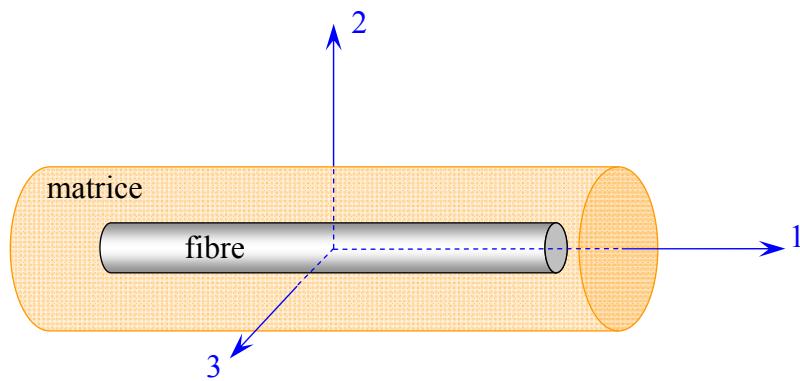


FIGURE 7.1. Matériau composite unidirectionnel.

$$\begin{aligned} C_{13} &= C_{12}, & C_{33} &= C_{22}, \\ C_{55} &= C_{66}, & C_{44} &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}). \end{aligned} \quad (7.15)$$

et

$$\begin{aligned} S_{13} &= S_{12}, & S_{33} &= S_{22}, \\ S_{55} &= S_{66}, & S_{44} &= 2(S_{22} - S_{23}). \end{aligned} \quad (7.16)$$

La matrice de rigidité s'écrit donc suivant :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (7.17)$$

et la matrice de souplesse :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}. \quad (7.18)$$

Les propriétés du matériau unidirectionnel sont déterminées par 5 constantes d'élasticité indépendantes.

## 7.2 MATÉRIAUX ISOTROPES

### 7.2.1 Relations d'élasticité

Un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence. Les matériaux usuels (excepté le bois) répondent généralement à cette modélisation établie à l'échelle macroscopique. Il n'existe alors pas de direction privilégiée, et la matrice de rigidité (ou de souplesse) doit être invariante dans tout changement de bases orthonormées. L'application de cette propriété au matériau unidirectionnel conduit aux relations :

$$C_{22} = C_{11}, \quad C_{23} = C_{12}, \quad C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22}). \quad (7.19)$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit à 2, et conduit à la matrice de rigidité :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{bmatrix}. \quad (7.20)$$

Généralement, les constantes de rigidité sont exprimées en introduisant les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$C_{12} = \lambda, \quad \frac{1}{2}(C_{11}-C_{22}) = \mu, \quad (7.21)$$

d'où

$$C_{11} = \lambda + 2\mu. \quad (7.22)$$

La relation d'élasticité (7.1) peut donc s'écrire suivant l'expression :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (7.23)$$

ou encore

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (7.24)$$

où  $\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  est la déformation volumique du matériau.

Les contraintes normales ( $j = i$ ) s'écrivent alors :

$$\sigma_{ii} = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu \varepsilon_{ii}, \quad (7.25)$$

et les contraintes tangentielles ( $j \neq i$ ) :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (7.26)$$

De la relation (7.25), nous déduisons :

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = (3\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}),$$

ou

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} = (3\lambda + 2\mu) \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (7.27)$$

Les déformations en fonction des contraintes s'obtiennent facilement à partir des relations (7.25) à (7.27). Les déformations normales s'écrivent :

$$\varepsilon_{ii} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ii}, \quad (7.28)$$

et les déformations tangentielles :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}. \quad (7.29)$$

Les deux relations (7.28) et (7.29) peuvent être résumées suivant l'expression :

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \delta_{ij} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}. \quad (7.30)$$

## 7.2.2 Modules d'élasticité

Les relations d'élasticité sont généralement exprimées en fonction des modules d'élasticité déterminés dans des essais mécaniques où le matériau est soumis à un état particulier de contraintes et déformations.

### 7.2.2.1 Essais de traction ou compression simple

Dans le cas d'un essai dans la direction 1, la matrice des contraintes est (paragraphe 5.3.3) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il en résulte que les déformations tangentielles ( $\varepsilon_{ij}$ , avec  $j \neq i$ ) sont nulles. La déformation normale dans la direction de l'essai s'écrit, d'après (7.28) :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \sigma_1 + \frac{1}{2\mu} \sigma_1.$$

Soit :

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1, \quad (7.31)$$

en posant :

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}. \quad (7.32)$$

La relation (7.31) est la loi de Hooke, et le coefficient  $E$  est appelé le *module d'Young*. Les déformations normales transversales sont de même données, d'après (7.28) par :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \sigma_1 = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \varepsilon_1,$$

ou

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 = -\nu \varepsilon_1, \quad (7.33)$$

en posant :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (7.34)$$

Le paramètre  $\nu$  est le *coefficient de Poisson* du matériau.

### 7.2.2.2 Essai de cisaillement simple

Dans un essai de cisaillement simple, la matrice des contraintes rapportée à des axes (1, 2) faisant un angle de  $\frac{\pi}{4} + \pi$  par rapport aux directions principales s'exprime suivant (5.40). Soit :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{12} = \tau. \quad (7.35)$$

Les relations contraintes-déformations se réduisent alors à :

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} = \mu\gamma_{12}, \quad (7.36)$$

où  $\gamma_{12}$  est la déformation en cisaillement des deux directions orthogonales 1 et 2. Le coefficient  $\mu$  apparaît comme étant le *module de cisaillement*. Ce module est plus généralement noté  $G$ . Les autres déformations sont nulles.

### 7.2.2.3 Essai de compression ou tension sphérique

Dans un tel essai, les contraintes sont sphériques, soit :

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij}. \quad (7.37)$$

Dans la pratique, on utilise une compression hydrostatique :  $p < 0$ . Les contraintes principales sont égales :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{1}{3}\text{tr } \boldsymbol{\sigma} = p, \quad (7.38)$$

et les autres contraintes tangentielles sont nulles :  $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ . Il en résulte que les déformations sont également sphériques :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{1}{3}\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (7.39)$$

avec

$$p = \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (7.40)$$

Le coefficient :

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (7.41)$$

est appelé *module de compressibilité*.

### 7.2.3 Relations entre les coefficients d'élasticité

Les propriétés élastiques d'un matériau isotrope sont déterminées par deux paramètres indépendants. Le tableau 7.1 résume les relations qui lient les paramètres en fonction des couples  $(\lambda, \mu)$ ,  $(E, \nu)$  et  $(E, G)$ . Le choix des couples est un problème de convenance. Toutefois, les coefficients  $E$  et  $\nu$  sont les plus utilisés, puisqu'ils sont simplement déterminés dans un essai de traction. La relation d'élasticité (7.30) s'écrit alors :

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \delta_{ij} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}. \quad (7.42)$$

### 7.2.4 Expressions des matrices de rigidité et de souplesse

En fonction des divers coefficients d'élasticité introduits, les matrices de rigidité et de souplesse peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad (7.43)$$

TABLEAU 7.1. Relations entre les coefficients d'élasticité d'un matériau isotrope.

	$\lambda, \mu$	$E, \nu$	$E, G$
$\lambda$	$\lambda$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$
$\mu$	$\mu$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$G$
$E$	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$E$	$E$
$\nu$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\nu$	$\frac{E-2G}{2G}$
$k$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{GE}{3(3G-E)}$

avec, pour la matrice de rigidité  $\mathbf{C}$  :

$$\begin{aligned} a &= \lambda + 2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = G \frac{4G-E}{3G-E}, \\ b &= \lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} = G \frac{E-2G}{3G-E}, \\ c &= \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G, \end{aligned} \quad (7.44)$$

et, pour la matrice de souplesse  $\mathbf{S}$  :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} = \frac{1}{E}, \\ b &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} = -\frac{\nu}{E}, \\ c &= \frac{1}{\mu} = \frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{1}{G}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

## EXERCICES

**7.1** Montrer que dans le cas d'un matériau monoclinique de plan de symétrie (1, 2), la matrice de rigidité est de la forme (7.13).

**7.2** Au matériau monoclinique, on ajoute le plan de symétrie (1, 3) pour obtenir un matériau orthotrope. Montrer que la matrice de rigidité est de la forme (7.14).

**7.3** On considère une rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe 1 d'un matériau orthotrope. Exprimer la matrice de rigidité dans les nouveaux axes.

**7.4** Déduire de l'exercice précédent la forme (7.17) de la matrice de rigidité d'un matériau isotrope transverse.

**7.5** On considère un matériau orthotrope d'axes (1, 2, 3) et en un point de ce matériau, on exerce un état de déformation de directions principales (1', 2', 3) et de déformations principales  $\varepsilon'_1 = 5 \times 10^{-3}$ ,  $\varepsilon'_2 = 2 \times 10^{-3}$  et  $\varepsilon_3 = 4 \times 10^{-3}$ . Les directions (1', 2') font un angle  $\theta = 30^\circ$  avec les directions (1, 2) du matériau de constantes de rigidité :

$$\begin{aligned}C_{11} &= 32 \text{ GPa}, & C_{12} &= 4,2 \text{ GPa}, & C_{13} &= 3,8 \text{ GPa}, \\C_{22} &= 20 \text{ GPa}, & C_{23} &= 4 \text{ GPa}, & C_{33} &= 12 \text{ GPa}, \\C_{44} &= 2,5 \text{ GPa}, & C_{55} &= 3,5 \text{ GPa}, & C_{66} &= 4 \text{ GPa}.\end{aligned}$$

Déterminer la matrice des contraintes dans les axes (1, 2, 3), puis les contraintes et directions principales.

## CHAPITRE 8

# Résolution d'un Problème de Mécanique des Solides Déformables

## 8.1 RELATION FONDAMENTALE POUR UN MILIEU CONTINU

Soit  $(D)$  un domaine d'un milieu continu, de frontière  $(S)$  (figure 8.1). Les forces exercées sur le domaine  $(D)$  sont de deux sortes :

1. Les forces volumiques (par exemple forces de pesanteur, d'inertie, etc.) qui s'exercent dans tout le volume, caractérisées par la densité de force  $\vec{f}(M, t)$  par unité de volume. La force qui s'exerce sur l'élément de volume  $dV$  entourant le point  $M$  est :

$$d\vec{f}(M, t) = \vec{f}(M, t)dV. \quad (8.1)$$

2. Les forces surfaciques qui ne s'exercent que sur la frontière  $(S)$  du domaine  $(D)$ . Elles sont caractérisées par la densité de force (vecteur contrainte)  $\vec{t}(M, t)$  par unité de surface. La force qui s'exerce sur l'élément de surface  $dS$  entourant le point  $M$  de  $(S)$  s'écrit :

$$d\vec{t}(M, t) = \vec{t}(M, t)dS. \quad (8.2)$$

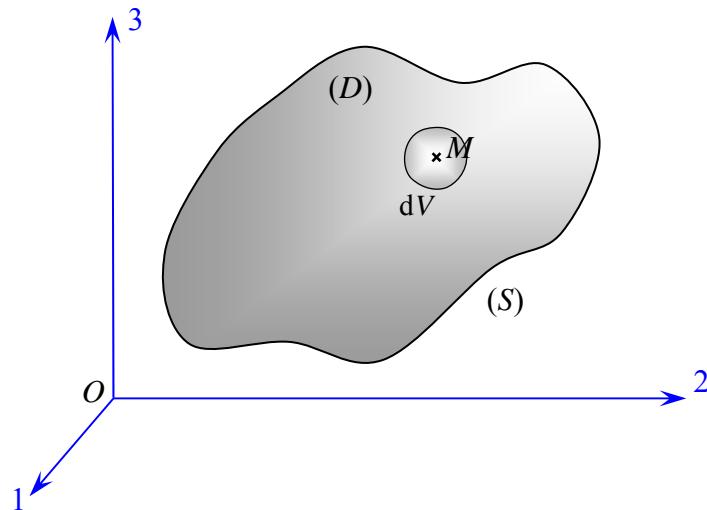


FIGURE 8.1. Domaine d'un milieu continu.

L'orientation du vecteur contrainte est prise, conformément au chapitre 5, positive de l'intérieur vers l'extérieur de l'élément et correspond dans ce cas à une tension ou traction au point  $M$ . Dans le cas contraire, s'exerce en  $M$  une compression.

Dans le cas où le repère de référence  $(T) = (O / 123)$  est un repère galiléen, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'élément entourant un point  $M$  s'écrit :

$$\rho(M, t) \vec{a}^{(T)}(M, t) dV = \vec{f}(M, t) dV + \vec{t}(M, t) dS, \quad (8.3)$$

où  $\rho(M, t)$  est la masse volumique en  $M$  à l'instant  $t$ ;  $\vec{a}^{(T)}(M, t)$  est le vecteur accélération du point  $M$ , par rapport au repère  $(T)$ , à l'instant  $t$ .

Étendue à l'ensemble du domaine  $(D)$ , la relation fondamentale conduit à une équation de résultante :

$$\int_V (\rho \vec{a} - \vec{f}) dV - \int_S \vec{t} dS = \vec{0}, \quad (8.4)$$

et une équation de moment en un point de référence, par exemple le point  $O$  :

$$\int_V \overrightarrow{OM} \wedge (\rho \vec{a} - \vec{f}) dV - \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{t} dS = \vec{0}, \quad (8.5)$$

où les intégrales sont étendues au volume  $V$  du domaine et à la surface  $S$  de la frontière. Chaque équation conduit dans une base donnée à trois équations scalaires. Par exemple, en introduisant les composantes des différents vecteurs, l'équation de la résultante s'écrit pour la direction  $i$  :

$$\int_V (f_i - \rho a_i) dV + \int_S t_i dS = 0,$$

ou en tenant compte de (5.7) :

$$\int_V (f_i - \rho a_i) dV + \int_S \sigma_{ij} n_j dS = 0. \quad (8.6)$$

L'intégrale de surface peut être transformée en une intégrale de volume en utilisant la formule générale de Gauss qui permet de transformer une intégrale de surface en intégrale de volume et conduit ici à :

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV.$$

La relation (8.6) s'écrit alors :

$$\int_V \left( f_i - \rho a_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \right) dV = 0. \quad (8.7)$$

Cette équation devant être vérifiée pour toute partie du domaine ( $D$ ) se réduit à :

$$f_i - \rho a_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0. \quad (8.8)$$

L'exploitation de l'équation du moment conduit à la même relation, appelée relation fondamentale. Cette relation, écrite sous la forme (8.8), est applicable aux cas de petites déformations. La composante  $a_i$  du vecteur accélération s'exprime en fonction de la composante  $u_i$  du vecteur déplacement suivant :

$$a_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

et la relation fondamentale conduit aux trois équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

## 8.2 PROBLÈME DE LA MÉCANIQUE DES SOLIDES DÉFORMABLES

### 8.2.1 Énoncé du problème

Le problème général de la mécanique des solides déformables se pose de la manière suivante. Soit un ensemble solide déformable ( $D$ ), délimité par une frontière ( $S$ ) (figure 8.2). Cet ensemble est soumis à des forces volumiques  $\vec{f}(M, t)$  de composantes  $f_i$  et à des conditions sur la frontière ( $S$ ) dites *conditions aux limites* ou *conditions aux frontières*. Ces conditions schématisées sur la figure 8.2 peuvent être de deux types :

- Sur une partie ( $S_u$ ) de la frontière ( $S$ ) sont imposés des déplacements donnés  $\vec{u}_S(M, t)$ :

$$\vec{u}(M, t) = \vec{u}_S(M, t) \quad \forall M \in (S_u). \quad (8.10)$$

Aucune force surfacique n'est exercée sur ( $S_u$ ).

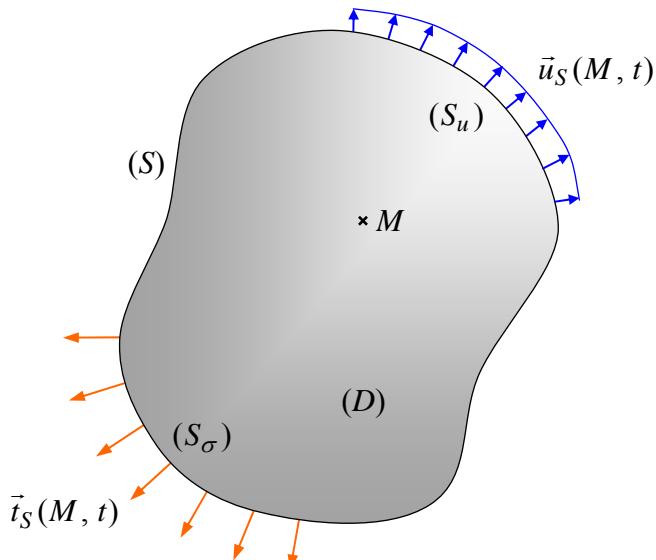


FIGURE 8.2. Conditions aux limites.

2. Sur la partie complémentaire ( $S_\sigma$ ) de ( $S$ ) :

$$(S_u) \cup (S_\sigma) = (S), \quad (S_u) \cap (S_\sigma) = \emptyset,$$

sont imposées des forces surfaciques données (ou l'absence de forces surfaciques :  $\vec{t}_S(M, t) = \vec{0}$ ) :

$$\vec{t}(M, t) = \vec{t}_S(M, t) \quad \forall M \in (S_\sigma). \quad (8.11)$$

Sous l'effet des actions imposées (forces volumiques et conditions aux limites), l'ensemble ( $D$ ) se déforme. Le problème de la mécanique des solides déformables consiste à rechercher le champ des déplacements  $\vec{u}(M, t)$  et le champ des contraintes  $\sigma(M, t)$  en tout point  $M$  de l'ensemble ( $D$ ), vérifiant :

1. La *relation fondamentale* (8.8) :

1.1 pour un problème de dynamique :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (8.12)$$

1.2 pour un problème de statique :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + f_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (8.13)$$

2. Les relations *déformations-déplacements* (6.11) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

dans le cas de petites déformations.

3. Les *conditions de compatibilité* (6.18) :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \quad (8.14)$$

$i, j, k, l = 1, 2, 3.$

4. Les *conditions aux frontières* (8.10) et (8.11) :

$$\begin{aligned} \vec{u}(M, t) &= \vec{u}_S(M, t) && \text{sur } (S_u), \\ \vec{t}(M, t) &= \vec{t}_S(M, t) && \text{sur } (S_\sigma). \end{aligned}$$

5. La *loi de comportement* du matériau caractérisant son comportement mécanique. Cette loi relie le champ des contraintes à celui des déformations :

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{kl}), \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (8.15)$$

Dans le cas d'un comportement élastique linéaire, la loi de comportement est décrite suivant l'une des relations (7.1) ou (7.3).

Le problème de mécanique peut être résolu suivant une approche *déplacements* ou une approche *contraintes*. Dans l'approche déplacements, la résolution consiste à rechercher le champ des déplacements  $\vec{u}(M, t)$  ou le champ du tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}(M, t)$ , guidé par les conditions imposées sur la frontière ( $S_u$ ) :

$$\vec{u}(M, t) = \vec{u}_S(M, t) \quad \forall M \in (S_u).$$

On en déduit le tenseur des déformations, puis celui des contraintes qui doivent vérifier les diverses conditions 1 à 5.

Dans l'approche contraintes, la solution consiste à rechercher le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(M, t)$ , guidé par les conditions imposées sur la frontière ( $S_\sigma$ ) :

$$\vec{t}(M, t) = \boldsymbol{\sigma}(M, t) \vec{n} = \vec{t}_S(M, t) \quad \forall M \in (S_\sigma), \quad (8.16)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire de la normale en  $M$  à la surface du solide. Le tenseur des contraintes doit également vérifier la relation fondamentale. On en déduit ensuite le tenseur des déformations et le champ des déplacements qui doit vérifier les conditions imposées sur ( $S_u$ ).

## 8.2.2 Équations en coordonnées cartésiennes

Dans ce qui précède, nous nous sommes implicitement référés à un système d'axes cartésiens ( $Ox_1x_2x_3$ ), les points de l'espace étant repérés par leurs coordonnées cartésiennes ( $x_1, x_2, x_3$ ), et le vecteur déplacement ayant pour composantes ( $u_1, u_2, u_3$ ). Une telle notation est bien adaptée au calcul tensoriel ou

matriciel. Une autre notation usuellement utilisée par l'ingénieur consiste à noter ( $Oxyz$ ) le système d'axes. Les coordonnées des points sont ( $x, y, z$ ) et les composantes du vecteur déplacement sont notées ( $u, v, w$ ). Nous reprenons les diverses relations dans le cadre de cette notation.

1. *Contraintes*. Le tableau du tenseur des contraintes s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (8.17)$$

et la matrice colonne des contraintes est :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (8.18)$$

2. *Déformations*. Le tableau du tenseur des déformations a la même forme que celui du tenseur des contraintes et les éléments de la matrice colonne sont donnés par les expressions :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_4 &= \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_5 &= \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \varepsilon_6 &= \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

3. *Relation fondamentale.* Cette relation est transposée de (8.9) suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz} + f_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz} + f_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + f_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (8.20)$$

4. *Conditions de compatibilité.* Les six équations de compatibilité sont dérivées des expressions (6.18) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right).\end{aligned}\quad (8.21)$$

5. *Conditions aux limites.* Les conditions sur les contraintes sont :

$$\vec{t}(M, t) = \vec{t}_S(M, t) \text{ sur la frontière } (S_\sigma).$$

Si  $(t_{Sx}, t_{Sy}, t_{Sz})$  sont les composantes du vecteur contrainte  $\vec{t}_S$  imposé en  $M$  et  $(n_x, n_y, n_z)$  les composantes du vecteur unitaire de la normale au point  $M$  orientée de l'intérieur vers l'extérieur du solide, la condition sur les contraintes s'écrit :

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{Sx} \\ t_{Sy} \\ t_{Sz} \end{bmatrix}, \quad (8.22)$$

Soit :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z &= t_{Sx}, \\ \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z &= t_{Sy}, \\ \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z &= t_{Sz}.\end{aligned}\quad (8.23)$$

### 8.2.3 Équations en coordonnées cylindriques

L'utilisation de coordonnées cylindriques s'impose dans de nombreux problèmes, en particulier lorsque le problème est de révolution. Le point  $M$  est repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, z)$  (figure 8.3). Les matrices des contraintes et déformations sont de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_{\theta z} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (8.24)$$

avec :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \\ 2\varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \\ 2\varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z},\end{aligned}\quad (8.25)$$

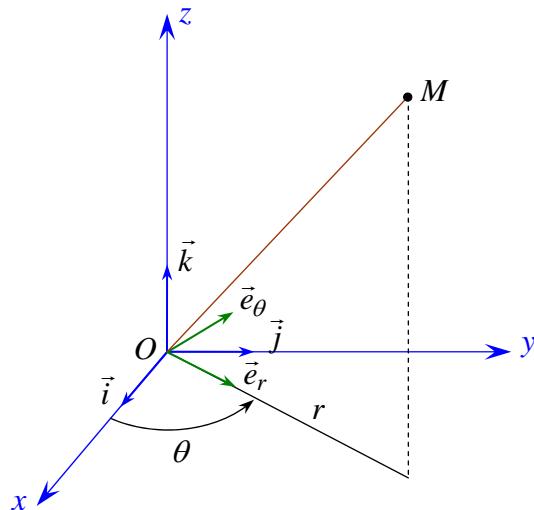


FIGURE 8.3. Coordonnées cylindriques.

en introduisant les composantes  $(u_r, u_\theta, w)$  du vecteur déplacement  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$  obtenue à partir de la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  des coordonnées cartésiennes, par rotation  $\theta$  autour de la direction  $\vec{k}$ . Les relations entre les composantes des matrices des contraintes exprimées dans la base des coordonnées cartésiennes et des coordonnées cylindriques s'obtiennent aisément à l'aide de la relation (4.13).

Les relations fondamentales en coordonnées cylindriques sont ensuite déduites en transposant les relations (8.20) dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$  et s'écrivent dans le cas d'un problème de statique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + f_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\sigma_{r\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + f_\theta &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \sigma_{rz} \right) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= 0. \end{aligned} \quad (8.26)$$

## 8.3 THÉORÈMES DE L'ÉNERGIE

### 8.3.1 Variation d'une fonctionnelle

D'une manière générale, une fonctionnelle  $F$  peut être définie comme étant une fonction d'un ensemble de fonctions :  $u(x, y, \dots)$ ,  $v(x, y, \dots)$ , et de leurs dérivées par rapport à l'ensemble des variables  $(x, y, \dots)$ , soit :

$$F = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots\right). \quad (8.27)$$

La première variation de  $F$  est définie par :

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \dots, \quad (8.28)$$

où  $\delta u$ ,  $\delta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ ,  $\delta \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ , ...,  $\delta v$ ,  $\delta \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ ,  $\delta \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ , ... sont des variations quelconques des fonctions  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , ...,  $v$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$ , ...

La dérivée  $\frac{\partial F}{\partial u}$  est obtenue par dérivation formelle de  $F$  par rapport à la variable  $u$ .

La dérivée  $\frac{\partial F}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)}$  est obtenue par dérivation formelle de  $F$  par rapport à la variable  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Il en est de même des autres dérivées. L'opérateur  $\delta$  a les propriétés de l'opérateur variation d'usuel.

### 8.3.2 Théorème des travaux virtuels

Nous revenons au problème de la mécanique (paragraphe 8.2.1) en nous limitant pour l'instant à un problème de statique. Soit  $\vec{u}(M)$  le champ des déplacements solution du problème qui s'écrit dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ :

$$\vec{u}(M) = u_i \vec{e}_i. \quad (8.29)$$

Considérons maintenant le champ des déplacements obtenu en prenant la première variation de  $\vec{u}$ :

$$\delta \vec{u} = \vec{e}_i \delta u_i, \quad (8.30)$$

et tel que ce champ vérifie les conditions imposées sur la frontière ( $S$ ); soit :

$$\delta \vec{u} = \vec{0}, \quad \text{ou} \quad \delta u_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \text{ sur } (S_u), \quad (8.31)$$

puisque les déplacements sont imposés sur  $(S_u)$ . Ce champ est appelé champ des déplacements *virtuels*. Calculons alors le travail effectué lors de ce déplacement, travail appelé *travail virtuel*.

Le travail des forces surfaciques se réduit d'après (8.31) à :

$$\delta W_S = \int_S \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, dS = \int_{S_\sigma} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, dS. \quad (8.32)$$

Soit :

$$\delta W_S = \int_{S_\sigma} t_i \delta u_i \, dS = \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_{ij} \delta u_i \, dS. \quad (8.33)$$

Le travail des forces volumiques s'écrit :

$$\delta W_V = \int_V \vec{f} \cdot \delta \vec{u} \, dV = \int_V f_i \delta u_i \, dV, \quad (8.34)$$

ou en tenant compte de (8.12) dans le cas d'un problème statique :

$$\delta W_V = - \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i \, dV. \quad (8.35)$$

En remarquant que :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \delta u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \delta u_i + \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i,$$

la relation (8.35) s'écrit :

$$\delta W_V = \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i \, dV - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \delta u_i) \, dV.$$

La deuxième intégrale peut être transformée en une intégrale de surface à l'aide de la relation de Gauss, ce qui conduit à :

$$\delta W_V = \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i \, dV - \int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i \, dS.$$

En tenant compte de (8.31), nous obtenons :

$$\delta W_V = \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i \, dV - \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_j \delta u_i \, dS. \quad (8.36)$$

Les relations (8.33) et (8.36) montrent que la variation totale  $\delta W$  du travail des forces volumiques et surfaciques exercées (travail virtuel) s'écrit finalement :

$$\delta W = \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i \, dV, \quad (8.37)$$

avec :

$$\delta W = \delta W_S + \delta W_V = \int_{S_\sigma} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, dS + \int_V \vec{f} \cdot \delta \vec{u} \, dV. \quad (8.38)$$

La relation (8.37) traduit sous sa forme la plus générale le théorème dit des travaux virtuels pour un ensemble déformable.

Dans le cas de l'hypothèse des petites déformations (6.11) et en tenant compte des symétries de  $\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i + \sigma_{ji} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta u_j &= \sigma_{ij} \delta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= 2\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ji} \delta \varepsilon_{ji}, \end{aligned}$$

et la relation (8.37) s'écrit :

$$\delta W = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \, dV. \quad (8.39)$$

L'écriture de cette relation peut être transformée dans le cas où  $\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$  peut

s'exprimer comme la variation d'une fonction  $u_d(\varepsilon_{ij})$  des déformations :

$$\sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} = \delta u_d. \quad (8.40)$$

La fonction  $u_d$  est *l'énergie de déformation* par unité de volume. Elle peut également être interprétée comme la fonction de contrainte du champ des contraintes, suivant la relation :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial u_d}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (8.41)$$

puisque :

$$\sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_d}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij} = \delta u_d.$$

L'intégrale de volume s'écrit alors :

$$\int_V \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV = \int_V \delta u_d dV = \delta \int_V u_d dV = \delta U_d, \quad (8.42)$$

en posant :

$$U_d = \int_V u_d dV, \quad (8.43)$$

où  $U_d$  est l'énergie de déformation totale. Le théorème (8.39) s'écrit dans ce cas :

$$\delta W = \delta U_d. \quad (8.44)$$

Le travail virtuel est égal à la variation de l'énergie de déformation totale.

Généralement, cette dernière forme du théorème des travaux virtuels s'écrit sous la forme équivalente :

$$\delta U = 0, \quad (8.45)$$

en introduisant *l'énergie potentielle totale* :

$$U = U_d - W. \quad (8.46)$$

Le théorème des travaux virtuels équivaut sous cette forme à rendre stationnaire (extrémale) la fonctionnelle énergie potentielle totale.

Pour un matériau ayant un comportement élastique linéaire, l'énergie de déformation est définie d'après (8.41) et (7.1) par :

$$\sigma_i = \frac{\partial u_d}{\partial \varepsilon_i} = C_{ij} \varepsilon_j \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad (8.47)$$

en utilisant, pour les contraintes et déformations, la notation matricielle à un seul indice. Nous en déduisons que  $u_d$  est une forme quadratique linéaire et symétrique des déformations (puisque  $C_{ij} = C_{ji}$ ), qui s'écrit à une constante près :

$$u_d(\varepsilon_i) = \frac{1}{2} C_{ij} \varepsilon_j \varepsilon_i = \frac{1}{2} \sigma_i \varepsilon_i \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, \quad (8.48)$$

ou sous la forme de la notation tensorielle à deux indices :

$$u_d(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (8.49)$$

L'énergie totale de déformation s'écrit alors :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (8.50)$$

### 8.3.3 Dynamique des solides

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes limités au cas d'un problème statique. Dans le cas d'un ensemble déformable en mouvement, l'expression (8.34) du travail des forces volumiques est modifiée, conformément à la relation (8.12). En reprenant les résultats établis précédemment, nous trouvons aisément que le travail des forces volumiques et surfaciques s'exprime suivant :

$$\delta W = \delta W_V + \delta W_S = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dV. \quad (8.51)$$

Pour faire apparaître une fonctionnelle, la relation précédente est intégrée entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , tels que les variations  $\delta u_i$  satisfassent aux conditions aux limites :

$$\delta u_i = 0 \text{ sur } (S_u) \text{ pour } t = t_1 \text{ et } t_2. \quad (8.52)$$

En intégrant par parties, on montre que :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dV dt = -\delta \left[ \int_{t_1}^{t_2} E_c dt \right], \quad (8.53)$$

où  $E_c$  est l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dV \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.54)$$

L'intégration entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  de la relation (8.51) conduit finalement à :

$$\delta \left[ \int_{t_1}^{t_2} (E_c + W) dt \right] = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV dt. \quad (8.55)$$

Cette relation constitue l'expression variationnelle sous sa forme la plus générale, du mouvement d'un ensemble déformable.

L'intégrale  $\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$  représente l'énergie mise en jeu lors de la déformation. Son expression dépend de la loi de comportement du matériau, loi qui fait éventuellement intervenir le temps. Dans le cas où il existe une fonction énergie de déformation (8.40), la relation (8.55) s'écrit sous la forme :

$$\delta \left[ \int_{t_1}^{t_2} (E_c + W - U_d) dt \right] = 0. \quad (8.56)$$

Généralement, cette relation est écrite sous la forme :

$$\delta \left[ \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right] = 0, \quad (8.57)$$

en introduisant le Lagrangien :

$$\mathcal{L} = E_c + W - U_d = E_c - U. \quad (8.58)$$

La relation (8.57) constitue la formulation variationnelle du problème du mouvement d'un ensemble déformable.

## 8.4 MÉTHODES VARIATIONNELLES

### 8.4.1 Principe

Les méthodes d'approximation sont utilisées lorsque les solutions exactes du problème de la mécanique des solides déformables ne peuvent être trouvées. Le principe général de l'approximation d'une solution  $u(M)$  consiste à rechercher la meilleure approximation, que nous noterons  $\tilde{u}(M)$ , satisfaisant au mieux les conditions physiques auxquelles obéit la solution  $u(M)$  sur son domaine d'étude. Parmi les méthodes d'approximation, la méthode de Ritz, basée sur une approche variationnelle, fournit une méthode efficace pour obtenir des solutions approchées au problème de la mécanique des solides déformables. Dans l'approche déplacements, la solution exacte du problème variationnel est celle qui, appartenant à l'espace des fonctions admissibles et satisfaisant les conditions aux limites, rend extrémale, dans le cas d'un problème statique, l'énergie potentielle totale (relation (8.45)). Cette relation implique que la solution exacte est caractérisée par un *extremum* absolu. La méthode de Ritz consiste à rechercher une approximation appartenant au sous-espace de  $n$  fonctions de base  $\varphi_i(M)$  sous la forme :

$$\tilde{u}(M) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(M). \quad (8.59)$$

Les fonctions  $\varphi_i(M)$  sont des fonctions connues, qui sont choisies a priori et dont

l'ensemble constitue la base fonctionnelle. Les coefficients  $a_i$ , à déterminer, sont appelés les *coordonnées généralisées*. Les fonctions de base  $\varphi_i(M)$  doivent satisfaire les conditions de continuité, les déplacements imposés aux frontières, et former une base fonctionnelle complète pour assurer les conditions de convergence de l'approximation. Les fonctions de base doivent également être dérivables à un ordre au moins égal à celui correspondant aux équations différentielles. L'approximation recherchée est alors celle qui rend extrémale l'énergie potentielle totale approchée :

$$\tilde{U}(\tilde{u}) = \tilde{U}(a_i) \quad (8.60)$$

suivant la relation :

$$\delta\tilde{U}(a_i) = 0. \quad (8.61)$$

Cette approximation est caractérisée par un *extremum relatif*. L'énergie potentielle totale approchée apparaît donc sous forme d'une fonction des coefficients  $a_i$ . Et l'approximation recherchée est caractérisée par les  $n$  conditions de stationnarité de la fonction approchée  $\tilde{U}$  par rapport aux coefficients  $a_i$ , déduites de la relation (8.61). Soit :

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.62)$$

L'énergie potentielle totale s'écrit sous une forme quadratique des coefficients  $a_i$ , et il en résulte que les conditions de stationnarité (8.62) conduisent à un système de  $n$  équations linéaires, permettant de déterminer les  $n$  coefficients  $a_i$ .

Dans le cas du mouvement d'un ensemble déformable, la forme variationnelle (8.45) doit être remplacée par la forme (8.57). Dans le cas de l'étude des vibrations libres, le champ approché des déplacements peut être écrit en séparant les variables, sous la forme :

$$\tilde{u}(M, t) = \tilde{u}(M)e^{i\omega t} = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i e^{i\omega t}. \quad (8.63)$$

L'énergie cinétique (8.54) s'écrit alors :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \omega^2 \tilde{u}_i \tilde{u}_i \, dV, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.64)$$

Le problème des vibrations libres peut alors être traité comme un problème statique, en considérant simplement l'énergie cinétique comme une énergie additionnelle, la relation (8.57) s'écrivant sous la forme :

$$\delta(U - E_c) = 0. \quad (8.65)$$

Cette relation conduit à l'équation classique d'un problème aux valeurs propres. Les fréquences propres de l'ensemble déformable sont obtenues en annulant le déterminant des coefficients  $a_i$  dans l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial a_i} [\tilde{U}(a_i) - E_c(a_i)] = 0. \quad (8.66)$$

### 8.4.2 Convergence

Pour assurer une convergence des solutions approchées lorsque  $n$  augmente, la base fonctionnelle  $\varphi_i(M)$  doit être *complète*. Une base fonctionnelle est dite complète si elle permet de représenter n'importe quelle fonction  $u(M)$  dans le domaine de définition, en augmentant le nombre de coordonnées généralisées. Soit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ u(M) - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(M) \right] = 0. \quad (8.67)$$

Les fonctions polynomiales, trigonométriques, les polynômes de Tchebyshev sont des exemples de bases fonctionnelles complètes.

Dans la pratique, à cause de la troncature limitée à  $n$  termes, la base sera dite relativement complète. La troncature se fera en excluant les termes d'ordre élevé, et devra pouvoir représenter les états de déformation constante ou nulle. La rapidité de convergence dépendra de la manière dont les fonctions de base choisies seront aptes à s'approcher de la solution exacte. Dans le cas d'une mauvaise approximation, la convergence sera lente. La convergence sera d'autant plus rapide que les conditions aux limites seront vérifiées par les fonctions de base. La clef de la méthode de Ritz réside dans le choix de la base fonctionnelle. Ce choix n'est pas toujours facile.

En fait, les conditions de contraintes imposées sur les frontières sont potentiellement incluses dans l'expression de l'énergie potentielle totale. Il en résulte que, dans l'analyse de Ritz, les fonctions de base peuvent seulement ne pas satisfaire que les conditions des déplacements imposées sur les frontières. La raison pour laquelle il n'est pas nécessaire de vérifier les conditions imposées sur les contraintes résulte du fait que les conditions de stationnarité (8.62) minimisent l'écart entre la solution déduite de l'approximation (8.63) et la solution exacte.



## Partie III

# Comportement Mécanique des Matériaux Composites

Cette partie développe l'analyse du comportement mécanique des matériaux composites à l'échelle des constituants (matrice et fibres). Le chapitre 9 considère le comportement élastique d'un composite unidirectionnel: loi d'élasticité, estimation des modules du composite et comparaison des résultats déduits des modèles avec les résultats expérimentaux. Les matériaux composites à renfort tissu sont des matériaux orthotropes dont le comportement élastique est étudié au chapitre 10. Les matériaux composites stratifiés sont constitués de couches successives dont les directions varient d'une couche à l'autre. Ainsi, le chapitre 11 analyse le comportement élastique d'un matériau unidirectionnel ou orthotrope en dehors des directions du matériau. Une attention particulière est apportée sur l'état de contraintes planes qui sera considéré dans la théorie des stratifiés (partie IV). Enfin, le chapitre 12 introduit les mécanismes fondamentaux de rupture induits dans les matériaux composites, et le chapitre développe différents critères pour évaluer la résistance à la rupture des stratifiés.



## CHAPITRE 9

# Comportement Élastique d'un Matériau Composite Unidirectionnel

## 9.1 MODULES EFFECTIFS

### 9.1.1 Concept d'homogénéisation

À une échelle suffisamment fine, tous les matériaux sont hétérogènes, même les matériaux dits homogènes. Pour s'en convaincre, il suffit de partir de l'échelle des atomes et des molécules. Si les matériaux usuels de l'ingénieur devaient être caractérisés à cette échelle d'observation, la tâche serait insurmontable. Pour contourner cette difficulté, l'ingénieur introduit l'hypothèse de continuité de la matière. Cette hypothèse implique un concept de moyenne statistique, dans lequel la constitution réelle du matériau est idéalisée en considérant le matériau comme étant continu. Une fois le modèle de continuité admis, le concept d'homogénéité s'en déduit. Un milieu homogène est alors caractérisé par des propriétés identiques en chaque point.

Au niveau de l'ingénieur, le caractère d'hétérogénéité intervient chaque fois que les propriétés physiques ou mécaniques du matériau sont des fonctions du point. Les variations des propriétés peuvent être de deux types : soit continues, soit discontinues comme dans le cas des matériaux composites. Dans ce cas, les propriétés ponctuelles du matériau varient d'une manière discontinue aux interfaces de passage entre les diverses phases. Chaque phase est supposée être homogène et isotrope.

Dans le cas d'une phase 1 dispersée dans une phase 2 (figure 9.1), il existe généralement une dimension caractéristique de l'hétérogénéité. Par exemple, dans le cas d'un matériau composite à fibres, cette dimension sera la distance moyenne entre les fibres. Cette dimension est en fait une description idéalisée d'une répartition statistique au sein du matériau hétérogène réel. D'autre part, il existe généralement une échelle de dimension  $\delta$  à laquelle les propriétés du matériau peuvent être moyennées avec une bonne approximation. Ceci signifie que, dans ce cas, les propriétés mesurées sur un échantillon de dimension  $\delta$  sont indépendantes de l'endroit ("du point") du matériau où a été prélevé l'échantillon. Dans le cadre d'un tel concept, le matériau peut alors être considéré comme étant effectivement

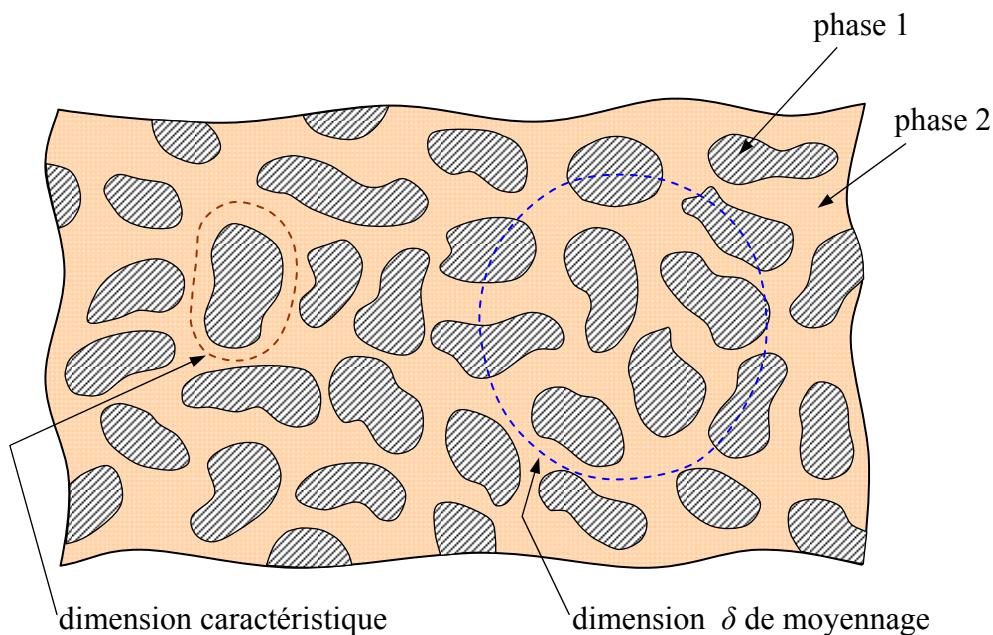


FIGURE 9.1. Homogénéisation d'un matériau hétérogène.

homogène, et les problèmes de calculs des structures peuvent être résolus en considérant les propriétés moyennes mesurées à l'échelle  $\delta$ . Dans le cas où il existe une telle échelle (intermédiaire entre l'échelle microscopique, celle des constituants, et l'échelle de la structure), on dit que l'on peut *homogénéiser* le matériau. On parle alors d'*homogénéité macroscopique* (par opposition à l'échelle des constituants dite microscopique), ou d'*homogénéité statistique*. Le concept de rendre “homogène” un matériau “hétérogène” est appelé le concept d'*homogénéisation*.

Notons que l'alternative à ce concept serait de tenir compte de chaque région d'homogénéité, en analysant la continuité des contraintes et déplacements au passage de chaque interface. Si une telle approche est concevable dans son principe, elle est encore inaccessible aujourd'hui dans la pratique, compte tenu du nombre élevé d'interfaces à considérer (plusieurs milliers à plusieurs millions). Toutefois, la diminution des temps de calculs et l'augmentation des capacités mémoires des ordinateurs en permettent une approche à une échelle de plus en plus fine.

### 9.1.2 Modules homogénisés

Le concept d'homogénéisation étant introduit, il est maintenant possible d'exprimer les propriétés mécaniques homogénisées du matériau hétérogène. Ces propriétés sont déterminées sur un élément de volume  $V$  de dimension  $\delta$ . Cet élément de volume est appelé *élément de volume représentatif* du matériau. Des conditions de contraintes et déformations étant imposées à la frontière de cet élément de volume, la contrainte moyenne (matrice des contraintes) sur le volume représentatif est définie par :

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{V} \int_V \sigma_i(x_k) dV, \quad i=1, 2, \dots, 6, \quad (9.1)$$

et la déformation moyenne par :

$$\bar{\varepsilon}_j = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_j(x_k) dV, \quad i=1, 2, \dots, 6, \quad (9.2)$$

où  $\sigma_i$  et  $\varepsilon_j$  sont les éléments des matrices des contraintes et déformations au point  $x_k$ , et  $dV$  l'élément entourant le point  $x_k$ . Ces relations sont tout à fait générales et permettent d'expliciter les constantes de rigidité  $C_{ij}$  et de souplesse  $S_{ij}$  par les expressions :

$$\bar{\sigma}_i = C_{ij} \bar{\varepsilon}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, \quad (9.3)$$

et

$$\bar{\varepsilon}_i = S_{ij} \bar{\sigma}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6. \quad (9.4)$$

C'est dans ce concept d'homogénéisation que seront par la suite considérées les constantes de rigidité et de souplesse.

Ainsi, pour déterminer les propriétés homogénéisées d'un matériau hétérogène, il est nécessaire de calculer la contrainte et la déformation moyennes sur le volume représentatif à l'aide de (9.1) et (9.2), puis d'en déduire les constantes de rigidité ou de souplesse à l'aide de (9.3) et (9.4). Si ce problème apparaît simple à résoudre dans son principe, il est en fait particulièrement complexe dans la pratique. En effet, pour appliquer les expressions (9.1) et (9.2), il est nécessaire de trouver au préalable les solutions exactes des champs des contraintes et des déformations,  $\sigma_i(x_k)$  et  $\varepsilon_j(x_k)$ , en chaque point du matériau hétérogène. Ces solutions exactes ne peuvent être obtenues que dans le cas de modèles géométriques simples et idéalisés, et plus ou moins éloignés de la réalité.

## 9.2 LOI DE HOOKE POUR UN COMPOSITE UNIDIRECTIONNEL

### 9.2.1 Constitution d'un matériau composite unidirectionnel

Un composite unidirectionnel est constitué de fibres parallèles disposées dans une matrice (figure 9.2a). Ce type de matériau constitue la configuration de base des matériaux composites à fibres, d'où l'importance de son étude. La cellule élémentaire d'un tel matériau peut être considérée, en première approximation, comme constituée (figure 9.2b) d'une fibre entourée d'un cylindre de matrice, à

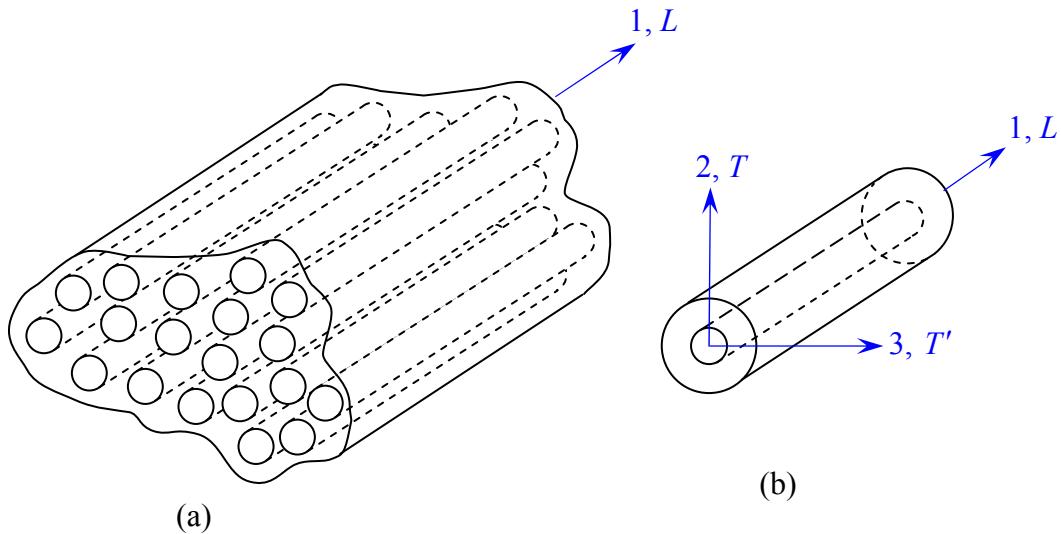


FIGURE 9.2. Composite unidirectionnel.

base circulaire ou mieux hexagonale. Nous reviendrons sur cet aspect au paragraphe 9.3.1. Cette cellule possède un axe de révolution, que nous noterons l'axe 1. Cette direction parallèle aux fibres est appelée *direction longitudinale*, et pour cette raison l'axe 1 est également noté l'axe  $L$ . Toute direction normale aux fibres est appelée *direction transversale*, et le composite est considéré comme étant isotrope transverse : il est isotrope dans le plan normal à la direction 1. Le plan transverse sera repéré par les directions 2 et 3, notées également  $T$  et  $T'$ , ces directions étant équivalentes.

### 9.2.2 Matrices de rigidité et de souplesse

Le comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel peut être décrit en introduisant (chapitre 7) soit les constantes de rigidité  $C_{ij}$ , soit les constantes de souplesse  $S_{ij}$ . Compte tenu des résultats établis au chapitre 7, relation (7.17), la loi de Hooke s'écrit suivant l'une des deux formes matricielles, la forme directe :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (9.5)$$

ou la forme inverse :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \quad (9.6)$$

Les matrices de rigidité et de souplesse sont inverses l'une de l'autre, et le comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel est donc caractérisé par 5 coefficients indépendants :

$$\begin{array}{lllll} C_{11}, & C_{12}, & C_{22}, & C_{23}, & C_{66}, \\ \text{ou} & S_{11}, & S_{12}, & S_{22}, & S_{66}. \end{array}$$

## 9.3 MODULES DE L'INGÉNIEUR

Les modules de l'ingénieur sont les modules d'Young, les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement. Ces modules sont mesurés dans des essais simples tels que des essais de traction uniaxiale ou de cisaillement. Ces modules correspondent donc à une utilisation usuelle plus pratique que les constantes de rigidité ou de souplesse. Généralement, ces essais sont réalisés en imposant un champ connu de contraintes, puis en mesurant le champ des déformations. Il en résulte que les constantes de souplesse sont liées aux modules de l'ingénieur par des relations plus simples que celles exprimant les constantes de rigidité. Nous établissons ci-après ces diverses relations en considérant divers essais fondamentaux.

### 9.3.1 Traction longitudinale

Dans un essai de traction longitudinale, toutes les contraintes sont nulles, excepté la contrainte  $\sigma_1$  :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\neq 0, \\ \sigma_i &= 0, \quad i = 2, 3, \dots, 6. \end{aligned}$$

En fonction des constantes de rigidité, les équations d'élasticité (9.5) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3, \\ 0 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3, \\ 0 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_3, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0. \end{aligned}$$

De ces relations, nous tirons :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}} \varepsilon_1, \quad (9.7)$$

et

$$\sigma_1 = \left( C_{11} - 2 \frac{C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}} \right) \varepsilon_1.$$

Nous en déduisons le *module d'Young longitudinal*  $E_L$  et le *coefficient de Poisson*  $\nu_{LT}$  dans une traction longitudinale :

$$E_L = C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}}, \quad \nu_{LT} = \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}}. \quad (9.8)$$

En fonction des constantes de souplesse, les équations d'élasticité (9.6) s'écrivent dans un essai de traction longitudinale :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1, \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_3 = S_{12}\sigma_1, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0. \end{aligned}$$

D'où :

$$E_L = \frac{1}{S_{11}}, \quad \nu_{LT} = -\frac{S_{12}}{S_{11}}. \quad (9.9)$$

### 9.3.2 Traction transverse

Dans un essai de traction transverse, par exemple selon la direction 2, le champ des contraintes imposé est :

$$\begin{aligned} \sigma_2 &\neq 0, \\ \sigma_i &= 0, \quad i \neq 2. \end{aligned}$$

Les équations d'élasticité, en fonction des constantes de rigidité, s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{aligned} 0 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3, \\ \sigma_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3, \\ 0 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_3, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0. \end{aligned}$$

D'où l'on tire :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= -\frac{C_{12}(C_{23}-C_{22})}{C_{12}^2-C_{11}C_{22}}\varepsilon_2, \\ \varepsilon_3 &= -\frac{C_{12}^2-C_{11}C_{23}}{C_{12}^2-C_{11}C_{22}}\varepsilon_2, \\ \sigma_2 &= \left[ C_{22} + \frac{C_{12}^2(C_{22}-2C_{23})+C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2-C_{11}C_{22}} \right] \varepsilon_2.\end{aligned}\quad (9.10)$$

Nous en déduisons les expressions du *module d'Young transverse*  $E_T$  et des *coefficients de Poisson*  $\nu_{21}$  et  $\nu_{23}$ , notés respectivement  $\nu_{TL}$  et  $\nu_{TT'}$ :

$$\begin{aligned}E_L &= C_{22} + \frac{C_{12}^2(C_{22}-2C_{23})+C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2-C_{11}C_{22}}, \\ \nu_{TL} &= \frac{C_{12}(C_{23}-C_{22})}{C_{12}^2-C_{11}C_{22}}, \\ \nu_{TT'} &= \frac{C_{12}^2-C_{11}C_{23}}{C_{12}^2-C_{11}C_{22}}.\end{aligned}\quad (9.11)$$

En introduisant les coefficients de souplesse, les équations d'élasticité en traction transverse s'écrivent :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= S_{12}\sigma_2, \\ \varepsilon_2 &= S_{22}\sigma_2, \\ \varepsilon_3 &= S_{23}\sigma_2, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0.\end{aligned}$$

Soit :

$$\varepsilon_1 = \frac{S_{12}}{S_{22}}\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3 = \frac{S_{23}}{S_{22}}\varepsilon_2, \quad \sigma_2 = \frac{1}{S_{22}}\varepsilon_2, \quad (9.12)$$

et

$$E_T = \frac{1}{S_{22}}, \quad \nu_{TL} = -\frac{S_{12}}{S_{22}}, \quad \nu_{TT'} = -\frac{S_{23}}{S_{22}}. \quad (9.13)$$

Ces relations, comparées aux expressions (9.9), montrent que les coefficients  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{TL}$  et  $\nu_{LT}$  sont liés par la relation :

$$\frac{E_L}{\nu_{LT}} = \frac{E_T}{\nu_{TL}}. \quad (9.14)$$

### 9.3.3 Cisaillement longitudinal

Un essai de cisaillement longitudinal correspond à l'un des états de contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_5 \neq 0, \\ \sigma_i = 0 \quad \text{si } i \neq 5, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \sigma_6 \neq 0, \\ \sigma_i = 0 \quad \text{si } i \neq 6. \end{cases}$$

Dans le deuxième cas, les équations d'élasticité s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0, \\ \sigma_6 &= C_{66}\varepsilon_6. \end{aligned} \tag{9.15}$$

Nous en déduisons le module de *cisaillement longitudinal*  $G_{LT}$  :

$$G_{LT} = C_{66} \quad \text{ou} \quad G_{LT} = \frac{1}{S_{66}}. \tag{9.16}$$

Les directions  $T$  et  $T'$  étant équivalentes, nous avons :

$$G_{LT'} = G_{LT} = C_{66}. \tag{9.17}$$

### 9.3.4 Cisaillement transverse

Dans un essai de cisaillement transverse, le champ des contraintes s'exprime par :

$$\begin{aligned} \sigma_4 &\neq 0, \\ \sigma_i &= 0 \quad \text{si } i \neq 4. \end{aligned}$$

D'où les relations :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= 0 \quad \text{si } i \neq 4, \\ \sigma_4 &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23})\varepsilon_4. \end{aligned}$$

Le *module de cisaillement transverse*  $G_{TT'}$  s'écrit donc :

$$G_{TT'} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \quad \text{ou} \quad G_{TT'} = \frac{1}{2(S_{22} - S_{23})}. \tag{9.18}$$

Le module de cisaillement transverse  $G_{TT'}$  est lié au module d'Young transverse  $E_T$  et au coefficient de Poisson  $\nu_{TT'}$ , par l'expression :

$$G_{TT'} = \frac{E_T}{2(1 + \nu_{TT'})}. \tag{9.19}$$

### 9.3.5 Compression hydrostatique latérale

L'essai de compression hydrostatique latérale sans déformation longitudinale permet également une caractérisation simple des matériaux. Dans un tel essai, les champs imposés des contraintes et déformations sont tels que :

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \sigma_3 = -p, \\ \sigma_4 &= \sigma_5 = \sigma_6 = 0, \\ \varepsilon_1 &= 0, \\ \sigma_1 &\neq 0,\end{aligned}$$

où  $p$  est la pression hydrostatique imposée. Les équations d'élasticité s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3, \\ -p &= C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3, \\ -p &= C_{23}\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_3, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0.\end{aligned}$$

De ces équations, nous tirons :

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \varepsilon_3, \\ -p &= (C_{22} + C_{23})\varepsilon_2, \\ \sigma_1 &= 2C_{12}\varepsilon_2.\end{aligned}$$

La dilatation surfacique  $e_s$  s'écrit :

$$e_s = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -\frac{2}{C_{22} + C_{23}} p.$$

D'où :

$$p = -\frac{1}{2}(C_{22} + C_{23})e_s. \quad (9.20)$$

Nous en déduisons le *module de compression latérale*  $K_L$  sans déformation longitudinale :

$$K_L = \frac{1}{2}(C_{22} + C_{23}). \quad (9.21)$$

De même en fonction des constantes de souplesse, nous obtenons :

$$K_L = \frac{1}{2 \left( S_{22} + S_{23} - 2 \frac{S_{12}^2}{S_{11}} \right)}. \quad (9.22)$$

Le module  $K_L$  est relié au module d'Young longitudinal  $E_L$  et au coefficient de Poisson  $\nu_{LT}$  par l'expression :

$$K_L = \frac{C_{11} - E_L}{4\nu_{LT}^2}. \quad (9.23)$$

### 9.3.6 Modules en fonction des constantes de rigidité et de souplesse

Nous reprenons ici la synthèse des résultats obtenus dans les paragraphes précédents. Dans ces paragraphes, nous avons introduit les modules de l'ingénieur, mesurés dans des états simples de contraintes et déformations :

- $E_L$  et  $\nu_{LT}$ , le module d'Young et le coefficient de Poisson, mesurés dans un essai de traction longitudinale ;
- $E_T$ ,  $\nu_{TL}$ ,  $\nu_{TT'}$ , le module d'Young et le coefficient de Poisson, mesurés dans un essai de traction transverse ;
- $G_{LT}$  et  $G_{TT'}$ , les modules de cisaillement mesurés respectivement dans des essais de cisaillement longitudinal et transverse ;
- $K_L$ , le module de compression hydrostatique mesuré dans une compression hydrostatique latérale sans déformation longitudinale.

Nous avons vu (paragraphe 9.2.2) que le comportement mécanique d'un matériau unidirectionnel est caractérisé par 5 grandeurs indépendantes. Parmi les modules de l'ingénieur, seuls 5 modules sont donc indépendants. Par exemple, nous avons les relations :

$$E_T = \frac{2}{\frac{1}{2K_L} + \frac{1}{2G_{TT'}} + 2\frac{\nu_{LT}^2}{E_L}}, \quad (9.24)$$

$$G_{TT'} = \frac{1}{2\left(\frac{2}{E_T} - \frac{1}{2K_L} - 2\frac{\nu_{LT}^2}{E_L}\right)}, \quad (9.25)$$

$$\nu_{TT'} = \frac{E_T}{2G_{TT'}} - 1, \quad (9.26)$$

$$\nu_{TL} = \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L}. \quad (9.27)$$

Les modules généralement utilisés dans la pratique sont :  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $G_{LT}$  et  $G_{TT'}$ . Par contre, nous verrons que le module  $K_L$  peut être estimé par des relations analytiques en fonction des caractéristiques des constituants du composite, d'où l'intérêt de  $K_L$ .

Les expressions des modules en fonction des constantes de rigidité sont :

$$\begin{aligned}
E_L &= C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}}, & \nu_{LT} &= \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}}, \\
E_T &= C_{22} + \frac{C_{12}^2(C_{22} - 2C_{23}) + C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}, & (9.28) \\
\nu_{TL} &= \frac{C_{12}(C_{23} - C_{22})}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}, & \nu_{TT'} &= \frac{C_{12}^2 - C_{11}C_{23}}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}, \\
G_{LT} &= C_{66}, & G_{TT'} &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}), & K_L &= \frac{1}{2}(C_{22} + C_{23}).
\end{aligned}$$

Les expressions des modules en fonction des constantes de souplesse sont :

$$\begin{aligned}
E_L &= \frac{1}{S_{11}}, & \nu_{LT} &= -\frac{S_{12}}{S_{11}}, \\
E_T &= \frac{1}{S_{22}}, & \nu_{TL} &= -\frac{S_{12}}{S_{22}}, & \nu_{TT'} &= -\frac{S_{23}}{S_{22}}, \\
G_{LT} &= \frac{1}{S_{66}}, & G_{TT'} &= \frac{1}{2(S_{22} - S_{23})}, & (9.29) \\
K_L &= \frac{1}{2\left(S_{22} + S_{23} - 2\frac{S_{12}^2}{S_{11}}\right)}.
\end{aligned}$$

### 9.3.7 Constantes de rigidité et de souplesse en fonction des modules

Les relations inverses, permettant de déterminer les constantes de rigidité et de souplesse en fonction des modules, s'obtiennent sans difficulté. Elles s'écrivent pour les constantes de rigidités :

$$\begin{aligned}
C_{11} &= E_L + 4\nu_{LT}^2 K_L, \\
C_{12} &= 2K_L \nu_{LT}, \\
C_{22} &= G_{TT'} + K_L, & (9.30) \\
C_{23} &= -G_{TT'} + K_L, \\
C_{66} &= G_{LT}.
\end{aligned}$$

Pour les constantes de souplesse, les relations s'écrivent :

$$\boxed{\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_L}, & S_{12} &= -\frac{\nu_{LT}}{E_T}, \\ S_{22} &= \frac{1}{E_T}, & S_{23} &= -\frac{\nu_{TT'}}{E_T}, \\ S_{66} &= \frac{1}{G_{LT}}. \end{aligned}} \quad (9.31)$$

### 9.3.8 Restrictions sur les modules

Les modules d'élasticité ont des valeurs qui doivent être en accord avec les principes physiques de base. Par exemple, une traction sur un solide ne peut entraîner qu'une déformation dans le sens de la traction, ou une compression hydrostatique ne peut produire une dilatation du matériau. De telles considérations imposent les conditions suivantes sur les valeurs des modules :

- les modules  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_{LT}$ ,  $G_{TT'}$  et  $K_L$  sont positifs :

$$E_L, E_T, G_{LT}, G_{TT'}, K_L > 0, \quad (9.32)$$

- de l'expression (9.24), on déduit :

$$\nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L} < 1, \quad \text{soit} \quad |\nu_{LT}| < \sqrt{\frac{E_L}{E_T}}, \quad (9.33)$$

- l'expression (9.33) combinée à (9.27) conduit à :

$$|\nu_{TL}| < \sqrt{\frac{E_T}{E_L}}, \quad (9.34)$$

- l'expression (9.19) de  $G_{TT'}$  conduit de même à :

$$-1 \leq \nu_{TT'} \leq 1. \quad (9.35)$$

## 9.4 APPROCHES THÉORIQUES DE LA DÉTERMINATION DES MODULES D'ÉLASTICITÉ

### 9.4.1 Problème – Diverses approches

Le problème de la détermination des modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel consiste à rechercher les expressions de ces modules (5 modules indépendants) en fonction des caractéristiques mécaniques et géométriques des constituants : modules d'élasticité de la matrice et des fibres, fraction volumique de fibres, longueur des fibres, etc. Nous nous limiterons dans ce paragraphe à

l'étude des composites à fibres continues. Les propriétés mécaniques des fibres et de la matrice seront caractérisées par leurs modules d'élasticité (modules d'Young et coefficient de Poisson), notés respectivement  $E_f$ ,  $\nu_f$ ,  $E_m$ ,  $\nu_m$ . La résolution du problème posé n'est pas simple, et d'autre part la solution n'est pas unique. Nous présentons dans ce paragraphe une rapide synthèse du problème et de sa complexité. Le lecteur intéressé par une synthèse plus exhaustive pourra se reporter au travail critique et bibliographique effectué sur ce sujet par C.C. Chamis et G.P. Sendeckyj [6].

La complexité du problème peut être illustrée simplement en considérant le problème de la détermination de l'arrangement des fibres dans le composite unidirectionnel. En effet, ce matériau est constitué de fibres continues parallèles dont la proportion est imposée et caractérisée par la fraction volumique  $V_f$  de fibres. Dans la pratique, il n'existe pas qu'une seule possibilité d'arrangement des fibres, mais une infinité de possibilités. Par exemple, si les fibres sont réparties régulièrement, elles pourront être réparties suivant une maille hexagonale (figure 9.3), une maille carrée (figure 9.4), une maille carrée décalée (figure 9.5), etc. Les cellules élémentaires correspondantes sont reportées sur ces mêmes figures. La répartition des fibres suivant une maille carrée et celle suivant une maille carrée décalée ont la même cellule élémentaire. Ces deux répartitions diffèrent simplement par une rotation de  $45^\circ$  des directions principales des contraintes appliquées. Dans la pratique, lors de la fabrication d'un matériau composite unidirectionnel, les fibres sont le plus souvent réparties d'une manière aléatoire, plutôt que suivant un arrangement régulier. La répartition observée peut alors être schématisée par la représentation de la figure 9.6 : certaines fibres sont entièrement entourées de matrice, alors que d'autres peuvent se toucher. L'analyse théorique devra alors en tenir compte. D'un point de vue analytique, la solution réelle sera intermédiaire entre la solution trouvée dans le cas où toutes les fibres sont isolées les unes des autres, et la solution qui serait obtenue dans le cas où toutes les fibres seraient en contact.

L'ensemble des considérations précédentes montre donc les difficultés qui interviennent lors de l'approche théorique relative à la détermination des modules. Les méthodes utilisées peuvent être classées suivant trois types : recherche de bornes (expressions limites) en utilisant les théorèmes variationnels de l'énergie, recherche de solutions exactes, approches semi-empiriques.

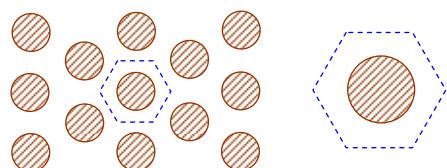


FIGURE 9.3. Arrangement hexagonal et cellule élémentaire.

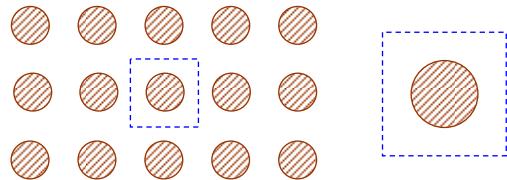


FIGURE 9.4. Arrangement carré et cellule élémentaire.

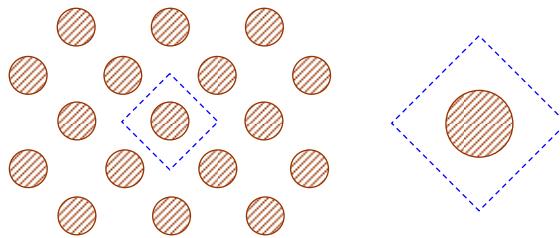


FIGURE 9.5. Arrangement carré décalé et cellule élémentaire.

Dans la recherche d'expressions limites, les théorèmes variationnels de l'énergie (tel le théorème de l'énergie potentielle totale, paragraphe 8.3) sont utilisés pour déterminer des bornes supérieures et inférieures des modules d'élasticité. Toutefois, ces approches conduisent dans bien des cas à des bornes trop éloignées pour être utilisées dans la pratique.

La recherche de solutions exactes est généralement complexe, et ne peut être abordée que dans le cas de schémas simplifiés (géométrie simplifiée de la cellule élémentaire, conditions simples imposées sur les frontières de la cellule, etc.). La résolution peut être abordée soit par une méthode analytique, soit par une méthode numérique de type éléments finis.

Enfin, les méthodes semi-empiriques permettent d'aboutir à des relations facilement adaptables à la pratique, mais ne permettent pas une réelle prédiction des propriétés. Elles restent donc descriptives.

Dans les paragraphes suivants, nous abordons certains éléments de ces diverses approches.

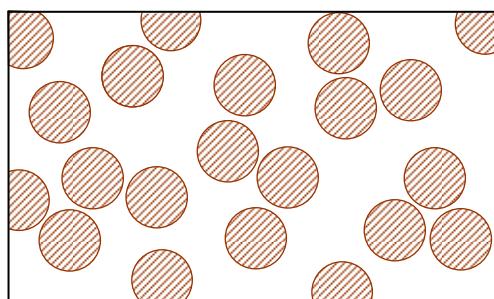


FIGURE 9.6. Représentation schématique de l'arrangement réel des fibres.

### 9.4.2 Bornes sur les modules d'élasticité

La détermination de bornes sur les modules d'élasticité utilise les théorèmes variationnels de l'énergie. Dans une approche déplacements, le théorème de l'énergie potentielle totale (8.46) permet de trouver les bornes supérieures, alors que le théorème de l'énergie potentielle complémentaire permet, dans le cadre d'une approche contraintes, d'accéder aux bornes inférieures [7].

Parmi les divers travaux effectués dans ce cadre, nous citerons d'une part les travaux de Z. Hashin [8] et R. Hill [9], effectués dans le cas de fibres de différents diamètres réparties au hasard (figure 9.7) mais avec une proportion donnée en volume. D'autre part, Z. Hashin et B.W. Rosen [10] ont effectué des travaux analogues dans le cas de fibres de diamètres identiques réparties suivant un arrangement hexagonal (figure 9.8). L'écriture des expressions trouvées est facilitée en introduisant les *modules de compression latérale* (sans déformation longitudinale)  $K_m$  et  $K_f$ , respectivement de la matrice et des fibres. Ces modules sont liés aux modules de compressibilité (7.41) ( $k_m$ ,  $k_f$ ) et aux modules de cisaillement ( $G_m$ ,  $G_f$ ) par les expressions :

$$K_i = k_i + \frac{G_i}{3}, \quad i = m, f. \quad (9.36)$$

Les modules ( $k_m$ ,  $k_f$ ) et ( $G_m$ ,  $G_f$ ) s'expriment eux-mêmes (tableau 7.1) à l'aide des modules d'Young ( $E_m$ ,  $E_f$ ) et coefficients de Poisson ( $\nu_m$ ,  $\nu_f$ ) de la matrice et des fibres selon :

$$k_i = \frac{E_i}{3(1-2\nu_i)}, \quad i = m, f, \quad (9.37)$$

$$G_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}, \quad i = m, f. \quad (9.38)$$

Soit, finalement :

$$K_i = \frac{E_i}{2(1-2\nu_i)(1+\nu_i)}, \quad i = m, f. \quad (9.39)$$

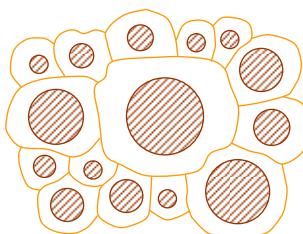


FIGURE 9.7. Arrangement aléatoire de fibres.

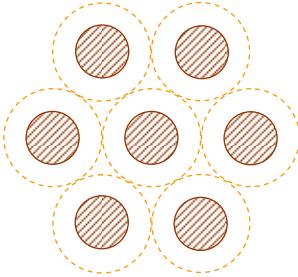


FIGURE 9.8. Arrangement hexagonal de fibres de mêmes diamètres.

En reprenant les notations introduites au paragraphe 9.3, les limites sur les cinq modules indépendants, obtenues par Z. Hashin [8] et R. Hill [9] sont données par les expressions :

$$K_m + \frac{V_f}{\frac{1}{K_f - K_m} + \frac{1 - V_f}{K_m + G_m}} \leq K_L \leq K_f + \frac{1 - V_f}{\frac{1}{K_m - K_f} + \frac{V_f}{K_f + G_f}}, \quad (9.40)$$

$$\begin{aligned} G_m + \frac{V_f}{\frac{1}{G_f - G_m} + (1 - V_f) \frac{K_m + 2G_m}{2G_m(K_m + G_m)}} \\ \leq G_{TT'} \leq G_f + \frac{1 - V_f}{\frac{1}{G_m - G_f} + V_f \frac{K_f + 2G_f}{2G_f(K_f + G_f)}}, \end{aligned} \quad (9.41)$$

$$G_m + \frac{V_f}{\frac{1}{G_f - G_m} + \frac{1 - V_f}{2G_m}} \leq G_{LT} \leq G_f + \frac{1 - V_f}{\frac{1}{G_m - G_f} + \frac{V_f}{2G_f}}, \quad (9.42)$$

$$\frac{V_f(1 - V_f)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{1}{G_m}} \leq \frac{E_L - E_f V_f - E_m(1 - V_f)}{4(\nu_f - \nu_m)^2} \leq \frac{V_f(1 - V_f)}{\frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_f}}, \quad (9.43)$$

$$\frac{V_f(1 - V_f)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{1}{G_m}} \leq \frac{\nu_{LT} - \nu_f V_f - \nu_m(1 - V_f)}{(\nu_f - \nu_m) \left( \frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_f} \right)} \leq \frac{V_f(1 - V_f)}{\frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_f}}. \quad (9.44)$$

### 9.4.3 Solutions exactes

#### 9.4.3.1 Introduction

La recherche de solutions exactes s'effectue, dans le cas d'arrangements particuliers de fibres, par l'une des approches classiques de la mécanique des solides déformables (chapitre 8). Nous présentons dans ce paragraphe une approche analytique (de type déplacements) du problème d'une cellule élémentaire cylindrique soumise à une traction. Le modèle géométrique retenu pour la cellule élémentaire (figure 9.9) est une fibre cylindrique de rayon  $r_f$ , entourée d'un cylindre de matrice  $r_m$ . Ces rayons sont reliés à la fraction volumique  $V_f$  de fibres par la relation :

$$V_f = \frac{r_f^2}{r_m^2}. \quad (9.45)$$

#### 9.4.3.2 Problème préalable : cylindre soumis à une traction uniforme

Nous avons à résoudre au préalable le problème d'un cylindre de matériau homogène isotrope soumis à une traction uniforme (figure 9.10) dans la direction de l'axe du cylindre. La symétrie de révolution du problème impose l'utilisation des coordonnées cylindriques (paragraphe 8.2.3). Nous considérons le champ des déplacements suivant :

$$\begin{aligned} u_r &= Ar + \frac{B}{r}, \\ u_\theta &= 0, \\ w &= Cz, \end{aligned} \quad (9.46)$$

défini en tout point  $M$  du cylindre, sauf au voisinage de l'axe ( $r = 0$ ). Il est aisé de montrer que ce champ est solution du problème d'élasticité considéré si  $r \neq 0$ . En effet, d'après (8.25), le champ des déformations au point  $M$  s'écrit :

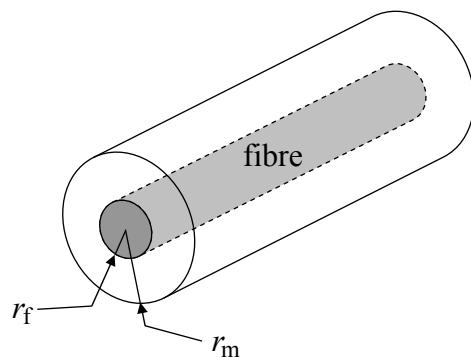


FIGURE 9.9. Cellule élémentaire cylindrique d'un composite unidirectionnel.

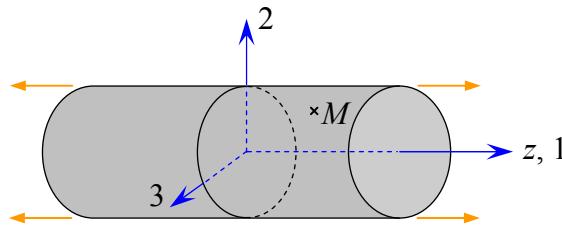


FIGURE 9.10. Cylindre soumis à une traction uniforme.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (9.47)$$

avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = A - \frac{B}{r^2}, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} u_r = A + \frac{B}{r^2}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = C. \end{aligned} \quad (9.48)$$

On trouve sans difficulté, à partir de ces relations, que les conditions de compatibilité (6.18) sont vérifiées. Le champ des contraintes est ensuite déterminé à partir des relations d'élasticité (7.24). Soit :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (9.49)$$

avec :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2K \left[ A + \nu C - (1-2\nu) \frac{B}{r^2} \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2K \left[ A + \nu C + (1-2\nu) \frac{B}{r^2} \right], \\ \sigma_{zz} &= 2K [2\nu A + (1-\nu)C], \end{aligned} \quad (9.50)$$

en introduisant le module de compression latérale défini en (9.39). Ces expressions vérifient les équations d'équilibre (8.26). Il en résulte que le champ des déplacements introduit (9.46) est bien la solution du problème d'élasticité considéré. Les constantes  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont à déterminer en fonction des conditions imposées sur les frontières.

### 9.4.3.3 Fibre entourée d'un cylindre de matrice dans le cas d'une traction

Nous étudions maintenant le problème de la cellule cylindrique (figure 9.9) soumise à une traction uniforme. Deux types de conditions peuvent être imposées :

- soit les déformations en traction sont imposées :  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon$ , (9.51)

- soit les contraintes en traction sont imposées :  $\sigma_{zz} = \sigma$ . (9.52)

Nous étudions le cas où les déformations sont imposées. Le cas de contraintes imposées conduirait à des résultats similaires. Comme champs des déplacements dans la matrice et dans la fibre, nous adoptons des champs du type (9.46). Toutefois, le déplacement dans la fibre étant fini lorsque  $r$  tend vers zéro impose que le coefficient  $B$  soit nul dans la fibre. Nous retenons donc comme champ des déplacements :

- dans la fibre :

$$\begin{aligned} u_{rf} &= A_f r, \\ u_{\theta f} &= 0, \\ w_f &= C_f z, \end{aligned} \quad (9.53)$$

- dans la matrice :

$$\begin{aligned} u_{rm} &= A_m r + \frac{B_m}{r}, \\ u_{\theta m} &= 0, \\ w_m &= C_m z. \end{aligned} \quad (9.54)$$

Les déformations dans la matrice et dans la fibre sont respectivement :

$$\varepsilon_{zzm} = C_m \quad \text{et} \quad \varepsilon_{zzf} = C_f.$$

La condition de déformations longitudinales imposées (9.51) ( $\varepsilon_{zzf} = \varepsilon_{zzm} = \varepsilon$ ) conduit à :

$$C_f = C_m = \varepsilon. \quad (9.55)$$

Les autres constantes  $A_f$ ,  $A_m$  et  $B_m$  sont déterminées à partir :

- des conditions imposées sur la frontière ( $r = r_m$ ) :

$$\sigma_{rrm} = 0, \quad (9.56)$$

- des conditions de continuité à l'interface fibre-matrice ( $r = r_f$ ) :

- sur les déplacements :

$$\begin{aligned} u_{rf} &= u_{rm}, \\ u_{zf} &= u_{zm} \quad (\text{continuité assurée par (9.55)}), \end{aligned} \quad (9.57)$$

- sur les contraintes radiales :

$$\sigma_{rrf} = \sigma_{rrm}. \quad (9.58)$$

Ayant déterminé les constantes  $A_f$ ,  $A_m$  et  $B_m$ , les modules d'élasticité seront obtenus à partir des relations (9.3). Dans le cas de la traction considérée, nous obtiendrons donc :

- le module longitudinal  $E_L$  :

$$E_L = E_{11} = \frac{\bar{\sigma}_{zz}}{\varepsilon},$$

soit :

$$E_L = \frac{1}{\pi r_m^2 \varepsilon} \int_S \sigma_{zz}(r) dS, \quad (9.59)$$

où  $S$  est la section droite de la cellule;

- le coefficient de Poisson  $\nu_{LT}$  :

$$\nu_{LT} = \nu_{12} = -\frac{u_{rm}(r = r_m)}{\varepsilon r_m}. \quad (9.60)$$

Les conditions imposées à la frontière (9.56), à l'interface (9.58) et les expressions précédentes des modules montrent la nécessité de déterminer au préalable les expressions des contraintes  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{zz}$ . Ces expressions sont déduites des relations (9.50). Soit :

- dans la fibre :

$$\sigma_{rrf} = 2K_f (A_f + \nu_f \varepsilon), \quad (9.61)$$

$$\sigma_{zzf} = 2K_f [2\nu_f A_f + (1 - \nu_f) \varepsilon]. \quad (9.62)$$

- dans la matrice :

$$\sigma_{rrm} = 2K_m \left[ A_m + \nu_m \varepsilon - (1 - 2\nu_m) \frac{B_m}{r^2} \right], \quad (9.63)$$

$$\sigma_{zzm} = 2K_m [2\nu_m A_m + (1 - \nu_m) \varepsilon]. \quad (9.64)$$

Les conditions (9.57) et (9.58) de continuité à l'interface fibre-matrice ( $r = r_f$ ) imposent :

$$A_f r_f = A_m r_f + \frac{B_m}{r_f}, \quad (9.65)$$

$$K_f (A_f + \nu_f \varepsilon) = K_m \left[ A_m + \nu_m \varepsilon - (1 - 2\nu_m) \frac{B_m}{r_f^2} \right], \quad (9.66)$$

et la condition (9.56) à la frontière ( $r = r_m$ ) s'écrit :

$$A_m + \nu_m \varepsilon - (1 - 2\nu_m) \frac{B_m}{r_m^2} = 0. \quad (9.67)$$

Les trois conditions précédentes permettent de trouver les constantes  $A_m$ ,  $B_m$  et  $A_f$ . Soit :

$$\begin{aligned} A_m &= A\varepsilon, \\ A_f &= \left[ A \left( 1 + \frac{1}{1-2\nu_m} \frac{r_m^2}{r_f^2} \right) + \frac{\nu_m}{1-2\nu_m} \frac{r_m^2}{r_f^2} \right] \varepsilon, \\ B_m &= \frac{A + \nu_m}{1-2\nu_m} r_m^2 \varepsilon, \end{aligned} \quad (9.68)$$

avec :

$$A = -\frac{\frac{\nu_m}{K_f} (1 - V_f) + \frac{\nu_m}{G_m} + \frac{\nu_f}{K_m} V_f}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_m} + \frac{1 - V_f}{K_f}}. \quad (9.69)$$

Les constantes étant obtenues, le module d'Young longitudinal est déterminé à partir de la relation (9.59). Soit dans le cas de coordonnées cylindriques :

$$E_L = \frac{1}{\pi r_m^2 \varepsilon} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_m} \sigma_{zz}(r) r \, dr \, d\theta,$$

ou

$$E_L = \frac{2}{r_m^2 \varepsilon} \left[ \int_0^{r_f} r \sigma_{zzf}(r) \, dr + \int_{r_f}^{r_m} r \sigma_{zzm}(r) \, dr \right]. \quad (9.70)$$

D'après (9.62), (9.64), (9.68) et (9.69), les contraintes  $\sigma_{zz}$  s'écrivent :

— dans la fibre :

$$\sigma_{zzf}(r) = 2K_f C_{zf} \varepsilon, \quad (9.71)$$

avec

$$C_{zf} = 1 - \nu_f + 2\nu_f \left[ A + \frac{1}{1-2\nu_m} \frac{1}{V_f} (A + \nu_m) \right],$$

— dans la matrice :

$$\sigma_{zzm}(r) = 2K_m C_{zm} \varepsilon, \quad (9.72)$$

avec

$$C_{zm} = 1 - \nu_m + 2\nu_m A.$$

En reportant les relations (9.71) et (9.72) dans l'expression (9.70) du module, nous obtenons :

$$E_L = 2K_f C_{zf} V_f + 2K_m C_{zm} (1 - V_f).$$

Le développement de cette relation conduit finalement à l'expression du module longitudinal :

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f) + \frac{4(\nu_f - \nu_m)^2 V_f (1 - V_f)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{1}{G_m}}. \quad (9.73)$$

De même, l'exploitation de la relation (9.60) conduit à l'expression du coefficient de Poisson :

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) + \frac{(\nu_f - \nu_m) \left( \frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_f} \right) V_f (1 - V_f)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{1}{G_m}}. \quad (9.74)$$

Les relations (9.73) et (9.74) ainsi obtenues sont identiques aux bornes inférieures du module longitudinal (9.43) et du coefficient de Poisson (9.44). D'autre part, des applications numériques, effectuées sur les expressions (9.73) et (9.74), montrent que ces expressions sont pratiquement confondues avec les lois des mélanges que nous établirons simplement aux paragraphes 9.4.4.1 et 9.4.4.3.

#### 9.4.3.4 Autres modules

De la même manière, il est possible de trouver les solutions exactes de deux autres problèmes d'élasticité de la cellule cylindrique :

- le cisaillement longitudinal (paragraphe 9.3.3),
- la compression hydrostatique latérale (paragraphe 9.3.5).

La résolution du premier problème conduit à l'expression du module de cisaillement longitudinal :

$$G_{LT} = G_{12} = G_m \frac{G_f (1 + V_f) + G_m (1 - V_f)}{G_f (1 - V_f) + G_m (1 + V_f)}, \quad (9.75)$$

alors que le second problème aboutit à l'expression du module de compression latérale :

$$K_L = K_m + \frac{\frac{V_f}{1 - V_f}}{\frac{1}{k_f - k_m + \frac{1}{3}(G_f - G_m)} + \frac{1}{k_m + \frac{4}{3}G_m}}. \quad (9.76)$$

Les relations (9.73) à (9.76) ont été établies par R. Hill [9] et Z. Hashin [11]. La relation (9.75) obtenue pour le module de cisaillement longitudinal est identique à la borne inférieure (9.42). De même, l'expression (9.76) est confondue avec la borne inférieure de  $K_L$  (9.40).

Ayant trouvé quatre modules indépendants, il reste à en exprimer un cinquième, par exemple le module de cisaillement transverse  $G_{TT'} = G_{23}$ , déterminé dans un essai de cisaillement transverse (paragraphe 9.3.4). Toutefois, aucune solution analytique exacte n'a été trouvée au problème du cisaillement transverse de la cellule élémentaire cylindrique. Aucune expression du module  $G_{TT'}$ , analogue aux expressions précédentes trouvées pour les autres modules, ne peut donc être proposée dans ce contexte. Cette constatation aboutit à envisager une autre approche abordée dans le paragraphe suivant.

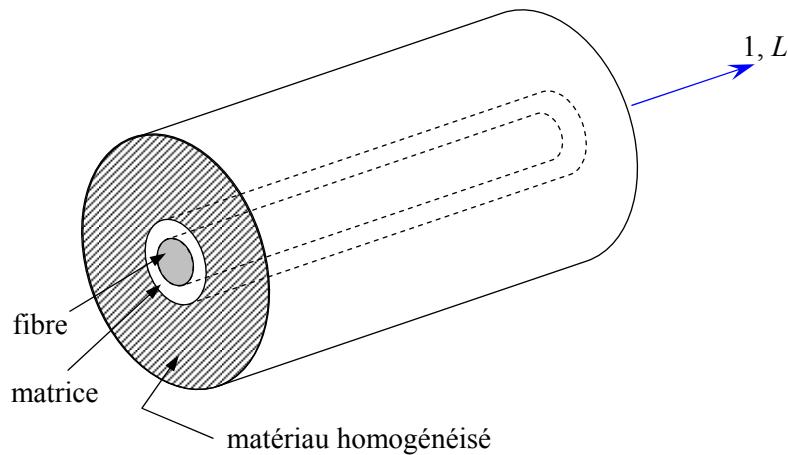


FIGURE 9.11. Modèle cylindrique à trois phases.

#### 9.4.3.5 Modèle pour la détermination du module de cisaillement transverse

La méthode utilisée pour lever les difficultés évoquées dans le paragraphe précédent consiste à considérer un modèle cylindrique à trois phases (figure 9.11). Dans ce modèle, la cellule cylindrique élémentaire est entourée d'un cylindre de grandes dimensions, constitué par le matériau équivalent homogénéisé et possédant donc les propriétés effectives homogénéisées du matériau composite. Ce cylindre est soumis sur ses frontières extérieures aux conditions de l'essai de cisaillement transversal. Un tel modèle a été développé par R.M. Christensen et K.H. Lo [7,13], à partir des travaux effectués par J.J. Hermans [12]. Ce modèle conduit à l'expression du module transverse :

$$G_{TT'} = G_m \left( 1 + \frac{V_f}{\frac{G_m}{G_f - G_m} + \frac{k_m + \frac{7}{3}G_m}{2k_m + \frac{8}{3}G_m} (1 - V_f)} \right). \quad (9.77)$$

Cette expression est confondue avec la borne inférieure (9.41) de  $G_{TT'}$ .

#### 9.4.4 Approches simplifiées

Des expressions simplifiées et pratiques des modules peuvent être obtenues en faisant une approche très simplifiée du comportement mécanique de la cellule élémentaire du matériau composite unidirectionnel. Nous développons ces expressions dans le présent paragraphe.

##### 9.4.4.1 Module d'Young longitudinal

Le module d'Young longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinale (figure 9.12). L'hypothèse simplificatrice est de supposer une

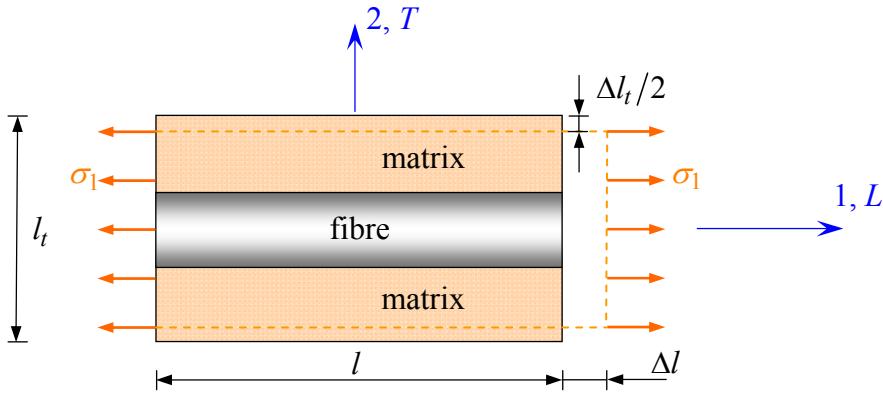


FIGURE 9.12. Schéma simplifié d'une traction longitudinale.

déformation uniforme et identique dans la fibre et dans la matrice. Si  $\Delta l$  est l'allongement de la cellule (identique à celui de la fibre et de la matrice), la déformation longitudinale imposée à la cellule est :

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l},$$

où  $l$  est la longueur de cellule considérée. L'identité des déformations dans la fibre et dans la matrice impose :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_l. \quad (9.78)$$

Si la fibre et la matrice ont un comportement élastique, les contraintes dans la fibre et la matrice sont exprimées par :

$$\begin{aligned} \sigma_f &= E_f \varepsilon_l, \\ \sigma_m &= E_m \varepsilon_l. \end{aligned} \quad (9.79)$$

La charge totale appliquée est :

$$F_1 = \sigma_f S_f + \sigma_m S_m,$$

où  $S_f$  et  $S_m$  sont respectivement les aires des sections droites de la fibre et de la matrice. Si  $S$  est l'aire de la section droite de la cellule moyenne, la contrainte moyenne  $\sigma_l = F_1/S$  s'écrit :

$$\sigma_l = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f). \quad (9.80)$$

Cette contrainte moyenne est liée à la déformation de la cellule par le module d'Young longitudinal :

$$\sigma_l = E_L \varepsilon_l. \quad (9.81)$$

La combinaison des relations (9.79) à (9.81) conduit à l'expression du module d'Young longitudinal :

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f). \quad (9.82)$$

Cette expression est connue sous le nom de *loi des mélanges* pour le module

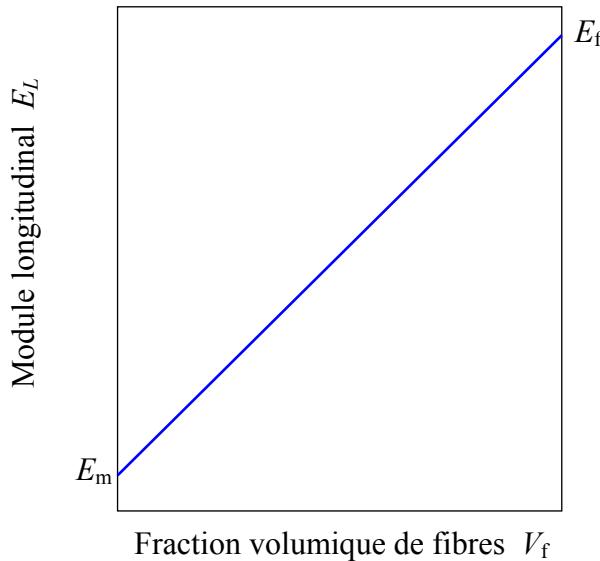


FIGURE 9.13. Loi des mélanges pour le module d'Young longitudinal.

d'Young dans la direction des fibres. Cette loi des mélanges est schématisée sur la figure 9.13. La variation du module est linéaire entre les valeurs  $E_m$  module de la matrice et  $E_f$  module des fibres, lorsque la fraction volumique  $V_f$  de fibres varie de 0 à 1.

#### 9.4.4.2 Module d'Young transverse

Le module d'Young transverse est déterminé dans un essai de traction transverse où le composite est chargé suivant la direction normale aux fibres. Une expression simplifiée de ce module peut être obtenue dans un schéma simpliste à deux dimensions. Dans un tel schéma, une tranche de matériau composite, d'épaisseur donnée, est considérée comme étant constituée (figure 9.14) de couches successives, possédant alternativement les propriétés des fibres et de la matrice. La hauteur des couches doit simplement vérifier :

$$V_f = \frac{h_f}{h_f + h_m} \quad \text{et} \quad 1 - V_f = \frac{h_m}{h_f + h_m}. \quad (9.83)$$

La charge  $F_2$  imposée suivant la direction transverse est transmise intégralement dans la fibre et dans la matrice, imposant des contraintes égales :

$$\sigma_m = \sigma_f = \sigma_2. \quad (9.84)$$

Il en résulte que les déformations respectives de la fibre et de la matrice dans la direction transverse s'écrivent :

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f}, \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m}. \quad (9.85)$$

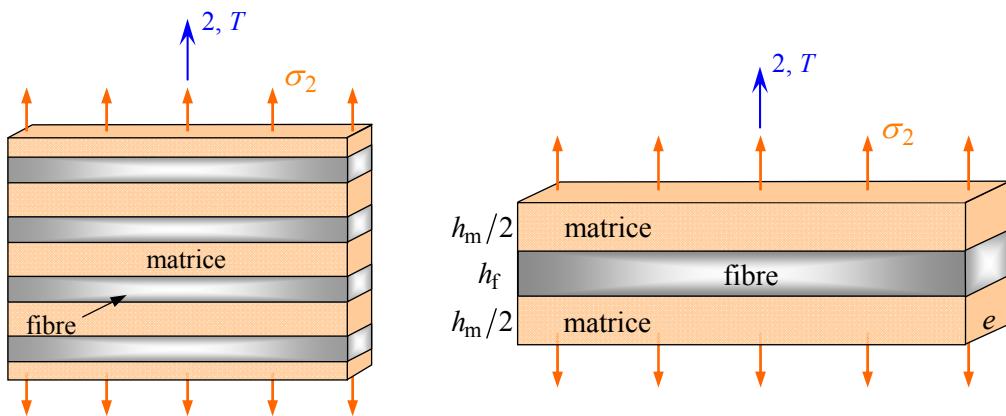


FIGURE 9.14. Schématisation par couches d'un composite unidirectionnel.

L'allongement transverse d'une cellule élémentaire résulte des allongements cumulés dans la fibre et la matrice. Soit :

$$\Delta l_2 = \varepsilon_f h_f + \varepsilon_m h_m,$$

et la déformation transverse s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{h_f + h_m} = \varepsilon_f \frac{h_f}{h_f + h_m} + \varepsilon_m \frac{h_m}{h_f + h_m}.$$

Soit :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m (1 - V_f). \quad (9.86)$$

Cette déformation est liée à la contrainte imposée sur la cellule, par le module transverse :

$$\sigma_2 = E_T \varepsilon_2. \quad (9.87)$$

La combinaison des expressions (9.85) à (9.87) conduit à l'expression du module transverse :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{1 - V_f}{E_m}. \quad (9.88)$$

Cette expression est connue sous le nom de *loi inverse des mélanges* et peut être réécrite, en rapportant le module transverse au module d'Young de la matrice, suivant une relation sans dimension sous la forme :

$$\frac{E_T}{E_m} = \frac{1}{1 + \left( \frac{E_m}{E_f} - 1 \right) V_f}. \quad (9.89)$$

Le tableau 9.1 donne les valeurs de  $E_T/E_m$  pour trois valeurs du rapport  $E_f/E_m$ . Il est à noter que, par exemple dans le cas d'un rapport  $E_f/E_m = 100$ , un volume de fibres de 50 % est nécessaire pour atteindre un module d'Young transverse double

TABLEAU 9.1. Valeurs de  $E_T/E_m$  pour diverses valeurs du rapport  $E_f/E_m$  et de la fraction  $V_f$  de fibres.

$E_f/E_m$	$V_f$									
	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	1
5	1	1,19	1,47	1,67	1,92	2,27	2,78	3,57	4,17	5
10	1	1,22	1,56	1,82	2,17	2,70	3,57	5,26	6,90	10
100	1	1,25	1,66	1,98	2,46	3,25	4,80	9,17	16,81	100

du module de la matrice. Ce résultat montre que les fibres participent peu au module transverse. La variation du module  $E_T$  en fonction de la fraction volumique de fibres est reportée sur la figure 9.15 pour plusieurs valeurs (5, 10, 100) du rapport  $E_f/E_m$ .

#### 9.4.4.3 Coefficient de Poisson longitudinal

Pour déterminer le coefficient de Poisson longitudinal  $\nu_{LT}$ , nous reprenons le schéma précédent dans lequel le composite unidirectionnel est schématisé par couches successives. Le coefficient  $\nu_{LT}$  est déterminé dans un essai de traction longitudinale, schématisé sur la figure 9.16. Ce schéma diffère de celui du paragraphe 9.4.4.1 par la modélisation de la cellule élémentaire : modélisation de la fibre et de la matrice sous forme cylindrique sur la figure 9.12 et modélisation par couches sur la figure 9.16.

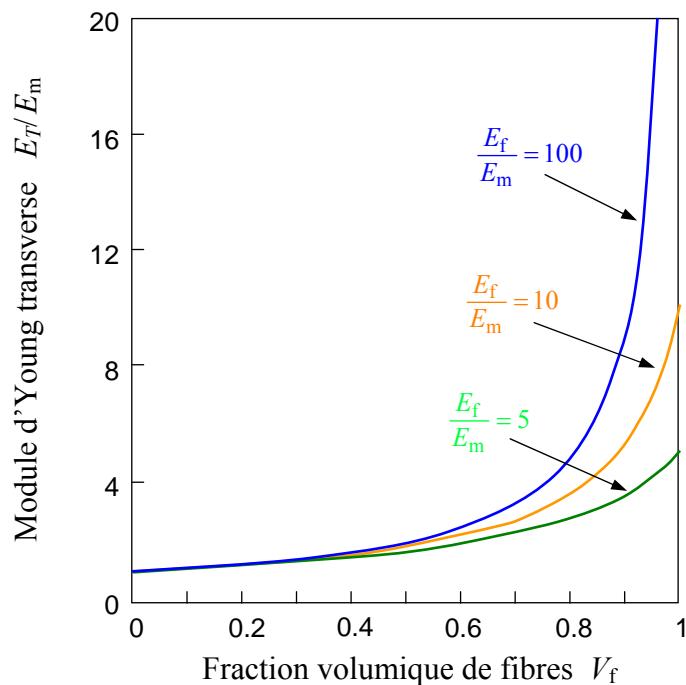


FIGURE 9.15. Variation du module  $E_T$  en fonction de la fraction volumique  $V_f$  de fibres.

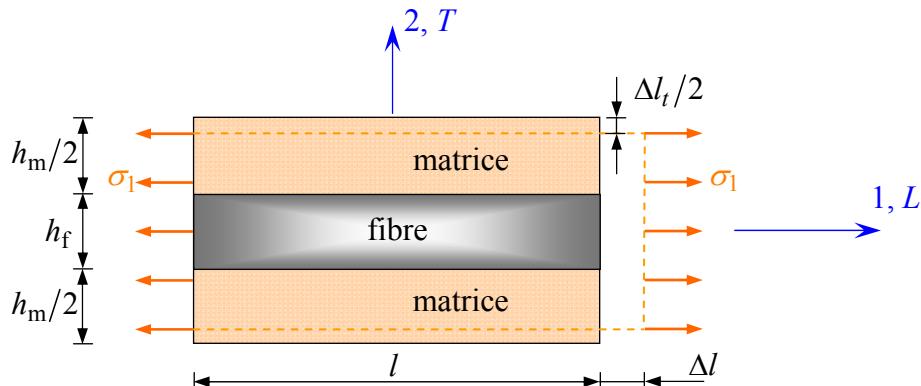


FIGURE 9.16. Schéma par couches d'une traction longitudinale.

Comme dans le paragraphe 9.4.4.1, fibre et matrice subissent des déformations identiques (9.78). Il en résulte que les déformations transverses dans la matrice et dans les fibres s'écrivent :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2m} &= -\nu_m \varepsilon_1, \\ \varepsilon_{2f} &= -\nu_f \varepsilon_1.\end{aligned}$$

L'allongement transverse de la cellule élémentaire est :

$$\Delta l_t = -\nu_m \varepsilon_1 h_m - \nu_f \varepsilon_1 h_f,$$

et la déformation transverse s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_t}{h_f + h_m} = -\left[\nu_m(1-V_f) + \nu_f V_f\right] \varepsilon_1.$$

D'où l'expression du coefficient de Poisson :

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f). \quad (9.90)$$

Cette expression est la loi des mélanges pour le coefficient de Poisson longitudinal. La variation de  $\nu_{LT}$  en fonction de la fraction volumique de fibres est linéaire entre  $\nu_m$  et  $\nu_f$ . Dans la pratique, les valeurs de  $\nu_m$  et  $\nu_f$  sont assez proches (voisines de 0,3). Le coefficient de Poisson  $\nu_{LT}$  restera donc également proche de cette valeur.

#### 9.4.4.4 Module de cisaillement longitudinal

Le module de cisaillement longitudinal  $G_{LT}$  est déterminé dans un essai de cisaillement longitudinal schématisé sur la figure 9.17, en utilisant à nouveau la modélisation par couches du composite unidirectionnel. Les contraintes en cisaillement dans la fibre et dans la matrice sont égales, du fait des contraintes  $\tau$  imposées sur la cellule. Les déformations en cisaillement de la fibre et de la

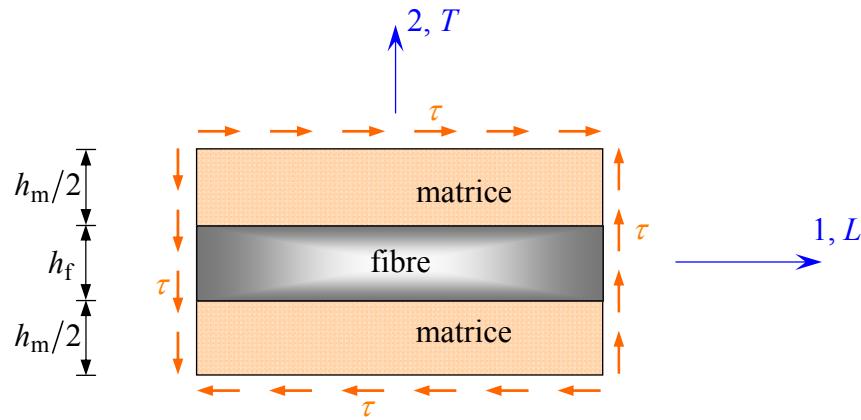


FIGURE 9.17. Schéma par couches d'un essai de cisaillement longitudinal.

matrice s'expriment donc suivant :

$$\gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \quad \text{et} \quad \gamma_m = \frac{\tau}{G_m}. \quad (9.91)$$

Les déformations induites dans la fibre et dans la matrice (figure 9.18) sont :

$$\delta_f = h_f \gamma_f \quad \text{et} \quad \delta_m = h_m \gamma_m.$$

La déformation totale de la cellule (figure 9.18) est :

$$\delta = \delta_f + \delta_m = h_f \gamma_f + h_m \gamma_m.$$

Et l'angle de cisaillement de la cellule est déterminé par l'expression :

$$\gamma = \frac{\delta}{h_f + h_m} = \gamma_f V_f + \gamma_m (1 - V_f). \quad (9.92)$$

Cet angle est lié à la contrainte de cisaillement par le module de cisaillement

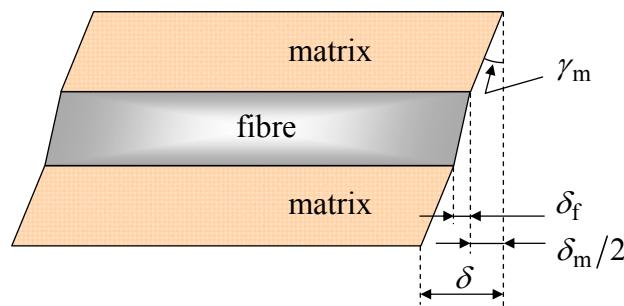


FIGURE 9.18. Déformations en cisaillement de la matrice et de la fibre.

longitudinal  $G_{LT}$  suivant la relation :

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{LT}}. \quad (9.93)$$

En combinant les expressions (9.91) à (9.93), nous obtenons :

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{1-V_f}{G_m}. \quad (9.94)$$

Cette expression a une forme identique à celle obtenue (9.88) pour le module d'Young transverse. Les mêmes considérations peuvent être transposées ici.

### 9.4.5 Équations d'Halpin-Tsai

À partir des résultats obtenus dans les analyses théoriques (paragraphes 9.4.3 et 9.4.4), J.C. Halpin et S.W. Tsai [14] ont proposé des équations générales et simples de formulation. Les modules d'un matériau composite unidirectionnel sont exprimés :

— par la loi des mélanges pour le module  $E_L$  et le coefficient  $\nu_{LT}$  :

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f),$$

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f),$$

— et par l'expression générale suivante pour les autres modules :

$$\frac{M}{M_m} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f}, \quad (9.95)$$

expression dans laquelle :

- le coefficient  $\eta$  s'exprime par :

$$\eta = \frac{(M_f/M_m) - 1}{(M_f/M_m) + \xi}, \quad (9.96)$$

- $M$  est le module considéré :  $E_T$ ,  $G_{LT}$  ou  $\nu_{TT'}$ ;
- $M_f$  le module correspondant des fibres :  $E_f$ ,  $G_f$  ou  $\nu_f$ ;
- $M_m$  le module de la matrice :  $E_m$ ,  $G_m$  ou  $\nu_m$ .

Le facteur  $\xi$  est une mesure du renforcement des fibres et dépend de la géométrie des fibres, de l'arrangement des fibres et du type d'essai (donc du module considéré).

Si la simplicité des relations est effectivement séduisante, l'application à la conception n'est en fait que théorique. En effet, la difficulté d'utilisation de la relation (9.95) réside dans la détermination de valeurs appropriées de  $\xi$ . Les

valeurs de ce facteur ne peuvent être déterminées que par comparaison avec une solution analytique (nous sommes alors ramenés à la résolution du problème d'élasticité), ou par ajustement avec des courbes expérimentales.

Par exemple, J.C. Halpin et S.W. Tsai obtiennent un excellent accord avec les résultats obtenus par D.F. Adams et D.R. Doner [15, 16] par une méthode de différences finies appliquée au cas de fibres cylindriques réparties suivant un arrangement carré et pour une fraction volumique de fibres de 0,55, en prenant :

- $\xi = 2$  pour déterminer le module  $E_T$ ,
- $\xi = 1$  pour déterminer le module  $G_{LT}$ .

Une discussion plus approfondie et relative à la comparaison entre l'expression (9.95) et diverses solutions exactes (analytiques ou numériques) est développée dans la référence [14]. Finalement, l'ensemble des résultats montre que si la relation (9.95) est bien adaptée à une description des propriétés du matériau composite unidirectionnel, elle ne permet pas de résoudre le problème de la prévision de ces propriétés. Ces considérations montrent donc la limitation de formules semi-empiriques du type (9.95), pour une application à la conception des structures en matériaux composites.

## 9.5 VALEURS NUMÉRIQUES DES MODULES

### 9.5.1 Valeurs expérimentales des modules

Le tableau 9.2 donne les caractéristiques mécaniques mesurées sur des composites unidirectionnels à matrice époxyde, avec diverses fibres : fibres de verre E et R, fibres de carbone HM et HR, fibres de Kevlar. La fraction volumique de fibres est la même pour les trois composites : 0,60. Nous comparons, dans le paragraphe suivant, ces valeurs expérimentales aux valeurs théoriques obtenues à partir des diverses relations établies.

Pour calculer ces valeurs numériques, il est nécessaire au préalable de déterminer les valeurs des divers modules des fibres et de la matrice, par les expressions :

- pour les fibres :

<ul style="list-style-type: none"> <li>• module de cisaillement</li> <li>• module de compressibilité</li> <li>• module de compression latérale</li> </ul>	$G_f = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)},$ $k_f = \frac{E_f}{3(1-2\nu_f)},$ $K_f = k_f + \frac{G_f}{3},$
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------

- pour la matrice :

$$G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)}, \quad k_m = \frac{E_m}{3(1-2\nu_m)}, \quad K_m = k_m + \frac{G_m}{3}. \quad (9.98)$$

TABLEAU 9.2. Caractéristiques mécaniques mesurées sur divers composites matrice époxyde-fibres unidirectionnelles.

			Verre E      R	Carbone HM    HR	Kevlar 49
Propriétés mesurées sur des monofilaments	Masse volumique	$\rho_f$ (kg/m <sup>3</sup> )	2600 2550	1950 1750	1450
	Module d'Young	$E_f$ (GPa)	73 86	380 260	135
	Coefficient de Poisson	$\nu_f$	0,22 0,22	— —	—
	Contrainte à la rupture	$\sigma_{fu}$ (MPa)	3400 4400	2200 2500	3500
	Allongement à la rupture	$\varepsilon_{fu}$ (%)	4,5 5,2	0,6 1,0	2,5
Caractéristiques mesurées sur un composite unidirectionnel à matrice époxyde	Fraction volumique	$V_f$	0,60 0,60	0,60 0,60	0,60
	Masse volumique	$\rho_c$ (kg/m <sup>3</sup> )	2040 2010	1650 1550	1370
	Module d'Young longitudinal	$E_L$ (GPa)	46 52	230 159	84
	Module d'Young transversal	$E_T$ (GPa)	10 13,6	14,4 14,3	5,6
	Module de cisaillement longitudinal	$G_{LT}$ (GPa)	4,6 4,7	4,9 4,8	2,1
	Coefficient de Poisson	$\nu_{LT}$	0,31 0,31	0,32 0,32	0,34
	Contrainte de rupture en traction	$\sigma_{cu}$ (MPa)	1400 1900	800 1380	1400
	Contrainte de rupture en flexion	(MPa)	1500 1500	1250 1850	—
	Contrainte de rupture en compression	(MPa)	910 970	900 1430	280
	Contrainte de rupture en cisaillement	(MPa)	70 70	70 80	70
	Caractéristiques spécifiques	$E_L/\rho_c$ (MN m/kg)	22,5 25,9	139 103	61
		$\sigma_{cu}/\rho_c$ (kN m/kg)	686 945	485 890	1022

Matrice époxyde:  $E_m = 3,45$  GPa,  $\nu_m = 0,30$ ,  $\sigma_{mu} = 70$  MPa,  $\rho_m = 1200$  kg/m<sup>3</sup>.

Les valeurs obtenues sont reportées dans le tableau 9.3. Pour déterminer les modules des fibres, il est nécessaire de connaître le coefficient de Poisson  $\nu_f$ . Sa valeur ne peut être déterminée directement sur les fibres. Lorsque cette valeur est reportée (cas des fibres de verres E et R), elle correspond à une valeur déterminée sur le matériau massif. Pour accéder à la valeur du coefficient de Poisson (lorsque la détermination expérimentale sur le matériau massif ne peut être effectuée), on utilise assez souvent la valeur mesurée pour  $\nu_{LT}$  sur le matériau composite unidirectionnel (tableau 9.2). La valeur de  $\nu_f$  en est déduite en utilisant la loi des mélanges (9.90). C'est cette approche que nous avons utilisée pour déterminer (tableau 9.3) les valeurs de  $\nu_f$  pour les fibres de carbone et de Kevlar.

TABLEAU 9.3. Modules d'élasticité des fibres et de la matrice.

	Modules	Verre		Carbone		Kevlar
		E	R	HM	HR	49
Fibres	$E_f$ expérimental (GPa)	73	86	380	260	135
	$\nu_f$ expérimental	0,22	0,22	—	—	—
	$\nu_f$ calculé	—	—	0,33	0,33	0,37
	$G_f$ (GPa)	29,9	35,2	142,9	97,7	49,3
	$k_f$ (GPa)	43,5	51,2	372,5	254,9	173,1
	$K_f$ (GPa)	53,4	62,9	420,2	287,5	189,5
Matrice	$E_m$ expérimental (GPa)				3,45	
	$\nu_m$ expérimental				0,30	
	$G_m$ (GPa)				1,33	
	$k_m$ (GPa)				2,875	
	$K_m$ (GPa)				3,32	

### 9.5.2 Comparaison entre valeurs expérimentales et calculées des modules

À partir des valeurs reportées dans le tableau 9.3, nous avons calculé les valeurs des modules des composites unidirectionnels, déterminées à partir des diverses expressions théoriques (tableau 9.4) :

- le *module d'Young longitudinal*  $E_L$ , obtenu à partir de la loi des mélanges (9.82) ;
- le *module de cisaillement longitudinal*  $G_{LT}$ , calculé à partir de la relation (9.75) ;
- le *module de compression latérale*  $K_L$ , relation (9.76) ;
- le *module de cisaillement transverse*  $G_{TT'}$ , relation (9.77) ;
- le *module d'Young transverse*  $E_T$ , calculé à partir des valeurs précédentes de  $K_L$ ,  $G_{TT'}$ ,  $\nu_{LT}$  et  $E_L$ , par la relation (9.24) ;
- le *module d'Young transverse*  $E_T$  et le *module de cisaillement longitudinal*  $G_{LT}$ , à partir des approches simplifiées, relations (9.88) et (9.94) ;
- les bornes *inférieures* (notées : -) et *supérieures* (notées : +) de  $K_L$ ,  $G_{TT'}$ ,  $G_{LT}$ , données par les relations (9.40), (9.41) et (9.42). Rappelons que les bornes inférieures (9.40), (9.41) et (9.42) coïncident avec les valeurs calculées par (9.76), (9.77) et (9.75).

TABLEAU 9.4. Valeurs des modules des composites unidirectionnels, déterminées à partir des expressions théoriques.

			Verre E      R	Carbone HM    HR	Kevlar 49
Solutions exactes de problèmes particuliers	$E_L$ (mélanges) (GPa)	45,2    53,0	229,4    157,4		82,4
	$v_{LT}$ (mélanges)	0,25    0,25	—    —		—
	$v_{LT}$ expérimental	0,31    0,31	0,32    0,32		0,34
	$G_{LT}$ (9.75) (GPa)	4,57    4,67	5,14    5,06		4,83
	$K_L$ (9.76) (GPa)	8,98    9,15	10,10    10,02		9,88
	$G_{TT'}$ (9.77) (GPa)	3,96    4,02	4,32    4,27		4,13
	$E_T$ (9.24) (GPa)	10,8    11,0	12,0    11,9		11,5
Approches simplifiées	$E_T$ (9.88) (GPa)	8,05    8,13	8,50    8,45		8,30
	$G_{LT}$ (9.75) (GPa)	3,11    3,14	3,28    3,26		3,19
Bornes (9.40) à (9.44)	$K_{L-} (= K_L)$ (GPa)	8,98    9,15	10,10    10,02		9,88
	$K_{L+}$ (GPa)	22,1    25,4	120    84		50
	$G_{TT'-} (= G_{TT'})$ (GPa)	3,96    4,02	4,32    4,27		4,13
	$G_{TT'+}$ (GPa)	11,2    12,9	52,6    36,4		19,7
	$G_{LT-} (= G_{LT})$ (GPa)	4,57    4,67	5,14    5,06		4,83
	$G_{LT+}$ (GPa)	13,9    16,2	62,3    43		22,2
	$E_{T-} (= E_T)$ (GPa)	10,8    11,0	12,0    11,9		11,5
	$E_{T+}$ (GPa)	28,5    32,9	137    95		52

Les valeurs numériques obtenues (tableau 9.4), comparées aux valeurs expérimentales (tableau 9.2) montrent que :

- le *module d'Young longitudinal*  $E_L$  est bien décrit par la loi des mélanges, pour l'ensemble des fibres;
- le *module de cisaillement longitudinal*  $G_{LT}$  est bien décrit par la relation (9.75) (ou la borne inférieure (9.42));
- le *module d'Young transverse*  $E_T$  est assez bien approché par la relation (9.24) associée aux expressions (9.76), (9.77) et (9.90), pour les fibres de verres et de carbones, bien que les valeurs calculées sous-estiment les valeurs expérimentales lorsque le module d'Young des fibres augmente (verre R, carbones HM et HR).

Par contre, les valeurs expérimentales, obtenues pour le module de cisaillement longitudinal et le module d'Young transverse des composites à fibres de Kevlar, sont très nettement inférieures aux valeurs théoriques. Ces faibles valeurs peuvent être attribuées à :

- une mauvaise adhérence des fibres aramides avec les résines,
- de mauvaises propriétés en compression et cisaillement des fibres aramides,
- une superposition des deux processus.

Les valeurs théoriques trouvées par les approches simplifiées pour le module d'Young transversal et le module de cisaillement longitudinal donnent des valeurs trop faibles. Ce fait est la conséquence du rôle trop important accordé à la matrice dans ces approches simplifiées.

Enfin les valeurs obtenues sur les bornes supérieures montrent que le schéma théorique correspondant est trop éloigné de la réalité. Il conviendrait en fait à une description d'un matériau composite constitué de fibres d'époxy dans une matrice de verre, de carbone ou de Kevlar.

### 9.5.3 Conclusions

En fonction des résultats précédents, nous retiendrons les expressions théoriques suivantes des modules d'un composite unidirectionnel :

- *module d'Young longitudinal*  $E_L$  : loi des mélanges (9.82);
- *coefficent de Poisson longitudinal*  $\nu_{LT}$  : loi des mélanges (9.90);
- *module de cisaillement longitudinal*  $G_{LT}$  : relation (9.75);
- *module de compression latérale*  $K_L$  : relation (9.76);
- *module de cisaillement transverse*  $G_{TT'}$  : relation (9.77);
- *module d'Young transverse*  $E_T$ , exprimé à partir des modules précédents à l'aide de l'expression (9.24).

Ces expressions permettent de déterminer la variation des modules en fonction de la proportion de fibres. Les courbes correspondantes sont reportées sur la figure 9.19 pour les composites à fibres de verre E et sur la figure 9.20 pour les composites à fibres de carbone HR.

## EXERCICES

### 9.1 Calculer les constantes de rigidité et de souplesse :

- d'un composite unidirectionnel à fibres de verre :

$$E_L = 45 \text{ GPa}, E_T = 10 \text{ GPa}, \nu_{LT} = 0,31, G_{LT} = 4,5 \text{ GPa}, G_{TT'} = 4 \text{ GPa},$$

- d'un composite unidirectionnel à fibres de carbone :

$$E_L = 230 \text{ GPa}, E_T = 15 \text{ GPa}, \nu_{LT} = 0,36, G_{LT} = 5 \text{ GPa}, G_{TT'} = 4 \text{ GPa}.$$

### 9.2 Tracer les modules $E_L$ , $E_T$ , $G_{LT}$ et $G_{TT'}$ en fonction de la fraction volumique de fibres de composites unidirectionnels constitués d'une matrice de caractéristiques $E_m = 3 \text{ GPa}$ et $\nu_m = 0,30$ et de fibres de verre-R ( $E_f = 86 \text{ GPa}$ , $\nu_f = 0,22$ ).

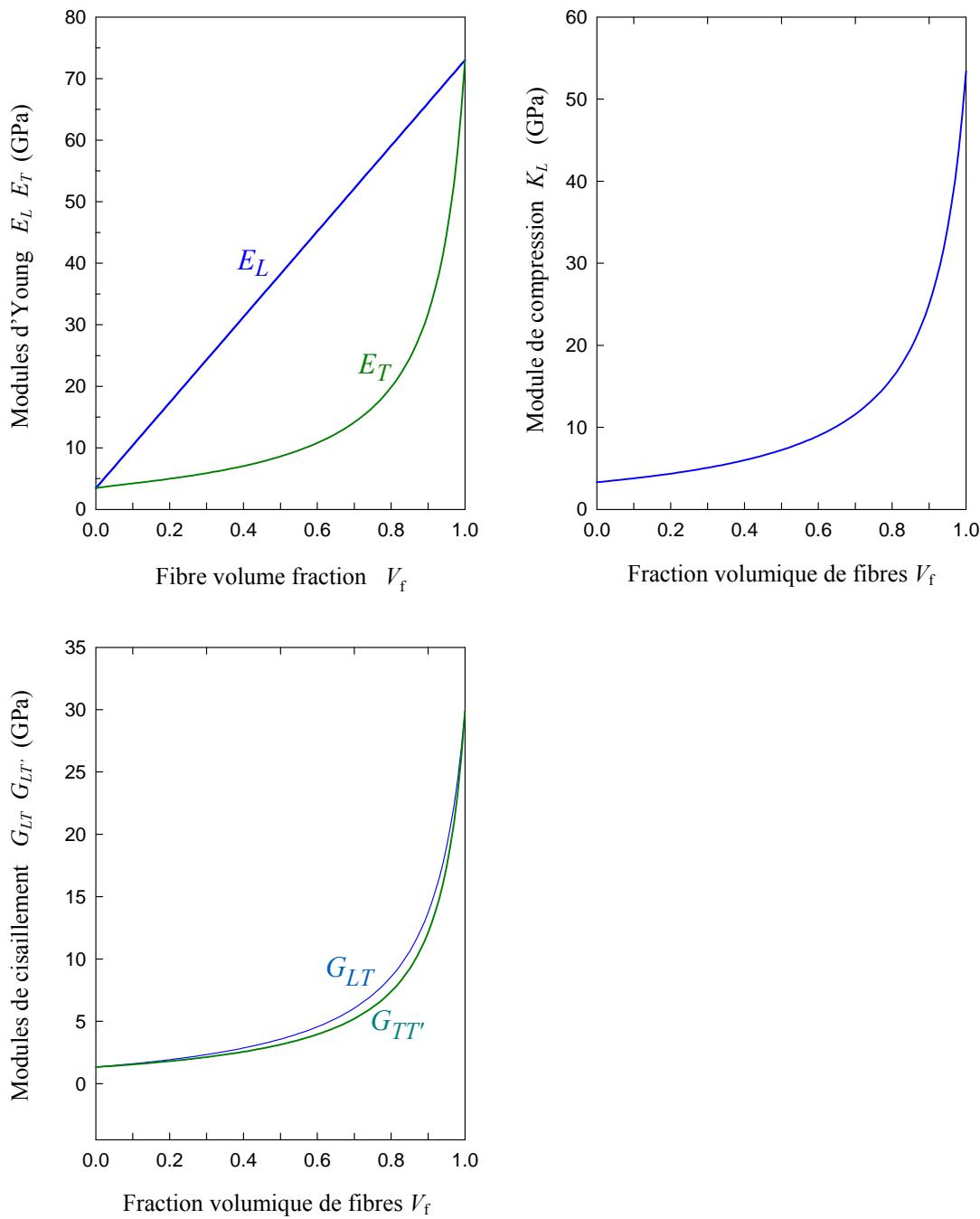


FIGURE 9.19. Variation des différents modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel à fibres de verre E, en fonction de la fraction volumique de fibres.

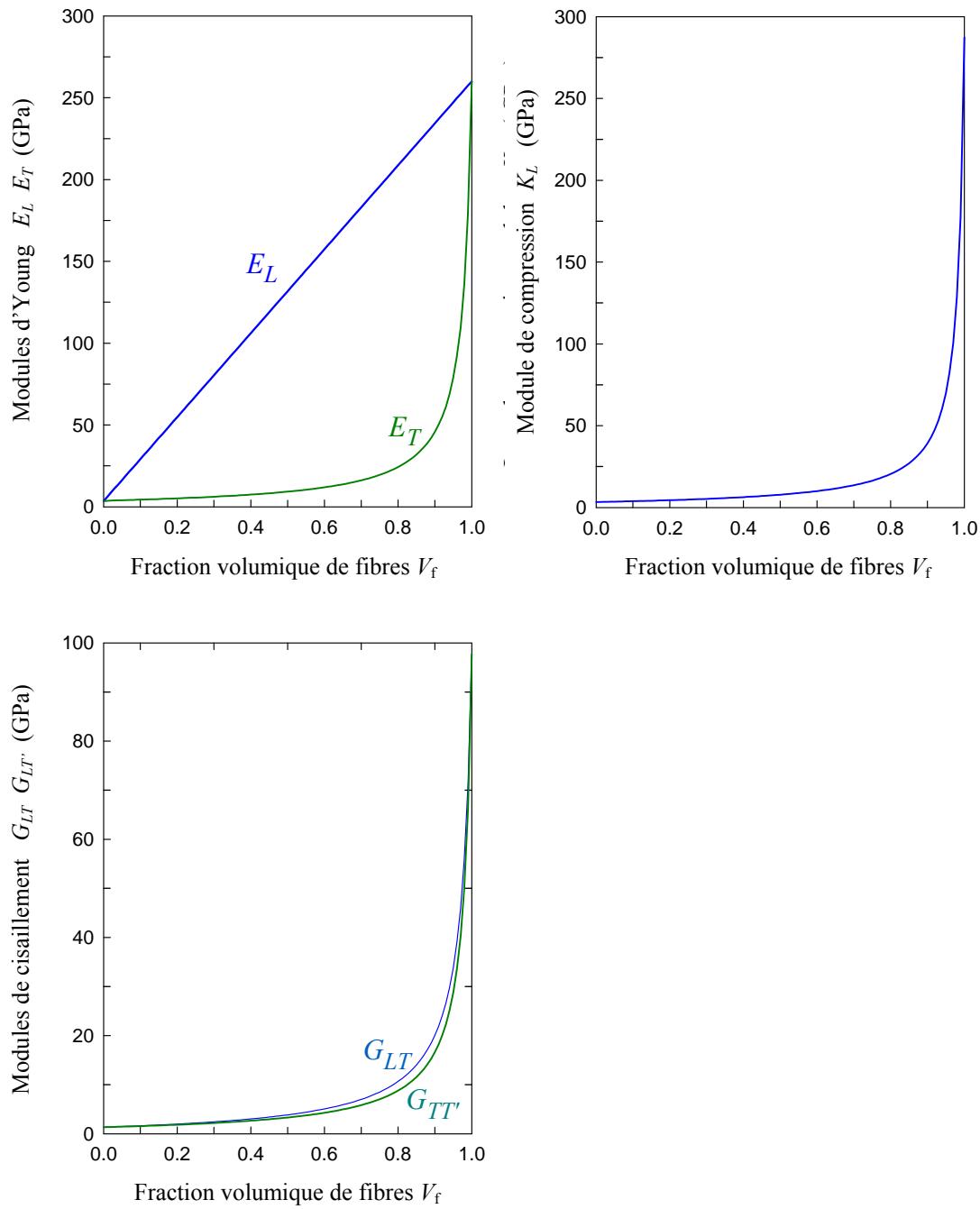


FIGURE 9.20. Variation des différents modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel à fibres de carbone HR, en fonction de la fraction volumique de fibres

## CHAPITRE 10

# Comportement Élastique d'un Matériau Composite Orthotrope

### 10.1 LOI DE HOOKE POUR UN COMPOSITE ORTHOTROPE

#### 10.1.1 Composite orthotrope

Les stratifiés sont constitués de couches de matériaux composites unidirectionnels ou de composites à base de tissus. Généralement, les tissus (Chapitre 2) sont constitués de fils unidirectionnels croisés à  $90^\circ$  : les uns dans le sens chaîne, les autres dans le sens trame. Ces couches possèdent trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux, et se comportent d'un point de vue élastique comme un matériau orthotrope. Les directions principales (1, 2) seront prises respectivement suivant la direction chaîne et la direction trame ; ces directions seront également notées  $L$  et  $T$  (figure 10.1). La direction 3 orthogonale au plan de la couche sera également notée  $T'$ .

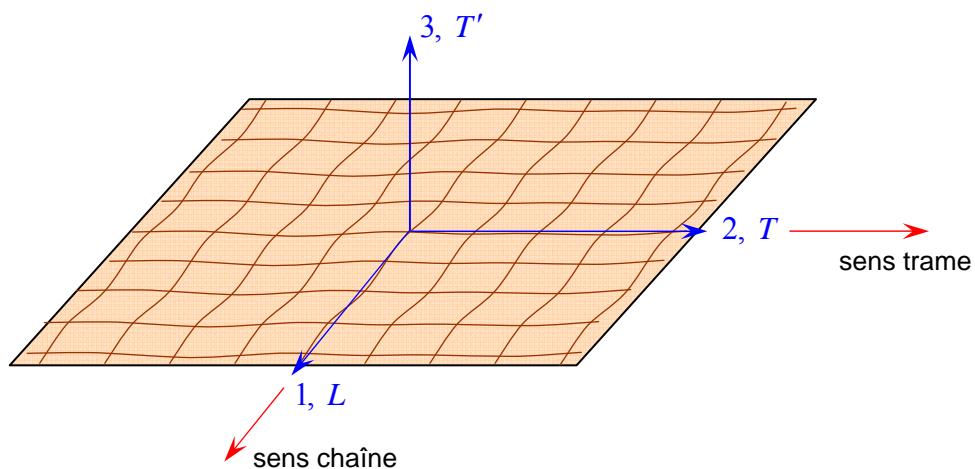


FIGURE 10.1. Couche de matériau composite orthotrope.

### 10.1.2 Matrices de rigidité et de souplesse

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope est décrit en introduisant soit les constantes de rigidité  $C_{ij}$ , soit les constantes de souplesse  $S_{ij}$ . Compte tenu des résultats établis au Chapitre 7 (relation 7.14), la loi de Hooke s'écrit suivant l'une des formes matricielles :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (10.1)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \quad (10.2)$$

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope est donc caractérisé par 9 coefficients indépendants :

$$C_{11}, \quad C_{12}, \quad C_{13}, \quad C_{22}, \quad C_{23}, \quad C_{33}, \quad C_{44}, \quad C_{55}, \quad C_{66},$$

ou

$$S_{11}, \quad S_{12}, \quad S_{13}, \quad S_{22}, \quad S_{23}, \quad S_{33}, \quad S_{44}, \quad S_{55}, \quad S_{66}.$$

Les matrices de rigidité et de souplesse étant inverses l'une de l'autre, nous avons :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{\Delta S}, & C_{12} &= \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{\Delta S}, \\ C_{22} &= \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{\Delta S}, & C_{13} &= \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{\Delta S}, \\ C_{33} &= \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{\Delta S}, & C_{23} &= \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{\Delta S}, \\ C_{44} &= \frac{1}{S_{44}}, & C_{55} &= \frac{1}{S_{55}}, & C_{66} &= \frac{1}{S_{66}}, \end{aligned} \quad (10.3)$$

avec

$$\Delta S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13}.$$

Les relations inverses donnant les coefficients de souplesse en fonction des coefficients de rigidité sont obtenues en intervertissant les rôles de  $C_{ij}$  et  $S_{ij}$ .

Le composite unidirectionnel est un cas particulier de matériau orthotrope dit *orthotrope de révolution*, pour lequel :

$$\begin{aligned} C_{13} &= C_{12}, & C_{44} &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}), \\ C_{33} &= C_{22}, & C_{55} &= C_{66}, \end{aligned} \quad (10.4)$$

et

$$\begin{aligned} S_{13} &= S_{12}, & S_{44} &= 2(S_{22} - S_{23}), \\ S_{33} &= S_{22}, & S_{55} &= S_{66}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

## 10.2 MODULES DE L'INGÉNIEUR

Les modules usuels de l'ingénieur (module d'Young, coefficients de Poisson, modules de cisaillement) s'expriment simplement en fonction des coefficients de souplesse.

### 10.2.1 Traction dans le sens chaîne

Dans un essai de traction suivant le sens chaîne, toutes les contraintes sont nulles, excepté la contrainte  $\sigma_1$  :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\neq 0, \\ \sigma_i &= 0 \quad \text{si } i = 2, 3, \dots, 6. \end{aligned} \quad (10.6)$$

En fonction des constantes de souplesse, les équations d'élasticité s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1, \\ \varepsilon_2 &= S_{12}\sigma_1, \\ \varepsilon_3 &= S_{13}\sigma_1, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Soit :

$$\sigma_1 = \frac{1}{S_{11}}\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{S_{12}}{S_{11}}\varepsilon_1, \quad \varepsilon_3 = \frac{S_{13}}{S_{11}}\varepsilon_1. \quad (10.8)$$

Nous en déduisons le module d'Young et les coefficients de Poisson, mesurés dans un essai de traction suivant le sens chaîne :

$$\begin{aligned} E_{ch} &= E_L = E_1 = \frac{1}{S_{11}}, \\ \nu_{LT} &= \nu_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}}, \quad \nu_{LT'} = \nu_{13} = -\frac{S_{13}}{S_{11}}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

### 10.2.2 Traction dans le sens trame

Dans un essai de traction suivant le sens trame, seule la contrainte  $\sigma_2$  n'est pas nulle :

$$\begin{aligned}\sigma_2 &\neq 0, \\ \sigma_i &= 0 \quad \text{si } i \neq 2.\end{aligned}\tag{10.10}$$

Les équations d'élasticité s'écrivent :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= S_{12}\sigma_2, \\ \varepsilon_2 &= S_{22}\sigma_2, \\ \varepsilon_3 &= S_{23}\sigma_2, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0.\end{aligned}\tag{10.11}$$

Soit :

$$\sigma_2 = \frac{1}{S_{22}}\varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 = \frac{S_{12}}{S_{22}}\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3 = \frac{S_{23}}{S_{22}}\varepsilon_2.\tag{10.12}$$

D'où le module d'Young et les coefficients de Poisson, mesurés dans un essai de traction suivant le sens trame :

$$\begin{aligned}E_{\text{tr}} &= E_T = E_2 = \frac{1}{S_{22}}, \\ \nu_{TL} &= \nu_{21} = -\frac{S_{12}}{S_{22}}, \quad \nu_{TT'} &= \nu_{23} = -\frac{S_{23}}{S_{22}}.\end{aligned}\tag{10.13}$$

### 10.2.3 Traction transversale

Nous appellerons traction transversale une traction effectuée dans une direction normale au plan de la couche :

$$\begin{aligned}\sigma_3 &\neq 0, \\ \sigma_i &= 0 \quad \text{si } i \neq 3.\end{aligned}\tag{10.14}$$

Nous obtenons aisément le module d'Young transversal et les coefficients de Poisson correspondants :

$$\begin{aligned}E_{T'} &= E_3 = \frac{1}{S_{33}}, \\ \nu_{T'L} &= \nu_{31} = -\frac{S_{13}}{S_{33}}, \quad \nu_{TT'} &= \nu_{32} = -\frac{S_{23}}{S_{33}}.\end{aligned}\tag{10.15}$$

### 10.2.4 Relation entre modules d'Young et coefficients de Poisson

La comparaison des diverses relations établies (10.9), (10.13) et (10.15) permet d'écrire :

$$\frac{E_L}{\nu_{LT}} = \frac{E_T}{\nu_{TL}}, \quad \frac{E_L}{\nu_{LT'}} = \frac{E_T}{\nu_{TL'}}, \quad \frac{E_T}{\nu_{TT'}} = \frac{E_{T'}}{\nu_{TT}}, \quad (10.16)$$

relations qui s'écrivent sous la forme condensée :

$$\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}}, \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ ou } L, T, T'. \quad (10.17)$$

### 10.2.5 Essais de cisaillement

Un essai de cisaillement dans le plan de la couche correspond à un état des contraintes tel que :

$$\begin{aligned} \sigma_6 &\neq 0, \\ \sigma_i &= 0 \quad \text{si } i \neq 6. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0, \\ \sigma_6 &= C_{66}\varepsilon_6. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Nous en déduisons le module de cisaillement dans le plan de la couche :

$$G_{12} = G_{LT} = C_{66} = \frac{1}{S_{66}}. \quad (10.20)$$

De même, nous trouvons les modules de cisaillement dans des essais transversaux :

— suivant le sens chaîne :

$$G_{13} = G_{LT'} = C_{55} = \frac{1}{S_{55}}, \quad (10.21)$$

— suivant le sens trame :

$$G_{23} = G_{TT'} = C_{44} = \frac{1}{S_{44}}. \quad (10.22)$$

### 10.2.6 Conclusion

La relation d'élasticité (10.2) s'écrit, en introduisant les modules de l'ingénieur, sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \quad (10.23)$$

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope peut être décrit par les 9 modules indépendants :

- 3 modules d'Young :  $E_1, E_2, E_3$  ou  $E_L, E_T, E_{T'}$ ,
- 3 coefficients de Poisson :  $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$  ou  $\nu_{LT}, \nu_{LT'}, \nu_{TT'}$ ,
- 3 modules de cisaillements :  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  ou  $G_{LT}, G_{LT'}, G_{TT'}$ .

Les 3 autres coefficients de Poisson sont déterminés à l'aide de la relation (10.17).

## 10.3 CONSTANTES DE RIGIDITÉ ET DE SOUPLESSE EN FONCTION DES MODULES DE L'INGÉNIEUR

### 10.3.1 Constantes de souplesse

Les expressions des constantes de souplesse s'obtiennent sans difficulté à partir des expressions établies au paragraphe précédent, soit :

$$\boxed{\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, & S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}, & S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}, \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2}, & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2}, & S_{33} &= \frac{1}{E_3}, \\ S_{44} &= \frac{1}{G_{23}}, & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}}, & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned}} \quad (10.25)$$

### 10.3.2 Constantes de rigidité

Les expressions des constantes de rigidité en fonction des modules de l'ingénieur s'obtiennent à partir des relations (10.3) et (10.25), soit :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, & C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta}, \\ C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta}, & C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, \\ C_{13} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}, & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, \\ C_{44} &= G_{23}, & C_{55} &= G_{13}, & C_{66} &= G_{12}, \end{aligned} \quad (10.26)$$

avec

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}.$$

### 10.3.3 Restriction sur les coefficients d'élasticité

Si une seule contrainte suivant un axe principal est appliquée au matériau, la déformation suivant cette direction est de même signe que la contrainte. Il en résulte que :

$$S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{44}, S_{55}, S_{66} > 0, \quad (10.27)$$

ou en terme de modules d'ingénieur :

$$E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{13}, G_{12} > 0. \quad (10.28)$$

De même, si l'on impose au matériau une seule déformation suivant un axe principal, la contrainte qui en résulte dans cette direction a le même signe que la déformation imposée. Il en résulte que :

$$C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66} > 0, \quad (10.29)$$

et compte tenu de (10.26) :

$$1 - \nu_{23}\nu_{32} > 0, \quad 1 - \nu_{13}\nu_{31} > 0, \quad 1 - \nu_{12}\nu_{21} > 0, \quad (10.30)$$

et

$$1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} > 0, \quad (10.31)$$

puisque la matrice  $S$  est définie positivement (déterminant positif), le travail thermodynamique étant positif. Cette même propriété associée aux relations

(10.26) implique également :

$$\begin{aligned} |S_{23}| &< \sqrt{S_{22}S_{33}}, \\ |S_{13}| &< \sqrt{S_{11}S_{33}}, \\ |S_{12}| &< \sqrt{S_{11}S_{22}}. \end{aligned} \quad (10.32)$$

En utilisant les relations de symétrie (10.17), les conditions (10.30) peuvent également s'écrire :

$$\begin{aligned} |\nu_{21}| &< \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}, & |\nu_{12}| &< \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}, \\ |\nu_{32}| &< \sqrt{\frac{E_3}{E_2}}, & |\nu_{23}| &< \sqrt{\frac{E_2}{E_3}}, \\ |\nu_{13}| &< \sqrt{\frac{E_1}{E_3}}, & |\nu_{31}| &< \sqrt{\frac{E_3}{E_1}}. \end{aligned} \quad (10.33)$$

De même en reportant les relations de symétrie dans la condition (10.31), nous obtenons :

$$2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} < 1 - \nu_{21}^2 \frac{E_1}{E_2} - \nu_{32}^2 \frac{E_2}{E_3} - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} < 1. \quad (10.34)$$

Les deux dernières conditions peuvent être regroupées pour obtenir :

$$\left(1 - \nu_{32}^2 \frac{E_2}{E_3}\right) \left(1 - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1}\right) - \left(\nu_{21} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + \nu_{32} \nu_{13} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\right)^2 > 0. \quad (10.35)$$

Enfin, la condition précédente peut être réarrangée de manière à obtenir des bornes sur le coefficient de Poisson  $\nu_{21}$  :

$$\begin{aligned} & - \left[ \nu_{32} \nu_{13} \frac{E_2}{E_1} + \left(1 - \nu_{32}^2 \frac{E_2}{E_3}\right)^{1/2} \left(1 - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \right] \\ & < \nu_{21} < \\ & - \left[ \nu_{32} \nu_{13} \frac{E_2}{E_1} - \left(1 - \nu_{32}^2 \frac{E_2}{E_3}\right)^{1/2} \left(1 - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \right]. \end{aligned} \quad (10.36)$$

## EXERCICES

**10.1** Calculer les constantes de rigidité et de souplesse d'un composite orthotrope de caractéristiques :

$$\begin{aligned} E_L &= 30 \text{ GPa}, & E_T &= 20 \text{ GPa}, & E_{T'} &= 10 \text{ GPa}, \\ \nu_{LT} &= 0,14, & \nu_{LT'} &= 0,30, & \nu_{TT'} &= 0,32, \\ G_{LT} &= 4 \text{ GPa}, & G_{LT'} &= 3,5 \text{ GPa}, & G_{TT'} &= 2,5 \text{ GPa}. \end{aligned}$$

**10.2** Calculer les constantes de rigidité et de souplesse d'un composite orthotrope de caractéristiques :

$$\begin{aligned} E_L &= E_T = 25 \text{ GPa}, & E_{T'} &= 10 \text{ GPa}, \\ \nu_{LT} &= 0,12, & \nu_{LT'} &= 0,30, & \nu_{TT'} &= 0,32, \\ G_{LT} &= 4,2 \text{ GPa}, & G_{LT'} &= G_{TT'} = 3,5 \text{ GPa}. \end{aligned}$$

## CHAPITRE 11

# Matériaux Composite en-dehors de ses Axes Principaux

## 11.1 RELATIONS D'ELASTICITÉ DANS UN SYSTÈME D'AXES QUELCONQUE

### 11.1.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié le comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel (chapitre 9) ou tissu (chapitre 10), exprimé dans les directions principales : un axe suivant la direction des fibres ou de la chaîne, les deux autres axes étant orthogonaux. Or, nous avons vu (chapitre 3) que les stratifiés étaient élaborés par couches successives, dont la direction des fibres ou de la chaîne est décalée d'une couche à l'autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de tels stratifiés, il est alors nécessaire de prendre un système d'axes de référence pour l'ensemble du stratifié, et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence.

Dans ce chapitre, nous considérons donc (figure 11.1) une couche de matériau unidirectionnel ou tissu de directions principales  $(1, 2, 3)$ , le plan  $(1, 2)$  étant confondu avec le plan de la couche, et la direction 1 confondue avec la direction des fibres ou de la chaîne. L'objectif de ce chapitre est de caractériser les propriétés élastiques de la couche, en les exprimant dans le système d'axes de référence  $(1', 2', 3)$  du stratifié, la direction des fibres ou de la chaîne faisant un angle  $\theta$  avec la direction 1'. Ce système d'axes est usuellement référencé comme système  $(x, y, z)$ . Par la suite, nous utiliserons indifféremment les deux notations :  $(1', 2', 3) = (x, y, z)$ . La première est mieux adaptée à la notation matricielle et plus pratique pour effectuer les changements de base. La seconde notation différencie le système d'axes propres  $(1, 2, 3) = (L, T, T')$  du matériau unidirectionnel ou tissu du système usuel  $(x, y, z)$  de coordonnées cartésiennes du mécanicien.

### 11.1.2 Matrices de rigidité et de souplesse

Le comportement élastique d'une couche, rapporté à ses axes principaux, est donné par les relations (9.5) à (9.6) pour une couche unidirectionnelle, et

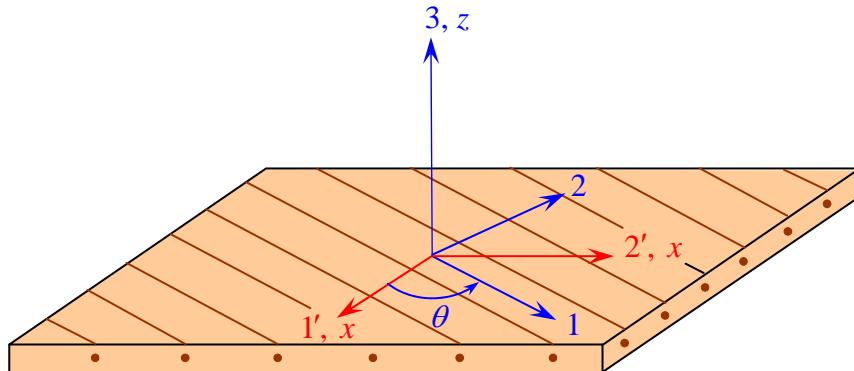


FIGURE 11.1. Axes principaux (1, 2, 3) d'une couche de stratifié et axes de référence (1', 2', 3) = (x, y, z) du stratifié.

(10.1) à (10.2) pour une couche avec renfort tissu. Les matrices de rigidité  $\mathbf{C}'$  et de souplesse  $\mathbf{S}'$ , exprimées dans la base (1', 2', 3), sont obtenues en appliquant aux matrices de rigidité et de souplesse, rapportées à la base (1, 2, 3), les relations de changement de base (7.9) à (7.12). Pour appliquer ici ces relations, il est nécessaire de bien faire attention au fait que le changement de base : (1, 2, 3) → (1', 2', 3) se fait, dans le cas présent, par une rotation d'angle  $-\theta$ . Les relations à utiliser sont les relations (7.11) et (7.12) qui s'écrivent ici :

$$\mathbf{C}' = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \mathbf{C} \mathbf{T}_\varepsilon , \quad (11.1)$$

et

$$\mathbf{S}' = \mathbf{T}_\varepsilon^{-1} \mathbf{S} \mathbf{T}_\sigma . \quad (11.2)$$

Ces relations, associées aux expressions (5.46), (5.48), (6.43) et (6.45), permettent de déterminer la matrice de rigidité  $\mathbf{C}'$  et la matrice de souplesse  $\mathbf{S}'$  exprimées dans la base (1', 2', 3). Ces matrices s'écrivent sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & A_{26} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & A_{36} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix},$$

avec  $A_{ij} = C'_{ij}$  ou  $S'_{ij}$ . Les expressions des constantes de rigidité et de souplesse dans le système d'axes (1', 2', 3), obtenues à partir des relations (11.1) et (11.2), sont reportées dans les tableaux (11.1) et (11.2) pour un composite unidirectionnel, et dans les tableaux (11.3) et (11.4) pour un composite avec renfort tissu.

TABLEAU 11.1. Constantes de rigidité d'un composite unidirectionnel, dont la direction des fibres fait un angle  $\theta$  avec la direction  $x$  de référence (figure 11.1).

---


$$\begin{aligned}
 C'_{11} &= C_{11} \cos^4 \theta + C_{22} \sin^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\
 C'_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\
 C'_{13} &= C_{12} \cos^2 \theta + C_{23} \sin^2 \theta, \\
 C'_{14} &= 0, \quad C'_{15} = 0, \\
 C'_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\
 C'_{22} &= C_{11} \sin^4 \theta + C_{22} \cos^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\
 C'_{23} &= C_{12} \sin^2 \theta + C_{23} \cos^2 \theta, \\
 C'_{24} &= 0, \quad C'_{25} = 0, \\
 C'_{26} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta, \\
 C'_{33} &= C_{22}, \quad C'_{34} = 0, \quad C'_{35} = 0, \\
 C'_{36} &= (C_{12} - C_{23}) \sin \theta \cos \theta, \\
 C'_{44} &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \cos^2 \theta + C_{66} \sin^2 \theta, \\
 C'_{45} &= \left[ C_{66} - \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \right] \sin \theta \cos \theta, \quad C'_{46} = 0, \\
 C'_{55} &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \sin^2 \theta + C_{66} \cos^2 \theta, \quad C'_{56} = 0, \\
 C'_{66} &= \left[ C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66}) \right] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).
 \end{aligned}$$


---

Les relations d'élasticité, rapportées aux axes (1', 2', 3), s'écrivent donc sous une des deux formes, en fonction des constantes de rigidité :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (11.3)$$

TABLEAU 11.2. Constantes de souplesse d'un composite unidirectionnel, hors de ses axes principaux.

---

$S'_{11} = S_{11} \cos^4 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$						
$S'_{12} = (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta),$						
$S'_{13} = S_{12} \cos^2 \theta + S_{23} \sin^2 \theta,$						
$S'_{14} = 0,$	$S'_{15} = 0,$					
$S'_{16} = [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] \sin \theta \cos^3 \theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] \sin^3 \theta \cos \theta,$						
$S'_{22} = S_{11} \sin^4 \theta + S_{22} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$						
$S'_{23} = S_{12} \sin^2 \theta + S_{23} \cos^2 \theta,$						
$S'_{24} = 0,$	$S'_{25} = 0,$					
$S'_{26} = [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] \sin^3 \theta \cos \theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] \sin \theta \cos^3 \theta,$						
$S'_{33} = S_{22},$	$S'_{34} = 0,$	$S'_{35} = 0,$				
$S'_{36} = 2(S_{12} - S_{23}) \sin \theta \cos \theta,$						
$S'_{44} = 2(S_{22} - S_{23}) \cos^2 \theta + S_{66} \sin^2 \theta,$						
$S'_{45} = [S_{66} - 2(S_{22} - S_{23})] \sin \theta \cos \theta,$	$S'_{46} = 0,$					
$S'_{55} = 2(S_{22} - S_{23}) \sin^2 \theta + S_{66} \cos^2 \theta,$	$S'_{56} = 0,$					
$S'_{66} = 2[2(S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) - S_{66}] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).$						

---

ou en fonction des constantes de souplesse :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26} \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{45} & S'_{55} & 0 \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (11.4)$$

TABLEAU 11.3. Constantes de rigidité d'un matériau orthotrope, dont la direction principale 1 (ou  $L$ ) fait un angle  $\theta$  avec la direction  $x$  de référence (figure 11.1).

---


$$\begin{aligned}
 C'_{11} &= C_{11} \cos^4 \theta + C_{22} \sin^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\
 C'_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\
 C'_{13} &= C_{13} \cos^2 \theta + C_{23} \sin^2 \theta, \\
 C'_{14} &= 0, & C'_{15} &= 0, \\
 C'_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\
 C'_{22} &= C_{11} \sin^4 \theta + C_{22} \cos^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\
 C'_{23} &= C_{13} \sin^2 \theta + C_{23} \cos^2 \theta, \\
 C'_{24} &= 0, & C'_{25} &= 0, \\
 C'_{26} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta, \\
 C'_{33} &= C_{33}, & C'_{34} &= 0, & C'_{35} &= 0, \\
 C'_{36} &= (C_{13} - C_{23}) \sin \theta \cos \theta, \\
 C'_{44} &= C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta, \\
 C'_{45} &= (C_{55} - C_{44}) \sin \theta \cos \theta, & C'_{46} &= 0, \\
 C'_{55} &= C_{44} \sin^2 \theta + C_{55} \cos^2 \theta, & C'_{56} &= 0, \\
 C'_{66} &= [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).
 \end{aligned}$$


---

TABLEAU 11.4. Constantes de souplesse d'un matériau orthotrope, hors de ses axes principaux.

---


$$\begin{aligned}
 S'_{11} &= S_{11} \cos^4 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\
 S'_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\
 S'_{13} &= S_{13} \cos^2 \theta + S_{23} \sin^2 \theta, \\
 S'_{14} &= 0, \quad S'_{15} = 0, \\
 S'_{16} &= [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] \sin \theta \cos^3 \theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] \sin^3 \theta \cos \theta, \\
 S'_{22} &= S_{11} \sin^4 \theta + S_{22} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\
 S'_{23} &= S_{13} \sin^2 \theta + S_{23} \cos^2 \theta, \\
 S'_{24} &= 0, \quad S'_{25} = 0, \\
 S'_{26} &= [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] \sin^3 \theta \cos \theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] \sin \theta \cos^3 \theta, \\
 S'_{33} &= S_{33}, \quad S'_{34} = 0, \quad S'_{35} = 0, \\
 S'_{36} &= 2(S_{13} - S_{23}) \sin \theta \cos \theta, \\
 S'_{44} &= S_{44} \cos^2 \theta + S_{55} \sin^2 \theta, \\
 S'_{45} &= (S_{55} - S_{44}) \sin \theta \cos \theta, \quad S'_{46} = 0, \\
 S'_{55} &= S_{44} \sin^2 \theta + S_{55} \cos^2 \theta, \quad S'_{56} = 0, \\
 S'_{66} &= 2[2(S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) - S_{66}] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).
 \end{aligned}$$


---

En comparant les expressions des tableaux 11.1 à 11.4, nous constatons que les expressions relatives à un matériau unidirectionnel et à un matériau orthotrope sont identiques pour les termes  $C'_{ij}$  ou  $S'_{ij}$  avec  $i, j = 1, 2, 6$ . Par exemple :

relations identiques		relations différentes
$\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{16} &   & C'_{13} & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{26} &   & C'_{23} & 0 & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{66} &   & C'_{36} & 0 & 0 \\ \hline C'_{13} & C'_{23} & C'_{36} &   & C'_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 &   & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 &   & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}$		(11.5)

### 11.1.3 Autres expressions des matrices de rigidité

Les expressions des constantes de rigidité et de souplesse hors axes peuvent être réécrites en introduisant les angles multiples de  $\theta$ . En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta &= \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta), & \cos^3 \theta \sin \theta &= \frac{1}{8}(2\sin 2\theta + \sin 4\theta), \\ \cos^2 \theta \sin^2 \theta &= \frac{1}{8}(1 - \cos 4\theta), & \cos \theta \sin^3 \theta &= \frac{1}{8}(2\sin 2\theta - \sin 4\theta), \\ \sin^4 \theta &= \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta), & \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{2}\sin 2\theta, \\ \sin^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta), & \cos^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta). \end{aligned}$$

Ces relations nous permettent par exemple d'écrire :

$$\begin{aligned} C'_{11} &= \frac{1}{8}(3C_{11} + 3C_{22} + 2C_{12} + 4C_{66}) + \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22})\cos 2\theta \\ &\quad + \frac{1}{8}(C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 4C_{66})\cos 4\theta. \end{aligned}$$

Soit :

$$C'_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta,$$

en posant :

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{8}(3C_{11} + 3C_{22} + 2C_{12} + 4C_{66}), \\ U_2 &= \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22}), \\ U_3 &= \frac{1}{8}(C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 4C_{66}). \end{aligned}$$

Des transformations identiques peuvent être opérées pour chaque constante. Les résultats obtenus dans le cas d'un composite unidirectionnel sont reportés dans le tableau 11.5. L'intérêt de ces relations est de mettre en évidence les termes qui sont invariants lors d'une rotation  $\theta$  de la direction des fibres. Des expressions analogues peuvent être obtenues pour les constantes de souplesse.

TABLEAU 11.5. Expression des constantes de rigidité d'un composite unidirectionnel en fonction des angles multiples de l'orientation.

---

$$\begin{aligned}
 C'_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta, \\
 C'_{12} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta, & C'_{13} &= U_6 + U_7 \cos 2\theta, \\
 C'_{16} &= \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta, \\
 C'_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta, \\
 C'_{23} &= U_6 - U_7 \cos 2\theta, \\
 C'_{26} &= \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta, \\
 C'_{33} &= C_{22}, & C'_{36} &= U_7 \sin 2\theta, \\
 C'_{44} &= U_8 + U_9 \cos 2\theta, & C'_{45} &= U_{10} \sin 2\theta, \\
 C'_{55} &= U_8 + U_{10} \cos 2\theta, & C'_{66} &= U_5 - U_3 \cos 4\theta,
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{1}{8}(3C_{11} + 3C_{22} + 2C_{12} + 4C_{66}), \\
 U_2 &= \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22}), \\
 U_3 &= \frac{1}{8}(C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 4C_{66}), \\
 U_4 &= \frac{1}{8}(C_{11} + C_{22} + 6C_{12} - 4C_{66}), \\
 U_5 &= \frac{1}{8}(C_{11} + C_{22} - 2C_{12} + 4C_{66}) = \frac{1}{2}(U_1 - U_4), \\
 U_6 &= \frac{1}{2}(C_{12} + C_{23}), \\
 U_7 &= \frac{1}{2}(C_{12} - C_{23}), \\
 U_8 &= \frac{1}{4}(C_{22} - C_{23} + 2C_{66}), \\
 U_9 &= \frac{1}{4}(C_{22} - C_{23} - 2C_{66}), \\
 U_{10} &= \frac{1}{4}(2C_{66} - C_{22} + C_{23}).
 \end{aligned}$$


---

## 11.2 MODULES D'ÉLASTICITÉ

### 11.2.1 Expression des modules hors axes

Les modules d'élasticité sont les constantes pratiques qu'utilise usuellement l'ingénieur pour décrire le comportement mécanique d'un matériau. Ces modules

sont déterminés dans des essais particuliers, et s'expriment aisément en fonction des constantes de souplesse du matériau.

### 11.2.1.1 Essai de traction

#### 1. Traction suivant la direction $x$

Dans le cas d'un essai de traction suivant la direction  $x$ , toutes les contraintes sont nulles, excepté la contrainte  $\sigma_{xx}$  :

$$\begin{aligned}\sigma'_1 &= \sigma_{xx} \neq 0, \\ \sigma'_i &= 0, \quad i = 2, \dots, 6.\end{aligned}$$

En introduisant les coefficients de souplesse, les relations d'élasticité (11.4) s'écrivent :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= S'_{11}\sigma_{xx}, \\ \varepsilon_{yy} &= S'_{12}\sigma_{xx}, \\ \varepsilon_{zz} &= S'_{13}\sigma_{xx}, \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{xz} = 0, \\ \gamma_{xy} &= S'_{16}\sigma_{xx}.\end{aligned}\tag{11.6}$$

Le module d'Young  $E_x$  dans la direction  $x$  est défini par :

$$E_x = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{1}{S'_{11}}.\tag{11.7}$$

Soit d'après le tableau 11.2 ou 11.4 :

$$\frac{1}{E_x} = S_{11} \cos^4 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta.\tag{11.8}$$

Cette expression peut être réécrite en introduisant les modules d'élasticité (chapitres 9 et 10) du composite unidirectionnel ou orthotrope, mesurés suivant ses axes :

$$E_L = \frac{1}{S_{11}}, \quad \nu_{LT} = -\frac{S_{12}}{S_{11}}, \quad E_T = \frac{1}{S_{12}}, \quad G_{LT} = \frac{1}{S_{66}}.$$

D'où :

$$\frac{1}{E_x} = \frac{1}{E_L} \cos^4 \theta + \frac{1}{E_T} \sin^4 \theta + \left( \frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta.\tag{11.9}$$

Les déformations  $\varepsilon_{yy}$  et  $\varepsilon_{zz}$  dans les directions transversales sont reliées à la déformation  $\varepsilon_{xx}$  dans la direction  $x$ , suivant les expressions (11.6) qui conduisent à :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{S'_{12}}{S'_{11}} \varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{S'_{13}}{S'_{11}} \varepsilon_{xx}.$$

Ces relations permettent de déterminer les coefficients de Poisson  $\nu_{xy}$  et  $\nu_{xz}$  définis par :

$$\varepsilon_{yy} = -\nu_{xy}\varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{zz} = -\nu_{xz}\varepsilon_{xx}.$$

Soit, donc :

$$\nu_{xy} = -\frac{S'_{12}}{S'_{11}}, \quad \nu_{xz} = -\frac{S'_{13}}{S'_{11}}.$$

D'où les expressions des coefficients de Poisson :

$$\nu_{xy} = E_x \left[ \frac{\nu_{LT}}{E_L} \left( \cos^4 \theta + \sin^4 \theta \right) - \left( \frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right], \quad (11.10)$$

$$\nu_{xz} = E_x \left( \frac{\nu_{LT'}}{E_L} \cos^2 \theta + \frac{\nu_{TT'}}{E_T} \sin^2 \theta \right), \quad (11.11)$$

avec  $\nu_{LT'} = \nu_{LT}$  pour un composite unidirectionnel.

Enfin, les expressions (11.6) montrent que l'essai de traction induit une déformation en cisaillement  $\gamma_{xy}$ . On définit alors un *coefficient de couplage*  $\eta_{xy,x}$ , analogue à un coefficient de Poisson, qui relie la déformation en cisaillement à la déformation  $\varepsilon_{xx}$  suivant la direction  $x$ , par la relation :

$$\gamma_{xy} = -\eta_{xy,x}\varepsilon_{xx}. \quad (11.12)$$

Soit :

$$\eta_{xy,x} = -S'_{16}E_x.$$

D'après les tableaux 11.2 et 11.4, le coefficient de couplage s'exprime finalement suivant :

$$\begin{aligned} \eta_{xy,x} = E_x & \left[ \left( \frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{2}{E_L} \right) \cos^3 \theta \sin \theta \right. \\ & \left. + \left( \frac{2}{E_T} + 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^3 \theta \cos \theta \right]. \end{aligned} \quad (11.13)$$

## 2. Traction suivant la direction y

On considère parfois l'essai de traction suivant la direction  $y$ . Cet essai n'apporte pas toutefois d'informations nouvelles, puisque cet essai revient à faire tourner les axes précédents d'un angle égal à  $\pi/2$ . Par exemple, le module d'Young  $E_y$ , reliant la contrainte  $\sigma_{yy}$  à la déformation  $\varepsilon_{yy}$ , est obtenu à partir de la relation (11.8), en remplaçant  $\theta$  par  $\theta + \pi/2$ , soit :

$$\frac{1}{E_y} = S'_{22} = \frac{1}{E_L} \sin^4 \theta + \frac{1}{E_T} \cos^4 \theta + \left( \frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (11.14)$$

De même, on définit le coefficient de couplage  $\eta_{xy,y}$  liant la déformation en cisaillement  $\gamma_{xy}$  à la déformation  $\varepsilon_{yy}$  par la relation :

$$\gamma_{xy} = -\eta_{xy,y} \varepsilon_{yy} = -\eta_{xy,y} \frac{\sigma_{yy}}{E_y}. \quad (11.15)$$

L'expression de ce coefficient s'écrit :

$$\begin{aligned} \eta_{xy,y} = E_y & \left[ \left( \frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{2}{E_L} \right) \sin^3 \theta \cos \theta \right. \\ & \left. + \left( \frac{2}{E_T} + 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \cos^3 \theta \sin \theta \right]. \end{aligned} \quad (11.16)$$

### 11.2.1.2 Essai de cisaillement dans le plan de la couche

Nous examinons le cas d'un essai de cisaillement dans le plan de la couche, correspondant à l'état de contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma'_6 &= \sigma_{xy} \neq 0, \\ \sigma'_i &= 0, \quad i = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Les relations d'élasticité (11.4) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= S'_{16} \sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} &= S'_{26} \sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{zz} &= S'_{36} \sigma_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{xz} = 0, \\ \gamma_{xy} &= S'_{66} \sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Le module de cisaillement  $G_{xy}$  dans cet essai est défini par :

$$G_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{1}{S'_{66}}. \quad (11.18)$$

Soit, d'après les tableaux 11.2 et 11.4 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_{xy}} &= 2 \left( \frac{2}{E_L} + \frac{2}{E_T} + 4 \frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &+ \frac{1}{G_{LT}} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta). \end{aligned} \quad (11.19)$$

L'essai de cisaillement induit des déformations  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  respectivement suivant les trois directions ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Les deux premières déformations s'expriment par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= -\eta_{xy,x} \frac{\sigma_{xy}}{E_x} = -\eta_{xy,x} \frac{G_{xy}}{E_x} \gamma_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} &= -\eta_{xy,y} \frac{\sigma_{xy}}{E_y} = -\eta_{xy,y} \frac{G_{xy}}{E_y} \gamma_{xy}.\end{aligned}\quad (11.20)$$

Par analogie aux relations précédentes, la déformation  $\varepsilon_{zz}$  dans la direction  $z$  peut être écrite sous la forme :

$$\varepsilon_{zz} = -\eta_{xy,z} \frac{\sigma_{xy}}{E_T} = -\eta_{xy,z} \frac{G_{xy}}{E_T} \gamma_{xy}. \quad (11.21)$$

Le coefficient de couplage ainsi introduit est donné par l'expression :

$$\eta_{xy,z} = -E_T S'_{36} = 2(\nu_{TL} - \nu_{TT'}) \sin \theta \cos \theta. \quad (11.22)$$

### 11.2.1.3 Essai de cisaillement transverse

Les modules d'élasticité, introduits dans les essais précédents hors axes, ne font intervenir que quatre des modules principaux :  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_{LT}$ ,  $\nu_{LT}$  dans le cas d'un composite unidirectionnel et cinq des modules principaux :  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_{LT}$ ,  $\nu_{LT}$  et  $\nu_{LT'}$ , dans le cas d'un composite orthotrope. Nous verrons également (paragraphe 11.3) que les modules  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_{LT}$ ,  $\nu_{LT}$  suffisent à décrire un comportement à deux dimensions d'une couche composite. La description de problèmes d'élasticité plus généraux nécessite la connaissance des modules d'élasticité relatifs à un essai de cisaillement transverse. Un tel essai est caractérisé par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma'_5 = \sigma_{xz} \neq 0, \\ \sigma'_i = 0 \text{ si } i = 1, 2, 3, 4, 6, \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma'_4 = \sigma_{yz} \neq 0, \\ \sigma'_i = 0 \text{ si } i = 1, 2, 3, 5, 6. \end{array} \right. \quad (11.23)$$

Les deux essais diffèrent simplement par l'inversion des rôles respectifs des directions  $x$  et  $z$ . Dans le premier cas, les relations d'élasticité (11.4) s'écrivent :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= 0, & \varepsilon_{yy} &= 0, & \varepsilon_{zz} &= 0, \\ \gamma_{yz} &= S'_{45} \sigma_{xz}, \\ \gamma_{xz} &= S'_{55} \sigma_{xz}, \\ \gamma_{xy} &= 0.\end{aligned}\quad (11.24)$$

Ces relations montrent que l'état de cisaillement transverse n'induit que des déformations en cisaillement transverse  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ .

Le module de cisaillement  $G_{xz}$  dans cet essai est défini par :

$$G_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{\gamma_{xz}} = \frac{1}{S'_{45}}. \quad (11.25)$$

Dans le cas d'un composite orthotrope, nous déduisons l'expression  $G_{xz}$  du tableau 11.4, soit :

$$\frac{1}{G_{xz}} = \frac{1}{G_{TT'}} \sin^2 \theta + \frac{1}{G_{LT'}} \cos^2 \theta. \quad (11.26)$$

Cette relation peut être réécrite dans le cas d'un composite unidirectionnel, en tenant compte de l'expression (9.19) du module de cisaillement transverse en fonction du module d'Young transverse. D'où :

$$\frac{1}{G_{xz}} = \frac{2(1+\nu_{TT'})}{E_T} \sin^2 \theta + \frac{1}{G_{LT'}} \cos^2 \theta. \quad (11.27)$$

L'essai de cisaillement induit également une déformation en cisaillement  $\gamma_{yz}$ . On définit ainsi un coefficient de couplage  $\mu_{xz,yz}$  liant la déformation  $\gamma_{yz}$  à la déformation  $\gamma_{xz}$  par la relation :

$$\gamma_{yz} = \mu_{xz,yz} \gamma_{xz} = \mu_{xz,yz} \frac{\sigma_{xz}}{G_{xz}}. \quad (11.28)$$

L'expression de ce coefficient de couplage est obtenue sans difficulté et s'écrit :

$$\mu_{xz,yz} = G_{xz} S'_{45} = G_{xz} \left( \frac{1}{G_{LT'}} - \frac{1}{G_{TT'}} \right) \sin \theta \cos \theta. \quad (11.29)$$

Dans le cas où les modules de cisaillement longitudinal  $G_{LT'}$  et transversal  $G_{TT'}$  sont voisins, ce coefficient est pratiquement nul et le couplage induit est négligeable. L'expression précédente du coefficient de couplage peut être réécrite dans le cas d'un matériau unidirectionnel suivant :

$$\mu_{xz,yz} = G_{xz} \left( \frac{1}{G_{LT}} - \frac{2(1+\nu_{TT'})}{E_T} \right) \sin \theta \cos \theta. \quad (11.30)$$

## 11.2.2 Variations des modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel

Pour apprécier au mieux les variations des modules d'élasticité, nous pouvons tracer leurs graphes en fonction de l'orientation  $\theta$  des fibres, pour des composites usuels. Nous considérons les trois cas suivants de composites unidirectionnels.

### 1. Composite époxyde-fibres de verre, avec :

$$\begin{aligned} E_L &= 46 \text{ GPa}, & E_T &= 10 \text{ GPa}, & \nu_{LT} &= 0,31, \\ G_{LT} &= 4,7 \text{ GPa}, & G_{TT'} &= 4 \text{ GPa}. \end{aligned} \quad (11.31)$$

### 2. Composite époxyde-fibres de carbone, avec :

$$\begin{aligned} E_L &= 159 \text{ GPa}, & E_T &= 14 \text{ GPa}, & \nu_{LT} &= 0,32, \\ G_{LT} &= 4,8 \text{ GPa}, & G_{TT'} &= 4,3 \text{ GPa}. \end{aligned} \quad (11.32)$$

### 3. Composite époxyde-fibres de Kevlar, avec :

$$\begin{aligned} E_L &= 84 \text{ GPa}, & E_T &= 5,6 \text{ GPa}, & \nu_{LT} &= 0,34, \\ G_{LT} &= 2,1 \text{ GPa}, & G_{TT'} &= G_{LT} = 2,1 \text{ GPa}. \end{aligned} \quad (11.33)$$

Les variations de  $E_x$ ,  $G_{xy}$ ,  $\nu_{xy}$  et  $\eta_{xy,x}$  en fonction de l'orientation des fibres sont reportées sur les figures 11.2 à 11.4. Dans le cas des composites à fibres de verre, le module d'Young  $E_x$  décroît d'une manière monotone de la valeur  $E_L$  pour  $\theta = 0^\circ$  à la valeur  $E_T$  pour  $\theta = 90^\circ$ . Le module de cisaillement  $G_{xy}$  passe par un maximum pour  $\theta = 45^\circ$ , et sa variation est symétrique de part et d'autre de cette valeur. Le coefficient de Poisson  $\nu_{xy}$  passe également par un maximum pour une valeur d'angle qui dépend du composite. Le coefficient de couplage  $\eta_{xy,x}$  est nul pour  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 90^\circ$ , et atteint des valeurs élevées pour des valeurs d'angles intermédiaires. Les courbes montrent également que les valeurs extrémales de  $G_{xy}$ ,  $\nu_{xy}$ ,  $\eta_{xy,x}$  sont atteintes pour des orientations différentes des directions principales. Cette propriété est également observée sur le module  $E_x$  (figures 11.3 et 11.4), pour les composites à fibres de carbone et de Kevlar. En effet, en cherchant les valeurs extrémales du module  $E_x$  à partir de l'équation (11.9), on trouve aisément que le module  $E_x$  passe par un maximum supérieur à  $E_L$  pour une valeur de  $\theta$  différente de  $0^\circ$ , si :

$$G_{LT} > \frac{E_L}{2(1+\nu_{LT})}, \quad (11.34)$$

et que le module  $E_x$  passe par un minimum inférieur à  $E_T$  pour une valeur de  $\theta$  différente de  $90^\circ$ , si :

$$G_{LT} < \frac{E_L}{2\left(\frac{E_L}{E_T} + \nu_{LT}\right)}. \quad (11.35)$$

Cette dernière égalité est vérifiée dans le cas du composite époxyde-fibres de carbone (11.32) ainsi que dans le cas du composite époxyde-fibres de Kevlar (11.33).

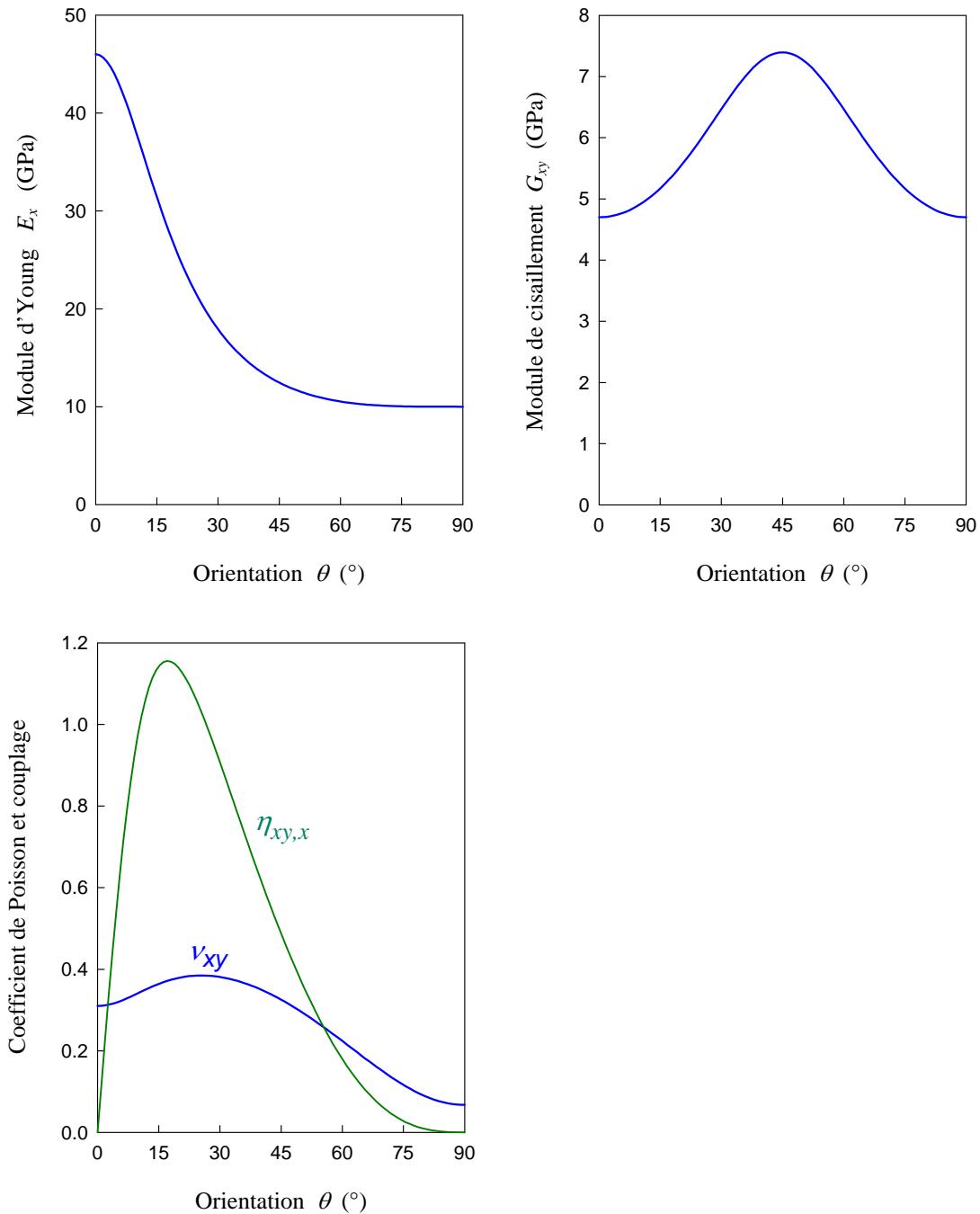


FIGURE 11.2. Variations des modules d'élasticité dans le cas d'un composite époxyde-fibres de verre.

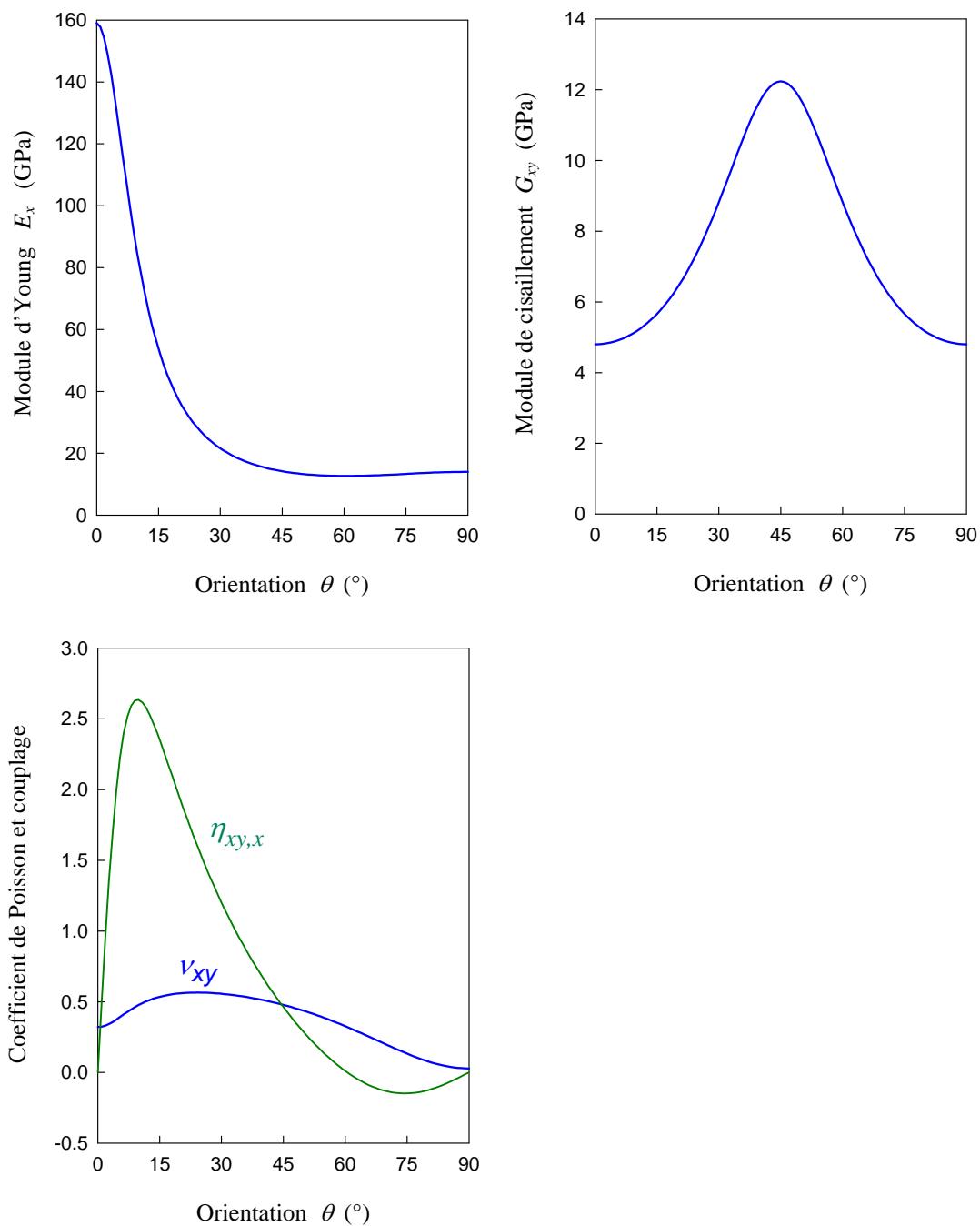


FIGURE 11.3. Variations des modules d'élasticité dans le cas d'un composite époxyde-fibres de carbone.

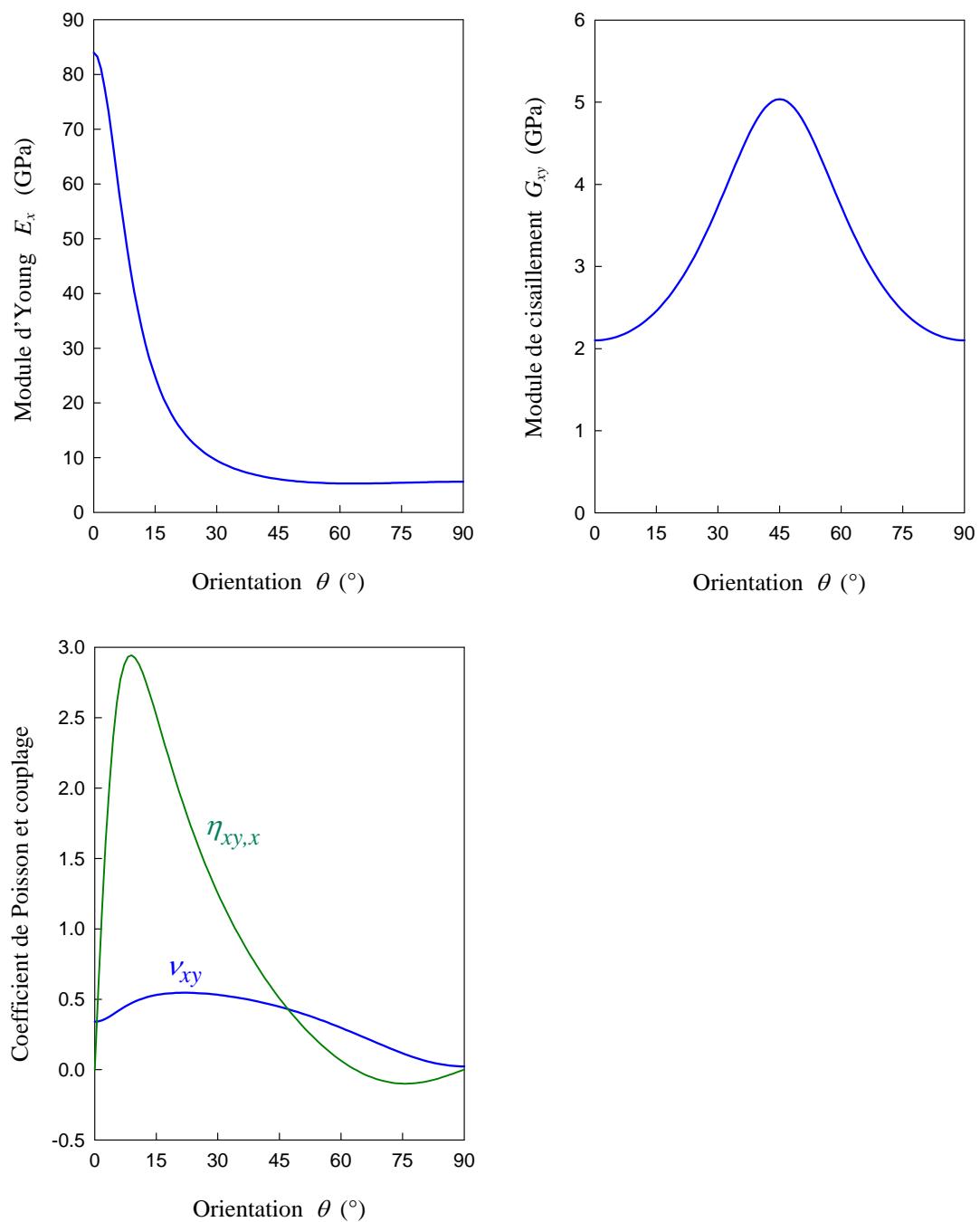


FIGURE 11.4. Variations des modules d'élasticité dans le cas d'un composite époxyde-fibres de Kevlar.

## 11.3 ÉTAT DE CONTRAINTES PLANES

### 11.3.1 Introduction

Les éléments développés dans les paragraphes précédents sont applicables à la résolution d'un problème quelconque d'élasticité d'un matériau composite. Dans le cas où le problème d'élasticité peut être ramené à un problème d'élasticité à deux dimensions, les relations établies précédemment dans le cas général se simplifient. Nous étudions dans ce paragraphe le problème d'un état de contraintes à deux dimensions dont les résultats sont nécessaires à l'étude du comportement mécanique des stratifiés (Partie IV).

### 11.3.2 État de contraintes à deux dimensions

Un état de contraintes à deux dimensions est caractérisé par un tenseur des contraintes de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}'(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11.36)$$

en chaque point  $M$  du matériau. La direction  $z$  est la direction principale avec une valeur propre nulle. Usuellement, un tel état de contraintes est dit état de *contraintes planes*. En fait, il serait nécessaire de faire la distinction entre un état de contraintes planes et un état de contraintes à deux dimensions. En effet, dans un sens strict, un état de contraintes planes est un état particulier de contraintes à deux dimensions, pour lequel les composantes du tenseur des contraintes sont indépendantes de la coordonnée  $z$ .

### 11.3.3 Équations d'élasticité pour un état de contraintes planes

Les contraintes en un point  $M$  s'écrivent donc (11.36) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}.$$

Soit

$$\begin{aligned}\sigma'_i &\neq 0 & \text{si} & \quad i = 1, 2, 6, \\ \sigma'_i &= 0 & \text{si} & \quad i = 3, 4, 5.\end{aligned}\tag{11.37}$$

Les déformations sont données par :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26} \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{45} & S'_{55} & 0 \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\varepsilon'_1 &= S'_{11}\sigma'_1 + S'_{12}\sigma'_2 + S'_{16}\sigma'_6, \\ \varepsilon'_2 &= S'_{12}\sigma'_1 + S'_{22}\sigma'_2 + S'_{26}\sigma'_6, \\ \varepsilon'_3 &= S'_{13}\sigma'_1 + S'_{23}\sigma'_2 + S'_{36}\sigma'_6, \\ \varepsilon'_4 &= 0, \\ \varepsilon'_5 &= 0, \\ \varepsilon'_6 &= S'_{16}\sigma'_1 + S'_{26}\sigma'_2 + S'_{66}\sigma'_6.\end{aligned}\tag{11.38}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}\varepsilon'_i &\neq 0 & \text{si} & \quad i = 1, 2, 3, 6, \\ \varepsilon'_i &= 0 & \text{si} & \quad i = 4, 5.\end{aligned}\tag{11.39}$$

Il existe donc une déformation suivant la direction  $z$ , donnée par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} &= \varepsilon'_3 = S'_{13}\sigma'_1 + S'_{23}\sigma'_2 + S'_{36}\sigma'_6 \\ &= S'_{13}\sigma_{xx} + S'_{23}\sigma_{yy} + S'_{36}\sigma_{xy}.\end{aligned}\tag{11.40}$$

Les deux premiers termes sont des termes de couplage par effet Poisson, et le troisième est dû à un couplage par cisaillement.

Les relations entre contraintes et déformations exprimées à l'aide des coefficients de rigidité s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix}.$$

Soit :

$$\begin{aligned}\sigma'_1 &= C'_{11}\varepsilon'_1 + C'_{12}\varepsilon'_2 + C'_{13}\varepsilon'_3 + C'_{16}\varepsilon'_6, \\ \sigma'_2 &= C'_{12}\varepsilon'_1 + C'_{22}\varepsilon'_2 + C'_{23}\varepsilon'_3 + C'_{26}\varepsilon'_6, \\ 0 &= C'_{13}\varepsilon'_1 + C'_{23}\varepsilon'_2 + C'_{33}\varepsilon'_3 + C'_{36}\varepsilon'_6, \\ \sigma'_6 &= C'_{16}\varepsilon'_1 + C'_{26}\varepsilon'_2 + C'_{36}\varepsilon'_3 + C'_{66}\varepsilon'_6.\end{aligned}\tag{11.41}$$

Ces relations montrent que les déformations  $\varepsilon'_1$ ,  $\varepsilon'_2$ ,  $\varepsilon'_3$  et  $\varepsilon'_6$  ne sont pas indépendantes. Nous en tirons :

$$\varepsilon'_3 = -\frac{1}{C'_{33}}(C'_{13}\varepsilon'_1 + C'_{23}\varepsilon'_2 + C'_{36}\varepsilon'_6).\tag{11.42}$$

Cette expression, reportée dans les relations (11.41), permet alors d'exprimer les contraintes  $\sigma'_1$ ,  $\sigma'_2$  et  $\sigma'_6$  en fonction des déformations  $\varepsilon'_1$ ,  $\varepsilon'_2$  et  $\varepsilon'_6$ . Par exemple, nous obtenons :

$$\sigma'_1 = \left(C'_{11} - \frac{C'^2_{13}}{C'_{33}}\right)\varepsilon'_1 + \left(C'_{12} - \frac{C'_{13}C'_{23}}{C'_{33}}\right)\varepsilon'_2 + \left(C'_{16} - \frac{C'_{13}C'_{36}}{C'_{33}}\right)\varepsilon'_6$$

et des expressions analogues pour  $\sigma'_2$  et  $\sigma'_6$ . Ces trois relations en  $\sigma'_1$ ,  $\sigma'_2$  et  $\sigma'_6$  peuvent alors s'exprimer sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix},\tag{11.43}$$

en posant :

$$Q'_{ij} = C'_{ij} - \frac{C'_{i3}C'_{j3}}{C'_{33}}, \quad i, j = 1, 2, 6,\tag{11.44}$$

avec

$$Q'_{ji} = Q'_{ij}.$$

Les coefficients  $Q'_{ij}$  sont appelés les *constantes de rigidité réduites* dans un état de contraintes planes. La matrice :

$$\mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}\tag{11.45}$$

est la *matrice de rigidité réduite*.

En conclusion, dans le cas d'un état de contraintes planes, nous avons :

$$\begin{cases} \sigma'_i \neq 0 & \text{si } i = 1, 2, 6 \\ \sigma'_i = 0 & \text{si } i = 3, 4, 5, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varepsilon'_i \neq 0 & \text{si } i = 1, 2, 3, 6 \\ \varepsilon'_i = 0 & \text{si } i = 4, 5. \end{cases}$$

Les relations d'élasticité s'écrivent sous l'une des deux formes :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{26} \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} \quad (11.46)$$

avec

$$\varepsilon'_3 = S'_{13}\sigma'_1 + S'_{23}\sigma'_2 + S'_{36}\sigma'_6,$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix}$$

avec

$$\varepsilon'_3 = -\frac{1}{C'_{33}}(C'_{13}\varepsilon'_1 + C'_{23}\varepsilon'_2 + C'_{36}\varepsilon'_6).$$

Les constantes de rigidité réduites s'expriment en fonction des constantes de rigidité suivant les relations :

$$Q'_{ij} = C'_{ij} - \frac{C'_{i3}C'_{j3}}{C'_{33}}, \quad i, j = 1, 2, 6,$$

$$Q'_{ji} = Q'_{ij}.$$

Les matrices  $[S'_{ij}]$  et  $[Q'_{ij}]$  sont inverses l'une de l'autre.

### 11.3.4 Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux

Dans les axes principaux d'un composite orthotrope, les constantes de rigidité sont telles que :

$$\begin{aligned} C'_{11} &= C_{11}, & C'_{12} &= C_{12}, & C'_{13} &= C_{13}, \\ C'_{22} &= C_{22}, & C'_{23} &= C_{23}, & C'_{33} &= C_{33}, \\ C'_{66} &= C_{66}, & C'_{16} &= C'_{26} = C'_{36} &= 0. \end{aligned}$$

Compte tenu de ces relations, les expressions (11.44) permettent de trouver les constantes de rigidité réduites exprimées dans les axes principaux, soit :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, & Q_{12} &= C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}, & Q_{16} &= 0, \\ Q_{22} &= C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}}, & Q_{26} &= 0, & Q_{66} &= C_{66}, \end{aligned} \quad (11.47)$$

avec en outre pour un composite unidirectionnel :

$$C_{13} = C_{12}, \quad C_{33} = C_{22}.$$

La matrice de rigidité réduite, exprimée dans les axes principaux, s'écrit donc :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}. \quad (11.48)$$

Rapporté aux axes principaux, un état de contraintes planes est caractérisé par :

$$\begin{cases} \sigma_i \neq 0 & \text{si } i = 1, 2, 6 \\ \sigma_i = 0 & \text{si } i = 3, 4, 5, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varepsilon_i \neq 0 & \text{si } i = 1, 2, 3, 6 \\ \varepsilon_i = 0 & \text{si } i = 4, 5. \end{cases}$$

Les relations d'élasticité s'écrivent sous l'une des deux formes :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (11.49)$$

avec

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2,$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (11.50)$$

avec

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{C_{33}}(C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2).$$

Les constantes de rigidité réduites sont exprimées par les relations (11.47).

Les matrices  $[S_{ij}]$  et  $[Q_{ij}]$  sont inverses l'une de l'autre.

Les matrices  $[S_{ij}]$  et  $[Q_{ij}]$  étant inverses, nous en déduisons les relations :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, & Q_{12} &= \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, \\ Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, & Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}}. \end{aligned} \quad (11.51)$$

Les relations précédentes permettent d'exprimer les constantes de rigidité réduites en fonction des modules d'élasticité dans les axes principaux (chapitres 9 et 10). Soit :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_L}{1-\nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_T}{1-\nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11}, \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{LT} E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} = \nu_{LT} Q_{22}, \\ Q_{66} &= G_{LT}. \end{aligned} \quad (11.52)$$

### 11.3.5 Relations entre les constantes de rigidité réduites hors axes et dans les axes principaux

Les relations entre les constantes de rigidité réduites hors axes et celles exprimées dans les axes principaux ne font intervenir que les composantes 1, 2 et 6 des contraintes et déformations. La structure des relations générales (9.5) pour un composite unidirectionnel et (10.1) pour un composite orthotrope, des relations d'élasticité (11.43) dans un état de contraintes à deux dimensions, des expressions de changements de base (tableaux 11.1 et 11.3) établies dans le cas général montre que les relations de changement de base exprimant les constantes de rigidité réduites  $Q'_{ij}$  en fonction des constantes  $Q_{ij}$  sont identiques à celles obtenues dans le cas des constantes de rigidité  $C_{ij}$  (tableaux 11.1 et 11.3), en se limitant à  $i, j = 1, 2, 6$ . Enfin, ces éléments associés à la remarque faite au paragraphe 11.1.2 (relation (11.5)) montrent que ces relations sont également identiques pour un composite unidirectionnel ou un composite orthotrope. Les résultats transposés des tableaux (11.1) et (11.3) sont reportés dans le tableau 11.6. De la même manière que dans le cas général (tableau 11.5), il est possible de réécrire les expressions de changement de base en introduisant les angles multiples de l'angle  $\theta$ . Ces expressions sont reportées dans le tableau 11.7.

TABLEAU 11.6. Constantes de rigidité réduites d'un composite unidirectionnel ou orthotrope, en dehors de ses axes principaux (figure 11.1).

---


$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\ Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\ Q'_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta, \\ Q'_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta). \end{aligned}$$


---

TABLEAU 11.7. Expression des constantes de rigidité réduites en fonction des angles multiples de l'orientation.

---


$$\begin{aligned} Q'_{11} &= V_1 + V_2 \cos 2\theta + V_3 \cos 4\theta, \\ Q'_{12} &= V_4 - V_3 \cos 4\theta, \\ Q'_{16} &= \frac{1}{2} V_2 \sin 2\theta + V_3 \sin 4\theta, \\ Q'_{22} &= V_1 - V_2 \cos 2\theta + V_3 \cos 4\theta, \\ Q'_{26} &= \frac{1}{2} V_2 \sin 2\theta - V_3 \sin 4\theta, \\ Q'_{66} &= V_5 - V_3 \cos 4\theta, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{8} (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}), \\ V_2 &= \frac{1}{2} (Q_{11} - Q_{22}), \\ V_3 &= \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}), \\ V_4 &= \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}), \\ V_5 &= \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) = \frac{1}{2} (V_1 - V_4). \end{aligned}$$


---

### 11.3.6 Conclusions

Tout état de contraintes planes ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ) d'une couche d'un stratifié est caractérisé (11.43) par les constantes de rigidité réduites  $Q'_{ij}$ , rapportées aux axes de référence ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) du stratifié. Ces constantes s'expriment (tableaux 11.6 et 11.7) en fonction des constantes de rigidité réduites  $Q_{ij}$ , rapportées aux axes principaux de la couche considérée. Ces expressions sont identiques pour une couche unidirectionnelle ou une couche orthotrope. Les paramètres  $Q_{ij}$  ( $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{22}$ ,  $Q_{66}$ ) s'expriment eux-mêmes (11.52) en fonction des modules de l'ingénieur  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $G_{LT}$  (ou  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ ,  $G_{12}$ ), mesurés dans les axes principaux (1, 2, 3) = ( $L$ ,  $T$ ,  $T'$ ) de la couche : pour une couche unidirectionnelle,  $L$  est la direction des fibres ; pour une couche orthotrope,  $L$  est la direction chaîne et  $T$  la direction trame.

### 11.3.7 Exemple d'application

Une couche unidirectionnelle est soumise dans l'un de ses plans ( $x$ ,  $y$ ) (figure 11.5) à l'état de déformations suivant :

$$\varepsilon_{xx} = 1 \% = 10^{-2},$$

$$\varepsilon_{yy} = -0,5 \% = -5 \times 10^{-3},$$

$$\gamma_{xy} = 2 \% = 2 \times 10^{-2}.$$

La direction des fibres fait un angle de  $30^\circ$  avec la direction  $x$ . Les constantes élastiques du matériau composite sont :

$$E_L = 40 \text{ GPa}, \quad E_T = 10 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,32, \quad G_{LT} = 4,5 \text{ GPa}.$$

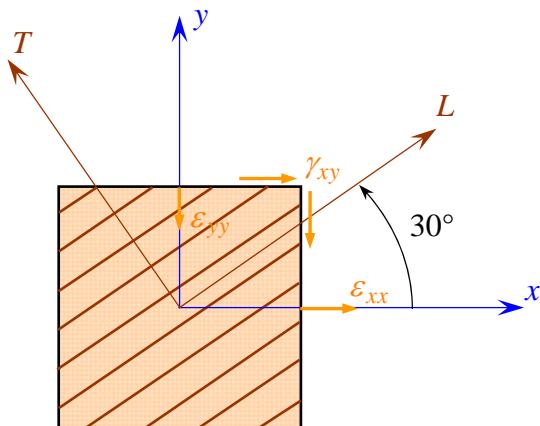


FIGURE 11.5. Exemple d'application.

En considérant que la couche est dans un état de contraintes planes, déterminer :

1. les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  dans le système d'axes ( $x, y$ ) ;
2. les contraintes dans les axes principaux ( $L, T$ ) de la couche.

### 1. Détermination des contraintes $\sigma_{xx}$ , $\sigma_{yy}$ et $\sigma_{xy}$

Il faut déterminer au préalable la matrice de rigidité réduite rapportée aux axes principaux :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = 41,051 \text{ GPa},$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} = 10,263 \text{ GPa},$$

$$Q_{12} = \nu_{LT} Q_{22} = 3,284 \text{ GPa},$$

$$Q_{66} = G_{LT} = 4,5 \text{ GPa}.$$

D'où la matrice de rigidité réduite exprimée dans les axes principaux :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 41,051 & 3,284 & 0 \\ 3,284 & 10,263 & 0 \\ 0 & 0 & 4,5 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$$

La matrice de rigidité réduite, rapportée aux axes ( $x, y$ ), est ensuite calculée à partir des expressions du tableau 11.6 :

$$Q'_{11} = 41,051 \times \frac{9}{16} + 10,263 \times \frac{1}{16} + 2(3,284 + 2 \times 4,5) \frac{3}{4} \frac{1}{4} = 28,339 \text{ GPa},$$

$$Q'_{12} = (41,051 + 10,263 - 4 \times 4,5) \frac{3}{4} \frac{1}{4} + 3,284 \times \left( \frac{9}{16} + \frac{1}{16} \right) = 8,299 \text{ GPa},$$

$$Q'_{16} = (41,051 - 3,284 - 2 \times 4,5) \frac{1}{2} \frac{3\sqrt{3}}{8} + (3,284 - 10,263 + 2 \times 4,5) \frac{1}{8} \frac{\sqrt{3}}{2} = 9,561 \text{ GPa},$$

$$Q'_{22} = 41,051 \times \frac{1}{16} + 10,263 \times \frac{9}{16} + 2(3,284 + 2 \times 4,5) \frac{3}{4} \frac{1}{4} = 12,945 \text{ GPa},$$

$$Q'_{26} = (41,051 - 3,284 - 2 \times 4,5) \frac{1}{8} \frac{\sqrt{3}}{2} + (3,284 - 10,263 + 2 \times 4,5) \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{1}{2} = 3,770 \text{ GPa},$$

$$Q'_{66} = [41,051 + 10,263 - 2(3,284 + 4,5)] \frac{1}{4} \frac{3}{4} + 4,5 \left( \frac{9}{16} + \frac{1}{16} \right) = 9,515 \text{ GPa}.$$

D'où la matrice de rigidité réduite dans les axes ( $x, y$ ) :

$$\mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} 28,339 & 8,299 & 9,561 \\ 8,299 & 12,945 & 3,770 \\ 9,561 & 3,770 & 9,515 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

Les contraintes dans les axes ( $x, y$ ) sont ensuite calculées à partir de (11.43) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28,339 & 8,299 & 9,561 \\ 8,299 & 12,945 & 3,770 \\ 9,561 & 3,770 & 9,515 \end{bmatrix} \times 10^{-9} \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 20 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

Soit :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 433 \text{ MPa}, \\ \sigma_{yy} &= 94 \text{ MPa}, \\ \sigma_{xy} &= 267 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

## 2. Détermination des contraintes dans les axes principaux

Les contraintes dans les axes principaux s'obtiennent à partir de la relation générale (5.44). Dans le cas de contraintes planes, cette relation est limitée aux trois contraintes dans le plan et s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (11.53)$$

où  $\theta$  est l'angle de la direction des fibres avec la direction  $x$  de référence. Dans le cas présent, cette expression s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 433 \\ 94 \\ 267 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \sigma_L &= 580 \text{ MPa}, \\ \sigma_T &= -53 \text{ MPa}, \\ \sigma_{LT} &= -13,5 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Ces résultats sont schématisés sur la figure 11.6.

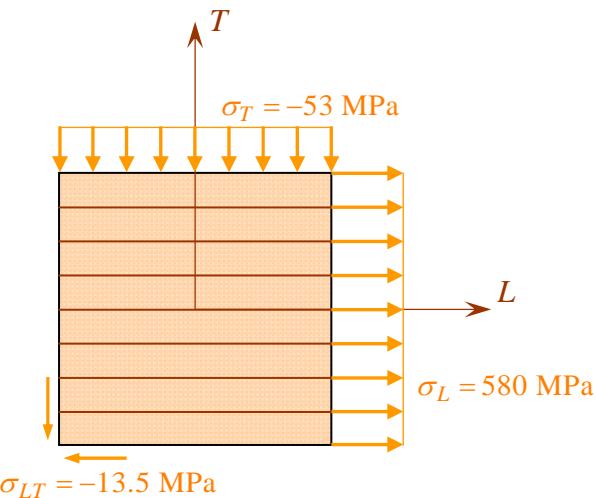


FIGURE 11.6. Contraintes dans les axes principaux.

## 11.4 DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DES MODULES

### 11.4.1 Introduction

Le comportement élastique d'un matériau composite est déterminé entièrement par la connaissance de cinq coefficients dans le cas d'un composite unidirectionnel, et de neuf coefficients dans le cas d'un composite orthotrope. Dans le cas d'un état de contraintes planes, seuls quatre coefficients sont nécessaires :  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $G_{LT}$ , que les matériaux soient unidirectionnels ou orthotropes. Ces modules peuvent être mesurés dans des essais particuliers.

### 11.4.2 Traction longitudinale

Dans un essai de traction longitudinale, une charge  $F_1$  est exercée suivant la direction des fibres (composite unidirectionnel) ou suivant la direction chaîne (composite tissu) sur la section droite  $S_1$  du matériau (figure 11.7). La contrainte  $\sigma_{11}$  est donnée par :

$$\sigma_{11} = \frac{F_1}{S_1}. \quad (11.54)$$

La détermination expérimentale de l'essai consiste à mesurer dans la partie utile de l'éprouvette :

- la charge  $F_1$ ,
- l'allongement  $\Delta l_1$  suivant la longueur  $l_1$ ,
- la variation  $\Delta l_2$  de la dimension transverse  $l_2$ .

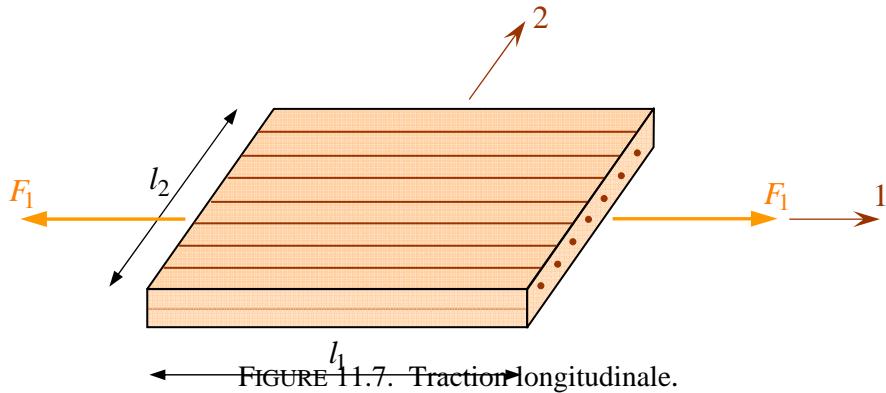


FIGURE 11.7. Traction longitudinale.

Les déformations longitudinale et transverse sont données respectivement par :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta l_1}{l_1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{22} = \frac{\Delta l_2}{l_2}. \quad (11.55)$$

Le module longitudinal  $E_L$  et le coefficient de Poisson  $\nu_{LT}$  sont ensuite calculés à partir des expressions :

$$E_L = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \quad \text{et} \quad \nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}. \quad (11.56)$$

### 11.4.3 Traction transverse

Dans un essai de traction transverse, une charge  $F_2$  est exercée suivant la direction transverse aux fibres ou suivant le sens trame (figure 11.8). La contrainte  $\sigma_{22}$  est alors donnée par :

$$\sigma_{22} = \frac{F_2}{S_2}, \quad (11.57)$$

où  $S_2$  est l'aire de la section droite sur laquelle est exercée la charge  $F_2$ . Comme dans l'essai de traction longitudinale, les déformations  $\varepsilon_{11}$  et  $\varepsilon_{22}$  sont mesurées dans la partie utile de l'éprouvette. Le module transverse  $E_T$  et le coefficient de Poisson  $\nu_{TL}$  sont ensuite calculés par les relations :

$$E_T = \frac{\sigma_{22}}{\varepsilon_{22}} \quad \text{et} \quad \nu_{TL} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}. \quad (11.58)$$

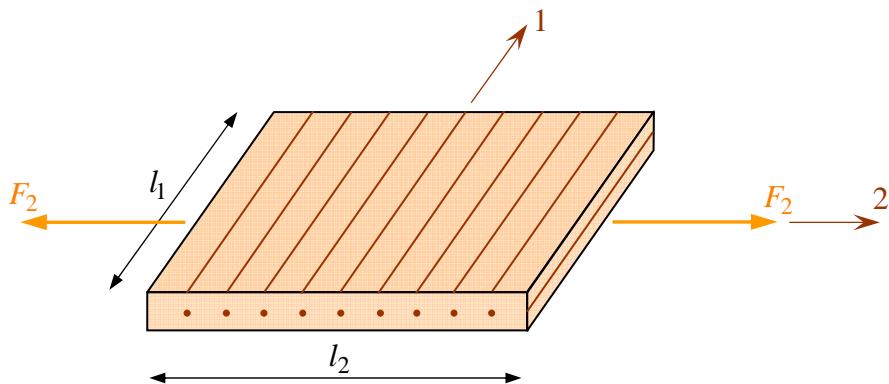


FIGURE 11.8. Traction transverse.

À ce stade, les modules mesurés doivent satisfaire, aux erreurs de mesure près, la relation (10.16). Si cette relation n'est pas vérifiée, deux raisons peuvent être invoquées :

1. les valeurs n'ont pas été mesurées correctement ;
2. le matériau ne peut être décrit par une relation contrainte-déformation linéaire.

#### 11.4.4 Traction hors axes

Un essai usuellement utilisé pour mesurer le module de cisaillement longitudinal  $G_{LT}$  est un essai de traction effectué à 45° de la direction des fibres ou de la chaîne (figure 11.9). La charge  $F$ , exercée sur l'éprouvette, est appliquée dans la

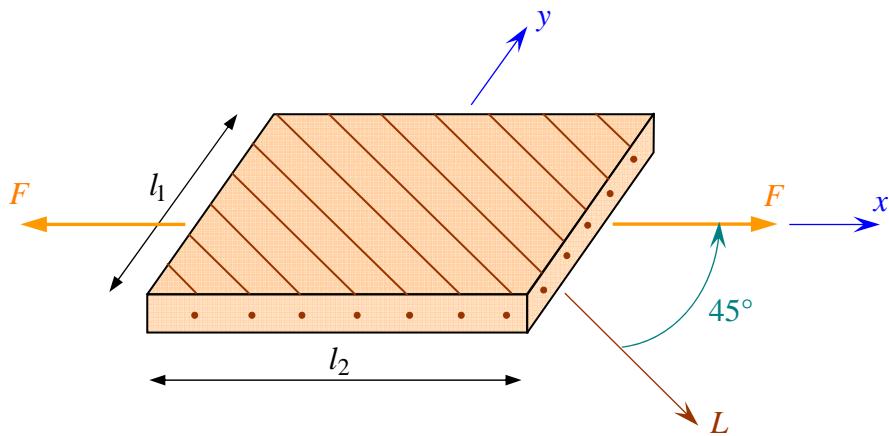


FIGURE 11.9. Traction hors axes.

direction  $x$  sur la section  $S$  créant une contrainte :

$$\sigma_{45} = \frac{F}{S}. \quad (11.59)$$

La mesure de l'allongement  $\varepsilon_{45}$  dans cette même direction permet d'en déduire le module d'Young mesuré dans la direction à  $45^\circ$  par :

$$E_{45} = \frac{\sigma_{45}}{\varepsilon_{45}}. \quad (11.60)$$

D'après la relation (11.9), ce module s'exprime par :

$$\frac{1}{E_{45}} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} + \frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right), \quad (11.61)$$

où seul le module de cisaillement  $G_{LT}$  n'est pas connu. Ce module est donc déduit de la relation :

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{4}{E_{45}} - \frac{1}{E_L} - \frac{1}{E_T} + 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L}. \quad (11.62)$$

### 11.4.5 Réalisations pratiques des essais de traction

Dans la pratique, les essais de traction sont effectués en utilisant soit des éprouvettes en forme d'haltères, soit des éprouvettes droites avec des talons (figure 11.10). La charge est généralement appliquée sur les têtes de l'éprouvette par l'intermédiaire de mâchoires auto-serrantes, de manière à assurer une répartition homogène des contraintes dans la partie utile de l'éprouvette. L'éprouvette en forme d'haltères conduit généralement à des amorces de fissures au voisinage de l'épaulement de l'éprouvette, conduisant à des erreurs sur l'estimation des caractéristiques à la rupture du matériau. La charge appliquée est habituellement mesurée à l'aide d'une cellule de charge adaptée à la machine d'essai. Les déformations peuvent être mesurées soit à l'aide d'extensomètres, soit à l'aide de jauge d'extensométrie. Les extensomètres fixés mécaniquement à l'éprouvette sont faciles d'emploi. Il est nécessaire de veiller toutefois à l'absence de glissement lors de leurs utilisations. Les jauge d'extensométrie, de mise en œuvre plus délicate, sont utilisées pour des mesures plus précises des déformations. Il est nécessaire également de bien veiller à ce que, lors d'un essai de traction longitudinale, la direction de la charge appliquée coïncide réellement avec la direction des fibres ou de la chaîne. Un désalignement, même faible, peut entraîner, dans le cas d'un composite unidirectionnel, des valeurs mesurées nettement plus faibles que les valeurs réelles du module d'Young longitudinal (relation (11.9)). Ce problème n'est pas aussi critique dans le cas d'un essai de traction transverse.

L'application de la charge à l'aide de mâchoires auto-serrantes impose au niveau des têtes de l'éprouvette une déformation de traction  $\varepsilon_{xx}$  suivant la direction

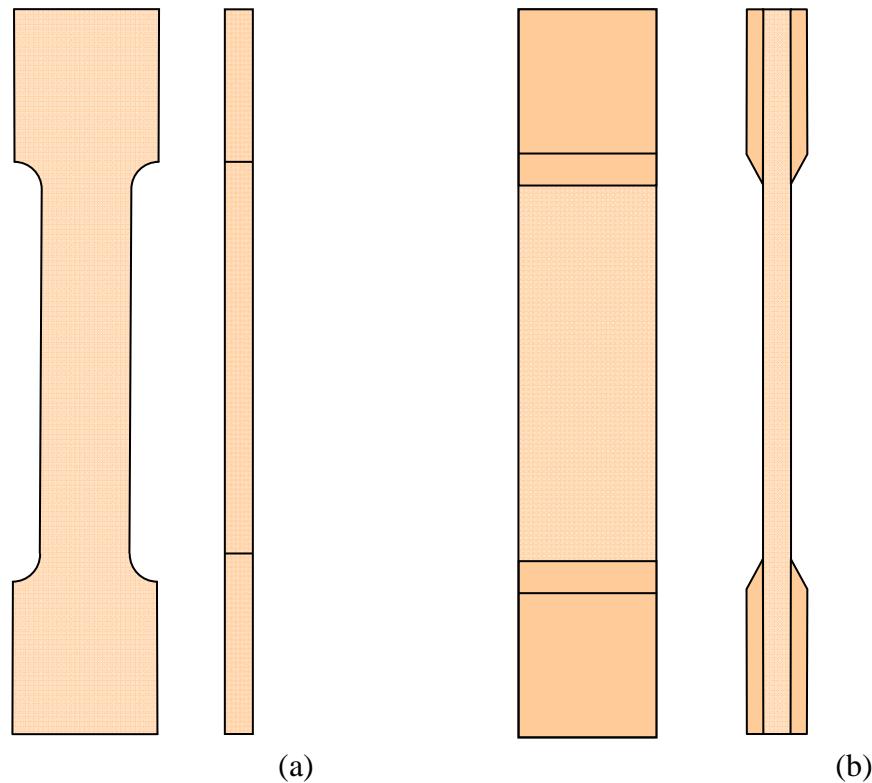


FIGURE 11.10. Éprouvettes de traction : a) en forme d'haltères ; b) droite avec talons.

direction longitudinale  $x$  de l'éprouvette. Ce dispositif impose également des déformations transversales et en cisaillement nulles ( $\varepsilon_{yy} = 0$ ,  $\gamma_{xy} = 0$ ). L'état de déformation réel au niveau des mâchoires diffère donc d'un état de traction (11.6). Toutefois, conformément au principe de Saint-Venant, l'état des déformations et des contraintes est bien celui d'un état de traction assez loin des têtes de l'éprouvette. Par ailleurs, dans le cas d'essais de traction hors axes, il s'ajoute un couplage important en cisaillement, résultant des termes 16 de la matrice de souplesse. Ce couplage induit une déformée en  $S$  de l'éprouvette. De manière à se placer dans de bonnes conditions de mesures, les essais doivent être effectués sur des éprouvettes ayant une longueur assez grande comparée à la largeur, et en limitant les mesures à la partie centrale des éprouvettes.

## EXERCICES

**11.1** Tracer (en coordonnées cartésiennes, puis en coordonnées polaires) les modules d'élasticité  $E_x$ ,  $G_{xy}$ ,  $\eta_{xy,x}$  et  $\nu_{xy}$  en fonction de l'orientation  $\theta$  dans le cas :

— d'un composite unidirectionnel :

$$E_L = 45 \text{ GPa}, \quad E_T = 10 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,31, \quad G_{LT} = 4,5 \text{ GPa} ;$$

— d'un composite orthotrope :

$$E_L = E_T = 25 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,12, \quad G_{LT} = 4 \text{ GPa}.$$

**11.2** En s'aidant des résultats établis dans les exercices 5.3 et 6.2, trouver directement les relations entre la matrice de rigidité réduite exprimée dans une direction  $\theta$  et la matrice de rigidité réduite dans les axes principaux d'un matériau orthotrope.

**11.3** Calculer les constantes de rigidité réduites, dans les axes principaux, des composites considérés dans l'exercice 11.1.

Calculer ensuite les constantes de rigidité réduites dans une direction de  $30^\circ$  par rapport aux axes principaux.

**11.4** Établir une procédure numérique ayant :

- pour entrées : les modules  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $G_{LT}$  et l'orientation  $\theta$  de la couche ;
- pour sorties : les constantes de rigidité réduite  $Q_{ij}$  dans les axes et  $Q'_{ij}$  dans la direction  $\theta$ .

Appliquer cette procédure pour établir les résultats trouvés dans l'exercice 11.3.

**11.5** À la suite de la procédure précédente, établir une procédure de calcul numérique ayant :

- pour entrées : l'état de déformation ( $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\gamma_{xy}$ ) en un point d'une couche ;
- pour sorties : les contraintes ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ) dans les axes géométriques et les contraintes ( $\sigma_L$ ,  $\sigma_T$ ,  $\sigma_{LT}$ ) dans les axes principaux.

Appliquer cette procédure dans le cas des couches considérées dans l'exercice 11.3 et pour l'état de déformation :

$$\varepsilon_{xx} = 1,5 \%, \quad \varepsilon_{yy} = 1 \%, \quad \gamma_{xy} = 2 \%.$$

## CHAPITRE 12

# Mécanismes de Rupture et Endommagement des Matériaux Composites

## 12.1 MÉCANISMES DE RUPTURE DANS LES MATÉRIAUX COMPOSITES

### 12.1.1 Introduction

Par mécanisme de rupture, il faut comprendre tout processus mécanique produisant au sein d'un matériau une "discontinuité" locale de matière appelée *fissure*. Il est usuel de parler d'initiation de la rupture et de propagation de la rupture. L'initiation de la rupture peut être considérée comme la création de microfissures à l'échelle microscopique (celle des constituants) à partir d'un défaut. On parlera de *microfissuration*. La propagation de la rupture est le résultat de la création de nouvelles surfaces de rupture à l'échelle macroscopique (plusieurs fois celle des constituants), à partir des microfissures existantes. On parlera également de *macrofissuration*. Dans le cas des matériaux composites, l'initiation de la rupture se produit généralement bien avant l'observation d'un changement du comportement macroscopique.

### 12.1.2 Les divers mécanismes de rupture dans un composite unidirectionnel

La rupture finale d'un composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de divers mécanismes élémentaires :

- la rupture des fibres,
- la rupture transverse de la matrice,
- la rupture longitudinale de la matrice,
- la rupture de l'interface fibre-matrice.

Généralement, un mécanisme n'est pas isolé, mais divers mécanismes coexistent. Ces mécanismes se développent suivant la nature des matériaux et les conditions de sollicitations mécaniques imposées.

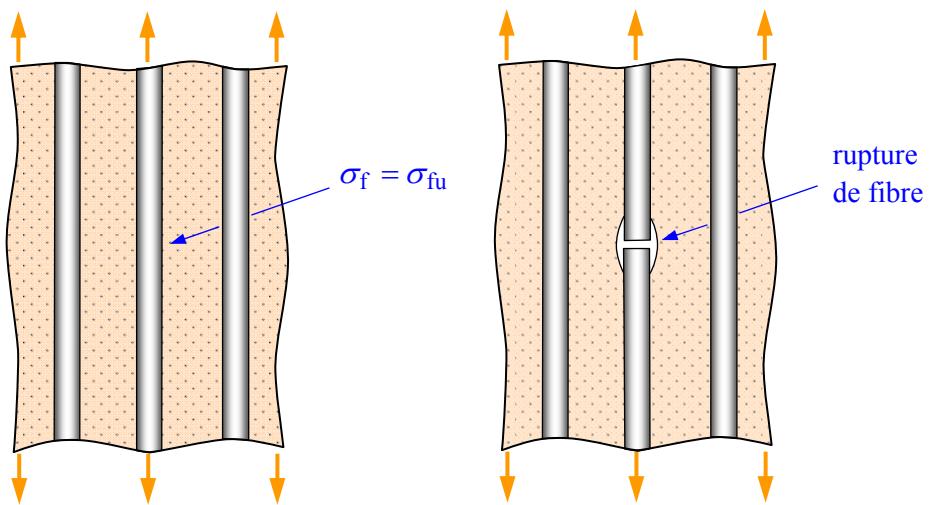


FIGURE 12.1. Rupture de fibre.

Dans un matériau composite unidirectionnel soumis à des sollicitations mécaniques, la rupture des fibres intervient lorsque la contrainte de traction  $\sigma_f$  dans une fibre atteint la contrainte à la rupture  $\sigma_{fu}$  de la fibre (figure 12.1). La rupture de la fibre produit une concentration de contraintes au voisinage de la rupture. La redistribution de ces contraintes, et par conséquent le processus de rupture résultant, dépend principalement : de la contrainte à la rupture des fibres, de la capacité de la matrice à absorber l'énergie libérée, des propriétés de l'interface fibre-matrice, etc. Les figures 12.2 montrent les différents processus de rupture de la matrice associés à la rupture d'une fibre.

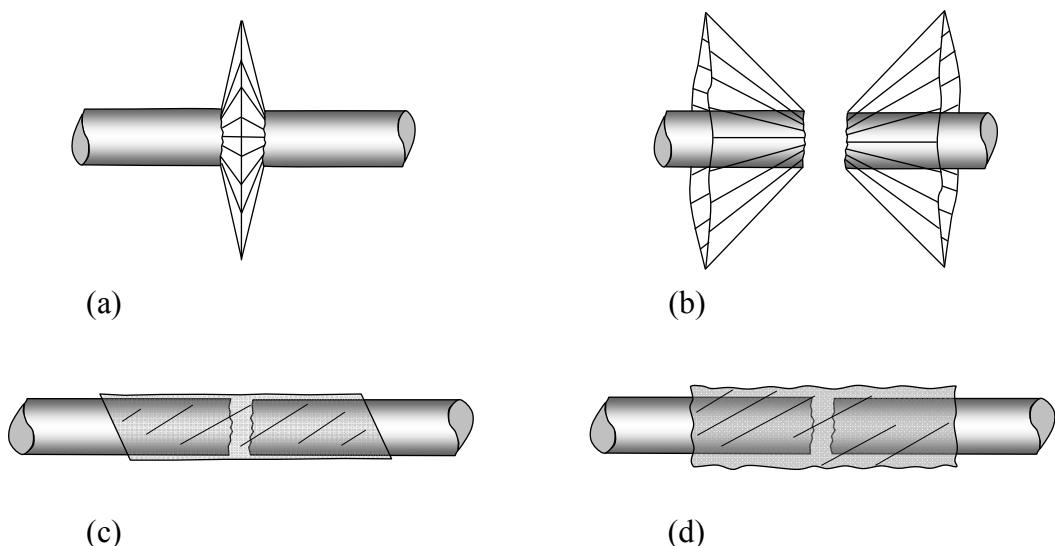


FIGURE 12.2. Différents modes de rupture de la matrice associés à la rupture d'une fibre.  
 (a) Rupture transverse de la matrice ; (b) Rupture en cisaillement de la matrice ; (c) Décohésion de l'interface fibre-matrice ; (d) Rupture longitudinale de la matrice.

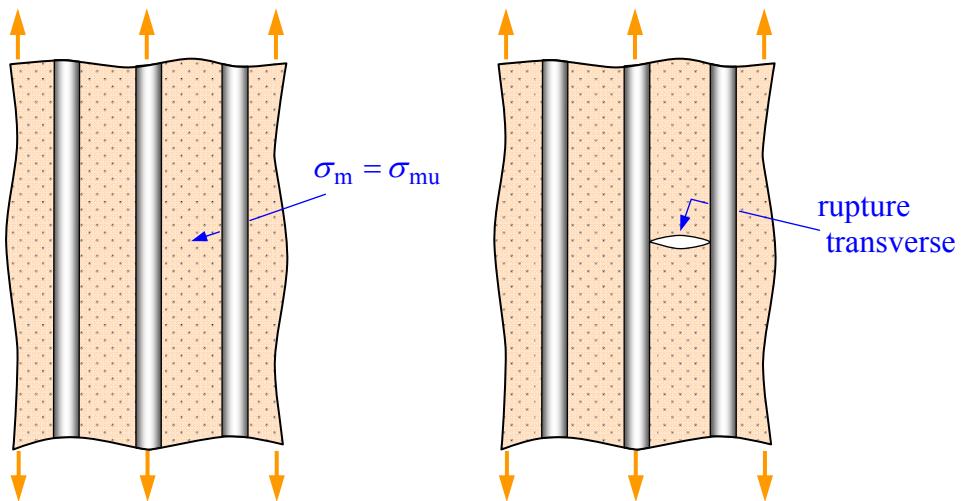


FIGURE 12.3. Rupture transverse de la matrice.

La fissuration de la matrice peut se produire, soit par *fissuration transverse* (figure 12.3) lorsque la contrainte en traction  $\sigma_m$  dans la matrice atteint la contrainte à la rupture  $\sigma_{mu}$  de la matrice, soit par *fissuration longitudinale* (figure 12.4) lorsque la contrainte de cisaillement  $\tau_m$  dans la matrice atteint la contrainte en cisaillement à la rupture  $\tau_{mu}$ , généralement au voisinage d'une fibre. Ce dernier mode de rupture, appelé “splitting” par les anglo-saxons, se produit lorsque la contrainte de décohésion est supérieure à la contrainte en cisaillement à la rupture de la matrice :  $\tau_d > \tau_{mu}$ . Dans le cas contraire où  $\tau_d < \tau_{mu}$ , il se produit une *rupture par décohésion* de l'interface fibre-matrice (figure 12.5).

La rupture finale d'un matériau composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de ces divers mécanismes élémentaires. L'initiation, puis la propagation de la rupture dépendent des propriétés des fibres et de la matrice, de

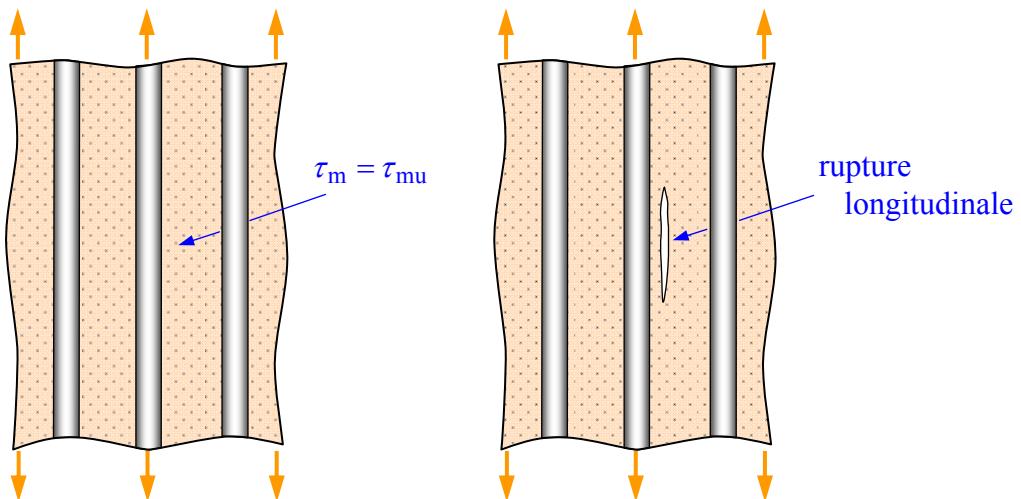


FIGURE 12.4. Rupture longitudinale de la matrice.

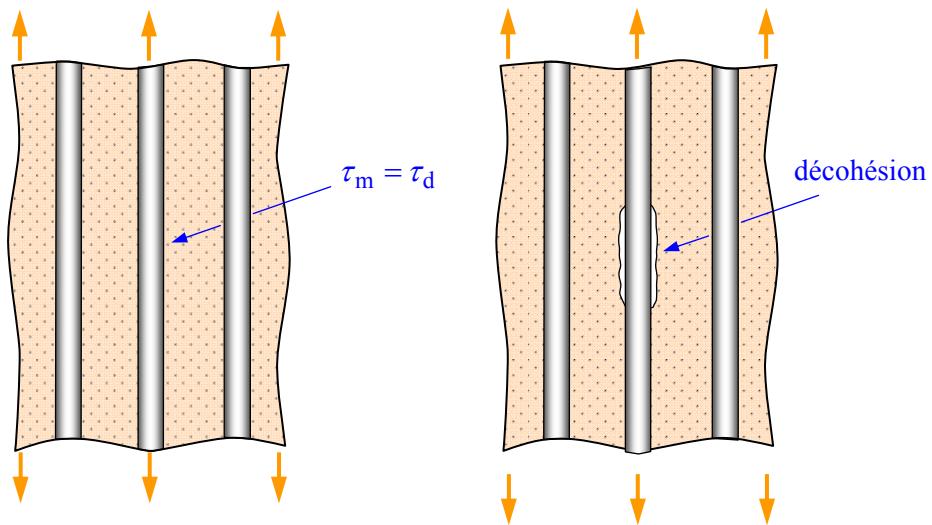


FIGURE 12.5. Décohésion fibre-matrice.

l'interface fibre-matrice, de la fraction volumique des fibres, de l'état et des conditions de sollicitations mécaniques imposées.

### 12.1.3 Composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale

Dans le cas d'un composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale, l'initiation de la rupture se produit généralement soit par rupture des fibres lorsque la déformation à la rupture des fibres est plus faible que celle de la matrice ( $\varepsilon_{fu} < \varepsilon_{mu}$ ), soit par rupture transverse de la matrice dans le cas contraire.

Dans le cas où  $\varepsilon_{fu} < \varepsilon_{mu}$ , les courbes contrainte-déformation sont schématisées sur la figure 12.6. En admettant l'égalité des déformations dans la fibre et dans la matrice, la relation (9.80) s'écrit au moment de la rupture :

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu}V_f + (\sigma_m)_{\varepsilon_{fu}}(1-V_f), \quad (12.1)$$

où  $\sigma_{cu}$  est la contrainte à la rupture du composite,  $\sigma_{fu}$  la contrainte à la rupture des fibres et  $(\sigma_m)_{\varepsilon_{fu}}$  la contrainte dans la matrice pour une déformation égale à la déformation  $\varepsilon_{fu}$  à la rupture des fibres. La contrainte  $(\sigma_m)_{\varepsilon_{fu}}$  est inférieure à la contrainte à la rupture  $\sigma_{mu}$  de la matrice, d'où :

$$\sigma_{cu} \leq \sigma_{fu}V_f + \sigma_{mu}(1-V_f). \quad (12.2)$$

Généralement, l'expression retenue pour la contrainte à la rupture du composite est la loi des mélanges :

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu}V_f + \sigma_{mu}(1-V_f), \quad (12.3)$$

avec pour les fractions usuelles de fibres :

$$\sigma_{cu} \approx \sigma_{fu}V_f. \quad (12.4)$$

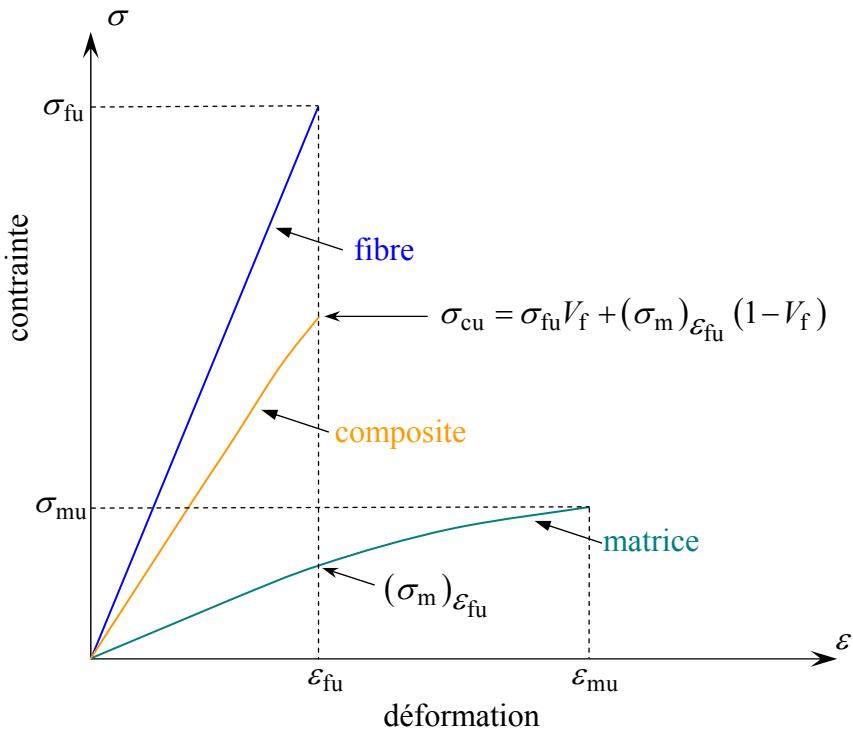


FIGURE 12.6. Courbe contrainte-déformation d'un composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale, dans le cas où  $\varepsilon_{fu} < \varepsilon_{mu}$ .

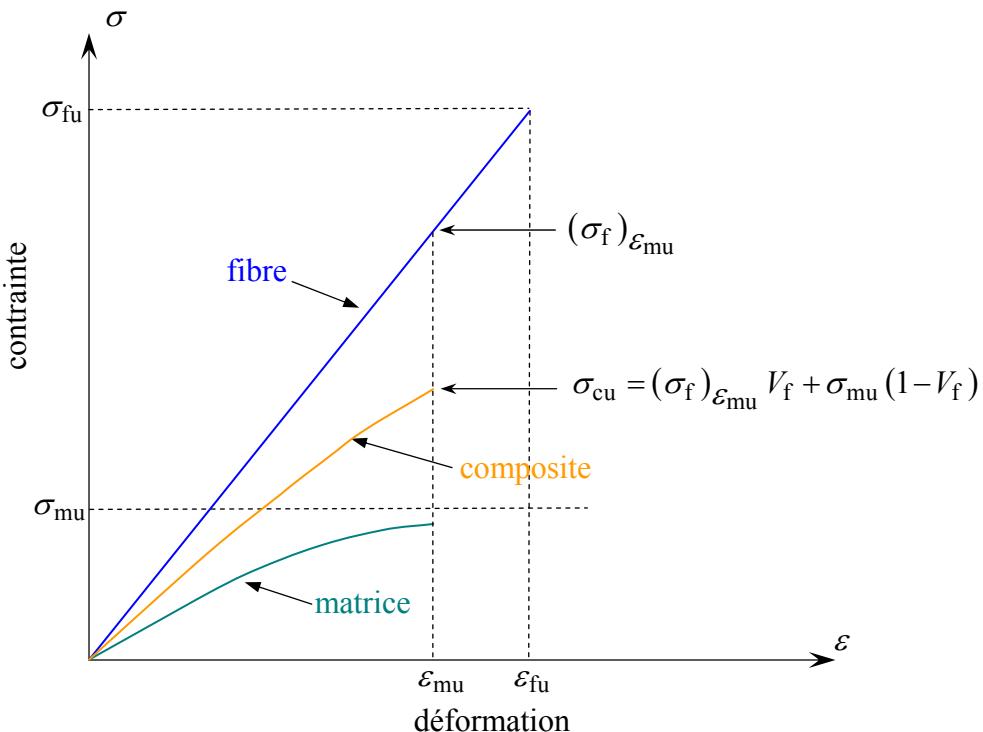


FIGURE 12.7. Courbe contrainte-déformation d'un composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale, dans le cas où  $\varepsilon_{fu} > \varepsilon_{mu}$ .

Dans le cas où la déformation à la rupture de la matrice est inférieure à celle des fibres (figure 12.7), la contrainte à la rupture est donnée par l'expression :

$$\sigma_{cu} = (\sigma_f)_{\varepsilon_{mu}} V_f + \sigma_{mu} (1 - V_f), \quad (12.5)$$

où  $(\sigma_f)_{\varepsilon_{mu}}$  est la contrainte dans la fibre au moment de la rupture de la matrice.

La valeur de la contrainte à la rupture du matériau composite est alors bien inférieure à celle donnée par l'expression (12.1). La matrice ne permet pas dans ce cas de bénéficier totalement du renfort des fibres.

Les caractéristiques mécaniques (chapitre 2) des fibres usuelles sont :

— pour les fibres de carbone :

• à haute résistance (HS) :

$$E_f = 220 \text{ GPa}, \quad \sigma_{fu} = 3\,000 \text{ à } 4\,000 \text{ MPa}, \quad \text{soit} \quad \varepsilon_{fu} = 1,4 \text{ à } 1,8 \text{ \%};$$

• à haut module (HM) :

$$E_f = 400 \text{ GPa}, \quad \sigma_{fu} \approx 2\,200 \text{ MPa}, \quad \text{soit} \quad \varepsilon_{fu} = 0,5 \text{ \%};$$

— pour les fibres de verre E :

$$E_f = 70 \text{ GPa}, \quad \sigma_{fu} = 2\,400 \text{ à } 3\,400 \text{ MPa}, \quad \text{soit} \quad \varepsilon_{fu} = 3,4 \text{ à } 4,8 \text{ \%}.$$

L'allongement à la rupture des résines usuelles est :

— pour les polyesters rigides :  $\varepsilon_{mu} = 2 \text{ à } 5 \text{ \%}$ ,

— pour les résines phénoliques :  $\varepsilon_{mu} \approx 2,5 \text{ \%}$ ,

— pour les résines époxydes :  $\varepsilon_{mu} = 2 \text{ à } 5 \text{ \%}$ .

En outre, en utilisation industrielle, les résines sont assez fortement chargées, conduisant à une diminution notable de la déformation à la rupture de la matrice. Ces chiffres montrent donc que les performances à la rupture des composites à hautes performances (composites à fibres de carbone) sont gouvernées par les propriétés à la rupture des fibres. Par contre, dans le cas de composites industriels à fibres de verre, les performances à la rupture peuvent être limitées par une déformabilité trop faible de la matrice. Il apparaît donc nécessaire d'adapter au mieux les propriétés de la matrice à celles des fibres pour optimiser les performances à la rupture des matériaux composites.

Après initiation, la propagation de la rupture diffère suivant la nature de l'interface fibre-matrice. Dans le cas d'une adhérence fibre-matrice élevée, la rupture initiée, soit par rupture des fibres, soit par rupture de la matrice, induit en front de fissure des concentrations de contraintes conduisant à une propagation de la rupture successivement dans les fibres et dans la matrice (figure 12.8.1). La rupture observée est de type fragile (figure 12.8.2). Il est également possible d'observer un pontage, par rupture longitudinale de la matrice ou par décohésion fibre-matrice, de deux fissures initiées dans des zones différentes (figures 12.8.3 et 12.8.4).

Dans le cas d'une faible adhérence fibre-matrice, la propagation transverse de la fissuration peut être schématisée de la manière suivante. En tête de fissure, la rupture de la matrice traverse les fibres (figure 12.9), sans qu'il y ait rupture des fibres, mais avec décohésion de l'interface fibre-matrice. Dans certains cas, les concentrations de contraintes en tête de fissure peuvent conduire (figure 12.9) à

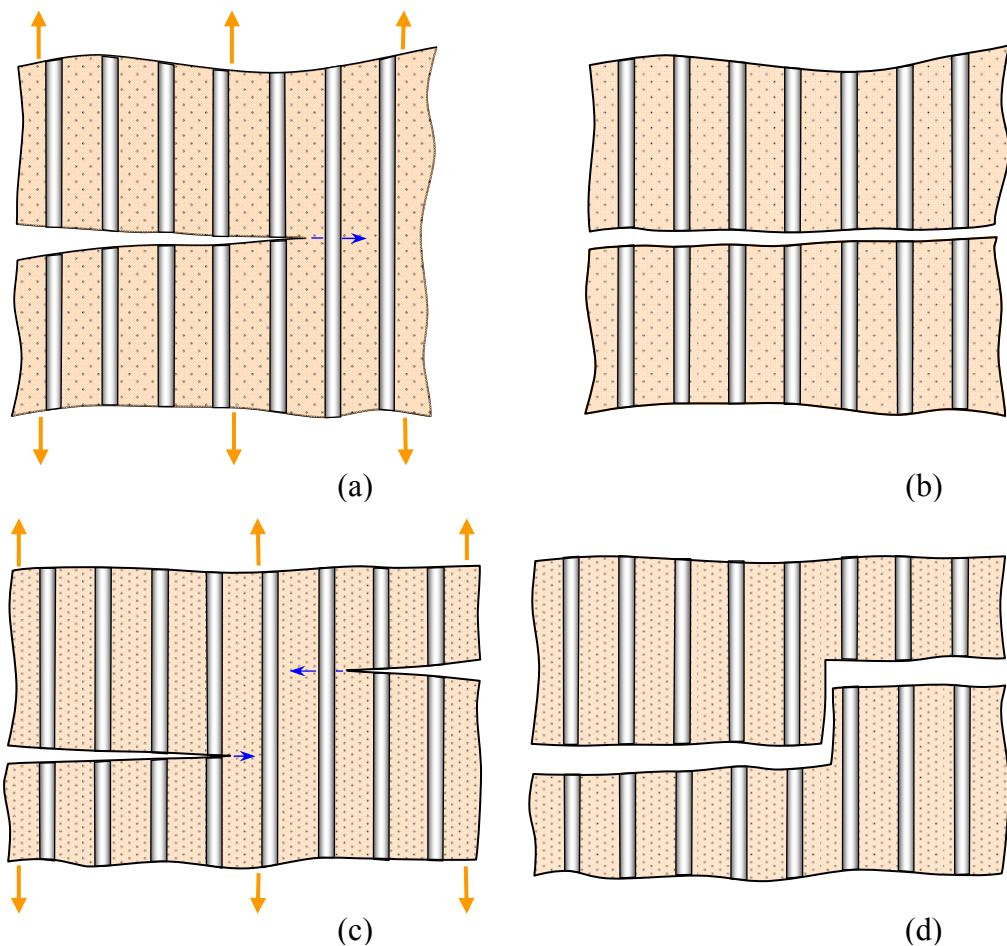


FIGURE 12.8. Propagation de la rupture dans le cas d'une forte adhérence fibre-matrice.

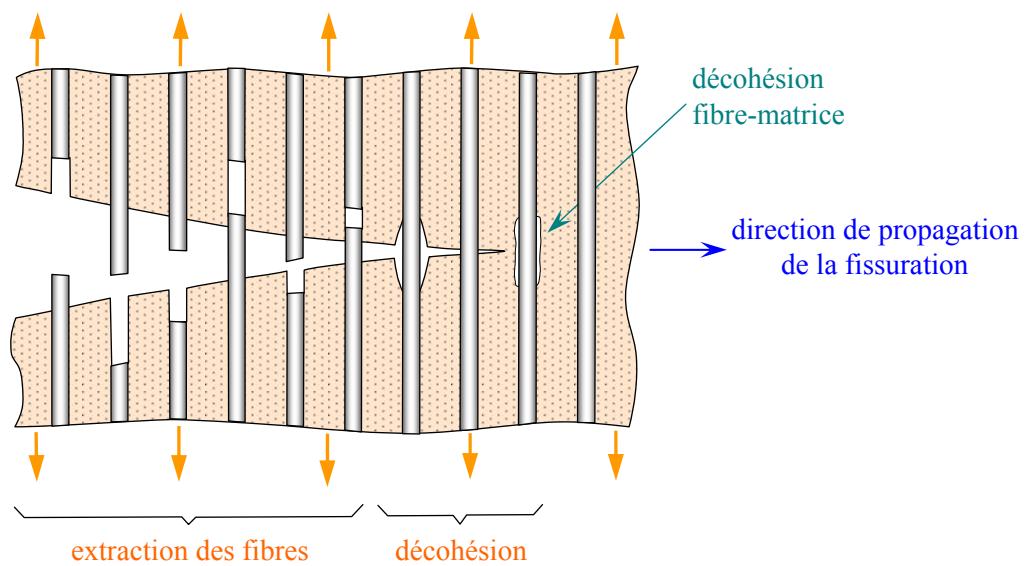


FIGURE 12.9. Propagation de la rupture dans le cas d'une faible adhérence fibre-matrice.

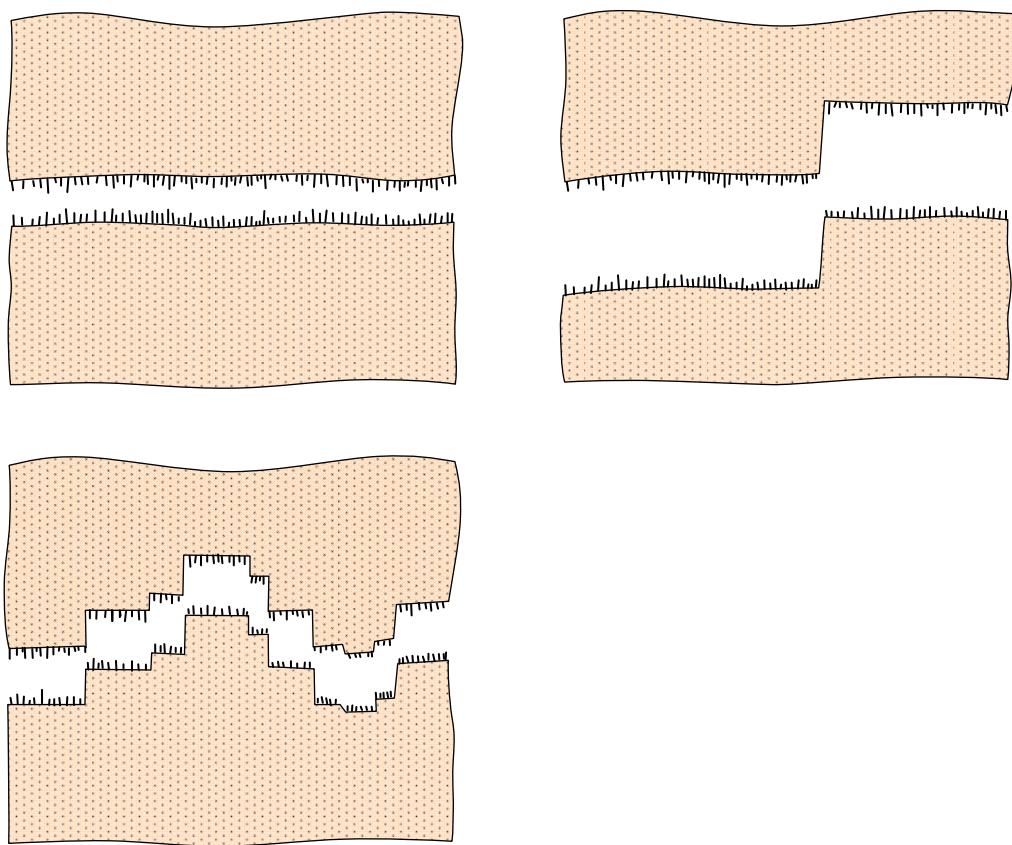


FIGURE 12.10. Surfaces de rupture dans le cas d'une faible adhérence fibre-matrice.

une décohésion fibre-matrice avant rupture transverse de la matrice. En arrière, l'ouverture de la fissure induit des contraintes élevées dans les fibres pontant la fissure. Ces contraintes provoquent la rupture des fibres à une distance plus ou moins proche de la surface de rupture. La fissure continuant de progresser, les fibres rompues sont extraites de la fissure au fur et à mesure de la progression de la fissure. Le pontage des fissures transversales peut se faire par propagation de la rupture à l'interface fibre-matrice, conduisant à un profil plus ou moins en escalier de la surface de rupture (figure 12.10).

#### 12.1.4 Composite unidirectionnel soumis à une traction transverse

Dans le cas d'un composite unidirectionnel soumis à une traction transverse, la rupture se produit soit par rupture de la matrice, soit par décohésion de l'interface fibre-matrice, suivant les caractéristiques à la rupture de la matrice et de l'interface. La rupture de la matrice se produit lorsque la contrainte en traction  $\sigma_m$  dans la matrice atteint la contrainte à la rupture  $\sigma_{mu}$  de la matrice (figure 12.11). Ce processus intervient lorsque la contrainte à la rupture de la matrice est

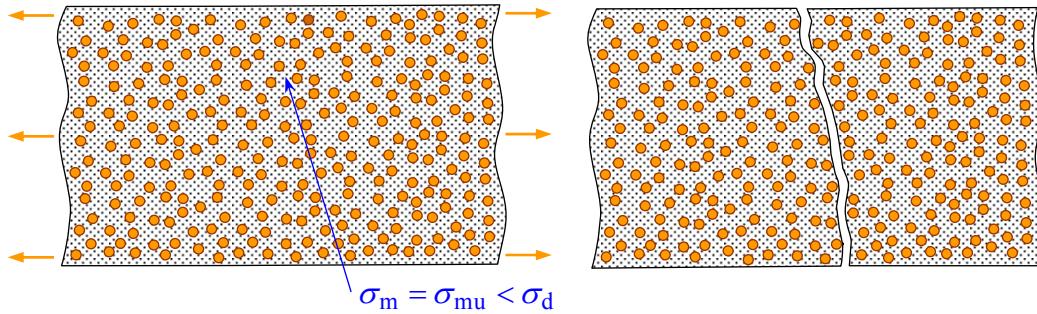


FIGURE 12.11. Rupture d'un composite unidirectionnel soumis à une traction transverse.

inférieure à la contrainte de décohésion  $\sigma_d$  en traction de l'interface fibre-matrice. Dans le cas contraire où  $\sigma_{mu} > \sigma_d$ , la rupture du composite se produit par rupture de l'interface fibre-matrice. Après initiation, la rupture se propage dans le matériau composite suivant une surface plus ou moins plane, dépendant des caractéristiques du matériau.

### 12.1.5 Rupture des stratifiés

Dans le cas de stratifiés, aux mécanismes élémentaires décrits précédemment (décohésion fibre-matrice, rupture longitudinale de la matrice, rupture transverse de la matrice, rupture de fibres), s'ajoute (figure 12.12) un mécanisme de rupture entre les couches, appelé rupture par *délaminage*. Les mécanismes de rupture induits dépendent de la nature des constituants, de l'architecture des couches et du mode de sollicitation mécanique imposé.

Par exemple, dans le cas d'un stratifié croisé soumis à une traction dans la direction  $0^\circ$  (figure 12.13), le premier phénomène de rupture observé est celui de la fissuration des couches orientées à  $90^\circ$ . La fissuration se produit par rupture longitudinale de la matrice ou/et par rupture de l'interface fibre-matrice dans les couches orientées à  $90^\circ$ . Cette fissuration conduit à la formation de fissures orientées transversalement (figure 12.14) à la direction du chargement mécanique. Ainsi, cette fissuration initiale des couches à  $90^\circ$  est appelée fissuration transverse du stratifié croisé. Lorsque le chargement mécanique est augmenté, le nombre de fissures croît jusqu'à atteindre un état de saturation de la fissuration. Les fissures transverses créent en pointes de fissures, entre les couches orientées à  $90^\circ$  et à  $0^\circ$ , des concentrations de contraintes qui conduisent à l'initiation puis à la propagation du délaminage à l'interface entre les couches. Ce délaminage se développe ensuite jusqu'à la rupture finale du stratifié par rupture des fibres et de la matrice dans les couches à  $0^\circ$ . La figure 12.14 montre l'aspect final de la surface après rupture.

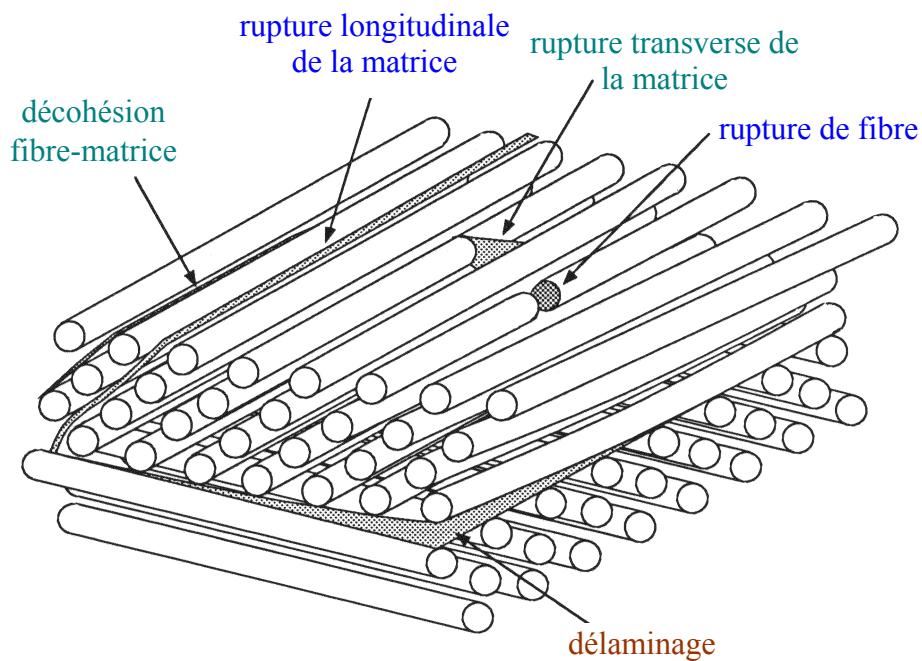


FIGURE 12.12. Mécanismes de rupture observés dans les stratifiés.

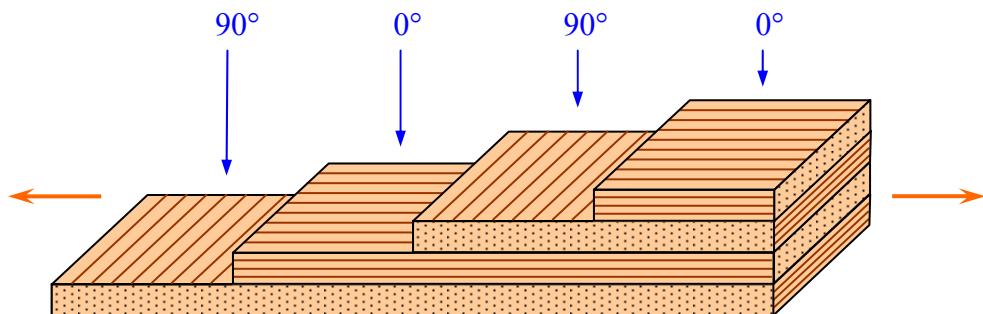


FIGURE 12.13. Stratifié croisé soumis à une traction dans la direction 0°.

Dans le cas d'un stratifié croisé  $\pm 45^\circ$ , soumis à une traction longitudinale dans la direction  $0^\circ$  (figure 12.15), on observe d'abord une rupture longitudinale dans les couches à  $\pm 45^\circ$ , suivie d'un délaminage entre les couches. La figure 12.16 donne un exemple de rupture observé dans ce cas.

Un autre exemple intéressant est celui d'une plaque trouée, constituée d'un stratifié  $[0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ]_n$  et soumise à une traction dans la direction  $0^\circ$  (figure 12.17a). Plusieurs phases de fissuration sont observées dans ce cas. Dans une première phase, il se produit une fissuration longitudinale de la matrice dans les couches à  $90^\circ$  (figure 12.17b). Dans une deuxième phase, on observe l'initiation de la fissuration dans les couches à  $\pm 45^\circ$ , à partir des fissures propagées dans les couches à  $90^\circ$ , avec une propagation limitée de ces fissures à  $\pm 45^\circ$  (figure 12.17c). La troisième phase est marquée par l'apparition de fissures longitudinales,

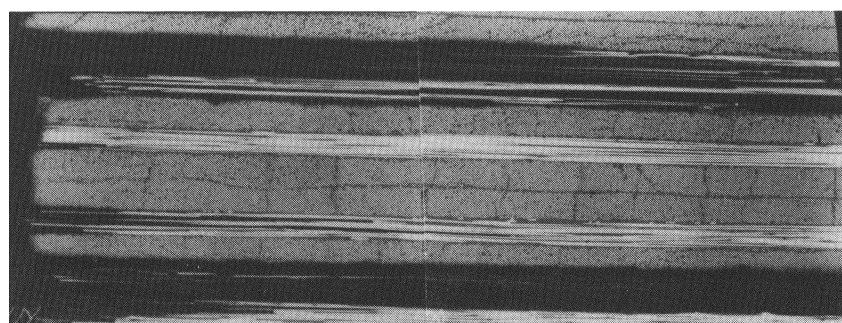
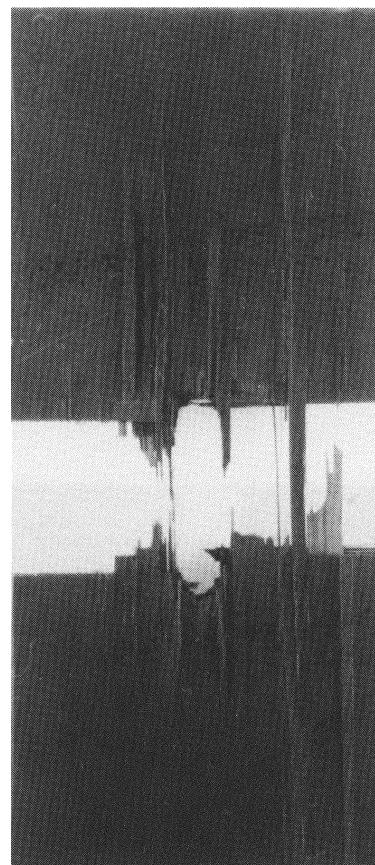
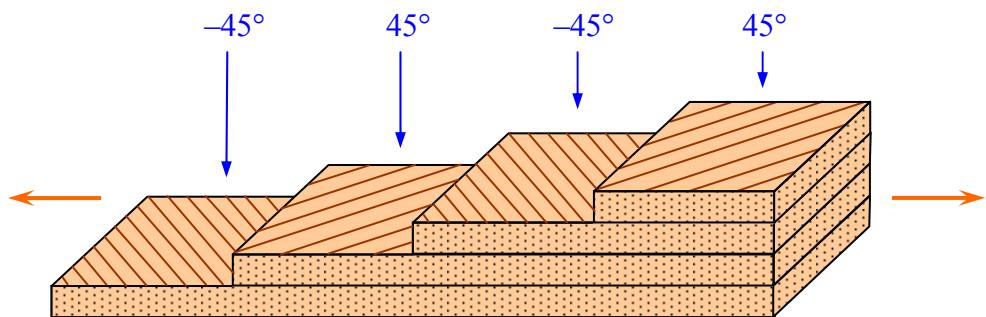
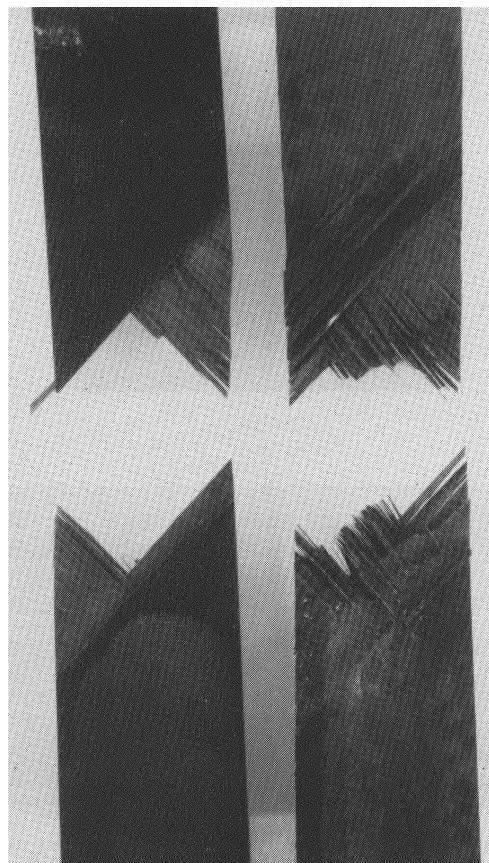


FIGURE 12.14. Rupture en présence d'un trou d'un composite  $[0^\circ/90^\circ]_{2S}$  à fibres de carbone. (haut) Rupture macroscopique au droit du trou ( $\times 1$ ). (bas) Bord de l'éprouvette loin du trou : les couches à  $90^\circ$  sont microfissurées (Document ONERA).

FIGURE 12.15. Stratifié croisé  $\pm 45^\circ$  soumis à une traction dans la direction  $0^\circ$ .

partant du trou, dans les couches à  $0^\circ$ . Ces fissures génèrent également des fissures secondaires à  $\pm 45^\circ$  (figure 12.17d). Dans la dernière phase, les fissures à  $0^\circ$  produisent un délamínage des couches, suivi de la rupture des couches à  $90^\circ$ , puis des couches à  $45^\circ$ , et enfin d'une rupture des fibres dans les couches à  $0^\circ$ , conduisant à la rupture finale de la plaque.

FIGURE 12.16. Rupture d'un composite  $[\pm 45^\circ]_{2S}$  à fibres de carbone ( $\times 1$ ) (Document ONERA).

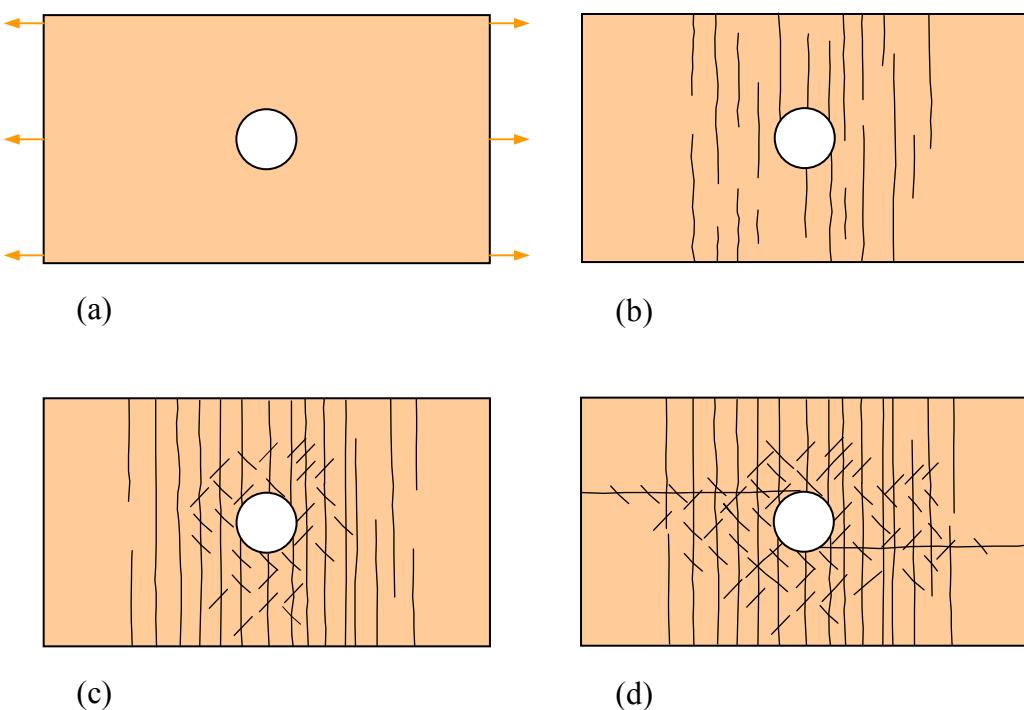


FIGURE 12.17. Fissuration d'un stratifié  $[0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ]_n$ . (a) Plaque avec un trou en son centre soumise à une charge de traction; (b) 1ère phase: fissuration dans les couches à  $90^\circ$ ; (c) 2ème phase: fissuration dans les couches à  $\pm 45^\circ$ ; (d) 3ème phase: rupture dans les couches à  $0^\circ$ .

## 12.1.6 Observation des mécanismes de rupture

Le suivi des mécanismes de rupture peut être effectué par diverses techniques dont nous donnons quelques éléments dans ce paragraphe.

### 12.1.6.1 *Observation par microscopie*

La technique la plus simple à mettre en œuvre est l'observation à l'aide d'un binoculaire ou d'un microscope optique, permettant éventuellement une observation continue des phénomènes de rupture au cours des essais. L'observation est ponctuelle et la profondeur de champ limitée. La microscopie électronique à balayage augmente cette profondeur, tout en permettant d'atteindre des grossissements élevés. Les figures 12.18 et 12.19 montrent les micrographies obtenues dans le cas de la fissuration transverse de composites présentant une faible adhérence fibre-matrice (fig. 12.18) et une adhérence élevée (fig. 12.19).

### 12.1.6.2 *Visualisation par radiographie*

La technique de visualisation par radiographie X consiste à imprégner l'éprouvette fissurée à l'aide d'un opacifiant (type iodure de zinc) et à faire ensuite une radiographie X de l'éprouvette. La radiographie donne une image 2D de l'état

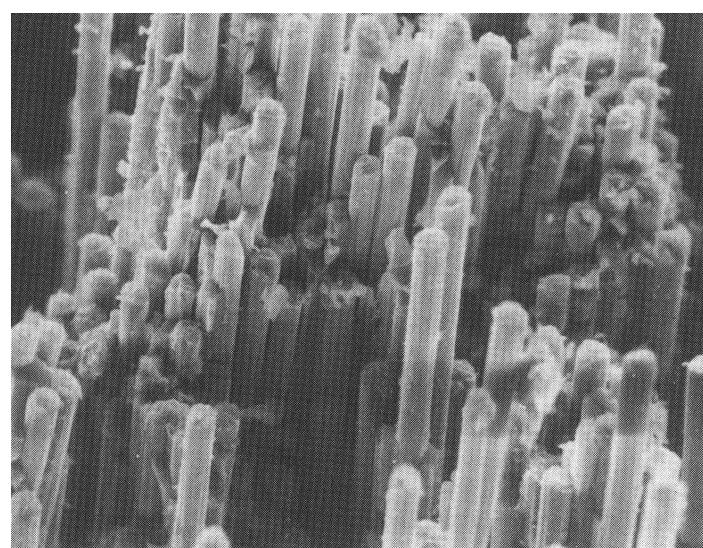
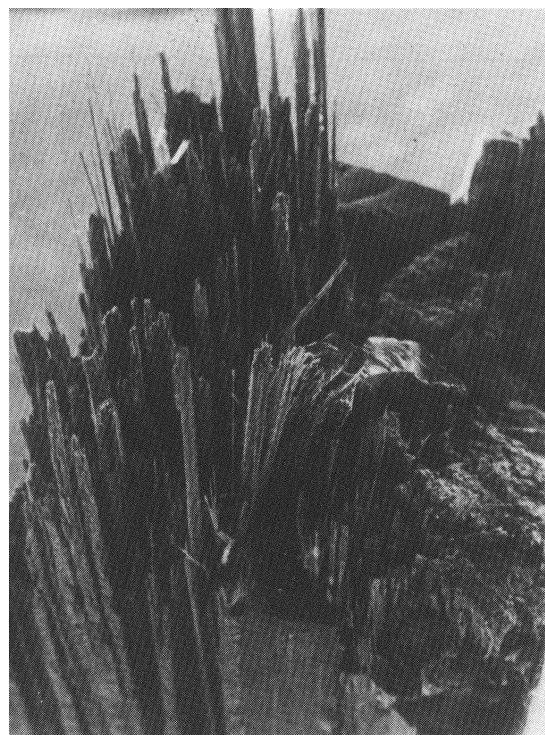


FIGURE 12.18. Surface de rupture associée à une faible adhérence fibre-matrice dans le cas d'un composite à fibres de carbone (Document ONERA).

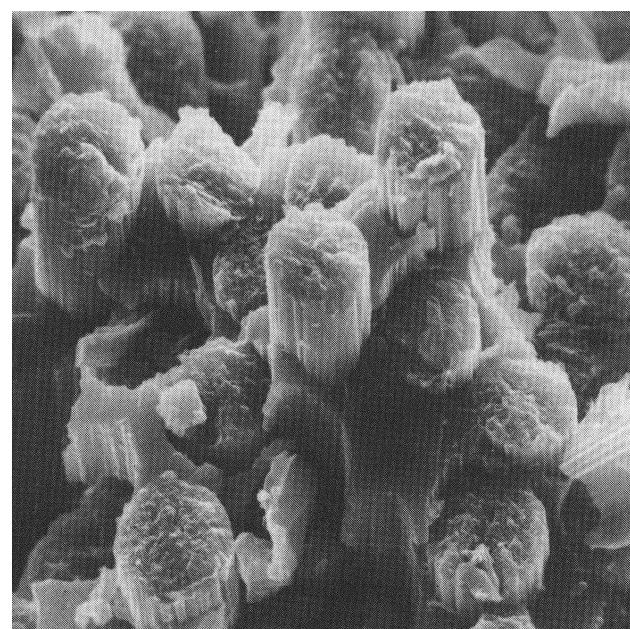
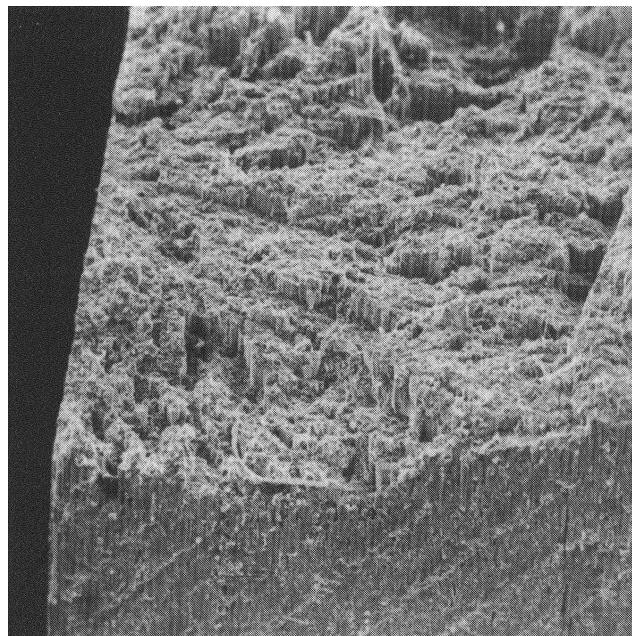


FIGURE 12.19. Surface de rupture associée à une bonne adhérence fibre-matrice dans le cas d'un composite à fibres de carbone (Document ONERA).

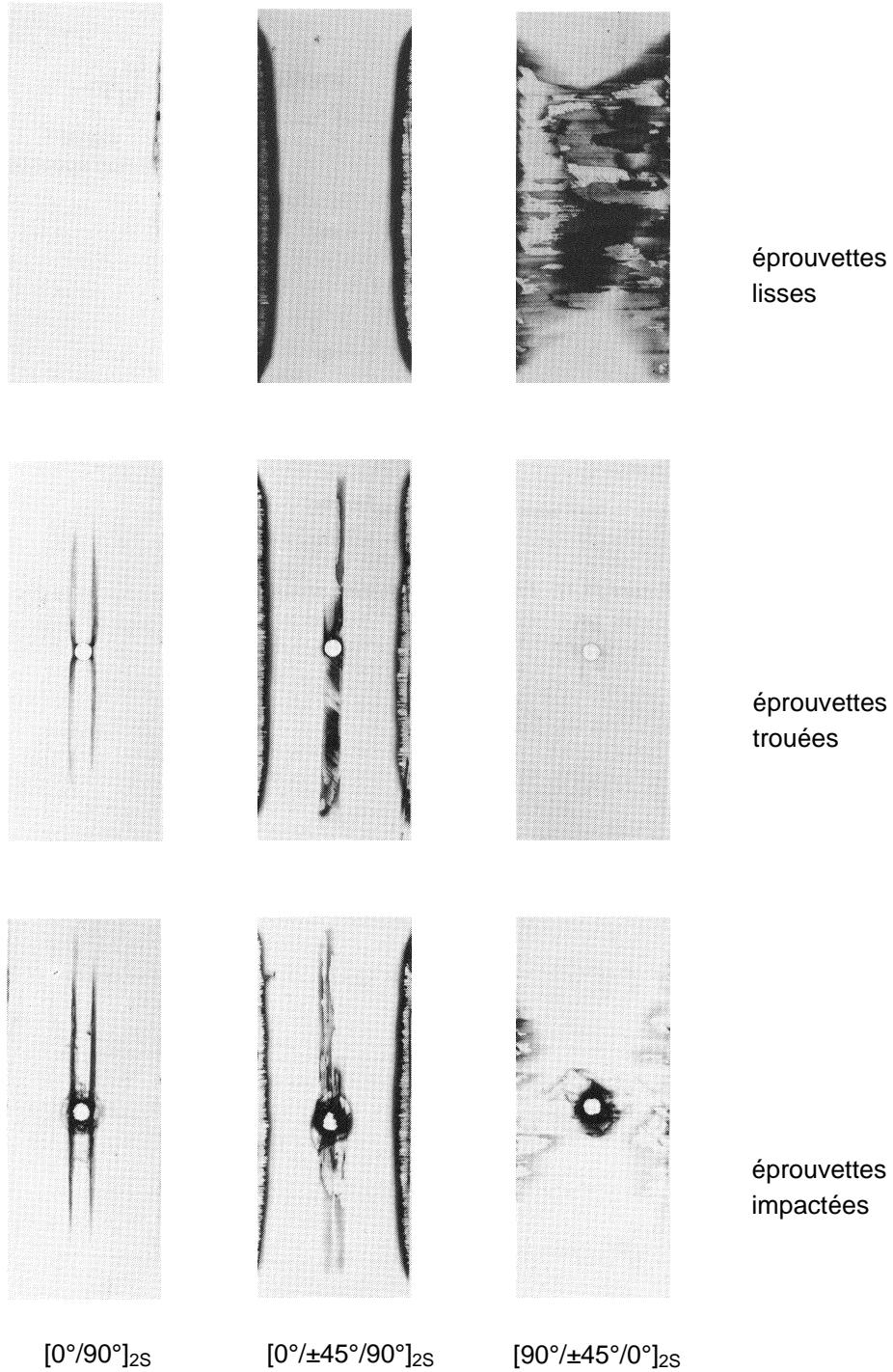


FIGURE 12.20. Visualisation par radiographie X de l'état de fissuration de composites à fibres de carbone après fatigue ( $10^5$  cycles ;  $R = 0,1$ ) dans le cas de diverses éprouvettes : lisses, trouées (trou de diamètre 5,6 mm), impactées (projectiles de diamètre 5,56 mm à une vitesse de 1 000 m/s) et de divers empilements :  $[0^\circ/90^\circ]_{2S}$ ,  $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_{2S}$ ,  $[90^\circ/\pm 45^\circ/0^\circ]_{2S}$  (Document ONERA).

de fissuration (figure 12.20). Il est cependant aisément possible de localiser les dommages dans l'épaisseur du stratifié lorsque l'on connaît l'orientation des couches. La radiographie permet une visualisation très fine des fissures, et en particulier des fissures transverses à l'épaisseur de l'éprouvette. Il faut noter qu'il est nécessaire pour chaque radiographie de démonter l'éprouvette, puis de la remonter sur la machine d'essai pour poursuivre l'essai. Il en résulte un alourdissement considérable des essais.

Il est également possible d'observer l'état de fissuration d'une éprouvette par radiographie à l'aide d'un scanner médical. L'analyse des variations de densité permet alors d'accéder à des informations en trois dimensions.

### 12.1.6.3 Analyse par émission acoustique

Les techniques précédentes ne permettent que des observations en temps différé. Elles sont par ailleurs lourdes à mettre en œuvre du fait des montages et démontages des éprouvettes, nécessaires aux observations de l'état de fissuration. Par contre, l'émission acoustique est un processus physique qui permet d'accéder, en temps réel, à des informations sur les mécanismes de rupture mis en jeu. Lorsqu'un mécanisme de rupture se produit au sein d'un matériau, il se crée localement une discontinuité du champ des déplacements et des contraintes. Cette discontinuité appelée *événement* devient la source d'une onde de déformation qui se propage dans le matériau. À la surface du matériau, un capteur adapté traduit l'onde reçue (figure 12.21) en un *signal électrique* qui est ensuite amplifié, puis analysé. Les capteurs sont des capteurs piézoélectriques développés spécifiquement pour l'émission acoustique, de manière à avoir une sensibilité élevée. Le domaine des fréquences étudiées s'échelonnent généralement de 50 kHz à 1 MHz. La figure 12.22 donne des exemples de signaux d'émission acoustique.

La technique d'émission acoustique consiste à extraire de ces signaux des informations en relation avec les mécanismes de rupture. Les analyses des signaux utilisées sont :

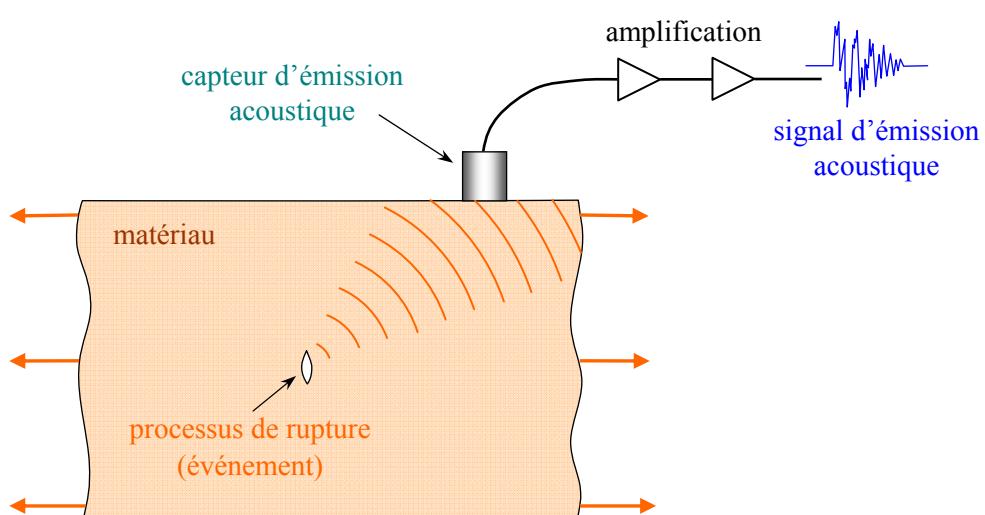


FIGURE 12.21. Processus d'émission acoustique.

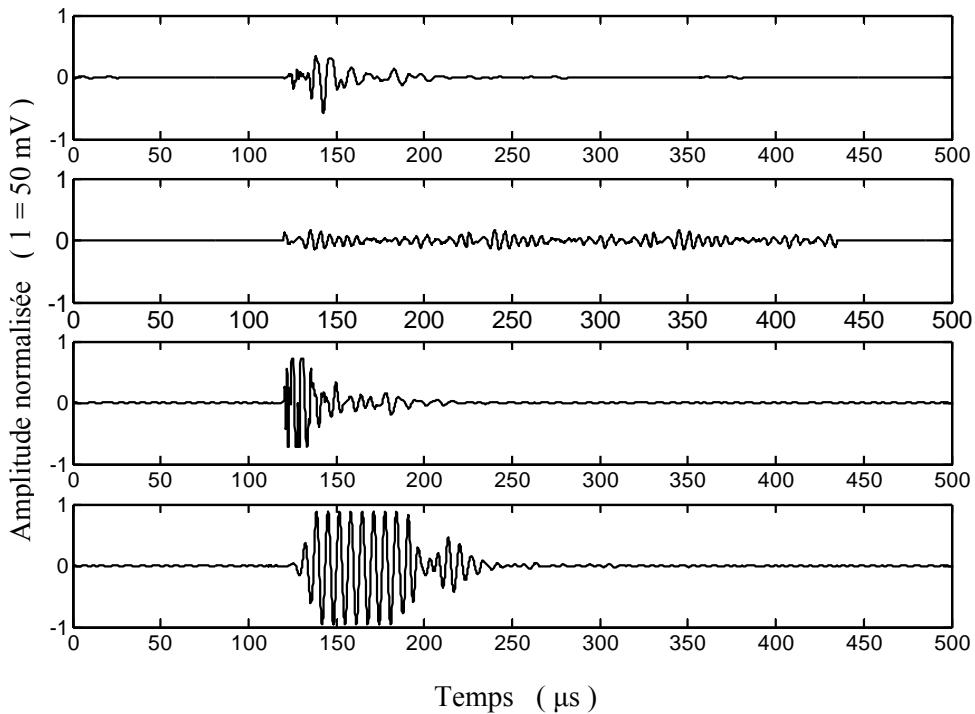


FIGURE 12.22. Signaux d'émission acoustique enregistrés lors d'essais de flexion sur des composites époxyde-fibres de verre unidirectionnelles.

- le comptage des signaux qui permet de déterminer l'initiation de l'endommagement et d'obtenir des informations sur son activité ;
- la localisation de l'endommagement en mesurant les temps d'arrivée des signaux à plusieurs capteurs convenablement répartis ;
- l'analyse en fréquence des signaux ;
- l'analyse en amplitude, qui consiste à associer à chaque signal son amplitude crête, puis à relever au cours d'un essai l'évolution de la distribution statistique des amplitudes.

Les techniques d'enregistrement et d'analyse des signaux d'émission acoustique sont aujourd'hui grandement facilitées par les outils numériques dont dispose l'ingénieur.

## 12.2 CRITÈRES DE RUPTURE

### 12.2.1 Introduction

Les critères de rupture ont pour objectifs de permettre au concepteur d'avoir une évaluation de la résistance mécanique des stratifiés. D'une manière générale, la résistance mécanique d'un matériau correspond à une dégradation irréversible : soit à la rupture réelle du matériau (figure 12.23a), soit à la limite du domaine

élastique (figure 12.23b). Dans le cas des matériaux composites, la limite du domaine élastique est généralement liée à l'apparition de la microfissuration : microruptures dans la matrice, ruptures de fibres, décohésion fibres-matrice, etc. Une fois initiées, ces microfissures restent généralement localisées, ne modifiant que très progressivement la rigidité du matériau.

Les critères de rupture sont établis dans le cas d'une couche d'un stratifié et peuvent être classés suivant :

- des critères en contraintes maximales,
- des critères en déformations maximales,
- des critères interactifs, souvent appelés critères énergétiques.

## 12.2.2 Critères en contraintes maximales

### 12.2.2.1 Critères dans les axes principaux

Les critères en contraintes maximales font intervenir :

$X_t, X_c$  : les contraintes à la rupture suivant l'axe longitudinal respectivement en traction et en compression,

$Y_t, Y_c$  : les contraintes à la rupture suivant l'axe transversal respectivement en traction et en compression,

$S$  : la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche.

L'axe longitudinal et l'axe transversal sont pris suivant les axes des matériaux de la couche (figure 12.24). Les grandeurs à la rupture sont les valeurs positives des contraintes à la rupture mesurées dans des essais de traction, compression ou cisaillement.

Dans le cas d'une couche soumise à un état de contraintes planes ( $\sigma_L, \sigma_T, \sigma_{LT}$ ) dans les axes des matériaux, les critères en contraintes maximales stipulent que la résistance mécanique de la couche est atteinte lorsque l'une des trois contraintes auxquelles la couche est soumise atteint la valeur de la contrainte à la rupture correspondante. Les critères de rupture s'écrivent ainsi sous la forme :

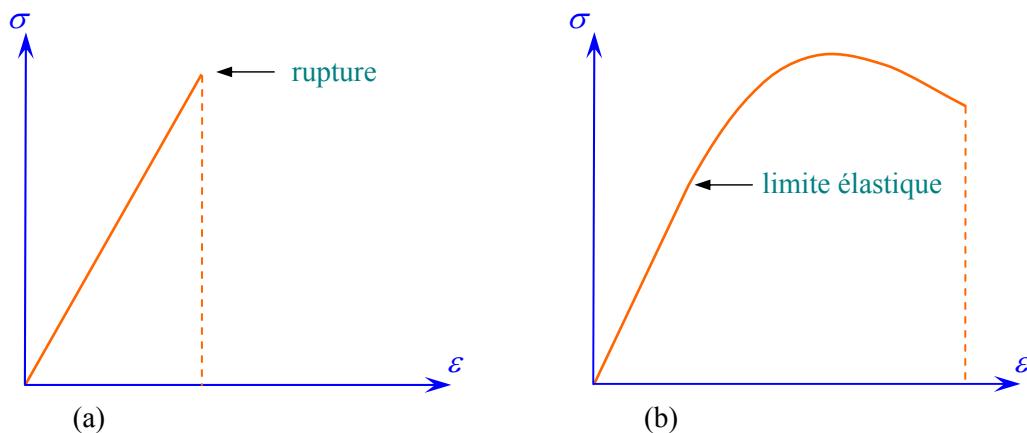


FIGURE 12.23. Comportements fragiles et “ductile” d'un matériau.

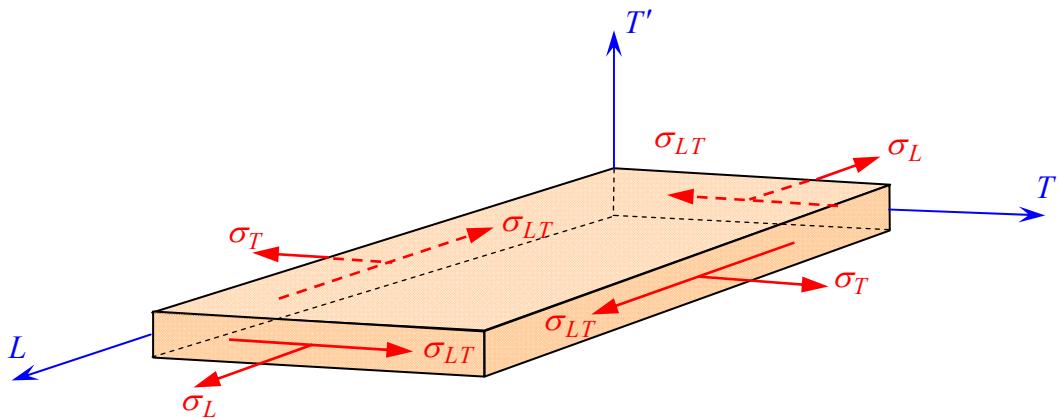


FIGURE 12.24. Contraintes dans les axes des matériaux d'une couche.

$$\begin{aligned} -X_c &< \sigma_L < X_t, \\ -Y_c &< \sigma_T < Y_t, \\ -S &< \sigma_{LT} < S. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Si les six inéquations sont vérifiées, l'état de contraintes limite n'est pas atteint : la rupture de la couche ne se produit pas. Si l'une quelconque des inéquations n'est plus vérifiée, l'état limite est atteint : la rupture se produit suivant le mécanisme correspondant à la contrainte de l'inéquation non vérifiée.

### 12.2.2.2 Ordres de grandeurs des contraintes à la rupture

Les valeurs des contraintes à la rupture sont déterminées dans des essais de traction, de compression et de cisaillement. Dans la pratique, la mise en place de ces essais peut conduire à des difficultés liées à la nature fortement anisotrope des matériaux, en particulier ruptures prématurées des éprouvettes dans un mode différent de celui souhaité. D'autre part, l'essai de cisaillement est un essai complexe à mettre en œuvre. D'autres problèmes sont liés aux modes de fabrication des éprouvettes. Finalement, les valeurs expérimentales fiables disponibles sont peu nombreuses, et le problème de la détermination des contraintes à la rupture reste ouvert. Nous donnons quelques indications dans le cas des composites unidirectionnels.

Dans le cas où l'allongement à la rupture de la matrice est supérieur à celui des fibres (paragraphe 12.1.3), la contrainte à la rupture en traction longitudinale d'un composite unidirectionnel suit la loi des mélanges (12.1), soit :

$$X_t = \sigma_{fu} V_f + (\sigma_m)_{\varepsilon_{fu}} (1 - V_f), \quad (12.7)$$

avec pour des fractions usuelles de fibres :

$$X_t \approx \sigma_{fu} V_f. \quad (12.8)$$

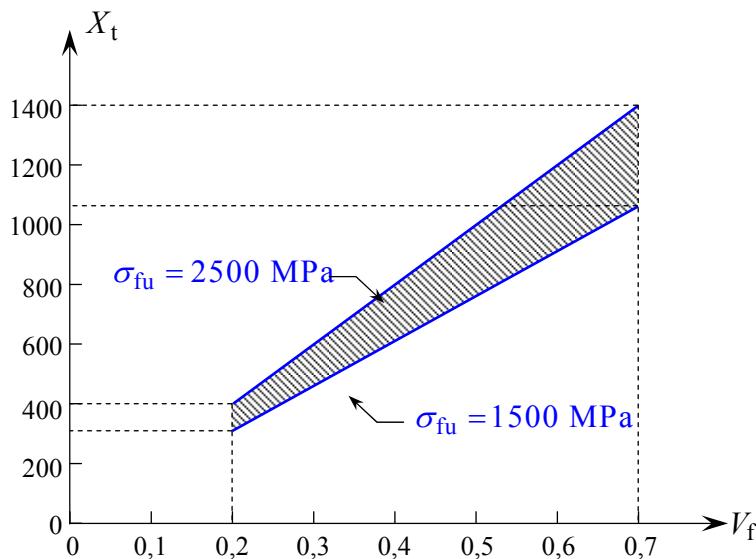


FIGURE 12.25. Contraintes longitudinales à la rupture en traction de composites unidirectionnels à fibres de verre.

Dans la pratique, il est assez difficile de déterminer avec précision les valeurs de  $\sigma_{fu}$ . Par exemple, à la sortie des filières, les fibres de verre E possèdent une contrainte à la rupture de l'ordre de 3 500 MPa. Cette valeur diminue ensuite du fait des manipulations mécaniques et des agressions chimiques, auxquelles les fibres sont soumises jusqu'à leur incorporation dans la matrice. À ce stade, les valeurs des contraintes à la rupture des fibres sont estimées être de l'ordre de 1 500 à 2 000 MPa. Les valeurs mesurées pour les contraintes à la rupture en compression longitudinale dépendent de la nature des fibres. La figure 12.25 donne une estimation des contraintes longitudinales à la rupture en traction de composites unidirectionnels à fibres de verre, pour des fractions volumiques de fibres comprises entre 0,2 et 0,7.

Dans le cas d'un essai de traction transversale sur un composite unidirectionnel, la contrainte à la rupture (paragraphe 12.1.4) correspond au maillon le plus faible : la matrice ou l'interface fibre-matrice. Les valeurs de la contrainte transversale  $Y_t$  sont généralement inférieures à la contrainte à la rupture en traction de la matrice, et varient peu avec la proportion de fibres. Compte tenu des dispersions obtenues dans les essais, il est usuel de considérer que cette valeur est constante et d'adopter une valeur comprise entre 20 et 60 MPa. Par contre, la contrainte transversale  $Y_c$  en compression est plus élevée, de l'ordre de 100 à 150 MPa.

La contrainte à la rupture  $S$  en cisaillement est un paramètre assez difficile à évaluer. Les valeurs expérimentales obtenues montrent que  $S$  ne dépend pratiquement pas de la proportion de fibres et est du même ordre de grandeur que la contrainte à la rupture en cisaillement de la résine. Suivant le type de matrice et la qualité de l'interface fibre-matrice, la contrainte à la rupture en cisaillement est de l'ordre de 40 à 80 MPa.

Le tableau 12.1 donne des exemples de valeurs mesurées sur des composites à matrice époxyde: trois composites unidirectionnels et un composite à tissu équilibré.

L'ensemble des valeurs des contraintes à la rupture rapportées dans le tableau

TABLEAU 12.1. Caractéristiques à la rupture mesurées sur divers composites à matrice époxyde.

	Composites unidirectionnels			Tissu équilibré
Fibres	Verre E	Carbone HR	Kevlar	Carbone
$V_f$	0,60	0,60	0,60	0,40
$X_t$ (MPa)	1400	1380	1400	500
$X_c$ (MPa)	910	1430	280	350
$Y_t$ (MPa)	35	40	15	460
$Y_c$ (MPa)	110	240	50	350
$S$ (MPa)	70	70	35	50

doivent être considérées, comme déjà indiqué, comme des valeurs indicatives dans le cas de composites unidirectionnels. Ces valeurs peuvent être ensuite transposées aux cas de composites à renfort tissu, suivant la constitution du renfort.

### 12.2.2.3 Critères de rupture en-dehors des axes des matériaux

Dans le cas où l'état des contraintes est exprimé dans des axes de référence ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) (figure 12.26), il est nécessaire de se ramener aux axes des matériaux par une rotation d'angle  $\theta$ . Les contraintes exprimées dans les axes des matériaux s'écrivent d'après (5.44) :

$$\begin{aligned}\sigma_L &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_T &= \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_{LT} &= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta),\end{aligned}\quad (12.9)$$

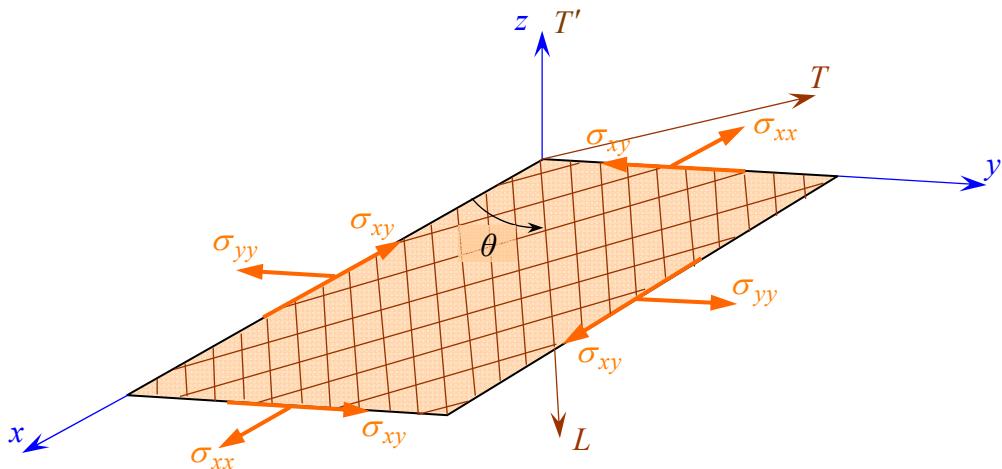


FIGURE 12.26. Couche rapportée à des axes de référence quelconques.

et les critères (12.6) en contraintes maximales s'expriment suivant :

$$\begin{aligned} -X_c &< \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta < X_t, \\ -Y_c &< \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta < Y_t, \\ -S &< (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) < S. \end{aligned} \quad (12.10)$$

### 12.2.2.3 Traction ou compression en-dehors des axes des matériaux

Dans le cas d'une traction ou d'une compression en-dehors des axes des matériaux (figure 12.27), les contraintes (12.9) se réduisent à :

$$\begin{aligned} \sigma_L &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta, \\ \sigma_T &= \sigma_{xx} \sin^2 \theta, \\ \sigma_{LT} &= -\sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (12.11)$$

et les critères en contraintes maximales s'expriment suivant :

$$\begin{aligned} -X_c &< \sigma_{xx} \cos^2 \theta < X_t, \\ -Y_c &< \sigma_{xx} \sin^2 \theta < Y_t, \\ -S &< -\sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta < S. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Ce critère peut être représenté graphiquement en traçant la valeur maximale  $\sigma_{xu}$  de la contrainte  $\sigma_{xx}$  de traction ou compression pour laquelle l'un des critères est atteint, en fonction de l'angle  $\theta$  entre la direction du chargement et les directions du matériau.

Dans un essai de traction, la contrainte de traction  $\sigma_{xu}$  correspond à la plus petite des valeurs :

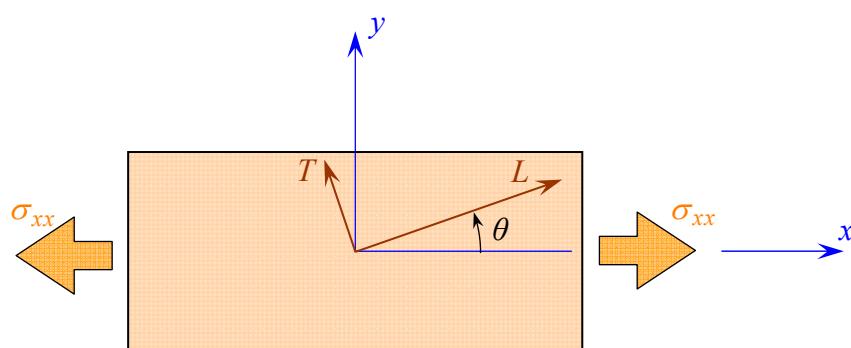


FIGURE 12.27. Traction en-dehors des axes des matériaux.

$$\sigma_{xu} = \frac{X_t}{\cos^2 \theta}, \quad \sigma_{xu} = \frac{Y_t}{\sin^2 \theta}, \quad \sigma_{xu} = \frac{S}{\sin \theta \cos \theta}, \quad (12.13)$$

et dans un essai de compression, la contrainte de compression  $\sigma_{xu}$  correspond à la plus petite des valeurs :

$$\sigma_{xu} = \frac{X_c}{\cos^2 \theta}, \quad \sigma_{xu} = \frac{Y_c}{\sin^2 \theta}, \quad \sigma_{xu} = \frac{S}{\sin \theta \cos \theta}, \quad (12.14)$$

la valeur  $\sigma_{xu}$  étant alors la détermination positive de la contrainte.

La figure 12.28 montre les résultats obtenus dans le cas d'un composite unidirectionnel à fibres de verre E, dont les caractéristiques à la rupture sont données dans le tableau 12.1. L'échelle adoptée pour les valeurs de  $\sigma_{xu}$  est une échelle logarithmique, de manière à dilater l'échelle pour les faibles valeurs. Nous observons une décroissance très rapide de  $\sigma_{xu}$  avec l'angle  $\theta$ . Dans un essai de traction, la valeur de  $\sigma_{xu} = 1\ 400 MPa pour des angles voisins de } 0^\circ$  n'est plus que de l'ordre de 200 MPa pour un angle de  $25^\circ$ .

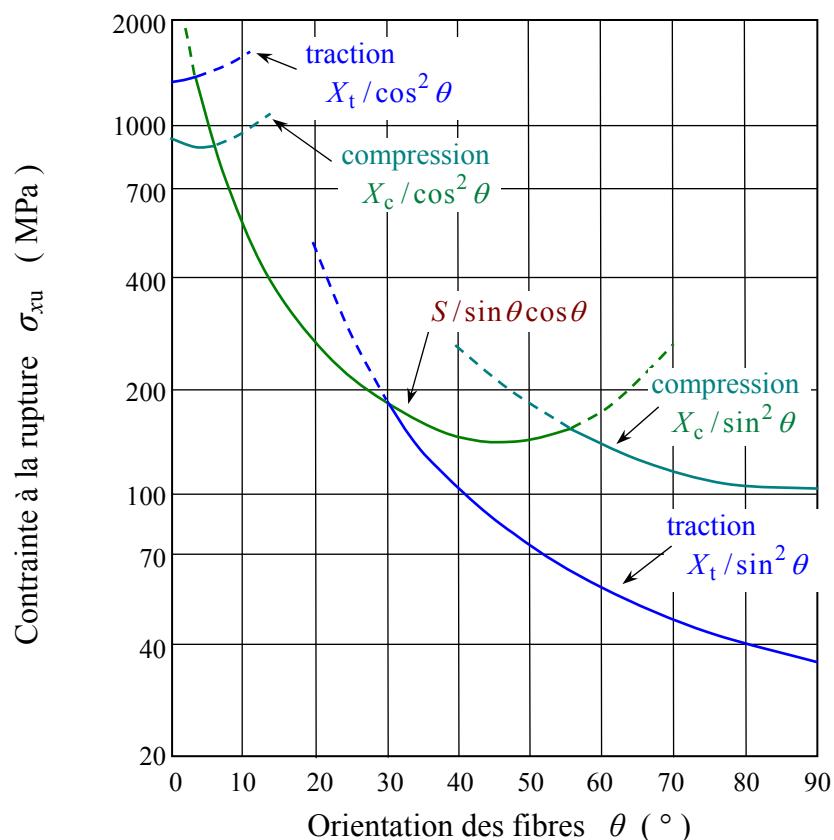


FIGURE 12.28. Critère de la contrainte maximale dans le cas d'un composite unidirectionnel à fibres de verre.

## 12.2.3 Critères en déformations maximales

### 12.2.3.1 Critère dans les axes des matériaux

Les critères en déformations maximales sont transposés des critères en contraintes maximales, les déformations étant bornées, au lieu des contraintes. Les critères en déformations font intervenir :

$X_{\varepsilon_t}$  ( $X_{\varepsilon_c}$ ) : la déformation à la rupture en traction (ou compression) suivant l'axe longitudinal,

$Y_{\varepsilon_t}$  ( $Y_{\varepsilon_c}$ ) : la déformation à la rupture en traction (ou compression) suivant l'axe transversal,

$S_\varepsilon$  : la déformation à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche.

La résistance mécanique est alors considérée comme étant atteinte, lorsque l'une des déformations principales atteint la déformation à la rupture correspondante. Les critères en déformations maximales s'écrivent donc sous la forme :

$$\begin{aligned} -X_{\varepsilon_c} &< \varepsilon_L < X_{\varepsilon_t}, \\ -Y_{\varepsilon_c} &< \varepsilon_T < Y_{\varepsilon_t}, \\ -S_\varepsilon &< \gamma_{LT} < S_\varepsilon. \end{aligned} \quad (12.15)$$

### 12.2.3.2 Traction ou compression en-dehors des axes des matériaux

Dans le cas d'une traction ou compression en-dehors des axes des matériaux (figure 12.27), les contraintes dans les axes sont données par la relation (12.11). Les déformations dans les axes sont, dans le cas d'un schéma de contraintes planes :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}. \quad (12.16)$$

Soit, en associant les relations (12.11) et (12.16) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_L &= (S_{11} \cos^2 \theta + S_{12} \sin^2 \theta) \sigma_{xx}, \\ \varepsilon_T &= (S_{12} \sin^2 \theta + S_{22} \cos^2 \theta) \sigma_{xx}, \\ \gamma_{LT} &= S_{66} \sin \theta \cos \theta \sigma_{xx}. \end{aligned} \quad (12.17)$$

Les constantes de souplesse  $S_{ij}$  s'expriment en fonction des modules de l'ingénieur, déterminés dans les axes des matériaux :  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $\nu_{TL}$  et  $G_{LT}$ , suivant les relations (9.31) dans le cas de composites unidirectionnels et suivant les relations (10.9), (10.13) et (10.20) dans le cas de composites orthotropes. Les relations (12.17), exprimant les déformations, sont alors transformées suivant :

$$\begin{aligned}\varepsilon_L &= \frac{1}{E_L} (\cos^2 \theta - \nu_{LT} \sin^2 \theta) \sigma_{xx}, \\ \varepsilon_T &= \frac{1}{E_T} (\sin^2 \theta - \nu_{TL} \cos^2 \theta) \sigma_{xx}, \\ \gamma_{LT} &= \frac{1}{G_{LT}} \sin \theta \cos \theta \sigma_{xx}.\end{aligned}\quad (12.18)$$

Les critères en déformations maximales doivent conduire à des valeurs identiques à celles trouvées avec le critère de contrainte maximale dans le cas d'une traction (ou compression) longitudinale :  $\theta = 0^\circ$  et dans le cas d'une traction (ou compression) transversale :  $\theta = 90^\circ$ . Ceci implique que :

$$\begin{aligned}X_{\varepsilon t} &= \frac{X_t}{E_L}, & X_{\varepsilon c} &= \frac{X_c}{E_L}, \\ Y_{\varepsilon t} &= \frac{Y_t}{E_T}, & Y_{\varepsilon c} &= \frac{Y_c}{E_T}.\end{aligned}\quad (12.19)$$

D'autre part, l'identité du critère de rupture en cisaillement dans les deux cas conduit à :

$$S_\varepsilon = \frac{S}{G_{LT}}. \quad (12.20)$$

Il en résulte que les critères en déformations maximales (12.15) peuvent être réécrits suivant :

$$\begin{aligned}\frac{-X_c}{\cos^2 \theta - \nu_{LT} \sin^2 \theta} &< \sigma_{xx} < \frac{X_t}{\cos^2 \theta - \nu_{LT} \sin^2 \theta}, \\ \frac{-Y_c}{\sin^2 \theta - \nu_{LT} \cos^2 \theta} &< \sigma_{xx} < \frac{Y_t}{\sin^2 \theta - \nu_{LT} \cos^2 \theta}, \\ \frac{-S}{\sin \theta \cos \theta} &< \sigma_{xx} < \frac{S}{\sin \theta \cos \theta}.\end{aligned}\quad (12.21)$$

En comparant ces expressions aux expressions (12.12) obtenues dans le cas des critères en contraintes maximales, nous constatons que les deux critères diffèrent simplement par l'introduction dans les critères en déformations maximales des termes fonctions des coefficients de Poisson  $\nu_{LT}$  et  $\nu_{TL}$ . Ces termes modifient assez peu dans la pratique les résultats numériques.

Les contraintes limites sont modifiées de la même manière. Dans un essai de traction, la contrainte à la rupture  $\sigma_{xu}$  correspond à la plus petite des valeurs :

$$\begin{aligned}\sigma_{xu} &= \frac{X_t}{\cos^2 \theta - \nu_{LT} \sin^2 \theta}, \\ \sigma_{xu} &= \frac{Y_t}{\sin^2 \theta - \nu_{LT} \cos^2 \theta}, \\ \sigma_{xu} &= \frac{S}{\sin \theta \cos \theta},\end{aligned}\quad (12.22)$$

et dans un essai de compression, la détermination positive  $\sigma_{xu}$  de la contrainte à la rupture correspond à la plus petite des valeurs :

$$\begin{aligned}\sigma_{xu} &= \frac{X_c}{\cos^2 \theta - \nu_{LT} \sin^2 \theta}, \\ \sigma_{xu} &= \frac{Y_c}{\sin^2 \theta - \nu_{TL} \cos^2 \theta}, \\ \sigma_{xu} &= \frac{S}{\sin \theta \cos \theta}.\end{aligned}\quad (12.23)$$

Comme dans le cas des critères en contraintes maximales, il est possible de tracer  $\sigma_{xu}$  en fonction de l'angle  $\theta$ . Les courbes obtenues diffèrent assez peu de celles obtenues (figure 12.28) avec les critères en contraintes maximales.

### 12.2.3.3 Comparaison entre les critères en contraintes et en déformations maximales

Les résultats du paragraphe précédent montrent une similitude entre les deux critères en contraintes maximales et en déformations maximales. De manière à approfondir la comparaison entre ces deux critères, nous considérons l'exemple d'une couche sollicitée dans un état de contraintes planes (figure 12.29) tel que :

$$\sigma_L = 12\sigma_T \quad \text{et} \quad \sigma_{LT} = 0. \quad (12.24)$$

La couche est constituée d'un composite unidirectionnel à fibres de verre E dont les caractéristiques à la rupture sont données dans le tableau 12.1 et dont les modules d'élasticité sont reportés dans le tableau 9.2. Soit :

$$\begin{aligned}X_t &= 1\ 400 \text{ MPa}, & Y_t &= 35 \text{ MPa}, & S &= 70 \text{ MPa}, \\ E_L &= 46 \text{ GPa}, & E_T &= 10 \text{ GPa}, & G_{LT} &= 4,6 \text{ GPa}, & \nu_{LT} &= 0,31.\end{aligned}$$

Nous cherchons les valeurs de  $\sigma_L$  et  $\sigma_T$  ( $\sigma_L = 12\sigma_T$ ) pour lesquelles la rupture est atteinte.

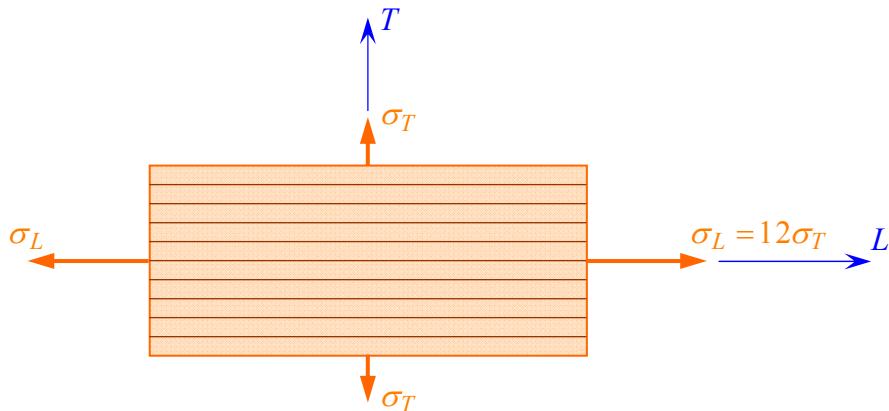


FIGURE 12.29. Couche sollicitée suivant un état de contraintes planes.

## 1. Utilisation des critères en contraintes maximales

Les critères (12.6) en contraintes maximales s'écrivent ici :

$$\sigma_L < X_t, \quad \sigma_T < Y_t.$$

Soit :

$$\begin{cases} 12\sigma_T < X_t \\ \sigma_T < Y_t, \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \sigma_T < \frac{1}{12}X_t = 117 \text{ MPa} \\ \sigma_T < Y_t = 35 \text{ MPa}. \end{cases}$$

La valeur de la contrainte limite est donnée par la plus petite des deux valeurs. Il en résulte que la rupture est atteinte par rupture transversale. L'état des contraintes est alors :

$$\begin{aligned} \sigma_L &= 12 \times 35 = 420 \text{ MPa}, \\ \sigma_T &= 35 \text{ MPa}. \end{aligned} \tag{12.25}$$

## 2. Utilisation des critères en déformations maximales

D'après (12.16), les déformations principales s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_L &= S_{11}\sigma_L + S_{12}\sigma_T = \frac{1}{E_L}(\sigma_L - \nu_{LT}\sigma_T), \\ \varepsilon_T &= S_{12}\sigma_L + S_{22}\sigma_T = \frac{1}{E_T}(-\nu_{TL}\sigma_L + \sigma_T). \end{aligned} \tag{12.26}$$

En admettant que le comportement du matériau est linéaire jusqu'à la rupture, les déformations à la rupture sont exprimées suivant les expressions (12.19) et les critères (12.15) en déformations maximales s'écrivent ici :

$$\begin{aligned} \sigma_L - \nu_{LT}\sigma_T &< X_t, \\ -\nu_{TL}\sigma_L + \sigma_T &< Y_t. \end{aligned} \tag{12.27}$$

Soit, puisque  $\sigma_L = 12\sigma_T$  :

$$\begin{aligned} \sigma_L &< \frac{X_t}{12 - \nu_{LT}} = 120 \text{ MPa}, \\ \sigma_T &< \frac{Y_t}{1 - 12\nu_{TL}} = 183 \text{ MPa}, \end{aligned} \tag{12.28}$$

en tenant compte de l'expression (9.27) pour déterminer le coefficient de Poisson  $\nu_{TL}$  en fonction des autres modules. La valeur de la contrainte limite est donnée par la plus faible des deux valeurs. Il en résulte que la rupture est atteinte par rupture longitudinale. L'état de contrainte est alors :

$$\sigma_L = 1440 \text{ MPa}, \quad \sigma_T = 120 \text{ MPa}. \tag{12.29}$$

Les valeurs obtenues en (12.25) et (12.29) mettent en évidence les résultats contradictoires auxquels aboutissent les deux théories similaires en apparence : les valeurs diffèrent d'un facteur 3,43 et le mode de rupture est inversé : rupture longitudinale dans un cas, transversale dans l'autre.

Cette contradiction réside en fait dans l'abus fait pour établir la relation entre les valeurs des contraintes maximales et des déformations maximales. Dans la pratique, ces valeurs devraient être déterminées dans le cas respectivement de contraintes planes et de déformations planes. Les critères respectifs qui en seraient alors déduits ne pourraient s'appliquer qu'à ces schémas. Dans ce cadre, les relations entre contraintes et déformations maximales seraient plus complexes.

## 12.2.4 Critères interactifs

### 12.2.4.1 Introduction

Les critères en contraintes maximales et en déformations maximales ne permettent pas de rendre compte de l'ensemble des résultats expérimentaux. D'autre part, ces critères excluent l'existence d'interactions entre les contraintes ou déformations dans les axes des matériaux : les mécanismes de rupture longitudinale, transversale ou en cisaillement sont supposés se produire indépendamment.

Des *critères interactifs* ont alors été recherchés en étendant aux matériaux orthotropes le critère de Von Mises, utilisé pour les matériaux isotropes. Le critère de Von Mises est relié à l'énergie de déformation emmagasinée par unité de volume du matériau déformé. C'est la raison pour laquelle ces critères interactifs sont parfois appelés *critères énergétiques*. Toutefois, dans le cas de matériaux orthotropes, ces critères ne sont plus reliés exclusivement à l'énergie de déformation.

### 12.2.4.2 Critère de Hill

Un des premiers critères interactifs de rupture appliqués aux matériaux anisotropes a été introduit par R. Hill [17]. Ce critère peut être formulé en disant que l'état limite de contraintes d'un matériau anisotrope n'est pas atteint tant que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} F(\sigma_T - \sigma_{T'})^2 + G(\sigma_{T'} - \sigma_L)^2 + H(\sigma_L - \sigma_T)^2 \\ + 2L\sigma_{TT'}^2 + 2M\sigma_{LT'}^2 + 2N\sigma_{LT}^2 < 1. \end{aligned} \quad (12.30)$$

La rupture du matériau se produit donc lorsque l'égalité est vérifiée, soit :

$$\begin{aligned} F(\sigma_T - \sigma_{T'})^2 + G(\sigma_{T'} - \sigma_L)^2 + H(\sigma_L - \sigma_T)^2 \\ + 2L\sigma_{TT'}^2 + 2M\sigma_{LT'}^2 + 2N\sigma_{LT}^2 = 1. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Cette égalité constitue le critère de Hill, rapporté aux axes principaux ( $L, T, T'$ ) du matériau. Il peut également être mis sous une autre forme suivant :

$$\begin{aligned} (G+H)\sigma_L^2 + (F+H)\sigma_T^2 + (F+G)\sigma_{T'}^2 - 2H\sigma_L\sigma_T - 2G\sigma_L\sigma_{T'} \\ - 2F\sigma_T\sigma_{T'} + 2L\sigma_{TT'}^2 + 2M\sigma_{LT'}^2 + 2N\sigma_{LT}^2 = 1. \end{aligned} \quad (12.32)$$

Les paramètres  $F, G, H, L, M$  et  $N$  sont des paramètres caractéristiques du matériau considéré, qui sont reliés aux contraintes à la rupture  $X, Y$  et  $S$  du

matériau suivant des relations que nous établissons ci-après.

Dans le cas d'un essai de traction (ou compression) dans la direction  $L$ , le critère de Hill se réduit à :

$$G + H = \frac{1}{X^2}, \quad (12.33)$$

où  $X$  est la contrainte à la rupture en traction (ou compression) dans la direction  $L$ . De même, on trouve :

$$F + H = \frac{1}{Y^2}, \quad (12.34)$$

$$F + G = \frac{1}{Z^2}, \quad (12.35)$$

où  $Y$  et  $Z$  sont les contraintes à la rupture en traction (ou en compression) dans les directions  $T$  et  $T'$ .

Dans le cas d'un essai de cisaillement dans le plan  $(L, T)$ , le critère de Hill se réduit à :

$$2N = \frac{1}{S_{LT}^2}, \quad (12.36)$$

où  $S_{LT}$  est la contrainte de rupture en cisaillement dans le plan  $(L, T)$ . De même :

$$2M = \frac{1}{S_{LT'}^2}, \quad (12.37)$$

$$2L = \frac{1}{S_{TT'}^2}, \quad (12.38)$$

où  $S_{LT'}$  et  $S_{TT'}$  sont les contraintes de rupture en cisaillement, respectivement dans les plans  $(L, T')$  et  $(T, T')$ .

Les expressions (12.33) à (12.38) permettent de déterminer les paramètres de rupture  $F, G, L, M, N$  et d'écrire le critère de Hill sous la forme :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_L}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{T'}}{Z}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_L\sigma_T \\ & - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2}\right)\sigma_L\sigma_{T'} - \left(\frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}\right)\sigma_T\sigma_{T'} \\ & + \left(\frac{\sigma_{LT}}{S_{LT}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{LT'}}{S_{LT'}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{TT'}}{S_{TT'}}\right)^2 = 1. \end{aligned} \quad (12.39)$$

Il est à noter que le critère de Hill ne prend pas en compte la différence du comportement des matériaux en traction et compression.

Dans le cas d'un état de contraintes planes dans le plan  $(L, T)$  de la couche de matériau composite :  $\sigma_{T'} = \sigma_{LT'} = \sigma_{TT'} = 0$ , le critère de Hill se simplifie suivant :

$$\left(\frac{\sigma_L}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{Y}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_L\sigma_T + \left(\frac{\sigma_{LT}}{S_{LT}}\right)^2 = 1. \quad (12.40)$$

### 12.2.4.3 Critère de Tsai-Hill

Le critère de rupture précédent (12.40) en contraintes planes a été simplifié par V.D. Azzi et S.W. Tsai [18] dans le cas de matériaux composites unidirectionnels. En effet, dans ce cas :  $Z = Y$ , et le critère (12.40) s'écrit :

$$\left(\frac{\sigma_L}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_L \sigma_T}{X^2} + \left(\frac{\sigma_{LT}}{S_{LT}}\right)^2 = 1. \quad (12.41)$$

Ce critère est généralement connu sous le nom de critère de Tsai-Hill.

Dans le cas d'une traction ou d'une compression en-dehors des axes des matériaux (figure 12.27), les contraintes dans les axes des matériaux sont données par les expressions (12.11). En reportant ces expressions dans la relation (12.41), le critère de Tsai-Hill s'écrit :

$$\frac{\cos^4 \theta}{X^2} + \left( \frac{1}{S_{LT}^2} - \frac{1}{X^2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{Y^2} = \frac{1}{\sigma_{xx}^2}. \quad (12.42)$$

La figure 12.30 montre les résultats obtenus avec le critère de Tsai-Hill dans le cas d'un composite unidirectionnel à fibres de verre E, de mêmes caractéristiques que dans le cas de la figure 12.28. Généralement un bon accord est observé entre ces valeurs et les valeurs obtenues expérimentalement pour ce type de composite.

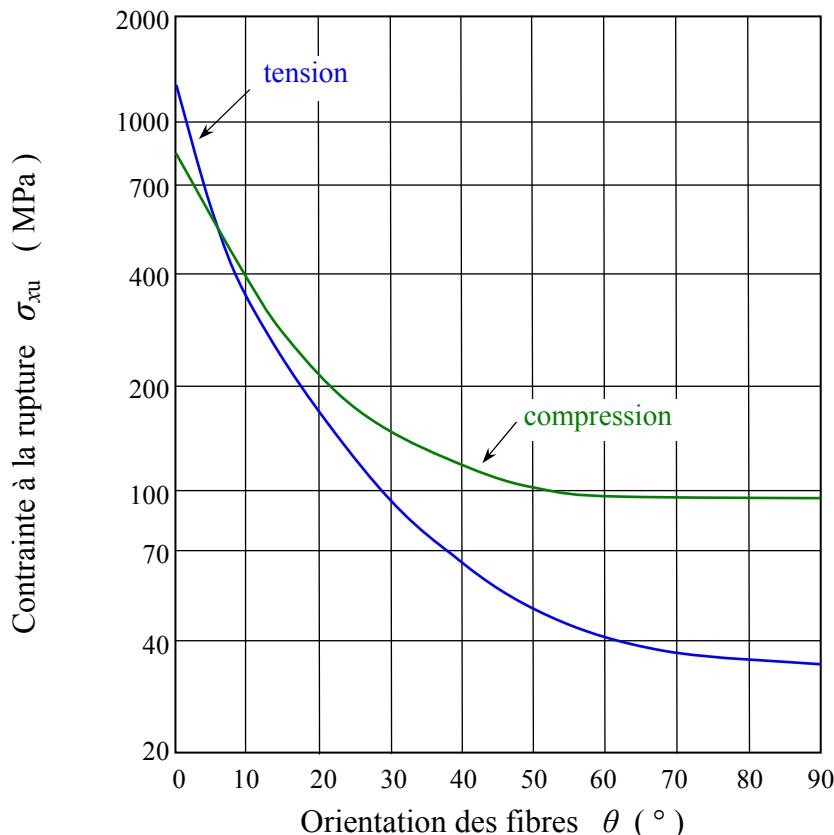


FIGURE 12.30. Critère de Tsai-Hill dans le cas d'un composite unidirectionnel à fibres de verre.

### 12.2.4.4 Critère de Hoffman

Une généralisation du critère de Hill, tenant compte de la différence du comportement des matériaux en traction et en compression, a été formulée par O. Hoffman [19]. Le critère de Hoffman admet que la rupture du matériau se produit lorsque l'égalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} C_1(\sigma_T - \sigma_{T'})^2 + C_2(\sigma_{T'} - \sigma_L)^2 + C_3(\sigma_L - \sigma_T)^2 \\ + C_4\sigma_L + C_5\sigma_T + C_6\sigma_{T'} + C_7\sigma_{TT'}^2 + C_8\sigma_{LT'}^2 + C_9\sigma_{LT}^2 = 1. \end{aligned} \quad (12.43)$$

Les constantes  $C_1$  à  $C_9$  sont caractéristiques du matériau et reliées aux contraintes à la rupture du matériau par les relations :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{Z_t Z_c} - \frac{1}{X_t X_c} \right), \\ C_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Z_t Z_c} + \frac{1}{X_t X_c} - \frac{1}{Y_t Y_c} \right), \\ C_3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} - \frac{1}{Z_t Z_c} \right), \\ C_4 &= \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, & C_7 &= \frac{1}{S_{TT'}^2}, \\ C_5 &= \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}, & C_8 &= \frac{1}{S_{LT'}^2}, \\ C_6 &= \frac{1}{Z_t} - \frac{1}{Z_c}, & C_9 &= \frac{1}{S_{LT}^2}. \end{aligned} \quad (12.44)$$

Dans le cas d'un état de contraintes planes dans le plan ( $L, T$ ), le critère de Hoffman se réduit à :

$$\frac{\sigma_L^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_T^2}{Y_t Y_c} - \frac{\sigma_L \sigma_T}{X_t X_c} + \frac{X_c - X_t}{X_c X_t} \sigma_L + \frac{Y_c - Y_t}{Y_c Y_t} \sigma_T + \frac{\sigma_{LT}^2}{S_{LT}^2} = 1. \quad (12.45)$$

### 12.2.4.5 Théorie générale de Tsai-Wu

#### 12.2.4.5.1 Formulation

Les critères précédents suffisent généralement pour décrire les divers résultats expérimentaux observés. Toutefois, une des façons d'améliorer la corrélation entre résultats expérimentaux et théoriques est d'accroître le nombre de paramètres des équations théoriques. Ce fait, associé à la possibilité de représenter les critères de rupture sous forme tensorielle, a conduit S.W. Tsai et E.M. Wu [20] à admettre que la rupture d'un matériau anisotrope est atteinte lorsque l'égalité suivante est vérifiée :

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, \quad (12.46)$$

où les constantes  $F_i$  et  $F_{ij}$  sont les composantes de deux tenseurs respectivement de rang 2 et de rang 4. La notation contractée usuelle est utilisée dans cette relation pour les contraintes rapportées aux axes des matériaux :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11} = \sigma_L, & \sigma_2 &= \sigma_{22} = \sigma_T, & \sigma_3 &= \sigma_{33} = \sigma_{T'}, \\ \sigma_4 &= \sigma_{23} = \sigma_{TT'}, & \sigma_5 &= \sigma_{13} = \sigma_{LT'}, & \sigma_6 &= \sigma_{12} = \sigma_{LT}. \end{aligned}$$

L'équation (12.46) s'écrit sous forme développée suivant :

$$\begin{aligned} F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_3 \sigma_3 + F_4 \sigma_4 + F_5 \sigma_5 + F_6 \sigma_6 \\ + F_{11} \sigma_1^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2F_{13} \sigma_1 \sigma_3 + 2F_{14} \sigma_1 \sigma_4 + 2F_{15} \sigma_1 \sigma_5 + 2F_{16} \sigma_1 \sigma_6 \\ + F_{22} \sigma_2^2 + 2F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 2F_{24} \sigma_2 \sigma_4 + 2F_{25} \sigma_2 \sigma_5 + 2F_{26} \sigma_2 \sigma_6 \\ + F_{33} \sigma_3^2 + 2F_{34} \sigma_3 \sigma_4 + 2F_{35} \sigma_3 \sigma_5 + 2F_{36} \sigma_3 \sigma_6 \\ + F_{44} \sigma_4^2 + 2F_{45} \sigma_4 \sigma_5 + 2F_{46} \sigma_4 \sigma_6 \\ + F_{55} \sigma_5^2 + 2F_{56} \sigma_5 \sigma_6 \\ + F_{66} \sigma_6^2 = 1. \end{aligned} \quad (12.47)$$

Les termes linéaires  $F_i$  prennent en compte la différence éventuelle du comportement du matériau en traction et en compression. Les termes quadratiques  $F_{ij}$  définissent un ellipsoïde dans l'espace des contraintes et tiennent compte des interactions entre les contraintes  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$ .

L'intérêt de la formulation développée par Tsai-Wu réside dans :

1. l'invariance de la forme de la relation (12.46) dans tout changement de base ;
2. la transformation du critère suivant les lois de transformation des tenseurs  $\sigma_i$ ,  $\sigma_{ij}$  ou  $F_i$ ,  $F_{ij}$  ;
3. les propriétés de symétrie des tenseurs  $F_i$ ,  $F_{ij}$  similaires à celles des constantes d'élasticité.

#### 12.2.4.5.2 Expression des constantes

Nous nous intéressons, dans ce paragraphe, au cas d'un matériau composite orthotrope soumis à un état de contraintes planes dans le plan  $(1, 2) = (L, T)$ . La relation (12.47) s'écrit alors :

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1, \quad (12.48)$$

ou

$$F_1 \sigma_L + F_2 \sigma_T + F_6 \sigma_{LT} + F_{11} \sigma_L^2 + F_{22} \sigma_T^2 + F_{66} \sigma_{LT}^2 + 2F_{12} \sigma_L \sigma_T = 1.$$

Les paramètres  $F_i$  et  $F_{ij}$  peuvent être exprimés à l'aide des contraintes à la rupture, mesurées dans divers essais.

Dans le cas d'un essai de traction suivant la direction  $L$ , la contrainte à la rupture  $X_t$  est telle que :

$$F_l X_t + F_{l1} X_t^2 = 1, \quad (12.49)$$

et dans un essai de compression :

$$F_l X_c + F_{l1} X_c^2 = 1. \quad (12.50)$$

De ces deux relations, nous tirons :

$$\begin{aligned} F_l &= \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, \\ F_{l1} &= \frac{1}{X_t X_c}. \end{aligned} \quad (12.51)$$

Par analogie, nous avons de même :

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}, \\ F_{22} &= \frac{1}{Y_t Y_c}. \end{aligned} \quad (12.52)$$

Dans le cas d'un essai de cisaillement dans le plan ( $L, T$ ) (figure 12.31a), la contrainte à la rupture  $S_{LT}^+$  est telle que :

$$F_6 S_{LT}^+ + F_{66} S_{LT}^{+2} = 1. \quad (12.53)$$

En inversant le sens des contraintes (figure 12.31b), la contrainte à la rupture  $S_{LT}^-$  est telle que :

$$F_6 S_{LT}^- + F_{66} S_{LT}^{-2} = 1. \quad (12.54)$$

Ces deux relations conduisent à :

$$F_6 = \frac{1}{S_{LT}^+} - \frac{1}{S_{LT}^-}, \quad (12.55)$$

$$F_{66} = \frac{1}{S_{LT}^+ S_{LT}^-}. \quad (12.56)$$

La contrainte à la rupture étant indépendante du signe de la contrainte de cisaillement, nous avons :

$$S_{LT}^+ = S_{LT}^- = S_{LT}. \quad (12.57)$$

Il en résulte que dans le cas de matériaux orthotropes :

$$F_6 = 0, \quad (12.58)$$

$$F_{66} = \frac{1}{S_{LT}^2}. \quad (12.59)$$

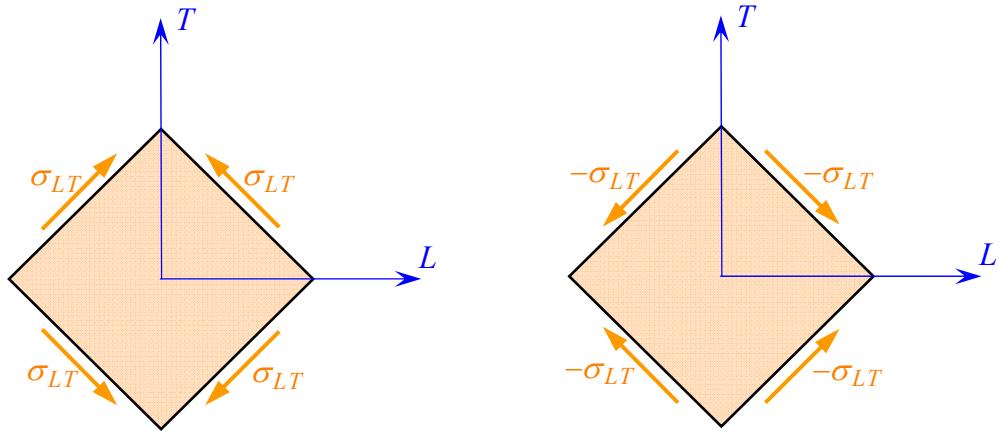


FIGURE 12.31. Essais de cisaillement. (b)

Il reste à déterminer le paramètre de couplage  $F_{12}$ . Ce paramètre peut être déterminé dans un essai biaxial, par exemple une traction biaxiale. Un tel essai est effectué en exerçant la même contrainte dans les directions 1 et 2 du matériau. Les contraintes sont alors :  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ , les autres contraintes étant nulles. Le critère (12.48) s'écrit :

$$(F_1 + F_2)\sigma + (F_{11} + F_{22} + 2F_{12})\sigma^2 = 1. \quad (12.60)$$

D'où l'expression du paramètre d'interaction :

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma + \left( \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} \right) \sigma^2 \right]. \quad (12.61)$$

La valeur de  $F_{12}$  correspond à la valeur  $\sigma$  de la contrainte mesurée lors de la rupture dans l'essai de traction biaxiale.

Dans la pratique, le coefficient d'interaction  $F_{12}$  peut également être déterminé dans un essai de traction (ou compression) à 45° des axes du matériau orthotrope. Dans ce cas, les contraintes dans les axes du matériau sont :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_6 = \frac{\sigma_{45}}{2}, \quad \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0, \quad (12.62)$$

où  $\sigma_{45}$  est la contrainte de traction exercée. Le critère (12.48) s'écrit dans ce cas :

$$\cdot \quad (12.63)$$

D'où l'expression du paramètre  $F_{12}$  obtenue dans cet essai :

$$F_{12} = \frac{2}{\sigma_{45}^2} \left[ 1 - \frac{\sigma_{45}}{2} \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) - \frac{\sigma_{45}^2}{4} \left( \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{S_{LT}^2} \right) \right]. \quad (12.64)$$

La valeur de  $F_{12}$  correspond à la valeur de  $\sigma_{45}$  mesurée lors de la rupture dans un essai de traction à 45°.

#### 12.2.4.5.3 Critère de Tsai-Wu en contraintes planes

En tenant compte des résultats précédents, le critère de Tsai-Wu (12.48), dans un état de contraintes planes, s'écrit sous la forme :

$$\left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right) \sigma_L + \left( \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma_T + \frac{\sigma_L^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_T^2}{Y_t Y_c} + \frac{\sigma_{LT}^2}{S_{LT}^2} + 2F_{12}^* \frac{\sigma_L \sigma_T}{X_t X_c} = 1, \quad (12.65)$$

en introduisant le coefficient de couplage  $F_{12}^*$ , exprimé suivant :

$$F_{12}^* = \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 1 - \left[ X_c - X_t + \frac{X_t X_c}{Y_t Y_c} (Y_c - Y_t) \right] \sigma + \left( 1 + \frac{X_t X_c}{Y_t Y_c} \right) \sigma^2 \right\}. \quad (12.66)$$

ou

$$F_{12}^* = \frac{2}{\sigma_{45}^2} \left\{ 1 - \left[ X_c - X_t + \frac{X_t X_c}{Y_t Y_c} (Y_c - Y_t) \right] \frac{\sigma_{45}}{2} + \left( 1 + \frac{X_t X_c}{Y_t Y_c} + \frac{X_t X_c}{S_{LT}^2} \right) \frac{\sigma_{45}^2}{4} \right\}, \quad (12.67)$$

où  $\sigma$  et  $\sigma_{45}$  sont les contraintes à la rupture déterminées, respectivement, dans un essai biaxial et dans une traction à 45°. Bien souvent, le coefficient de couplage  $F_{12}^*$  est considéré comme un coefficient empirique, ajusté en fonction des résultats expérimentaux.

Dans le cas où le coefficient de couplage est pris égal à  $-\frac{1}{2}$  :

$$F_{12}^* = -\frac{1}{2}, \quad (12.68)$$

le critère de Tsai-Wu (12.65) en contraintes planes s'écrit :

$$\left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right) \sigma_L + \left( \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma_T + \frac{\sigma_L^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_T^2}{Y_t Y_c} + \frac{\sigma_{LT}^2}{S_{LT}^2} - \frac{\sigma_L \sigma_T}{X_t X_c} = 1. \quad (12.69)$$

Nous retrouvons le critère de Hoffman (12.45) en contraintes planes.

Si, de plus, les contraintes à la rupture en traction et en compression sont identiques :

$$X_t = X_c = X, \quad Y_t = Y_c = Y, \quad (12.70)$$

le critère (12.69) s'écrit :

$$\left(\frac{\sigma_L}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{LT}}{S_{LT}}\right)^2 - \frac{\sigma_L \sigma_T}{X^2} = 1. \quad (12.71)$$

Le critère est alors confondu avec le critère de Tsai-Hill (12.41).

## EXERCICES

**12.1** On considère une couche orthotrope dont les caractéristiques à la rupture sont données par :

$$\begin{aligned} X_t &= 1\,500 \text{ MPa}, & X_c &= 1\,700 \text{ MPa}, \\ Y_t &= 90 \text{ MPa}, & Y_c &= 250 \text{ MPa}, & S &= 80 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Cette couche est soumise à un état de traction dans la direction  $\theta$ .

Tracer (en coordonnées cartésiennes pour  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , puis en coordonnées polaires pour  $\theta$  variant de 0 à  $2\pi$ ) la contrainte à la rupture  $\sigma_{xu}$  en fonction de l'angle  $\theta$  de traction, en utilisant les critères en contraintes maximales.

**12.2** Reprendre l'exercice précédent, en utilisant le critère de Hoffman. Comparer les résultats obtenus.

**12.3** La couche orthotrope de l'exercice 12.1 est maintenant soumise à un état de cisaillement pur dans la direction  $\theta$ .

Tracer (en coordonnées cartésiennes, puis en coordonnées polaires) la contrainte à la rupture  $\sigma_{xyu}$  en fonction de l'angle  $\theta$  de cisaillement, en utilisant les critères en contraintes maximales.

**12.4** Reprendre l'exercice précédent, en utilisant le critère de Hoffman. Comparer les résultats.

## Partie IV

# Comportement Mécanique des Stratifiés et des Sandwiches

Cette partie développe les éléments fondamentaux de la théorie des stratifiés et des plaques sandwiches. Les hypothèses générales de la théorie des stratifiés sont d'abord introduites dans le chapitre 13. La théorie classique des stratifiés est ensuite développée dans le chapitre 14. L'étude de l'effet de la séquence d'empilement des couches du stratifié est analysée dans le chapitre 15. Cette analyse nous permet de comprendre les phénomènes de couplage entre les comportements en membrane, flexion et torsion. La théorie classique des stratifiés est ensuite appliquée à l'évaluation du comportement élastique des couches avec renforts tissus ou mats. Le chapitre 16 établit les équations fondamentales de la théorie des stratifiés ainsi que la formulation énergétique. La prise en compte des effets du cisaillement transverse dans la théorie des stratifiés est ensuite développée au chapitre 17. Enfin, le chapitre 18 présente la théorie des plaques sandwiches qui est basée sur la théorie des stratifiés prenant en compte les effets du cisaillement transverse.



## CHAPITRE 13

# Généralités sur la Théorie des Stratifiés

## 13.1 INTRODUCTION

### 13.1.1 Architecture

Au chapitre 3, nous avons mis en évidence l'architecture des stratifiés qui résulte de la conception des pièces en matériaux composites :

- suivant des plaques ou coques,
- par stratification de couches successives.

Ce mode de conception justifie l'importance des plaques dans l'analyse des structures en composites. En effet, outre les structures de type plaques, l'analyse des plaques permet également, dans le cadre de calcul par éléments finis, de modéliser les structures coques.

D'une manière générale, une plaque est un solide limité par deux plans parallèles (figure 13.1), dont la dimension transverse est petite en comparaison des deux autres dimensions. Il est alors possible de définir un plan de référence entre les deux plans extrêmes qui est pris comme plan  $Oxy$ . L'axe  $\overrightarrow{Oz}$  correspond à la direction suivant l'épaisseur.

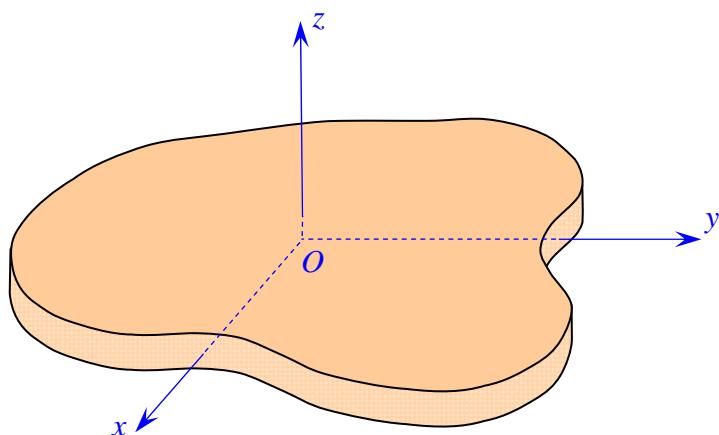


FIGURE 13.1. Élément de plaque.

### 13.1.2 Notations et objectif

Les notations utilisées sont reportées sur la figure 13.2. Le stratifié est constitué de  $n$  couches, numérotées de la face inférieure à la face supérieure. La surface moyenne est choisie comme plan de référence ( $Oxy$ ) et l'axe  $\overrightarrow{Oz}$  est dirigé dans le sens croissant des numéros des couches. Chaque couche  $k$  est repérée par les cotes algébriques de sa face inférieure ( $h_{k-1}$ ) et de sa face supérieure ( $h_k$ ).

Au chapitre 3, nous avons dégagé le processus d'étude du comportement mécanique d'une structure en matériau composite. Ce processus comporte trois étapes : l'analyse du comportement micromécanique d'une couche, la modélisation du comportement mécanique local du stratifié (analyse du comportement "macromécanique" du stratifié), puis l'analyse de la structure en composite. La troisième partie constitue la première étape dans le cadre d'une analyse du comportement élastique (chapitres 9 à 11) et du comportement à la rupture (chapitre 12) d'une couche. La quatrième partie, dont fait partie ce chapitre, a pour objet de répondre à la deuxième étape. Son objectif est de schématiser le comportement mécanique des plaques stratifiées, pour simplifier au mieux l'analyse de la structure. Nous verrons que cette simplification consiste à ramener le problème initialement à trois dimensions ( $x, y, z$ ) à un problème à deux dimensions ( $x, y$ ) de difficulté moindre. La théorie des stratifiés utilise les mêmes hypothèses que la théorie générale des plaques, hypothèses que nous développons dans ce chapitre.

## 13.2 CHAMP DES DÉPLACEMENTS

### 13.2.1 Expressions générales

L'hypothèse de base de la théorie générale des plaques réside dans l'expression des déplacements en tout point  $M$  d'une plaque, de coordonnées  $(x, y, z)$ , sous la forme de polynômes en  $z$ , généralement limités au degré 3, et de coefficients dépendant de  $(x, y)$ . Le champ des déplacements est alors écrit sous la forme :

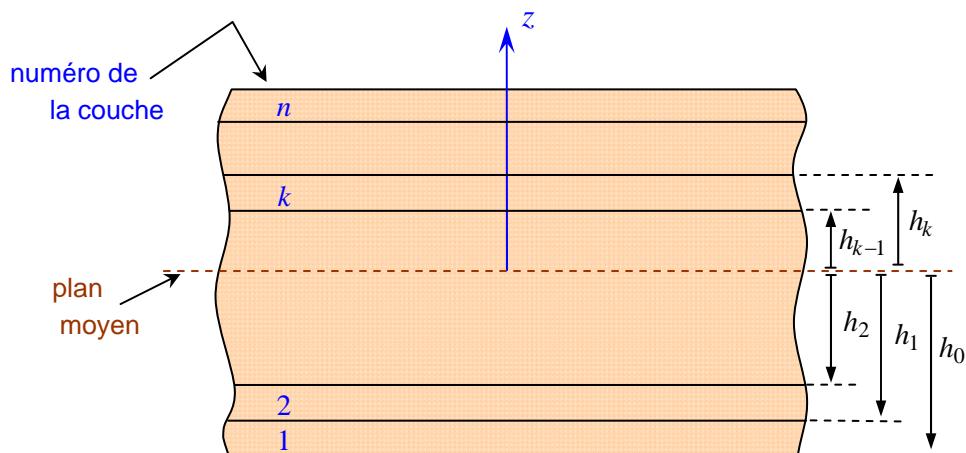


FIGURE 13.2. Élément de stratifié.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x, y, 0) + z\varphi_x(x, y) + z^2\psi_x(x, y) + z^3\phi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v(x, y, 0) + z\varphi_y(x, y) + z^2\psi_y(x, y) + z^3\phi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w(x, y, 0) + z\varphi_z(x, y) + z^2\psi_z(x, y). \end{aligned} \quad (13.1)$$

Cette forme du champ des déplacements répond aux conditions de compatibilité des déformations (6.18), et permet de prendre en compte un gauchissement éventuel de la section droite des plaques lors de la déformation. Dans le cas de problèmes de dynamique, le facteur temps doit être introduit dans les relations (13.1).

Le déplacement d'un point quelconque  $M(x, y, z)$  est donc développé, suivant (13.1), en série de la variable  $z$  à coefficients en  $(x, y)$ , à partir du point de référence  $M_0(x, y, 0)$  du plan ( $Oxy$ ). Le champ de déplacement du point  $M_0$  sera noté par la suite suivant l'une des notations :

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0(x, y) = u(x, y, 0), \\ v_0 &= v_0(x, y) = v(x, y, 0), \\ w_0 &= w_0(x, y) = w(x, y, 0). \end{aligned} \quad (13.2)$$

### 13.2.2 Déformation d'une normale

Cherchons la déformée d'une normale  $AB$  au plan de la plaque, définie par  $(x = a, y = b)$  (figure 13.3). Tout point  $M$  appartenant à la normale  $AB$  a pour coordonnées  $(a, b, z)$  et son déplacement s'écrit d'après (13.1) :

$$\begin{aligned} u(a, b, z) &= u(a, b, 0) + z\varphi_x(a, b) + z^2\psi_x(a, b) + z^3\phi_x(a, b), \\ v(a, b, z) &= v(a, b, 0) + z\varphi_y(a, b) + z^2\psi_y(a, b) + z^3\phi_y(a, b), \\ w(a, b, z) &= w(a, b, 0) + z\varphi_z(a, b) + z^2\psi_z(a, b). \end{aligned}$$

L'équation de la déformée de la normale  $AB$  s'écrit donc, avec des notations évidentes, sous la forme polynomiale en  $z$  :

$$\begin{aligned} u(a, b, z) &= A_u + B_u z + C_u z^2 + D_u z^3, \\ v(a, b, z) &= A_v + B_v z + C_v z^2 + D_v z^3, \\ w(a, b, z) &= A_w + B_w z + C_w z^2. \end{aligned}$$

Lors de la déformation de la plaque, la normale  $AB$  subit donc :

- une translation sans déformation suivant  $A'B'$ , composée d'une translation  $[A_u = u(a, b, 0), A_v = v(a, b, 0)]$  dans le plan ( $Oxy$ ) et d'une translation  $[A_w = w(a, b, 0)]$  suivant l'axe  $\overrightarrow{Oz}$ ;
- puis une déformation suivant  $A''B''$ , exprimée par les termes en  $z$  et dont la forme dépend du degré en  $z$ .

Le champ des déplacements (13.1) prend donc en compte un gauchissement éventuel des normales lors de la déformation de la plaque.

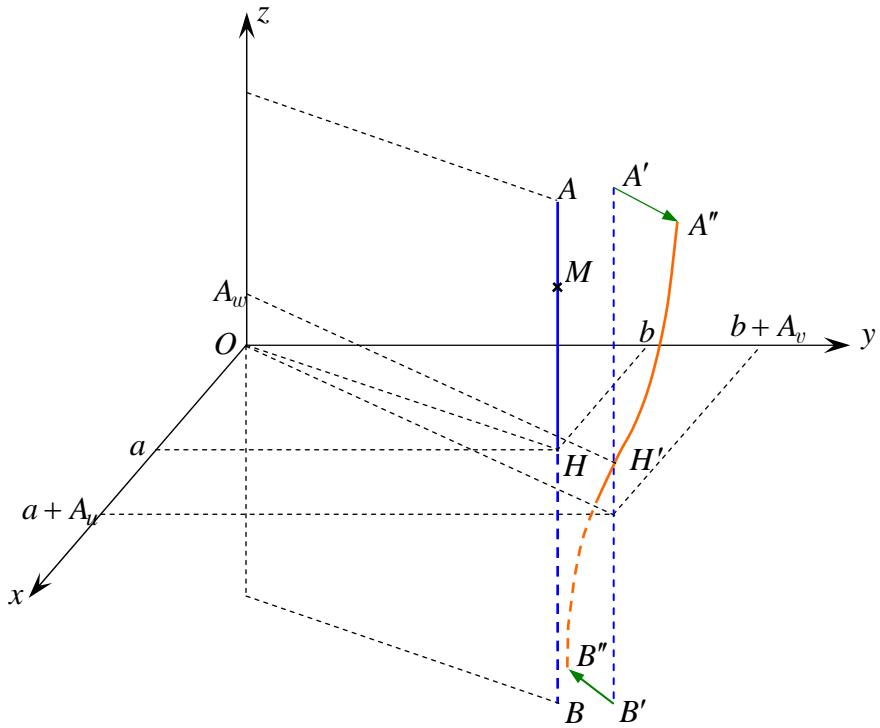


FIGURE 13.3. Déformée d'une normale AB au plan moyen, prenant en compte le gau-chissement.

### 13.2.3 Schémas du premier degré

Les schémas les plus simples et les plus utilisés (par exemple schéma de Hencky-Mindlin, schéma de Kirchhoff) pour décrire le comportement des plaques se réduisent à des schémas du premier degré de la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x, y, 0) + z\varphi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v(x, y, 0) + z\varphi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w(x, y, 0). \end{aligned} \quad (13.3)$$

ou

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad (13.4)$$

Dans un schéma du premier degré, la déformée d'une normale AB est donnée par :

$$\begin{aligned} u(a, b, z) &= A_u + B_u z, \\ v(a, b, z) &= A_v + B_v z, \\ w(a, b, z) &= A_w. \end{aligned}$$

La déformée A''B'' reste dans ce cas un segment de droite : les points situés sur

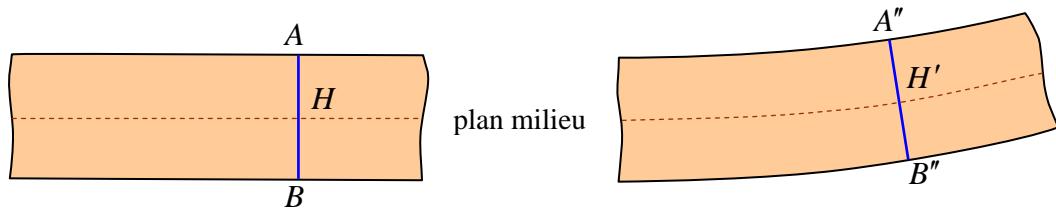


FIGURE 13.4. Déformation dans le cas d'un schéma du premier degré, en l'absence de cisaillement transverse.

une normale au plan moyen ( $Oxy$ ) avant déformation restent sur un segment de droite au cours de la déformation.

De plus, dans le cas où le cisaillement transverse n'est pas pris en compte (paragraphe 14.1.1), les angles ne sont pas modifiés lors de la déformation et la déformée de  $AB$  reste normale à la déformée du plan moyen (figure 13.4). Dans ce cas, la déformée en  $H$  (déformée du plan ( $Oxy$ ) et déformée de la normale  $AB$ ) pourra être caractérisée (figure 13.5) par :

- les déplacements du point  $H$ : déplacement dans le plan ( $Oxy$ ) [ $u(a, b, 0) = A_u$ ,  $v(a, b, 0) = A_v$ ] et déplacement transverse [ $w(a, b, 0) = A_w$ ];
- les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  autour des directions  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .

Dans la pratique, il est plus usuel de caractériser la rotation par les angles  $\beta_x$  et  $\beta_y$  (figure 13.5), reliés à  $\theta_x$  et  $\theta_y$  par :

$$\beta_x = \theta_y \quad \text{et} \quad \beta_y = -\theta_x. \quad (13.5)$$

Un schéma du premier degré permet de résoudre la plupart des problèmes élémentaires. Dans le cas où un schéma du premier degré ne permettrait pas d'approcher convenablement un problème donné, il serait alors nécessaire de considérer un schéma du deuxième ordre, voire du troisième ordre.

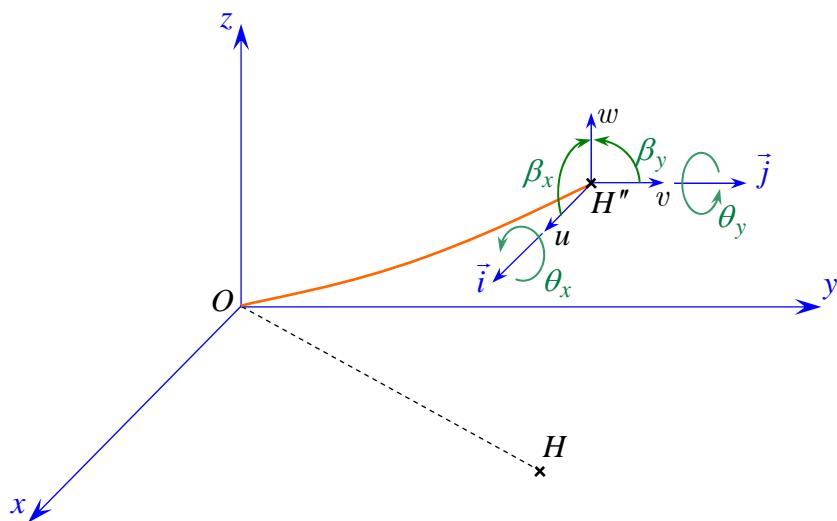


FIGURE 13.5. Caractérisation de la déformée en un point, en l'absence de cisaillement transverse.

### 13.3 CHAMP DES DÉFORMATIONS

#### 13.3.1 Expressions générales

Le champ des déformations est exprimé en coordonnées cartésiennes par les expressions (8.19). Dans le cas d'une théorie générale du troisième ordre, le champ des déformations se déduit de l'expression (13.1) du champ des déplacements. Soit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + z^2 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + z^3 \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + z^2 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + z^3 \frac{\partial \phi_y}{\partial y}, \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \varphi_z(x, y) + 2z\psi_z(x, y), \\
 \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
 &= \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + z \left( 2\psi_y + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \right) + z^2 \left( 3\phi_y + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \right), \\
 \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
 &= \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + z \left( 2\psi_x + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right) + z^2 \left( 3\phi_x + \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right), \\
 \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + z^2 \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + z^3 \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right).
 \end{aligned} \tag{13.6}$$

Ces expressions montrent que la troncature utilisée dans les expressions (13.1) du déplacement est consistante, dans le sens que les déformations en cisaillement transverse résultant des déplacements dans le plan sont du même ordre en  $z$  que les déformations déterminées par le déplacement transverse  $w$ .

#### 13.3.2 Schéma du premier degré

Dans le cas d'un schéma du premier degré, le champ des déplacements est exprimé par les relations (13.4). Le champ des déformations se déduit alors simplement des relations (13.6) et s'écrit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \\
\gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\
\gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\
\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right).
\end{aligned} \tag{13.7}$$

Ce champ des déformations est celui d'un schéma du premier degré avec prise en compte du cisaillement transverse.

## 13.4 CHAMP DES CONTRAINTES

### 13.4.1 Expression générale

La forme de la matrice de rigidité d'une couche de composite unidirectionnel ou tissu, rapportée aux axes (*Oxyz*) du stratifié, a été étudiée au chapitre 11. L'état des contraintes en un point *M* du stratifié s'exprime en fonction du champ des déformations par la relation (11.3). Si le point *M* appartient à la couche *k* du stratifié, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \tag{13.8}$$

où  $C'_{ij}$  sont les coefficients de rigidité de la couche *k*.

Dans le cas général, le champ des déformations est donné par les expressions (13.6). Il en résulte que les contraintes dans la couche *k* sont des polynômes en *z*. La théorie des plaques a pour objet de simplifier le problème de l'analyse du comportement mécanique d'une plaque en trois dimensions (*x*, *y*, *z*) en un problème à deux dimensions (*x*, *y*). La réduction du problème est obtenue par intégration des contraintes suivant l'épaisseur de la plaque. Cette intégration conduit à introduire les résultantes et moments, exercés sur la plaque, qui seront définis au paragraphe 13.5.

### 13.4.2 Simplification dans le cadre de la théorie des plaques

La théorie élémentaire des plaques fait l'hypothèse que les contraintes normales  $\sigma_{zz}$  sont négligeables dans le volume de la plaque, par rapport aux autres composantes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ . Cette hypothèse est étendue à la théorie des stratifiés, soit :

$$\sigma_{zz} = 0. \quad (13.9)$$

Cette hypothèse est généralement vérifiée dans la pratique. Si ce n'est pas le cas, la théorie élémentaire des plaques ne peut plus être utilisée.

Avec l'hypothèse précédente, la relation (13.8) contrainte-déformation s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (13.10)$$

Cette relation peut être réécrite en séparant les contraintes et déformations de cisaillement transverse suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{xy} \\ \hline \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{array}{c|ccccc} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & C'_{16} & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & C'_{26} & 0 & 0 \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & C'_{36} & 0 & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & C'_{66} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{array} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \hline \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}. \quad (13.11)$$

L'état des contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  et des déformations  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\gamma_{xy}$  correspond à l'état de contraintes planes, étudié au paragraphe 11.3. En appliquant les résultats obtenus dans ce paragraphe, les contraintes dans la couche  $k$  s'expriment à l'aide des coefficients de rigidité  $Q'_{ij}$  suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \hline \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{array}{c|cc|cc} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{array} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \hline \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}, \quad (13.12)$$

avec

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{1}{C'_{33}}(C'_{13}\varepsilon_{xx} + C'_{23}\varepsilon_{yy} + C'_{36}\gamma_{xy}). \quad (13.13)$$

Les coefficients  $Q'_{ij}$  de la matrice de rigidité réduite de la couche  $k$  ont été introduits en (11.43). Par la suite, ils seront notés suivant l'une des notations  $Q'_{ij}$  ou  $Q^k_{ij}$ . La discontinuité de la matrice de rigidité d'une couche à l'autre implique la discontinuité des contraintes au passage d'une couche à l'autre.

## 13.5 RÉSULTANTES ET MOMENTS

### 13.5.1 Résultantes en membrane

Le champ des résultantes en membrane, noté  $N(x, y)$ , est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_k(M) dz, \quad (13.14)$$

où  $\sigma_k(M)$  est la matrice des contraintes en membrane  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  dans la couche  $k$ . Soit :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz. \quad (13.15)$$

Les composantes  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  sont les résultantes, par unité de longueur de plaque, respectivement des contraintes normales (suivant  $x$  et suivant  $y$ ) et des contraintes de cisaillement, dans le plan  $(x, y)$ . Elles sont schématisées symboliquement sur la figure 13.6.

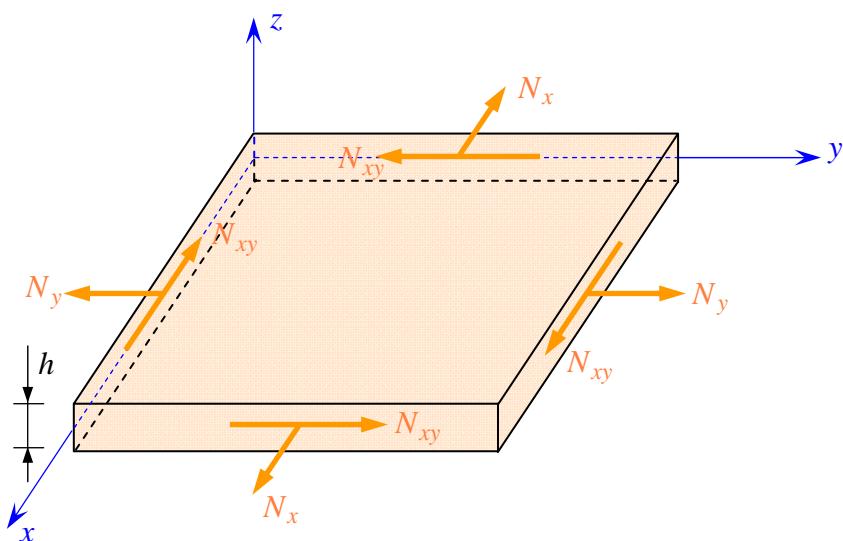


FIGURE 13.6. Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié.

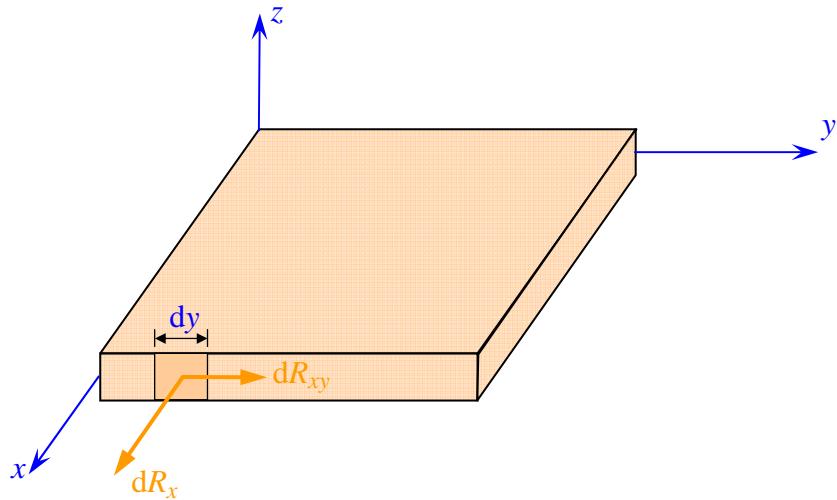


FIGURE 13.7. Résultantes de l'action exercée sur un élément de surface du stratifié.

Il faut bien noter que ces résultantes sont relatives à l'unité de longueur de section droite du stratifié. Ceci signifie que, par exemple, la résultante de l'action exercée sur un élément de surface normal à la direction  $\vec{i}$  et de longueur  $dy$  (figure 13.7) est la superposition de :

- la résultante normale  $dR_x = N_x dy$ ,
- la résultante de cisaillement  $dR_{xy} = N_{xy} dy$ .

La discontinuité des contraintes en passant d'une couche à l'autre conduit à réécrire la relation (13.15) sous la forme :

$$\mathbf{N}(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz. \quad (13.17)$$

### 13.5.2 Résultantes en cisaillement

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manière par :

$$\mathbf{Q}(x, y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_k dz. \quad (13.18)$$

Comme les résultantes en membrane, les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié. Elles sont schématisées sur la figure (13.8).

### 13.5.3 Moments de flexion et de torsion

Les relations fondamentales des stratifiés font également intervenir les moments résultants des contraintes exercées sur un élément du stratifié. Les

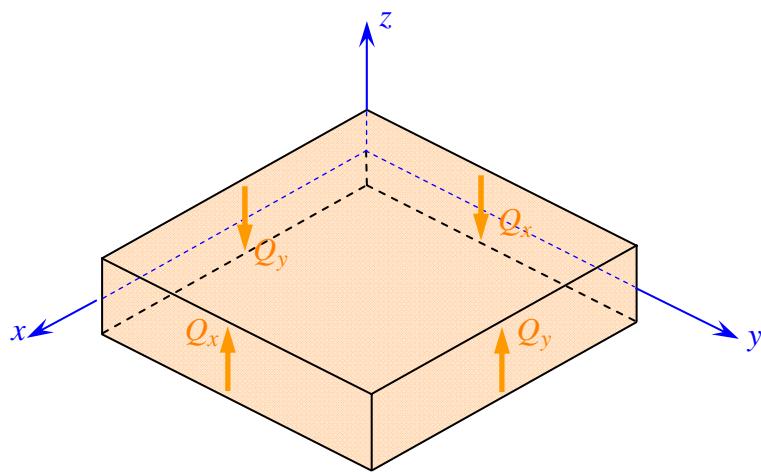


FIGURE 13.8. Représentation schématique des résultantes de cisaillement.

moments de flexion et de torsion sont définis par :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz. \quad (13.19)$$

Les composantes  $M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion suivant les directions  $x$  et  $y$ , respectivement, et la composante  $M_{xy}$  est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la figure 13.9.

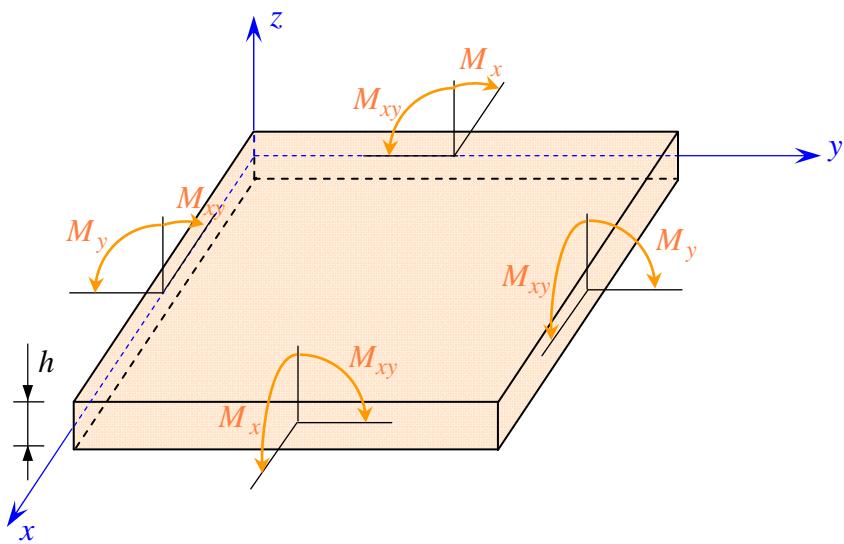


FIGURE 13.9. Schématisation des moments de flexion et de torsion.

## 13.6 RELATIONS FONDAMENTALES DES PLAQUES DANS LE CAS D'UN SCHÉMA DU PREMIER DEGRÉ

### 13.6.1 Relations fondamentales de la mécanique des matériaux

Les relations fondamentales des plaques sont tirées de la relation fondamentale (8.20) que nous écrivons sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz} + f_x &= \rho a_x, \\ \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} + f_y &= \rho a_y, \\ \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yz} + f_z &= \rho a_z, \end{aligned} \quad (13.20)$$

où  $f_x, f_y, f_z$  sont les composantes des forces volumiques exercées au point  $M$  du matériau ;  $a_x, a_y, a_z$  sont les composantes du vecteur accélération du point  $M$  ; et  $\rho$  est la masse volumique au point  $M$  du matériau.

L'objet de l'ensemble des paragraphes (13.6) est de déduire des relations (13.20) les relations fondamentales des plaques dans le cas d'un schéma du premier degré.

### 13.6.2 Relations fondamentales relatives aux résultantes en membrane

L'intégration des équations (13.20), suivant l'épaisseur du stratifié, conduit aux relations fondamentales d'un élément de plaque, relatives aux résultantes. L'intégration des deux premières aboutit aux relations relatives aux résultantes de membrane. Par exemple, l'intégration de la première équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_x dz \\ = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz. \end{aligned} \quad (13.21)$$

Le premier terme de cette équation s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = \frac{\partial N_x}{\partial x}. \quad (13.22)$$

De même :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}. \quad (13.23)$$

Le troisième terme de l'équation (13.21) s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \sigma_{xz}(h/2) - \sigma_{xz}(-h/2),$$

où les contraintes  $\sigma_{xz}(h/2)$  et  $\sigma_{xz}(-h/2)$  sont les contraintes éventuelles de cisaillement exercées sur les faces supérieure et inférieure du stratifié. Ces contraintes sont généralement nulles. Dans le cas où il sera nécessaire d'en tenir compte, nous les noterons :

$$\sigma_{xz}(h/2) = \tau_{1x} \quad \text{et} \quad \sigma_{xz}(-h/2) = \tau_{2x}. \quad (13.24)$$

D'où :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz = \tau_{1x} - \tau_{2x}. \quad (13.25)$$

Enfin, nous poserons :

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = F_x. \quad (13.26)$$

L'intégration du second membre de l'équation (13.21) nécessite d'introduire les expressions des déplacements en fonction de  $x, y, z$  et du temps  $t$ . Dans un schéma du premier ordre, elles sont obtenues en introduisant le temps dans les expressions (13.4), soit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t). \end{aligned} \quad (13.27)$$

Le second membre s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x, y, z) \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \right) dz \\ &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz. \end{aligned}$$

Soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \quad (13.28)$$

en introduisant :

$$\rho_s = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \quad (13.29)$$

la masse surfacique du stratifié au point  $(x, y)$ , et la grandeur :

$$R = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z \, dz. \quad (13.30)$$

L'intégration de la première des équations (13.20) conduit donc finalement à :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}. \quad (13.31)$$

De même, l'intégration de la deuxième des équations (13.20) conduit à :

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}, \quad (13.32)$$

où les composantes  $\tau_{1y}$  et  $\tau_{2y}$  tiennent compte des contraintes éventuelles de cisaillement exercées sur les faces :

$$\sigma_{yz}(h/2) = \tau_{1y} \quad \text{et} \quad \sigma_{yz}(-h/2) = \tau_{2y}, \quad (13.33)$$

et en introduisant la composante :

$$F_y = \int_{-h/2}^{h/2} f_y \, dz. \quad (13.34)$$

### 13.6.3 Relation fondamentale relative aux résultantes de cisaillement

L'intégration suivant l'épaisseur du stratifié de la troisième des équations (13.20) conduit à :

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \, dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} \, dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} \, dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_z \, dz \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_z \, dz. \end{aligned} \quad (13.35)$$

Le second terme s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} \, dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} \, dz = \frac{\partial Q_y}{\partial y}. \quad (13.36)$$

De même :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} \, dz = \frac{\partial Q_x}{\partial x}. \quad (13.37)$$

Le troisième terme s'exprime sous la forme :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \, dz = \sigma_{zz}(h/2) - \sigma_{zz}(-h/2),$$

où les contraintes  $\sigma_{zz}(h/2)$  et  $\sigma_{zz}(-h/2)$  apparaissent comme des composantes de pression exercées sur chaque face de la plaque. Nous notons leur différence :

$$q(x, y) = q = \sigma_{zz}(h/2) - \sigma_{zz}(-h/2). \quad (13.38)$$

D'où

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz = q. \quad (13.39)$$

Enfin

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho a_z dz = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \quad (13.40)$$

L'introduction des équations (13.36) à (13.40) dans l'équation (13.35) conduit finalement à :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \quad (13.41)$$

en introduisant la composante :

$$F_z = \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz. \quad (13.42)$$

### 13.6.4 Relations fondamentales relatives aux moments

Les relations fondamentales relatives aux moments sont obtenues en multipliant par  $z$  les deux premières des équations (13.20), puis en intégrant suivant l'épaisseur du stratifié. Par exemple, la première conduit à :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_x dz. \quad (13.43)$$

En intégrant par parties, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz &= [z \sigma_{xz}]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \\ &= \frac{h}{2} \sigma_{xz}(h/2) + \frac{h}{2} \sigma_{xz}(-h/2) - Q_x. \end{aligned}$$

Soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) - Q_x. \quad (13.44)$$

Le second membre de l'équation (13.43) s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_x dz &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho z \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \right) dz \\ &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz. \end{aligned}$$

Soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_x dz = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \quad (13.45)$$

en posant :

$$I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz. \quad (13.46)$$

La grandeur  $I_{xy}$  est le moment d'inertie par rapport au plan moyen ( $Oxy$ ) de l'élément de plaque localisé au point ( $x, y$ ) et ayant des côtés égaux à l'unité.

La première relation des moments s'écrit donc :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \quad (13.47)$$

en introduisant la composante des moments des forces volumiques exercées :

$$P_x = \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz$$

De même, la deuxième équation (13.20) conduit à :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2} (\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}, \quad (13.48)$$

en introduisant la composante des moments :

$$P_y = \int_{-h/2}^{h/2} z f_y dz. \quad (13.49)$$

### 13.6.5 Résumé des relations fondamentales

Les relations fondamentales des plaques sont donc constituées des expressions (13.31), (13.32), (13.41), (13.47) et (13.48). Soit en les regroupant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x &= R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y &= R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{13.50}$$

avec

$$\rho_s, R, I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho dz.$$

Les trois dernières équations permettent d'obtenir une relation indépendante des résultantes de cisaillement suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q \\
= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + R \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_{xy} \left( \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial t^2} \right).
\end{aligned} \tag{13.51}$$

Les équations (13.50), (13.51) constituent les équations de mouvement de la théorie classique des plaques. Elles sont applicables aussi bien à des plaques homogènes qu'à des plaques stratifiées. Les deux premières équations (13.50), associées à (13.51), constituent les équations fondamentales des plaques en l'absence de cisaillement transverse, soit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q \\
= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + R \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_{xy} \left( \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial t^2} \right).
\end{aligned} \tag{13.52}$$

Les grandeurs  $\rho_s$ ,  $R$  et  $I_{xy}$  se calculent sans difficulté dans le cas où la plaque est constituée de  $n$  couches, la couche  $k$  ayant une masse volumique  $\rho_k$ . Nous avons, d'après (13.29) :

$$\rho_s = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k dz = \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1}). \quad (13.53)$$

De même, les grandeurs  $R$  et  $I_{xy}$  s'expriment suivant :

$$R = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad (13.54)$$

$$I_{xy} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k^3 - h_{k-1}^3). \quad (13.55)$$

Dans la plupart des cas, les termes d'inertie de rotation peuvent être négligés et, en l'absence de forces volumiques et de contraintes de cisaillement sur les faces, les équations des plaques se simplifient suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0. \end{aligned} \quad (13.56)$$

Ces relations peuvent également être écrites en éliminant les résultantes de cisaillement, suivant une forme analogue à (13.52). Soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (13.57)$$

### 13.6.6 Problèmes de statique

Dans le cas de problèmes de statique, les déplacements sont indépendants du temps et les relations fondamentales des plaques se réduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0. \end{aligned} \quad (13.58)$$

ou en éliminant les résultantes de cisaillement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q &= 0. \end{aligned} \quad (13.59)$$

## EXERCICES

**13.1** Un stratifié est constitué de trois couches 1, 2 et 3, orientées respectivement dans les directions  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  et  $45^\circ$ . Ces couches, de même épaisseur  $h = 1$  mm, ont les mêmes caractéristiques mécaniques :

$$\begin{aligned} E_L &= 160 \text{ GPa}, & E_T &= 15 \text{ GPa}, & \nu_{LT} &= 0,32, \\ G_{LT} &= 5 \text{ GPa}, & G_{TT'} &= 4,5 \text{ GPa}. \end{aligned}$$

En un point, le stratifié est soumis à l'état de déformation :

$$\varepsilon_{xx} = 0,40 \%, \quad \varepsilon_{yy} = 0,25 \%, \quad \gamma_{xy} = 0,50 \%, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0,50 \%.$$

Calculer les contraintes dans chaque couche du stratifié; puis les résultantes en membrane et cisaillement, les moments de flexion et torsion nécessaires pour obtenir cet état de déformation.

**13.2** Reprendre l'exercice précédent dans le cas où l'ordre des couches du stratifié est inversé. Comparer les résultats obtenus dans les deux cas.

## CHAPITRE 14

# Théorie Classique des Stratifiés

## 14.1 CHAMP DES DÉFORMATIONS

### 14.1.1 Hypothèses de la théorie classique des stratifiés

La théorie classique des stratifiés utilise un schéma de déformation du premier degré (13.7). Elle fait ensuite une hypothèse supplémentaire qui consiste à négliger le cisaillement transverse. Dans ce schéma, les déformations en cisaillement transverse sont donc nulles, soit :

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0. \quad (14.1)$$

Cette hypothèse implique, d'après (13.7) :

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ \varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y}. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Le champ des déplacements s'écrit alors, d'après (13.4) :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad (14.3)$$

La déformée de la normale au plan moyen ( $Oxy$ ) est alors un segment de droite normal à la déformée du plan moyen (paragraphe 13.2.3 et figure 13.4). L'ensemble des notations, utilisées dans le cas du schéma de la théorie classique des stratifiés, est schématisé sur la figure 14.1.

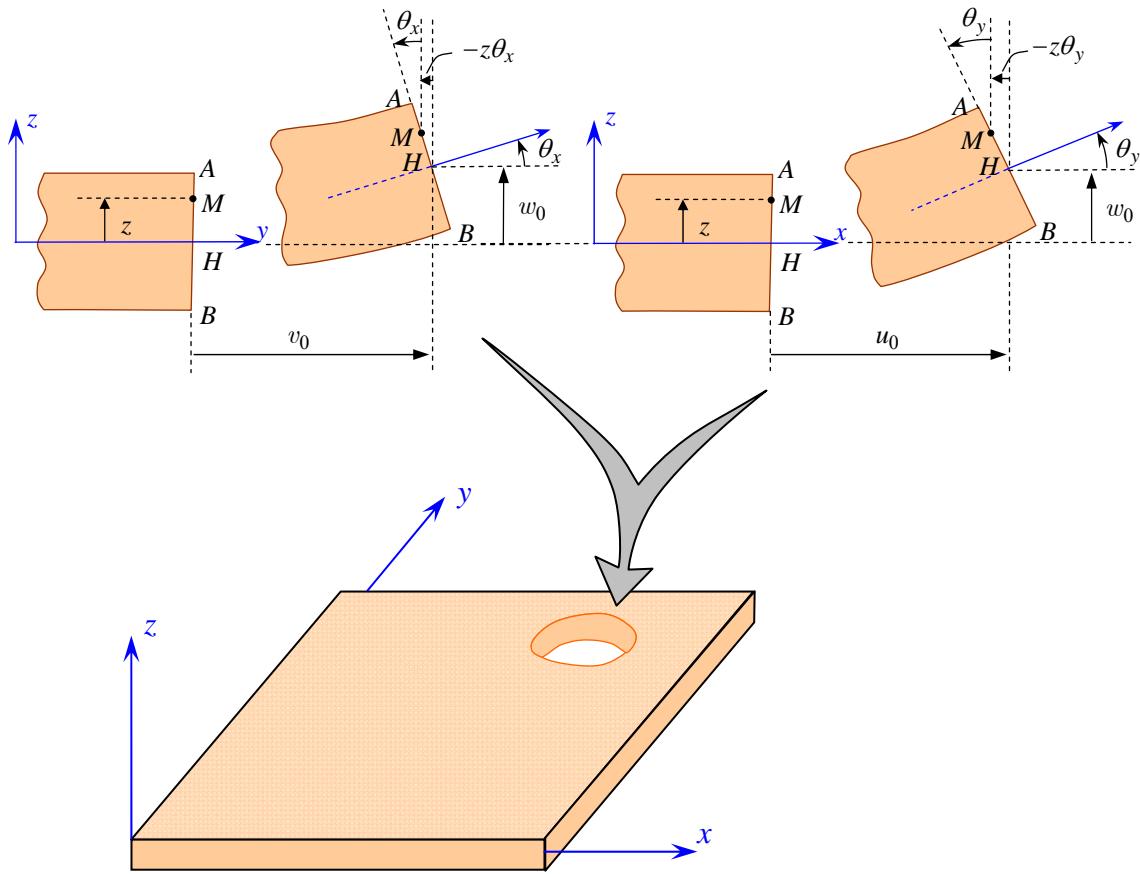


FIGURE 14.1. Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés.

### 14.1.2 Expression du champ des déformations

Le champ des déformations s'écrit, d'après (13.7) et en tenant compte des expressions (14.2) :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\
 \varepsilon_{zz} &= 0, \\
 \gamma_{yz} &= 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \\
 \gamma_{xy} &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned} \tag{14.4}$$

Le tenseur des déformations en un point  $M$  est :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (14.5)$$

et la matrice des déformations se réduit à trois composantes non nulles :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (14.6)$$

Le champ des déformations est la superposition :

— *des déformations en membrane* :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (14.7)$$

s'exprimant exclusivement en fonction des déplacements ( $u_0, v_0$ ) dans le plan ( $Oxy$ ) des points de ce plan ;

— *des déformations en flexion et torsion* :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad (14.8)$$

s'exprimant en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote  $z$  du point  $M$ . Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f(M) = z \boldsymbol{\kappa}(x, y), \quad (14.9)$$

en posant :

$$\kappa(x, y) = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad (14.10)$$

La matrice  $\kappa(x, y)$  est appelée *matrice des courbures* de la plaque sollicitée en flexion.

Les angles de rotation de la déformée du plan moyen au point  $H(x, y, 0)$  s'expriment (figure 14.1) en fonction du déplacement transversal  $w_0(x, y)$  de ce point par :

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial w_0}{\partial y} \text{ suivant la direction } \vec{i}, \\ \theta_y &= \frac{\partial w_0}{\partial x} \text{ suivant la direction } \vec{j}. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Le champ des déplacements (14.3) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\theta_y, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\theta_x, \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad (14.12)$$

Finalement, le champ des déformations s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \boldsymbol{\varepsilon}_m(M) + \boldsymbol{\varepsilon}_f(M), \quad (14.13)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (14.14)$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y), & \varepsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}(x, y), & \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y), & \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y), & \kappa_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(x, y). \end{aligned} \quad (14.15)$$

Sous forme abrégée, le champ des déformations s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z \boldsymbol{\kappa}(x, y). \quad (14.16)$$

Les déformations en membrane  $\boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y)$  et courbures  $\boldsymbol{\kappa}(x, y)$  ne dépendent que des coordonnées  $(x, y)$  du point  $H$  du plan moyen du stratifié.

## 14.2 CHAMP DES CONTRAINTES

### 14.2.1 Forme du champ des contraintes

Le champ des contraintes est obtenu à l'aide de la relation (13.12). Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, nous obtenons, pour la couche  $k$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= Q'_1 \varepsilon_{xx} + Q'_2 \varepsilon_{yy} + Q'_6 \gamma_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= Q'_2 \varepsilon_{xx} + Q'_2 \varepsilon_{yy} + Q'_6 \gamma_{xy}, \\ \sigma_{xy} &= Q'_6 \varepsilon_{xx} + Q'_6 \varepsilon_{yy} + Q'_{66} \gamma_{xy}, \\ \sigma_{yz} &= 0, \\ \sigma_{xz} &= 0. \end{aligned} \quad (14.17)$$

Le tenseur des contraintes en  $M$  est donc de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14.18)$$

Le champ des contraintes se réduit aux seules contraintes en membrane :  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$ .

### 14.2.2 Expression des contraintes

Les relations (14.17) montrent que les contraintes dans la couche  $k$  s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \mathbf{Q}'_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (14.19)$$

avec

$$\mathbf{Q}'_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k$$

où  $\mathbf{Q}'_k$  est la matrice de rigidité réduite de la couche  $k$  introduite en (11.43) et dont les termes sont exprimés en fonction des modules par les relations (11.52).

En tenant compte de (14.14), les contraintes dans la couche  $k$  s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (14.20)$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma}_k(M) = \boldsymbol{\sigma}_k(x, y, z) = \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\kappa}(x, y). \quad (14.21)$$

La matrice  $\boldsymbol{\sigma}_k(M)$  représente la matrice des contraintes dans la couche  $k$  :  $h_{k-1} \leq z \leq h_k$ . La matrice de rigidité réduite  $\mathbf{Q}'_k$  varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

## 14.3 EXPRESSION DES RÉSULTANTES ET MOMENTS

### 14.3.1 Résultantes en membrane

L'expression (13.17) associée à la relation (14.20) ou (14.21) conduit à l'expression des résultantes en membrane, dans le cadre de la théorie classique des stratifiés. Nous obtenons :

$$\mathbf{N}(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\kappa}(x, y)] dz.$$

Soit :

$$\mathbf{N}(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[ \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\kappa}(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right],$$

ou en intégrant dans l'épaisseur :

$$\mathbf{N}(x, y) = \left[ \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \mathbf{Q}'_k \right] \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \mathbf{Q}'_k \right] \boldsymbol{\kappa}(x, y).$$

L'expression précédente de la matrice des résultantes peut finalement s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{N}(x, y) = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}(x, y), \quad (14.22)$$

en introduisant les matrices :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \mathbf{Q}'_k, \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A_{ij} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (\mathcal{Q}'_{ij})_k, \end{aligned} \quad (14.23)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \mathbf{Q}'_k, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} B_{ij} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (\mathcal{Q}'_{ij})_k. \end{aligned} \quad (14.24)$$

L'expression développée des résultantes en membrane s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (14.25)$$

Ces équations montrent que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane ( $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ ) ne sont pas seulement fonctions des déformations en membrane ( $\varepsilon_{xx}^0$ ,  $\varepsilon_{yy}^0$ ,  $\gamma_{xy}^0$ ) (comme dans le cas de plaques homogènes), mais sont également fonctions des courbures en flexion et en torsion ( $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$ ,  $\kappa_{xy}$ ).

### 14.3.2 Moments de flexion et de torsion

Le champ des moments s'explique en introduisant l'expression (14.21) des contraintes dans l'expression (13.19). Soit :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[ z \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z^2 \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\kappa}(x, y) \right] dz,$$

ce qui conduit à :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \mathbf{Q}'_k \right] \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) \mathbf{Q}'_k \right] \boldsymbol{\kappa}(x, y).$$

La matrice des moments de flexion s'écrit donc suivant :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}(x, y), \quad (14.26)$$

en introduisant la nouvelle matrice :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \mathbf{Q}'_k, \\ \mathbf{D} &= [D_{ij}] \quad \text{avec} \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (\mathcal{Q}'_{ij})_k. \end{aligned} \quad (14.27)$$

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (14.28)$$

Les moments de flexion et torsion sont donc fonctions des courbures en flexion et en torsion, mais sont également fonctions des déformations en membrane.

## 14.4 ÉQUATION DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE D'UN STRATIFIÉ

### 14.4.1 Équation constitutive

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures. Elle s'obtient en regroupant les expressions (14.25) et (14.28) suivant une seule écriture matricielle sous la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (14.29)$$

Cette équation constitutive peut également être écrite sous forme contractée suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \kappa \end{bmatrix}. \quad (14.30)$$

Les termes des matrices introduites  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  sont donnés par les expressions (14.23), (14.24) et (14.27). Ils peuvent être également exprimés, en introduisant l'épaisseur  $e_k$  et la cote  $z_k$  du centre de la couche  $k$ , sous la forme :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k, \quad (14.31)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k z_k, \quad (14.32)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right). \quad (14.33)$$

Les coefficients  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$  de l'équation constitutive (14.29) d'un stratifié s'expriment donc à partir des constantes de rigidité réduites des couches, obtenues, pour chaque couche, en fonction des modules de l'ingénieur à l'aide des relations (11.52) et des expressions reportées au tableau 11.6.

#### 14.4.2 Matrice de rigidité

La matrice intervenant dans l'expression (14.29) est la matrice de rigidité du stratifié, décrivant le comportement élastique macroscopique du stratifié au point  $M_0(x, y) = M(x, y, 0)$ .

La matrice  $\mathbf{A}$  est la *matrice de rigidité en membrane*,  $\mathbf{D}$  est la *matrice de rigidité en flexion* et  $\mathbf{B}$  la *matrice de couplage membrane-flexion-torsion*. Ce couplage existe même si les matériaux des couches sont isotropes. Il résulte de la structure en couches de matériaux de caractéristiques mécaniques différentes. Le couplage est nul ( $\mathbf{B} = 0$ ), seulement dans le cas où le stratifié est symétrique. La symétrie implique une symétrie des propriétés des couches, de leurs cotes et de leurs orientations (chapitre 15).

Divers couplages peuvent être observés et mis en évidence (chapitre 15). Le couplage traction-cisaillement provient des termes  $A_{16}$  et  $A_{26}$ . Le couplage membrane-flexion résulte des termes  $B_{11}$ ,  $B_{12}$  et  $B_{22}$ , alors que le couplage membrane-torsion résulte des termes  $B_{16}$  et  $B_{26}$ . Enfin, le couplage flexion-torsion résulte des coefficients  $D_{16}$  et  $D_{26}$ . Différents types de stratifiés seront étudiés au chapitre 15.

### 14.4.3 Exemples

#### 14.4.3.1 Exemple 1

On considère un stratifié constitué de deux couches d'un composite unidirectionnel (figure 14.2). La couche inférieure de 3 mm d'épaisseur est orientée à  $45^\circ$  du repère  $(x, y, z)$  du stratifié. La couche supérieure est orientée à  $0^\circ$  et a une épaisseur de 5 mm. Le matériau composite unidirectionnel constituant les deux couches est un composite époxyde-fibres de verre de caractéristiques mécaniques :

$$E_L = 46 \text{ GPa}, \quad E_T = 10 \text{ GPa}, \quad G_{LT} = 4,6 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,31.$$

Explicitier l'équation constitutive du stratifié.

#### 1. Détermination des constantes de rigidité réduites dans les axes principaux

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = 46,982 \text{ GPa},$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} = 10,213 \text{ GPa},$$

$$Q_{12} = \nu_{LT} Q_{22} = 3,166 \text{ GPa},$$

$$Q_{66} = G_{LT} = 4,6 \text{ GPa}.$$

#### 2. Matrices de rigidité de chaque couche exprimées dans les axes du stratifié

Couche à  $0^\circ$

$$\mathbf{Q}'_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 46,982 & 3,166 & 0 \\ 3,166 & 10,213 & 0 \\ 0 & 0 & 4,6 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$$

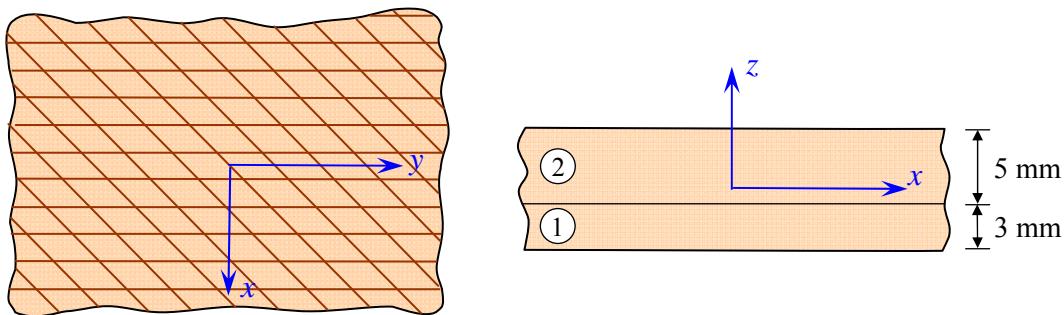


FIGURE 14.2. Stratifié à deux couches de l'exemple 1.

*Couche à 45°*

$$\begin{aligned}
 Q'_{11} &= (Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \cos^4 45^\circ = 20,482 \text{ GPa}, \\
 Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66} + 2Q_{12}) \cos^4 45^\circ = 11,282 \text{ GPa}, \\
 Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{22}) \cos^4 45^\circ = 9,192 \text{ GPa}, \\
 Q'_{22} &= Q'_{11}, \\
 Q'_{26} &= Q'_{16}, \\
 Q'_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}) \cos^4 45^\circ = 12,716 \text{ GPa}.
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbf{Q}'_{45^\circ} = \begin{bmatrix} 20,482 & 11,282 & 9,192 \\ 11,282 & 20,482 & 9,192 \\ 9,192 & 9,192 & 12,716 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$$

### 3. Matrice A

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k \\
 &= [3(Q'_{ij})_{45^\circ} + 5(Q'_{ij})_{0^\circ}] \times 10^{-3}.
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 296,35 & 49,676 & 27,576 \\ 49,676 & 112,51 & 27,576 \\ 27,576 & 27,576 & 61,147 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ Nm}^{-1}.$$

### 4. Matrice B

$$\begin{aligned}
 B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q'_{ij})_k \\
 &= 7,5 [-(Q'_{ij})_{45^\circ} + (Q'_{ij})_{0^\circ}] \times 10^{-6}.
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 198,75 & -60,87 & -68,94 \\ -60,87 & -77,01 & -68,94 \\ -68,94 & -68,94 & -60,87 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N}.$$

## 5. Matrice D

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k \\ &= \left[ 21(Q'_{ij})_{45^\circ} + \frac{65}{3}(Q'_{ij})_{0^\circ} \right] \times 10^{-9}. \end{aligned}$$

Soit :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1448,07 & 305,52 & 193,03 \\ 305,52 & 651,40 & 193,03 \\ 193,03 & 193,03 & 366,70 \end{bmatrix} \text{ Nm.}$$

## 6. Équation constitutive du stratifié

En combinant les résultats précédents, l'équation constitutive du stratifié s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 296,35 \times 10^6 & 49,676 \times 10^6 & 27,576 \times 10^6 & 198,75 \times 10^3 & -60,87 \times 10^3 & -68,94 \times 10^3 \\ 49,676 \times 10^6 & 112,51 \times 10^6 & 27,576 \times 10^6 & -60,87 \times 10^3 & -77,01 \times 10^3 & -68,94 \times 10^3 \\ 27,576 \times 10^6 & 27,576 \times 10^6 & 61,147 \times 10^6 & -68,94 \times 10^3 & -68,94 \times 10^3 & -60,87 \times 10^3 \\ 198,75 \times 10^3 & -60,87 \times 10^3 & -68,94 \times 10^3 & 1448,07 & 305,52 & 193,03 \\ -60,87 \times 10^3 & -77,01 \times 10^3 & -68,94 \times 10^3 & 305,52 & 651,40 & 193,03 \\ -68,94 \times 10^3 & -68,94 \times 10^3 & -60,87 \times 10^3 & 193,03 & 193,03 & 366,70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

### 14.4.3.2 Exemple 2

Nous considérons maintenant le stratifié de la figure 14.3, constitué de quatre couches unidirectionnelles de mêmes propriétés :

$$E_L = 38 \text{ GPa}, \quad E_T = 9 \text{ GPa}, \quad G_{LT} = 3,6 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,32.$$

Les épaisseurs et les orientations des couches sont indiquées sur la figure 14.3. Ce stratifié est un stratifié antisymétrique (chapitre 15) :

- les épaisseurs des couches sont symétriques,
- les orientations des couches sont antisymétriques.

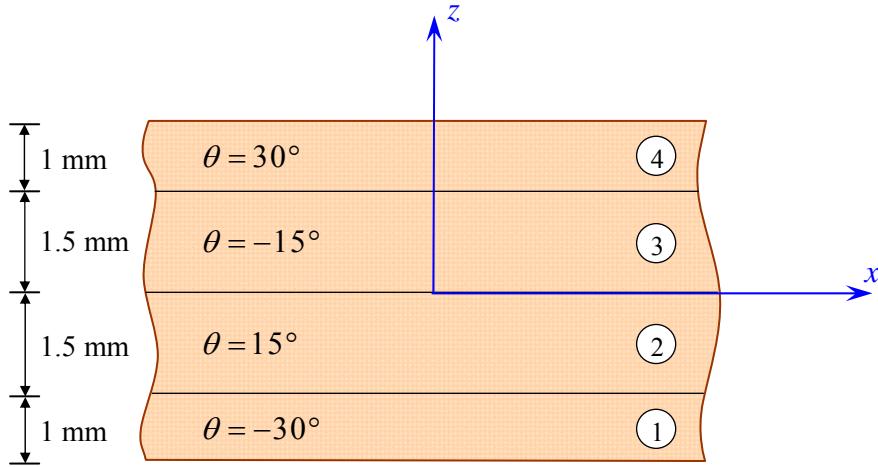


FIGURE 14.3. Stratifié à quatre couches de l'exemple 2.

### 1. Matrices de rigidité dans les axes principaux

$$\begin{aligned} Q_{11} &= 38,945 \text{ GPa}, & Q_{12} &= 2,952 \text{ GPa}, & Q_{16} &= 0, \\ Q_{22} &= 9,224 \text{ GPa}, & Q_{66} &= 3,6 \text{ GPa}, & Q_{26} &= 0. \end{aligned}$$

### 2. Matrices de rigidité de chaque couche exprimées dans les axes du stratifié

*Couche 1 à -30°*

$$\mathbf{Q}'_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} 26,290 & 8,176 & -9,451 \\ 8,176 & 11,429 & -3,418 \\ -9,451 & -3,418 & 8,825 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$$

*Couche 2 à 15°*

$$\mathbf{Q}'_{15^\circ} = \begin{bmatrix} 35,212 & 4,693 & 6,732 \\ 4,693 & 9,473 & 0,699 \\ 6,732 & 0,699 & 5,342 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$$

*Couche 3 à -15°*

$$\mathbf{Q}'_{-15^\circ} = \begin{bmatrix} 35,212 & 4,693 & -6,732 \\ 4,693 & 9,473 & -0,699 \\ -6,732 & -0,699 & 5,342 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$$

Couche 4 à 30°

$$\mathbf{Q}'_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 26,290 & 8,176 & 9,451 \\ 8,176 & 11,429 & 3,418 \\ 9,451 & 3,418 & 8,825 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$$

### 3. Matrices A, B et D

$$A_{ij} = (Q'_{ij})_{-30} + (Q'_{ij})_{30} + 1,5 \left[ (Q'_{ij})_{15} + (Q'_{ij})_{-15} \right].$$

D'où :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 158,22 & 30,432 & 0 \\ 30,432 & 51,277 & 0 \\ 0 & 0 & 33,674 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ Nm}^{-1}.$$

De même :

$$B_{ij} = 2 \left[ (Q'_{ij})_{30} - (Q'_{ij})_{-30} \right] + 1,125 \left[ (Q'_{ij})_{-15} - (Q'_{ij})_{15} \right],$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \left\{ 12,25 \left[ (Q'_{ij})_{30} + (Q'_{ij})_{-30} \right] + 3,375 \left[ (Q'_{ij})_{15} + (Q'_{ij})_{-15} \right] \right\}.$$

D'où les matrices **B** et **D** :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 22,659 \\ 0 & 0 & 12,101 \\ 22,659 & 12,101 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 293,93 & 77,332 & 0 \\ 77,332 & 114,65 & 0 \\ 0 & 0 & 84,087 \end{bmatrix} \text{ Nm}.$$

### 4. Matrice de rigidité

La matrice de rigidité de l'équation constitutive s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 158,22 \times 10^6 & 30,432 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 22,659 \times 10^3 \\ 30,432 \times 10^6 & 51,277 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 12,101 \times 10^3 \\ 0 & 0 & 33,676 \times 10^6 & 22,659 \times 10^3 & 12,101 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 22,659 \times 10^3 & 293,93 & 77,332 & 0 \\ 0 & 0 & 12,101 \times 10^3 & 77,332 & 114,65 & 0 \\ 22,659 \times 10^3 & 12,101 \times 10^3 & 0 & 0 & 0 & 84,087 \end{bmatrix}.$$

### 14.4.3.3 Exemple 3

L'influence de l'alternance des couches peut être illustrée en considérant le stratifié de la figure 14.4, obtenu en intervertissant les couches 1 et 2, orientées respectivement à  $15^\circ$  et  $-30^\circ$ , du stratifié (figure 14.3) de l'exemple précédent. Les éléments de la matrice  $\mathbf{A}$  sont exprimés suivant :

$$A_{ij} = (Q'_{ij})_{-30} + (Q'_{ij})_{30} + 1,5 \left[ (Q'_{ij})_{15} + (Q'_{ij})_{-15} \right].$$

La matrice  $\mathbf{A}$  de l'empilement  $[15^\circ/-30^\circ/-15^\circ/30^\circ]$  reste donc inchangée par rapport à celle de l'empilement  $[-30^\circ/15^\circ/-15^\circ/30^\circ]$ .

Les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  se déterminent sans difficulté. Soit :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -13,384 & 5,2247 & -1,6154 \\ 5,2247 & 2,9342 & 5,9258 \\ -1,6154 & 5,9258 & 5,2247 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 327,38 & 64,271 & 60,686 \\ 64,271 & 107,32 & 15,438 \\ 60,686 & 15,438 & 71,025 \end{bmatrix} \text{ Nm}.$$

Le changement d'alternance des couches d'un empilement donné garde inchangée la matrice de rigidité en membrane, alors qu'il modifie les matrices de flexion-torsion et de couplage.

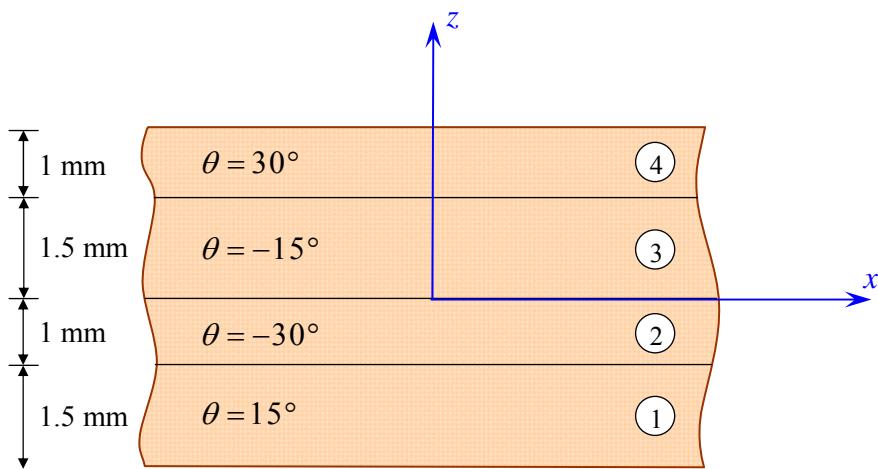


FIGURE 14.4. Stratifié à quatre couches de l'exemple 3.

## 14.5 DÉTERMINATION DES DÉFORMATIONS ET DES CONTRAINTES

### 14.5.1 Problème à résoudre

L'équation constitutive (14.29) exprime les résultantes en membrane  $N_x, N_y, N_{xy}$  et les moments de flexion-torsion  $M_x, M_y, M_{xy}$  en fonction des déformations en membrane  $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \gamma_{xy}^0$  et des courbures  $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ . Les problèmes de conception des structures en matériaux composites nécessite de résoudre le problème inverse : connaissant les résultantes en membrane et les moments, trouver les déformations en membrane et les courbures, puis les contraintes.

### 14.5.2 Déformations en membrane et courbures

L'expression (14.30) peut être écrite en séparant la matrice  $\mathbf{N}$  des résultantes en membrane et la matrice  $\mathbf{M}_f$  des moments :

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}, \quad (14.34)$$

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}. \quad (14.35)$$

De la première relation, nous pouvons extraire les déformations en membrane, soit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}, \quad (14.36)$$

et en reportant dans (14.35), la matrice des moments s'écrit :

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} + (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\boldsymbol{\kappa}. \quad (14.37)$$

Les expressions (14.36) et (14.37) peuvent être réécrites sous une forme semi-inversée :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{A}^*\mathbf{N} + \mathbf{B}^*\boldsymbol{\kappa}, \quad (14.38)$$

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{C}^*\mathbf{N} + \mathbf{D}^*\boldsymbol{\kappa}. \quad (14.39)$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \mathbf{M}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{C}^* & \mathbf{D}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix}, \quad (14.40)$$

en introduisant les matrices  $\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*, \mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{D}^*$ , telles que :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^* &= \mathbf{A}^{-1}, \\
 \mathbf{B}^* &= -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \\
 \mathbf{C}^* &= \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{B}^{*t}, \\
 \mathbf{D}^* &= \mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{B}^*.
 \end{aligned} \tag{14.41}$$

Dans le cas général, les matrices  $\mathbf{A}^*$  et  $\mathbf{D}^*$  sont symétriques, alors que la matrice  $\mathbf{B}^*$  ne l'est pas.

De l'expression (14.39), nous tirons :

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{D}^{*-1}\mathbf{M}_f - \mathbf{D}^{*-1}\mathbf{C}^*\mathbf{N}, \tag{14.42}$$

et en reportant dans (14.38) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = (\mathbf{A}^* - \mathbf{B}^*\mathbf{D}^{*-1}\mathbf{C}^*)\mathbf{N} + \mathbf{B}^*\mathbf{D}^{*-1}\mathbf{M}_f. \tag{14.43}$$

Les deux équations (14.42) et (14.43) peuvent être regroupées sous forme matricielle pour obtenir la forme inverse de l'équation constitutive des stratifiés, soit :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M}_f \end{bmatrix}, \tag{14.44}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}' &= \mathbf{A}^* - \mathbf{B}^*\mathbf{D}^{*-1}\mathbf{C}^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*\mathbf{D}^{*-1}\mathbf{B}^{*t}, \\
 \mathbf{B}' &= \mathbf{B}^*\mathbf{D}^{*-1}, \\
 \mathbf{C}' &= -\mathbf{D}^{*-1}\mathbf{C}^* = \mathbf{B}^{*t}, \\
 \mathbf{D}' &= \mathbf{D}^{*-1}.
 \end{aligned} \tag{14.45}$$

La forme inverse de l'équation constitutive est écrite (14.44) sous une forme analogue à la forme (14.30). Elle fait intervenir des inversions sur des sous-matrices  $3 \times 3$  de la forme directe. La matrice de rigidité inverse peut également être obtenue par inversion directe de la matrice de rigidité introduite en (14.29).

### 14.5.3 Champ des déformations

Le champ des déformations au point  $(x, y, z)$  est déterminé à partir des déformations en membrane et des courbures à l'aide de l'expression (14.14). Compte tenu des hypothèses faites (schéma du premier degré), les déformations  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  et  $\gamma_{xy}$  varient linéairement dans l'épaisseur du stratifié. Les déformations, exprimées dans les axes principaux de la couche d'orientation  $\theta$  par rapport aux axes du stratifié (figure 11.1) s'obtiennent ensuite à partir de la relation générale (6.41) de

changement de base. Dans le cas présent, ces relations sont limitées à trois déformations. Les déformations dans la couche  $k$ , et rapportées aux axes principaux ( $L, T, T'$ ) de cette couche, s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_k = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (14.46)$$

où la matrice de changement d'axes est exprimée suivant :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (14.47)$$

#### 14.5.4 Champ des contraintes

Les contraintes dans la couche  $k$  sont ensuite obtenues par l'une des équations (14.19) ou (14.20). Par exemple :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (14.48)$$

Les contraintes, exprimées par rapport aux axes principaux de la couche, se calculent ensuite soit en effectuant un changement de base sur les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$ , soit directement à partir des déformations  $\varepsilon_L$ ,  $\varepsilon_T$ ,  $\gamma_{LT}$  dans les axes principaux.

Par changement de base, l'expression est obtenue à partir de la relation générale (5.44). Soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_k = \mathbf{T}' \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k, \quad (14.49)$$

en introduisant la matrice :

$$\mathbf{T}' = [\mathbf{T}(-\theta)]^t = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (14.50)$$

Les contraintes dans les axes principaux de la couche  $k$  peuvent également être obtenues à partir des déformations exprimées dans les axes principaux. Les contraintes s'expriment alors suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_k. \quad (14.51)$$

### 14.5.5 Exemple

Les efforts imposés à une structure constituée d'un matériau stratifié sont tels qu'ils se réduisent en un point à des résultantes de membrane  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  (figure 14.5). Déterminer au point considéré :

1. les déformations en membrane et les courbures ;
2. les déformations dans chaque couche rapportées aux axes du stratifié, puis aux axes principaux des couches ;
3. les contraintes dans chaque couche rapportées aux axes du stratifié, puis aux axes principaux des couches ;

dans le cas où le matériau stratifié est celui de l'exemple 3 du paragraphe 14.4.3.3 (figure 14.4) et les valeurs des résultantes de membrane sont :

$$N_x = 1\,000 \text{ N/mm}, \quad N_y = 500 \text{ N/mm}, \quad N_{xy} = 250 \text{ N/mm}.$$

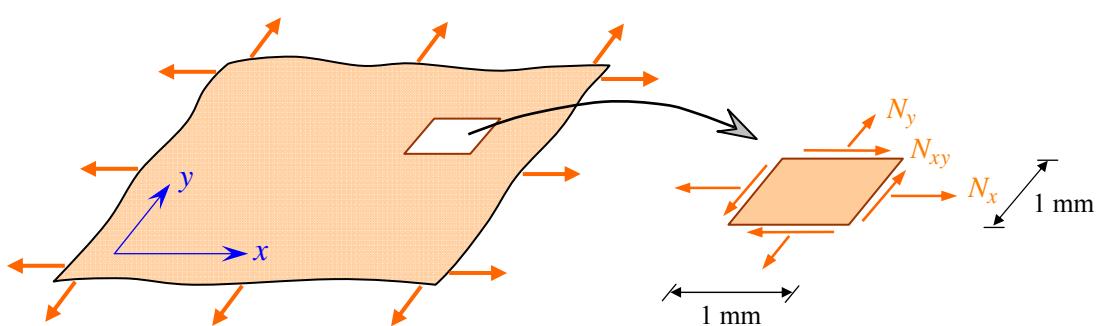


FIGURE 14.5. Efforts en membrane exercés en un point d'un stratifié.

## 1. Déformations en membrane et courbures

Compte tenu des résultats établis dans l'exemple 3 du paragraphe 14.4.3.3, l'équation constitutive du stratifié s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 250 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3 = \begin{bmatrix} 158,22 \times 10^6 & 30,432 \times 10^6 & 0 & -13,384 \times 10^3 & 5,2247 \times 10^3 & -1,6154 \times 10^3 \\ 30,432 \times 10^6 & 51,277 \times 10^6 & 0 & 5,2247 \times 10^3 & 2,9342 \times 10^3 & 5,9258 \times 10^3 \\ 0 & 0 & 33,674 \times 10^6 & -1,6154 \times 10^3 & 5,9258 \times 10^3 & 5,2247 \times 10^3 \\ -13,384 \times 10^3 & 5,2247 \times 10^3 & -1,6154 \times 10^3 & 327,38 & 64,271 & 60,686 \\ 5,2247 \times 10^3 & 2,9342 \times 10^3 & 5,9258 \times 10^3 & 64,271 & 107,32 & 15,438 \\ -1,6154 \times 10^3 & 5,9258 \times 10^3 & 5,2247 \times 10^3 & 60,686 & 15,438 & 71,025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}.$$

Par inversion directe ou par blocs, l'équation inverse s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,207 & -4,322 & 0,069 & 0,415 \times 10^3 & -0,525 \times 10^3 & 0,279 \times 10^3 \\ -4,322 & 22,297 & 0,279 & -0,187 \times 10^3 & -0,042 \times 10^3 & -1,810 \times 10^3 \\ 0,069 & 0,279 & 30,508 & 1,032 \times 10^3 & -1,920 \times 10^3 & -2,730 \times 10^3 \\ 0,415 \times 10^3 & -0,187 \times 10^3 & 1,032 \times 10^3 & 4,052 \times 10^6 & -2,058 \times 10^6 & -3,065 \times 10^6 \\ -0,525 \times 10^3 & -0,042 \times 10^3 & -1,920 \times 10^3 & -2,058 \times 10^6 & 10,747 \times 10^6 & -0,445 \times 10^6 \\ 0,279 \times 10^3 & -1,810 \times 10^3 & -2,730 \times 10^3 & -3,065 \times 10^6 & -0,445 \times 10^6 & 17,15 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

D'où les déformations en membrane et courbures :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= 5,064 \times 10^{-3}, & \kappa_x &= 0,580, \\ \varepsilon_{yy}^0 &= 6,897 \times 10^{-3}, & \kappa_y &= -1,027, \\ \gamma_{xy}^0 &= 7,836 \times 10^{-3}, & \kappa_{xy} &= -1,309. \end{aligned}$$

Dans l'équation inverse ci-dessus, nous noterons que la matrice inverse est

symétrique, comme la matrice de rigidité de l'équation constitutive. Il en est de même des matrices-blocs  $\mathbf{A}'$  et  $\mathbf{D}'$ . Par contre, les matrices-blocs  $\mathbf{C}'$  et  $\mathbf{B}'$  (transposées l'une de l'autre) ne sont pas symétriques.

## 2. Déformations dans les couches

Les déformations rapportées aux axes ( $x, y$ ) de référence sont déduites de la relation (14.14) et sont exprimées suivant :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,064 \\ 6,897 \\ 7,836 \end{bmatrix} \times 10^{-3} + \begin{bmatrix} 0,580 \\ -1,027 \\ -1,309 \end{bmatrix} z.$$

Les variations des déformations  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  et  $\gamma_{xy}$  en fonction de  $z$  sont reportées sur la figure 14.6.

Les déformations dans chaque couche, rapportées aux axes principaux de la couche, sont ensuite obtenues à partir de la relation (14.46). Soit pour la couche  $k$  du stratifié considéré :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_k = \mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k z, \quad (14.52)$$

avec

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_k = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (14.53)$$

où  $\mathbf{T}$  est la matrice de changement d'axes définie en (14.47). Nous en déduisons :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 8,914 \\ 3,045 \\ 5,505 \end{bmatrix} \times 10^{-3} + \begin{bmatrix} -0,388 \\ -0,058 \\ -2,046 \end{bmatrix} z, \quad 1,5 \text{ mm} \leq z \leq 2,5 \text{ mm},$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} 2,129 \\ 9,831 \\ 2,330 \end{bmatrix} \times 10^{-3} + \begin{bmatrix} 0,745 \\ -1,192 \\ 0,737 \end{bmatrix} z, \quad -1 \text{ mm} \leq z \leq 0,$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_{15^\circ} = \begin{bmatrix} 7,145 \\ 4,815 \\ 7,702 \end{bmatrix} \times 10^{-3} + \begin{bmatrix} 0,145 \\ -0,592 \\ -1,937 \end{bmatrix} z, \quad -2,5 \text{ mm} \leq z \leq -1 \text{ mm},$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_{-15^\circ} = \begin{bmatrix} 3,227 \\ 8,733 \\ 5,869 \end{bmatrix} \times 10^{-3} + \begin{bmatrix} 0,799 \\ -1,246 \\ -0,330 \end{bmatrix} z, \quad 0 \leq z \leq 1,5 \text{ mm.}$$

D'où les relations donnant les déformations  $\varepsilon_L$ ,  $\varepsilon_T$ ,  $\gamma_{LT}$  en fonction de la coordonnée  $z$  :

$$\begin{aligned} -2,5 \text{ mm} \leq z \leq -1 \text{ mm} \\ \varepsilon_L = 7,145 \times 10^{-3} + 0,145z, \\ \varepsilon_T = 4,815 \times 10^{-3} - 0,592z, \\ \gamma_{LT} = 7,702 \times 10^{-3} - 1,936z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 \text{ mm} \leq z \leq 0 \\ \varepsilon_L = 2,129 \times 10^{-3} + 0,745z, \\ \varepsilon_T = 9,831 \times 10^{-3} - 1,191z, \\ \gamma_{LT} = 2,330 \times 10^{-3} + 0,737z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq 1,5 \text{ mm} \\ \varepsilon_L = 3,227 \times 10^{-3} + 0,799z, \\ \varepsilon_T = 8,733 \times 10^{-3} - 1,246z, \\ \gamma_{LT} = 5,869 \times 10^{-3} - 0,330z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1,5 \text{ mm} \leq z \leq 2,5 \text{ mm} \\ \varepsilon_L = 8,914 \times 10^{-3} + 0,388z, \\ \varepsilon_T = 3,046 \times 10^{-3} - 0,058z, \\ \gamma_{LT} = 5,505 \times 10^{-3} - 2,046z. \end{aligned}$$

Les variations des déformations  $\varepsilon_L$ ,  $\varepsilon_T$ ,  $\gamma_{LT}$  dans l'épaisseur du stratifié sont reportées sur la figure 14.6.

### 3. Contraintes dans les couches

Les contraintes dans chaque couche, rapportées aux axes de référence ( $x$ ,  $y$ ), s'écrivent, d'après les relations (14.19) ou (14.20), suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \mathbf{A}_{1k} + \mathbf{B}_{1k} z, \quad (14.54)$$

avec

$$\mathbf{A}_{1k} = \mathbf{Q}'_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{1k} = \mathbf{Q}'_k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (14.55)$$

où les matrices  $\mathbf{Q}'_k$  sont les matrices de rigidité des différentes couches, qui ont été déterminées dans l'exemple 2 (paragraphe 14.4.3.2). Nous en déduisons :

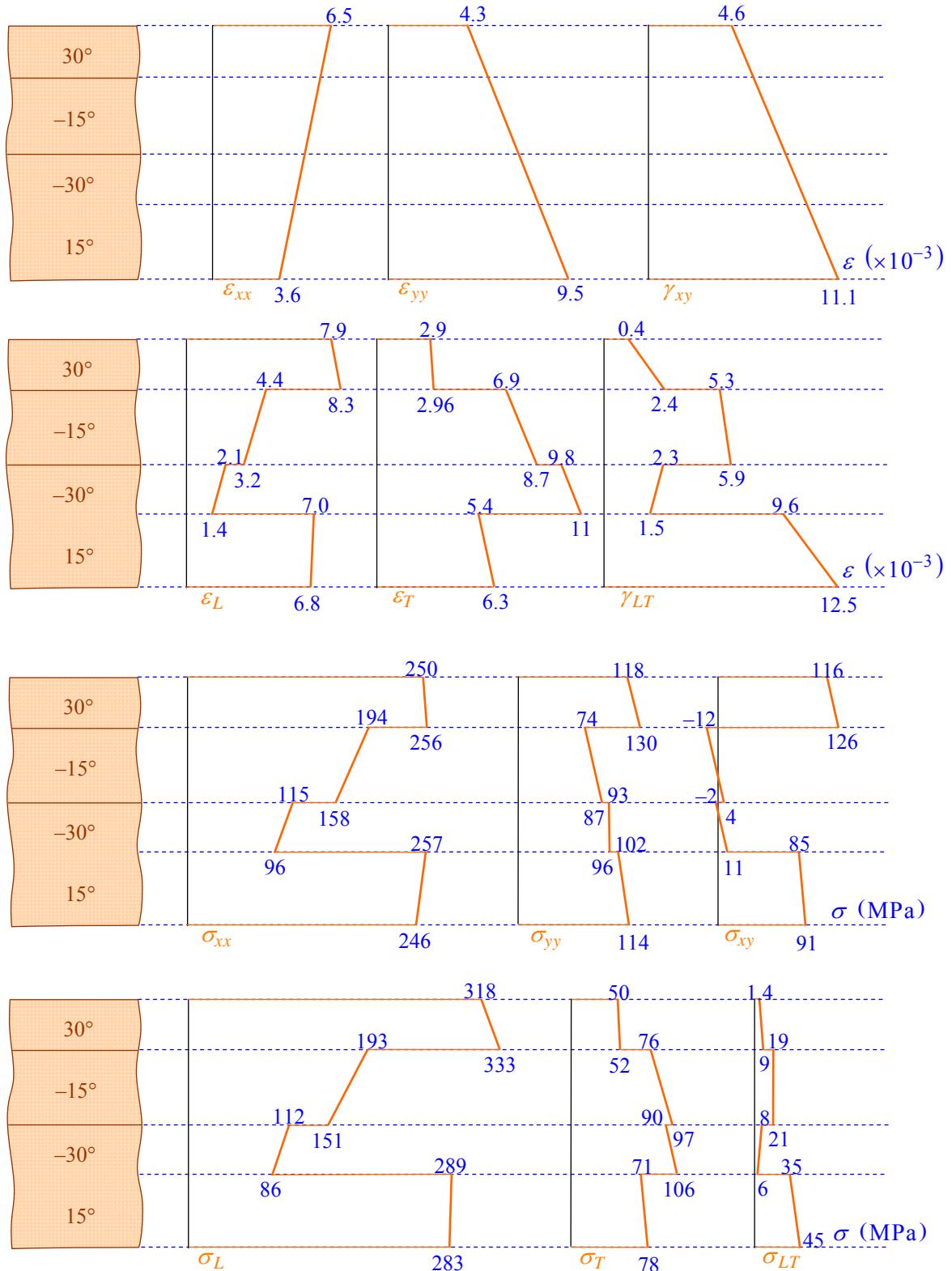


FIGURE 14.6. Contraintes et déformations dans l'épaisseur du stratifié.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 263,564 \\ 147,009 \\ 140,579 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5522,83 \\ -11467,79 \\ -9580,17 \end{bmatrix} z, \text{ (MPa)} \quad 1,5 \text{ mm} \leq z \leq 2,5 \text{ mm},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} 115,451 \\ 93,440 \\ -2,284 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 19217,67 \\ -2519,78 \\ -13520,26 \end{bmatrix} z, \text{ (MPa)} \quad -1 \text{ mm} \leq z \leq 0,$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{15^\circ} = \begin{bmatrix} 263,411 \\ 94,571 \\ 80,758 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6785,75 \\ -7919,24 \\ -3805,83 \end{bmatrix} z, \text{ (MPa)} \quad -2,5 \text{ mm} \leq z \leq -1 \text{ mm},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{-15^\circ} = \begin{bmatrix} 157,918 \\ 83,622 \\ 2,951 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24407,03 \\ -6090,45 \\ -10176,80 \end{bmatrix} z, \text{ (MPa)} \quad 0 \leq z \leq 1,5 \text{ mm}.$$

Les variations des contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  dans l'épaisseur du stratifié sont reportées sur la figure 14.6.

Les contraintes dans chaque couche, rapportées aux axes principaux de la couche considérée, sont ensuite déterminées à partir de la relation (14.49). Soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_k = \mathbf{A}_{2k} + \mathbf{B}_{2k} z, \quad (14.56)$$

avec

$$\mathbf{A}_{2k} = \mathbf{T}' \mathbf{A}_{1k}, \quad \mathbf{B}_{2k} = \mathbf{T}' \mathbf{B}_{1k}, \quad (14.57)$$

où  $\mathbf{T}'$  est la matrice de changement d'axes pour les contraintes définie en (14.50). Nous en déduisons :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 356,170 \\ 54,402 \\ 19,820 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15305,74 \\ -1684,88 \\ -7364,33 \end{bmatrix} z, \text{ (MPa)} \quad 1,5 \text{ mm} \leq z \leq 2,5 \text{ mm},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} 111,926 \\ 96,965 \\ 8,389 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25492,20 \\ -8794,31 \\ 2652,46 \end{bmatrix} z, \text{ (MPa)} \quad -1 \text{ mm} \leq z \leq 0,$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{15^\circ} = \begin{bmatrix} 292,480 \\ 65,502 \\ 27,728 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3987,79 \\ -5031,28 \\ -6972,19 \end{bmatrix} z, \quad (\text{MPa}) \quad -2,5 \text{ mm} \leq z \leq -1 \text{ mm},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{-15^\circ} = \begin{bmatrix} 151,466 \\ 90,074 \\ 21,130 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 27452,49 \\ -9135,91 \\ -1189,00 \end{bmatrix} z, \quad (\text{MPa}) \quad 0 \leq z \leq 1,5 \text{ mm}.$$

Les variations des contraintes  $\sigma_L$ ,  $\sigma_T$  et  $\sigma_{LT}$  dans l'épaisseur du stratifié sont reportées sur la figure 14.6. Ces variations permettent d'évaluer les conditions de première rupture du stratifié en appliquant, à chaque couche, les critères de rupture considérés au chapitre 12.

## EXERCICES

**14.1** Un stratifié [0/30/45] est constitué de trois couches de même épaisseur  $e = 1$  mm et de mêmes caractéristiques mécaniques :

$$E_L = 45 \text{ GPa}, \quad E_T = 10 \text{ GPa}, \quad G_{LT} = 4,5 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,31.$$

Calculer la matrice de rigidité du stratifié.

**14.2** Les couches considérées dans l'exercice 14.1, d'épaisseurs égales à 0,5 mm, constituent maintenant un stratifié symétrique [0/30/45]<sub>s</sub>.

Calculer la nouvelle matrice de rigidité. Comparer avec la matrice précédente.

**14.3** Reprendre les exercices 14.1 et 14.2, en intervertissant l'ordre des couches : [45/30/0] et [45/30/0]<sub>s</sub>. Comparer les résultats obtenus.

**14.4** Reprendre les exercices 14.1 et 14.2 dans le cas où l'orientation des couches est modifiée suivant [0/45/90].

**14.5** Établir une procédure de calcul numérique ayant :

— pour entrées :

- le nombre de couches  $n$ ,
- les modules  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $G_{LT}$ , et l'orientation de chaque couche ;

— pour sortie : la matrice de rigidité du stratifié constitué des  $n$  couches.

Appliquer cette procédure pour retrouver les résultats des exercices 14.1 à 14.4.

**14.6** Établir une procédure de calcul numérique ayant :

— pour entrées :

- la matrice de rigidité d'un stratifié,
- les résultantes en membrane et les moments de flexions et de torsion ;

— pour sorties :

- la matrice de rigidité inverse,
- les déformations en membrane et les courbures,
- les déformations dans les axes principaux de chaque couche,
- les contraintes dans les axes principaux de chaque couche.

Coupler cette procédure à la procédure mise en place dans l'exercice précédent.

Appliquer l'ensemble aux cas où les stratifiés des exercices 14.1 et 14.2 sont soumis aux résultantes et moments de valeurs :

$$N_x = 2,5 \text{ kN/mm}, \quad N_y = 1,5 \text{ kN/mm}, \quad N_{xy} = 1 \text{ kN/mm},$$

$$M_x = 20 \text{ Nm/mm}, \quad M_y = 15 \text{ Nm/mm}, \quad M_{xy} = 10 \text{ Nm/mm}.$$

## CHAPITRE 15

# Influence de l'Empilement des Couches Étude des Matériaux à Renfort Tissu

L'empilement des couches (nature des couches, orientation, séquence d'empilement, etc.) conditionne la structure de la matrice de rigidité, dont la forme générale est donnée par la relation (14.29). La première partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de cas particuliers de stratifiés pour lesquels la matrice de rigidité a une forme simplifiée. L'étude sera effectuée en suivant approximativement un ordre croissant de complexité. L'ensemble des types de stratifiés étudiés constituera une bonne référence des stratifiés usuels. Assez souvent, la réalisation des stratifiés est faite à partir de couches, qui ont les mêmes caractéristiques (mêmes constituants, mêmes configurations géométriques, mêmes épaisseurs, etc.), mais ont des orientations différentes des axes des matériaux par rapport aux axes de référence du stratifié. Une attention particulière sera donc portée sur ce type de matériau. La deuxième partie du chapitre s'intéressera aux caractéristiques des couches à renfort tissu ou mat, en relation avec les divers paramètres du renfort tissu ou mat.

## 15.1 INFLUENCE DE L'EMPILEMENT DES COUCHES

### 15.1.1 Cas d'une couche

#### 15.1.1.1 Couche isotrope

Dans le cas d'une plaque en matériau homogène isotrope, le comportement élastique est décrit par le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ . La matrice de rigidité réduite en contraintes planes est :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}. \quad (15.1)$$

Les matrices de rigidité de la couche sont aisément déduites des expressions (14.31) à (14.33). Soit :

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{Ee}{1-\nu^2} = A, & D_{11} &= \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} = D, \\
 A_{12} &= \frac{\nu Ee}{1-\nu^2} = \nu A, & D_{12} &= \nu D, \\
 A_{22} &= A_{11} = A, & B_{ij} &= 0, & D_{22} &= D_{11} = D, \\
 A_{16} &= A_{26} = 0, & & & D_{16} &= D_{26} = 0, \\
 A_{66} &= \frac{Ee}{2(1+\nu)} = \frac{1-\nu}{2} A, & D_{66} &= \frac{Ee^3}{24(1+\nu)} = \frac{1-\nu}{2} D, \\
 & \text{avec } D = A \frac{e^2}{12},
 \end{aligned} \tag{15.2}$$

où  $e$  est l'épaisseur de la plaque.

D'où l'équation constitutive :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \nu A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu A & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & \nu D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \tag{15.3}$$

Cette équation montre que les résultantes en membrane ( $N_x, N_y, N_{xy}$ ) dépendent uniquement des déformations en membrane ( $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \gamma_{xy}^0$ ) et les moments de flexion et torsion ( $M_x, M_y, M_{xy}$ ) dépendent uniquement des courbures du plan moyen ( $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ ). Dans le cas d'une plaque isotrope, il n'existe donc pas de couplage membrane-flexion/torsion.

### 15.1.1.2 Couche orthotrope rapportée à ses axes principaux

Pour une couche orthotrope, d'épaisseur  $e$ , dont les axes du matériau sont confondus avec les axes de référence de la plaque (axes de référence des contraintes et déformations exercées sur la plaque), la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, & Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11}, \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \nu_{LT} Q_{22}, & Q_{66} &= G_{LT}. \end{aligned}$$

D'où l'expression des coefficients de rigidité du stratifié, déduites des relations (14.31) à (14.33) :

$$\begin{aligned} A_{11} &= Q_{11}e, & D_{11} &= Q_{11} \frac{e^3}{12}, \\ A_{12} &= Q_{12}e, & D_{12} &= Q_{12} \frac{e^3}{12}, \\ A_{22} &= Q_{22}e, & B_{ij} &= 0, & D_{22} &= Q_{22} \frac{e^3}{12}, \\ A_{16} &= A_{26} = 0, & D_{16} &= D_{26} = 0, \\ A_{66} &= Q_{66}e, & D_{66} &= Q_{66} \frac{e^3}{12}, \\ \text{avec } D_{ij} &= A_{ij} \frac{e^2}{12}. \end{aligned} \tag{15.4}$$

L'équation constitutive de la plaque s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \tag{15.5}$$

Comme dans le cas d'un matériau isotrope, les résultantes en membrane ne dépendent que des déformations de membrane et les moments ne dépendent que des courbures.

### 15.1.1.3 Couche orthotrope non rapportée à ses axes

Dans le cas où les axes du matériau de la couche orthotrope ne coïncident pas avec les axes de référence des contraintes, la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$\mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix},$$

où les coefficients  $Q'_{ij}$  hors axes sont définis dans le tableau 11.6 en fonction des coefficients  $Q_{ij}$  dans les axes du matériau. Les coefficients de rigidité de la plaque s'expriment alors suivant :

$$A_{ij} = Q'_{ij}e, \quad B_{ij} = 0, \quad D_{ij} = Q'_{ij} \frac{e^3}{12} = A_{ij} \frac{e^2}{12}. \quad (15.6)$$

L'équation constitutive de la plaque orthotrope s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (15.7)$$

Nous constatons à nouveau l'absence de couplage membrane-flexion/torsion. Toutefois, contrairement au cas d'une plaque isotrope ou d'une plaque orthotrope dont les axes principaux coïncident avec les axes de référence de la plaque, nous observons que les résultantes normales ( $N_x, N_y$ ) dépendent des déformations axiales  $\varepsilon_{xx}^0$  et  $\varepsilon_{yy}^0$ , ainsi que de la déformation en cisaillement  $\gamma_{xy}^0$ . Il existe donc dans ce cas un couplage traction-cisaillement.

De la même manière, les composantes des moments dépendent toutes des courbures en flexion  $\kappa_x, \kappa_y$ , et de la courbure en torsion  $\kappa_{xy}$ . Il existe donc également un couplage flexion-torsion.

Le couplage traction-cisaillement peut être illustré en appliquant un déplacement  $(u, 0, 0)$  à une plaque orthotrope dont la direction  $L$  fait un angle  $\theta$  avec l'axe de référence des déplacements (figure 15.1). La figure 15.2 montre la déformée obtenue par un calcul d'éléments finis, dans le cas d'un composite unidirectionnel dont la direction  $L$  fait un angle  $\theta = 45^\circ$  avec la direction  $x$ . Le couplage traction-cisaillement introduit une déformation en S de la plaque.

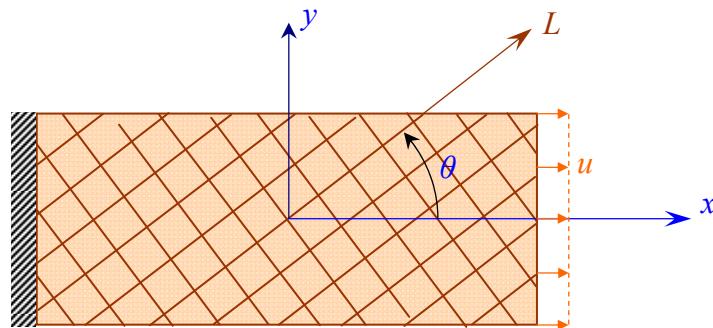
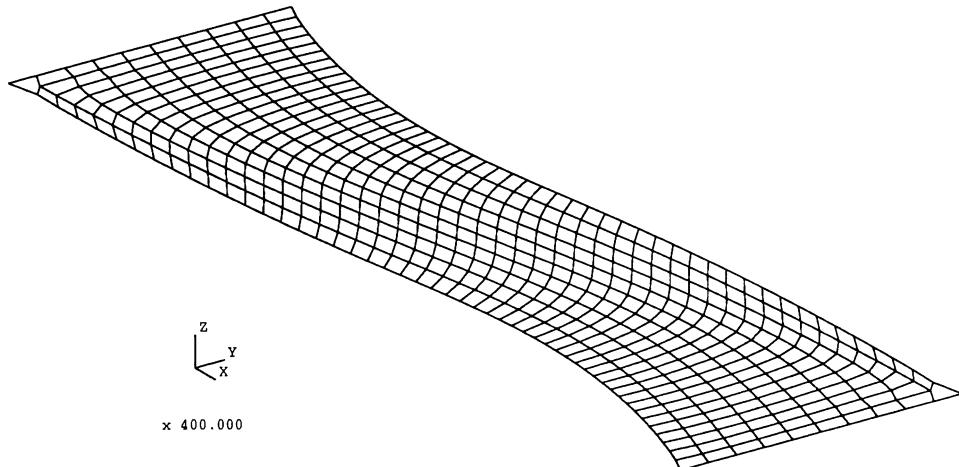


FIGURE 15.1. Plaque soumise à une traction suivant l'axe x.

FIGURE 15.2. Déformée d'une plaque unidirectionnelle soumise à une traction à  $45^\circ$  des directions des fibres.

## 15.1.2 Stratifiés symétriques

### 15.1.2.1 Cas général

Un stratifié est symétrique (chapitre 3) si le plan moyen est plan de symétrie. Deux couches symétriques ont :

- la même matrice de rigidité réduite  $[Q'_{ij}]_k$ ,
- la même épaisseur  $e_k$ ,
- des cotes opposées  $z_k$  et  $-z_k$ .

Il en résulte que les coefficients  $B_{ij}$  de la matrice de rigidité du stratifié sont nuls. L'équation constitutive est de la forme générale :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (15.8)$$

La matrice de rigidité est de la même forme que celle obtenue en (15.7). Il n'existe donc pas de couplage membrane-flexion dans le cas des stratifiés symétriques. Il en résulte que le comportement des stratifiés symétriques est plus simple à analyser que celui des stratifiés présentant un couplage membrane-flexion/torsion. En outre, les stratifiés symétriques ne présentent pas une tendance au gauchissement due aux déformations (contractions) induites lors du refroidissement consécutif au processus de mise en œuvre des matériaux.

Les stratifiés symétriques sont donc largement utilisés, à moins que des conditions spécifiques nécessitent un stratifié non symétrique. Par exemple, un stratifié utilisé comme bouclier thermique, et exposé à une source thermique sur une seule de ses faces, sera conçu suivant une structure non symétrique.

### 15.1.2.2 Stratifiés symétriques dont les axes des matériaux de toutes les couches coïncident avec les axes du stratifié

La matrice de rigidité réduite de chaque couche est dans ce cas de la forme :

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & 0 \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^k \end{bmatrix},$$

où les coefficients de rigidité réduite s'expriment en fonction des modules de l'ingénieur de chaque couche suivant les relations :

$$\begin{aligned} Q_{11}^k &= \frac{E_L^k}{1 - \nu_{LT}^{k,2} \frac{E_T^k}{E_L^k}}, & Q_{22}^k &= \frac{E_T^k}{1 - \nu_{LT}^{k,2} \frac{E_T^k}{E_L^k}} = \frac{E_T^k}{E_L^k} Q_{11}^k, \\ Q_{12}^k &= \frac{\nu_{LT}^k E_T^k}{1 - \nu_{LT}^{k,2} \frac{E_T^k}{E_L^k}} = \nu_{LT}^k Q_{22}^k, & Q_{66}^k &= G_{LT}^k. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Les coefficients de rigidité du stratifié s'expriment donc suivant :

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \sum_{k=1}^n Q_{11}^k e_k, & D_{11} &= \sum_{k=1}^n Q_{11}^k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right), \\
A_{12} &= \sum_{k=1}^n Q_{12}^k e_k, & D_{12} &= \sum_{k=1}^n Q_{12}^k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right), \\
A_{22} &= \sum_{k=1}^n Q_{22}^k e_k, & B_{ij} = 0, & D_{22} = \sum_{k=1}^n Q_{22}^k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right), \quad (15.10) \\
A_{16} &= A_{26} = 0, & D_{16} &= D_{26} = 0, \\
A_{66} &= \sum_{k=1}^n Q_{66}^k e_k, & D_{66} &= \sum_{k=1}^n Q_{66}^k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right).
\end{aligned}$$

D'où l'équation constitutive du stratifié :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (15.11)$$

Nous retrouvons une équation identique à (15.5). Outre l'absence de couplage membrane-flexion/torsion, il y a également absences de couplages en traction-cisaillement et en torsion-flexion.

### 15.1.3 Stratifiés antisymétriques

Les stratifiés symétriques sont utilisés afin d'éliminer le couplage entre membrane et flexion. Par contre, certaines applications nécessitent l'utilisation de stratifiés non symétriques. Par exemple, le couplage membrane-flexion est nécessaire dans la conception de turbine à ailettes ayant un profil gauche. Également, dans le cas où une meilleure rigidité en cisaillement est recherchée, il est nécessaire d'avoir des couches possédant différentes orientations.

Un stratifié antisymétrique est constitué de couches en nombre pair, dont la répartition des épaisseurs est symétrique, et celle des orientations des axes des matériaux est antisymétrique par rapport au plan moyen. Deux couches de cotes symétriques ont donc :

- des cotes opposées  $z_k$  et  $-z_k$ ,
- la même épaisseur  $e_k$ ,
- des orientations  $\theta$  et  $-\theta$  par rapport aux axes de référence du stratifié.

La matrice de rigidité réduite de la couche d'orientation  $\theta$  est :

$$\mathbf{Q}'_{+\theta} = \begin{bmatrix} Q'_{11+\theta} & Q'_{12+\theta} & Q'_{16+\theta} \\ Q'_{12+\theta} & Q'_{22+\theta} & Q'_{26+\theta} \\ Q'_{16+\theta} & Q'_{26+\theta} & Q'_{66+\theta} \end{bmatrix}$$

Celle de la couche d'orientation  $-\theta$  :

$$\mathbf{Q}'_{-\theta} = \begin{bmatrix} Q'_{11-\theta} & Q'_{12-\theta} & Q'_{16-\theta} \\ Q'_{12-\theta} & Q'_{22-\theta} & Q'_{26-\theta} \\ Q'_{16-\theta} & Q'_{26-\theta} & Q'_{66-\theta} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} Q'_{16-\theta} &= -Q'_{16+\theta}, & Q'_{26-\theta} &= -Q'_{26+\theta}, \\ Q'_{ij-\theta} &= Q'_{ij+\theta} \quad \text{si } ij = 11, 12, 22, 66. \end{aligned} \tag{15.12}$$

D'où les coefficients de rigidité d'un stratifié antisymétrique constitué de  $n = 2p$  couches :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 2 \sum_{k=1}^p Q'_{ij}^k e_k & \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\ A_{ij} &= 0 & \text{si } ij = 16, 26, \\ B_{ij} &= 0 & \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\ B_{ij} &= 2 \sum_{k=1}^p Q'_{ij}^k e_k z_k & \text{si } ij = 16, 26, \\ D_{ij} &= 2 \sum_{k=1}^p Q'_{ij}^k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) & \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\ D_{ij} &= 0 & \text{si } ij = 16, 26. \end{aligned} \tag{15.13}$$

L'équation constitutive d'un stratifié antisymétrique s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \tag{15.14}$$

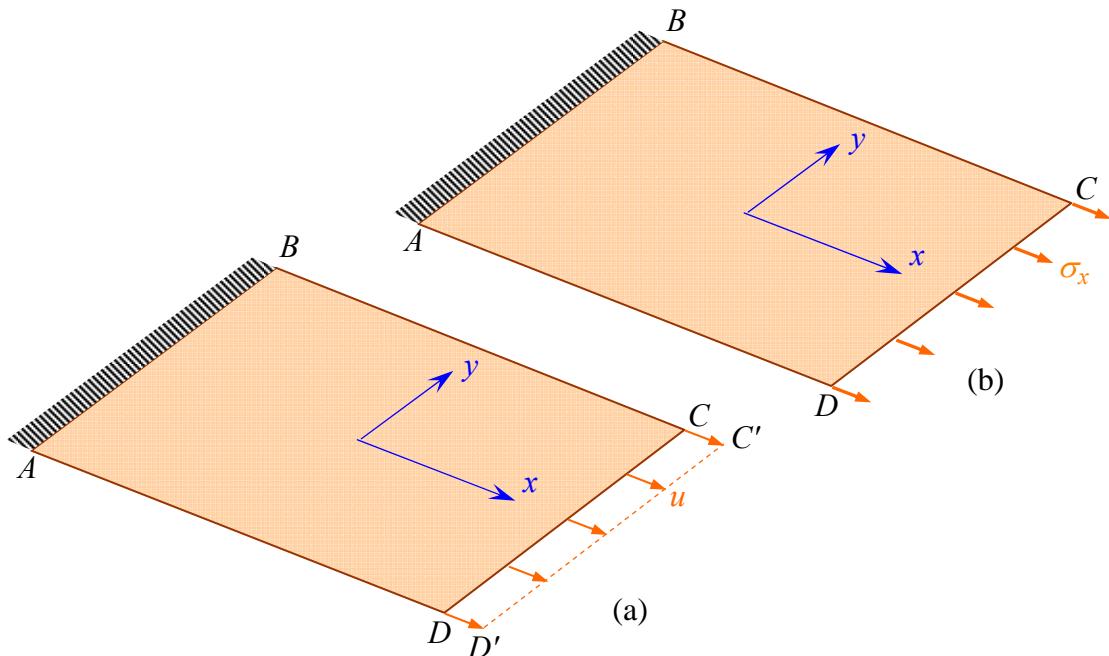


FIGURE 15.3. Plaque soumise à une traction suivant la direction  $x$  : (a) déplacements imposés et (b) contraintes imposées.

L'équation constitutive (15.14) montre l'existence d'un couplage membranetorsion, résultant des termes  $B_{16}$  et  $B_{26}$ . L'effet de ce couplage peut être illustré en imposant à une plaque constituée d'un stratifié antisymétrique et encastrée sur le côté  $AB$ , d'une part un déplacement  $(u, 0, 0)$  du côté  $CD$  (figure 15.3.1) et d'autre part une contrainte  $(\sigma_x, 0, 0)$  sur la face  $CD$  (figure 15.3.2).

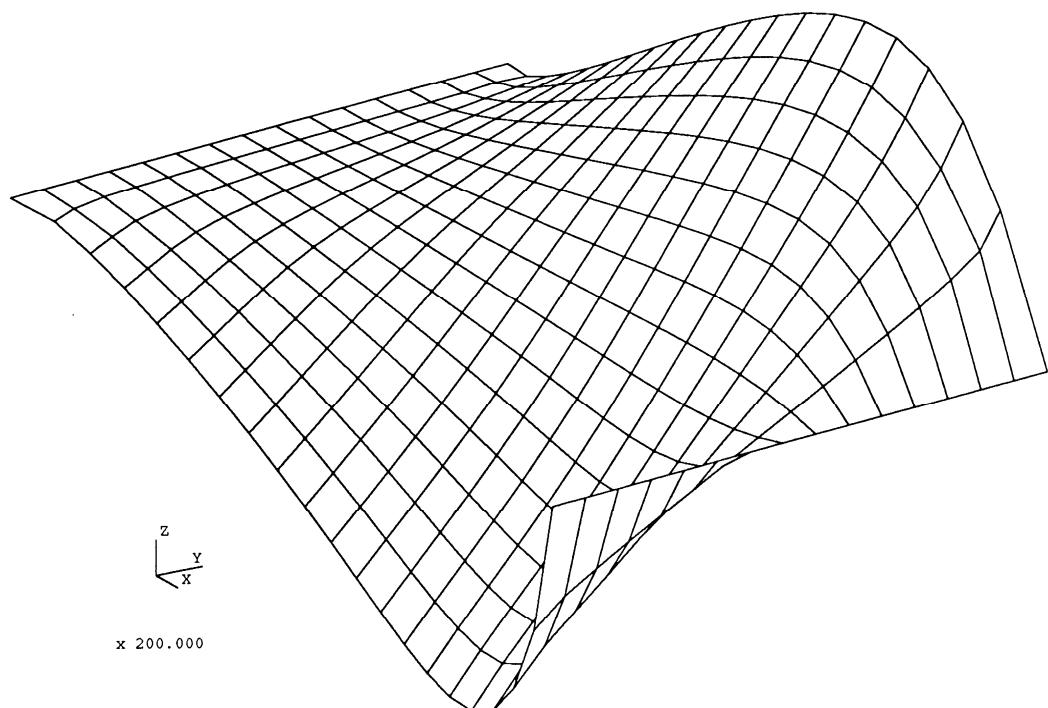
Les figures 15.4 montrent les déformées obtenues dans les deux modes de sollicitations. Les déformations sont amplifiées de manière à montrer les effets du couplage. Ces figures mettent en évidence la déformation en torsion qui se superpose à la déformation en traction de la plaque.

## 15.1.4 Stratifiés croisés

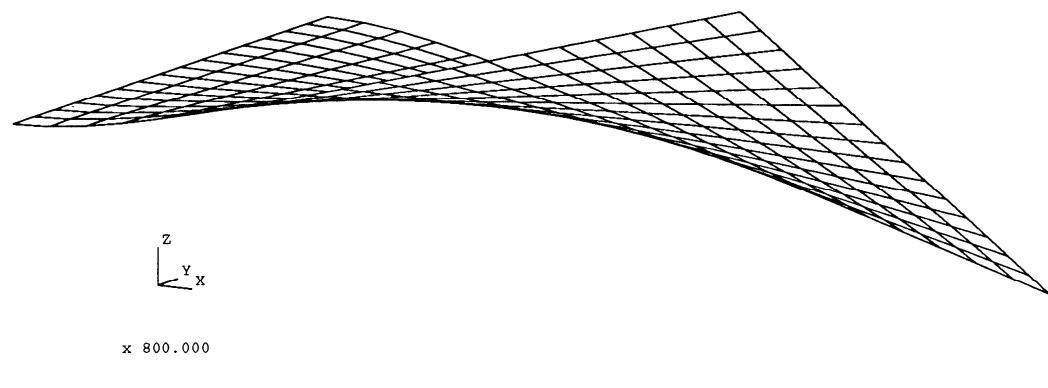
### 15.1.4.1 Cas général

Un stratifié croisé est constitué de couches dont les directions principales sont orientées alternativement à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport aux directions de référence du stratifié (figure 15.5). La matrice de rigidité réduite des couches à  $0^\circ$  est :

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}. \quad (15.15)$$



(a)



(b)

FIGURE 15.4. Couplage traction-torsion dans le cas d'un stratifié antisymétrique : (a) déplacements imposés et (b) contraintes imposées.

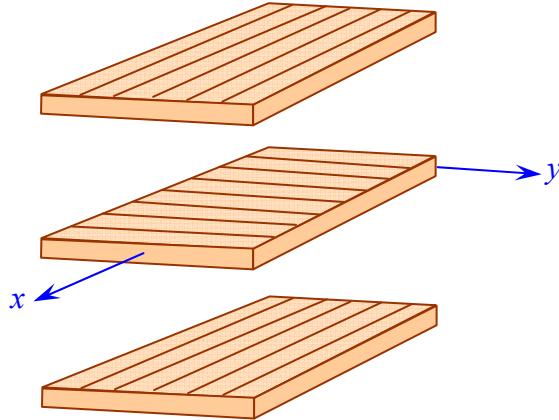


FIGURE 15.5. Stratifié croisé.

Les coefficients de rigidité des couches à 90° sont :

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{22}, & Q'_{12} &= Q_{12}, & Q'_{16} &= 0, \\ Q'_{22} &= Q_{11}, & Q'_{26} &= 0, & Q'_{66} &= Q_{66}, \end{aligned} \quad (15.16)$$

et la matrice de rigidité des couches à 90° s'exprime suivant :

$$\mathbf{Q}_{90} = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}. \quad (15.17)$$

Les coefficients de rigidité  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  et  $D_{ij}$  déduits des expressions (14.31) à (14.33) pour un stratifié croisé sont reportés dans le tableau 15.1. Compte tenu de ces résultats, l'équation constitutive d'un stratifié croisé est donc de la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (15.18)$$

#### 15.1.4.2 Cas particuliers pratiques

Un cas particulier mais de grande importance pratique est le cas où les couches à 0° ont même épaisseur, les couches à 90° ayant également la même épaisseur,

TABLEAU 15.1. Expression des coefficients de rigidité d'un stratifié croisé.

---


$$\begin{aligned} A_{11} &= Q_{11}e_0 + Q_{22}e_{90}, & A_{12} &= Q_{12}e, & A_{16} &= 0, \\ A_{22} &= Q_{22}e_0 + Q_{11}e_{90}, & A_{26} &= 0, & A_{66} &= Q_{66}e, \end{aligned}$$

avec

$$e_0 = \text{épaisseur totale des couches à } 0^\circ,$$

$$e_{90} = \text{épaisseur totale des couches à } 90^\circ,$$

$$e = \text{épaisseur du stratifié} \quad e = e_0 + e_{90}.$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= Q_{11}b_0 + Q_{22}b_{90}, & B_{12} &= Q_{12}b, & B_{16} &= 0, \\ B_{22} &= Q_{22}b_0 + Q_{11}b_{90}, & B_{26} &= 0, & B_{66} &= Q_{66}b, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} b_0 &= \sum_{\text{couches à } 0^\circ} e_p z_p, & b_{90} &= \sum_{\text{couches à } 90^\circ} e_q z_q, \\ b &= \sum_{k=1}^n e_k z_k = b_0 + b_{90}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{11} &= Q_{11}d_0 + Q_{22}d_{90}, & D_{12} &= Q_{12}d, & D_{16} &= 0, \\ D_{22} &= Q_{22}d_0 + Q_{11}d_{90}, & D_{26} &= 0, & D_{66} &= Q_{66}d, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} d_0 &= \sum_{\text{couches à } 0^\circ} \left( \frac{e_p^3}{12} + e_p z_p^2 \right), \\ d_{90} &= \sum_{\text{couches à } 90^\circ} \left( \frac{e_q^3}{12} + e_q z_q^2 \right), \\ d &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{e_k^3}{12} + e_k z_k^2 \right) = d_0 + d_{90}. \end{aligned}$$


---

mais pas nécessairement une épaisseur identique à celle des couches à  $0^\circ$ . Il est toujours possible de choisir l'axe  $x$  de référence de la plaque de manière qu'il coïncide avec la direction  $0^\circ$  de la couche inférieure du stratifié. Il en résulte que les couches orientées à  $0^\circ$  coïncident avec les couches impaires et les couches orientées à  $90^\circ$  avec les couches paires. Si le nombre total de couches est impair (figure 15.6a), le stratifié est symétrique. Si le nombre total de couches est pair (figure 15.6b), le stratifié est dit antisymétrique. Ce n'est toutefois pas un stratifié antisymétrique au sens des stratifiés considérés au paragraphe 15.1.2. Un stratifié croisé est caractérisé par le nombre total  $n$  de couches à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$ , ainsi que par le rapport entre l'épaisseur totale des couches orientées à  $0^\circ$  et l'épaisseur totale

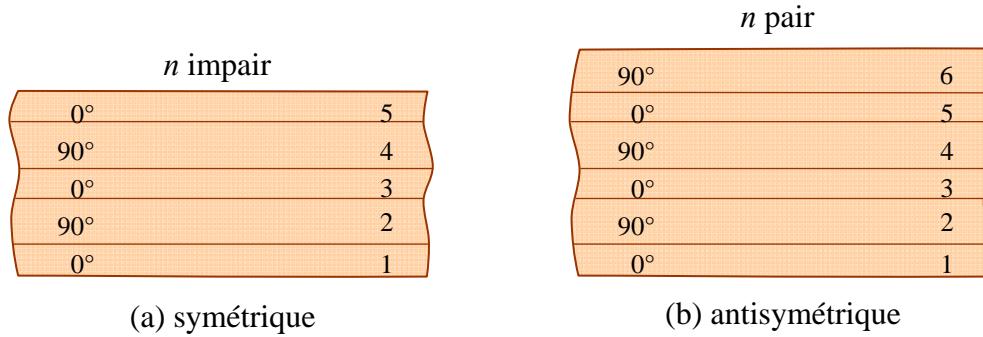


FIGURE 15.6. Stratifiés croisés symétrique et antisymétrique.

des couches orientées à 90° :

$$R_e = \frac{e_0}{e_{90}}. \quad (15.19)$$

Dans le cas où les épaisseurs des couches sont identiques :  $R_e = 1$ , les coefficients de rigidité peuvent alors être exprimés (paragraphes 15.1.4.3 et 15.1.4.4) en fonction de  $n$ ,  $R_e$  et du rapport entre les modules :

$$R_Q = \frac{Q_{22}}{Q_{11}} = \frac{E_T}{E_L}. \quad (15.20)$$

### 15.1.4.3 Stratifiés croisés symétriques

Dans le cas d'un stratifié croisé symétrique (nombre impair de couches), les termes  $B_{ij}$  sont nuls conformément aux propriétés des stratifiés symétriques. L'équation constitutive des stratifiés croisés symétriques combine les relations (15.8) et (15.18). Soit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (15.21)$$

À l'absence de couplage membrane-flexion/torsion des stratifiés symétriques s'ajoute l'absence des couplages traction-cisaillement et flexion-torsion. Le comportement d'un stratifié croisé symétrique est donc identique au comportement d'une plaque orthotrope rapportée à ses axes principaux (15.5).

L'expression des coefficients de rigidité en fonction du nombre de couches  $n$ , de  $R_e$  et  $R_Q$  est reportée dans le tableau 15.2.

TABLEAU 15.2. Expression des coefficients de rigidité d'un stratifié croisé symétrique (nombre impair de couches).

$$A_{11} = \frac{1}{1+R_e} (R_e + R_Q) Q_{11} e, \quad A_{12} = Q_{12} e, \quad A_{16} = 0,$$

$$A_{22} = \frac{1}{1+R_e} (1+R_e R_Q) Q_{11} e = \frac{1+R_e R_Q}{R_e + R_Q} A_{11},$$

$$A_{26} = 0, \quad A_{66} = Q_{66} e.$$

$$B_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 6.$$

$$D_{11} = [(R_Q - 1)\alpha + 1] \frac{Q_{11} e^3}{12} = [(R_Q - 1)\alpha + 1] \frac{1+R_e}{R_e + R_Q} \frac{A_{11} e^2}{12},$$

$$D_{12} = \frac{Q_{12} e^3}{12}, \quad D_{16} = 0,$$

$$D_{22} = [(1-R_Q)\alpha + R_Q] \frac{Q_{11} e^3}{12} = [(1-R_Q)\alpha + R_Q] \frac{1+R_e}{R_e + R_Q} \frac{A_{11} e^2}{12},$$

$$D_{26} = 0, \quad D_{66} = \frac{Q_{66} e^3}{12},$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{(1+R_e)^3} + \frac{R_e(n-3)[R_e(n-1) + 2(n+1)]}{(n^2-1)(1+R_e)^3}.$$

#### 15.1.4.4 Stratifiés croisés antisymétriques

Dans le cas d'un stratifié croisé antisymétrique (nombre pair de couches), les coefficients de rigidité exprimés en fonction de  $n$ , de  $R_e$  et  $R_Q$  sont reportés dans le tableau 15.3. Les résultats de ce tableau montrent que l'équation constitutive est alors de la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (15.22)$$

TABLEAU 15.3. Coefficients de rigidité d'un stratifié croisé antisymétrique (nombre pair de couches).

---


$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{1}{1+R_e} (R_e + R_Q) Q_{11} e, \quad A_{12} = Q_{12} e, \quad A_{16} = 0, \\
A_{22} &= \frac{1}{1+R_e} (1 + R_e R_Q) Q_{11} e = \frac{1+R_e R_Q}{R_e + R_Q} A_{11}, \\
A_{26} &= 0, \quad A_{66} = Q_{66} e. \\
B_{11} &= \frac{R_e (R_Q - 1)}{n(1+R_e)^2} Q_{11} e^2 = \frac{R_e (R_Q - 1)}{n(1+R_e)(R_e + R_Q)} A_{11} e, \quad B_{12} = B_{16} = 0, \\
B_{22} &= -B_{11}, \quad B_{26} = B_{66} = 0. \\
D_{11} &= [(R_Q - 1)\beta + 1] \frac{Q_{11} e^3}{12} = [(R_Q - 1)\beta + 1] \frac{1+R_e}{R_e + R_Q} \frac{A_{11} e^2}{12}, \\
D_{12} &= \frac{Q_{12} e^3}{12}, \quad D_{16} = 0, \\
D_{22} &= [(1 - R_Q)\beta + R_Q] \frac{Q_{11} e^3}{12} = [(1 - R_Q)\beta + R_Q] \frac{1+R_e}{R_e + R_Q} \frac{A_{11} e^2}{12}, \\
D_{26} &= 0, \quad D_{66} = \frac{Q_{66} e^3}{12},
\end{aligned}$$

avec

$$\beta = \frac{1}{1+R_e} + \frac{8R_e(R_e - 1)}{n^2(1+R_e)^3}.$$

Dans le cas où toutes les couches ont même épaisseur :

$$R_e = 1, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$


---

Dans le cas où les couches à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  ont même épaisseur, nous avons :

$$A_{22} = A_{11}, \quad D_{22} = D_{11}. \tag{15.23}$$

L'équation constitutive (15.22) d'un stratifié croisé antisymétrique montre qu'il existe uniquement un couplage traction-flexion. L'effet de ce couplage peut être illustré en imposant à une plaque constituée d'un stratifié croisé antisymétrique les deux types de conditions déjà considérées (figure 15.3). Les figures 15.7 montrent les déformées obtenues dans les deux cas. À la déformation en traction de la plaque se superpose une déformation en flexion. Il est également important de noter que le coefficient de couplage  $B_{11}$  est (tableau 15.3) inversement proportionnel au nombre total de couches. Il en résulte que le couplage membrane-flexion décroît rapidement lorsque le nombre de couches croît.

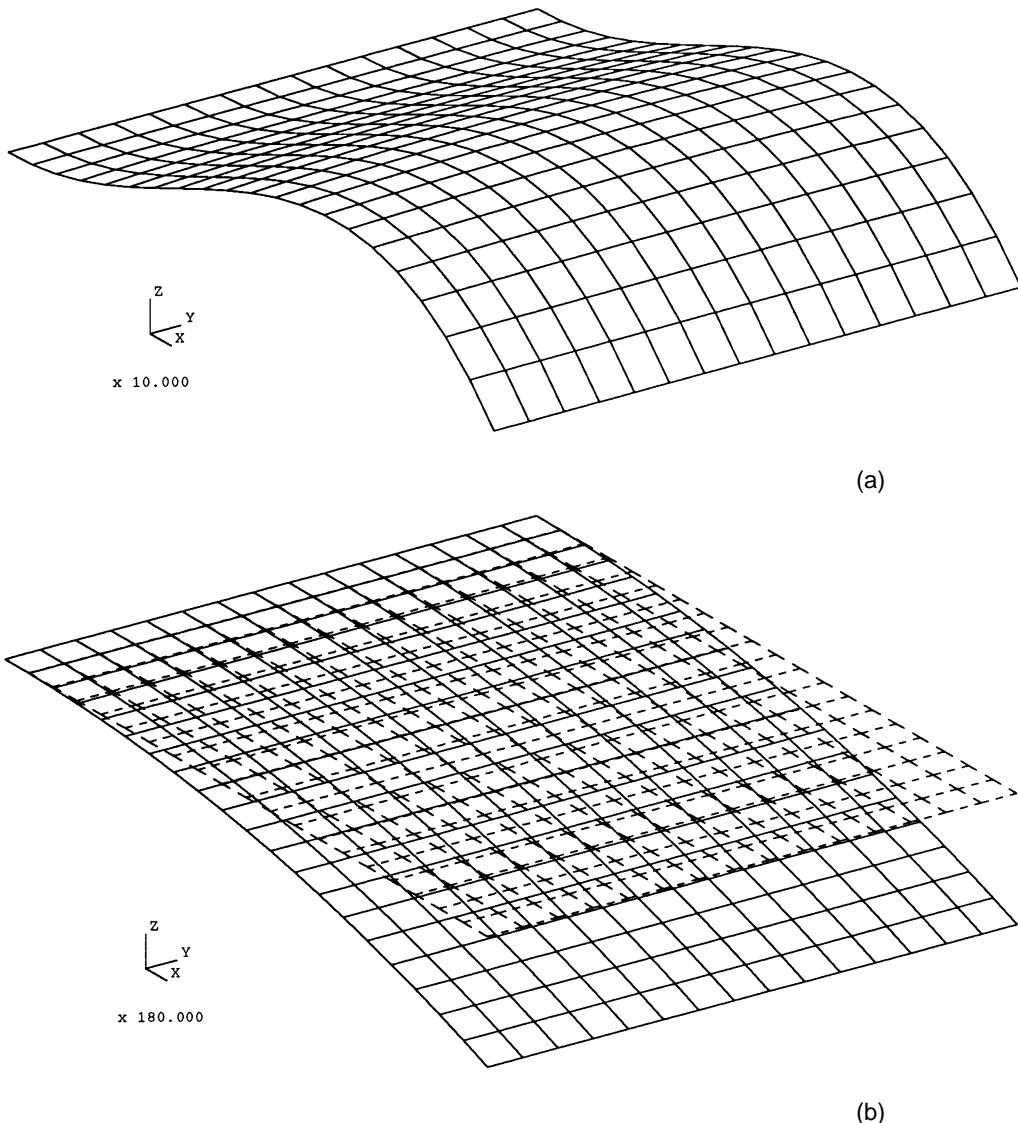


FIGURE 15.7. Couplage traction-flexion dans le cas d'un stratifié croisé antisymétrique : (a) déplacements imposés et (b) contraintes imposées.

## 15.1.5 Stratifiés équilibrés et stratifiés alternés

### 15.1.5.1 Cas général

Un stratifié est équilibré s'il comporte autant de couches orientées suivant un angle  $\theta$  que de couches orientées suivant un angle  $-\theta$ . Un stratifié équilibré peut être quelconque, symétrique ou antisymétrique (figure 15.8).

Un stratifié alterné est constitué de couches orientées alternativement suivant les directions  $\theta$  et  $-\theta$ , relativement aux axes de référence du stratifié. Le stratifié

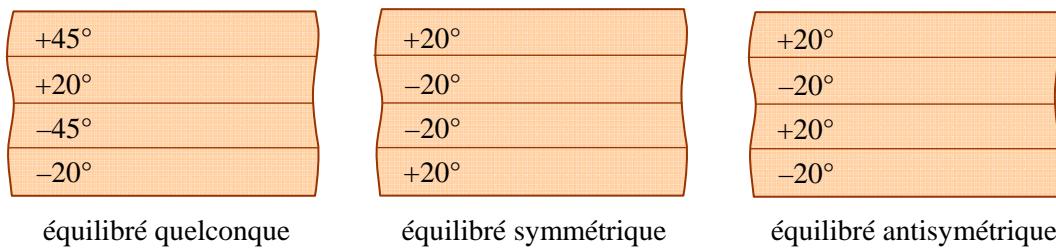


FIGURE 15.8. Divers types de stratifiés équilibrés.

équilibré antisymétrique de la figure 15.8 est un stratifié alterné. La figure 15.9 donne un exemple de stratifié alterné symétrique.

Les équations constitutives de ces stratifiés se déduisent des équations générales (14.29), (15.8) et (15.14).

### 15.1.5.2 Stratifiés particuliers

Dans le cas pratique où les couches ont la même épaisseur, les coefficients de rigidité du stratifié s'expriment en fonction des coefficients  $Q'_{ij}$  de chaque couche, du nombre de couches  $n$  et de l'épaisseur  $e$  du stratifié. Dans le cas de couches constituées du même matériau, les coefficients de rigidité des couches sont liés par les expressions :

$$\begin{aligned} Q'_{11-\theta} &= Q'_{11+\theta}, & Q'_{12-\theta} &= Q'_{12+\theta}, & Q'_{16-\theta} &= -Q'_{16+\theta}, \\ Q'_{22-\theta} &= Q'_{22+\theta}, & Q'_{26-\theta} &= -Q'_{26+\theta}, & Q'_{66-\theta} &= Q'_{66+\theta}, \end{aligned} \quad (15.24)$$

où les relations entre les coefficients  $Q'_{ij+\theta}$  et les coefficients  $Q_{ij}$  rapportés aux axes principaux sont données dans le tableau 11.6. Les coefficients  $Q'_{ij+\theta}$  se rapportent aux couches impaires, et les coefficients  $Q'_{ij-\theta}$  aux couches paires. Pour le stratifié équilibré symétrique de la figure 15.8 et le stratifié alterné symétrique de la figure 15.9,  $+\theta$  est égal à  $20^\circ$  et  $Q'_{ij+\theta} = Q'_{ij+20^\circ}$ ; alors que dans le cas du stratifié équilibré antisymétrique de la figure 15.8,  $+\theta = -20^\circ$  et  $Q'_{ij+\theta} = Q'_{ij-20^\circ}$ .

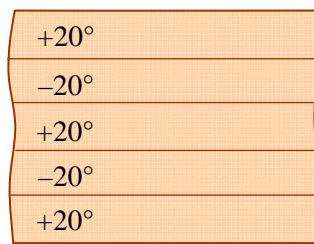


FIGURE 15.9. Stratifié alterné symétrique.

### 1. Stratifié équilibré symétrique

Dans le cas d'un stratifié équilibré symétrique, le nombre de couches est pair. Les coefficients de rigidité sont déduits des relations (14.23), (14.24) et (14.27), associées aux relations (15.24). Ils s'écrivent :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= eQ'_{ij} && \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\ A_{ij} &= 0 && \text{si } ij = 16, 26. \\ B_{ij} &= 0 && i, j = 1, 2, 6. \\ D_{ij} &= \frac{e^3}{12}Q'_{ij} && \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\ D_{ij} &= 0 && \text{si } ij = 16, 26. \end{aligned} \quad (15.25)$$

### 2. Stratifié alterné antisymétrique

Pour un stratifié alterné antisymétrique, le nombre de couches est pair et les relations (15.13) et (15.24) conduisent à :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= eQ'_{ij} && \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\ A_{ij} &= 0 && \text{si } ij = 16, 26. \\ B_{ij} &= 0 && \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\ B_{ij} &= -\frac{e^2}{2n}Q'_{ij} && \text{si } ij = 16, 26. \\ D_{ij} &= \frac{e^3}{12}Q'_{ij} && \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\ D_{ij} &= 0 && \text{si } ij = 16, 26. \end{aligned} \quad (15.26)$$

### 3. Stratifié alterné symétrique

Enfin, dans le cas d'un stratifié alterné symétrique, le nombre de couches est impair. Les coefficients de rigidité s'écrivent :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= eQ'_{ij} && \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\ A_{ij} &= 0 && \text{si } ij = 16, 26. \\ B_{ij} &= 0 && i, j = 1, 2, 6. \\ D_{ij} &= \frac{e^3}{12}Q'_{ij} && \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\ D_{ij} &= \frac{e^3}{12} \frac{3n^2 - 2}{n^3} Q'_{ij} && \text{si } ij = 16, 26. \end{aligned} \quad (15.27)$$

Nous observons que les coefficients  $A_{ij}$  sont indépendants du nombre de couches et du type de stratifié. Les coefficients  $A_{16}$  et  $A_{26}$  sont nuls.

Les coefficients de rigidité en flexion et en torsion  $D_{11}$ ,  $D_{12}$  et  $D_{66}$  sont également indépendants du nombre de couches et du type de stratifié. Les coefficients de couplage flexion-torsion  $D_{16}$  et  $D_{26}$ , nuls dans le cas de stratifiés équilibrés symétriques et de stratifiés alternés antisymétriques, décroissent avec le nombre de couches dans les autres cas.

Dans le cas de stratifiés symétriques, il n'existe pas de couplage membrane-flexion/torsion ( $B_{ij} = 0$ ). Par contre, les stratifiés équilibrés antisymétriques présentent un couplage membrane-torsion qui décroît lorsque le nombre de couches augmente.

### 15.1.6 Stratifiés à couches isotropes

La matrice de rigidité réduite d'une couche isotrope est donnée par la relation (15.1). Les coefficients de rigidité d'un stratifié constitué de  $n$  couches isotropes de propriétés différentes s'expriment alors suivant les relations :

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \sum_{k=1}^n \frac{E_k e_k}{1-\nu_k^2}, & A_{12} &= \sum_{k=1}^n \frac{\nu_k E_k e_k}{1-\nu_k^2}, & A_{16} &= 0, \\
 A_{22} = A_{11}, \quad A_{26} &= 0, & A_{66} &= \sum_{k=1}^n \frac{E_k e_k}{2(1+\nu_k)}, \\
 B_{11} &= \sum_{k=1}^n \frac{E_k e_k z_k}{1-\nu_k^2}, & B_{12} &= \sum_{k=1}^n \frac{\nu_k E_k e_k z_k}{1-\nu_k^2}, & B_{16} &= 0, \\
 B_{22} = B_{11}, \quad B_{26} &= 0, & B_{66} &= \sum_{k=1}^n \frac{E_k e_k z_k}{2(1+\nu_k)}. & (15.28) \\
 D_{11} &= \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{1-\nu_k^2} \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right), & D_{12} &= \sum_{k=1}^n \frac{\nu_k E_k}{1-\nu_k^2} \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right), \\
 D_{22} = D_{11}, \quad D_{16} = D_{26} &= 0, & D_{66} &= \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{2(1+\nu_k)} \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right),
 \end{aligned}$$

L'équation constitutive d'un stratifié à couches isotropes s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (15.29)$$

L'équation constitutive a la même forme que l'équation constitutive (15.18) d'un stratifié croisé.

Dans le cas d'un stratifié symétrique à couches isotropes, l'équation constitutive se simplifie conformément à l'équation générale (15.8) des stratifiés symétriques et s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (15.30)$$

les coefficients de rigidité  $A_{ij}$  et  $D_{ij}$  étant donnés par les relations (15.28).

### 15.1.7 Stratifié quelconque

Les divers stratifiés étudiés dans les paragraphes précédents montrent l'influence de l'empilement des couches les unes par rapport aux autres et par rapport aux axes de référence du stratifié. Les cas particuliers étudiés correspondent à des applications importantes. Les divers stratifiés étudiés ont mis en évidence les divers couplages entre traction, cisaillement, flexion et torsion. Dans le cas d'un empilement quelconque, l'équation constitutive du stratifié s'écrit sous la forme générale (14.29).

Dans ce cas, les divers couplages existent simultanément. L'effet de ces couplages peut être mis en évidence en imposant à une plaque constituée d'un stratifié quelconque une traction (figure 15.3) en déplacements imposés et en contraintes imposées. Les figures 15.10 montrent les résultats obtenus. À la déformation de traction se superposent des déformations en cisaillement, flexion et torsion. Nous avons déjà noté l'influence néfaste de ces divers couplages.

## 15.2 ÉTUDE DES MATÉRIAUX À RENFORT TISSU

### 15.2.1 Introduction

Les divers tissus utilisés dans la fabrication des stratifiés ou des sandwiches ont été étudiés au chapitre 2. Les principaux paramètres relatifs à la caractérisation d'un tissu sont :

- le type de l'armure (unidirectionnel, toile, satin, sergé, etc.),
- la nature des fils de chaîne et de trame : verre, carbone, Kevlar, stratifil, etc.,
- le titre des fils exprimé en tex (masse par unité de longueur),

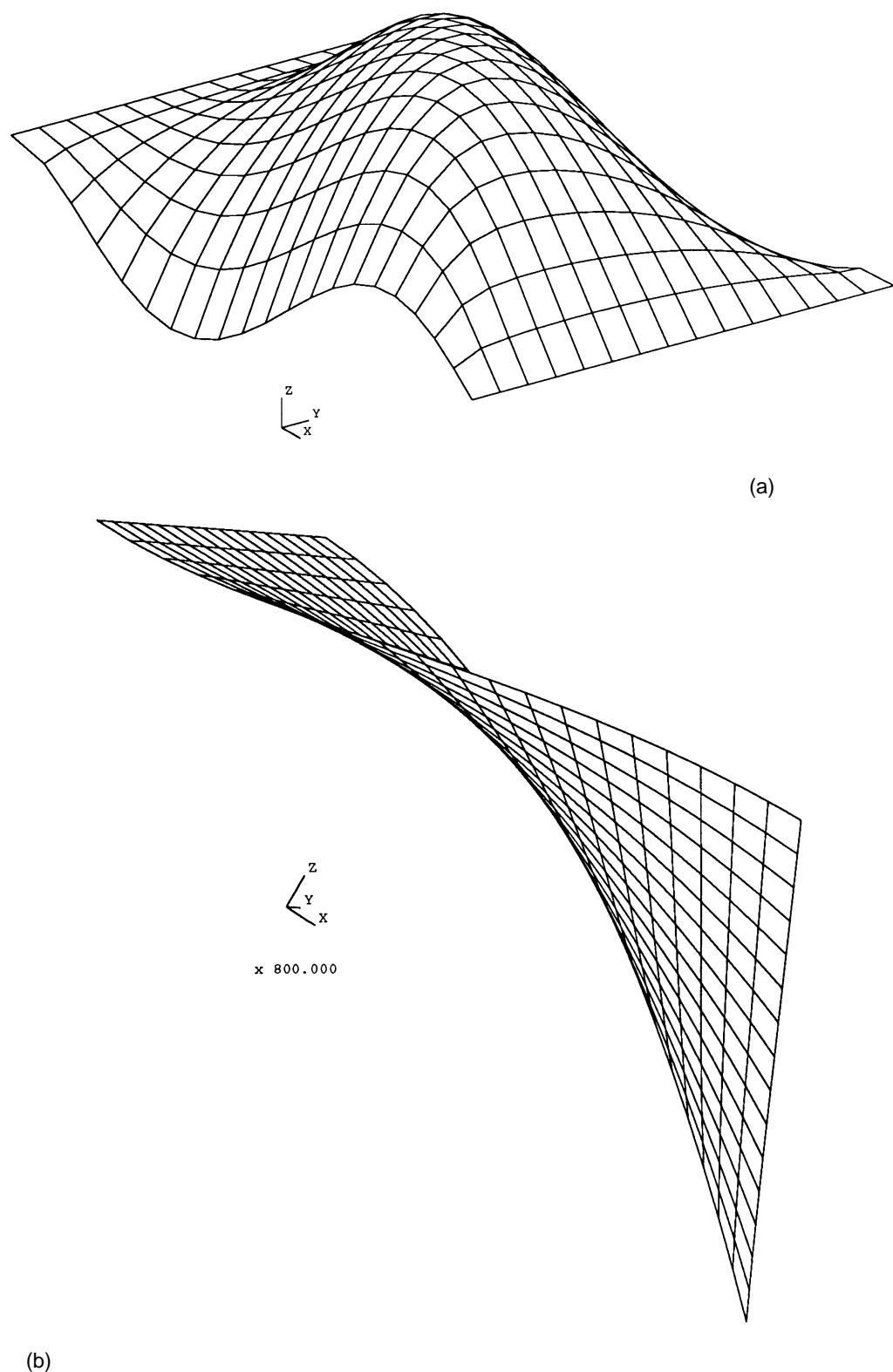


FIGURE 15.10. Couplage général dans le cas d'un stratifié quelconque : (a) déplacements imposés et (b) contraintes imposées.

- le nombre de fils de chaîne et de trame par unité de longueur et largeur du tissu,
- la masse surfacique : masse du tissu par mètre carré,
- etc.

Les valeurs expérimentales obtenues montrent que le comportement élastique d'un composite à renfort tissu est pratiquement indépendant du type de l'armure, contrairement aux caractéristiques à la rupture.

L'objet du paragraphe 15.2 est d'établir une formulation des modules des composites à renfort tissu 2D à partir d'une analogie stratifié.

## 15.2.2 Caractérisation d'un renfort tissu

Un tissu est constitué (chapitre 2) de fils tissés dans deux directions (figure 15.11) : la direction chaîne (correspondant à la direction  $L$  de la couche composite orthotrope) et la direction trame (correspondant à la direction  $T$  de la couche).

La chaîne est caractérisée par :

$n_{\text{ch}}$  : le nombre de fils par unité de largeur du tissu (figure 15.11),

$T_{\text{ch}}$  : le titre des fils (masse par unité de longueur de fils).

La masse de fils chaîne par unité de largeur est donc :

$$m_{\text{ch}} = n_{\text{ch}} T_{\text{ch}}, \quad (15.31)$$

et le volume de fils chaîne par unité de largeur du tissu s'exprime suivant :

$$v_{\text{ch}} = \frac{m_{\text{ch}}}{\rho_{\text{ch}}} = \frac{n_{\text{ch}} T_{\text{ch}}}{\rho_{\text{ch}}}, \quad (15.32)$$

où  $\rho_{\text{ch}}$  est la masse volumique des fils sens chaîne.

De même, la trame est caractérisée par :

$n_{\text{tr}}$  : le nombre de fils par unité de longueur (figure 15.11),

$T_{\text{tr}}$  : le titre des fils (masse par unité de longueur de fils).

La masse de fils trame par unité de longueur est :

$$m_{\text{tr}} = n_{\text{tr}} T_{\text{tr}}, \quad (15.33)$$

et le volume de fils trame par unité de longueur s'écrit :

$$v_{\text{tr}} = \frac{m_{\text{tr}}}{\rho_{\text{tr}}} = \frac{n_{\text{tr}} T_{\text{tr}}}{\rho_{\text{tr}}}, \quad (15.34)$$

en introduisant la masse volumique  $\rho_{\text{tr}}$  des fils sens trame.

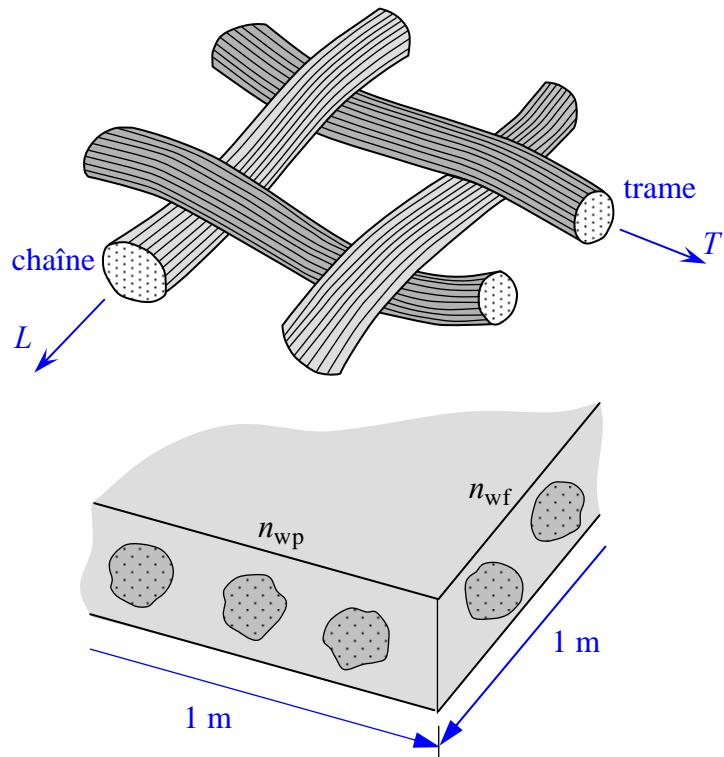


FIGURE 15.11. Schématisation d'un tissu.

Le coefficient d'équilibrage en chaîne  $k$  d'un tissu mesure la proportion relative en volume de fils sens chaîne et s'écrit sous la forme générale :

$$k = \frac{\frac{n_{ch}T_{ch}}{v_{ch} + v_{tr}}}{\frac{\rho_{ch}}{n_{ch}T_{ch} + n_{tr}T_{tr}}} = \frac{n_{ch}T_{ch}}{\frac{\rho_{ch}}{\rho_{ch}} + \frac{n_{tr}T_{tr}}{\rho_{tr}}}. \quad (15.35)$$

Dans le cas de fibres de même nature en chaîne et en trame ( $\rho_{ch} = \rho_{tr}$ ), le coefficient d'équilibrage s'exprime suivant :

$$k = \frac{n_{ch}T_{ch}}{n_{ch}T_{ch} + n_{tr}T_{tr}}. \quad (15.36)$$

Dans le cas de titres identiques en chaîne et en trame, l'expression de  $k$  se réduit à :

$$k = \frac{n_{ch}}{n_{ch} + n_{tr}}. \quad (15.37)$$

Dans le cas de fibres de même nature, on distingue divers types de tissus suivant la valeur du coefficient d'équilibrage  $k$  :

- si  $k = 1$ , le tissu est unidirectionnel dans le sens chaîne,
- si  $k = 0$ , le tissu est unidirectionnel dans le sens trame,
- si  $k = 1/2$ , le tissu est dit équilibré.

Le renfort tissu est également caractérisé par sa masse surfacique  $M_s$ . Lors de la mise en œuvre d'un stratifié, le tissu est imprégné par la résine pour constituer une couche d'épaisseur  $e_c$ . La fraction volumique de fibres peut alors être calculée en considérant le volume  $v_t$  d'une couche de surface unité :  $v_t = e_c$ . Le volume de fibres contenu dans le volume  $v_t$  est :

$$v_f = \frac{M_s}{\rho_f}, \quad (15.38)$$

en introduisant la masse volumique des fibres. Il en résulte que la fraction volumique de fibres s'exprime par :

$$V_f = \frac{v_f}{v_t} = \frac{M_s}{\rho_f} \frac{1}{e_c}. \quad (15.39)$$

En exprimant, dans la relation précédente, la fraction volumique en fonction de la fraction en masse  $P_f$  de fibres (1.19), l'épaisseur de la couche s'écrit :

$$e_c = M_s \frac{P_f \rho_m + (1 - P_f) \rho_f}{P_f \rho_f \rho_m}, \quad (15.40)$$

où  $\rho_m$  est la masse volumique de la matrice.

### 15.2.3 Analogie stratifié

L'analogie stratifié, utilisée pour modéliser le comportement élastique d'une couche à renfort tissu, consiste à considérer la couche de tissu comme constituée de deux couches unidirectionnelles (figure 15.12) : une couche chaîne orientée à  $0^\circ$ , une couche trame orientée à  $90^\circ$ . Les hauteurs respectives de ces couches sont proportionnelles à la fraction volumique des fibres : la hauteur  $h_{ch}$  de la couche sens chaîne est proportionnelle à  $V_{ch}$  et la hauteur  $h_{tr}$  de la couche sens trame est

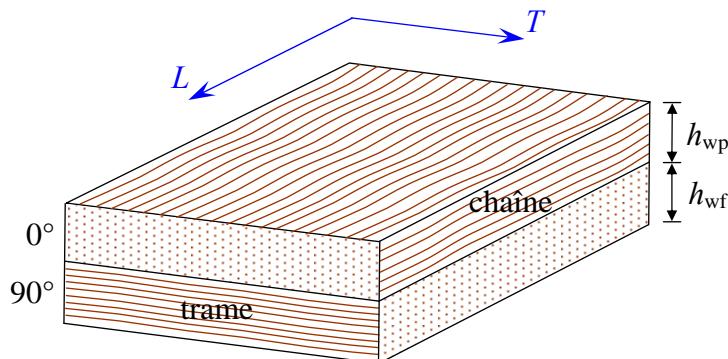


FIGURE 15.12. Analogie stratifié d'une couche à renfort tissu.

proportionnelle à  $V_{\text{tr}}$ . Ces hauteurs s'expriment en fonction de l'épaisseur  $e_c$  de la couche et du coefficient  $k$  d'équilibrage en chaîne, suivant :

$$h_{\text{ch}} = ke_c, \quad (15.41)$$

$$h_{\text{tr}} = (1 - k)e_c. \quad (15.42)$$

Le comportement élastique de chaque couche peut être décrit par leurs modules :

$$\text{couche chaîne : } E_{L\text{ch}} \quad E_{T\text{ch}} \quad \nu_{LT\text{ch}} \quad G_{LT\text{ch}},$$

$$\text{couche trame : } E_{L\text{tr}} \quad E_{T\text{tr}} \quad \nu_{LT\text{tr}} \quad G_{LT\text{tr}}.$$

Ces modules sont rapportés aux axes respectifs des matériaux de chaque couche : axe  $L$  dans le sens chaîne pour la couche chaîne, axe  $L$  dans le sens trame pour la couche trame. Il en résulte que la matrice de rigidité réduite de la couche chaîne, rapportée aux axes du matériau de cette couche, donc rapportée aux axes de la couche à renfort tissu, s'exprime d'après (11.52) suivant :

$$\begin{aligned} Q_{11}^{\text{ch}} &= \alpha_{\text{ch}} E_{L\text{ch}}, & Q_{12}^{\text{ch}} &= \alpha_{\text{ch}} \nu_{LT\text{ch}} E_{T\text{ch}}, \\ Q_{16}^{\text{ch}} &= 0, & Q_{26}^{\text{ch}} &= 0, \\ Q_{22}^{\text{ch}} &= \alpha_{\text{ch}} E_{T\text{ch}}, & Q_{66}^{\text{ch}} &= G_{LT\text{ch}}, \end{aligned} \quad (15.43)$$

avec

$$\alpha_{\text{ch}} = \frac{1}{1 - \nu_{LT\text{ch}}^2 \frac{E_{T\text{ch}}}{E_{L\text{ch}}}}. \quad (15.44)$$

De même, les coefficients de rigidité de la couche trame s'expriment par rapport à ses axes matériau, suivant :

$$\begin{aligned} Q_{11}^{\text{tr}} &= \alpha_{\text{tr}} E_{L\text{tr}}, & Q_{12}^{\text{tr}} &= \alpha_{\text{tr}} \nu_{LT\text{tr}} E_{T\text{tr}}, \\ Q_{16}^{\text{tr}} &= 0, & Q_{26}^{\text{tr}} &= 0, \\ Q_{22}^{\text{tr}} &= \alpha_{\text{tr}} E_{T\text{tr}}, & Q_{66}^{\text{tr}} &= G_{LT\text{tr}}. \end{aligned} \quad (15.45)$$

avec

$$\alpha_{\text{tr}} = \frac{1}{1 - \nu_{LT\text{tr}}^2 \frac{E_{T\text{tr}}}{E_{L\text{tr}}}}. \quad (15.46)$$

Les coefficients de rigidité de la couche trame, rapportés aux axes matériau de la couche à renfort tissu sont donc :

$$\begin{aligned} Q'_{11}^{\text{tr}} &= Q_{22}^{\text{tr}}, & Q'_{12}^{\text{tr}} &= Q_{12}^{\text{tr}}, & Q'_{16}^{\text{tr}} &= 0, \\ Q'_{22}^{\text{tr}} &= Q_{11}^{\text{tr}}, & Q'_{26}^{\text{tr}} &= 0, \\ Q'_{66}^{\text{tr}} &= Q_{66}^{\text{tr}}. \end{aligned} \quad (15.47)$$

D'après l'expression (14.31), les coefficients  $A_{ij}$  décrivant le comportement en

membrane de la couche à renfort tissu s'écrivent :

$$A_{ij} = h_{\text{ch}} Q_{ij}^{\text{ch}} + h_{\text{tr}} Q_{ij}^{\text{tr}}, \quad (15.48)$$

ou

$$A_{ij} = e_c \left[ k Q_{ij}^{\text{ch}} + (1-k) Q_{ij}^{\text{tr}} \right]. \quad (15.49)$$

Soit, en tenant compte de (15.43) à (15.47) :

$$\begin{aligned} A_{11} &= e_c \left[ k \alpha_{\text{ch}} E_{L\text{ch}} + (1-k) \alpha_{\text{tr}} E_{T\text{tr}} \right], \\ A_{12} &= e_c \left[ k \alpha_{\text{ch}} v_{LT\text{ch}} E_{T\text{ch}} + (1-k) \alpha_{\text{tr}} v_{LT\text{tr}} E_{T\text{tr}} \right], \\ A_{22} &= e_c \left[ k \alpha_{\text{ch}} E_{T\text{ch}} + (1-k) \alpha_{\text{tr}} E_{L\text{tr}} \right], \\ A_{66} &= e_c \left[ k G_{LT\text{ch}} + (1-k) G_{LT\text{tr}} \right], \\ A_{16} &= A_{61} = 0. \end{aligned} \quad (15.50)$$

Ces relations négligent la courbure (figure 15.11) des fils résultant du tissage. J.C. Halpin, K. Jerine et J.M. Whitney [21] ont étudié l'influence de cette courbure qui conduit à une diminution des paramètres. De même, l'analyse précédente ne prend pas en compte un désalignement éventuel des fils, désalignement qui conduit également à une diminution des propriétés.

#### 15.2.4 Modules du comportement en membrane d'une couche à renfort tissu

Le comportement en membrane d'une couche à renfort tissu est donc décrit par l'équation constitutive :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}, \quad (15.51)$$

où les coefficients  $A_{ij}$  sont exprimés en (15.50).

##### 1. Traction suivant la direction chaîne (direction $L$ )

Dans le cas d'une traction dans le sens chaîne, les résultantes en membrane sont :

$$N_x \neq 0, \quad N_y = 0, \quad N_{xy} = 0. \quad (15.52)$$

Soit :

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11}\varepsilon_{xx}^0 + A_{12}\varepsilon_{yy}^0, \\ 0 &= A_{12}\varepsilon_{xx}^0 + A_{22}\varepsilon_{yy}^0, \\ 0 &= \gamma_{xy}^0. \end{aligned} \quad (15.53)$$

D'où l'expression de la résultante en membrane :

$$N_x = \left( A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right) \varepsilon_{xx}^0. \quad (15.54)$$

Le module d'Young  $E_L$  dans le sens chaîne s'exprime suivant :

$$E_L = \frac{\sigma_{xx}^0}{\varepsilon_{xx}^0} = \frac{N_x/e_c}{\varepsilon_{xx}^0}. \quad (15.55)$$

Il en résulte que le module s'exprime suivant la relation :

$$E_L = \frac{1}{e_c} \left( A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right). \quad (15.56)$$

D'après les expressions (15.53), la déformation dans le sens trame est donnée par la relation :

$$\varepsilon_{yy}^0 = -\frac{A_{12}}{A_{22}} \varepsilon_{xx}^0. \quad (15.57)$$

Il en résulte que le coefficient de Poisson  $\nu_{LT}$  est exprimé par la relation :

$$\nu_{LT} = \frac{A_{12}}{A_{22}}. \quad (15.58)$$

## 2. Traction suivant la direction trame (direction $T$ )

Un raisonnement analogue au précédent conduit au module d'Young  $E_T$  dans le sens trame :

$$E_T = \frac{1}{e_c} \left( A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right), \quad (15.59)$$

et au coefficient de Poisson  $\nu_{TL}$  :

$$\nu_{TL} = \frac{A_{12}}{A_{11}} = \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L}. \quad (15.60)$$

## 3. Cisaillement dans les axes de la couche

Un essai de cisaillement dans les axes de la couche conduit à la détermination

du module de cisaillement  $G_{LT}$  dans le plan de la couche. Soit :

$$G_{LT} = G_{TL} = \frac{1}{e_c} A_{66}. \quad (15.61)$$

### 15.2.5 Expressions des modules en membrane d'une couche à renfort tissu

Les expressions (15.56) à (15.61) peuvent être regroupées suivant :

$$\begin{aligned} E_L &= \frac{1}{e_c} \left( A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right), \\ E_T &= \frac{1}{e_c} \left( A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right), \\ \nu_{LT} &= \frac{A_{12}}{A_{22}}, \quad \nu_{TL} = \frac{A_{12}}{A_{11}} = \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L}, \\ G_{LT} &= G_{TL} = \frac{1}{e_c} A_{66}. \end{aligned} \quad (15.62)$$

Les expressions des modules d'Young peuvent être simplifiées suivant :

$$E_L = (1-\alpha) \frac{1}{e_c} A_{11}, \quad (15.63)$$

$$E_T = (1-\alpha) \frac{1}{e_c} A_{22}, \quad (15.64)$$

en introduisant le paramètre

$$\alpha = \frac{A_{12}^2}{A_{11} A_{22}}, \quad (15.65)$$

dont la valeur est voisine de zéro.

En tenant compte des expressions (15.50) des coefficients  $A_{ij}$ , les modules s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} E_L &= (1-\alpha) [k\alpha_{ch} E_{Lch} + (1-k)\alpha_{tr} E_{Ttr}], \\ E_T &= (1-\alpha) [k\alpha_{ch} E_{Tch} + (1-k)\alpha_{tr} E_{Ltr}], \\ \nu_{LT} &= \frac{k\alpha_{ch} \nu_{LTch} E_{Tch} + (1-k)\alpha_{tr} \nu_{LTtr} E_{Ltr}}{k\alpha_{ch} E_{Tch} + (1-k)\alpha_{tr} E_{Ltr}}, \\ G_{LT} &= kG_{LTch} + (1-k)G_{LTtr}, \end{aligned} \quad (15.66)$$

avec

$$\alpha = \frac{[k\alpha_{ch}v_{LTch}E_{Tch} + (1-k)\alpha_{tr}v_{LTtr}E_{Ltr}]^2}{[k\alpha_{ch}E_{Lch} + (1-k)\alpha_{tr}E_{Ttr}][k\alpha_{ch}E_{Tch} + (1-k)\alpha_{tr}E_{Ltr}]}.$$

Les expressions (15.66) donnent dans le cas d'un renfort tissu quelconque 2D les modules d'une couche à renfort tissu. Les modules  $E_{Lch}, E_{Tch}, \dots, E_{Ltr}, E_{Ttr}, \dots$  peuvent être exprimés eux-mêmes (chapitre 9) en fonction des caractéristiques des fibres ( $E_f, v_f$ ), de la résine ( $E_m, v_m$ ), du coefficient d'équilibrage  $k$ , de la masse surfacique  $M_s$  du tissu et de l'épaisseur  $e_c$  de la couche.

Les expressions (15.66) peuvent être simplifiées dans le cas où les fibres dans le sens chaîne et le sens trame sont identiques, et dans le cas où le tissu est équilibré. En effet, dans ce cas,  $k = 1/2$ , et les modules dans le sens chaîne et dans le sens trame sont identiques :

$$\begin{aligned} E_{Lch} &= E_{Ltr} = E_{Lu}, \\ E_{Tch} &= E_{Ttr} = E_{Tu}, \\ v_{LTch} &= v_{LTtr} = v_{LTu}, \\ G_{LTch} &= G_{LTtr} = G_{LTu}, \end{aligned} \tag{15.67}$$

où  $E_{Lu}$ ,  $E_{Tu}$ ,  $v_{LTu}$  et  $G_{LTu}$  sont les modules d'une couche unidirectionnelle ayant une fraction volumique égale à celle de la couche à renfort tissu considéré. Les expressions (15.66) des modules se réduisent alors à :

$$\begin{aligned} E_L &= E_T = \frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha_u(E_{Lu} + E_{Tu}), \\ v_{LT} &= \frac{2v_{LTu}}{1 + \frac{E_{Lu}}{E_{Tu}}}, \\ G_{LT} &= G_{LTu}, \end{aligned} \tag{15.68}$$

avec

$$\alpha = \frac{4v_{LTu}^2}{\left(1 + \frac{E_{Lu}}{E_{Tu}}\right)^2}, \quad \alpha_u = \frac{1}{1 - v_{LTu}^2 \frac{E_{Tu}}{E_{Lu}}}. \tag{15.69}$$

Les expressions de  $\alpha$  et  $\alpha_u$  montrent que :

$$E_L = E_T \approx \frac{1}{2}(E_{Lu} + E_{Tu}). \tag{15.70}$$

Dans le cas d'un tissu déséquilibré de fils de même nature dans le sens chaîne et dans le sens trame, les valeurs des modules doivent être calculées à partir des expressions générales (15.66). L'exploitation de ces expressions est complexe à mettre en œuvre. Une approximation peut en être donnée en introduisant dans (15.66) les modules (15.67). Les modules de la couche tissu s'expriment alors suivant :

$$\begin{aligned}
E_L &= (1-\alpha)\alpha_u [kE_{Lu} + (1-k)E_{Tu}], \\
E_T &= (1-\alpha)\alpha_u [kE_{Tu} + (1-k)E_{Lu}], \\
\nu_{LT} &= \frac{1}{k + (1-k)\frac{E_{Lu}}{E_{Tu}}} \nu_{LTu}, \\
G_{LT} &= G_{LTu},
\end{aligned} \tag{15.71}$$

avec

$$\alpha = \frac{\nu_{LTu}^2}{\left[ k \frac{E_{Lu}}{E_{Tu}} + 1 - k \right] \left[ k + (1-k) \frac{E_{Lu}}{E_{Tu}} \right]}, \quad \alpha_u = \frac{1}{1 - \nu_{LTu}^2 \frac{E_{Tu}}{E_{Lu}}}. \tag{15.72}$$

## 15.2.6 Applications numériques

Nous étudions le cas de deux tissus : un tissu équilibré et un tissu déséquilibré constitués de fibres de verre. Les caractéristiques des constituants sont :

- fibres de verre :  $E_f = 73 \text{ GPa}$ ,  $\nu_f = 0,22$ ,  $\rho_f = 2\,600 \text{ kg/m}^3$ ,
- matrice :  $E_m = 3 \text{ GPa}$ ,  $\nu_m = 0,35$ ,  $\rho_m = 1\,200 \text{ kg/m}^3$ .

### 1. Couche à renfort tissu équilibré

Le renfort tissu considéré a une masse surfacique égale à  $500 \text{ g/m}^2$  et l'épaisseur de la couche réalisée est  $0,7 \text{ mm}$ .

La fraction volumique de fibres déterminée par (15.39) conduit à :  $V_f = 27,5 \%$ , correspondant à une fraction massique  $P_f = 45,1 \%$ .

En utilisant les résultats obtenus au chapitre 9, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
E_{Lu} &= 22,2 \text{ GPa}, & \nu_{LTu} &= 0,31, \\
G_{LTu} &= 1,87 \text{ GPa}, & E_{Tu} &= 5,12 \text{ GPa}.
\end{aligned} \tag{15.73}$$

D'où les caractéristiques de la couche à renfort tissu équilibré :

$$E_L = E_T = 13,8 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,12, \quad G_{LT} = 1,87 \text{ GPa}. \tag{15.74}$$

### 2. Couche à renfort tissu déséquilibré

Le renfort tissu a une masse surfacique de  $650 \text{ g/m}^2$ , et son déséquilibre en chaîne est caractérisé par  $k = 0,6$ . On constitue une couche de même fraction massique que la couche précédente réalisée avec le tissu équilibré. L'épaisseur de la couche réalisée peut être calculée à partir de (15.39). Nous obtenons :

$$e_c = 0,91 \text{ mm}.$$

Les caractéristiques de la couche sont obtenues à partir des mêmes valeurs (15.73) du composite unidirectionnel à 27,5 % de fibres en volume. Les relations (15.72) conduisent aux valeurs :

$$\begin{aligned} E_L &= 15,5 \text{ GPa}, & E_T &= 12,1 \text{ GPa}, \\ \nu_{LT} &= 0,135, & G_{LT} &= 1,87 \text{ GPa}. \end{aligned} \quad (15.75)$$

### 15.2.7 Couche à renfort mat

Un mat (chapitre 2) est constitué de fils coupés ou non d'orientation aléatoire dans le plan du mat. Une couche à renfort mat peut alors être considérée comme un stratifié comportant un nombre infini de couches, orientées suivant toutes les directions. Une couche d'orientation  $\theta$  contenant des fibres orientées entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  a donc, d'après l'analogie introduite au paragraphe 15.2.3, une épaisseur égale à :

$$\frac{e_c}{2\pi} d\theta. \quad (15.76)$$

Dans le cas d'un renfort mat, la relation (14.31) des coefficients  $A_{ij}$  en membrane s'exprime donc suivant :

$$A_{ij} = \frac{e_c}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} (Q'_{ij})_\theta d\theta. \quad (15.77)$$

Pour calculer ces intégrales, il est intéressant d'utiliser les expressions du tableau 11.7, puisque les intégrales de  $\sin 2\theta$ ,  $\sin 4\theta$ ,  $\cos 2\theta$ ,  $\cos 4\theta$  sont nulles. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} A_{11} &= e_c V_1, & A_{12} &= e_c V_4, & A_{16} &= 0, \\ A_{22} &= e_c V_1, & A_{26} &= 0, \\ A_{66} &= e_c V_5 = \frac{e_c}{2} (V_1 - V_4). \end{aligned} \quad (15.78)$$

avec

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{8} (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}), \\ V_4 &= \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}), \\ V_5 &= \frac{1}{2} (V_1 - V_4) = \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}), \end{aligned} \quad (15.79)$$

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \alpha_u E_{Lu}, & Q_{22} &= \alpha_u E_{Tu}, \\ Q_{12} &= \alpha_u \nu_{LTu} E_{Tu}, & Q_{66} &= G_{LTu}, \\ \alpha_u &= \frac{1}{1 - \nu_{LTu}^2 \frac{E_{Tu}}{E_{Lu}}}, \end{aligned} \quad (15.80)$$

où  $E_{Lu}$ ,  $E_{Tu}$ ,  $\nu_{LTu}$  et  $G_{LTu}$  sont les modules (introduits en (15.67)) d'une couche unidirectionnelle de fraction volumique égale à celle de la couche à renfort mat considérée. Les modules de la couche à renfort mat sont ensuite déterminés à partir des relations (15.62), soit :

$$\begin{aligned} E_{Lmat} &= E_{Tmat} = \frac{(V_1 - V_4)(V_1 + V_4)}{V_1}, \\ \nu_{LTmat} &= \frac{V_4}{V_1}, \\ G_{LTmat} &= V_5 = \frac{1}{2}(V_1 - V_4). \end{aligned} \quad (15.81)$$

Nous vérifions que :

$$G_{LTmat} = \frac{E_{Lmat}}{2(1 + \nu_{LTmat})}. \quad (15.82)$$

Il résulte de cette relation que le module  $E_x$  (relation (11.9)) ne dépend pas de la direction de mesure. Le matériau se comporte dans le plan de la couche comme un matériau isotrope.

Comme application numérique, nous considérons le cas d'une couche à renfort mat de masse surfacique égale à 450 g/m<sup>2</sup> et dont l'épaisseur est 1 mm. Les caractéristiques des matériaux sont les mêmes que celles du paragraphe 15.2.6. La fraction volumique calculée à partir de (15.39) est :

$$V_f = 17,3 \%$$

Ce qui conduit à des modules du matériau unidirectionnel égaux à :

$$\begin{aligned} E_{Lu} &= 15,1 \text{ GPa}, & \nu_{LTu} &= 0,327, \\ G_{LTu} &= 1,54 \text{ GPa}, & E_{Tu} &= 4,30 \text{ GPa}. \end{aligned} \quad (15.83)$$

Les caractéristiques de la couche à renfort mat déterminées à partir de (15.81) sont donc :

$$\begin{aligned} E_{Lmat} &= E_{Tmat} = 7,72 \text{ GPa}, & \nu_{LTmat} &= 0,33, \\ G_{LTmat} &= 2,91 \text{ GPa}. \end{aligned} \quad (15.84)$$

### 15.2.8 Stratifié constitué de couches à renfort tissu et à renfort mat

Les résultats établis dans le paragraphe 15.1 s'appliquent aux stratifiés constitués de couches à renfort tissu et à renfort mat. Dans ce paragraphe, nous traitons, comme exemples, le cas de deux stratifiés symétriques (figure 15.13) constitués de quatre couches à renfort tissu et quatre couches à renfort mat. La couche à renfort tissu a les caractéristiques déterminées en (15.74) :

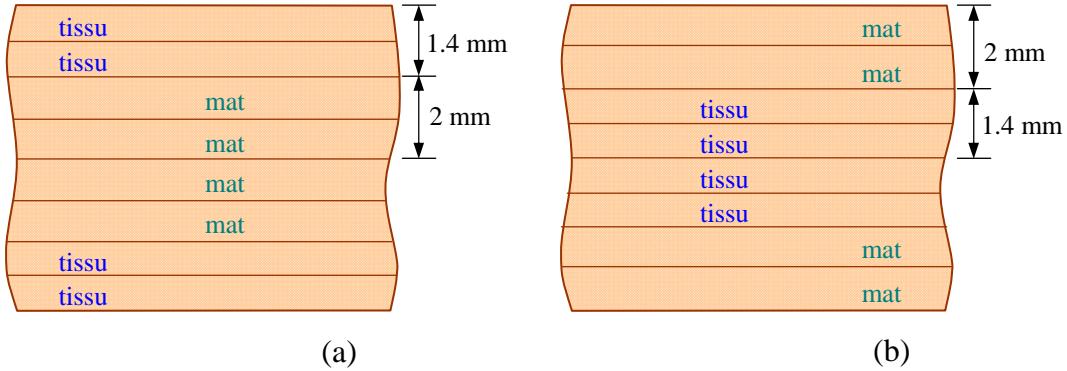


FIGURE 15.13. Stratifiés constitués de couches à renfort tissu et à renfort mat.

$$E_L = E_T = 13,8 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,12, \quad G_{LT} = 1,87 \text{ GPa}, \quad (15.85)$$

$e_c = 0,7 \text{ mm.}$

et la couche à renfort mat a les caractéristiques déterminées dans les relations (15.84) :

$$E_{L\text{mat}} = E_{T\text{mat}} = 7,72 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT\text{mat}} = 0,33, \quad G_{LT\text{mat}} = 2,91 \text{ GPa}, \quad (15.86)$$

$e_c = 1 \text{ mm.}$

Les coefficients de rigidité réduite des couches se déterminent à l'aide des relations (11.52). Soit :

— pour les couches à renfort tissu :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2} = 14,0 \text{ GPa}, \\ Q_{12} &= \nu_{LT} Q_{22} = 1,68 \text{ GPa}, \\ Q_{66} &= G_{LT} = 1,87 \text{ GPa}, \\ Q_{16} &= Q_{26} = 0. \end{aligned} \quad (15.87)$$

— pour les couches à renfort mat :

$$\begin{aligned} Q_{11}^{\text{m}} &= Q_{22}^{\text{m}} = \frac{E_{L\text{mat}}}{1 - \nu_{LT\text{mat}}^2} = 8,66 \text{ GPa}, \\ Q_{12}^{\text{m}} &= \nu_{LT\text{mat}} Q_{22}^{\text{m}} = 2,86 \text{ GPa}, \\ Q_{66}^{\text{m}} &= G_{LT\text{mat}} = 2,91 \text{ GPa}, \\ Q_{16}^{\text{m}} &= Q_{26}^{\text{m}} = 0. \end{aligned} \quad (15.88)$$

Les stratifiés étant symétriques, les matrices de rigidité des équations constitutives se réduisent aux matrices de membrane et aux matrices de flexion/torsion. D'autre part, dans les calculs, les couches adjacentes de même nature peuvent être regroupées en une seule couche.

### 1. Stratifié avec renfort tissu à l'extérieur (figure 15.13a)

D'après la relation (14.31), les coefficients de rigidité  $A_{ij}$  en membrane s'écrivent sous la forme :

$$A_{ij} = 2 \left[ Q_{ij}^m \times 2 \times 10^{-3} + Q_{ij} \times 1,4 \times 10^{-3} \right]. \quad (15.89)$$

D'où

$$\begin{aligned} A_{11} &= 73,858 \times 10^6 \text{ N/m}, & A_{12} &= 16,140 \times 10^6 \text{ N/m}, \\ A_{22} &= A_{11}, & A_{66} &= 16,876 \times 10^6 \text{ N/m}, \\ A_{16} &= A_{26} = 0. \end{aligned} \quad (15.90)$$

D'après la relation (14.33), les coefficients de rigidité  $D_{ij}$  en flexion et torsion s'écrivent :

$$D_{ij} = 2 \left[ Q_{ij}^m \left( 2 + \frac{2^3}{12} \right) + Q_{ij} \left( 1,4 \times 2,7^2 + \frac{1,4^3}{12} \right) \right] \times 10^{-9}. \quad (15.91)$$

D'où

$$\begin{aligned} D_{11} &= 338,41 \text{ Nm}, & D_{12} &= 50,312 \text{ Nm}, \\ D_{22} &= D_{11}, & D_{66} &= 54,546 \text{ Nm}, \\ D_{16} &= D_{26} = 0. \end{aligned} \quad (15.92)$$

L'équation constitutive du stratifié est donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73,858 \times 10^6 & 16,140 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16,140 \times 10^6 & 73,858 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16,876 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 338,41 & 50,312 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50,312 & 338,41 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54,546 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (15.93)$$

### 2. Stratifié à renfort mat à l'extérieur (figure 15.13b)

La différence d'empilement ne modifie que les coefficients  $D_{ij}$  en flexion et torsion, qui s'expriment ici, d'après (14.33), suivant :

$$D_{ij} = 2 \left[ Q_{ij} \left( 1,4 \times 0,7^2 + \frac{1,4^3}{12} \right) + Q_{ij}^m \left( 2 \times 2,4^2 + \frac{2^3}{12} \right) \right] \times 10^{-9}. \quad (15.94)$$

Soit :

$$\begin{aligned} D_{11} &= 236,77 \text{ Nm}, & D_{12} &= 72,755 \text{ Nm}, \\ D_{22} &= D_{11}, & D_{66} &= 73,347 \text{ Nm}, \\ D_{16} &= D_{26} = 0. \end{aligned} \quad (15.95)$$

L'équation constitutive du stratifié s'écrit :

$$\left[ \begin{array}{c} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccccc} 73,858 \times 10^6 & 16,140 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16,140 \times 10^6 & 73,858 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16,876 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 236,77 & 72,755 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 72,755 & 236,77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 74,347 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array} \right] \quad (15.96)$$

La comparaison des équations (15.93) et (15.96) montre que les comportements en membrane des deux stratifiés sont identiques (termes  $A_{ij}$  égaux). Les termes  $D_{11}$  et  $D_{22}$  sont supérieurs dans le cas où le renfort tissu est situé à l'extérieur, d'où des rigidités en flexion supérieures. Cette propriété résulte du fait que les couches à plus forts modules ( $E_L$  et  $E_T$ ) sont les plus éloignées du plan moyen. Par contre, les termes  $D_{12}$  de couplage flexion-torsion et  $D_{66}$  sont supérieurs dans le cas où le renfort mat est situé à l'extérieur, d'où dans ce cas une meilleure rigidité en torsion.

## EXERCICES

**15.1** Établir les relations du tableau 15.2.

**15.2** Établir les relations du tableau 15.3.

**15.3** On considère les stratifiés croisés symétriques  $[0/90]_k S$ , d'épaisseur donnée  $h$ , constitués de  $4k$  couches orientées à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$ . Les couches ont même épaisseur  $h/4k$  et mêmes caractéristiques mécaniques.

Comment évolue la matrice de rigidité lorsque  $k$  augmente à partir de  $k = 1$  (stratifié  $[0/90]_S$ ) ?

**15.4** On considère les stratifiés croisés antisymétriques  $[0/90]_k$ , d'épaisseur donnée  $h$ , constitués de  $2k$  couches orientées alternativement à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$ . Les couches ont même épaisseur  $h/2k$  et mêmes caractéristiques mécaniques.

Comment évolue la matrice de rigidité lorsque  $k$  augmente à partir de 1 (stratifié  $[0/90]$ ) ?

**15.5** Reprendre la question précédente dans le cas des stratifiés antisymétriques  $[90/0]_k$ , où les couches sont orientées alternativement à  $90^\circ$  et à  $0^\circ$ . Comparer aux résultats précédents.

**15.6** Un tissu hybride est tissé à partir de stratifils de carbone en chaîne et de stratifils de verre en trame. La chaîne comporte 600 fils par unité de largeur de tissu. Les fils ont un titre de 1000 tex et une masse volumique de  $1800 \text{ kg/m}^3$ . Les caractéristiques mécaniques des fils sont  $E_f = 250 \text{ GPa}$  et  $\nu_f = 0,32$ . La trame comporte 200 fils par unité de longueur de tissu. Les fils ont un titre de 2400 tex et une masse volumique de  $2600 \text{ kg/m}^3$ . Les caractéristiques mécaniques des fils sont  $E_f = 72 \text{ GPa}$  et  $\nu_f = 0,22$ .

Calculer la masse surfacique du tissu et le coefficient d'équilibrage.

Le tissu est utilisé avec une matrice de caractéristiques mécaniques  $E_m = 3,5 \text{ GPa}$  et  $\nu_m = 0,30$  pour constituer une couche de 1,4 mm d'épaisseur.

Calculer les fractions volumiques des fils en chaîne et en trame.

En utilisant l'analogie stratifié, calculer les modules chaîne et trame, puis les rigidités en membrane du tissu et les modules de la couche.

## CHAPITRE 16

# Relations Fondamentales et Formulation Énergétique de la Théorie Classique des Stratifiés

## 16.1 RELATIONS FONDAMENTALES

### 16.1.1 Relations générales

Les relations fondamentales de la théorie classique des stratifiés sont obtenues en introduisant l'équation constitutive (14.29) des stratifiés dans les relations (13.52) ou (13.57) dans le cas de problèmes de dynamique, ou dans les relations (13.59) dans le cas de problèmes de statique. En reportant, par exemple, l'équation (14.29) dans la relation (13.57), puis en tenant compte des expressions (14.15) liant les déformations aux déplacements, nous obtenons les trois relations fondamentales de la théorie classique des stratifiés :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\ = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (16.1)$$

$$\begin{aligned} A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\ = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (16.2)$$

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\
& - B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} \\
& - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
& = q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \tag{16.3}
\end{aligned}$$

Les équations précédentes ne prennent pas en compte les forces volumiques, les contraintes éventuelles de cisaillement sur les faces du stratifié, et négligent les effets d'inertie en rotation. La prise en compte de ces facteurs conduit à introduire des termes complémentaires dans les équations (16.1) à (16.3), conformément aux relations (13.52). Les équations (16.1) à (16.3) constituent les équations fondamentales de la théorie classique des stratifiés. Ces équations, associées aux conditions imposées sur les frontières de la structure (paragraphe 16.2), permettent de trouver, en principe, les déplacements  $u_0(x, y, t)$ ,  $v_0(x, y, t)$  et  $w_0(x, y, t)$ , solutions du problème d'élasticité. La résolution de ces équations est toutefois complexe, et ne peut être menée de manière analytique que dans quelques cas particuliers.

Une simplification importante apparaît lorsque tous les termes  $B_{ij}$  sont nuls (cas des stratifiés symétriques par exemple). Dans ce cas, les équations (16.1) à (16.3) sont partiellement découpées : les équations (16.1) et (16.2) ne contiennent que les déplacements  $u_0(x, y, t)$  et  $v_0(x, y, t)$ , alors que l'équation (16.3) ne fait intervenir que le déplacement  $w_0(x, y, t)$ . Dans tous les autres cas, il est nécessaire de résoudre des équations couplées.

## 16.1.2 Stratifié symétrique

Dans le cas où le stratifié est symétrique, tous les termes  $B_{ij}$  sont nuls (chapitre 15), ainsi que les grandeurs  $R$ . Les relations fondamentales s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{aligned}
& A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \tag{16.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (16.5)$$

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\ = q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_{xy} \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right). \end{aligned} \quad (16.6)$$

Dans le cas de problèmes de statique, ces relations se réduisent à :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\ + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0, \end{aligned} \quad (16.7)$$

$$\begin{aligned} A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\ + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0, \end{aligned} \quad (16.8)$$

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \\ + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = q. \end{aligned} \quad (16.9)$$

Le comportement en membrane ( $u_0, v_0$ ) est découpé du comportement en flexion ( $w_0$ ). Si, en outre, le stratifié est équilibré :  $A_{16} = A_{26} = 0$ , les relations (16.4), (16.5) ou (16.7), (16.8) sont simplifiées, les relations (16.6) ou (16.9) restant inchangées.

### 16.1.3 Stratifié croisé antisymétrique

Comme autre exemple, nous considérons le cas d'un stratifié croisé antisymétrique, pour lequel (chapitre 15) : les rigidités de membrane sont  $A_{11}, A_{12}, A_{22} = A_{11}, A_{66}$ , les rigidités de flexion-torsion sont  $D_{11}, D_{12}, D_{22} = D_{11}, D_{66}$ , et les rigidités de couplage  $B_{11}, B_{22} = -B_{11}$ . Dans le cas d'un problème de statique, les relations fondamentales s'écrivent dans ce cas :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0, \quad (16.10)$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{11} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0, \quad (16.11)$$

$$D_{11} \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - B_{11} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) = q. \quad (16.12)$$

Du fait de la présence des termes  $B_{11}$  et  $B_{22} = -B_{11}$ , les équations différentielles sont couplées.

### 16.1.4 Expressions des résultantes et moments

Les expressions des résultantes et moments en fonction des déplacements sont obtenues en reportant les expressions (14.15) des déformations dans l'équation constitutive (14.29) :

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{16} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ &\quad - 2B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (16.13)$$

$$\begin{aligned} N_y &= A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ &\quad - 2B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (16.14)$$

$$\begin{aligned} N_{xy} &= A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ &\quad - 2B_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (16.15)$$

$$\begin{aligned} M_x &= B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{16} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ &\quad - 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (16.16)$$

$$\begin{aligned} M_y &= B_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{26} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ &\quad - 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (16.17)$$

$$M_{xy} = B_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ - 2D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}. \quad (16.18)$$

Les expressions des résultantes de cisaillement peuvent être obtenues en reportant les expressions précédentes des moments dans les équations (13.56) :

$$Q_x = B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\ + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - D_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 3D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\ - (D_{12} + 2D_{16}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}, \quad (16.19)$$

$$Q_y = B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\ + 2B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\ - 3D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}. \quad (16.20)$$

La théorie classique des stratifiés est basée sur l'hypothèse de nullité (14.1) des déformations en cisaillement  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ . Cette hypothèse n'est pas satisfaite que si les résultantes de cisaillement  $Q_x$  et  $Q_y$  sont nulles. En fait, les relations précédentes (16.19) et (16.20) montrent que ces résultantes ne sont pas nulles. Cette incohérence apparente est admise dans le cadre de la théorie classique des plaques.

### 16.1.5 Expression des contraintes

Les expressions des contraintes en membrane en fonction des déplacements sont obtenues, pour chaque couche, en reportant les relations (14.15) des déformations et des courbures dans les expressions (14.20) des contraintes :

$$\sigma_{xx}^k = Q_{11}^k \frac{\partial u_0}{\partial x} + Q_{16}^k \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + Q_{12}^k \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ - z \left( Q_{11}^k \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2Q_{16}^k \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + Q_{12}^k \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right), \quad (16.21)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^k &= Q_{12}^k \frac{\partial u_0}{\partial x} + Q_{26}^k \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + Q_{22}^k \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ &\quad - z \left( Q_{12}^k \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2Q_{26}^k \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + Q_{22}^k \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right),\end{aligned}\tag{16.22}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^k &= Q_{16}^k \frac{\partial u_0}{\partial x} + Q_{66}^k \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + Q_{26}^k \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ &\quad - z \left( Q_{16}^k \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2Q_{66}^k \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + Q_{26}^k \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right).\end{aligned}\tag{16.23}$$

Les contraintes de cisaillement transverse  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$ , appelées également contraintes de cisaillement interlaminaires, peuvent être déterminées à partir des deux premières relations fondamentales (13.20) de la mécanique des matériaux. En reportant les expressions précédentes (16.21) à (16.23) des contraintes, puis en intégrant suivant la variable  $z$  dans l'épaisseur de chaque couche, il vient dans le cas d'un problème de statique :

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^k &= \frac{z^2}{2} \left[ Q_{11}^k \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + 3Q_{16}^k \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + (Q_{12}^k + 2Q_{66}^k) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + Q_{26}^k \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right] \\ &\quad - z \left[ Q_{11}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2Q_{16}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + Q_{66}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + Q_{16}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + (Q_{12}^k + 2Q_{66}^k) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + Q_{26}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right] + a^k(x, y),\end{aligned}\tag{16.24}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yz}^k &= \frac{z^2}{2} \left[ Q_{16}^k \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (Q_{12}^k + 2Q_{66}^k) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + 3Q_{26}^k \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + Q_{22}^k \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right] \\ &\quad - z \left[ Q_{16}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (Q_{12}^k + 2Q_{66}^k) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + Q_{26}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + Q_{66}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + 2Q_{26}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + Q_{22}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right] + b^k(x, y).\end{aligned}\tag{16.25}$$

Les fonctions  $a^k(x, y)$  et  $b^k(x, y)$  sont des fonctions d'intégration, déterminées en exprimant la continuité des contraintes de cisaillement transverse  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  entre les couches et en annulant ces contraintes de cisaillement sur les faces inférieure et supérieure du stratifié.

## 16.2 CONDITIONS AUX FRONTIÈRES

### 16.2.1 Généralités

Les conditions imposées aux frontières d'une structure sont celles qui garantissent des solutions uniques aux relations fondamentales (16.1) à (16.3). Ces relations étant des équations aux dérivées partielles du quatrième ordre en  $x$  et en  $y$ , quatre conditions doivent être imposées sur les frontières. Un élément de frontière (figure 16.1) est repéré en un point  $P(x, y, 0)$  de la frontière par sa normale unitaire  $\vec{n}$  et le vecteur unitaire orthogonal  $\vec{t}$  dans le plan moyen. La déformée en  $P$  du stratifié est caractérisée par le déplacement du point  $P$  exprimé dans la base  $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{k})$  par ses composantes :  $u_{0n}(x, y)$ ,  $u_{0t}(x, y)$ ,  $w_0(x, y)$  et par l'orientation de la déformée caractérisée par  $\frac{\partial w_0}{\partial n}$ . Les actions exercées au point  $P$  sont caractérisées par les résultantes en membrane  $N_n$ ,  $N_{nt}$ , les résultantes de cisaillement  $Q_n$ , et les moments de flexion  $M_n$  et de torsion  $M_{nt}$ . Les conditions imposées en  $P$  portent sur l'une des grandeurs de chacune des paires suivantes :

$$u_{0n}, N_n; \quad u_{0t}, N_t; \quad \frac{\partial w_0}{\partial n}, M_n; \quad w_0, \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n. \quad (16.26)$$

La grandeur  $\frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n$  est connue comme étant la condition de frontière de Kirchhoff. Les valeurs imposées (généralement nulles) seront notées à l'aide d'un surlignement dans les paragraphes suivants.

### 16.2.2 Appui simple

Dans le cas d'un appui simple (figure 16.2), généralement quatre possibilités de conditions imposées sont retenues et classées suivant :

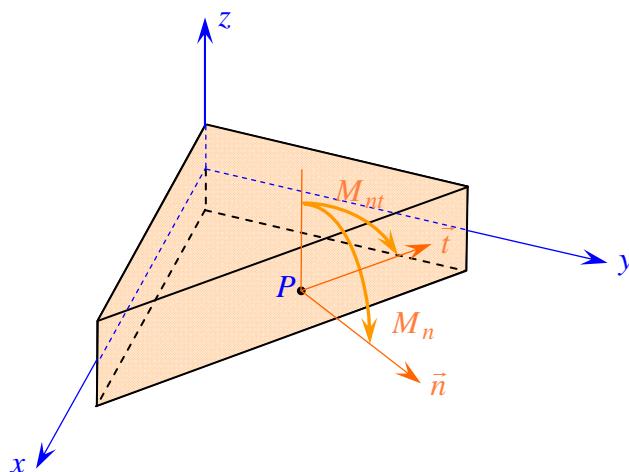


FIGURE 16.1. Élément de frontière.

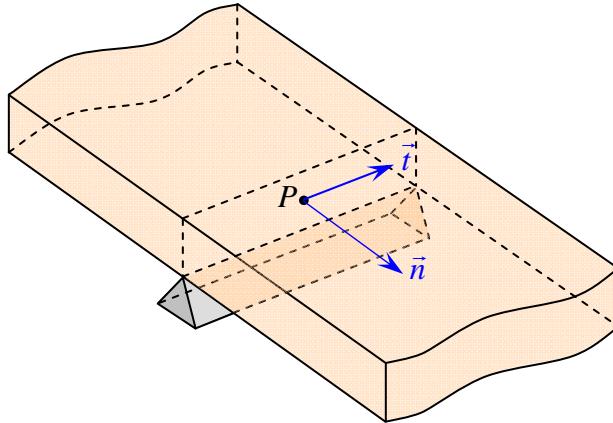


FIGURE 16.2. Appui simple.

$$\begin{aligned}
 A_1 : \quad w_0 &= 0, & M_n &= 0, & u_{0n} &= \bar{u}_{0n}, & u_{0t} &= \bar{u}_{0t}, \\
 A_2 : \quad w_0 &= 0, & M_n &= 0, & N_n &= \bar{N}_n, & u_{0t} &= \bar{u}_{0t}, \\
 A_3 : \quad w_0 &= 0, & M_n &= 0, & u_{0n} &= \bar{u}_{0n}, & N_{nt} &= \bar{N}_{nt}, \\
 A_4 : \quad w_0 &= 0, & M_n &= 0, & N_n &= \bar{N}_n, & N_{nt} &= \bar{N}_{nt}.
 \end{aligned} \tag{16.27}$$

Dans la pratique, la condition retenue est :

$$w_0 = 0, \quad M_n = 0, \quad N_n = 0, \quad N_{nt} = 0. \tag{16.28}$$

### 16.2.3 Encastrement

Dans le cas d'un encastrement (figure 16.3), quatre possibilités sont également considérées :

$$\begin{aligned}
 E_1 : \quad w_0 &= 0, & \frac{\partial w_0}{\partial n} &= 0, & u_{0n} &= \bar{u}_{0n}, & u_{0t} &= \bar{u}_{0t}, \\
 E_2 : \quad w_0 &= 0, & \frac{\partial w_0}{\partial n} &= 0, & N_n &= \bar{N}_n, & u_{0t} &= \bar{u}_{0t}, \\
 E_3 : \quad w_0 &= 0, & \frac{\partial w_0}{\partial n} &= 0, & u_{0n} &= \bar{u}_{0n}, & N_{nt} &= \bar{N}_{nt}, \\
 E_4 : \quad w_0 &= 0, & \frac{\partial w_0}{\partial n} &= 0, & N_n &= \bar{N}_n, & N_{nt} &= \bar{N}_{nt}.
 \end{aligned} \tag{16.29}$$

Dans la pratique, la condition retenue est :

$$w_0 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0, \quad u_{0n} = 0, \quad u_{0t} = 0. \tag{16.30}$$

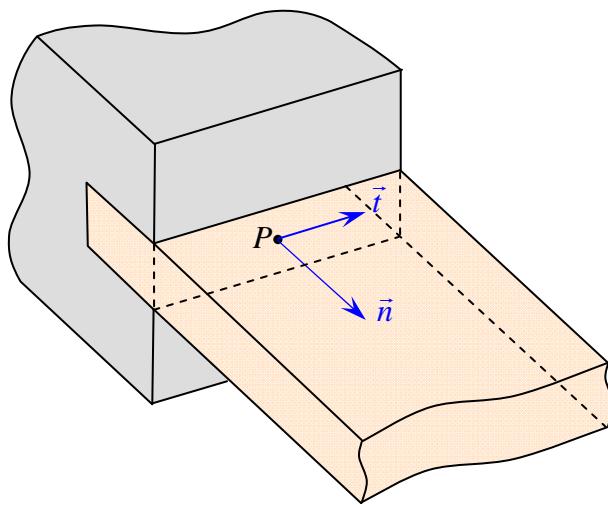


FIGURE 16.3. Encastrement.

#### 16.2.4 Bord libre

Dans le cas d'un bord libre (figure 16.4), les efforts exercés sont nuls, soit  $N_n$ ,  $N_{nt}$ ,  $Q_n$ ,  $M_n$  et  $M_{nt}$ . Il en résulte que cinq conditions doivent être vérifiées, alors que seulement quatre conditions sont nécessaires. Pour lever cette difficulté, il est usuel de procéder de la manière suivante. Le couple de torsion exercé sur un élément de longueur  $dt$  est considéré comme étant constitué de deux forces de résultantes  $M_{nt}$  et  $M_{nt} + dM_{nt}$  dont les supports sont distants de  $dt$ . La variation de  $M_{nt}$  est donnée par :

$$dM_{nt} = \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} dt.$$

L'équilibre de l'élément de surface sous l'effet du couple de torsion et de la résultante  $Q_n dt$  de cisaillement s'écrit :

$$-M_{nt} + M_{nt} + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} dt + Q_n dt = 0,$$

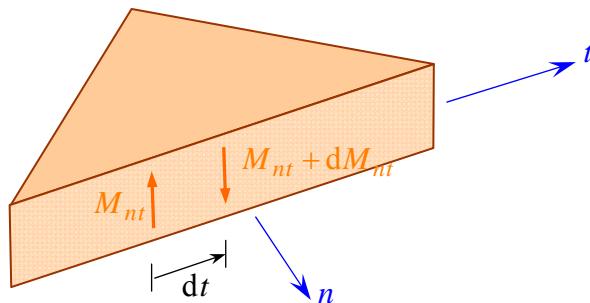


FIGURE 16.4. Bord libre.

ou

$$\frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n = 0. \quad (16.31)$$

Cette relation constitue la condition de frontière de Kirchhoff. Et les conditions imposées pour un bord libre s'écrivent :

$$N_n = 0, \quad N_{nt} = 0, \quad M_n = 0, \quad \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n = 0. \quad (16.32)$$

## 16.3 FORMULATION ÉNERGETIQUE DE LA THÉORIE DES STRATIFIÉS

### 16.3.1 Introduction

Les théorèmes de l'énergie (paragraphe 8.3) peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des stratifiés. Cette formulation associée aux conditions aux frontières permet, dans le cadre du calcul variationnel, de développer des méthodes (paragraphe 8.4) de recherche de solutions approchées du comportement mécanique des stratifiés. Les théorèmes de l'énergie sont également à la base de l'analyse du comportement mécanique des stratifiés à l'aide des éléments finis.

### 16.3.2 Énergie de déformation d'un stratifié

L'énergie de déformation (8.50) d'un solide élastique s'écrit en coordonnées cartésiennes suivant :

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz} + \sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{xy}\gamma_{xy}) dx dy dz, \quad (16.33)$$

où l'intégration est étendue à l'ensemble du volume du solide. En tenant compte des hypothèses de la théorie des stratifiés :  $\sigma_{zz} = 0$ ,  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  et des relations (14.19) exprimant les contraintes en fonction des déformations, l'énergie de déformation s'écrit :

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint (Q_{11}^k \varepsilon_{xx}^2 + Q_{22}^k \varepsilon_{yy}^2 + Q_{66}^k \gamma_{xy}^2 + 2Q_{12}^k \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + 2Q_{16}^k \varepsilon_{xx} \gamma_{xy} + 2Q_{26}^k \varepsilon_{yy} \gamma_{xy}) dx dy dz. \quad (16.34)$$

Cette relation peut être exprimée en fonction des déplacements  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$ , en

introduisant dans l'expression précédente les relations déformations-déplacements (14.14) et (14.15), établies au chapitre 14. En intégrant ensuite en  $z$  suivant l'épaisseur du stratifié, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 U_d = & \frac{1}{2} \iint \left\{ A_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \right. \\
 & + 2 \left( A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \\
 & - B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2B_{12} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
 & - B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2B_{16} \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] \\
 & - 2B_{26} \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] \\
 & - 4B_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
 & + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\
 & \left. + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy. \tag{16.35}
 \end{aligned}$$

Dans cette expression, l'intégration doit se faire dans le plan de la plaque du matériau stratifié. Cette expression introduit les coefficients de rigidité  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  et  $D_{ij}$  exprimés respectivement par les relations (14.23), (14.24) et (14.27). L'expression de l'énergie de déformation fait apparaître une énergie de déformation en membrane introduite par les coefficients de rigidité en membrane  $A_{ij}$  et une énergie de déformation en flexion associée aux coefficients de rigidité en flexion  $D_{ij}$ . L'expression de l'énergie de déformation contient également des termes de couplage entre les déplacements en membrane  $u_0$ ,  $v_0$  et les déplacements transverses  $w_0$ . Ces termes de couplage sont introduits, comme dans le cas des relations fondamentales (paragraphe 16.1), par la présence des coefficients de rigidité  $B_{ij}$ .

Dans le cas de stratifiés symétriques, les termes  $B_{ij}$  de couplage membrane-flexion sont nuls, et l'expression (16.35) de l'énergie de déformation se réduit suivant :

$$\begin{aligned}
U_d = & \frac{1}{2} \iint \left[ A_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \right. \\
& \left. + 2 \left( A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \\
& + \frac{1}{2} \iint \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\
& \left. + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \tag{16.36}
\end{aligned}$$

L'énergie de déformation apparaît comme la somme de deux termes : l'un fonction uniquement des déplacements  $u_0$  et  $v_0$  de membrane, l'autre fonction uniquement des déplacements transverses  $w_0$ . Dans le cas de problèmes de flexion pure, le premier terme est réduit à une constante  $C$ , et l'énergie de déformation s'écrit suivant :

$$\begin{aligned}
U_d = & \frac{1}{2} \iint \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\
& \left. + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + C. \tag{16.37}
\end{aligned}$$

De plus, si le stratifié est tel que  $D_{16} = D_{26} = 0$  (stratifié orthotrope d'axes confondus avec les axes  $x$  et  $y$ ), l'énergie de déformation est encore simplifiée selon :

$$\begin{aligned}
U_d = & \frac{1}{2} \iint \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\
& \left. + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + C. \tag{16.38}
\end{aligned}$$

### 16.3.3 Énergie cinétique d'un stratifié

L'énergie cinétique d'un solide (8.54) s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz, \tag{16.39}$$

où  $\rho$  est la masse volumique en un point et l'intégration est étendue à l'ensemble du solide. Dans le cas de la théorie classique des stratifiés, le champ des déplacements (14.3) s'écrit :

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ v &= v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ w &= w_0(x, y), \end{aligned} \quad (16.40)$$

où  $w_0$  est indépendant de  $z$ . En substituant ces relations dans l'expression (16.39), l'énergie cinétique du stratifié s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz. \quad (16.41)$$

En négligeant les dérivées par rapport au temps des rotations (négligeant donc les termes d'inertie de rotation), puis en intégrant en  $z$  suivant l'épaisseur, l'énergie cinétique du stratifié se réduit à :

$$E_c = \frac{1}{2} \iint \rho_s \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy, \quad (16.42)$$

en introduisant la masse surfacique (13.29) du stratifié au point  $(x, y)$ .

### 16.3.4 Travail des actions exercées sur le stratifié

Dans le cas d'une flexion transversale, les actions exercées se réduisent aux charges transverses exercées sur les faces inférieure et supérieure du stratifié. La variation du travail de ces actions s'écrit :

$$\delta W_f = \iint [\sigma_{zz}(h/2) - \sigma_{zz}(-h/2)] \delta w_0 dx dy. \quad (16.43)$$

Soit en introduisant les contraintes  $q$  définies en (13.38) :

$$\delta W_f = \iint q \delta w_0 dx dy. \quad (16.44)$$

La fonction énergie  $W_f$  s'écrit donc :

$$W_f = \iint q w_0 dx dy. \quad (16.45)$$

## CHAPITRE 17

# Prise en Compte du Cisaillement Transverse dans la Théorie des Stratifiés

### 17.1 LIMITATION DE LA THÉORIE DES STRATIFIÉS

La théorie classique des stratifiés (chapitre 14), basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, permet de décrire avec une bonne précision les champs des contraintes et déformations dans les matériaux composites stratifiés peu épais, excepté dans les régions peu étendues près des bords des stratifiés. La validité de la théorie des stratifiés a pu être établie en comparant les résultats obtenus à partir de cette théorie aux solutions exactes des équations d'élasticité, solutions qui peuvent être explicitées dans le cas de certaines configurations particulières (chapitre 19).

Par contre, dans le cas de stratifiés épais (rapport largeur sur épaisseur inférieur à 10), la théorie classique devient assez mal adaptée à la description du comportement mécanique : flèche du stratifié, répartition des contraintes, etc. Une première amélioration consiste à tenir compte du cisaillement transverse, avec une théorie des plaques du premier degré (paragraphes 17.2 et 17.3). Une deuxième amélioration consiste à modifier cette théorie, en introduisant des facteurs de correction aux modules de cisaillement transverse du stratifié. Cette approche, présentée au paragraphe 17.4, est une extension, aux cas des stratifiés, des théories développées par E. Reissner [22] et R.D. Mindlin [23] dans le cas de plaques homogènes isotropes. Cette analyse a été initialement développée par J.M. Whitney et N.J. Pagano [24, 25].

### 17.2 CHAMPS DES DÉFORMATIONS ET DES CONTRAINTES

#### 17.2.1 Champ des déplacements

Le schéma utilisé est un schéma du premier degré de la forme générale (13.3), soit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t). \end{aligned} \tag{17.1}$$

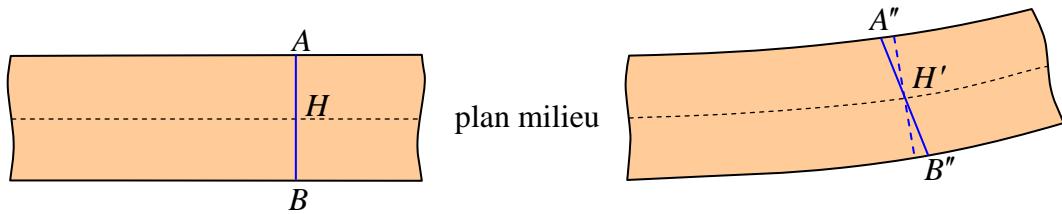


FIGURE 17.1. Déformation dans le cas d'un schéma du premier degré avec cisaillement transverse.

avec

$$u_0(x, y, t) = u(x, y, 0, t),$$

$$v_0(x, y, t) = v(x, y, 0, t),$$

$$w_0(x, y, t) = w(x, y, 0, t).$$

Nous avons montré (paragraphe 13.2.3) que, dans un schéma du premier ordre, la déformée d'une normale  $AB$  du stratifié reste un segment de droite lors de la déformation. Toutefois, contrairement à la théorie classique, cette déformée ne reste pas normale à la déformée du plan moyen (figure 17.1) dans le cas où l'on tient compte du cisaillement transverse.

## 17.2.2 Champ des déformations

Le champ des déformations est déduit du champ des déplacements (17.1). Il s'écrit (13.7) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \tag{17.2}$$

Le tenseur des déformations en un point  $M$  du stratifié est donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & 0 \end{bmatrix}, \quad (17.3)$$

et la matrice des déformations comporte cinq composantes non nulles :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}. \quad (17.4)$$

Le champ des déformations peut être sous-divisé en deux champs :

— *le champ des déformations en membrane-flexion* :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{mf}}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (17.5)$$

— *le champ des déformations en cisaillement transverse* :

$$\boldsymbol{\gamma}_c(M) = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{bmatrix}. \quad (17.6)$$

Le champ des déformations en cisaillement varie a priori d'une couche à l'autre. Dans la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse, on admet toutefois que le champ est identique dans toutes les couches. La première approche consiste à admettre que les déformations en cisaillement sont égales aux déformations moyennes  $\gamma_{yz}^0$  et  $\gamma_{xz}^0$  du stratifié, soit :

$$\boldsymbol{\gamma}_c(M) = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}. \quad (17.7)$$

Comme dans le cas de la théorie classique des stratifiés, le champ des déformations en membrane-flexion est la superposition :

— *des déformations en membrane* :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (17.8)$$

s'exprimant exclusivement en fonction des déplacements ( $u_0, v_0$ ) dans le plan moyen ( $Oxy$ ) des points de ce plan ;

— *des déformations en flexion et torsion :*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \end{bmatrix}. \quad (17.9)$$

Les déformations en flexion et torsion s'expriment en fonction de la matrice des courbures suivant la relation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f(M) = z \boldsymbol{\kappa}(x, y), \quad (17.10)$$

avec

$$\boldsymbol{\kappa}(x, y) = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (17.11)$$

Finalement, le champ  $\boldsymbol{\varepsilon}_{mf}(M)$  s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{mf} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (17.12)$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, & \varepsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, & \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \\ \kappa_x &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, & \kappa_y &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, & \kappa_{xy} &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}. \end{aligned} \quad (17.13)$$

Le champ des déformations s'écrit donc sous une forme analogue à la relation (14.16) de la théorie classique des stratifiés :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{mf}}(M) = \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z \boldsymbol{\kappa}(x, y). \quad (17.14)$$

Seules les expressions des courbures sont modifiées.

### 17.2.3 Champ des contraintes

Les contraintes dans la couche  $k$  s'expriment suivant la relation générale (13.12), soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \hline \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \hline \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}. \quad (17.15)$$

Les paramètres  $Q'_{ij}$  et  $C'_{ij}$  de la couche  $k$  sont rapportés aux axes de référence du stratifié. Ils s'expriment en fonction des paramètres exprimés dans les axes des matériaux des couches (tableaux 11.3 et 11.6). Leurs expressions sont reportées dans le tableau 17.1.

Le champ des contraintes est constitué des contraintes en membrane :  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  et des contraintes en cisaillement transverse :  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{xz}$ . L'expression (17.15) montre que ces deux champs sont découpés.

TABLEAU 17.1. Coefficients de rigidité rapportés aux axes du stratifié en fonction des coefficients rapportés aux axes principaux des couches.

---


$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\ Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\ Q'_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta, \\ Q'_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\ C'_{44} &= C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta, \\ C'_{45} &= (C_{55} - C_{44}) \sin \theta \cos \theta, \\ C'_{55} &= C_{44} \sin^2 \theta + C_{55} \cos^2 \theta. \end{aligned}$$


---

Les contraintes en membrane dans la couche  $k$  s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix},$$

ou sous forme contractée :

$$\boldsymbol{\sigma}_k(M) = \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\kappa}(x, y). \quad (17.16)$$

Ces expressions semblables aux relations (14.20) et (14.21) de la théorie classique des stratifiés en diffèrent par les expressions des courbures (17.13).

Les contraintes en cisaillement transverse dans la couche  $k$  s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}. \quad (17.17)$$

## 17.3 RELATIONS FONDAMENTALES DU COMPORTEMENT D'UN STRATIFIÉ, TENANT COMPTE DU CISAILLEMENT TRANSVERSE

### 17.3.1 Équation constitutive

L'équation constitutive d'un stratifié, tenant compte du cisaillement transverse, est d'après (17.16) et (17.17) la superposition de la relation (14.29) de la théorie classique des stratifiés, et de l'équation faisant intervenir les résultantes en cisaillement  $Q_x$  et  $Q_y$  introduites en (13.18). Soit :

$$\mathbf{Q}(x, y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_k dz. \quad (17.18)$$

Compte tenu des expressions (17.17) et (17.18), l'équation des résultantes en cisaillement s'écrit :

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}, \quad (17.19)$$

avec

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (C'_{ij})_k, \quad i, j = 4, 5. \quad (17.20)$$

Les coefficients  $F_{ij}$  ont même forme que les coefficients  $A_{ij}$  (14.23). Ils en

diffèrent par l'utilisation des coefficients  $C'_{ij}$  de rigidité en cisaillement transverse au lieu des coefficients  $Q'_{ij}$  de rigidité réduite (14.23).

L'équation constitutive des stratifiés avec cisaillement transverse s'écrit en rassemblant les résultantes et les moments sous la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (17.21)$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, & \varepsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, & \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \\ \kappa_x &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, & \kappa_y &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, & \kappa_{xy} &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}. \\ \gamma_{yz}^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y, & \gamma_{xz}^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x. \end{aligned} \quad (17.22)$$

L'équation constitutive peut également être écrite sous forme contractée suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M}_f \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma}_c \end{bmatrix}. \quad (17.23)$$

Les coefficients des matrices sont exprimés par :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k, \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k z_k, \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right), \\ F_{ij} &= \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (C'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (C'_{ij})_k e_k. \end{aligned} \quad (17.24)$$

TABLEAU 17.2. Coefficients de rigidité dans les axes principaux en fonction des modules de l'ingénieur.

---


$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, & Q_{22} &= \frac{E_T}{E_L} Q_{11}, \\ Q_{22} &= \nu_{LT} Q_{11}, & Q_{66} &= G_{LT}, \\ C_{44} &= G_{TT'}, & C_{55} &= G_{LT'}. \end{aligned}$$


---

Les coefficients  $Q'_{ij}$  et  $C'_{ij}$ , rapportés aux axes de référence du stratifié, sont exprimés dans le tableau 17.1, en fonction des coefficients rapportés aux axes principaux des couches. Ces paramètres s'expriment eux-mêmes (chapitres 9 et 10) en fonction des six modules de l'ingénieur :  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $G_{LT}$ ,  $G_{LT'}$  et  $G_{TT'}$ . Ces expressions sont rappelées dans le tableau 17.2.

L'équation constitutive (17.21) et (17.23) est la superposition

- de l'équation constitutive de la même forme (14.30) que la théorie classique des stratifiés :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix}, \quad (17.25)$$

(les équations (14.30) et (17.25) diffèrent par les expressions de la matrice  $\boldsymbol{\kappa}$  des courbures dans la théorie classique et dans la théorie avec cisaillement),

- de l'équation relative au cisaillement transverse :

$$[\mathbf{Q}] = [\mathbf{F}] [\boldsymbol{\gamma}_c]. \quad (17.26)$$

### 17.3.2 Relations fondamentales

Les relations fondamentales des stratifiés, tenant compte du cisaillement transverse, sont obtenues en introduisant l'équation constitutive (17.21) dans les relations fondamentales (13.50) des plaques. Soit :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \\ + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (17.27)$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \\
& = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}, 
\end{aligned} \tag{17.28}$$

$$\begin{aligned}
& F_{55} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + F_{45} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + F_{44} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q \\
& = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{17.29}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \\
& + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{55} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{45} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
& = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, 
\end{aligned} \tag{17.30}$$

$$\begin{aligned}
& B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \\
& + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{45} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{44} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
& = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{17.31}$$

Ces cinq équations permettent en principe de déterminer les cinq fonctions solutions  $u_0(x, y, t)$ ,  $v_0(x, y, t)$ ,  $w_0(x, y, t)$ ,  $\varphi_x(x, y, t)$  et  $\varphi_y(x, y, t)$ . Ces fonctions doivent vérifier en outre les conditions imposées sur les frontières de la structure étudiée.

Dans le cas de stratifiés symétriques,  $B_{ij} = 0$  et  $R = 0$ , les équations (17.27) et (17.28) se réduisent respectivement aux équations (16.4) et (16.5) de la

théorie classique. L'équation (17.29) est inchangée, alors que les équations (17.30) et (17.31) se simplifient suivant :

$$\begin{aligned} & D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \\ & + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{55} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{45} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ & = I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (17.32)$$

$$\begin{aligned} & D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \\ & + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{45} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{44} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ & = I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (17.33)$$

### 17.3.3 Conditions aux frontières

Les conditions aux frontières sont obtenues par application des théorèmes variationnels à l'énergie de déformation des plaques, tenant compte du cisaillement transverse. Les équations obtenues conduisent à des conditions imposées à une des variables de chacune des paires suivantes :

$$u_{0n}, N_n; \quad u_{0t}, N_t; \quad \varphi_n, M_n; \quad \varphi_t, M_t; \quad w_0, Q_n,$$

où  $n$  et  $t$  sont les directions normale et tangentielle (figure 16.1) en un point de la frontière où les conditions sont imposées. Dans le cas de la théorie avec cisaillement transverse, cinq conditions aux frontières sont donc imposées. Par exemple :

#### 1. Bord libre.

Pour tout point  $P$  d'un bord libre (figure 16.4), les conditions aux frontières s'écrivent :

$$N_n = 0, \quad N_t = 0, \quad M_n = 0, \quad \varphi_t = 0, \quad w_0 = 0. \quad (17.34)$$

#### 2. Appui simple (figure 16.2).

Les conditions s'écrivent :

$$N_n = 0, \quad u_{0t} = 0, \quad M_n = 0, \quad \varphi_t = 0, \quad w_0 = 0, \quad (17.35)$$

ou

$$N_n = 0, \quad N_t = 0, \quad M_n = 0, \quad \varphi_t = 0, \quad w_0 = 0. \quad (17.36)$$

### 3. Bord encastré (figure 16.3).

Les conditions aux frontières peuvent s'écrire :

$$u_{0n} = 0, \quad u_{0t} = 0, \quad \varphi_n = 0, \quad \varphi_t = 0, \quad w_0 = 0. \quad (17.37)$$

#### 17.3.4 Contraintes dans les couches

Les fonctions  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  étant déterminées, les contraintes en membrane dans la couche  $k$  s'écrivent d'après l'expression (17.16) suivant :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k &= \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \\ &+ z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17.38)$$

Les contraintes en cisaillement transverse dans la couche  $k$  s'expriment d'après l'expression (17.17) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (17.39)$$

Ces expressions conduisent à des contraintes de cisaillement qui sont uniformes dans chaque couche et discontinues entre les couches. Une telle répartition, uniforme dans chaque couche, n'est pas très réaliste. Une meilleure estimation des contraintes de cisaillement transverse peut alors être obtenue en reportant les expressions (17.38) des contraintes en membrane dans les relations fondamentales (8.20) de la mécanique des matériaux. Par exemple, dans le cas d'un problème statique, les relations (8.20) s'écrivent dans la couche  $k$  :

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx}^k + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy}^k + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz}^k = 0, \quad (17.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy}^k + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz}^k + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy}^k = 0. \quad (17.41)$$

Soit :

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz}^k = -\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx}^k - \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy}^k, \quad (17.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz}^k = -\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy}^k - \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy}^k. \quad (17.43)$$

En combinant les relations (17.38), (17.42) et (17.43), nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz}^k = a_1^k(x, y) + z a_2^k(x, y), \quad (17.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz}^k = b_1^k(x, y) + z b_2^k(x, y), \quad (17.45)$$

en introduisant les fonctions :

$$\begin{aligned} a_1^k(x, y) &= -Q_{11}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - 2Q_{16}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - Q_{66}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \\ &\quad - Q_{16}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - (Q_{12}^k + Q_{66}^k) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - Q_{26}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (17.46)$$

$$\begin{aligned} a_2^k(x, y) &= -Q_{11}^k \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - 2Q_{16}^k \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} - Q_{66}^k \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \\ &\quad - Q_{16}^k \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} - (Q_{12}^k + Q_{66}^k) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - Q_{26}^k \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (17.47)$$

$$\begin{aligned} b_1^k(x, y) &= -Q_{16}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - (Q_{12}^k + Q_{66}^k) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - Q_{26}^k \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \\ &\quad - Q_{66}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - 2Q_{26}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - Q_{22}^k \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (17.48)$$

$$\begin{aligned} b_2^k(x, y) &= -Q_{16}^k \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - (Q_{12}^k + Q_{66}^k) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} - Q_{26}^k \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \\ &\quad - Q_{66}^k \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} - 2Q_{26}^k \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - Q_{22}^k \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (17.49)$$

Dans les expressions de ces fonctions, les coefficients  $Q'_{ij}$  de la couche  $k$  sont notés  $Q_{ij}^k$ . L'intégration des relations (17.44) et (17.45) conduit ensuite aux

expressions des contraintes dans la couche  $k$  :

$$\sigma_{xz}^k(x, y) = a_0^k(x, y) + za_1^k(x, y) + \frac{z^2}{2}a_2^k(x, y), \quad (17.50)$$

$$\sigma_{yz}^k(x, y) = b_0^k(x, y) + zb_1^k(x, y) + \frac{z^2}{2}b_2^k(x, y). \quad (17.51)$$

Les fonctions d'intégration  $a_0^k(x, y)$  et  $b_0^k(x, y)$  sont déterminées en exprimant :

- la continuité de  $\sigma_{xz}^k$  et  $\sigma_{yz}^k$  au passage d'une couche à l'autre,
- la nullité de  $\sigma_{xz}^k$  et  $\sigma_{yz}^k$  sur les deux faces extrêmes du stratifié ( $k = 1, n$ ).

Cette méthode de détermination des contraintes de cisaillement transverse conduit à une répartition parabolique des contraintes dans l'épaisseur de chaque couche du stratifié.

## 17.4 THÉORIE MODIFIÉE DES STRATIFIÉS AVEC CISAILLEMENT TRANSVERSE

### 17.4.1 Hypothèses de la théorie stratifiée

Une amélioration de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse, explicitée dans les paragraphes 17.2 et 17.3, consiste à adopter le schéma suivant :

1. La partie de l'équation constitutive (17.21) relative aux résultantes en membrane et aux moments ( $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$ ) n'est pas modifiée.
2. La partie relative aux résultantes en cisaillement transverse est modifiée en remplaçant les coefficients de rigidité  $F_{ij}$  par de nouveaux coefficients de rigidité en cisaillement  $H_{ij}$  du stratifié :

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}, \quad (17.52)$$

avec

$$H_{ij} = k_{ij}F_{ij}, \quad i, j = 4, 5. \quad (17.53)$$

Les paramètres  $k_{ij}$  sont des facteurs de correction en cisaillement transverse, à déterminer.

La relation inverse exprimant les déformations moyennes en fonction des résultantes en cisaillement s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} \\ K_{45} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix}. \quad (17.54)$$

Les matrices  $[H_{ij}]$  et  $[K_{ij}]$  sont inverses l'une de l'autre. Par exemple :

$$\begin{aligned} H_{44} &= \frac{K_{55}}{\Delta K}, & H_{45} = H_{54} &= -\frac{K_{45}}{\Delta K}, \\ H_{55} &= \frac{K_{44}}{\Delta K}, & \Delta K &= K_{44}K_{55} - K_{45}^2. \end{aligned} \quad (17.55)$$

L'équation constitutive s'écrit sous une forme analogue à (17.21) en changeant les coefficients de cisaillement, soit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}. \quad (17.56)$$

Les expressions des déformations et courbures sont données par les relations (17.22). Il en résulte que les relations fondamentales sont identiques aux équations (17.27) à (17.33), en y remplaçant les termes  $F_{ij}$  par les nouveaux coefficients de cisaillement (17.55).

### 17.4.2 Évaluation des facteurs de correction en cisaillement dans le cas d'une plaque orthotrope

Nous considérons dans ce paragraphe le cas d'une plaque homogène constituée d'un matériau orthotrope dont les axes principaux sont confondus avec les axes de référence de la plaque. Dans le cas d'une flexion pure, l'équation (17.38) des contraintes en membrane se réduit suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (17.57)$$

Soit, d'après la relation (17.42) :

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz} = -z \left[ \frac{\partial}{\partial x} (Q_{11}\kappa_x + Q_{12}\kappa_y) + \frac{\partial}{\partial x} (Q_{66}\kappa_{xy}) \right]. \quad (17.58)$$

L'intégration, en tenant compte de  $\sigma_{xz}(\pm h/2) = 0$ , conduit à :

$$\sigma_{xz} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} (Q_{11}\kappa_x + Q_{12}\kappa_y) + \frac{\partial}{\partial y} (Q_{66}\kappa_{xy}) \right] \left( \frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right), \quad (17.59)$$

où  $h$  est l'épaisseur de la plaque. L'équation constitutive (17.56), compte tenu des expressions (15.4), conduit à :

$$M_x = \frac{h^3}{12} (Q_{11}\kappa_x + Q_{12}\kappa_y), \quad (17.60)$$

$$M_{xy} = \frac{h^3}{12} Q_{66}\kappa_{xy}. \quad (17.61)$$

L'expression (17.59) de la contrainte en cisaillement s'écrit donc :

$$\sigma_{xz} = \frac{3}{2h} \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right). \quad (17.62)$$

Soit en tenant compte de l'équation (13.56) :

$$\sigma_{xz} = \frac{3}{2h} \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) Q_x. \quad (17.63)$$

Un raisonnement identique conduit à :

$$\sigma_{yz} = \frac{3}{2h} \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) Q_y. \quad (17.64)$$

Une première méthode pour déterminer les paramètres  $k_{ij}$  consiste à exprimer les résultantes en cisaillement par la relation (17.52). Dans le cas d'une plaque homogène orthotrope, cette relation s'écrit :

$$Q_y = k_{44} F_{44} \gamma_{yz}^0, \quad (17.65)$$

$$Q_x = k_{55} F_{55} \gamma_{xz}^0, \quad (17.66)$$

avec

$$F_{44} = h C_{44}, \quad F_{55} = h C_{55}. \quad (17.67)$$

La relation d'élasticité (10.1) s'écrit dans le cas d'un matériau orthotrope :

$$\sigma_{yz} = C_{44} \gamma_{yz}, \quad (17.68)$$

$$\sigma_{xz} = C_{55} \gamma_{xz}. \quad (17.69)$$

Il en résulte que les contraintes moyennes déterminées par la relation (17.52) sont :

$$\sigma_{yz}^0 = \frac{Q_y}{k_{55} h}, \quad \sigma_{xz}^0 = \frac{Q_x}{k_{44} h}. \quad (17.70)$$

Les coefficients  $k_{55}$  et  $k_{44}$  sont déterminés de manière à rendre ces contraintes moyennes égales aux contraintes déterminées par (17.63) et (17.64), pour  $z = 0$  :

$$\sigma_{yz} = \frac{3Q_y}{2h}, \quad \sigma_{xz} = \frac{3Q_x}{2h}. \quad (17.71)$$

La comparaison des expressions (17.70) et (17.71) conduit à :

$$k_{44} = k_{55} = k = \frac{2}{3}. \quad (17.72)$$

De la même manière, on aurait pu ajuster les contraintes moyennes (17.70) aux valeurs moyennes des contraintes (17.63) et (17.64) :

$$\bar{\sigma}_{yz} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{3}{2h} \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) Q_y \, dz, \quad (17.73)$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{3}{2h} \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) Q_x \, dz. \quad (17.74)$$

Soit :

$$\bar{\sigma}_{yz} = \frac{Q_y}{h}, \quad \bar{\sigma}_{xz} = \frac{Q_x}{h}. \quad (17.75)$$

L'ajustement conduit dans ce cas à :

$$k_{44} = k_{55} = k = 1. \quad (17.76)$$

Nous sommes alors dans le cas de la théorie initiale (paragraphes 17.2 et 17.3).

Une deuxième méthode consiste à considérer l'énergie de déformation par unité de surface du stratifié. L'énergie de déformation résultant du cisaillement transverse est par unité de volume :

$$u_{dc} = \frac{1}{2} (\sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz}). \quad (17.77)$$

L'énergie de déformation par unité de surface s'écrit donc :

$$U_{dc} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz}) \, dz. \quad (17.78)$$

L'énergie calculée en introduisant les déformations moyennes (17.65) et (17.66) s'exprime suivant :

$$U_{dc}^0 = \frac{1}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \sigma_{xz} \frac{Q_x}{k_{55}C_{55}} + \sigma_{yz} \frac{Q_y}{k_{44}C_{44}} \right) \, dz. \quad (17.79)$$

Soit, en introduisant les expressions (17.73) et (17.74) des contraintes :

$$U_{dc}^0 = \frac{1}{2h} \left( \frac{Q_x^2}{k_{55}C_{55}} + \frac{Q_y^2}{k_{44}C_{44}} \right). \quad (17.80)$$

Dans le cas d'une plaque homogène orthotrope, l'énergie peut également être calculée en reportant dans (17.78) les relations d'élasticité (17.68) et (17.69) :

$$U_{dc} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\sigma_{xz}^2}{C_{55}} + \frac{\sigma_{yz}^2}{C_{44}} \right) dz. \quad (17.81)$$

En substituant les contraintes données par (17.63) et (17.64), puis en intégrant, nous obtenons :

$$U_{dc} = \frac{1}{2h} \frac{6}{5} \left( \frac{Q_x^2}{C_{55}} + \frac{Q_y^2}{C_{44}} \right). \quad (17.82)$$

La comparaison des expressions (17.80) et (17.82) conduit à :

$$k_{44} = k_{55} = k = \frac{5}{6}. \quad (17.83)$$

### 17.4.3 Évaluation des facteurs de correction en cisaillement dans le cas d'une plaque stratifiée

#### 17.4.3.1 Contraintes de cisaillement

Les contraintes en membrane  $\sigma_{xx}^k$ ,  $\sigma_{yy}^k$  et  $\sigma_{xy}^k$  dans la couche  $k$  s'expriment d'après (17.16) suivant :

$$\sigma_{xx}^k = Q_{11}^k \varepsilon_{xx}^0 + Q_{12}^k \varepsilon_{yy}^0 + Q_{16}^k \gamma_{xy}^0 + z(Q_{11}^k \kappa_x + Q_{12}^k \kappa_y + Q_{16}^k \kappa_{xy}), \quad (17.84)$$

$$\sigma_{yy}^k = Q_{12}^k \varepsilon_{xx}^0 + Q_{22}^k \varepsilon_{yy}^0 + Q_{26}^k \gamma_{xy}^0 + z(Q_{12}^k \kappa_x + Q_{22}^k \kappa_y + Q_{26}^k \kappa_{xy}), \quad (17.85)$$

$$\sigma_{xy}^k = Q_{16}^k \varepsilon_{xx}^0 + Q_{26}^k \varepsilon_{yy}^0 + Q_{66}^k \gamma_{xy}^0 + z(Q_{16}^k \kappa_x + Q_{26}^k \kappa_y + Q_{66}^k \kappa_{xy}). \quad (17.86)$$

Ces expressions peuvent se mettre sous la forme :

$$\sigma_{xx}^k = [\mathbf{Q}_1]_k [\boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z \boldsymbol{\kappa}(x, y)], \quad (17.87)$$

$$\sigma_{yy}^k = [\mathbf{Q}_2]_k [\boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z \boldsymbol{\kappa}(x, y)], \quad (17.88)$$

$$\sigma_{xy}^k = [\mathbf{Q}_6]_k [\boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z \boldsymbol{\kappa}(x, y)], \quad (17.89)$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  est la matrice des déformations en membrane (17.8),  $\boldsymbol{\kappa}$  est la matrice des courbures (17.11), et en introduisant les matrices  $[\mathbf{Q}_i]_k$  définies dans chaque couche suivant :

$$[\mathbf{Q}_1]_k = [Q_{11}^k \ Q_{12}^k \ Q_{16}^k], \quad (17.90)$$

$$[\mathbf{Q}_2]_k = [Q_{12}^k \ Q_{22}^k \ Q_{26}^k], \quad (17.91)$$

$$[\mathbf{Q}_6]_k = \begin{bmatrix} Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k \end{bmatrix}. \quad (17.92)$$

Les contraintes de cisaillement transverse  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  peuvent être déterminées ensuite à l'aide des relations d'équilibre (17.42) et (17.43), soit :

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz}^k = -[\mathbf{Q}_1]_k \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m}{\partial x} + z \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial x} \right) - [\mathbf{Q}_6]_k \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m}{\partial y} + z \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial y} \right), \quad (17.93)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz}^k = -[\mathbf{Q}_2]_k \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m}{\partial y} + z \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial y} \right) - [\mathbf{Q}_6]_k \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m}{\partial x} + z \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial x} \right). \quad (17.94)$$

Les déformations en membrane  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  et les courbures  $\boldsymbol{\kappa}$  s'expriment en fonction des résultantes en membrane  $\mathbf{N}$  et des moments  $\mathbf{M}_f$  à l'aide de l'expression (14.44) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{A}' \mathbf{N} + \mathbf{B}' \mathbf{M}_f, \quad (17.95)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{C}' \mathbf{N} + \mathbf{D}' \mathbf{M}_f. \quad (17.96)$$

En reportant ces expressions dans les relations (17.93) et (17.94), les contraintes de cisaillement transverse s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz}^k = -[\mathbf{Q}_1]_k [\mathbf{A}' + z \mathbf{C}' \mathbf{B}' + z \mathbf{D}'] \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_f}{\partial x} \end{bmatrix} - [\mathbf{Q}_6]_k [\mathbf{A}' + z \mathbf{C}' \mathbf{B}' + z \mathbf{D}'] \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_f}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (17.97)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz}^k = -[\mathbf{Q}_2]_k [\mathbf{A}' + z \mathbf{C}' \mathbf{B}' + z \mathbf{D}'] \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_f}{\partial y} \end{bmatrix} - [\mathbf{Q}_6]_k [\mathbf{A}' + z \mathbf{C}' \mathbf{B}' + z \mathbf{D}'] \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_f}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (17.98)$$

où les matrices  $[\mathbf{A}' + z \mathbf{C}' \mathbf{B}' + z \mathbf{D}']$  sont des matrices à trois lignes et six colonnes.

### 17.4.3.2 Flexions cylindriques

Dans le cas d'une flexion cylindrique autour de l'axe  $y$  (chapitre 19), les résultantes et moments ne sont fonction que de  $x$ , et les équations (13.56) des plaques se réduisent à :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = Q_x, \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y, \quad (17.99)$$

ce qui conduit à la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_f}{\partial x} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_x \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}, \quad (17.100)$$

en introduisant la matrice :

$$\mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (17.101)$$

Dans le cas d'une flexion cylindrique autour de l'axe  $y$ , l'expression (17.97) de la contrainte de cisaillement  $\sigma_{xz}^k$  se réduit donc à :

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz}^k = -[\mathbf{Q}_1]_k [\mathbf{A}' + z\mathbf{C}' \mathbf{B}' + z\mathbf{D}'] \mathbf{F}_x \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}, \quad (17.102)$$

De même, dans le cas d'une flexion cylindrique autour de l'axe  $x$ , les équations (13.56) des plaques se réduisent à :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y, \quad (17.103)$$

d'où la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_f}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_y \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}, \quad (17.104)$$

en introduisant la matrice :

$$\mathbf{F}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (17.105)$$

La contrainte de cisaillement transverse (17.98) s'écrit dans la couche  $k$  :

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz}^k = -[\mathbf{Q}_2]_k [\mathbf{A}' + z\mathbf{C}' \mathbf{B}' + z\mathbf{D}'] \mathbf{F}_y \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}. \quad (17.106)$$

### 17.4.3.3 Intégration dans l'épaisseur du stratifié

L'intégration des expressions (17.102) et (17.106), dans l'épaisseur du stratifié, conduit à :

$$\sigma_{xz}^k = \left\{ [\mathbf{C}_{xz}]_k - [\mathbf{Q}_1]_k \begin{bmatrix} z\mathbf{A}' + \frac{z^2}{2}\mathbf{C}' & z\mathbf{B}' + \frac{z^2}{2}\mathbf{D}' \end{bmatrix} \right\} \mathbf{F}_x \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}, \quad (17.107)$$

$$\sigma_{yz}^k = \left\{ [\mathbf{C}_{yz}]_k - [\mathbf{Q}_2]_k \begin{bmatrix} z\mathbf{A}' + \frac{z^2}{2}\mathbf{C}' & z\mathbf{B}' + \frac{z^2}{2}\mathbf{D}' \end{bmatrix} \right\} \mathbf{F}_y \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}. \quad (17.108)$$

Les constantes d'intégration  $[\mathbf{C}_{xz}]_k$  et  $[\mathbf{C}_{yz}]_k$  dans chaque couche sont déterminées en exprimant la continuité de  $\sigma_{xz}^k$  et  $\sigma_{yz}^k$  au passage d'une couche à l'autre, et la nullité de  $\sigma_{xz}^k$  et  $\sigma_{yz}^k$  sur les deux faces extrêmes ( $k = 1, n$ ).

Sur la face inférieure,  $k = 1$ ,  $z = h_0 = -h/2$ ,  $\sigma_{xz} = 0$ , soit :

$$\sigma_{xz}^1(h_0) = 0 = \left\{ [\mathbf{C}_{xz}]_1 - [\mathbf{Q}_1]_1 \begin{bmatrix} h_0\mathbf{A}' + \frac{h_0^2}{2}\mathbf{C}' & h_0\mathbf{B}' + \frac{h_0^2}{2}\mathbf{D}' \end{bmatrix} \right\} \mathbf{F}_x \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}.$$

D'où

$$[\mathbf{C}_{xz}]_1 = [\mathbf{Q}_1]_1 \begin{bmatrix} h_0\mathbf{A}' + \frac{h_0^2}{2}\mathbf{C}' & h_0\mathbf{B}' + \frac{h_0^2}{2}\mathbf{D}' \end{bmatrix},$$

et

$$\sigma_{xz}^1 = -[\mathbf{Q}_1]_1 \left[ (z - h_0)\mathbf{A}' + \frac{1}{2}(z^2 - h_0^2)\mathbf{C}' \quad (z - h_0)\mathbf{B}' + \frac{1}{2}(z^2 - h_0^2)\mathbf{D}' \right] \mathbf{F}_x \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}.$$

À la frontière entre les couches 1 et 2,  $z = h_1$  et les contraintes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^1(h_1) &= -[\mathbf{Q}_1]_1 \left[ (h_1 - h_0)\mathbf{A}' + \frac{1}{2}(h_1^2 - h_0^2)\mathbf{C}' \quad (h_1 - h_0)\mathbf{B}' + \frac{1}{2}(h_1^2 - h_0^2)\mathbf{D}' \right] \\ &\quad \times \mathbf{F}_x \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{xz}^2(h_1) = \left\{ [\mathbf{C}_{xz}]_2 - [\mathbf{Q}_1]_2 \begin{bmatrix} h_1\mathbf{A}' + \frac{h_1^2}{2}\mathbf{C}' & h_1\mathbf{B}' + \frac{h_1^2}{2}\mathbf{D}' \end{bmatrix} \right\} \mathbf{F}_x \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}.$$

L'égalité de continuité  $\sigma_{xz}^1(h_1) = \sigma_{xz}^2(h_1)$  conduit à :

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_{xz}]_2 &= [\mathbf{Q}_1]_1 \begin{bmatrix} h_0\mathbf{A}' + \frac{h_0^2}{2}\mathbf{C}' & h_0\mathbf{B}' + \frac{h_0^2}{2}\mathbf{D}' \end{bmatrix} \\ &\quad + ([\mathbf{Q}_1]_2 - [\mathbf{Q}_1]_1) \begin{bmatrix} h_1\mathbf{A}' + \frac{h_1^2}{2}\mathbf{C}' & h_1\mathbf{B}' + \frac{h_1^2}{2}\mathbf{D}' \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression montre que d'une manière générale :

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_{xz}]_k &= [\mathbf{Q}_1]_1 \left[ h_0 \mathbf{A}' + \frac{h_0^2}{2} \mathbf{C}' \quad h_0 \mathbf{B}' + \frac{h_0^2}{2} \mathbf{D}' \right] \\ &\quad + \sum_{i=2}^k ([\mathbf{Q}_1]_i - [\mathbf{Q}_1]_{i-1}) \left[ h_{i-1} \mathbf{A}' + \frac{h_{i-1}^2}{2} \mathbf{C}' \quad h_{i-1} \mathbf{B}' + \frac{h_{i-1}^2}{2} \mathbf{D}' \right]. \end{aligned} \quad (17.109)$$

De la même manière :

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_{yz}]_k &= [\mathbf{Q}_2]_1 \left[ h_0 \mathbf{A}' + \frac{h_0^2}{2} \mathbf{C}' \quad h_0 \mathbf{B}' + \frac{h_0^2}{2} \mathbf{D}' \right] \\ &\quad + \sum_{i=2}^k ([\mathbf{Q}_2]_i - [\mathbf{Q}_2]_{i-1}) \left[ h_{i-1} \mathbf{A}' + \frac{h_{i-1}^2}{2} \mathbf{C}' \quad h_{i-1} \mathbf{B}' + \frac{h_{i-1}^2}{2} \mathbf{D}' \right]. \end{aligned} \quad (17.110)$$

La matrice des contraintes de cisaillement transverse s'exprime donc en fonction des résultantes de cisaillement sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz}^k \\ \sigma_{xz}^k \end{bmatrix} = [\mathbf{g}_k] \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix}, \quad (17.111)$$

en introduisant la matrice :

$$[\mathbf{g}_k] = \begin{bmatrix} g_{44}^k & g_{45}^k \\ g_{54}^k & g_{55}^k \end{bmatrix}, \quad (17.112)$$

exprimée d'après (17.107) et (17.108) suivant :

$$\begin{bmatrix} g_{44}^k & g_{45}^k \end{bmatrix} = \left\{ [\mathbf{C}_{xz}]_k - [\mathbf{Q}_2]_k \left[ z \mathbf{A}' + \frac{z^2}{2} \mathbf{C}' \quad z \mathbf{B}' + \frac{z^2}{2} \mathbf{D}' \right] \right\} \mathbf{F}_y, \quad (17.113)$$

$$\begin{bmatrix} g_{54}^k & g_{55}^k \end{bmatrix} = \left\{ [\mathbf{C}_{yz}]_k - [\mathbf{Q}_1]_k \left[ z \mathbf{A}' + \frac{z^2}{2} \mathbf{C}' \quad z \mathbf{B}' + \frac{z^2}{2} \mathbf{D}' \right] \right\} \mathbf{F}_x, \quad (17.114)$$

où les constantes  $[\mathbf{C}_{xz}^k]$  et  $[\mathbf{C}_{yz}^k]$  sont exprimées en (17.109) et (17.110).

#### 17.4.3.4 Estimation des facteurs de correction en cisaillement

L'énergie de déformation résultant du cisaillement transverse est par unité de volume donnée par l'expression (17.77). L'énergie de déformation par unité de surface du stratifié s'écrit donc :

$$U_{dc} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} (\sigma_{xz}^k \gamma_{xz}^k + \sigma_{yz}^k \gamma_{yz}^k) dz. \quad (17.115)$$

Dans la couche  $k$ , les déformations en cisaillement transverse sont liées aux contraintes de cisaillement par la relation d'élasticité :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz}^k \\ \gamma_{xz}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{44} & S'_{45} \\ S'_{45} & S'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{yz}^k \\ \sigma_{xz}^k \end{bmatrix}, \quad (17.116)$$

où les termes  $S'_{ij}$  sont les constantes de souplesse de la couche  $k$ , rapportées aux axes de référence du stratifié. Leurs expressions en fonction des constantes rapportées aux axes principaux de la couche  $k$  sont données dans le tableau 11.4. L'énergie de déformation (17.115) peut alors s'écrire sous la forme matricielle :

$$U_{dc} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{yz}^k & \sigma_{xz}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S'_{44} & S'_{45} \\ S'_{45} & S'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{yz}^k \\ \sigma_{xz}^k \end{bmatrix} dz, \quad (17.117)$$

ou en tenant compte de (17.111) :

$$U_{dc} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^t \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\mathbf{g}_k]^t \begin{bmatrix} S'_{44} & S'_{45} \\ S'_{45} & S'_{55} \end{bmatrix} [\mathbf{g}_k] dz \right\} \mathbf{Q}, \quad (17.118)$$

où  $\mathbf{Q}^t$  est la matrice  $[Q_y \ Q_x]$  transposée de la matrice  $\mathbf{Q}$  des résultantes en cisaillement. Le calcul de l'énergie de déformation s'exprime également en fonction des déformations moyennes suivant :

$$U_{dc} = \frac{1}{2} (Q_y \gamma_{yz}^0 + Q_x \gamma_{xz}^0), \quad (17.119)$$

ou en tenant compte de (17.54) :

$$U_{dc} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^t \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} \\ K_{45} & K_{55} \end{bmatrix} \mathbf{Q}. \quad (17.120)$$

D'où l'expression de la matrice  $[K_{ij}]$  :

$$\begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} \\ K_{45} & K_{55} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\mathbf{g}_k]^t \begin{bmatrix} S'_{44} & S'_{45} \\ S'_{45} & S'_{55} \end{bmatrix} [\mathbf{g}_k] dz. \quad (17.121)$$

Ce qui conduit à :

$$K_{44} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[ S_{44}^k (g_{44}^k)^2 + 2S_{45}^k g_{44}^k g_{54}^k + S_{55}^k (g_{54}^k)^2 \right] dz, \quad (17.122)$$

$$K_{45} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[ S_{44}^k g_{44}^k g_{45}^k + S_{45}^k \left( g_{44}^k g_{55}^k + g_{54}^k g_{45}^k \right) + S_{55}^k g_{54}^k g_{55}^k \right] dz, \quad (17.123)$$

$$K_{55} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[ S_{44}^k (g_{45}^k)^2 + 2S_{45}^k g_{45}^k g_{55}^k + S_{55}^k (g_{55}^k)^2 \right] dz, \quad (17.124)$$

où les coefficients  $S'_{ij}$  de la couche  $k$  sont notés  $S_{ij}^k$ .

Les paramètres  $K_{ij}$  étant déterminés, les coefficients de cisaillement  $H_{ij}$  introduits en (17.52) s'en déduisent à l'aide des relations (17.55), puis les facteurs de correction  $k_{ij}$  à l'aide de la relation (17.53).

## 17.5 CONCLUSIONS SUR LES THÉORIES DES STRATIFIÉS AVEC CISAILLEMENT TRANSVERSE

Les diverses théories des stratifiés, qui prennent en compte le cisaillement transverse, diffèrent par l'expression des coefficients de cisaillement  $H_{ij}$  intervenant dans l'équation (17.52). L'ensemble de ces théories peut être formulé de manière unique en introduisant les facteurs de correction  $k_{ij}$ , définis en (17.53).

Dans le cas de la théorie initiale (paragraphes 17.2 et 17.3) :

$$k_{ij} = 1, \quad i, j = 4, 5. \quad (17.125)$$

D'autres valeurs (17.72) et (17.83), obtenues dans le cas de plaques homogènes isotropes, puis dans le cas de plaques orthotropes (paragraphe 17.4.2), sont également appliquées aux cas des plaques stratifiées :

$$k_{ij} = \frac{2}{3}, \quad i, j = 4, 5, \quad (17.126)$$

$$k_{ij} = \frac{5}{6}, \quad i, j = 4, 5. \quad (17.27)$$

D'une manière plus générale (paragraphe 17.4.3), les paramètres  $k_{ij}$  peuvent être évalués en considérant des flexions cylindriques respectivement autour des directions  $x$  et  $y$ . Dans ce cas, les paramètres sont définis, d'après (17.53) et (17.55), par :

$$\begin{aligned} k_{44} &= \frac{K_{55}}{F_{44}\Delta K}, & k_{45} &= \frac{K_{45}}{F_{45}\Delta K}, \\ k_{55} &= \frac{K_{44}}{F_{55}\Delta K}, & \Delta K &= K_{44}K_{55} - K_{45}^2. \end{aligned} \quad (17.128)$$

Les coefficients  $K_{ij}$  sont alors exprimés par les relations (17.122) à (17.124).

Les coefficients  $k_{ij}$  peuvent donc être interprétés comme des facteurs correctifs à la théorie initiale (paragraphes 17.2 et 17.3). Les relations relatives aux diverses théories sont alors obtenues, en remplaçant dans les expressions (17.1) à (17.51) de la théorie initiale les coefficients  $F_{ij}$  par les coefficients  $H_{ij} = k_{ij} F_{ij}$ , avec les valeurs correspondantes de  $k_{ij}$  (relations (17.126) à (17.128)).

## EXERCICES

**17.1** Un stratifié symétrique (figure 17.2) est constitué de quatre couches à renfort tissu et deux couches à renfort mat. Les couches à renfort tissu, d'épaisseur 0,7 mm, ont les caractéristiques mécaniques suivantes :

$$\begin{aligned} E_L &= 25 \text{ GPa}, & E_T &= 15 \text{ GPa}, \\ G_{LT} &= 2,2 \text{ GPa}, & G_{LT'} &= 2,5 \text{ GPa}, & G_{TT'} &= 2,4 \text{ GPa}. \end{aligned}$$

Les couches à renfort mat ont une épaisseur de 1mm et leurs caractéristiques mécaniques sont :

$$\begin{aligned} E_{L\text{mat}} &= E_{T\text{mat}} = 8,4 \text{ GPa}, & \nu_{LT\text{mat}} &= 0,40, \\ G_{LT'\text{mat}} &= G_{TT'\text{mat}} = 2,5 \text{ GPa}. \end{aligned}$$

Calculer la matrice de rigidité.

Le stratifié est soumis à un état de cisaillement transverse de résultantes :  $Q_x = 48 \text{ kN/m}$ ,  $Q_y = 0$ .

Calculer les déformations moyennes de cisaillement transverse du stratifié, puis les contraintes de cisaillement transverse dans chaque couche.

**17.2** Entre les deux couches de mat du stratifié de l'exercice précédent, on insère une couche de mousse expansée isotrope, de modules :  $E_a = 80 \text{ MPa}$  et  $\nu_a = 0,40$ .

Reprendre l'exercice précédent, dans le cas de trois valeurs différentes de l'épaisseur de la mousse :  $h = 3\text{mm}$ ,  $h = 10 \text{ mm}$  et  $h = 30 \text{ mm}$ .

Comparer les résultats obtenus dans le cas des trois épaisseurs, ainsi qu'aux résultats obtenus dans l'exercice précédent.

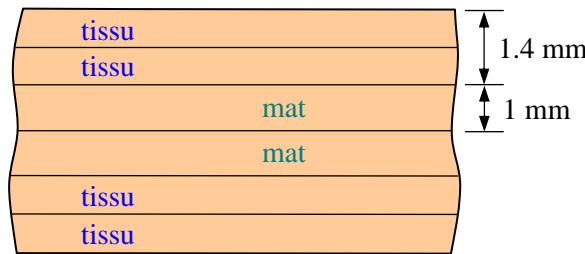


FIGURE 17.2. Stratifié de l'exercice 17.1.

## CHAPITRE 18

# Théorie des Plaques Sandwiches

## 18.1 INTRODUCTION

L'objet de ce chapitre est d'établir les équations relatives au comportement mécanique des plaques sandwiches. Un matériau sandwich est constitué (chapitre 3) d'un matériau de faible masse volumique (l'âme) sur lequel sont collées des feuilles ou plaques (les peaux). La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre, par cisaillement, les actions mécaniques d'une peau à l'autre.

Dans le cas général, les peaux sont des stratifiés d'épaisseur  $h_1$  (peau inférieure) et d'épaisseur  $h_2$  (peau supérieure) (figure 18.1). L'épaisseur de l'âme sera notée  $h$ . Le système de coordonnées est choisi de manière que le plan  $(x, y)$  soit le plan moyen.

## 18.2 CHAMPS DES DÉFORMATIONS ET DES CONTRAINTES

### 18.2.1 Hypothèses de la théorie des sandwiches

La théorie des plaques sandwiches repose sur les hypothèses fondamentales suivantes :

1. L'épaisseur de l'âme est bien plus élevée que celle des peaux :  $h \gg h_1, h_2$ .
2. Les déplacements de l'âme  $u_a$  et  $v_a$  suivant les directions  $x$  et  $y$  sont des fonctions linéaires de la coordonnée  $z$ .
3. Les déplacements  $u$  et  $v$  suivant les directions  $x$  et  $y$  sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.
4. Le déplacement transverse  $w$  est indépendant de la variable  $z$  : la déformation  $\varepsilon_{zz}$  est négligée.
5. L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  : les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{zz}$  sont négligées.
6. Les contraintes de cisaillement transverse  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  sont négligées dans les peaux.

Enfin, la théorie traite les problèmes d'élasticité de faibles déformations.

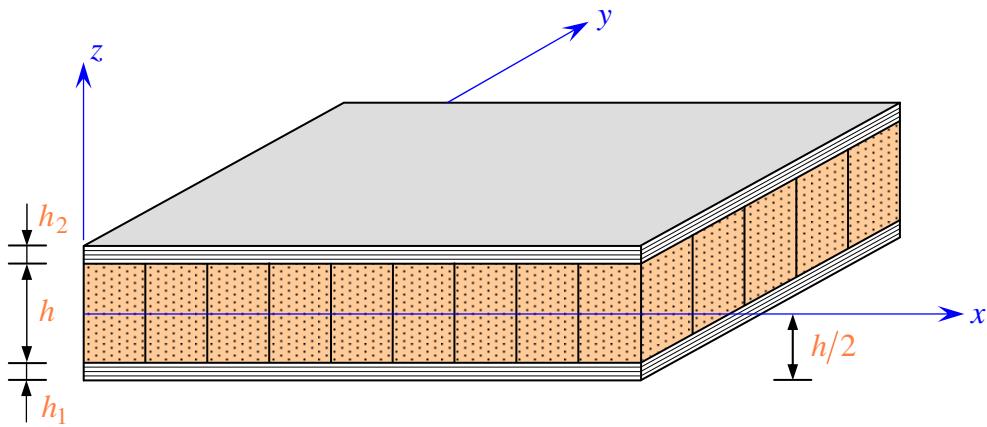


FIGURE 18.1. Notations d'une plaque sandwich.

## 18.2.2 Champ des déplacements

L'hypothèse 2 implique un schéma du premier ordre pour les déplacements de l'âme :

$$\begin{aligned} u_a(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y), \\ v_a(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y), \end{aligned} \quad (18.1)$$

avec

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= u_a(x, y, 0), \\ v_0(x, y) &= v_a(x, y, 0). \end{aligned}$$

La continuité des déplacements aux interfaces âme-peaux, associée à l'hypothèse 3, conduit aux expressions suivantes des déplacements dans les peaux :

— *peau inférieure* :

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u_0(x, y) - \frac{h}{2}\varphi_x(x, y), \\ v_1(x, y, z) &= v_0(x, y) - \frac{h}{2}\varphi_y(x, y), \end{aligned} \quad (18.2)$$

— *peau supérieure* :

$$\begin{aligned} u_2(x, y, z) &= u_0(x, y) + \frac{h}{2}\varphi_x(x, y), \\ v_2(x, y, z) &= v_0(x, y) + \frac{h}{2}\varphi_y(x, y). \end{aligned} \quad (18.3)$$

L'hypothèse 4 s'écrit :

$$w(x, y, z) = w_0(x, y). \quad (18.4)$$

La théorie des plaques sandwiches est donc basée sur la détermination de cinq

fonctions de déplacement et rotation :  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$ , analogues à celles introduites dans la théorie des stratifiés tenant compte du cisaillement transverse (chapitre 17).

### 18.2.3 Champ des déformations

Le champ des déformations dans la peau inférieure est déduit du champ (18.2) des déplacements. Il s'écrit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy}^1 &= \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz}^1 &= 0, \\ \gamma_{yz}^1 &= \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ \gamma_{xz}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ \gamma_{xy}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right).\end{aligned}\tag{18.5}$$

Les déformations en cisaillement transverse  $\gamma_{yz}^1$  et  $\gamma_{xz}^1$  dans la peau sont négligées et le champ des déformations se réduit au champ des déformations en membrane qui s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} - \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix},\tag{18.6}$$

avec des notations déjà introduites au chapitre 17 :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, & \varepsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, & \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \\ \kappa_x &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, & \kappa_y &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, & \kappa_{xy} &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}.\end{aligned}\tag{18.7}$$

De même, le champ des déformations dans la peau supérieure s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{yy}^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}.\tag{18.8}$$

Le champ des déformations dans l'âme se déduit du champ (18.1) des déplacements. Soit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^a &= \frac{\partial u_a}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy}^a &= \frac{\partial v_a}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz}^a &= \frac{\partial w_a}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{yz}^a &= \frac{\partial v_a}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y, \\ \gamma_{xz}^a &= \frac{\partial u_a}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x, \\ \gamma_{xy}^a &= \frac{\partial u_a}{\partial y} + \frac{\partial v_a}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right).\end{aligned}\tag{18.9}$$

Le champ des déformations a la même écriture que le champ des déformations (17.2) de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse. Il est la superposition de deux champs de déformation :

— *le champ des déformations en membrane-flexion* :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^a \\ \varepsilon_{yy}^a \\ \gamma_{xy}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix},\tag{18.10}$$

— *le champ des déformations en cisaillement transverse* :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz}^a \\ \gamma_{xz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{bmatrix}.\tag{18.11}$$

## 18.2.4 Champ des contraintes

Le champ des contraintes dans l'âme est déduit de l'hypothèse 5 :

$$\sigma_{xx}^a = \sigma_{yy}^a = \sigma_{xy}^a = \sigma_{zz}^a = 0.\tag{18.12}$$

L'âme ne transmet que les contraintes en cisaillement :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz}^a \\ \sigma_{xz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{44}^a & C'_{45}^a \\ C'_{45}^a & C'_{55}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^a \\ \gamma_{xz}^a \end{bmatrix},\tag{18.13}$$

où les coefficients  $C'_{ij}^a$  s'expriment en fonction des coefficients  $C_{ij}^a$  rapportés aux

axes principaux de l'âme (tableau 11.3) suivant :

$$\begin{aligned} C_{44}^a &= C_{44}^a \cos^2 \theta + C_{55}^a \sin^2 \theta, \\ C_{45}^a &= (C_{55}^a - C_{44}^a) \sin \theta \cos \theta, \\ C_{55}^a &= C_{44}^a \sin^2 \theta + C_{55}^a \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (18.14)$$

où  $\theta$  est l'angle que font les axes principaux de l'âme avec les axes de référence de la plaque sandwich. Les coefficients  $C_{ij}^a$  dans les axes principaux s'expriment (10.26) eux-mêmes en fonction des coefficients de cisaillement de l'âme, mesurés dans les axes principaux, selon :

$$C_{44}^a = G_{23}^a, \quad C_{55}^a = G_{13}^a. \quad (18.15)$$

L'hypothèse 6 implique que les contraintes en cisaillement transverse sont nulles dans toutes les couches  $k$  de la peau inférieure ou supérieure :

$$\sigma_{xz}^k = \sigma_{yz}^k = 0. \quad (18.16)$$

Les autres contraintes sont déduites des déformations dans les peaux par la relation :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \sigma_{xy}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^i \\ \varepsilon_{yy}^i \\ \varepsilon_{xy}^i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad (18.17)$$

pour la couche  $k$  de la peau inférieure ( $i = 1$ ) ou de la peau supérieure ( $i = 2$ ).

## 18.3 RELATIONS FONDAMENTALES DES PLAQUES SANDWICHES

### 18.3.1 Équation constitutive

L'équation constitutive des plaques sandwiches fait intervenir les résultantes et moments déjà introduits dans la théorie des stratifiés :

— *les résultantes en membrane* :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz + \int_{h/2}^{h/2+h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz, \quad (18.18)$$

— *les moments en flexion-torsion* :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz + \int_{h/2}^{h/2+h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz, \quad (18.19)$$

— les résultantes en cisaillement :

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} dz. \quad (18.20)$$

En substituant les expressions des contraintes (18.13) à (18.17) dans les expressions précédentes des résultantes et moments, nous obtenons l'équation constitutive :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (18.21)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij}^1 + A_{ij}^2, \\ B_{ij} &= \frac{h}{2} (A_{ij}^2 - A_{ij}^1), \\ C_{ij} &= C_{ij}^1 + C_{ij}^2, \\ D_{ij} &= \frac{h}{2} (C_{ij}^2 - C_{ij}^1), \end{aligned} \quad (18.22)$$

et

$$A_{ij}^1 = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} (Q'_{ij})_k e_k, \quad (18.23)$$

$$C_{ij}^1 = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} z (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} (Q'_{ij})_k e_k z_k, \quad (18.24)$$

$$A_{ij}^2 = \int_{h/2}^{h/2+h_2} (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} (Q'_{ij})_k e_k, \quad (18.25)$$

$$C_{ij}^2 = \int_{h/2}^{h/2+h_2} z (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} (Q'_{ij})_k e_k z_k, \quad (18.26)$$

$$F_{ij} = h C_{ij}^{\text{a}}. \quad (18.27)$$

Dans les expressions précédentes des coefficients de rigidité,  $n_1$  et  $n_2$  sont les nombres de couches respectivement dans la peau inférieure et dans la peau supérieure, et  $C'_{ij}^a$  sont les coefficients relatifs au cisaillement transverse de l'âme exprimés en (18.14).

L'équation constitutive (18.21) a une forme semblable à l'équation (17.21), obtenue dans le cas de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse. Elle en diffère par la présence des termes  $C_{ij}$  qui impliquent une dissymétrie de la matrice de rigidité. Comme développé dans la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse (paragraphe 17.4), les coefficients de rigidité  $F_{ij}$  sont parfois corrigés par des facteurs de correction  $k_{ij}$ , et remplacés par les paramètres de cisaillement  $H_{ij}$  définis de la même manière qu'en (17.53) :

$$H_{ij} = k_{ij} F_{ij}. \quad (18.28)$$

Dans le cas de plaques sandwiches symétriques, les peaux inférieure et supérieure sont identiques, d'où :

$$A_{ij}^1 = A_{ij}^2, \quad C_{ij}^1 = -C_{ij}^2. \quad (18.29)$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 2A_{ij}^2, & D_{ij} &= hC_{ij}^2, \\ B_{ij} &= 0, & C_{ij} &= 0. \end{aligned} \quad (18.30)$$

Dans le cas des plaques sandwiches symétriques, il y a donc découplage des comportements en membrane et en flexion. L'équation constitutive prend alors une forme identique à l'équation constitutive de stratifiés symétriques avec cisaillement transverse.

### 18.3.2 Relations fondamentales

Les relations fondamentales des plaques sandwiches sont obtenues en introduisant l'équation constitutive (18.21) dans les relations fondamentales (13.50) des plaques. Les trois premières équations sont identiques aux équations (17.27), (17.28) et (17.29) avec  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  et  $F_{ij}$  définis en (18.22) et (18.27). Les deux dernières équations s'écrivent suivant :

$$\begin{aligned} &C_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + C_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ &+ D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \\ &+ D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{55} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{45} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ &= R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (18.31)$$

$$\begin{aligned}
& C_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \\
& + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{45} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{44} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
& = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}. \tag{18.32}
\end{aligned}$$

Ces équations diffèrent des relations (17.30) et (17.31) par la substitution des coefficients  $C_{ij}$  aux coefficients  $B_{ij}$ .

Les conditions aux frontières sont identiques aux conditions introduites dans le paragraphe 17.3.3.

Dans le cas de matériaux sandwiches symétriques, la forme des relations fondamentales est identique à celle des stratifiés symétriques avec cisaillement transverse (paragraphe 17.3.2). Il en résulte une identité du comportement mécanique entre les matériaux sandwiches symétriques et les stratifiés symétriques. Les deux comportements diffèrent uniquement par les expressions des coefficients  $A_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $F_{ij}$ . L'ensemble des analyses du comportement mécanique qui seront développées sur les stratifiés symétriques avec cisaillement pourront donc être transposées aux plaques sandwiches symétriques.

## 18.4 SANDWICHES À PEAUX ÉPAISSES

La théorie des plaques sandwiches implique que l'épaisseur des peaux soit bien plus faible que l'épaisseur de l'âme (hypothèse 1). Dans le cas de peaux épaisses, il est possible de conduire l'analyse des plaques sandwiches à l'aide de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse. Nous développons cette analyse dans le cas d'un matériau sandwich symétrique (figure 18.2), et dans le cas où les axes principaux de l'âme et des peaux coïncident avec les axes de référence de la plaque. Les comportements des matériaux sont caractérisés :

— pour la peau par :

- les coefficients  $Q_{ij}^p$  de rigidité réduite,

— pour l'âme par :

- les coefficients  $Q_{ij}^a$  de rigidité réduite,
- les modules  $G_{ij}^a$  de cisaillement transverse.

L'application de la théorie sandwich conduit aux expressions suivantes des coefficients de l'équation constitutive :

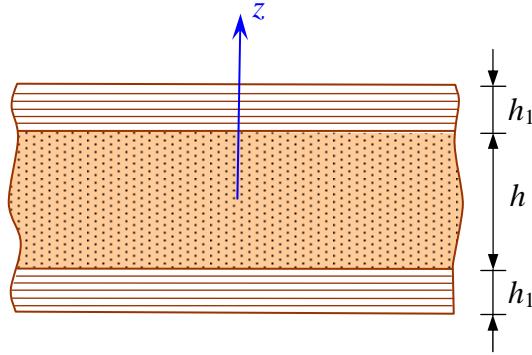


FIGURE 18.2. Sandwich symétrique à peaux épaisses.

$$\begin{aligned}
 A_{ij}^s &= 2h_l Q_{ij}^p, \\
 B_{ij}^s &= 0, \\
 D_{ij}^s &= \frac{1}{2} Q_{ij}^p (h_l + h) h h_l, \\
 F_{ij}^s &= h G_{kl}^a \quad (F_{44}^s = h G_{23}, \quad F_{55}^s = h G_{13}^a).
 \end{aligned} \tag{18.33}$$

L'application de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse conduit à :

$$A_{ij} = 2h_l Q_{ij}^p + h Q_{ij}^a, \tag{18.34}$$

$$B_{ij} = 0, \tag{18.35}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} Q_{ij}^p h_l \left[ (h + h_l)^2 + \frac{h_l^2}{3} \right] + Q_{ij}^a \frac{h^3}{12}, \tag{18.36}$$

$$F_{ij} = 2h_l G_{ij}^p + h G_{ij}^a. \tag{18.37}$$

Soit :

$$A_{ij} = A_{ij}^s \left( 1 + \frac{h}{2h_l} \frac{Q_{ij}^a}{Q_{ij}^p} \right), \tag{18.38}$$

$$D_{ij} = D_{ij}^s \left[ 1 + \frac{h_l}{h} \frac{h + \frac{4}{3}h_l}{h + h_l} + \frac{Q_{ij}^a}{Q_{ij}^p} \frac{h^2}{6h_l(h + h_l)} \right], \tag{18.39}$$

$$F_{ij} = F_{ij}^s \left( 1 + 2 \frac{h_l}{h} \frac{G_{ij}^p}{G_{ij}^a} \right). \tag{18.40}$$

Les expressions (18.38), (18.39) et (18.40) établissent les relations entre les coefficients de rigidité de la théorie stratifié avec cisaillement transverse et ceux

de la théorie sandwich. L'âme étant moins rigide que les peaux, nous avons :

$$Q_{ij}^a \ll Q_{ij}^p, \quad (18.41)$$

et les relations peuvent être simplifiées suivant :

$$A_{ij} \approx A_{ij}^s, \quad (18.42)$$

$$D_{ij} \approx D_{ij}^s \left( 1 + \frac{h_1}{h} \frac{h + \frac{4}{3}h_1}{h + h_1} \right), \quad (18.43)$$

$$F_{ij} = F_{ij}^s \left( 1 + 2 \frac{h_1}{h} \frac{G_{ij}^p}{G_{ij}^a} \right). \quad (18.44)$$

Nous retrouvons le comportement du matériau sandwich : le comportement en membrane-flexion est déterminé par les peaux et le comportement en cisaillement transverse est imposé essentiellement par l'âme. Les coefficients de flexion  $D_{ij}$  sont toutefois modifiés par rapport à la théorie des sandwiches. L'expression (18.43) permet ainsi d'évaluer l'influence de l'épaisseur des peaux. Par exemple, dans le cas où :

$$h_1 = 3 \text{ mm}, \quad h = 10 \text{ mm},$$

nous trouvons que :

$$D_{ij} = 1,323 D_{ij}^s$$

soit un écart supérieur à 30 % entre les deux analyses.

## EXERCICES

### 18.1 On considère le matériau sandwich de l'exercice 17.2.

Calculer, pour chaque épaisseur de l'âme, la matrice de rigidité en utilisant la théorie des plaques sandwiches.

Comparer aux résultats trouvés dans l'exercice 17.2, en utilisant la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse.



## Partie V

# Analyse du Comportement Mécanique des Structures en Matériaux Composites

Cette partie développe les éléments de l'analyse de la flexion, du flambement et des vibrations des structures constituées de matériaux composites. Les analyses les plus simples sont celles pour qui l'analyse peut être réduite à une analyse en une dimension. C'est le cas de la flexion cylindrique de plaques (chapitre 19) et également le cas de la flexion de poutres (chapitre 20). Le chapitre 21 étudie la flexion de plaques constituées d'un stratifié orthotrope pour lequel il n'y a pas de couplage membrane-flexion. Le chapitre 22 considère le comportement en flexion de plaques rectangulaires constituées de différents stratifiés : stratifiés symétriques, stratifiés croisés et stratifiés équilibrés. Les analyses montrent la difficulté de trouver des solutions analytiques. Le flambement des poutres et des plaques est considéré au chapitre 23. Les vibrations des poutres et des plaques sont ensuite étudiées au chapitre 24. Le dernier chapitre 25 analyse le problème du prédimensionnement d'une structure constituée d'un matériau stratifié ou sandwich, établissant ainsi une synthèse générale des divers concepts développés tout au long de l'ouvrage.



## CHAPITRE 19

# Flexion Cylindrique

## 19.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre et le suivant, nous nous intéressons aux problèmes pour lesquels la théorie des plaques peut être ramenée à une analyse à une dimension. Le premier type de problème concerne les plaques ayant un rapport longueur sur largeur assez élevé pour que la déformation de la plaque puisse être considérée comme indépendante de la coordonnée suivant la longueur de la plaque. Un tel comportement est appelé flexion cylindrique, et est traité dans ce chapitre. Le second type de problème est celui de l'analyse du comportement en flexion des poutres, dont fait l'objet le chapitre 20.

## 19.2 THÉORIE CLASSIQUE DES STRATIFIÉS

### 19.2.1 Équations

Nous considérons une plaque, constituée d'un stratifié comportant un nombre quelconque de couches de longueur très grande dans la direction  $y$  (figure 19.1). La plaque est en appui tout le long de ses côtés  $x = 0$  et  $x = a$ . Si la charge transverse n'est fonction que de  $x$ :  $q = q(x)$ , la déformation de la plaque est cylindrique, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= u_0(x, t), \\ v_0(x, y, t) &= v_0(x, t), \\ w_0(x, y, t) &= w_0(x, t). \end{aligned} \tag{19.1}$$

En reportant l'équation (19.1) dans les équations fondamentales (16.1) à (16.3) de la théorie classique des stratifiés, nous obtenons les équations à une dimension :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \tag{19.2}$$

$$A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \tag{19.3}$$

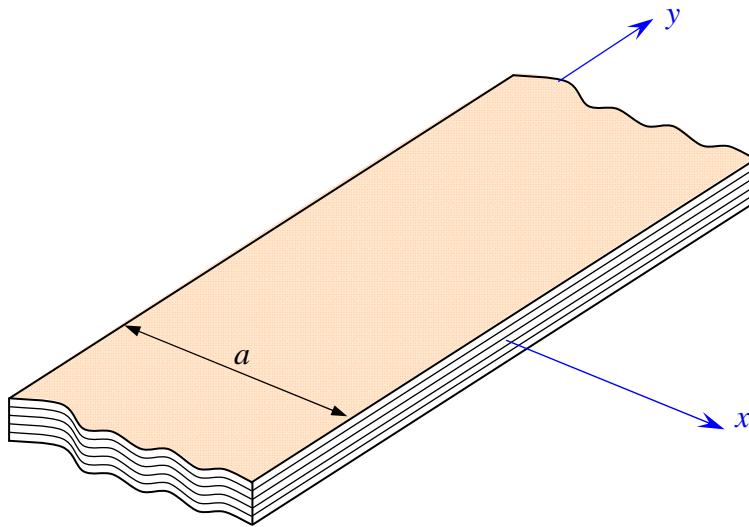


FIGURE 19.1. Plaque de longueur élevée.

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} = q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \quad (19.4)$$

Dans le cas d'une flexion statique, ces équations peuvent être découplées en exprimant  $u_0$  et  $v_0$  à partir des équations (19.2) et (19.3) suivant :

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} = \frac{B}{A} \frac{d^3 w_0}{dx^3}, \quad (19.5)$$

$$\frac{d^2 v_0}{dx^2} = \frac{C}{A} \frac{d^3 w_0}{dx^3}, \quad (19.6)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= A_{11}A_{66} - A_{16}^2, \\ B &= A_{66}B_{11} - A_{16}B_{11}, \\ C &= A_{11}B_{16} - A_{16}B_{11}. \end{aligned} \quad (19.7)$$

En dérivant les équations (19.5) et (19.6) et en reportant les résultats dans la relation (19.4), nous trouvons l'équation différentielle en  $w_0$  :

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} = \frac{A}{D} q, \quad (19.8)$$

où

$$D = D_{11}A - B_{11}B - B_{16}C. \quad (19.9)$$

L'équation (19.8) peut être intégrée, et le résultat reporté dans les équations (19.5) et (19.6) pour obtenir les équations en  $u_0$  et  $v_0$  :

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} = \frac{B}{D} \int q(x) dx, \quad (19.10)$$

$$\frac{d^2 v_0}{dx^2} = \frac{C}{D} \int q(x) dx. \quad (19.11)$$

Les résultantes et moments sont ensuite obtenus à partir de l'équation constitutive (14.29) :

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11} \frac{du_0}{dx} + A_{16} \frac{dv_0}{dx} - B_{11} \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \\ N_y &= A_{12} \frac{du_0}{dx} + A_{26} \frac{dv_0}{dx} - B_{12} \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \\ N_{xy} &= A_{16} \frac{du_0}{dx} + A_{66} \frac{dv_0}{dx} - B_{16} \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \\ M_x &= B_{11} \frac{du_0}{dx} + B_{16} \frac{dv_0}{dx} - D_{11} \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \\ M_y &= B_{12} \frac{du_0}{dx} + B_{26} \frac{dv_0}{dx} - D_{12} \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \\ M_{xy} &= B_{16} \frac{du_0}{dx} + B_{66} \frac{dv_0}{dx} - D_{16} \frac{d^2 w_0}{dx^2}. \end{aligned} \quad (19.12)$$

## 19.2.2 Charge uniforme

Dans le cas d'une charge uniforme, indépendante de  $x$  :  $q(x) = q_0$ , l'intégration des équations (19.8), (19.10) et (19.11) conduit, en tenant compte de (19.5) et (19.6), à :

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{B}{D} \left( q_0 \frac{x^3}{6} + a_1 \frac{x^2}{2} + b_1 x + c_1 \right), \\ v_0 &= \frac{C}{D} \left( q_0 \frac{x^3}{6} + a_1 \frac{x^2}{2} + b_2 x + c_2 \right), \\ w_0 &= \frac{A}{D} \left( q_0 \frac{x^4}{24} + a_1 \frac{x^3}{6} + b_3 \frac{x^2}{2} + c_3 x + d_3 \right). \end{aligned} \quad (19.13)$$

Nous considérons, ci-après, deux types d'appuis.

### 1. Cas d'appuis simples

La plaque est en appuis simples sur les côtés  $x = 0$  et  $x = a$ . Les conditions aux frontières sont donc pour  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$N_x = N_{xy} = M_x = 0, \quad (19.14)$$

$$w_0 = 0. \quad (19.15)$$

Les relations (19.12) montrent que  $N_x$ ,  $N_{xy}$  et  $M_x$  s'annulent aux appuis si pour  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$\frac{du_0}{dx} = \frac{dv_0}{dx} = \frac{d^2w_0}{dx^2} = 0. \quad (19.16)$$

De manière à prévenir tout déplacement d'ensemble, nous supposons que la plaque est fixée à l'origine, ce qui impose pour  $x = 0$  :

$$u_0 = v_0 = 0. \quad (19.17)$$

L'ensemble des expressions (19.13) et des conditions (19.15), (19.16), (19.17) conduit aux expressions des déplacements :

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{Bq_0}{12D}(2x - 3a)x^2, \\ v_0 &= \frac{Cq_0}{12D}(2x - 3a)x^2, \\ w_0 &= \frac{Aq_0}{24D}(x^3 - 2ax^2 + a^3)x. \end{aligned} \quad (19.18)$$

En reportant les expressions (19.18) dans les relations (19.12), les résultantes et moments s'écrivent :

$$\begin{aligned} N_x &= N_{xy} = 0, \\ N_y &= \frac{q_0}{2D}(A_{12}B + A_{26}C - B_{12}A)(x - a)x, \\ M_x &= -\frac{q_0}{2}(x - a)x, \\ M_y &= \frac{q_0}{2D}(B_{12}B + B_{26}C - D_{12}A)(x - a)x, \\ M_{xy} &= \frac{q_0}{2D}(B_{16}B + B_{66}C - D_{16}A)(x - a)x. \end{aligned} \quad (19.19)$$

Les relations (19.18) montrent que la flèche maximum est atteinte pour  $x = a/2$ , et est donnée par :

$$w_{0\max} = \frac{5Aa^4q_0}{384D}. \quad (19.20)$$

## 2. Cas d'encastrements

Dans le cas où la plaque est encastrée sur les côtés  $x = 0$  et  $x = a$ , les conditions aux frontières sont pour  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0, \quad \frac{dw_0}{dx} = 0. \quad (19.21)$$

Compte tenu de (19.13), ces conditions conduisent aux expressions des déplacements :

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{Bq_0}{12D}(2x^2 - 3ax + a^2)x, \\ v_0 &= \frac{Cq_0}{12D}(2x^2 - 3ax + a^2)x, \\ w_0 &= \frac{Aq_0}{24D}(x^2 - 2ax + a^2)x^2. \end{aligned} \quad (19.22)$$

En reportant ces expressions dans les relations (19.12), nous obtenons les résultantes et moments :

$$\begin{aligned} N_x &= N_{xy} = 0, \\ N_y &= \frac{q_0}{12D}(A_{12}B + A_{26}C - B_{12}A)(6x^2 - 6ax + a^2), \\ M_x &= -\frac{q_0}{12}(6x^2 - 6ax + a^2), \\ M_y &= \frac{q_0}{12D}(B_{12}B + B_{26}C - D_{12}A)(6x^2 - 6ax + a^2), \\ M_{xy} &= \frac{q_0}{12D}(B_{16}B + B_{66}C - D_{16}A)(6x^2 - 6ax + a^2). \end{aligned} \quad (19.23)$$

La flèche maximum est atteinte au milieu des côtés :  $x = a/2$ , et s'exprime d'après (19.22) suivant :

$$w_{0\max} = \frac{Aa^4 q_0}{384D}. \quad (19.24)$$

Pour les deux types d'appuis étudiés, la flèche maximale (19.20) et (19.24) peut se mettre sous la forme :

$$w_{0\max} = (1 + E) w'_{0\max}, \quad (19.25)$$

où

$$E = \frac{B_{11}B + B_{16}C}{D}, \quad (19.26)$$

et  $w'_{0\max}$  est la flèche maximale dans le cas où les coefficients de couplage  $B_{ij}$  membrane-flexion/torsion sont nuls. Soit :

— dans le cas d'appuis simples :

$$w'_{0\max} = \frac{5a^4 q_0}{384D_{11}}, \quad (19.27)$$

— dans le cas d'encastrements :

$$w'_{0\max} = \frac{a^4 q_0}{384D_{11}}. \quad (19.28)$$

Le coefficient  $E$  est toujours positif. Il en résulte que le couplage membrane-flexion/torsion accroît la flèche de la plaque. Cet accroissement dépend de la structure du stratifié. Par exemple dans le cas de stratifiés croisés  $[0^\circ/90^\circ]_p$ , constitués de  $2p$  couches croisées identiques (chapitre 15) :

$$A_{16} = B_{16} = D_{16} = 0, \quad (19.29)$$

et la relation (19.25) s'écrit :

$$w_{0\max} = \frac{1}{1 - \frac{B_{11}^2}{A_{11}D_{11}}} w'_{0\max}, \quad (19.30)$$

avec d'après les expressions du tableau 15.3 :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{E_T}{E_L} \right) Q_{11} h, \\ B_{11} &= \frac{1}{8p} \left( \frac{E_T}{E_L} - 1 \right) Q_{11} h^2, \\ D_{11} &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{E_T}{E_L} \right) \frac{Q_{11} h^3}{12}. \end{aligned} \quad (19.31)$$

D'où

$$w_{0\max} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4p^2} \left( \frac{E_T/E_L - 1}{1 + E_T/E_L} \right)^2} w'_{0\max}. \quad (19.32)$$

Cette expression montre que  $w_{0\max}$  est pratiquement confondu avec  $w'_{0\max}$ , même pour un faible nombre de couches. Par exemple, dans le cas où  $E_T/E_L = 1/4$ , nous obtenons :

- pour  $p = 1$  (2 couches):  $w_{0\max} = 1,37 w'_{0\max}$ ,
- pour  $p = 2$  (4 couches):  $w_{0\max} = 1,07 w'_{0\max}$ .

### 19.2.3 Charge sinusoïdale

Toute charge pouvant être exprimée sous la forme d'une série de Fourier, il est intéressant de résoudre le problème de flexion cylindrique dans le cas d'une charge sinusoïdale. Nous examinons le cas d'une plaque en appuis simples soumise à une charge de la forme :

$$q(x) = q_0 \sin m\pi \frac{x}{a}. \quad (19.33)$$

Les expressions (19.8), (19.10) et (19.11), associées aux conditions aux appuis (19.15), (19.16) conduisent à :

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{Ba^3 q_0}{m^3 \pi^3 D} \cos m\pi \frac{x}{a}, \\ v_0 &= \frac{Ca^3 q_0}{m^3 \pi^3 D} \cos m\pi \frac{x}{a}, \\ w_0 &= \frac{Aa^4 q_0}{m^4 \pi^4 D} \sin m\pi \frac{x}{a}. \end{aligned} \quad (19.34)$$

La flèche maximum s'écrit :

$$w_{0\max} = \frac{Aa^4 q_0}{m^4 \pi^4 D}, \quad (19.35)$$

et peut se mettre sous la forme :

$$w_{0\max} = (1+E) w'_{0\max}, \quad (19.36)$$

où  $E$  est le coefficient de couplage introduit en (19.26) et :

$$w'_{0\max} = \frac{a^4 q_0}{m^4 \pi^4 D_{11}}, \quad (19.37)$$

la flèche observée en l'absence de couplage membrane-flexion/torsion ( $B_{ij} = 0$ ).

La répartition des contraintes dans chaque couche du stratifié est obtenue à partir de la relation (14.20). Les contraintes de cisaillement transverse peuvent ensuite être estimées à partir des relations fondamentales (13.20) dans le cas d'un problème statique.

## 19.3 PRISE EN COMPTE DU CISAILLEMENT TRANSVERSE

### 19.3.1 Stratifié orthotrope

Nous considérons la flexion cylindrique (figure 19.1) d'une plaque constituée d'un stratifié comportant un nombre quelconque de couches orthotropes (tissus ou renforts unidirectionnels), dont les axes d'orthotropie sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$  de la plaque. Soit :

$$A_{16} = A_{26} = 0, \quad B_{16} = B_{26} = 0, \quad D_{16} = D_{26} = 0. \quad (19.38)$$

La plaque de longueur infinie dans la direction  $y$  est supposée être dans un état de déformations planes :

$$u_0 = u_0(x, t), \quad \varphi_x = \varphi_x(x, t), \quad v_0 = 0, \quad \varphi_y = 0, \quad w_0 = w_0(x, t). \quad (19.39)$$

Les équations (17.27) à (17.31) se réduisent alors, compte tenu de (17.53), à :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \quad (19.40)$$

$$k_{55} F_{55} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \quad (19.41)$$

$$B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - k_{55} F_{55} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}. \quad (19.42)$$

Dans le cas d'une flexion statique, les équations précédentes s'écrivent sous la forme :

$$A_{11} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + B_{11} \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} = 0, \quad (19.43)$$

$$k_{55} F_{55} \left( \frac{d \varphi_x}{dx} + \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + q = 0, \quad (19.44)$$

$$B_{11} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + D_{11} \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} - k_{55} F_{55} \left( \varphi_x + \frac{d w_0}{dx} \right) = 0. \quad (19.45)$$

Nous considérons le cas d'appuis simples sur les côtés  $x=0$  et  $x=a$ . Les conditions aux frontières, pour  $x=0$  et  $x=a$ , sont donc, d'après (17.35) :

$$w_0 = 0, \quad N_x = 0, \quad M_x = 0. \quad (19.46)$$

Compte tenu de l'équation constitutive (17.21), les conditions aux frontières, pour  $x=0$  et  $x=a$ , s'écrivent :

$$\begin{aligned} w_0 &= 0, \\ N_x &= A_{11} \frac{du_0}{dx} + B_{11} \frac{d\varphi_x}{dx} = 0, \\ M_x &= B_{11} \frac{du_0}{dx} + D_{11} \frac{d\varphi_x}{dx} = 0. \end{aligned} \quad (19.47)$$

Nous étudions le cas d'une charge transversale sinusoïdale :

$$q(x) = q_0 \sin m\pi \frac{x}{a}. \quad (19.48)$$

Les solutions satisfaisant aux équations d'équilibre (19.43) à (19.45) et aux conditions aux frontières (19.47) sont de la forme :

$$u_0 = A_m \cos m\pi \frac{x}{a}, \quad \varphi_x = B_m \cos m\pi \frac{x}{a}, \quad w_0 = C_m \sin m\pi \frac{x}{a}. \quad (19.49)$$

En substituant les expressions (19.49) dans les équations (19.43) à (19.45), puis en résolvant le système des équations obtenues, nous obtenons :

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{B_{11}a^3q_0}{m^3\pi^3(A_{11}D_{11}-B_{11}^2)}, \\ B_m &= \frac{-A_{11}a^3q_0}{m^3\pi^3(A_{11}D_{11}-B_{11}^2)}, \\ C_m &= \left[ \frac{A_{11}a^2}{m^2\pi^2(A_{11}D_{11}-B_{11}^2)} + \frac{1}{k_{55}F_{55}} \right] \frac{a^2q_0}{m^2\pi^2}. \end{aligned} \quad (19.50)$$

La flèche est maximale au milieu de la plaque ( $x = a/2$ ), soit :

$$w_{0\max} = C_m,$$

et peut se mettre sous la forme :

$$w_{0\max} = (1 + E + m^2\pi^2S)w'_{0\max}, \quad (19.51)$$

où  $w'_{0\max}$  est la flèche maximale du stratifié en l'absence de couplage membrane-flexion et en l'absence de déformation en cisaillement,  $E$  est le terme dû au couplage membrane-flexion et  $S$  le terme qui tient compte du cisaillement. Ces termes sont exprimés suivant :

$$\begin{aligned} w'_{0\max} &= \frac{a^4q_0}{m^4\pi^4D_{11}}, \\ E &= \frac{B_{11}^2}{A_{11}D_{11}-B_{11}^2}, \\ S &= \frac{D_{11}}{k_{55}F_{55}a^2}. \end{aligned} \quad (19.52)$$

L'expression (19.51) montre que le cisaillement transverse augmente la flèche. Les expressions précédentes peuvent également être réécrites en introduisant une rigidité effective en flexion :  $\bar{Q}_{11}$ , ayant la dimension d'un module, et un module de cisaillement moyen :  $\bar{G}_{13}$ , exprimés suivant :

$$\bar{Q}_{11} = \frac{12D_{11}}{h^3}, \quad \bar{G}_{13} = \frac{F_{55}}{h}. \quad (19.53)$$

La flèche maximale en l'absence de couplage membrane-flexion et en l'absence de cisaillement s'écrit :

$$w'_{0\max} = \frac{12a^4q_0}{m^4\pi^4h^3\bar{Q}_{11}}, \quad (19.54)$$

et le facteur de cisaillement s'écrit :

$$S = \frac{1}{12k_{55}} \frac{\bar{Q}_{11}}{\bar{G}_{13}} \left( \frac{h}{a} \right)^2. \quad (19.55)$$

L'importance du cisaillement dépend donc du rapport  $\bar{Q}_{11}/\bar{G}_{13}$  et du rapport  $a/h$  : distance entre appuis par rapport à épaisseur du stratifié.

La répartition des contraintes en membrane  $\sigma_{xx}^k, \sigma_{yy}^k, \sigma_{xy}^k$  dans chaque couche  $k$  du stratifié est obtenue à partir de la relation (17.16). Les contraintes de cisaillement transverse sont ensuite déduites des relations fondamentales (13.20), exprimées dans le cas d'un problème statique.

### 19.3.2 Stratifié équilibré

Nous considérons le cas d'un stratifié équilibré antisymétrique (chapitre 15), constitué de couches alternativement orientées à  $\pm\theta$ , par rapport à l'axe  $x$  de la plaque. Pour ces stratifiés, nous avons (relations (15.26)) :

$$\begin{aligned} A_{16} &= A_{26} = 0, & B_{11} &= B_{12} = B_{22} = B_{66} = 0, \\ D_{16} &= D_{26} = 0, & F_{45} &= 0. \end{aligned} \quad (19.56)$$

La plaque, de longueur infinie dans la direction  $y$ , est en appui tout le long de ses côtés  $x = 0$  et  $x = a$ . La plaque est soumise à une charge  $q(x)$ . Dans ces conditions, la déformation est cylindrique de la forme :

$$u_0 = u_0(x), \quad \varphi_x = \varphi_x(x), \quad v_0 = v_0(x), \quad \varphi_y = \varphi_y(x), \quad w_0 = w_0(x). \quad (19.57)$$

Les relations fondamentales (17.27) à (17.31) s'écrivent ici :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + B_{16} \frac{d^2 \varphi_y}{dx^2} &= 0, \\ A_{66} \frac{d^2 v_0}{dx^2} + B_{16} \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} &= 0, \\ F_{55} \left( \frac{d\varphi_x}{dx} + \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + q &= 0, \\ B_{16} \frac{d^2 v_0}{dx^2} + D_{11} \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} - F_{55} \left( \varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) &= 0, \\ B_{16} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + D_{66} \frac{d^2 \varphi_y}{dx^2} - F_{44} \varphi_y &= 0. \end{aligned} \quad (19.58)$$

Dans le cas d'appuis simples sur les côtés  $x = 0$  et  $x = a$ , les conditions aux frontières peuvent être écrites sous la forme :

$$w_0 = N_x = N_{xy} = M_x = M_{xy} = 0. \quad (19.59)$$

Les résultantes et moments sont liés aux fonctions  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  par l'équation constitutive (17.21). Soit ici :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (19.60)$$

Dans le cas où la plaque est soumise à une charge sinusoïdale :

$$q(x) = q_0 \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad (19.61)$$

les solutions aux équations d'équilibre (19.58) et aux conditions d'appuis (19.59) sont de la forme :

$$\begin{aligned} u_0 &= A_m \cos m\pi \frac{x}{a}, & v_0 &= B_m \cos m\pi \frac{x}{a}, \\ \varphi_x &= C_m \cos m\pi \frac{x}{a}, & \varphi_y &= D_m \cos m\pi \frac{x}{a}, \\ w_0 &= E_m \sin m\pi \frac{x}{a}. \end{aligned} \quad (19.62)$$

Les constantes  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$ ,  $D_m$  et  $E_m$  sont déterminées en reportant les expressions (19.62) dans les équations (19.58). D'où le système d'équations :

$$\begin{aligned} A_{11}A_m + B_{16}D_m &= 0, \\ A_{66}B_m + B_{16}C_m &= 0, \\ C_m + \frac{m\pi}{a}E_m &= \frac{1}{F_{55}}\frac{a}{m\pi}q_0, \\ B_{16}B_m + \left( D_{11} + \frac{a^2}{m^2\pi^2}F_{55} \right)C_m + \frac{a}{m\pi}F_{55}E_m &= 0, \\ B_{16}A_m + \left( D_{66} + \frac{a^2}{m^2\pi^2}F_{44} \right)D_m &= 0. \end{aligned} \quad (19.63)$$

La résolution de ce système d'équations permet de déterminer les constantes  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$ ,  $D_m$  et  $E_m$ . La répartition des contraintes dans le stratifié est ensuite obtenue à partir des relations (17.16) et (13.20).

## 19.4 RECHERCHE D'UNE SOLUTION EXACTE

La solution exacte a été obtenue par N.J. Pagano [26], dans le cas de la flexion cylindrique d'un stratifié constitué de couches orthotropes, dont les axes d'orthotropie sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$  de la plaque.

La flexion cylindrique est caractérisée par un état de déformations planes, sans déformation dans la direction  $y$ , soit :

$$\varepsilon_{yy} = 0, \quad \gamma_{xy} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0. \quad (19.64)$$

D'autre part, les contraintes, déformations et déplacements ne sont fonctions que de  $x$  et  $z$ .

Les couches étant orthotropes et d'axes principaux confondus avec les axes de la couche, les contraintes dans une couche sont données par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ 0 \\ \varepsilon_{zz} \\ 0 \\ \gamma_{xz} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (19.65)$$

D'où

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{13}\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{yy} &= C_{12}\varepsilon_{xx} + C_{23}\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= C_{13}\varepsilon_{xx} + C_{33}\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{yz} &= 0, \\ \sigma_{xz} &= C_{55}\gamma_{xz}, \\ \sigma_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (19.66)$$

Nous en déduisons :

$$\sigma_{yz} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (19.67)$$

Les relations déformations-contraintes, exprimées à l'aide des coefficients de souplesse, s'écrivent donc :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ 0 \\ \varepsilon_{zz} \\ 0 \\ \gamma_{xz} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ 0 \\ \sigma_{xz} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= S_{11}\sigma_{xx} + S_{12}\sigma_{yy} + S_{13}\sigma_{zz}, \\ 0 &= S_{12}\sigma_{xx} + S_{22}\sigma_{yy} + S_{23}\sigma_{zz}, \\ \varepsilon_{zz} &= S_{13}\sigma_{xx} + S_{23}\sigma_{yy} + S_{33}\sigma_{zz}, \\ \gamma_{xz} &= S_{55}\sigma_{xz}.\end{aligned}\tag{19.68}$$

La contrainte  $\sigma_{yy}$  s'exprime en fonction des contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{zz}$  suivant :

$$\sigma_{yy} = -\frac{1}{S_{22}}(S_{12}\sigma_{xx} + S_{23}\sigma_{zz}).\tag{19.69}$$

En reportant cette expression dans les relations (19.68), nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{13} & 0 \\ R_{13} & R_{33} & 0 \\ 0 & 0 & R_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix},\tag{19.70}$$

où  $R_{ij}$  sont les constantes de souplesse réduites, exprimées suivant :

$$\begin{aligned}R_{11} &= S_{11} - \frac{S_{12}^2}{S_{22}}, & R_{13} &= S_{13} - \frac{S_{12}S_{23}}{S_{22}}, \\ R_{33} &= S_{33} - \frac{S_{23}^2}{S_{22}}, & R_{55} &= S_{55}.\end{aligned}\tag{19.71}$$

Les équations d'équilibre (13.20) se réduisent à :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} &= 0,\end{aligned}\tag{19.72}$$

et les équations de compatibilité (8.21) à :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}.\tag{19.73}$$

Nous considérons le cas d'une plaque soumise à une charge transversale  $q(x)$  sur sa face supérieure et en appuis simples sur ses côtés  $x = 0$  et  $x = a$ . Les conditions aux frontières sur les faces supérieure et inférieure s'écrivent :

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}(x, z = h/2) &= q(x), & \sigma_{zz}(x, z = -h/2) &= 0, \\ \sigma_{xz}(x, z = h/2) &= 0, & \sigma_{xz}(x, z = -h/2) &= 0,\end{aligned}\tag{19.74}$$

alors que les conditions d'appuis peuvent être décrites par :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(0, z) &= 0, & \sigma_{xx}(a, z) &= 0, \\ w(0, z) &= 0, & w(a, z) &= 0.\end{aligned}\tag{19.75}$$

D'autre part, la continuité des contraintes et des déplacements doit être vérifiée entre chaque couche :

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^k(x, h_k) &= \sigma_{zz}^{k+1}(x, h_k), & \sigma_{xz}^k(x, h_k) &= \sigma_{xz}^{k+1}(x, h_k), \\ u^k(x, h_k) &= u^{k+1}(x, h_k), & w^k(x, h_k) &= w^{k+1}(x, h_k).\end{aligned}\quad (19.76)$$

Toute charge  $q(x)$  pouvant être exprimée sous forme d'une série de Fourier, nous étudions le cas où :

$$q(x) = q_0 \sin m\pi \frac{x}{a}. \quad (19.77)$$

La solution au problème posé est recherchée en exprimant les contraintes dans la couche  $k$  sous une forme satisfaisant aux équations d'équilibre (19.72), soit :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^k &= f_k''(z) \sin m\pi \frac{x}{a}, \\ \sigma_{zz}^k &= -\frac{m^2 \pi^2}{a^2} f_k(z) \sin m\pi \frac{x}{a}, \\ \sigma_{xz}^k &= -\frac{m\pi}{a} f_k'(z) \cos m\pi \frac{x}{a},\end{aligned}\quad (19.78)$$

où  $f_k(z)$  est une fonction de la variable  $z$  à déterminer (l'origine des  $z$  étant prise dans le plan milieu du stratifié) et où les primes indiquent les dérivées par rapport à la variable  $z$ . Le champ des déformations dans la couche  $k$  s'en déduit à l'aide de (19.70) suivant :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^k &= \left[ R_{11}^k f_k''(z) - R_{13}^k \frac{m^2 \pi^2}{a^2} f_k(z) \right] \sin m\pi \frac{x}{a}, \\ \varepsilon_{zz}^k &= \left[ R_{13}^k f_k''(z) - R_{33}^k \frac{m^2 \pi^2}{a^2} f_k(z) \right] \sin m\pi \frac{x}{a}, \\ \gamma_{xz}^k &= -R_{55}^k \frac{m\pi}{a} f_k'(z) \cos m\pi \frac{x}{a}.\end{aligned}\quad (19.79)$$

En reportant ces expressions dans l'équation de compatibilité (19.73), nous obtenons une équation différentielle en  $f_k(z)$  :

$$R_{11}^k f_k'''(z) - (2R_{13}^k + R_{55}^k) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} f_k''(z) + R_{33}^k \frac{m^4 \pi^4}{a^4} f_k(z) = 0. \quad (19.80)$$

Cette équation différentielle du quatrième ordre a pour solution :

$$\begin{aligned}f_k(z) &= \sum_{i=1}^4 A_{ik} \exp(r_{ik} z), \\ h_{k-1} &\leq z \leq h_k, \\ k &= 1, 2, \dots, n, \quad n: \text{nombre de couches},\end{aligned}\quad (19.81)$$

où les constantes  $r_{ik}$  sont données par :

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} r_{1k} \\ r_{2k} \end{aligned} \right\} &= \pm \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{a_k + b_k}{c_k}}, \\ \left. \begin{aligned} r_{3k} \\ r_{4k} \end{aligned} \right\} &= \pm \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{a_k - b_k}{c_k}}, \end{aligned} \quad (19.82)$$

avec

$$\begin{aligned} a_k &= R_{55}^k + 2R_{13}^k, \\ b_k &= \sqrt{a_k^2 - 4R_{11}^k R_{33}^k}, \\ c_k &= 2R_{11}^k, \end{aligned} \quad (19.83)$$

et où les constantes  $A_{ik}$  sont à déterminer.

Les contraintes dans la couche  $k$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= \sin m\pi \frac{x}{a} \sum_{i=1}^4 A_{ik} r_{ik}^2 \exp(r_{ik} z), \\ \sigma_{zz}^k &= -\frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin m\pi \frac{x}{a} \sum_{i=1}^4 A_{ik} \exp(r_{ik} z), \\ \sigma_{xz}^k &= -\frac{m\pi}{a} \cos m\pi \frac{x}{a} \sum_{i=1}^4 A_{ik} r_{ik} \exp(r_{ik} z), \end{aligned} \quad (19.84)$$

et les déplacements sont donnés par :

$$\begin{aligned} u^k &= \frac{a}{m\pi} \cos m\pi \frac{x}{a} \sum_{i=1}^4 A_{ik} \left( R_{13}^k \frac{m^2 \pi^2}{a^2} - R_{11}^k r_{ik}^2 \right) \exp(r_{ik} z), \\ w^k &= \sin m\pi \frac{x}{a} \sum_{i=1}^4 A_{ik} \left( R_{13}^k r_{ik} - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{R_{33}^k}{r_{ik}} \right) \exp(r_{ik} z). \end{aligned} \quad (19.85)$$

Les conditions de continuité (19.76) entre chaque couche, associées aux conditions (19.74) sur les faces inférieure et supérieure conduisent à un système de  $4n$  équations, dont la résolution permet de trouver les  $4n$  constantes  $A_{ik}$ .

## 19.5 COMPARAISON ENTRE LES DIVERSES THÉORIES

Nous comparons les résultats obtenus par les diverses théories : théorie classique des stratifiés, théorie des stratifiés avec prise en compte du cisaillement transverse et solution exacte, dans le cas d'un stratifié constitué de couches

orthotropes d'axes parallèles aux axes de la plaque et dans le cas d'une charge transversale sinusoïdale :

$$q(x) = q_0 \sin \pi \frac{x}{a}. \quad (19.86)$$

Dans le cas de la théorie classique, la flèche maximale est donnée par (19.36) :

$$w_{0\max} = (1+E) w'_{0\max}. \quad (19.87)$$

Dans le cas de la théorie prenant en compte le cisaillement transverse, la flèche maximale est donnée par l'expression (19.51) :

$$w_{0\max} = (1+E + \pi^2 S) w'_{0\max}, \quad (19.88)$$

où  $w'_{0\max}$ ,  $E$  et  $S$  sont exprimés en (19.52). Le calcul de la flèche maximale par la solution exacte se fait à partir de la relation (19.85).

Nous considérons, ci-après, deux types de stratifiés : un stratifié croisé antisymétrique  $[0^\circ/90^\circ]$  et un stratifié symétrique  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ .

### 1. Stratifié $[0^\circ/90^\circ]$

Les coefficients de rigidité sont donnés par les expressions (19.31) :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{E_T}{E_L} \right) Q_{11} h, \\ B_{11} &= \frac{1}{8} \left( \frac{E_T}{E_L} - 1 \right) Q_{11} h^2, \\ D_{11} &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{E_T}{E_L} \right) \frac{Q_{11} h^3}{12}. \end{aligned} \quad (19.89)$$

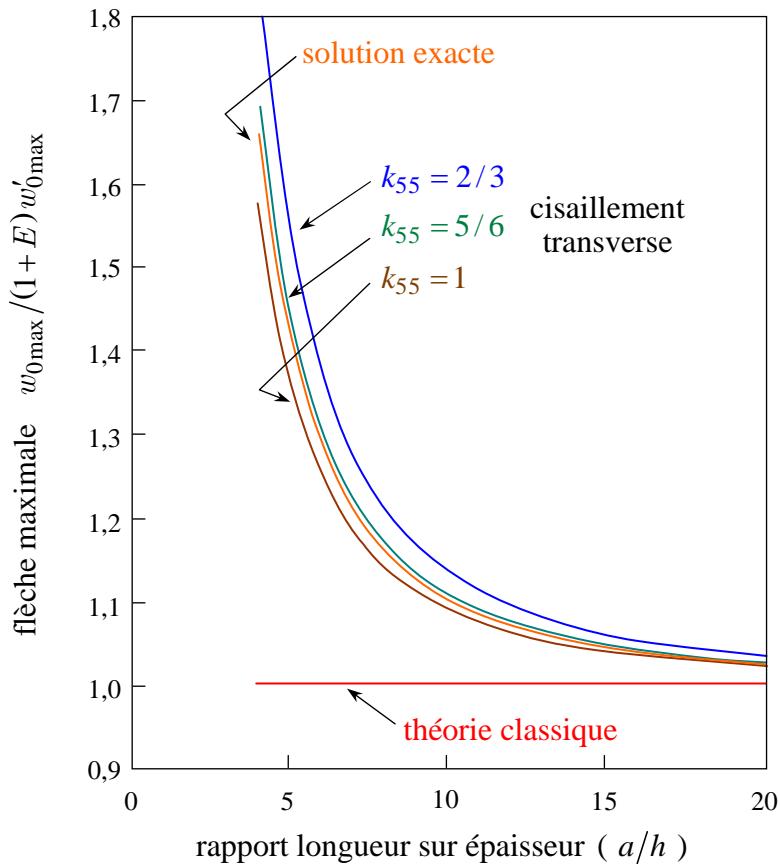
Il en résulte, d'après (19.53) :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{E_T}{E_L} \right) Q_{11} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{E_T}{E_L} \right) \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, \\ \bar{G}_{13} &= \frac{1}{2} (G_{LT'} + G_{TT'}). \end{aligned} \quad (19.90)$$

En reportant ces diverses expressions dans (19.88), nous obtenons :

$$\frac{w_{0\max}}{(1+E) w'_{0\max}} = 1 + \frac{\pi^2}{12k_{55}} \frac{1 + \frac{E_T}{E_L}}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} \left[ 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{E_T}{E_L} - 1 \right)^2 \right] \frac{E_L}{G_{LT'} + G_{TT'}} \left( \frac{h}{a} \right)^2. \quad (19.91)$$

Les variations de  $w_{0\max}/(1+E) w'_{0\max}$  en fonction du rapport  $a/h$ , obtenues

FIGURE 19.2. Flèche maximale d'un stratifié  $[0^\circ/90^\circ]$  en fonction de l'élancement.

par les diverses théories, sont reportées sur la figure 19.2 dans le cas d'un stratifié composé de couches unidirectionnelles à fibres de carbone, les modules de chaque couche ayant pour valeurs :

$$\begin{aligned} E_L &= 230 \text{ GPa}, & E_T &= 14 \text{ GPa}, & G_{LT} &= 5 \text{ GPa}, \\ G_{TT'} &= 4 \text{ GPa}, & \nu_{LT} &= 0,3. \end{aligned} \quad (19.92)$$

Dans le cas de la théorie avec cisaillement transverse, les variations de la flèche sont reportées avec trois valeurs de  $k_{55}$  : 1,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{2}{3}$ . Les courbes obtenues montrent un bon accord entre les résultats obtenus avec la théorie tenant compte du cisaillement transverse et les résultats déduits de la solution exacte, la meilleure évaluation étant obtenue avec  $k_{55} = \frac{5}{6}$ . La théorie classique des stratifiés ne rend pas compte de l'effet de l'élancement  $a/h$ , les résultats obtenus par les diverses théories étant pratiquement confondus pour les grandes valeurs de ce rapport.

## 2. Stratifié $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

Les coefficients de rigidité sont d'après le tableau 15.2 :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{E_T}{E_L} \right) Q_{11} h, \\ B_{11} &= 0, \\ D_{11} &= \frac{1}{8} \left( \frac{E_T}{E_L} + 7 \right) \frac{Q_{11} h^3}{12}. \end{aligned} \quad (19.93)$$

Il en résulte, d'après (19.53) :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= \frac{1}{8} \left( 7 + \frac{E_T}{E_L} \right) \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2} \frac{E_T}{E_L}, \\ \bar{G}_{13} &= \frac{1}{2} (G_{LT'} + G_{TT'}). \end{aligned} \quad (19.94)$$

En reportant ces expressions dans (19.88), nous obtenons :

$$\frac{w_{0\max}}{w'_{0\max}} = 1 + \frac{\pi^2}{48k_{55}} \frac{7 + \frac{E_T}{E_L}}{1 - \nu_{LT}^2} \frac{E_L}{\frac{E_T}{E_L} G_{LT'} + G_{TT'}} \left( \frac{h}{a} \right)^2, \quad (19.95)$$

puisque  $E = 0$ . La variation de  $w_{0\max}/w'_{0\max}$  en fonction de l'élancement  $a/h$  est reportée sur la figure 19.3 dans le cas d'un stratifié dont les couches ont les caractéristiques reportées en (19.92). On observe également dans ce cas un bon accord entre les résultats de la théorie avec cisaillement transverse et les résultats déduits de la solution exacte.

## 19.6 FLEXION CYLINDRIQUE DES PLAQUES SANDWICHES

Nous avons noté, chapitre 18, l'identité de comportement entre les plaques sandwiches symétriques et les stratifiés symétriques avec cisaillement transverse. Les éléments développés au paragraphe 19.3 peuvent donc être transposés au cas de la flexion cylindrique de plaques sandwiches symétriques. En complément à ces résultats, nous considérons un exemple de plaque sandwich, constituée de :

- deux peaux identiques dont les axes d'orthotropie sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$  de la plaque :

$$\begin{aligned} B_{ij} &= C_{ij} = 0, \\ A_{16} &= A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0, \end{aligned} \quad (19.96)$$

- une âme dont les axes principaux 1 et 2 sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$  :

$$F_{45} = 0, \quad F_{44} = hG_{23}, \quad F_{55} = hG_{13}, \quad (19.97)$$

où  $G_{13}$  et  $G_{23}$  sont les modules de cisaillement mesurés suivant les axes des matériaux.

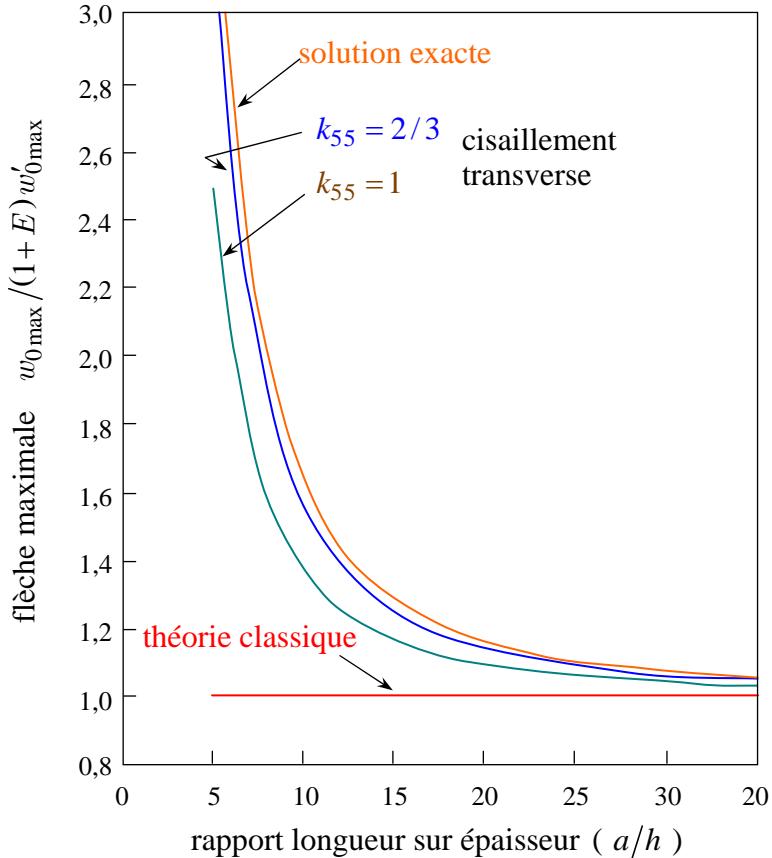


FIGURE 19.3. Flèche maximale d'un stratifié  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  en fonction de l'élancement.

L'état de déformation de la plaque sandwich est décrit suivant :

$$u_0 = 0, \quad \varphi_x = \varphi_x(x, t), \quad v_0 = 0, \quad \varphi_y = 0, \quad w_0 = w_0(x, t). \quad (19.98)$$

Les relations fondamentales (paragraphes 18.3.2) se réduisent ici à :

$$D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - hG_{13} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \quad (19.99)$$

$$hG_{13} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \quad (19.100)$$

Soit dans le cas d'une flexion statique :

$$D_{11} \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} - hG_{13} \left( \varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) = 0, \quad (19.101)$$

$$hG_{13} \left( \frac{d \varphi_x}{dx} + \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + q = 0. \quad (19.102)$$

Nous étudions le cas d'une charge uniforme :  $q(x) = q_0$ , et d'une plaque en appuis simples sur les côtés  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$w_0 = 0, \quad M_x = 0, \quad \frac{d\varphi_x}{dx} = 0. \quad (19.103)$$

L'intégration de l'équation (19.102) conduit à :

$$hG_{13}\left(\varphi_x + \frac{d w_0}{dx}\right) = -q_0 x + C,$$

et en substituant ce résultat dans l'équation (19.101), nous obtenons :

$$D_{11} \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} + q_0 x - C = 0.$$

L'intégration de cette équation, associée à la condition (19.103) aux appuis, conduit à :

$$\frac{d \varphi_x}{dx} = -\frac{q_0}{2D_{11}} x(x-a). \quad (19.104)$$

En reportant cette expression dans la relation (19.102), nous obtenons l'équation différentielle en  $w_0$  :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = q_0 \left[ \frac{1}{2D_{11}} x(x-a) - \frac{1}{hG_{13}} \right]. \quad (19.105)$$

En intégrant deux fois, puis en tenant compte que  $w_0$  est nul pour  $x = 0$  et  $x = a$ , nous obtenons finalement :

$$w_0 = \frac{q_0}{24D_{11}} x \left[ x^3 - 2ax^2 + a^3 + \frac{12D_{11}}{hG_{13}}(a-x) \right]. \quad (19.106)$$

L'équation (19.101) peut ensuite être explicitée pour en déduire  $\varphi_x$ , soit :

$$\varphi_x = -\frac{q_0}{24D_{11}} (4x^3 - 6ax^2 + a^3). \quad (19.107)$$

Les contraintes dans la couche  $k$  de la peau supérieure ou inférieure s'écrivent, d'après (18.17), suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \sigma_{xy}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & 0 \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm \frac{h}{2} \frac{d \varphi_x}{dx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soit :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^k &= \pm Q_{11}^k \frac{h}{2} \frac{d\varphi_x}{dx}, \\ \sigma_{yy}^k &= \pm Q_{12}^k \frac{h}{2} \frac{d\varphi_x}{dx}, \\ \sigma_{xy}^k &= 0.\end{aligned}\quad (19.108)$$

Le signe + étant associé à la peau supérieure et le signe - à la peau inférieure. La contrainte de cisaillement transverse peut être obtenue ensuite à partir des relations fondamentales (13.20) qui se réduisent ici à :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} = 0. \quad (19.109)$$

Soit :

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} = \pm Q_{11}^k \frac{h}{2} \frac{q_0}{2D_{11}} (2x - a), \quad (19.110)$$

ou en intégrant :

$$\sigma_{xz}^k = \pm \frac{Q_{11}^k h}{4D_{11}} (2x - a)(z + c_k) q_0. \quad (19.111)$$

Les constantes  $c_k$  dans chaque couche sont déterminées en annulant la contrainte de cisaillement  $\sigma_{xz}$  sur les faces supérieure et inférieure, et en assurant sa continuité entre chaque couche.

Nous examinons le cas d'un sandwich symétrique dont les peaux sont constituées de deux couches unidirectionnelles croisées de même épaisseur : [0°/90°]. Les coefficients  $Q_{11}^k$  des couches sont :

$$Q_{11}^{0^\circ} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2} \frac{E_T}{E_L}, \quad Q_{11}^{90^\circ} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2} \frac{E_T}{E_L}. \quad (19.112)$$

Dans la peau inférieure, la contrainte de cisaillement dans la couche à 0° est, d'après (19.111) :

$$\sigma_{xz}^{0^\circ} = - \frac{E_L h}{4D_{11} \left( 1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L} \right)} (2x - a)(z + c_0) q_0.$$

La constante  $c_0$  est telle que :

$$\sigma_{xz}^{0^\circ} \left( x, z = - \left( \frac{h}{2} + h_l \right) \right) = 0,$$

Ce qui conduit à :

$$\sigma_{xz}^{0^\circ} = - \frac{E_L h}{8D_{11} \left( 1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L} \right)} (2x - a)(h + 2h_l + 2z) q_0. \quad (19.113)$$

La contrainte de cisaillement dans la couche à  $90^\circ$  est :

$$\sigma_{xz}^{90^\circ} = -\frac{E_T h}{4D_{11}\left(1-\nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}\right)} (2x-a)(z+c_{90}) q_0.$$

La constante  $c_{90}$  est obtenue en écrivant la continuité de  $\sigma_{xz}$  entre les couches :

$$\sigma_{xz}^{0^\circ}\left(x, z=-\left(\frac{h}{2}+\frac{h_l}{2}\right)\right) = \sigma_{xz}^{90^\circ}\left(x, z=-\left(\frac{h}{2}+\frac{h_l}{2}\right)\right).$$

Soit :

$$\sigma_{xz}^{90^\circ} = -\frac{E_L h}{16D_{11}\left(1-\nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}\right)} (2x-a) \left[ \frac{E_T}{E_L} (2z+h+h_l) + 2h_l \right] q_0. \quad (19.114)$$

La contrainte  $\sigma_{xx}$  étant nulle dans l'âme, il résulte de (19.109) que la contrainte  $\sigma_{xz}$  dans l'âme est indépendante de  $z$ . Elle est obtenue en explicitant la continuité à l'interface peau-âme :

$$\sigma_{xz}^a = \sigma_{xz}^{90^\circ}\left(x, z=-\frac{h}{2}\right).$$

D'où :

$$\sigma_{xz}^a = -\frac{2+\frac{E_T}{E_L}}{1-\nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} \frac{E_L h h_l}{16D_{11}} (2x-a) q_0. \quad (19.115)$$

La répartition des contraintes dans la peau supérieure est obtenue par symétrie de la répartition dans la peau inférieure.

La figure 19.4 donne la variation de la contrainte de cisaillement dans l'épaisseur du sandwich, pour  $x=0$  et dans le cas où  $E_L/E_T = 4,5$  et  $h_l/h = 0,1$ . Nous pouvons noter que l'hypothèse de déformation uniforme dans les peaux conduit à une variation linéaire de la contrainte de cisaillement dans chaque couche, au lieu d'une variation parabolique dans le cas de la théorie classique des stratifiés. La contrainte de cisaillement est maximale dans l'âme, avec une valeur indépendante des propriétés de l'âme. Cette contrainte maximale dans l'âme conduit à une rupture du sandwich par délaminage dans le cas où la cohésion peau-âme n'est pas assez élevée.

## EXERCICES

**19.1** Une plaque de grande dimension selon la direction  $y$  est soumise à une charge uniforme  $q_0$ . La plaque est en appui le long de deux supports dans la direction  $y$ , distants de  $a$  dans la direction  $x$ . Nous étudions le comportement en flexion cylindrique de la plaque dans le cas de deux types de supports : (1) le cas

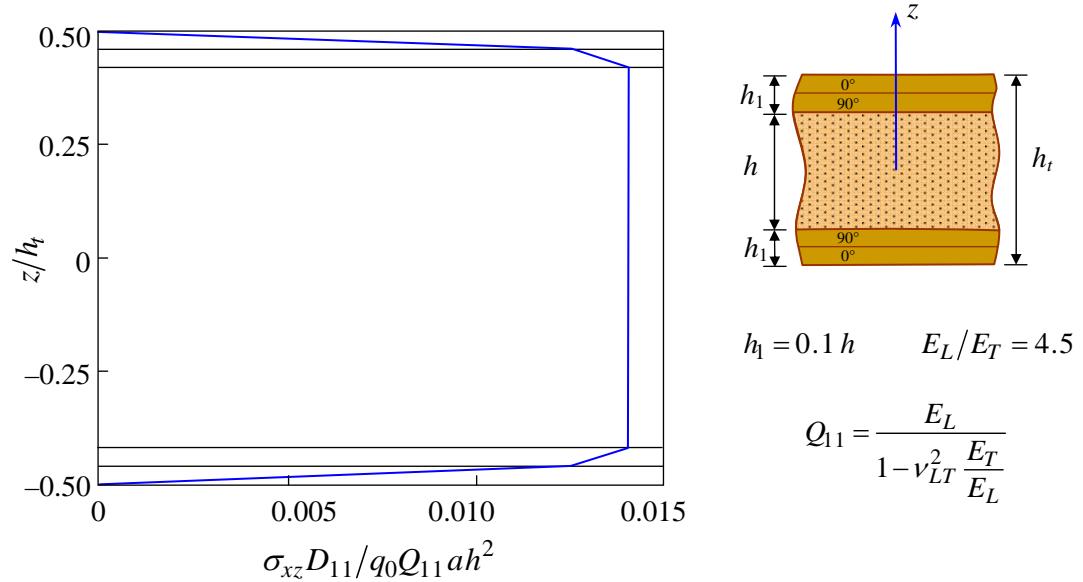


FIGURE 19.4. Répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur d'une plaque sandwich.

de deux appuis simples, et (2) le cas de deux enca斯特rements.

La plaque est constituée d'un stratifié à six couches à renfort tissu. Chaque couche d'épaisseur 1 mm a les mêmes caractéristiques mécaniques :

$$E_L = 20 \text{ GPa}, \quad E_T = 14 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,15, \quad G_{LT} = 2,4 \text{ GPa}.$$

Pour les deux types de supports, déterminer la flèche en un point quelconque de la plaque, les résultantes et moments, les contraintes dans chaque couche.

**19.2** Le stratifié à six couches, considéré dans l'exercice précédent, constitue pour moitié les peaux d'un matériau sandwich symétrique dont l'âme isotrope a une épaisseur de 20 mm et les caractéristiques mécaniques suivantes :

$$E_a = 80 \text{ MPa}, \quad G_a = 35 \text{ MPa}.$$

Reprendre l'exercice précédent dans le cas où la plaque est constituée de ce matériau sandwich.

## CHAPITRE 20

# Flexion des Poutres

## 20.1 INTRODUCTION

L'importance de développer une analyse sur le comportement en flexion des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, et d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux stratifiés et des matériaux sandwiches à partir d'essais de flexion réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres. Contrairement au cas de la flexion cylindrique étudiée dans le précédent chapitre, la théorie des poutres considère que la longueur  $L$  de la poutre est très supérieure à sa largeur  $b$  (figure 20.1). La différence entre flexion cylindrique et flexion de poutre est analogue à la différence entre déformations planes et contraintes planes de la théorie de l'élasticité. Dans ce chapitre, nous étudions la flexion des poutres, constituées de stratifiés ou sandwiches symétriques pour lesquels il y a absence de couplage flexion-membrane. L'axe  $x$  sera choisi suivant la longueur de la poutre et l'épaisseur de la poutre sera notée  $h$ .

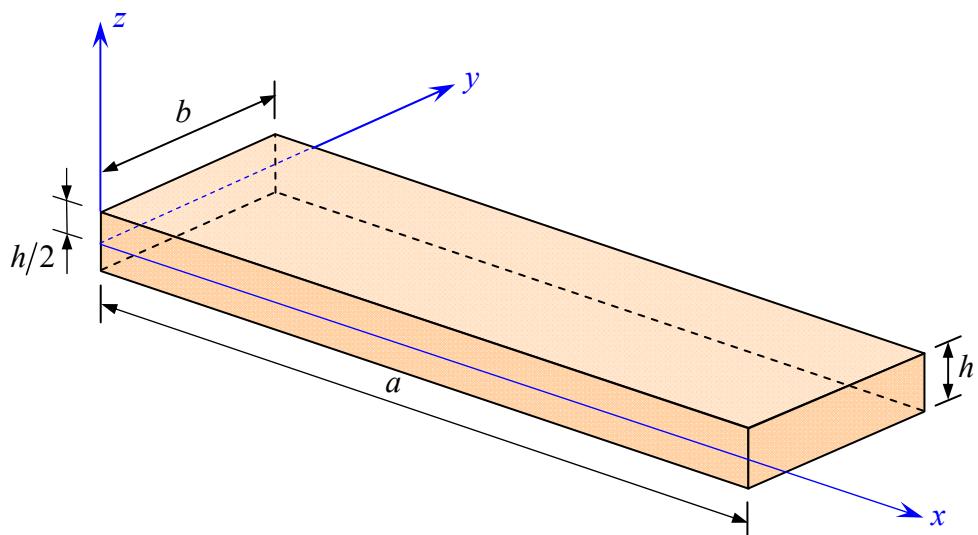


FIGURE 20.1. Élément de poutre.

## 20.2 THÉORIE CLASSIQUE DES STRATIFIÉS

### 20.2.1 Expressions générales

Dans le cas d'une flexion pure d'un stratifié symétrique, l'équation constitutive (14.29) se réduit à :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (20.1)$$

où  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$  et  $\kappa_{xy}$  sont définis dans les relations (14.15) :

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y), \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y), \quad \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(x, y). \quad (20.2)$$

L'équation (20.1) peut être écrite sous la forme inverse suivant :

$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}, \quad (20.3)$$

où  $D_{ij}^*$  sont les éléments de la matrice inverse de  $[D_{ij}]$  :

$$\begin{aligned} D_{11}^* &= \frac{1}{\Delta} (D_{22} D_{66} - D_{26}^2), & D_{12}^* &= \frac{1}{\Delta} (D_{16} D_{26} - D_{12} D_{66}), \\ D_{16}^* &= \frac{1}{\Delta} (D_{12} D_{26} - D_{16} D_{22}), & D_{22}^* &= \frac{1}{\Delta} (D_{11} D_{66} - D_{16}^2), \\ D_{26}^* &= \frac{1}{\Delta} (D_{12} D_{16} - D_{26} D_{11}), & D_{66}^* &= \frac{1}{\Delta} (D_{11} D_{22} - D_{12}^2), \end{aligned} \quad (20.4)$$

et  $\Delta$  est le déterminant de la matrice  $[D_{ij}]$  :

$$\Delta = D_{11} D_{22} D_{66} + 2 D_{12} D_{16} D_{26} - D_{11} D_{26}^2 - D_{22} D_{16}^2 - D_{66} D_{12}^2.$$

La théorie des poutres fait l'hypothèse que, dans le cas d'une flexion suivant l'axe  $x$ , les moments de flexion et de torsion  $M_y$  et  $M_{xy}$  sont nuls :

$$M_y = 0, \quad M_{xy} = 0. \quad (20.5)$$

Les relations (20.2) et (20.3) conduisent donc à :

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = D_{11}^* M_x. \quad (20.6)$$

Enfin, la théorie des poutres fait l'hypothèse supplémentaire que la flèche n'est fonction que de  $x$  :

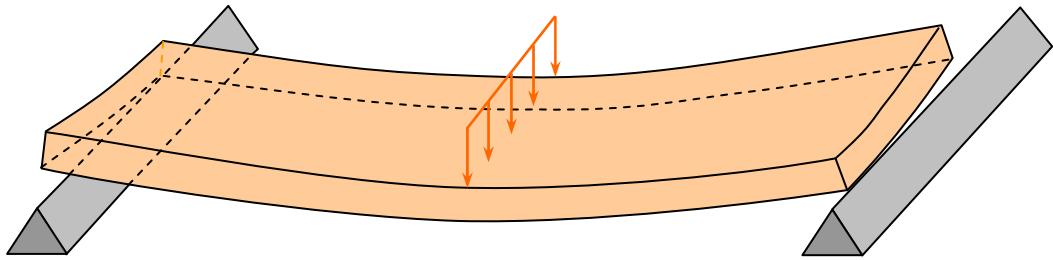


FIGURE 20.2. Effet du couplage flexion-torsion dans le cas de la flexion d'une poutre constituée d'un matériau stratifié.

$$w_0 = w_0(x). \quad (20.7)$$

La plus grande attention doit toutefois être apportée à cette dernière hypothèse. En effet, les équations (20.2) et (20.3) montrent que les courbures  $\kappa_y$  et  $\kappa_{xy}$  sont fonctions du moment de flexion  $M_x$ , soit :

$$\begin{aligned} \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = D_{12}^* M_x, \\ \kappa_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = D_{16}^* M_x. \end{aligned} \quad (20.8)$$

Ces relations montrent que la flèche  $w_0$  dépend a priori de la variable  $y$ . Cet effet est particulièrement important dans le cas d'éprouvettes de flexion de laboratoire, de forme plus proche d'une lame que d'une poutre. Il en résulte que la flexion et la torsion induites par les termes  $D_{12}^*$  et  $D_{16}^*$  dans les équations (20.8) tendent à produire un décollement partiel de la poutre sur ses supports (figure 20.2). Cet effet est toutefois négligeable dans le cas où le rapport longueur sur largeur ( $L/b$ ) est suffisamment élevé. Dans cette hypothèse (20.7), l'équation (20.6) s'écrit :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -D_{11}^* M_x. \quad (20.9)$$

Il est usuel d'écrire cette équation sous la forme :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{M}{E_x I}, \quad (20.10)$$

en introduisant :

- le module  $E_x$  de flexion de la poutre :

$$E_x = \frac{12}{h^3 D_{11}^*}, \quad (20.11)$$

- le moment quadratique  $I$  de la section droite de la poutre par rapport au plan  $(x, y)$  :

$$I = I_{xy} = \frac{bh^3}{12}, \quad (20.12)$$

- le moment  $M$  de flexion :

$$M = bM_x. \quad (20.13)$$

Compte tenu des hypothèses faites, l'équation (13.57) de flexion des plaques se réduit ici à :

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + q = 0. \quad (20.14)$$

En tenant compte de (20.9) et (20.10), cette équation s'écrit :

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} = D_{11}^* q, \quad (20.15)$$

ou

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} = \frac{p}{E_x I}, \quad (20.16)$$

avec

$$p = bq. \quad (20.17)$$

L'équation différentielle (20.15) en  $w_0$  a la même forme que l'équation différentielle (19.8) obtenue dans le cas d'une flexion cylindrique. Les deux équations diffèrent par les coefficients introduits :  $D_{11}^*$  dans la flexion de poutre et  $1/D_{11}$  (stratifié symétrique) dans le cas de la flexion cylindrique.

D'autre part, la quatrième équation des plaques (13.58) s'écrit ici :

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x, \quad (20.18)$$

ou

$$\frac{dM}{dx} = Q, \quad (20.19)$$

en posant :

$$Q = bQ_x. \quad (20.20)$$

Les contraintes dans la couche  $k$  du stratifié s'écrivent d'après (14.20) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \sigma_{xy}^k \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{16}^k \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{26}^k \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (20.21)$$

en notant, pour simplifier,  $Q_{ij}^k$  les coefficients de rigidité  $Q'_{ij}$  de la couche  $k$ ,

rapportés aux axes de la plaque. D'où :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^k &= z(Q_{11}^k D_{11}^* + Q_{12}^k D_{12}^* + Q_{16}^k D_{16}^*) M_x, \\ \sigma_{yy}^k &= z(Q_{12}^k D_{11}^* + Q_{22}^k D_{12}^* + Q_{26}^k D_{16}^*) M_x, \\ \sigma_{xy}^k &= z(Q_{16}^k D_{11}^* + Q_{26}^k D_{12}^* + Q_{66}^k D_{16}^*) M_x.\end{aligned}\quad (20.22)$$

Les expressions de ces contraintes peuvent être réécrites, en introduisant  $M$  et  $I$ , sous la forme :

$$\sigma_{xx}^k = a_{xx}^k \frac{M}{I} z, \quad (20.23)$$

$$\sigma_{yy}^k = a_{yy}^k \frac{M}{I} z, \quad (20.24)$$

$$\sigma_{xy}^k = a_{xy}^k \frac{M}{I} z, \quad (20.25)$$

avec :

$$\begin{aligned}a_{xx}^k &= (Q_{11}^k D_{11}^* + Q_{12}^k D_{12}^* + Q_{16}^k D_{16}^*) \frac{h^3}{12}, \\ a_{yy}^k &= (Q_{12}^k D_{11}^* + Q_{22}^k D_{12}^* + Q_{26}^k D_{16}^*) \frac{h^3}{12}, \\ a_{xy}^k &= (Q_{16}^k D_{11}^* + Q_{26}^k D_{12}^* + Q_{66}^k D_{16}^*) \frac{h^3}{12}.\end{aligned}\quad (20.26)$$

Les expressions précédentes des contraintes ne sont correctes qu'à une distance assez éloignée ( $> h$ ) des bords de la poutre. Les résultats précédents ne sont donc applicables qu'au cas de poutres ayant un rapport  $b/h$  assez élevé. D'autre part, dans le cas de poutres en matériau homogène, les relations (20.26) associées aux expressions (15.1) et (15.2) conduisent à  $a_{xx} = 1$  et  $a_{yy} = a_{xy} = 0$ . Les équations (20.23) à (20.25) se réduisent aux équations de la théorie classique des poutres.

La contrainte de cisaillement dans les couches se déduit de l'équation d'équilibre (19.109), soit :

$$\frac{d\sigma_{xz}^k}{dz} = -\frac{d\sigma_{xx}^k}{dx} = -a_{xx}^k \frac{1}{I} \frac{dM}{dx} z.$$

D'où :

$$\sigma_{xz}^k = -\frac{Q}{2I} a_{xx}^k (z^2 + c_k). \quad (20.27)$$

Les constantes  $c_k$  dans chaque couche sont déterminées en annulant  $\sigma_{xz}$  sur les faces supérieure et inférieure, et en assurant la continuité de  $\sigma_{xz}$  entre chaque couche.

Dans le cas d'une poutre constituée d'un matériau homogène, nous avons  $a_{xx} = 1$  et la contrainte de cisaillement transverse s'annule sur les faces inférieure et supérieure :  $\sigma_{xz} = 0$  pour  $z = \pm h/2$ . Il en résulte :

$$\sigma_{xz} = \frac{Qh^2}{8I} \left[ 1 - 4 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] = \frac{3Q}{2bh} \left[ 1 - 4 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right]. \quad (20.28)$$

La contrainte de cisaillement est maximum pour  $z = 0$ , soit :

$$\sigma_{xz}(z=0) = \tau_0 = \frac{3Q}{2bh}. \quad (20.29)$$

La relation (20.27) peut alors être réécrite sous la forme :

$$\sigma_{xz}^k = -a_{xx}^k \tau_0 \left[ 4 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + d_k \right], \quad (20.30)$$

où  $d_k$  sont de nouvelles constantes à déterminer en assurant la continuité de  $\sigma_{xz}$  dans l'épaisseur de la poutre. Pour une poutre constituée d'un matériau homogène, la relation (20.30) se réduit à (20.28), soit :

$$\sigma_{xz}^k = \tau_0 \left[ 1 - 4 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right]. \quad (20.31)$$

## 20.2.2 Flexion 3-points

Nous considérons (figure 20.3) une poutre en flexion 3-points. La symétrie du problème conduit à ne considérer qu'une moitié de poutre. Le moment de flexion s'exprime par la relation :

$$M = -\frac{Px}{2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \quad (20.32)$$

où  $P$  est la charge totale exercée au milieu de la poutre. En reportant cette expression dans (20.10), il vient :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = \frac{Px}{2E_x I}, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}. \quad (20.33)$$

Dans le cas d'appuis simples, les conditions aux frontières sont pour  $x = 0$  :

$$M = 0, \quad w_0 = 0. \quad (20.34)$$

D'autre part, la symétrie impose que, pour  $x = L/2$  :

$$\frac{dw_0}{dx} = 0. \quad (20.35)$$

L'intégration de (20.33) associée aux conditions (20.34) et (20.35) conduit à :

$$w_0 = -\frac{Pl^2}{48E_x I} x \left[ 3 - \left( \frac{2x}{L} \right)^2 \right]. \quad (20.36)$$

La flèche  $w_c$  au centre de la poutre ( $x = L/2$ ) s'écrit :

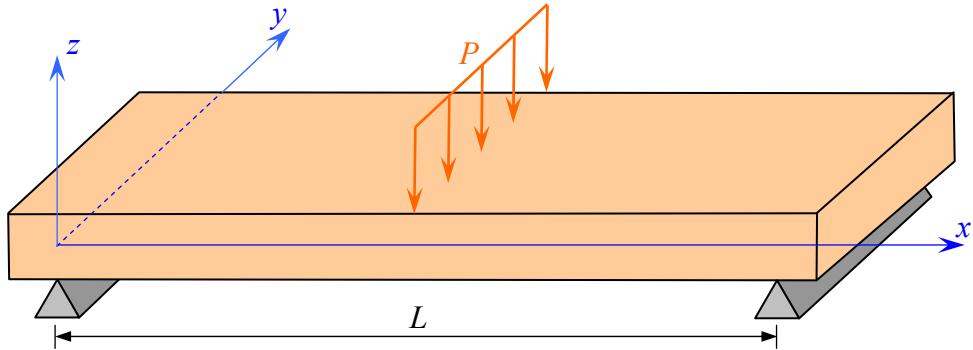


FIGURE 20.3. Sollicitation d'une poutre en flexion 3-points.

$$w_c = \frac{PL^3}{48E_x I} = \frac{PL^3}{48b} D_{11}^*. \quad (20.37)$$

Cette relation peut être utilisée pour déterminer soit le module de flexion de la poutre, soit le coefficient  $D_{11}^*$ , connaissant la flèche  $w_c$  au centre pour une charge imposée  $P$  :

$$E_x = \frac{PL^3}{48Iw_c} = \frac{PL^3}{4bh^3 w_c}, \quad (20.38)$$

$$D_{11}^* = \frac{48bw_c}{PL^3}. \quad (20.39)$$

Les contraintes dans la couche  $k$  s'écrivent d'après (20.23) à (20.25) :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= -6a_{xx}^k \frac{P}{bh^3} xz, \\ \sigma_{yy}^k &= -6a_{yy}^k \frac{P}{bh^3} xz, \\ \sigma_{xy}^k &= -6a_{xy}^k \frac{P}{bh^3} xz. \end{aligned} \quad (20.40)$$

Ces contraintes sont maximales pour  $x = L/2$ , soit :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= -3a_{xx}^k \frac{PL}{bh^3} z, \\ \sigma_{yy}^k &= -3a_{yy}^k \frac{PL}{bh^3} z, \\ \sigma_{xy}^k &= -3a_{xy}^k \frac{PL}{bh^3} z. \end{aligned} \quad (20.41)$$

Dans le cas d'une poutre en matériau homogène isotrope :  $a_{xx} = 1$ , et la contrainte normale s'écrit :

$$\sigma_{xx} = -\frac{3PL}{bh^3} z. \quad (20.42)$$

La contrainte de traction maximale est atteinte sur la face inférieure ( $z = -h/2$ ), et s'exprime suivant :

$$\sigma_{xx\max} = \sigma_0 = \frac{3PL}{2bh^2}. \quad (20.43)$$

Les contraintes dans la couche  $k$  d'un stratifié peuvent donc s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= -2a_{xx}^k \sigma_0 \frac{z}{h}, \\ \sigma_{yy}^k &= -2a_{yy}^k \sigma_0 \frac{z}{h}, \\ \sigma_{xy}^k &= -2a_{xy}^k \sigma_0 \frac{z}{h}. \end{aligned} \quad (20.44)$$

Comme exemple, nous considérons un stratifié symétrique, constitué de huit couches de même épaisseur et d'orientations  $0^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$  et  $90^\circ$ . Pour chaque couche, les caractéristiques suivantes d'un composite unidirectionnel à fibres de verre sont utilisées :

$$E_L = 45 \text{ GPa}, \quad E_T = 10 \text{ GPa}, \quad G_{LT} = 4,5 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,3. \quad (20.45)$$

Trois séquences d'empilement sont considérées (figure 20.4). La variation de la contrainte normale  $\sigma_{xx}$  (20.44) à travers l'épaisseur est rapportée sur la figure 20.5, pour ces trois empilements de la figure 20.4. La contrainte est rapportée à la valeur maximale  $\sigma_0$  atteinte dans le cas d'un matériau homogène. Pour comparaison, la variation de la contrainte dans le cas d'un matériau homogène est également reportée. Les résultats obtenus mettent clairement en évidence l'influence de l'empilement des couches. La contrainte maximale n'est atteinte dans la couche externe que dans le cas où les couches orientées à  $0^\circ$  sont externes. Il en résulte que la charge à la rupture sera fortement influencée par l'empilement utilisé.

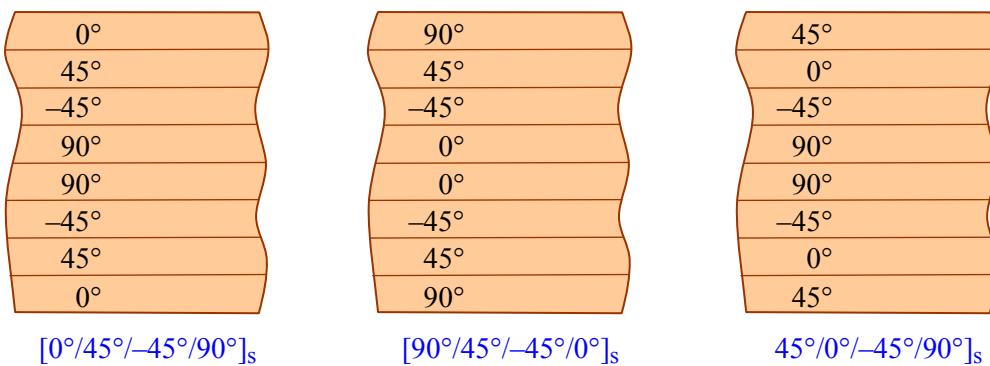


FIGURE 20.4. Divers empilements étudiés.

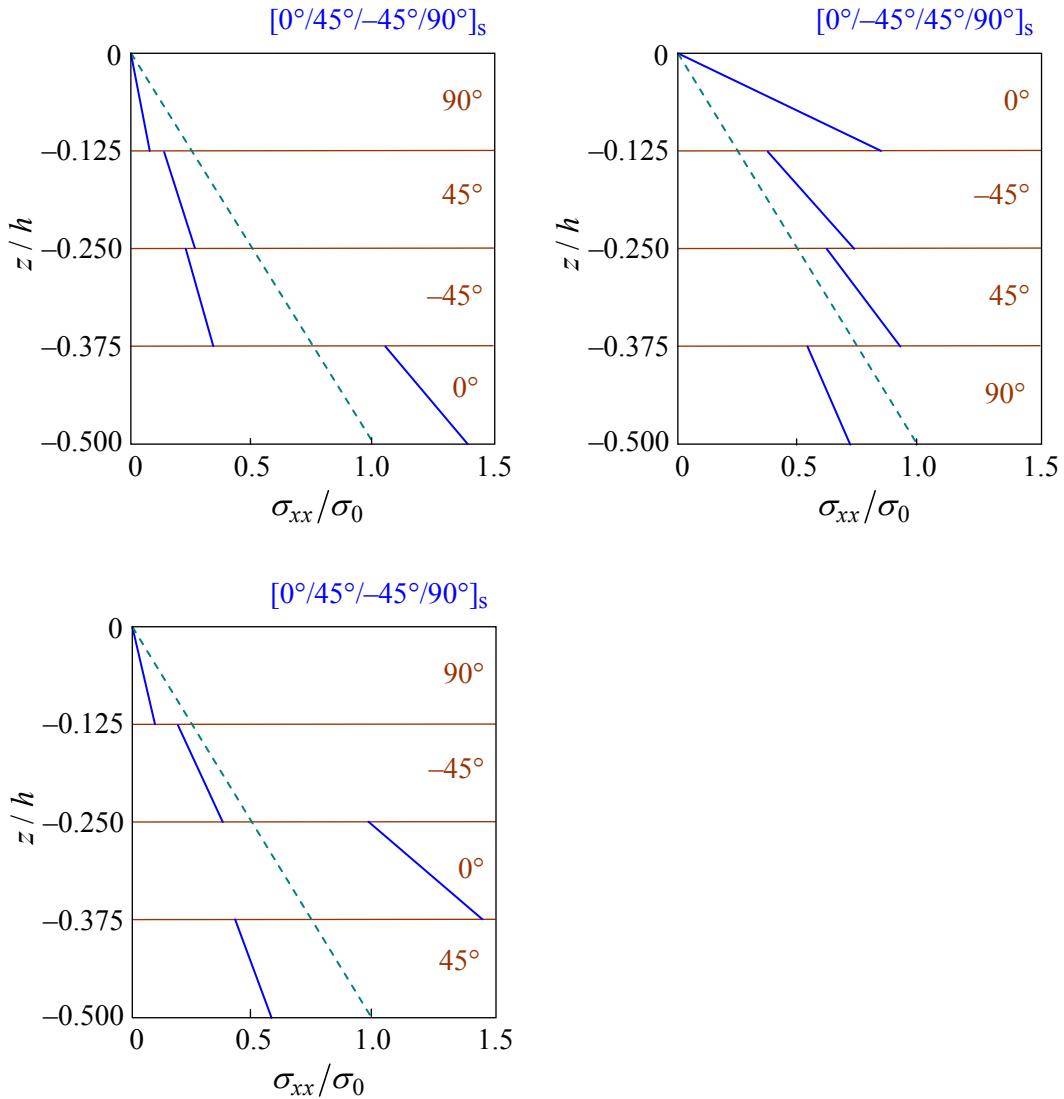


FIGURE 20.5. Influence de la séquence d'empilement sur la répartition des contraintes  $\sigma_{xx}$  dans l'épaisseur des stratifiés.

Dans le cas d'une poutre en flexion 3-points, la comparaison des relations (20.19) et (20.32) montre que  $Q = -P/2$ . La contrainte de cisaillement est donc donnée par la relation (20.30) :

$$\sigma_{xz}^k = -a_{xz}^k \tau_0 \left[ 4 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + d_k \right], \quad (20.46)$$

avec

$$\tau_0 = -\frac{3P}{4bh}. \quad (20.47)$$

L'influence de l'empilement des couches sur la variation de la contrainte de cisaillement  $\sigma_{xz}$  dans l'épaisseur du stratifié est illustrée sur les figures 20.6 et 20.7, pour les empilements  $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$  et  $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/0^\circ]_s$  étudiés

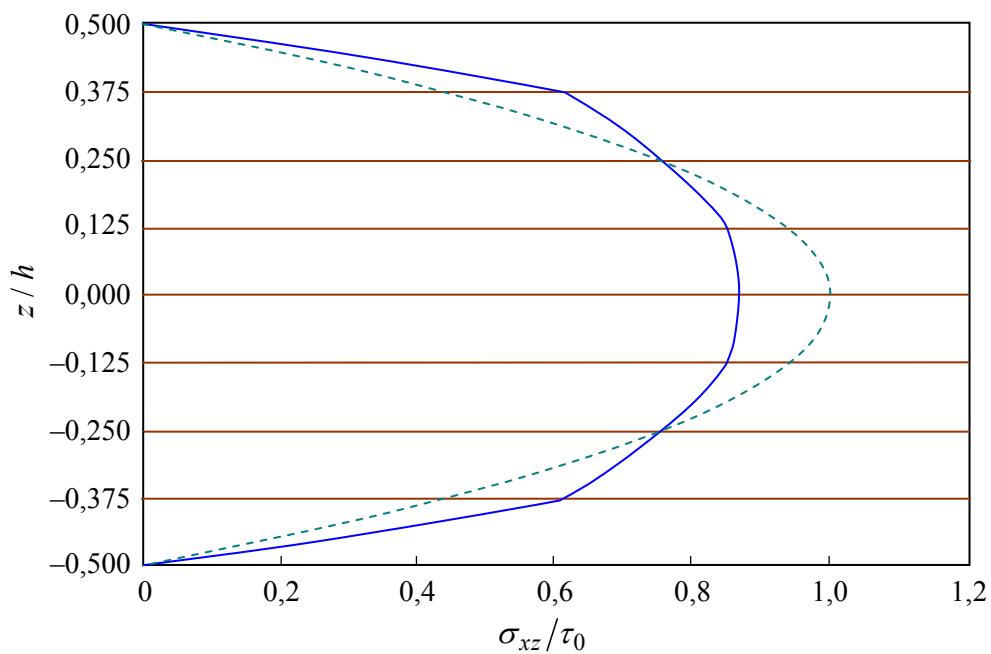


FIGURE 20.6. Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du stratifié  $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]_S$ .

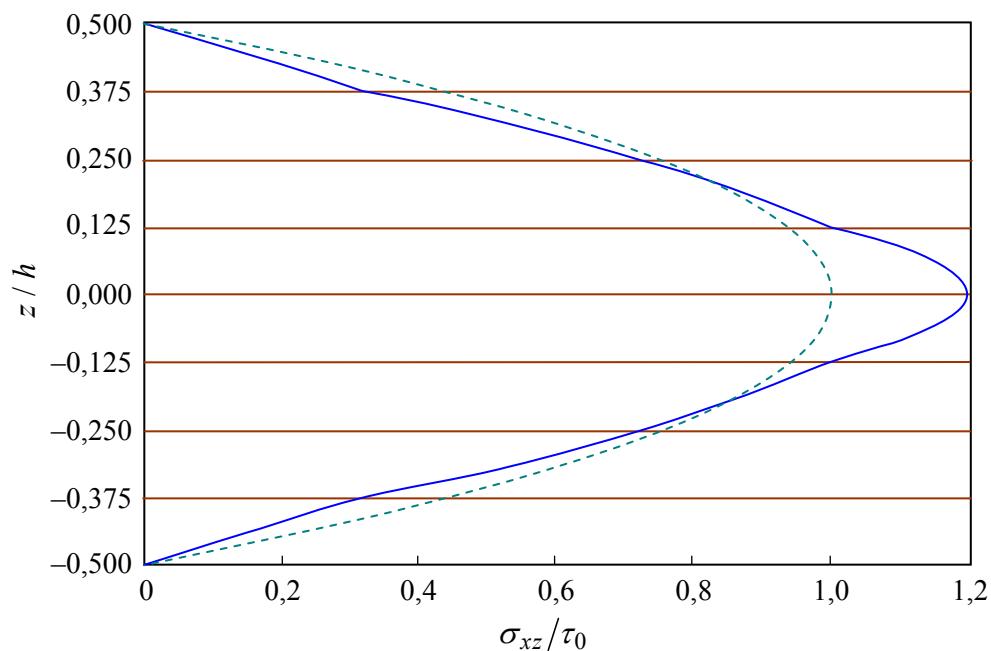


FIGURE 20.7. Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du stratifié  $[90^\circ/45^\circ/-45^\circ/0^\circ]_S$ .

précédemment. Pour comparaison, la variation de la contrainte de cisaillement (20.31) d'une poutre homogène est également tracée. Les résultats obtenus montrent que la contrainte de cisaillement maximum dépend de l'empilement et que la variation de la contrainte diffère nettement de la variation donnée par la théorie classique des poutres.

### 20.2.3 Flexion 4-points

Nous considérons maintenant (figure 20.8) une poutre en flexion 4-points, chargée avec deux charges  $P/2$  exercées aux quarts de la longueur entre appuis. Ce type de sollicitation est assez couramment utilisé dans des essais pour caractériser le comportement des matériaux. La symétrie du problème conduit à ne considérer également ici qu'une moitié de poutre. Pour la moitié gauche de la poutre, le moment de flexion est donné par :

$$M = -\frac{Px}{2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{4}, \quad (20.48)$$

$$M = -\frac{PL}{8}, \quad \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}. \quad (20.49)$$

En reportant ces expressions dans (20.10), il vient :

$$\frac{d^2w_0}{dx^2} = \frac{d^2w_1}{dx^2} = \frac{Px}{2E_x I}, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{4}, \quad (20.50)$$

$$\frac{d^2w_0}{dx^2} = \frac{d^2w_2}{dx^2} = \frac{PL}{8E_x I}, \quad \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}, \quad (20.51)$$

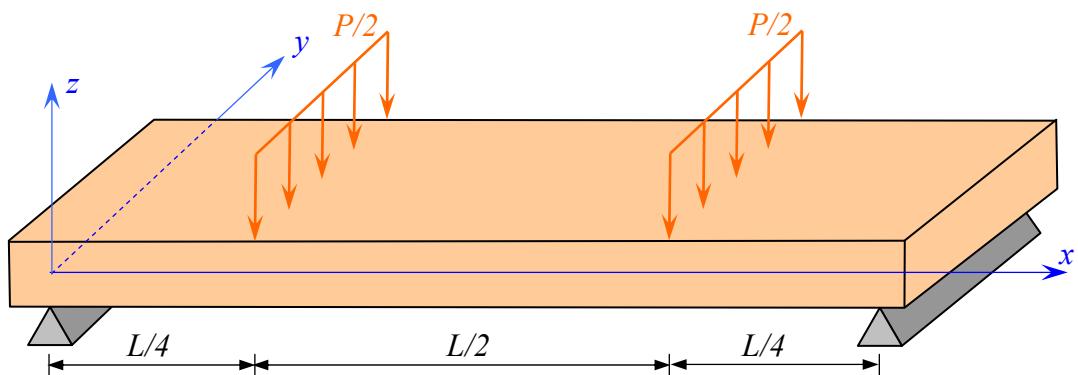


FIGURE 20.8. Sollicitation d'une poutre en flexion 4-points.

en introduisant :

$$\begin{aligned} w_1 &= w_0, \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{L}{4}, \\ w_2 &= w_0, \quad \text{pour } \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}. \end{aligned}$$

L'équation (20.50) obtenue dans le cas où  $0 \leq x \leq L/4$  est identique à l'équation (20.33) obtenue dans le cas de la flexion 3-points.

Dans le cas d'appuis simples, les conditions aux frontières pour  $x = 0$  sont :

$$M = 0, \quad w_1 = 0. \quad (20.52)$$

La condition sur le moment est satisfaite par la relation (20.48). La symétrie impose que la pente de la déformée s'annule au centre de la poutre, soit pour  $x = L/2$  :

$$\frac{dw_2}{dx} = 0. \quad (20.53)$$

Enfin, la continuité de la flèche et de la pente de la déformée doit être assurée pour  $x = L/4$ , soit :

$$w_1 = w_2, \quad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_2}{dx}. \quad (20.54)$$

L'intégration des équations (20.50) et (20.51) conduit, compte tenu des conditions (20.52) à (20.54), à :

$$w_1 = -\frac{PL^2}{192E_xI}x \left[ 9 - 16 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right], \quad (20.55)$$

$$w_2 = -\frac{PL^3}{768E_xI}x \left[ 1 - 48 \frac{x}{L} + 48 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right]. \quad (20.56)$$

Ces expressions permettent de déterminer la flèche  $w_q$  au point  $x = L/4$  et la flèche  $w_c$  au centre ( $x = L/2$ ) :

$$w_q = \frac{PL^3}{96E_xI} = \frac{PL^3}{96b} D_{11}^*, \quad (20.57)$$

$$w_c = \frac{11PL^3}{768E_xI} = \frac{11PL^3}{768b} D_{11}^*. \quad (20.58)$$

Ces relations peuvent être utilisées pour déterminer soit le module de flexion de la poutre, soit le coefficient  $D_{11}^*$  à partir de la mesure des flèches  $w_q$  ou  $w_c$  :

$$E_x = \frac{PL^3}{96Iw_q} = \frac{PL^3}{8bh^3w_q}, \quad (20.59)$$

$$E_x = \frac{11PL^3}{768Iw_c} = \frac{11PL^3}{64bh^3w_c}, \quad (20.60)$$

et

$$D_{11}^* = \frac{96bw_q}{PL^3} = \frac{768bw_c}{PL^3}. \quad (20.61)$$

Les contraintes dans la couche  $k$  s'écrivent d'après (20.23) à (20.25) :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= -6a_{xx}^k \frac{P}{bh^3} xz, \\ \sigma_{yy}^k &= -6a_{yy}^k \frac{P}{bh^3} xz, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{4}, \\ \sigma_{xy}^k &= -6a_{xy}^k \frac{P}{bh^3} xz, \end{aligned} \quad (20.62)$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= -\frac{3}{2}a_{xx}^k \frac{PL}{bh^3} z, \\ \sigma_{yy}^k &= -\frac{3}{2}a_{yy}^k \frac{PL}{bh^3} z, \quad \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}. \\ \sigma_{xy}^k &= -\frac{3}{2}a_{xy}^k \frac{PL}{bh^3} z, \end{aligned} \quad (20.63)$$

La comparaison avec les relations (20.41) montre que pour  $0 \leq x \leq L/4$  les contraintes sont exprimées par des relations identiques à celles trouvées dans le cas de la flexion 3-points. D'autre part, la comparaison entre les relations (20.62) et (20.63) montre que les contraintes maximales se produisent pour  $x$  compris entre  $L/4$  et  $L/2$ , les contraintes étant indépendantes de  $x$  dans cet intervalle. Comme dans le cas de la flexion 3-points, les contraintes maximales ne sont pas nécessairement atteintes sur les faces externes. Dans le cas d'une poutre homogène ( $a_{xx} = 1$ ), la contrainte normale s'écrit :

$$\sigma_{xx} = -\frac{3PL}{2bh^3} z, \quad \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}. \quad (20.64)$$

La contrainte de traction maximale est atteinte sur la face inférieure ( $z = -h/2$ ) et s'exprime par :

$$\sigma_{xxm} = \frac{3PL}{4bh^2}. \quad (20.65)$$

Les contraintes dans la couche  $k$  d'une poutre en matériau stratifié peuvent donc être réécrites suivant :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= -2a_{xx}^k \sigma_{xxm} \frac{z}{h}, \\ \sigma_{yy}^k &= -2a_{yy}^k \sigma_{xxm} \frac{z}{h}, \\ \sigma_{xy}^k &= -2a_{xy}^k \sigma_{xxm} \frac{z}{h}. \end{aligned} \quad (20.66)$$

Ces expressions sont de la même forme que les relations (20.44) obtenues dans le cas de la flexion 3-points. La variation de  $\sigma_{xx}/\sigma_{xym}$  est donc donnée également par la figure 20.5 dans le cas des stratifiés étudiés précédemment.

La relation (20.19) associée à (20.48) et (20.49) montre que :

$$Q = -\frac{P}{2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{4}, \quad (20.67)$$

$$Q = 0, \quad \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}. \quad (20.68)$$

Il en résulte que la contrainte de cisaillement transverse est nulle pour  $L/4 \leq x \leq L/2$ . Par contre, pour  $0 \leq x \leq L/4$ , la contrainte de cisaillement est donnée par la relation (20.30) avec la même valeur de  $\tau_0$  que dans le cas de la flexion 3-points (20.47). La variation de la contrainte de cisaillement dans l'épaisseur du stratifié, pour  $0 \leq x \leq L/4$  est donc identique à celle obtenue en flexion 3-points pour  $0 \leq x \leq L/2$ .

## 20.3 PRISE EN COMPTE DU CISAILLEMENT TRANSVERSE

### 20.3.1 Équations générales

Dans ce paragraphe, nous étudions l'influence du cisaillement transverse sur la flexion des poutres en stratifiés. Comme dans le paragraphe 20.2, l'étude est limitée au cas de stratifiés symétriques.

Dans le cas d'une flexion pure, l'équation constitutive (17.56) de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse se réduit à :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (20.69)$$

et

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}, \quad (20.70)$$

avec

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, & \kappa_y &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, & \kappa_{xy} &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}, \\ \gamma_{yz}^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y, & \gamma_{xz}^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x. \end{aligned} \quad (20.71)$$

Les coefficients  $D_{ij}$  ont été introduits dans la théorie classique des stratifiés (14.33) et les expressions générales des coefficients  $H_{ij}$  sont données en (17.53).

Dans le cadre de la théorie initiale du cisaillement transverse, les coefficients de cisaillement  $H_{ij}$  se réduisent aux coefficients  $F_{ij}$  exprimés en (17.24) :

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (C'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (C'_{ij})_k e_k. \quad (20.72)$$

L'équation des moments (20.69) a une forme identique à l'équation des moments (20.1) de la théorie classique des stratifiés, les courbures  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$  et  $\kappa_{xy}$  ayant des expressions différentes. Les équations des moments (20.69) et des résultantes en cisaillement (20.70) sont découplées, et peuvent être écrites sous formes inverses suivant :

$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}, \quad (20.73)$$

et

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{44}^* & H_{45}^* \\ H_{45}^* & H_{55}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix}, \quad (20.74)$$

où les coefficients  $D_{ij}^*$  sont les éléments de la matrice inverse de  $[D_{ij}]$  donnés par la relation (20.4), et les coefficients  $H_{ij}^*$  sont exprimés dans le cadre de la théorie initiale du cisaillement transverse (relation (17.21)), suivant :

$$H_{44}^* = F_{44}^* = \frac{F_{55}}{\Delta F}, \quad H_{45}^* = F_{45}^* = -\frac{F_{45}}{\Delta F}, \quad H_{55}^* = F_{55}^* = \frac{F_{44}}{\Delta F},$$

avec (20.75)

$$\Delta F = F_{44} F_{55} - F_{45}^2.$$

Nous nous plaçons dans l'hypothèse où les fonctions  $\varphi_x$  et  $w_0$  sont indépendantes de la variable  $y$ , c'est-à-dire :

$$\varphi_x = \varphi_x(x), \quad w_0 = w_0(x). \quad (20.76)$$

Les déformations  $\varepsilon_{xx}$  et  $\gamma_{xz}^0$  sont alors données, selon (17.12) et (17.22) par les expressions :

$$\varepsilon_{xx} = z \frac{d\varphi_x}{dx}, \quad (20.77)$$

$$\gamma_{xz}^0 = \varphi_x + \frac{d w_0}{dx}. \quad (20.78)$$

Dans le cas d'une flexion pure, les relations fondamentales (13.58) des plaques se réduisent à :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0, \quad (20.79)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad (20.80)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0. \quad (20.81)$$

De l'équation (20.73), nous tirons :

$$\kappa_x = \frac{d\varphi_x}{dx} = D_{11}^* M_x, \quad (20.82)$$

relation qui exprime le moment  $M_x$ . L'hypothèse (20.5) de la flexion des poutres est également appliquée à la théorie prenant en compte le cisaillement :

$$M_y = 0, \quad M_{xy} = 0. \quad (20.83)$$

En reportant ces relations dans l'équation d'équilibre (20.81), nous trouvons que la résultante en cisaillement  $Q_y$  est nulle :

$$Q_y = 0. \quad (20.84)$$

Les relations (20.74) et (20.78) conduisent donc à :

$$\gamma_{xz}^0 = \varphi_x + \frac{dw_0}{dx} = F_{55}^* Q_x. \quad (20.85)$$

En reportant les expressions (20.82) et (20.85) dans l'équation (20.80) des plaques, nous obtenons :

$$\frac{d^2\varphi_x}{dx^2} - \frac{D_{11}^*}{F_{55}^*} \left( \varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) = 0. \quad (20.86)$$

Il est usuel d'écrire cette dernière équation en introduisant le module  $E_x$  (20.11) de la poutre, et le module  $G_{xz}$  de cisaillement de la poutre exprimé suivant :

$$G_{xz} = \frac{1}{hF_{55}^*}. \quad (20.87)$$

L'équation (20.86) s'écrit alors :

$$\frac{d^2\varphi_x}{dx^2} - \frac{bh}{I} \frac{G_{xz}}{E_x} \left( \varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) = 0. \quad (20.88)$$

De même, en reportant l'expression (20.85) dans l'équation des plaques (20.79), nous obtenons :

$$\frac{d^2w_0}{dx^2} + \frac{d\varphi_x}{dx} + F_{55}^* q = 0, \quad (20.89)$$

équation qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2w_0}{dx^2} + \frac{d\varphi_x}{dx} + \frac{1}{hG_{xz}} p = 0, \quad (20.90)$$

en introduisant, comme en (20.17), la charge :  $p = bq$ .

Les équations (20.86) et (20.89), ou (20.88) et (20.90), constituent les équations fondamentales des poutres en flexion de stratifiés symétriques, tenant compte de la déformation en cisaillement. Ces relations permettent de déterminer les fonctions  $\varphi_x$  et  $w_0$ . Les formes (20.86) et (20.90) sont identiques aux équations de la théorie des poutres homogènes tenant compte du cisaillement [27].

Dans le cas où la variation du moment de flexion  $M_x$  est connue, la relation (20.82) peut être utilisée sous la forme :

$$\frac{d\varphi_x}{dx} = D_{11}^* M_x = \frac{M}{E_x I}, \quad (20.91)$$

où le moment de flexion  $M$  a été introduit en (20.13). Une seconde équation peut être obtenue en reportant (20.91) dans l'une des relations (20.86) ou (20.88) :

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{1}{F_{55}^*} \left( \varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right), \quad (20.92)$$

ou

$$\frac{dM}{dx} = bhG_{xz} \left( \varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right). \quad (20.93)$$

Les contraintes en membrane dans la couche  $k$  du stratifié s'écrivent, d'après (17.16) et (20.82), suivant les mêmes expressions que (20.22). Il en résulte que les expressions (20.23) à (20.25) obtenues avec la théorie classique des stratifiés sont également applicables au cas où le cisaillement transverse est pris en compte. De même, les contraintes de cisaillement dans les couches ont la même forme (20.27) à (20.31) que les contraintes explicitées dans la théorie classique. Dans le cas de la flexion des poutres, la prise en compte du cisaillement transverse ne modifie pas la répartition des contraintes dans le stratifié.

### 20.3.2 Flexion 3-points

Dans le cas d'une poutre en flexion 3-points (figure 20.3), le moment de flexion est exprimé par la relation (20.32). En reportant cette expression dans la relation (20.91), nous obtenons :

$$\varphi_x = -\frac{P}{4E_x I} x^2 + c, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}. \quad (20.94)$$

La symétrie du chargement implique que  $u(L/2) = 0$ . Il résulte de (17.1) que cette condition se traduit ici par :

$$\varphi_x(L/2) = 0. \quad (20.95)$$

Cette condition introduite dans (20.94) conduit à :

$$\varphi_x = \frac{PL^2}{16E_x I} \left[ 1 - 4 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right], \quad (20.96)$$

ou

$$\varphi_x = \frac{PL^2}{16b} D_{11}^* \left[ 1 - 4 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right]. \quad (20.97)$$

En reportant l'expression (20.32) du moment  $M$  dans l'équation (20.93), nous en déduisons l'expression de la flèche  $w_0$  en fonction de  $\varphi_x$ . Soit :

$$\frac{dw_0}{dx} = - \left( \varphi_x + \frac{P}{2bhG_{xz}} \right), \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}. \quad (20.98)$$

Il est intéressant de noter que, d'après ce résultat, la pente de la déformée ne s'annule pas au centre de la poutre. En effet, puisque  $\varphi_x(L/2) = 0$ , elle vaut :

$$\frac{dw_0}{dx}(L/2) = - \frac{P}{2bhG_{xz}}. \quad (20.99)$$

Après substitution de  $\varphi_x$ , l'intégration de l'équation (20.98) conduit en tenant compte de  $w_0(0) = 0$  à :

$$w_0 = \frac{PL^2}{4bh^3E_x} x \left[ 4 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - 3 - 2S \right], \quad (20.100)$$

en introduisant le coefficient de cisaillement  $S$  défini par :

$$S = \frac{E_x}{G_{xz}} \left( \frac{h}{L} \right)^2 = 12 \frac{F_{55}^*}{D_{11}^*} \left( \frac{h}{L} \right)^2. \quad (20.101)$$

L'effet de la déformation en cisaillement transverse dépend donc du rapport d'élancement  $L/h$  de la poutre, et du rapport  $E_x/G_{xz}$  des modules de la poutre.

La flèche au centre est déterminée à partir de (20.100) et s'écrit en valeur absolue :

$$w_c = \frac{PL^3}{4bh^3E_x} (1 + S), \quad (20.102)$$

ou

$$w_c = \frac{PL^3}{48b} D_{11}^* \left( 1 + 12 \frac{F_{55}^*}{D_{11}^*} \frac{1}{L^2} \right). \quad (20.103)$$

Cette dernière expression montre qu'il est possible de déterminer les coefficients  $D_{11}^*$  et  $F_{55}^*$  à partir des mesures de  $w_c/P$  pour deux valeurs différentes de la distance  $L$  entre les appuis.

Les expressions (20.101) et (20.102) montrent que la flèche peut s'écrire sous l'une des deux formes :

$$w_c(S) = (1 + S) w_c(0), \quad (20.104)$$

$$w_c(S) = \left[ 1 + \frac{E_x}{G_{xz}} \left( \frac{h}{L} \right)^2 \right] w_c(0), \quad (20.105)$$

avec

$$\frac{E_x}{G_{xz}} = \frac{12}{h^2} \frac{F_{55}^*}{D_{11}^*}, \quad (20.106)$$

où  $w_c(S)$  est la flèche obtenue en tenant compte de l'effet de la déformation en cisaillement, alors que  $w_c(0)$  est la flèche en l'absence de cisaillement transverse donnée par (20.37). Négliger le cisaillement conduit donc à sous-estimer la flèche. Comme exemple, nous considérons le cas d'un stratifié symétrique  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , constitué de trois couches unidirectionnelles de même épaisseur. Les coefficients de rigidité en flexion sont, d'après le tableau 15.2 :

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{1}{8} \left( 7 + \frac{E_T}{E_L} \right) \frac{Q_{11} h^3}{12}, & D_{11} &= \frac{Q_{12} h^3}{12}, & D_{16} &= 0, \\ D_{22} &= \frac{1}{8} \left( 1 + 7 \frac{E_T}{E_L} \right) \frac{Q_{11} h^3}{12}, & D_{26} &= 0, & D_{66} &= \frac{G_{LT} h^3}{12}. \end{aligned} \quad (20.107)$$

La relation (20.72) conduit à :

$$F_{44} = F_{55} = \frac{h}{2} (G_{LT} + G_{TT'}), \quad F_{45} = 0. \quad (20.108)$$

D'après les relations (20.4), nous avons dans le cas présent :

$$D_{11}^* = \frac{D_{22}}{D_{11} D_{22} - D_{12}^2}. \quad (20.109)$$

En combinant les expressions (20.107) et (20.109), nous obtenons :

$$D_{11}^* = \frac{1}{\frac{64\nu_{LT}^2 \left(\frac{E_T}{E_L}\right)^2}{1 - \left(\frac{E_T}{E_L}\right)\left(1 + 7\frac{E_T}{E_L}\right)} \frac{1}{8} \left(7 + \frac{E_T}{E_L}\right)} \frac{12}{E_L h^3}. \quad (20.110)$$

Avec les valeurs usuelles des modules, nous avons :

$$D_{11}^* \approx \frac{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}{\frac{1}{8} \left(7 + \frac{E_T}{E_L}\right)} \frac{12}{E_L h^3}. \quad (20.111)$$

En remarquant que  $F_{55}^* = 1/F_{55}$ , nous obtenons en reportant les expressions de  $D_{11}^*$  et  $F_{55}^*$  dans l'expression (20.106) de  $E_x/G_{xz}$  :

$$\frac{E_x}{G_{xz}} = \left[ 1 - \frac{64\nu_{LT}^2 \left(\frac{E_T}{E_L}\right)^2}{\left(7 + \frac{E_T}{E_L}\right)\left(1 + 7\frac{E_T}{E_L}\right)} \right] \frac{\frac{1}{8} \left(7 + \frac{E_T}{E_L}\right)}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} \frac{E_L}{\frac{1}{2} (G_{LT} + G_{TT'})}, \quad (20.112)$$

avec

$$\frac{E_x}{G_{xz}} \approx \frac{\frac{1}{8} \left( 7 + \frac{E_T}{E_L} \right)}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} \frac{E_L}{\frac{1}{2} (G_{LT} + G_{TT'})}. \quad (20.113)$$

Dans le cas d'un stratifié composé de couches unidirectionnelles de fibres de verre, ayant pour modules :

$$\begin{aligned} E_L &= 45 \text{ GPa}, & E_T &= 10 \text{ GPa}, & G_{LT} &= 4,5 \text{ GPa}, \\ \nu_{LT} &= 0,30, & G_{TT'} &= 4 \text{ GPa}. \end{aligned} \quad (20.114)$$

nous obtenons :

$$\frac{E_x}{G_{xz}} = 8,55. \quad (20.115)$$

Dans le cas d'un stratifié constitué de couches unidirectionnelles de fibres de carbone, ayant pour modules :

$$\begin{aligned} E_L &= 230 \text{ GPa}, & E_T &= 14 \text{ GPa}, & G_{LT} &= 5 \text{ GPa}, \\ \nu_{LT} &= 0,30, & G_{TT'} &= 4 \text{ GPa}. \end{aligned} \quad (20.116)$$

nous obtenons :

$$\frac{E_x}{G_{xz}} = 44,6. \quad (20.117)$$

La variation de  $w_c(S)/w_c(0)$  en fonction du rapport d'élancement  $L/h$  est reportée sur la figure 20.9 pour les deux valeurs (20.115) et (20.117) du rapport  $E_x/G_{xz}$ .

### 20.3.3 Flexion 4-points

Dans le cas d'une poutre en flexion 4-points (figure 20.8), le moment de flexion est donné par les relations (20.48) et (20.49). En reportant ces expressions dans la relation (20.91), nous obtenons :

$$\varphi_x = \varphi_1 = -\frac{P}{4E_x I} x^2 + c_1, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{4}, \quad (20.118)$$

$$\varphi_x = \varphi_2 = -\frac{P}{8E_x I} x + c_2, \quad \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}. \quad (20.119)$$

Comme dans le cas de la flexion 3-points, la symétrie du chargement implique :

$$\varphi_2(L/2) = 0. \quad (20.120)$$

Cette condition introduite dans (20.119) conduit à :

$$\varphi_2 = \frac{PL^2}{16E_x I} \left( 1 - 2 \frac{x}{L} \right). \quad (20.121)$$

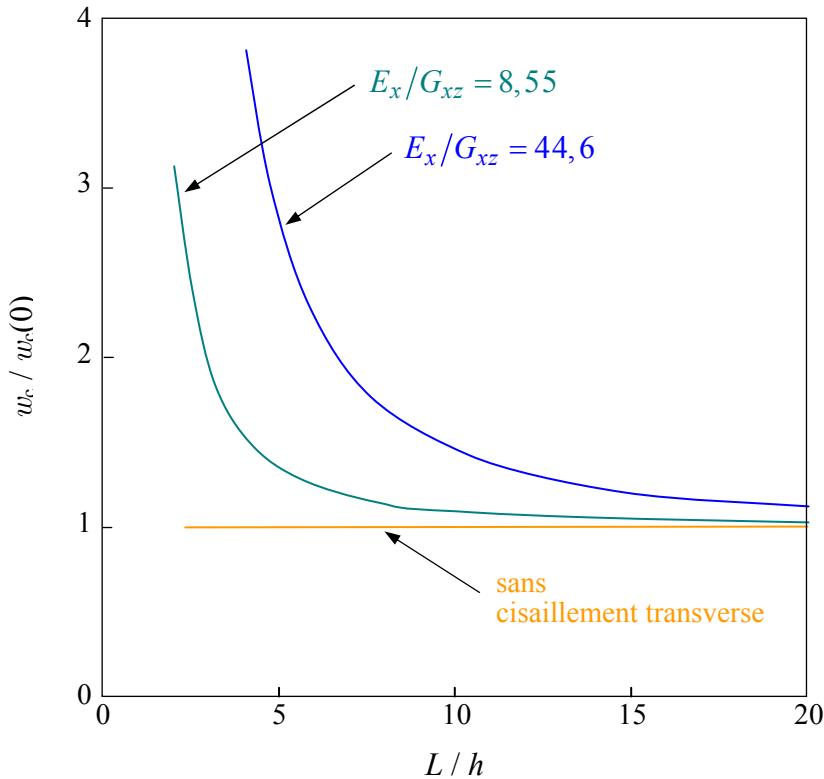


FIGURE 20.9. Variation de la flèche en fonction du rapport d'élancement, dans une flexion 3-points.

La continuité des déplacements pour  $x = L/4$  impose que :

$$\varphi_1(L/4) = \varphi_2(L/4). \quad (20.122)$$

La combinaison des relations (20.118), (20.121) et (20.122) conduit à :

$$\varphi_1 = \frac{PL^2}{64E_x I} \left[ 3 - 16 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right]. \quad (20.123)$$

Compte tenu des relations (20.48) et (20.49), l'expression (20.93) s'écrit :

$$\frac{dw_0}{dx} = \frac{dw_1}{dx} = - \left( \varphi_1 + \frac{P}{2bhG_{xz}} \right), \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{4}, \quad (20.124)$$

$$\frac{dw_0}{dx} = \frac{dw_2}{dx} = -\varphi_2, \quad \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}. \quad (20.125)$$

L'intégration de la relation (20.124), après substitution de l'équation (20.123) et en tenant compte de la condition :  $w_1(0) = 0$ , conduit à :

$$w_1 = \frac{PL^2}{192E_x I} x \left[ 16 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - 9 - 8S \right], \quad (20.126)$$

où  $S$  a été introduit en (20.101). De même, les équations (20.121) et (20.125) conduisent à :

$$w_2 = -\frac{PL^2}{16E_x I} x \left(1 - \frac{x}{L}\right) + c_3. \quad (20.127)$$

La constante  $c_3$  est déterminée en exprimant la continuité de la flèche en  $L/4$  :

$$w_1(L/4) = w_2(L/4). \quad (20.128)$$

Nous obtenons alors :

$$w_2 = \frac{PL^3}{768E_x I} \left[ 1 - 48 \frac{x}{L} + 48 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - 8S \right]. \quad (20.129)$$

La flèche au centre est déterminée à partir de l'expression précédente, et s'écrit :

$$w_c = \frac{PL^3}{768E_x I} (11 + 8S), \quad (20.130)$$

ou

$$w_c = \frac{PL^3}{768b} D_{11}^* \left( 11 + 8 \frac{F_{55}^*}{D_{11}^*} \frac{1}{L^2} \right). \quad (20.131)$$

Cette dernière expression montre que, comme dans le cas de la flexion 3-points, il est possible de déterminer les coefficients  $D_{11}^*$  et  $F_{55}^*$  à partir des mesures de  $w_c/P$ , effectuées pour deux valeurs différentes de la distance  $L$  entre les appuis. L'expression (20.130) montre que :

$$w_c(S) = \left( 1 + \frac{8}{11} S \right) w_c(0), \quad (20.132)$$

ou

$$w_c(S) = \left[ 1 + \frac{8}{11} \frac{E_x}{G_{xz}} \left( \frac{h}{L} \right)^2 \right] w_c(0), \quad (20.133)$$

où  $w_c(0)$  est la flèche (20.58) en l'absence de cisaillement. La relation (20.132) montre que la prise en compte de la déformation en cisaillement accroît la flèche au centre de la poutre, dans une mesure moindre toutefois que dans le cas d'une flexion 3-points. La variation de  $w_c(S)/w_c(0)$  en fonction du rapport d'élancement  $L/h$  est reportée sur la figure 20.10, pour les mêmes valeurs du rapport  $E_x/G_{xz}$  considérées sur la figure 20.9.

## 20.4 FLEXION DES POUTRES SANDWICHES

### 20.4.1 Expressions générales

La similitude de comportement entre les plaques sandwiches symétriques et les stratifiés symétriques avec cisaillement transverse permet de transposer les

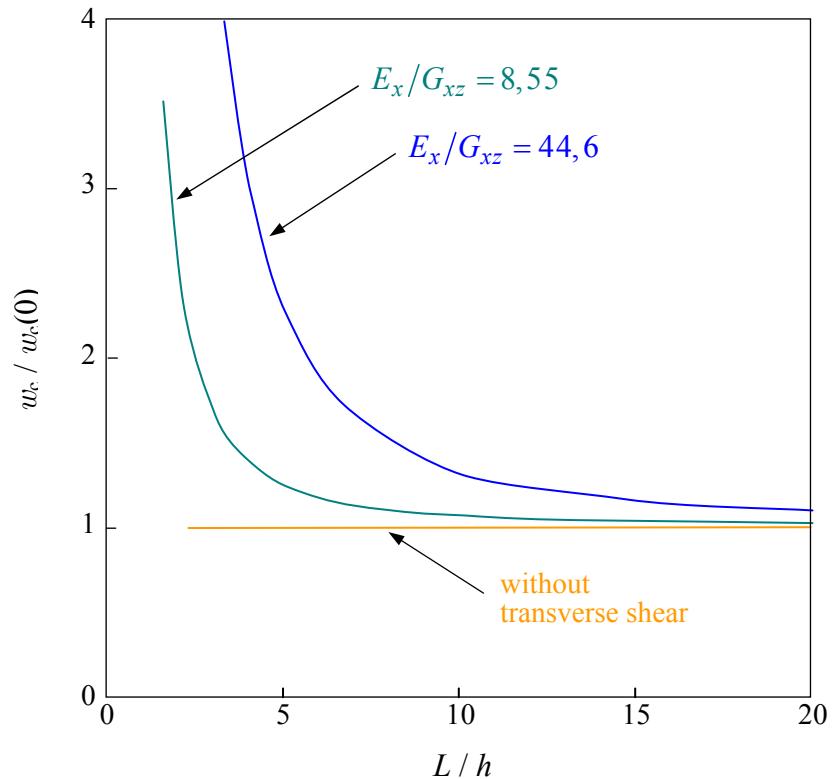


FIGURE 20.10. Variation de la flèche en fonction du rapport d'élancement, dans une flexion 4-points.

résultats obtenus aux paragraphes 20.3.1 à 20.3.3 à la flexion de poutres en matériaux sandwichs. En effet, dans le cas d'une flexion pure, l'équation constitutive (18.21) des matériaux sandwichs se réduit à :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (20.134)$$

et

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^a \\ \gamma_{xz}^a \end{bmatrix}, \quad (20.135)$$

avec

$$\begin{aligned}\kappa_x &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, & \kappa_y &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, & \kappa_{xy} &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}. \\ \gamma_{yz}^a &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y, & \gamma_{xz}^a &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x.\end{aligned}\quad (20.136)$$

Les expressions générales des coefficients  $D_{ij}$  et  $F_{ij}$  sont données par les relations (18.22) à (18.27). La comparaison des expressions (20.134), (20.135) aux relations (20.69), (20.70) confirme la possibilité de transposer à la flexion des poutres sandwiches les résultats obtenus dans les paragraphes 20.3.1 à 20.3.3 pour les fonctions  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  et  $w_0$ . Outre les différences entre les expressions des coefficients  $D_{ij}$  et  $F_{ij}$ , la différence essentielle entre les deux types de matériaux se situe au niveau de la distribution des contraintes.

Pour illustrer cet aspect, nous reprenons le sandwich symétrique considéré au paragraphe 19.6 : deux peaux identiques dont les axes d'orthotropie sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$  de la poutre et d'une âme dont les axes principaux 1-2 sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$ . Les contraintes en membrane dans la couche  $k$  de la peau supérieure ou inférieure sont données par les relations (18.17), soit :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^k &= \pm Q_{11}^k \frac{h}{2} \frac{d\varphi_x}{dx}, \\ \sigma_{yy}^k &= \pm Q_{12}^k \frac{h}{2} \frac{d\varphi_x}{dx}, \\ \sigma_{xy}^k &= 0,\end{aligned}\quad (20.137)$$

le signe + étant associé à la peau supérieure et le signe - à la peau inférieure.

En appliquant ce résultat au cas de la flexion 3-points où la fonction  $\varphi_x$  est donnée par la relation (20.96), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^k &= \mp Q_{11}^k \frac{Ph}{4E_x I} x = \mp \frac{Ph}{4b} D_{11}^* Q_{11}^k x, \\ \sigma_{yy}^k &= \mp Q_{12}^k \frac{Ph}{4E_x I} x = \mp \frac{Ph}{4b} D_{11}^* Q_{12}^k x, \\ \sigma_{xy}^k &= 0.\end{aligned}\quad (20.138)$$

Les contraintes sont maximales pour  $x = L/2$ , en particulier la contrainte normale  $\sigma_{xx}^k$  s'écrit :

$$\sigma_{xx}^k = \mp \sigma_0 \frac{hh_t^2}{12} D_{11}^* Q_{11}^k, \quad (20.139)$$

où l'expression  $\sigma_0$  a été introduite en (20.43).

La contrainte de cisaillement transverse peut ensuite être obtenue à partir de l'équation d'équilibre (19.109), ce qui conduit à :

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} = \pm Q_{11}^k \frac{Ph}{4E_x I} = \pm \frac{Ph}{4b} D_{11}^* Q_{11}^k. \quad (20.140)$$

Soit en intégrant :

$$\sigma_{xz}^k = \pm Q_{11}^k D_{11}^* \frac{Ph}{4b} (z + c_k), \quad (20.141)$$

ou

$$\sigma_{xz}^k = \mp \tau_0 Q_{11}^k D_{11}^* \frac{hh_t^2}{6} \left( 2 \frac{z}{h_t} + d_k \right), \quad (20.142)$$

en introduisant la contrainte  $\tau_0$  définie en (20.47). Les constantes  $c_k$  ou  $d_k$  sont déterminées en annulant  $\sigma_{xz}$  sur les faces supérieure et inférieure, et en assurant la continuité de  $\sigma_{xz}$  entre chaque couche. La contrainte de cisaillement  $\sigma_{xz}^a$  constante dans l'âme peut être obtenue à partir de (20.141) ou (20.142) par continuité à l'interface peau-âme.

## 20.4.2 Comparaison entre la théorie des sandwiches et la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse

### 20.4.2.1 Coefficients de rigidité

De manière à comparer les résultats obtenus à l'aide de la théorie des sandwiches et la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse, nous étudions le cas de la flexion 3-points d'une poutre sandwich à peaux épaisse, constituée de deux peaux à renfort mat d'épaisseur  $h_1$  et d'une âme isotrope d'épaisseur  $h$ .

Les peaux sont caractérisées par leurs modules (15.81) et (15.82) :

$$\begin{aligned} E_{Lm}, \quad & \nu_{LTm}, \quad E_{Tm} = E_{Lm}, \\ G_{LTm} = \frac{E_{Lm}}{2(1+\nu_{LTm})}, \quad & G_{TT'm} = G_m, \end{aligned} \quad (20.143)$$

et la matrice de rigidité réduite des peaux s'écrit :

$$\left[ Q_{ij}^m \right] = Q_{11}^m \begin{bmatrix} 1 & \nu_{LTm} & 0 \\ \nu_{LTm} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_{LTm}}{2} \end{bmatrix}, \quad (20.144)$$

avec

$$Q_{11}^m = \frac{E_{Lm}}{1-\nu_{LTm}^2}. \quad (20.145)$$

L'âme isotrope est caractérisée par son module d'Young  $E_a$  et son coefficient de Poisson  $\nu_a$ , le module de cisaillement s'en déduisant par la relation :

$$G_a = \frac{E_a}{2(1+\nu_a)}. \quad (20.146)$$

La matrice de rigidité réduite de l'âme s'écrit :

$$\begin{bmatrix} Q_{ij}^a \end{bmatrix} = Q_{l1}^a \begin{bmatrix} 1 & \nu_a & 0 \\ \nu_a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_a}{2} \end{bmatrix}, \quad (20.147)$$

avec

$$Q_{l1}^a = \frac{E_a}{1-\nu_a^2}. \quad (20.148)$$

En supposant l'âme beaucoup moins rigide que les peaux, les coefficients de rigidité en flexion de la théorie avec cisaillement transverse et de la théorie des sandwiches sont reliés par l'expression (18.43), soit :

$$D_{ij} \approx \alpha_D D_{ij}^S, \quad (20.149)$$

avec

$$\alpha_D = 1 + \frac{h_l}{h} \frac{h + \frac{4}{3}h_l}{h + h_l}. \quad (20.150)$$

Nous en déduisons que la relation entre les coefficients inverses des deux théories s'écrit d'après (20.4) :

$$D_{ij}^* = \frac{1}{\alpha_D} D_{ij}^{*S}. \quad (20.151)$$

Les coefficients  $D_{ij}^S$  sont déterminés à partir des relations (18.26) et (18.30), soit :

$$D_{ij}^S = h C_{ij}^2, \quad (20.152)$$

avec

$$C_{ij}^2 = \int_{h/2}^{h/2+h_l} Q_{ij}^m z dz = \frac{1}{2} Q_{ij}^m (h + h_l) h_l. \quad (20.153)$$

D'où

$$D_{ij}^S = \frac{1}{2} Q_{ij}^m (h + h_l) h_l. \quad (20.154)$$

La matrice de rigidité en flexion s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} D_{ij}^S \end{bmatrix} = D_{l1}^S \begin{bmatrix} 1 & \nu_{LTm} & 0 \\ \nu_{LTm} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_{LTm}}{2} \end{bmatrix}, \quad (20.155)$$

avec

$$D_{11}^S = \frac{1}{2} Q_{ij}^m (h + h_l) h h_l = \frac{1}{2} \frac{E_{Lm}}{1 - \nu_{LTm}^2} (h + h_l) h h_l. \quad (20.156)$$

Les coefficients  $D_{ij}^{*S}$  de la matrice inverse sont donnés par les relations (20.4), soit ici :

$$\begin{bmatrix} D_{ij}^{*S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^{*S} & D_{12}^{*S} & 0 \\ D_{12}^{*S} & D_{22}^{*S} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^{*S} \end{bmatrix}, \quad (20.157)$$

avec

$$D_{11}^{*S} = \frac{2}{(h + h_l) h h_l E_{Lm}}, \quad (20.158)$$

$$D_{22}^{*S} = D_{11}^{*S}, \quad D_{12}^{*S} = -\nu_{LTm} D_{11}^{*S}, \quad D_{66}^{*S} = 2(1 + \nu_{LTm}) D_{11}^{*S}. \quad (20.159)$$

D'après les relations (18.33) et (18.44), les coefficients de cisaillement s'expriment suivant :

$$F_{ij} = F_{ij}^S \left( 1 + 2 \frac{h_l}{h} \frac{G_m}{G_a} \right), \quad (20.160)$$

avec

$$F_{44}^S = F_{55}^S = h G_a, \quad F_{45}^S = 0. \quad (20.161)$$

### 20.4.2.2 Flèche

L'introduction des expressions (20.158) et (20.161) dans la relation (20.103) conduit à une expression de la flèche  $w_c$  au centre donnée par la théorie des sandwiches de la forme :

$$w_c^S = \frac{PL^3}{24b(h + h_l) h h_l E_{Lm}} \left[ 1 + 6 \frac{E_{Lm}}{G_a} \frac{(h + h_l) h_l}{L^2} \right]. \quad (20.162)$$

De même, en reportant les coefficients  $D_{ij}^*$  (20.151) dans l'expression (20.103), la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse conduit à l'équation suivante de la flèche au centre :

$$w_c = \frac{1}{\alpha_D} \frac{PL^3}{24b(h + h_l) h h_l E_{Lm}} \left[ 1 + \alpha_D \frac{6(h + h_l) h_l}{L^2} \frac{E_{Lm}}{G_a \left( 1 + 2 \frac{h_l}{h} \frac{G_m}{G_a} \right)} \right]. \quad (20.163)$$

Dans le cas de grandes distances entre appuis, les deux expressions sont liées par :

$$w_c = \frac{1}{\alpha_D} w_c^S. \quad (20.164)$$

La théorie des poutres sandwiches augmente la flèche déterminée par la théorie

des stratifiés avec cisaillement transverse. Par exemple dans le cas où :

$$h_l = 3 \text{ mm}, \quad h = 10 \text{ mm},$$

nous avons  $\alpha_D = 1,323$ , soit un écart supérieur à 30 % entre les deux analyses.

### 20.4.2.3 Distribution des contraintes

Dans le cadre de la théorie des stratifiés (avec ou sans cisaillement transverse), les contraintes  $\sigma_{xx}$  dans les peaux pour  $x = L/2$  sont données d'après (20.44) et (20.26) par :

$$\sigma_{xx}^m = -2a_{xx}^m \sigma_0 \frac{z}{h_t}, \quad (20.165)$$

avec :

$$h_t = h + 2h_l, \quad (20.166)$$

et

$$a_{xx}^m = (Q_{l1}^m D_{l1}^* + Q_{l2}^m D_{l2}^*) \frac{h_l^3}{12}. \quad (20.167)$$

Soit, d'après les relations (20.145), (20.151), (20.158) et (20.159) :

$$a_{xx}^m = \frac{1}{\alpha_D} \frac{h_l^3}{6(h + h_l)hh_l}. \quad (20.168)$$

Les contraintes  $\sigma_{xx}$  dans l'âme sont de même données par :

$$\sigma_{xx}^a = -2a_{xx}^a \sigma_0 \frac{z}{h_t}, \quad (20.169)$$

avec :

$$a_{xx}^a = \frac{1 - \nu_a \nu_{LTm}}{1 - \nu_a^2} \frac{E_a}{E_{Lm}} a_{xx}^m. \quad (20.170)$$

La variation des contraintes est donnée sur la figure 20.11 dans le cas où :

$$\begin{aligned} h_l &= 3 \text{ mm}, & h &= 10 \text{ mm}, \\ \nu_a &= 0,40, & \nu_{LTm} &= 0,30, & \frac{E_{Lm}}{E_a} &= 30. \end{aligned} \quad (20.171)$$

Pour comparaison, la variation de la contrainte (20.42) dans le cas d'une poutre homogène est également reportée sur la figure 20.11.

La répartition des contraintes de cisaillement toujours dans le cadre de la théorie des stratifiés est donnée par l'expression (20.46) :

$$\sigma_{xz}^k = -a_{xz}^k \tau_0 \left[ 4 \left( \frac{z}{h_t} \right)^2 + d_k \right], \quad (20.172)$$

où les constantes  $d_k$  sont exprimées de manière à assurer la nullité des contraintes

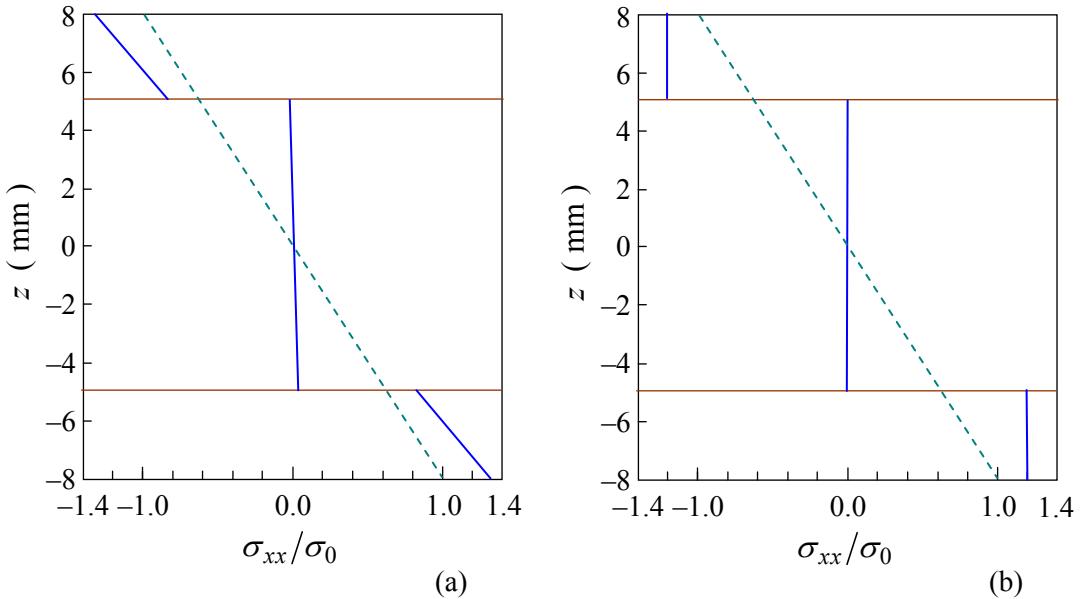


FIGURE 20.11. Répartition des contraintes  $\sigma_{xx}$  dans l'épaisseur du sandwich, (a) dans le cas de la théorie des stratifiés et (b) dans le cas de la théorie des sandwiches.

sur les faces supérieure et inférieure, et la continuité à l'interface peau-âme. D'où :

$$\sigma_{xz}^m = a_{xz}^m \tau_0 \left[ 1 - 4 \left( \frac{z}{h_t} \right)^2 \right], \quad (20.173)$$

$$\sigma_{xz}^a = \sigma_{xz}^m (h/2) + a_{xz}^a \tau_0 \left( \frac{h}{h_t} \right)^2 \left[ 1 - 4 \left( \frac{z}{h_t} \right)^2 \right]. \quad (20.174)$$

La variation de la contrainte de cisaillement est donnée sur la figure 20.12 avec les valeurs numériques (20.171). Pour comparaison, la variation de la contrainte de cisaillement (20.31) d'une poutre homogène est également tracée.

Dans le cadre de la théorie des poutres sandwiches, les contraintes  $\sigma_{xx}$  dans les peaux pour  $x = L/2$  sont données d'après (20.139) par :

$$\sigma_{xx}^m = \mp \sigma_0 \frac{h h_t^2}{12} D_{11}^{*S} Q_{11}^m. \quad (20.175)$$

Soit, d'après les relations (20.145) et (20.156) :

$$\sigma_{xx}^m = \mp \sigma_0 \frac{h_t^2}{6(h+h_l)h_l} \frac{1}{1-\nu_{LTm}^2}. \quad (20.176)$$

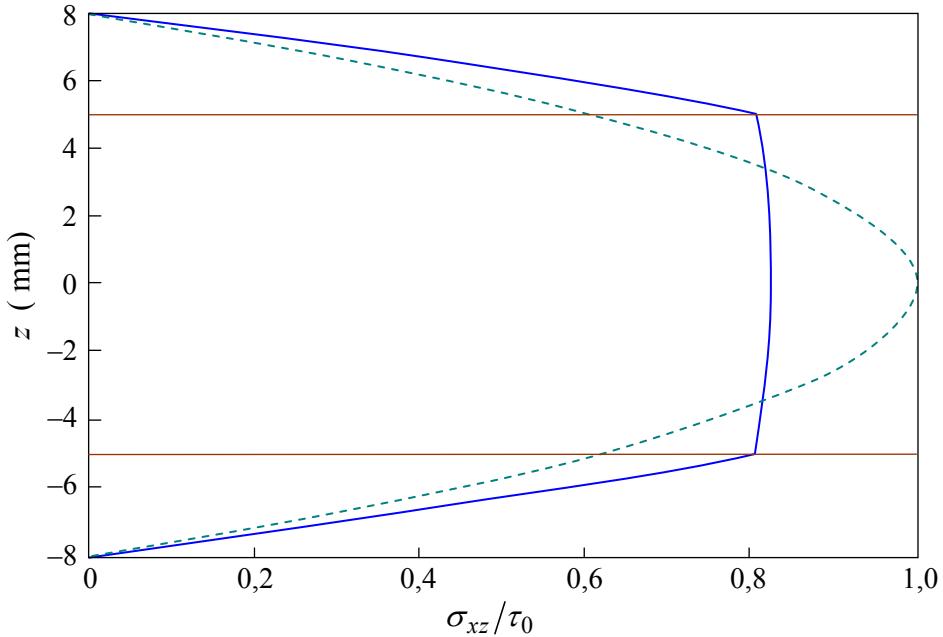


FIGURE 20.12. Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du sandwich, dans le cas de la théorie des stratifiés.

La répartition des contraintes est reportée sur la figure 20.11.2. Les contraintes sont constantes dans les peaux et nulles dans l'âme.

Les contraintes de cisaillement pour  $x = L/2$  sont données par la relation (20.142) qui conduit à :

$$\sigma_{xz}^m = \tau_0 \frac{1}{1 - \nu_{LTm}^2} \frac{h_t^2}{3(h + h_l)h_l} \left( 1 + 2 \frac{z}{h_t} \right), \quad (20.177)$$

dans la peau inférieure. La contrainte de cisaillement dans l'âme est constante et égale à la contrainte à l'interface peau-âme, soit :

$$\sigma_{xz}^a = \frac{2}{3} \tau_0 \frac{1}{1 - \nu_{LTm}^2} \frac{h_t}{h + h_l}. \quad (20.178)$$

La variation de la contrainte de cisaillement est alors donnée sur la figure 20.13 avec les valeurs numériques (20.171).

## EXERCICES

**20.1** Une poutre constituée d'un matériau stratifié symétrique est soumise à une charge linéaire transverse uniforme  $p_0$  :  $q(x) = -p_0/b$ .

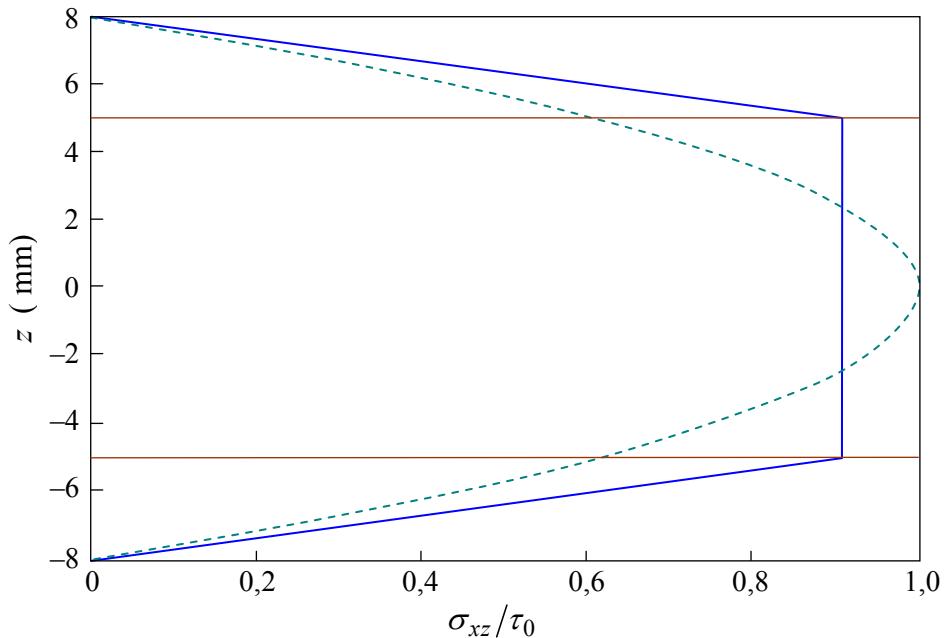


FIGURE 20.13. Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du sandwich, dans le cas de la théorie des sandwiches.

20.1.1 Exprimer la flèche en un point quelconque de la poutre, la flèche au centre de la poutre, le moment de flexion, les contraintes en membrane et de cisaillement dans la couche  $k$ .

Les expressions font intervenir quatre constantes d'intégration dépendant des conditions aux deux extrémités.

20.1.2 Appliquer les résultats précédents au cas d'une poutre encastrée aux deux extrémités.

Explicitier les résultats dans le cas d'une poutre constituée d'un stratifié symétrique comportant cinq couches.

Les couches 1, 3, 5 sont des couches à renfort mat de caractéristiques :

$$E_L = E_T = 8,5 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,30, \quad G_{LT} = 3,2 \text{ GPa}.$$

Les couches 1 et 5 ont une épaisseur égale à 1 mm. La couche 3 a une épaisseur double égale à 2 mm.

Les couches 2 et 4 sont des couches à renfort unidirectionnel d'épaisseurs égales à 1,6 mm et de caractéristiques :

$$E_L = 46 \text{ GPa}, \quad E_T = 10 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,30, \quad G_{LT} = 5,2 \text{ GPa}.$$

Reprendre cette question lorsque les couches précédentes sont modifiées de la manière qui suit.

Le stratifié comporte trois couches. Les couches 1 et 3 sont des couches doubles (épaisseurs égales à 2 mm) à renfort mat précédent. La couche 2 est une couche double (épaisseur égale à 3,2 mm) du renfort unidirectionnel précédent.

**20.1.3** Reprendre la question 20.1.2 dans le cas où la poutre a une extrémité encastrée (extrémité  $x = 0$ ) et une extrémité libre (extrémité  $x = L$ ).

**20.2** Reprendre le problème 20.1 dans le cas d'une poutre soumise à une charge linéique transverse variant de façon proportionnelle le long de sa longueur :  $p(0) = 0$  à l'extrémité  $x = 0$  et  $p(L) = -p_0$  à l'extrémité  $x = L$ .

**20.3** Le stratifié symétrique à cinq couches considéré précédemment constitue par moitié les peaux d'une poutre sandwich symétrique dont l'âme isotrope a une épaisseur de 30 mm et les caractéristiques mécaniques :

$$E_a = 80 \text{ MPa}, \quad G_a = 35 \text{ MPa}.$$

Reprendre l'exercice 20.1 dans le cas de cette poutre sandwich.

## CHAPITRE 21

# Flexion des Plaques Stratifiées Orthotropes

## 21.1 INTRODUCTION

L'analyse des plaques en matériaux stratifiés ou matériaux sandwiches présente divers degrés de complexité. La flexion cylindrique et la flexion des poutres (chapitres 19 et 20), ramenées à des analyses en une dimension, constituent les problèmes les plus faciles à analyser.

Dans le cas de l'étude des plaques en flexion, l'analyse la plus complexe est celle des stratifiés constitués d'un empilement quelconque, présentant des couplages membrane-flexion, membrane-torsion et flexion-torsion. Une première simplification de l'analyse de la flexion des plaques en stratifiés consiste en l'étude de stratifiés symétriques, pour lesquels il n'existe pas de couplage membrane-flexion/torsion : les termes  $B_{ij}$  sont nuls ( $B_{ij} = 0$ ). Une simplification supplémentaire est apportée dans le cas où il n'existe pas de couplage flexion-torsion : les termes  $D_{16}$  et  $D_{26}$  sont nuls ( $D_{16} = D_{26} = 0$ ). Les stratifiés symétriques ( $B_{ij} = 0$ ), pour lesquels il n'existe pas de couplage flexion-torsion ( $D_{16} = D_{26} = 0$ ) sont appelés *stratifiés orthotropes*. Ce type de stratifié est obtenu soit à partir d'une seule couche de matériau orthotrope, soit à partir d'un stratifié symétrique constitué de couches orthotropes dont les axes principaux coïncident avec les axes de référence du stratifié, cas des stratifiés croisés par exemple (chapitre 15).

Dans ce chapitre, nous nous intéressons ainsi à l'analyse de la flexion des plaques en stratifiés orthotropes.

## 21.2 PLAQUES RECTANGULAIRES EN APPUIS SIMPLES

### 21.2.1 Expressions générales

Nous considérons une plaque rectangulaire soumise à une charge transverse répartie :  $q = q(x, y)$  (figure 21.1). Dans le cas d'un stratifié orthotrope, les relations (16.7) à (16.9) se réduisent à :

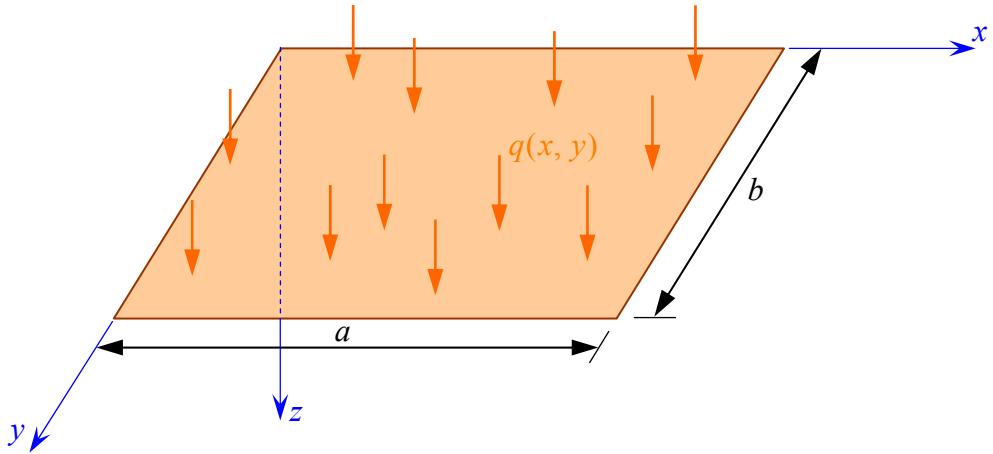


FIGURE 21.1. Plaque rectangulaire soumise à une charge répartie.

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} = 0. \quad (21.1)$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0. \quad (21.2)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = q. \quad (21.3)$$

Pour une plaque en appuis simples sur les quatre côtés, les conditions aux frontières s'écrivent :

$$\text{— appuis } x = 0 \text{ et } x = a : \quad w_0 = 0, \quad M_x = 0, \quad (21.4)$$

$$\text{— appuis } y = 0 \text{ et } y = b : \quad w_0 = 0, \quad M_y = 0. \quad (21.5)$$

D'après l'équation constitutive (14.29), les conditions sur les moments de flexion aux appuis s'écrivent :

$$\text{— appuis } x = 0 \text{ et } x = a : \quad M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0, \quad (21.6)$$

$$\text{— appuis } y = 0 \text{ et } y = b : \quad M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0. \quad (21.7)$$

Les appuis étant simples, il n'y a pas de conditions imposées sur  $u_0$  et  $v_0$ .

Dans le cas général, la charge transverse peut être développée suivant une double série de Fourier :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \quad (21.8)$$

où les coefficients  $q_{mn}$  sont exprimés par :

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b q(x, y) \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} dx dy. \quad (21.9)$$

Les solutions du problème de flexion de la plaque peuvent alors être recherchées en écrivant les déplacements sous forme de séries doubles de Fourier, satisfaisant aux conditions aux frontières. Par exemple :

$$u_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b}, \quad (21.10)$$

$$v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b}, \quad (21.11)$$

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (21.12)$$

Les expressions de  $u_0$  et  $v_0$  reportées dans les relations (21.1) et (21.2) impliquent que  $A_{mn} = 0$  et  $B_{mn} = 0$ . Les déplacements en membrane sont identiquement nuls :  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ . Ce résultat est un résultat général du cas des stratifiés ne comportant pas de couplage membrane-flexion et chargés transversalement.

L'expression du coefficient  $C_{mn}$  est obtenue en reportant l'expression (21.12) de  $w_0$  dans la relation (21.3) et en exprimant la charge  $q(x, y)$  à l'aide de (21.8). Nous obtenons :

$$C_{mn} = \frac{\frac{q_{mn}}{\pi^4}}{D_{11} \left( \frac{m}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{m}{a} \right)^2 \left( \frac{n}{b} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{n}{b} \right)^4}. \quad (21.13)$$

La flèche au point  $(x, y)$  s'écrit donc :

$$w_0(x, y) = \frac{a^4}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{D_{mn}} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \quad (21.14)$$

où

$$D_{mn} = D_{11}m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2n^2R^2 + D_{22}n^4R^4, \quad (21.15)$$

en introduisant le rapport longueur sur largeur de la plaque :  $R = a/b$ .

Les expressions des moments sont ensuite obtenues en reportant l'équation (21.14) dans l'équation constitutive (14.29) :

$$M_x = \frac{a^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{D_{mn}} (m^2 D_{11} + n^2 R^2 D_{12}) \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \quad (21.16)$$

$$M_y = \frac{a^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{D_{mn}} (m^2 D_{12} + n^2 R^2 D_{22}) \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \quad (21.17)$$

$$M_{xy} = -2 \frac{a^2}{\pi^2} RD_{66} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \frac{q_{mn}}{D_{mn}} \cos m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b}. \quad (21.18)$$

Les contraintes en membrane sont déduites des expressions (14.20), soit :

$$\sigma_{xx}^k = \frac{a^2}{\pi^2} z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{D_{mn}} (m^2 Q_{11}^k + n^2 R^2 Q_{12}^k) \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \quad (21.19)$$

$$\sigma_{yy}^k = \frac{a^2}{\pi^2} z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{D_{mn}} (m^2 Q_{12}^k + n^2 R^2 Q_{22}^k) \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \quad (21.20)$$

$$\sigma_{xy}^k = -2 \frac{a^2}{\pi^2} R Q_{66}^k z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \frac{q_{mn}}{D_{mn}} \cos m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b}. \quad (21.21)$$

Les contraintes en cisaillement transverse  $\sigma_{xz}^k$  et  $\sigma_{yz}^k$  peuvent être déterminées ensuite en reportant les équations (21.19) à (21.21) dans les relations (8.20), et en intégrant suivant  $z$ . Les constantes d'intégration sont déterminées en exprimant la continuité des contraintes de cisaillement entre les couches, et leur nullité sur la face inférieure (ou supérieure).

Les expressions (21.14) à (21.18) montrent que pour un stratifié où  $D_{22} = D_{11}$ , le champ des déplacements et le champ des moments sont inchangés, lorsque  $R$  est changé en  $1/R$ , donc lorsque longueur et largeur sont interverties.

## 21.2.2 Cas d'une charge uniforme

### 21.2.2.1 Expressions littérales

Dans le cas d'une charge uniforme :  $q(x, y) = \text{cte} = q_0$ , l'expression (21.9) conduit à :

$$q_{mn} = \begin{cases} \frac{16q_0}{mn\pi^2}, & \text{si } m \text{ et } n \text{ sont impairs,} \\ 0, & \text{si } m \text{ et } n \text{ sont pairs.} \end{cases}$$

Ces deux expressions peuvent être regroupées suivant :

$$q_{2m-1, 2n-1} = \frac{16q_0}{\pi^2} \frac{1}{(2m-1)(2n-1)}, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (21.22)$$

La flèche (21.14) en un point de coordonnées  $(x, y)$  de la plaque s'écrit alors :

$$w_0(x, y) = \frac{16a^4 q_0}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)\pi \frac{x}{a} \sin(2n-1)\pi \frac{y}{b}}{(2m-1)(2n-1)D_{2m-1, 2n-1}}, \quad (21.23)$$

ou

$$w_0(x, y) = \frac{16a^4 q_0}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin(2m-1)\pi \frac{x}{a} \sin(2n-1)\pi \frac{y}{b}, \quad (21.24)$$

avec

$$c_{mn} = \frac{1}{(2m-1)(2n-1)D_{2m-1, 2n-1}}. \quad (21.25)$$

Les contraintes en membrane dans la couche  $k$  sont déduites de la relation (14.20) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = z \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad (21.26)$$

avec

$$-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{16a^2 q_0}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (2m-1)^2 c_{mn} \sin(2m-1)\pi \frac{x}{a} \sin(2n-1)\pi \frac{y}{b},$$

$$-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{16a^2 R^2 q_0}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^2 c_{mn} \sin(2m-1)\pi \frac{x}{a} \sin(2n-1)\pi \frac{y}{b},$$

$$-2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = -\frac{32a^2 R q_0}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (2m-1)(2n-1) c_{mn} \cos(2m-1)\pi \frac{x}{a} \cos(2n-1)\pi \frac{y}{b}$$

La flèche est maximale au centre de la plaque :  $x = a/2$ ,  $y = b/2$ . Les numérateurs de la relation (21.23) s'écrivent alors :

$$\sin(2m-1)\frac{\pi}{2} \sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{m+n-2},$$

et la flèche maximale s'écrit sous la forme :

$$w_{0\max} = \frac{16a^4 q_0}{\pi^6} \alpha, \quad (21.27)$$

en introduisant le facteur :

$$\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn},$$

$$\alpha_{mn} = (-1)^{m+n+2} c_{mn} = \frac{(-1)^{m+n+2}}{(2m-1)(2n-1) D_{2m-1, 2n-1}}.$$
(21.28)

D'après la relation (21.26), les contraintes au centre de la plaque s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = z \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \frac{16a^2 q_0}{\pi^4} \begin{bmatrix} \beta \\ R^2 \gamma \\ 0 \end{bmatrix},$$
(21.29)

avec

$$\beta = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{mn}, \quad \beta_{mn} = (2m-1)^2 \alpha_{mn},$$
(21.30)

$$\gamma = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{mn}, \quad \gamma_{mn} = (2n-1)^2 \alpha_{mn}.$$
(21.31)

D'où

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= \frac{16a^2 q_0}{\pi^4} (\beta Q_{11}^k + R^2 \gamma Q_{12}^k) z, \\ \sigma_{yy}^k &= \frac{16a^2 q_0}{\pi^4} (\beta Q_{12}^k + R^2 \gamma Q_{22}^k) z, \\ \sigma_{xy}^k &= 0, \end{aligned}$$
(21.32)

ou encore

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= A_{xx}^k z, \\ \sigma_{yy}^k &= A_{yy}^k z, \\ \sigma_{xy}^k &= 0, \end{aligned}$$
(21.33)

avec

$$A_{xx}^k = \frac{16a^2 q_0}{\pi^4} (\beta Q_{11}^k + R^2 \gamma Q_{12}^k),$$
(21.34)

$$A_{yy}^k = \frac{16a^2 q_0}{\pi^4} (\beta Q_{12}^k + R^2 \gamma Q_{22}^k).$$
(21.35)

### 21.2.2.2 Exemple

Nous examinons le cas d'une plaque rectangulaire de longueur  $a = 2,8$  m et de largeur  $b = 0,7$  m, soumise à une pression uniforme de 500 Pa (figure 21.2a). La plaque est constituée d'un stratifié symétrique comportant cinq couches disposées

selon la figure 21.2b. Les couches 1, 3, 5 sont des couches à renfort mat de masse surfacique  $450 \text{ g/m}^2$  dont les caractéristiques ont été déterminées en (15.84) :

$$E_L = E_T = 7,72 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,33, \quad G_{LT} = 2,91 \text{ GPa}. \quad (21.36)$$

La couche 3 est une couche double. Les couches 2, 4 sont des couches doubles à renfort tissu de masse surfacique  $500 \text{ g/m}^2$ , dont les caractéristiques ont été déterminées en (15.74) :

$$E_L = E_T = 13,8 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,12, \quad G_{LT} = 1,87 \text{ GPa}. \quad (21.37)$$

Les coefficients de rigidité réduite sont déduits des relations (11.52) :

— pour les couches mat 1, 3, 5 :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= 8,66 \text{ GPa}, & Q_{12} &= 2,86 \text{ GPa}, \\ Q_{22} &= Q_{11} = 8,66 \text{ GPa}, & Q_{66} &= 2,91 \text{ GPa}, \end{aligned} \quad (21.38)$$

— pour les couches tissu 2, 4 :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= 14,00 \text{ GPa}, & Q_{12} &= 1,68 \text{ GPa}, \\ Q_{22} &= Q_{11} = 14,00 \text{ GPa}, & Q_{66} &= 1,87 \text{ GPa}. \end{aligned} \quad (21.39)$$

Les coefficients de rigidité  $D_{ij}$  en flexion/torsion sont déduits de la relation (14.33). Soit :

$$\begin{aligned} D_{11} &= 272,64 \text{ Nm}, & D_{12} &= 64,834 \text{ Nm}, \\ D_{22} &= D_{11} = 272,64 \text{ Nm}, & D_{66} &= 67,358 \text{ Nm}. \end{aligned} \quad (21.40)$$

D'après (21.15), le coefficient  $D_{2m-1, 2n-1}$  s'écrit :

$$D_{2m-1, 2n-1} = 272,64(2m-1)^4 + 6385,64(2m-1)^2(2n-1)^2 + 69796,68(2n-1)^4, \quad (21.41)$$

La flèche maximale  $w_{0max}$  est ensuite déduite de l'expression (21.27). Les

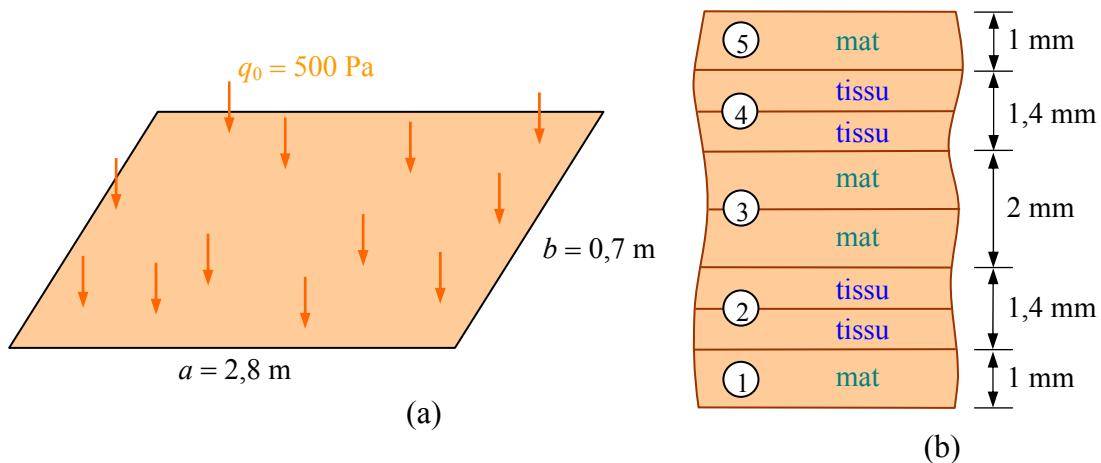


FIGURE 21.2. Plaque rectangulaire soumise à une pression uniforme.

TABLEAU 21.1. Valeur du coefficient  $\alpha$  en fonction de  $m$  et  $n$ .

$m$	$n$	$\alpha \times 10^{-5}$ (Pa $^{-1}$ )
1	1	1,3080
2	2	1,0807
3	3	1,1302
4	4	1,1169
5	5	1,1213
6	6	1,1196
7	7	1,1203
8	8	1,1199
10	10	1,1200
15	15	1,1201
20	20	1,1201

valeurs de la somme  $\alpha$  en fonction de  $m$  et  $n$  sont reportées dans le tableau 21.1. Cette somme converge rapidement, soit :

$$\alpha = 1,1201 \times 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}. \quad (21.42)$$

D'où la flèche maximale avec  $a = 2,8 \text{ m}$  et  $q_0 = 500 \text{ Pa}$  :

$$w_{0\max} = 5,728 \text{ mm}. \quad (21.43)$$

Le calcul des contraintes (21.33) nécessite la détermination des sommes  $\beta$  (21.30) et  $\gamma$  (21.31), dont les valeurs numériques sont reportées en fonction des valeurs de  $m$  et  $n$  dans le tableau 21.2. Nous observons une convergence lente de la somme  $\beta$ . Soit :

$$\beta = 1,1379 \times 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}, \quad \gamma = 1,0894 \times 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}. \quad (21.44)$$

Les contraintes en membrane dans les couches à renfort mat s'écrivent, au centre de la plaque :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^m &= A_{xx}^m z, \\ \sigma_{yy}^m &= A_{yy}^m z, \\ \sigma_{xy}^m &= 0, \end{aligned} \quad (21.45)$$

avec

$$\begin{aligned} A_{xx}^m &= \frac{16a^2 q_0}{\pi^4} (\beta Q_{11}^m + R^2 \gamma Q_{12}^m), \\ A_{yy}^m &= \frac{16a^2 q_0}{\pi^4} (\beta Q_{12}^m + R^2 \gamma Q_{22}^m), \end{aligned} \quad (21.46)$$

où les valeurs des paramètres  $Q_{ij}^m$  sont données en (21.38). L'application numérique conduit à :

TABLEAU 21.2. Valeurs des coefficients  $\beta$  et  $\gamma$  en fonction de  $m$  et  $n$ .

$m$	$n$	$\beta \times 10^{-6}$ (Pa <sup>-1</sup> )	$\gamma \times 10^{-5}$ (Pa <sup>-1</sup> )
1	1	13,080	1,3080
2	2	-6,904	1,0484
3	3	5,383	1,1000
4	4	-1,1328	1,0865
5	5	2,4327	1,0906
6	6	3,5091	1,0890
7	7	1,6454	1,0897
8	8	0,7943	1,0893
10	10	0,9604	1,0894
15	15	1,1910	1,0895
30	30	1,1313	1,0894
60	60	1,1371	1,0894
100	100	1,1378	1,0894
150	150	1,1379	1,0894

$$A_{xx}^m = 3,2721 \times 10^8 \text{ Nm}^{-1}, \quad A_{yy}^m = 9,744 \times 10^8 \text{ Nm}^{-1}. \quad (21.47)$$

De même, les contraintes dans la couche à renfort tissu s'expriment suivant :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^t &= A_{xx}^t z, \\ \sigma_{yy}^t &= A_{yy}^t z, \\ \sigma_{xy}^t &= 0, \end{aligned} \quad (21.48)$$

avec

$$\begin{aligned} A_{xx}^t &= \frac{16a^2q_0}{\pi^4} (\beta Q_{11}^t + R^2 \gamma Q_{12}^t), \\ A_{yy}^t &= \frac{16a^2q_0}{\pi^4} (\beta Q_{12}^t + R^2 \gamma Q_{22}^t), \end{aligned} \quad (21.49)$$

où les valeurs des paramètres  $Q_{ij}^t$  sont données en (21.39). L'application numérique donne :

$$A_{xx}^t = 1,9883 \times 10^8 \text{ Nm}^{-1}, \quad A_{yy}^t = 1,5727 \times 10^8 \text{ Nm}^{-1}. \quad (21.50)$$

La distribution des contraintes dans l'épaisseur de la plaque et en son centre est reportée sur la figure 21.3.

Les contraintes de cisaillement transverse sont déterminées en reportant les contraintes en membrane (21.26) dans les relations (8.20), soit :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad (21.51)$$

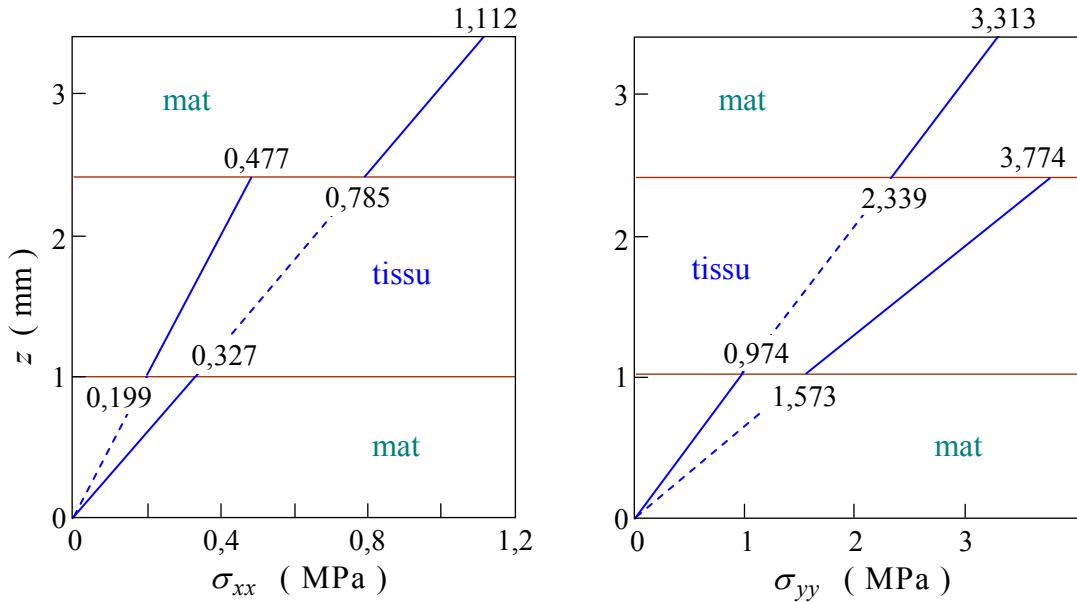


FIGURE 21.3. Distribution des contraintes au centre de la plaque.

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0. \quad (21.52)$$

Les contraintes de cisaillement en un point  $(x, y)$  de la plaque s'écrivent alors sous la forme :

$$\sigma_{xz}^k = B_{xz}^k(x, y)z^2 + \text{cte}, \quad (21.53)$$

$$\sigma_{yz}^k = B_{yz}^k(x, y)z^2 + \text{cte}, \quad (21.54)$$

$$k = m, t.$$

Les constantes sont déterminées en exprimant la continuité des contraintes entre les couches et leur nullité sur les faces inférieure et supérieure. Nous obtenons :

— Couche 1 (mat)

$$\sigma_{iz}^1 = B_{iz}^m(x, y)(z^2 - h_0^2), \quad i = x, y, \quad h_0 = 1 \text{ mm}. \quad (21.55)$$

— Couche 2 (tissu)

$$\sigma_{iz}^2 = B_{iz}^t(x, y)(z^2 - h_l^2) + B_{iz}^m(x, y)(h_l^2 - h_0^2), \quad (21.56)$$

$$i = x, y, \quad h_l = 2,4 \text{ mm}.$$

— Couche 3 (mat)

$$\sigma_{iz}^3 = B_{iz}^m(x, y)(z^2 - h_2^2 + h_l^2 - h_0^2) + B_{iz}^a(x, y)(h_2^2 - h_l^2), \quad (21.57)$$

$$i = x, y, \quad h_2 = 1 \text{ mm}.$$

La distribution dans les couches 4 et 5 est symétrique des distributions dans les couches 2 et 1.

### 21.2.3 Cas d'une charge distribuée sur un rectangle

Un autre cas intéressant de chargement est celui d'une charge  $P$  uniformément répartie sur un rectangle (figure 21.4), de centre  $(x_0, y_0)$  et de côtés  $c$  et  $d$ . Dans ce cas, les coefficients  $q_{mn}$  (21.9) s'écrivent :

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{x=x_0-\frac{c}{2}}^{x_0+\frac{c}{2}} \int_{y=y_0-\frac{d}{2}}^{y_0+\frac{d}{2}} q(x, y) \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} dx dy. \quad (21.58)$$

Dans le cas d'une charge uniformément répartie, la densité de charge  $q(x, y)$  est constante, soit :

$$q(x, y) = q_0 = \frac{P}{cd}. \quad (21.59)$$

L'expression (21.58) conduit alors à :

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2} \sin m\pi \frac{x_0}{a} \sin \frac{m\pi}{2} \frac{c}{a} \sin n\pi \frac{y_0}{b} \sin \frac{n\pi}{2} \frac{d}{b}, \quad (21.60)$$

ou

$$q_{mn} = \frac{16P}{mn\pi^2 cd} \sin m\pi \frac{x_0}{a} \sin \frac{m\pi}{2} \frac{c}{a} \sin n\pi \frac{y_0}{b} \sin \frac{n\pi}{2} \frac{d}{b}. \quad (21.61)$$

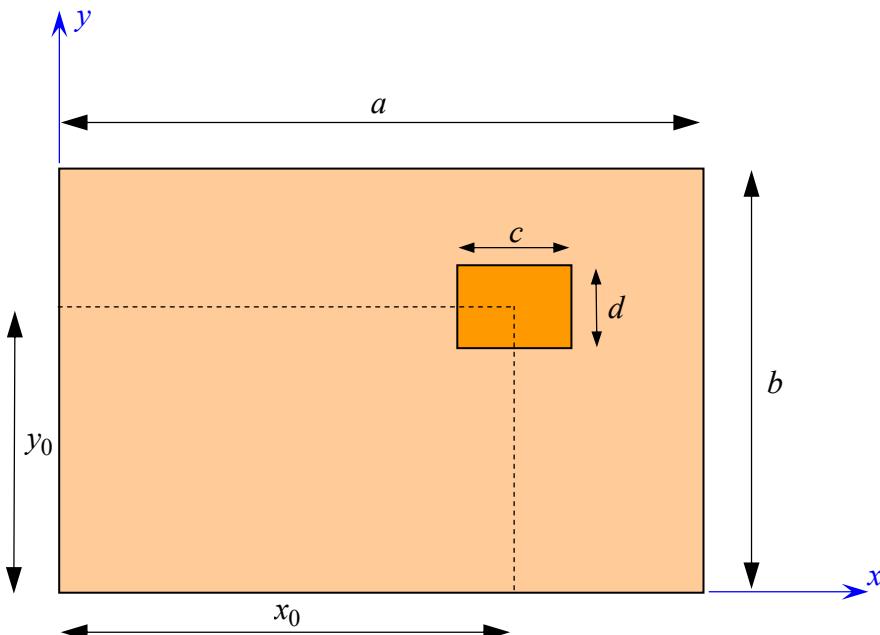


FIGURE 21.4. Charge distribuée sur un rectangle.

Le cas d'une charge  $P$  concentrée au point  $(x_0, y_0)$  s'obtient en faisant tendre  $c$  et  $d$  vers zéro. Nous obtenons dans ce cas :

$$q_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin m\pi \frac{x_0}{a} \sin n\pi \frac{y_0}{b}. \quad (21.62)$$

Les expressions de la flèche, des moments et des contraintes au point  $(x, y)$  sont ensuite obtenues en reportant les expressions des coefficients  $q_{mn}$  dans les relations (21.14) à (21.21). Par exemple, dans le cas d'une force  $P$  concentrée en un point  $(x_0, y_0)$ , la flèche au point  $(x, y)$  s'écrit :

$$w_0(x, y) = \frac{4a^2RP}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{D_{mn}} \sin m\pi \frac{x_0}{a} \sin n\pi \frac{y_0}{b} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (21.63)$$

La flèche au centre de la plaque s'exprime, en utilisant des résultats déjà introduits, suivant :

$$w_0(a/2, b/2) = \frac{4a^2RP}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+2}}{D_{2m-1, 2n-1}} \sin(2m-1)\pi \frac{x_0}{a} \sin(2n-1)\pi \frac{y_0}{b}. \quad (21.64)$$

## 21.3 PLAQUES RECTANGULAIRES EN APPUIS SIMPLES SUR DEUX CÔTÉS

### 21.3.1 Cas d'une charge quelconque

Nous considérons, dans ce paragraphe, le cas d'une plaque rectangulaire, soumise à une charge transverse répartie  $q = q(x, y)$  et en appuis simples seulement sur deux côtés : le côté  $y = 0$ , le côté  $y = b$ . Les conditions sur les côtés  $x = 0$  et  $x = a$  ne sont pas précisées pour l'instant. Les notations sont identiques à celles de la figure 21.1. La charge est développée suivant une double série de Fourier (21.8), et nous recherchons une solution de la forme :

$$w_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \sin n\pi \frac{y}{b} + \frac{a^4}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{D_{mn}} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \quad (21.65)$$

où  $D_{mn}$  a été défini en (21.15) et  $\varphi_n(x)$  est une fonction à déterminer. Le deuxième terme est la solution trouvée en (21.14). L'expression (21.65) satisfait les conditions sur les deux appuis simples. En reportant l'expression (21.65) dans l'équation (21.3) de flexion, et en tenant compte de (21.8), nous obtenons :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ D_{11} \frac{d^4 \varphi_n}{dx^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{d^2 \varphi_n}{dx^2} + D_{22} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \varphi_n \right] \sin n\pi \frac{y}{b} = 0. \quad (21.66)$$

Cette expression est vérifiée si  $\varphi_n(x)$  est solution de l'équation différentielle :

$$D_{11} \frac{d^4 \varphi_n}{dx^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{d^2 \varphi_n}{dx^2} + D_{22} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \varphi_n = 0. \quad (21.67)$$

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$\varphi_n(x) = \exp n\pi\lambda \frac{x}{b}. \quad (21.68)$$

L'équation permettant de trouver le coefficient  $\lambda$  s'obtient en reportant (21.68) dans (21.67). Soit :

$$D_{11}\lambda^4 - 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2 + D_{22} = 0, \quad (21.69)$$

qui constitue l'équation caractéristique. Les racines sont de la forme :

$$\lambda^2 = \frac{1}{D_{11}} \left[ D_{12} + 2D_{66} \pm \sqrt{(D_{12} + 2D_{66})^2 - D_{11}D_{22}} \right]. \quad (21.70)$$

La forme finale de  $\varphi_n(x)$  dépend de la nature des racines  $\lambda$ .

### 1. Cas de racines réelles différentes

Dans le cas où l'équation (21.70) conduit à des racines réelles et différentes :

$$\lambda = \pm r_1 \quad \text{et} \quad \lambda = \pm r_2, \quad (21.71)$$

avec  $r_1, r_2 > 0$ , les solutions de (21.67) sont de la forme :

$$\varphi_n(x) = A_n \cosh n\pi r_1 \frac{x}{b} + B_n \sinh n\pi r_1 \frac{x}{b} + C_n \cosh n\pi r_2 \frac{x}{b} + D_n \sinh n\pi r_2 \frac{x}{b}. \quad (21.72)$$

La flèche s'écrit alors :

$$w_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cosh n\pi r_1 \frac{x}{b} + B_n \sinh n\pi r_1 \frac{x}{b} + C_n \cosh n\pi r_2 \frac{x}{b} + D_n \sinh n\pi r_2 \frac{x}{b} + \frac{a^4}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{D_{mn}} \sin m\pi \frac{x}{a} \right] \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (21.73)$$

### 2. Cas de racines réelles égales

Dans le cas où l'équation (21.70) conduit à des racines réelles égales :

$$\lambda = \pm r, \quad r > 0. \quad (21.74)$$

Les solutions de l'équation différentielle (21.67) s'écrivent :

$$\varphi_n(x) = (A_n + B_n x) \cosh n\pi r \frac{x}{b} + (C_n + D_n x) \sinh n\pi r \frac{x}{b}. \quad (21.75)$$

La flèche s'écrit dans ce cas :

$$w_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (A_n + B_n x) \cosh n\pi r \frac{x}{b} + (C_n + D_n x) \sinh n\pi r \frac{x}{b} \right. \\ \left. + \frac{a^4}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{D_{mn}} \sin m\pi \frac{x}{a} \right] \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (21.76)$$

### 3. Cas de racines complexes

Dans le cas de racines complexes :

$$\lambda = r_1 \pm ir_2 \quad \text{et} \quad \lambda = -r_1 \pm ir_2, \quad (21.77)$$

avec  $r_1, r_2 > 0$ , la fonction  $\varphi_n(x)$  s'écrit :

$$\varphi_n(x) = \left( A_n \cos n\pi r_2 \frac{x}{b} + B_n \sin n\pi r_2 \frac{x}{b} \right) \cosh n\pi r_1 \frac{x}{b} \\ + \left( C_n \cos n\pi r_2 \frac{x}{b} + D_n \sin n\pi r_2 \frac{x}{b} \right) \sinh n\pi r_1 \frac{x}{b}. \quad (21.78)$$

La flèche s'écrit alors :

$$w_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( A_n \cos n\pi r_2 \frac{x}{b} + B_n \sin n\pi r_2 \frac{x}{b} \right) \cosh n\pi r_1 \frac{x}{b} \right. \\ \left. + \left( C_n \cos n\pi r_2 \frac{x}{b} + D_n \sin n\pi r_2 \frac{x}{b} \right) \sinh n\pi r_1 \frac{x}{b} \right. \\ \left. + \frac{a^4}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{D_{mn}} \sin m\pi \frac{x}{a} \right] \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (21.79)$$

Dans les trois cas considérés ci-dessus, les constantes  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$  sont déterminées de manière à vérifier les conditions imposées sur les côtés  $x=0$  et  $x=a$  (bords libres, bords encastrés, etc.). Par exemple, dans le cas de bords encastrés (16.30), nous devons vérifier pour  $x=0$  et  $x=a$  :

$$w_0 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0. \quad (21.80)$$

Nous examinons le cas où l'équation caractéristique a des racines réelles différentes. Dans ce cas, nous avons d'après (21.73) :

$$\frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n\pi r_1}{b} \left( A_n \sinh n\pi r_1 \frac{x}{b} + B_n \cosh n\pi r_1 \frac{x}{b} \right) + \frac{n\pi r_2}{b} \left( C_n \sinh n\pi r_2 \frac{x}{b} \right. \right. \\ \left. \left. + D_n \cosh n\pi r_2 \frac{x}{b} \right) + \frac{a^3}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{q_{mn}}{D_{mn}} \cos m\pi \frac{x}{a} \right] \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (21.81)$$

Les conditions d'encastrement s'écrivent :

— pour  $x = 0$

$$0 = A_n + C_n, \quad (21.82)$$

$$0 = \frac{n\pi r_1}{b} B_n + \frac{n\pi r_2}{b} D_n + \frac{a^3}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{q_{mn}}{D_{mn}}, \quad (21.83)$$

— pour  $x = a$

$$0 = A_n \cosh n\pi r_1 R + B_n \sinh n\pi r_1 R + C_n \cosh n\pi r_2 R + D_n \sinh n\pi r_2 R \quad (21.84)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{n\pi r_1}{b} (A_n \sinh n\pi r_1 R + B_n \cosh n\pi r_1 R) \\ &\quad + \frac{n\pi r_2}{b} (C_n \sinh n\pi r_2 R + D_n \cosh n\pi r_2 R) + \frac{a^3}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{q_{mn}}{D_{mn}} \cos m\pi \frac{x}{a}, \end{aligned} \quad (21.85)$$

où  $R$  est le rapport longueur sur largeur de la plaque. Les équations (21.82) à (21.85) permettent de déterminer les constantes  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$  pour  $n = 1, 2$ , etc.

### 21.3.2 Cas d'une charge uniforme

Dans le cas d'une charge uniforme :  $q(x, y) = q_0$ , la résolution peut être effectuée en développant la charge suivant une série simple de Fourier :

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin n\pi \frac{y}{b}, \quad (21.86)$$

avec

$$q_n = \frac{2}{b} \int_0^b q(x, y) \sin n\pi \frac{y}{b} dy. \quad (21.87)$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{4q_0}{n\pi}, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ q_n &= 0, & \text{si } n \text{ est pair.} \end{aligned}$$

D'où :

$$q(x, y) = \frac{4q_0}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (21.88)$$

Le second terme de l'expression (21.65) se simplifie et la flèche s'écrit sous la forme :

$$w_0(x, y) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[ \varphi_n(x) + \frac{4a^4 q_0}{\pi^5 R^4 D_{22}} \frac{1}{n^5} \right] \sin n\pi \frac{y}{b}, \quad (21.89)$$

où les fonctions  $\varphi_n(x)$  ont été déterminées en (21.72), (21.75) et (21.78).

Nous examinons le cas de bords encastrés en  $x = 0$  et  $x = a$ , et le cas où l'équation caractéristique (21.69) a deux racines réelles différentes. Dans ce cas, nous avons :

$$w_0(x, y) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[ A_n \cosh n\pi r_1 \frac{x}{b} + B_n \sinh n\pi r_1 \frac{x}{b} + C_n \cosh n\pi r_2 \frac{x}{b} + D_n \sinh n\pi r_2 \frac{x}{b} + \frac{4a^4 q_0}{n^5 \pi^5 R^4 D_{22}} \right] \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (21.90)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y) = & \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[ \frac{n\pi r_1}{b} \left( A_n \sinh n\pi r_1 \frac{x}{b} + B_n \cosh n\pi r_1 \frac{x}{b} \right) \right. \\ & \left. + \frac{n\pi r_2}{b} \left( C_n \sinh n\pi r_2 \frac{x}{b} + D_n \cosh n\pi r_2 \frac{x}{b} \right) \right] \sin n\pi \frac{y}{b}. \end{aligned} \quad (21.91)$$

Les conditions d'enca斯特ment s'écrivent :

— pour  $x = 0$

$$A_n + C_n + \frac{4a^4 q_0}{n^5 \pi^5 R^4 D_{22}} = 0, \quad (21.92)$$

$$r_1 B_n + r_2 D_n = 0, \quad (21.93)$$

— pour  $x = a$

$$\begin{aligned} & A_n \cosh n\pi r_1 R + B_n \sinh n\pi r_1 R + C_n \cosh n\pi r_2 R \\ & + D_n \sinh n\pi r_2 R + \frac{4a^4 q_0}{n^5 \pi^5 R^4 D_{22}} = 0, \end{aligned} \quad (21.94)$$

$$r_1 A_n \sinh n\pi r_1 R + r_1 B_n \cosh n\pi r_1 R + r_2 C_n \sinh n\pi r_2 R + r_2 D_n \cosh n\pi r_2 R = 0. \quad (21.95)$$

La résolution du système d'équations (21.92) à (21.95) conduit à :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{4r_2 a^4 q_0}{n^5 \pi^5 R^4 D_{22} H_n} \left[ r_1 (\cosh n\pi r_2 R - 1) (\cosh n\pi r_1 R - \cosh n\pi r_2 R) \right. \\ &\quad \left. - (r_2 \sinh n\pi r_1 R - r_1 \sinh n\pi r_2 R) \sinh n\pi r_2 R \right], \\ B_n &= \frac{4r_2 a^4 q_0}{n^5 \pi^5 R^4 D_{22} H_n} \left[ r_2 (\cosh n\pi r_1 R - \cosh n\pi r_2 R) \sinh n\pi r_2 R \right. \\ &\quad \left. - (\cosh n\pi r_2 R - 1) (r_1 \sinh n\pi r_1 R - r_2 \sinh n\pi r_2 R) \right], \\ C_n &= - \left( A_n + \frac{4a^4 q_0}{n^5 \pi^5 R^4 D_{22}} \right), \\ D_n &= - \frac{r_1}{r_2} B_n, \end{aligned} \quad (21.96)$$

avec

$$H_n = \eta_1 r_2 (\cosh n\pi\eta_1 R - \cosh n\pi r_2 R)^2 - (r_2 \sinh n\pi\eta_1 R - \eta_1 \sinh n\pi r_2 R)(\eta_1 \sinh n\pi\eta_1 R - r_2 \sinh n\pi r_2 R).$$

Dans les expressions (21.96) des coefficients  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$ , le rapport  $R$  est le rapport longueur sur largeur de la plaque et  $n$  prend des valeurs impaires :  $n = 1, 3, 5, \dots$

## 21.4 PLAQUES RECTANGULAIRES SOUMISES À DIVERSES CONDITIONS SUR LES CÔTÉS

Dans les deux cas étudiés dans les paragraphes précédents (plaques en appuis simples), le problème de flexion a été résolu en explicitant les solutions analytiques exactes des équations fondamentales vérifiant les conditions aux frontières d'appuis simples. Dans le cas d'une plaque rectangulaire soumise à diverses conditions sur les frontières, combinaisons de diverses conditions imposées sur les côtés de la plaque : appuis simples, encastrements, côtés libres, etc., le problème de flexion ne peut plus être résolu en explicitant les solutions analytiques exactes. Des méthodes d'approximation doivent alors être utilisées. Dans ce paragraphe, nous recherchons des solutions analytiques approchées en utilisant la méthode de Ritz (paragraphe 8.4).

Dans le cas de stratifiés orthotropes, l'énergie de déformation est donnée par la relation (16.38) :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + C. \quad (21.97)$$

Le travail des actions exercées par la charge transverse répartie :  $q = q(x, y)$  s'écrit (relation (16.45)) :

$$W_f = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b q(x, y) w_0(x, y) dx dy. \quad (21.98)$$

La solution approchée est recherchée sous la forme d'une série double à variables séparées :

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y). \quad (21.99)$$

Les fonctions  $X_m(x)$  et  $Y_n(y)$  doivent constituer des bases fonctionnelles (paragraphes 8.4.2) : polynômes, fonctions trigonométriques, fonctions hyperboliques,

etc., et sont choisies de manière à vérifier les conditions sur les frontières. Les coefficients  $A_{mn}$  sont ensuite déterminés par les conditions (8.62) de stationnarité qui s'écrivent ici :

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial A_{mn}} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \tilde{U}_d}{\partial A_{mn}} = \frac{\partial \tilde{W}_f}{\partial A_{mn}}, \quad (21.100)$$

où  $\tilde{U}_d$  et  $\tilde{W}_f$  sont l'énergie de déformation et le travail des actions exercées, obtenues en reportant l'expression approchée (21.99) de la flèche, respectivement dans les expressions (21.97) et (21.98). Le calcul de l'énergie de déformation approchée nécessite d'expliciter les termes :

$$\left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \quad \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2, \quad \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

Par exemple :

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_n. \quad (21.101)$$

D'où

$$\left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{mn} A_{ij} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} Y_n Y_j, \quad (21.102)$$

et

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} Y_n Y_j. \quad (21.103)$$

L'intégration de ce terme s'écrit :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} \int_0^a \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx \int_0^b Y_n Y_j dy. \quad (21.104)$$

Pour exprimer les intégrales, il est pratique d'introduire les variables réduites :

$$u = \frac{x}{a} \quad \text{et} \quad v = \frac{y}{b}. \quad (21.105)$$

L'expression (21.104) s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= \\ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{b}{a^3} \int_0^1 \frac{d^2 X_m}{du^2} \frac{d^2 X_i}{du^2} du \int_0^1 Y_n Y_j dv & \end{aligned} \quad (21.106)$$

Les intégrales sont alors sans dimensions.

En procédant de la même manière pour les autres termes, le premier membre de l'expression (21.100) peut se mettre sous la forme pratique :

$$\frac{\partial \tilde{U}_d}{\partial A_{mn}} = \frac{1}{Ra^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ D_{11} I_{mi}^{22} J_{nj}^{00} + \left[ D_{12} (I_{mi}^{20} J_{nj}^{02} + I_{mi}^{02} J_{nj}^{20}) + 4D_{66} I_{mi}^{11} J_{nj}^{11} \right] R^2 + D_{22} I_{mi}^{00} J_{nj}^{22} R^4 \right\} A_{ij}, \quad (21.107)$$

où  $R$  est le rapport longueur sur largeur de la plaque ( $R = a/b$ ) et en introduisant les intégrales sans dimensions :

$$I_{mi}^{pq} = \int_0^1 \frac{d^p X_m}{du^p} \frac{d^q X_i}{du^q} du \quad \begin{aligned} m, i &= 1, 2, \dots, M, \\ pq &= 00, 02, 11, 20, 22. \end{aligned} \quad (21.108)$$

$$J_{nj}^{rs} = \int_0^1 \frac{d^r Y_n}{dv^r} \frac{d^s Y_j}{dv^s} dv \quad \begin{aligned} n, j &= 1, 2, \dots, N, \\ rs &= 00, 02, 11, 20, 22. \end{aligned} \quad (21.109)$$

L'expression approchée du travail de la charge transverse s'écrit, d'après les expressions (21.98) et (21.99) :

$$\tilde{W}_f = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b X_m(x) Y_n(y) q(x, y) dx dy, \quad (21.110)$$

ou

$$\tilde{W}_f = ab \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} I_{mn}^{00}(q), \quad (21.111)$$

en introduisant l'intégrale :

$$I_{mn}^{00}(q) = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^1 X_m(u) Y_n(v) q(u, v) du dv. \quad (21.112)$$

Il en résulte que :

$$\frac{\partial \tilde{W}_f}{\partial A_{mn}} = \frac{a^2}{R} I_{mn}^{00}(q), \quad (21.113)$$

Finalement, l'expression (21.100) conduit au système d'équations :

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ D_{11} I_{mi}^{22} J_{nj}^{00} + \left[ D_{12} (I_{mi}^{20} J_{nj}^{02} + I_{mi}^{02} J_{nj}^{20}) + 4D_{66} I_{mi}^{11} J_{nj}^{11} \right] R^2 + D_{22} I_{mi}^{00} J_{nj}^{22} R^4 \right\} A_{ij} = a^4 I_{mn}^{00}(q), \quad (21.114)$$

pour  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Ce système d'équations peut également être réécrit sous une forme réduite :

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ D_{11} C_{minj}^{2200} + \left[ D_{12} (C_{minj}^{2002} + C_{minj}^{0220}) + 4D_{66} C_{minj}^{1111} \right] R^2 + D_{22} C_{minj}^{0022} R^4 \right\} A_{ij} = a^4 I_{mn}^{00}(q), \quad (21.115)$$

pour  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,

en explicitant le produit des intégrales (21.108) et (21.109) sous la forme :

$$C_{minj}^{pqrs} = I_m^{pq} J_n^{rs} = \int_0^1 \frac{d^p X_m}{du^p} \frac{d^q X_i}{du^q} du \int_0^1 \frac{d^r Y_n}{dv^r} \frac{d^s Y_j}{dv^s} dv. \quad (21.116)$$

Dans le système d'équations (21.114) ou (21.115), les intégrales sont calculées, connaissant les conditions aux frontières et la charge transverse  $q(x, y)$  imposée. La résolution du système permet ensuite de trouver les coefficients  $A_{ij}$  et d'en déduire le déplacement transverse exprimé en chaque point  $(x, y)$  par l'expression (21.99).

Dans le cas d'une charge uniforme :  $q(x, y) = q_0$ , l'intégrale du deuxième membre du système (21.114) s'écrit sous la forme :

$$I_{mn}^{00}(q_0) = q_0 I_m^0 I_n^0, \quad (21.117)$$

en introduisant les intégrales :

$$I_m^0 = \int_0^1 X_m du, \quad J_n^0 = \int_0^1 Y_n dv. \quad (21.118)$$

Dans ce cas, le système (21.115) s'écrit :

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ D_{11} C_{minj}^{2200} + \left[ D_{12} (C_{minj}^{2002} + C_{minj}^{0220}) + 4D_{66} C_{minj}^{1111} \right] R^2 + D_{22} C_{minj}^{0022} R^4 \right\} A_{ij} = a^4 I_m^0 I_n^0 q_0, \quad (21.119)$$

pour  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

## 21.5 PLAQUES RECTANGULAIRES ENCASTRÉES

### 21.5.1 Introduction

Comme application de la formulation générale développée dans le paragraphe précédent, nous étudions ici le cas d'une plaque rectangulaire encastrée sur ses quatre côtés et soumise à une charge transverse uniforme  $q_0$  (figure 21.5).

La plaque étant encastrée sur les quatre côtés, les conditions aux frontières s'écrivent :

— pour les côtés  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$w_0 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0, \quad (21.120)$$

— pour les côtés  $y = 0$  et  $y = b$  :

$$w_0 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0. \quad (21.121)$$

Nous considérons ci-après le cas de deux types de fonctions  $X_m(x)$  et  $Y_n(y)$  satisfaisant ces conditions.

### 21.5.2 Solution approchée par des fonctions polynomiales

Comme fonctions  $X_m(x)$  et  $Y_n(y)$ , nous choisissons des fonctions polynomiales de la forme :

$$\begin{aligned} X_m(x) &= \frac{x^2}{a^2} \left( \frac{x}{a} - 1 \right)^2 \left( \frac{x}{a} \right)^{m-1} = u^2 (u-1)^2 u^{m-1}, \\ Y_n(y) &= \frac{y^2}{b^2} \left( \frac{y}{b} - 1 \right)^2 \left( \frac{y}{b} \right)^{n-1} = v^2 (v-1)^2 v^{n-1}. \end{aligned} \quad (21.122)$$

Ces fonctions satisfont les conditions (21.120) et (21.121) aux frontières. L'identité des fonctions (21.122), en variables réduites  $u$  et  $v$ , conduit aux relations suivantes entre les intégrales définies en (21.108), (21.109) et (21.118) :

$$J_{nj}^{rs} = I_{nj}^{rs}, \quad J_n^0 = I_n^0. \quad (21.123)$$

Les intégrales  $I_{mi}^{pq}$  peuvent être exprimées analytiquement, puis calculées numé-

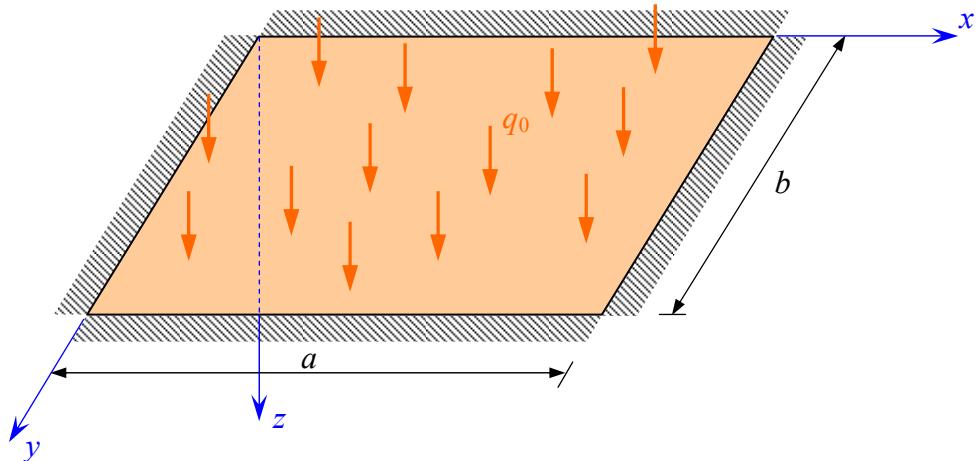


FIGURE 21.5. Plaque rectangulaire encastree.

riquement pour les diverses valeurs de  $m$  et  $i$ . Elles peuvent être également calculées directement à l'aide d'un logiciel de calcul numérique d'utilisation générale. Les tableaux A.1 à A.4 de l'annexe A donnent les valeurs numériques respectivement des intégrales  $I_m^0$ ,  $I_{mi}^{00}$ ,  $I_{mi}^{02}$  et  $I_{mi}^{22}$  pour  $m$  et  $i$  variant de 1 à 8. Les intégrales  $I_{mi}^{11}$  et  $I_{mi}^{02}$  sont opposées :

$$I_{mi}^{11} = -I_{mi}^{02}. \quad (21.124)$$

Dans le cas où  $M = N = 1$ , l'approximation (21.122) s'écrit :

$$\begin{aligned} X_1(x) &= \frac{x^2}{a^2} \left( \frac{x}{a} - 1 \right)^2 = u^2 (u - 1)^2, \\ Y_1(y) &= \frac{y^2}{b^2} \left( \frac{y}{b} - 1 \right)^2 = v^2 (v - 1)^2, \end{aligned} \quad (21.125)$$

et le système (21.119) se réduit à une seule équation :

$$\left\{ D_{11} I_{11}^{22} I_{11}^{00} + 2 \left[ D_{12} (I_{11}^{20})^2 + 2 D_{66} (I_{11}^{11})^2 \right] R^2 + D_{22} I_{11}^{00} I_{11}^{22} R^4 \right\} A_{11} = a^4 (I_1^0)^2 q_0, \quad (21.126)$$

avec

$$I_{11}^{00} = \frac{1}{630}, \quad I_{11}^{11} = \frac{2}{105}, \quad I_{11}^{20} = -\frac{2}{105}, \quad I_{11}^{22} = \frac{4}{5}, \quad I_1^0 = \frac{1}{30}. \quad (21.127)$$

Soit :

$$A_{11} = \frac{6,125 a^4 q_0}{7D_{11} + 4(D_{12} + 2D_{66})R^2 + 7D_{22}R^4}. \quad (21.128)$$

D'où l'expression de la flèche :

$$w_0(x, y) = \frac{6,125 a^4 q_0}{7D_{11} + 4(D_{12} + 2D_{66})R^2 + 7D_{22}R^4} \frac{x^2}{a^2} \left( \frac{x}{a} - 1 \right)^2 \frac{y^2}{b^2} \left( \frac{y}{b} - 1 \right)^2. \quad (21.129)$$

La flèche est maximale au centre de la plaque ( $x/a = y/b = \frac{1}{2}$ ) et s'écrit :

$$w_{0\max} = 0,00342 \frac{a^4 q_0}{D_{11} + 0,571(D_{12} + 2D_{66})R^2 + D_{22}R^4}. \quad (21.130)$$

### 21.5.3 Solution approchée par des fonctions poutres

Une autre approximation, développée par D. Young [28], pour obtenir les fréquences propres de plaques rectangulaires isotropes et adaptée par J. M. Whitney [29] à l'étude de la flexion de plaques stratifiées, consiste à exprimer les fonctions  $X_m(x)$  et  $Y_n(y)$  de la solution approchée sous la forme :

$$X_m(x) = \cos \lambda_m \frac{x}{a} - \cosh \lambda_m \frac{x}{a} - \gamma_m \left( \sin \lambda_m \frac{x}{a} - \sinh \lambda_m \frac{x}{a} \right), \quad (21.131)$$

$$Y_n(y) = \cos \lambda_n \frac{y}{b} - \cosh \lambda_n \frac{y}{b} - \gamma_n \left( \sin \lambda_n \frac{y}{b} - \sinh \lambda_n \frac{y}{b} \right). \quad (21.132)$$

Ces fonctions constituent les fonctions de base utilisées pour expliciter les modes de vibration en flexion de poutres encastrées aux deux extrémités ([30] et paragraphe 24.3.3). Ces fonctions vérifient les conditions sur les côtés  $x = 0$  et  $y = 0$  :

$$\begin{aligned} X_m|_{x=0} &= 0, & \frac{dX_m}{dx}\Big|_{x=0} &= 0, \\ Y_n|_{y=0} &= 0, & \frac{dY_n}{dy}\Big|_{y=0} &= 0, \end{aligned} \quad (21.133)$$

Il reste à vérifier les conditions sur les côtés  $x = a$  et  $y = b$  :

$$\begin{aligned} X_m|_{x=a} &= 0, & \frac{dX_m}{dx}\Big|_{x=a} &= 0, \\ Y_n|_{y=b} &= 0, & \frac{dY_n}{dy}\Big|_{y=b} &= 0. \end{aligned} \quad (21.134)$$

Par exemple, les conditions (21.134) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \cos \lambda_m - \cosh \lambda_m - \gamma_m (\sin \lambda_m - \sinh \lambda_m) &= 0, \\ -\sin \lambda_m - \sinh \lambda_m - \gamma_m (\cos \lambda_m - \cosh \lambda_m) &= 0. \end{aligned} \quad (21.135)$$

Une solution différente de  $\gamma_m = 0$  est obtenue lorsque :

$$\frac{\cos \lambda_m - \cosh \lambda_m}{\sin \lambda_m - \sinh \lambda_m} = -\frac{\sin \lambda_m + \sinh \lambda_m}{\cos \lambda_m - \cosh \lambda_m}.$$

Soit :

$$(\cos \lambda_m - \cosh \lambda_m)^2 = \sin^2 \lambda_m - \sinh^2 \lambda_m.$$

En tenant compte des égalités :

$$\cos^2 \lambda_m + \sin^2 \lambda_m = 1, \quad \cosh^2 \lambda_m - \sinh^2 \lambda_m = 1,$$

l'expression précédente se réduit à :

$$\cos \lambda_m \cosh \lambda_m = 1.$$

Il en résulte que, pour vérifier les conditions sur les côtés  $x = a$  et  $y = b$ , les coefficients  $\lambda_m$  et  $\lambda_n$  doivent être solutions de l'équation :

$$\cos \lambda_i \cosh \lambda_i = 1, \quad i = m, n. \quad (21.136)$$

Les coefficients  $\gamma_m$  et  $\gamma_n$  sont ensuite exprimés par la relation :

TABLEAU 21.3. Valeurs des constantes  $\lambda_i$  et  $\gamma_i$  de la fonction poutre encastrée aux deux extrémités.

$i$	$\lambda_i$	$\gamma_i$
1	4,7300408	0,98250222
2	7,8532046	1,00077731
3	10,9956078	0,99996645
4	14,1371655	1,00000145
5	17,2787596	0,99999994
6	20,4203522	1,00000000
7	23,5619449	1,00000000
8	26,7035376	1,00000000

$$\gamma_i = \frac{\cos \lambda_i - \cosh \lambda_i}{\sin \lambda_i - \sinh \lambda_i}. \quad (21.137)$$

Les solutions de (21.136) ont été déterminées dans [28]. Les valeurs de  $\lambda_i$  et les valeurs correspondantes de  $\gamma_i$  sont reportées dans le tableau 21.3 pour  $i$  variant de 1 à 8. Il est à noter qu'une solution approchée peut être explicitée dans le cas où  $\lambda_i$  est assez grand. En effet, dans ce cas :

$$\cosh \lambda_i \approx \frac{1}{2} \exp \lambda_i,$$

et l'équation (21.135) s'écrit :

$$\cos \lambda_i \approx \frac{2}{\exp \lambda_i} \approx 0.$$

Les solutions de cette dernière équation sont :

$$\lambda_i = (2i+1) \frac{\pi}{2}. \quad (21.138)$$

Les solutions approchées (21.138) sont comparées dans le tableau 21.4 aux solutions exactes de l'équation (21.136).

Les fonctions (21.131) et (21.132) étant entièrement déterminées, il est possible d'évaluer les diverses intégrales intervenant dans les systèmes d'équations (21.115) ou (21.119).

TABLEAU 21.4. Valeurs exactes et approchées de  $\lambda_i$ .

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
Solution de l'équation (21.119)	4,730	7,853	10,996	14,137	17,279
Solution approchée (21.121)	4,712	7,854	10,996	14,137	17,279

Les fonctions (21.131) et (21.132) étant entièrement déterminées, il est possible d'évaluer les diverses intégrales intervenant dans les systèmes d'équations (21.115) ou (21.119).

L'identité des fonctions (21.131) et (21.132), en variables réduites  $u$  et  $v$ , conduit aux relations exprimées en (21.123).

Nous obtenons ensuite le résultat :

$$I_{mi}^{00} = \int_0^1 X_m X_i \, du = \begin{cases} 1 & \text{si } i = m, \\ 0 & \text{si } i \neq m. \end{cases} \quad (21.139)$$

Les fonctions  $X_m$  et  $X_i$  sont orthonormées, dans l'opération d'intégration considérée.

De même, nous avons :

$$I_{mi}^{22} = \int_0^1 \frac{d^2 X_m}{du^2} \frac{d^2 X_i}{du^2} \, du = \begin{cases} \lambda^4 & \text{si } i = m, \\ 0 & \text{si } i \neq m. \end{cases} \quad (21.140)$$

Les fonctions dérivées deuxièmes sont orthogonales. Les valeurs des intégrales sont déduites des valeurs de  $\lambda_i$  données dans le tableau 21.3 et sont reportées dans le tableau B.1 de l'annexe B pour  $i$  et  $m$  variant de 1 à 8.

Par ailleurs, nous avons la relation :

$$\int_0^1 \frac{dX_m}{du} \frac{dX_i}{du} \, du = - \int_0^1 X_m \frac{d^2 X_i}{du^2} \, du. \quad (21.141)$$

D'où les relations :

$$I_{mi}^{20} = I_{mi}^{02}, \quad I_{mi}^{11} = -I_{mi}^{02}. \quad (21.142)$$

Les valeurs numériques des intégrales  $I_{mi}^{02}$  sont reportées dans le tableau B.2 de l'annexe B.

Enfin, les valeurs des intégrales  $I_m^0$  sont reportées dans le tableau B.3.

Dans le cas où  $M = N = 1$ ,  $\lambda_1 = 4,730$  et  $\gamma_1 = 0,9825$ . L'approximation (21.99) se réduit alors à :

$$\begin{aligned} X_1(x) &= \cos 4,73 \frac{x}{a} - \cosh 4,73 \frac{x}{a} - 0,9825 \left( \sin 4,73 \frac{x}{a} - \sinh 4,73 \frac{x}{a} \right), \\ Y_1(y) &= \cos 4,73 - \cosh 4,73 \frac{y}{b} - 0,9825 \left( \sin 4,73 \frac{y}{b} - \sinh 4,73 \frac{y}{b} \right). \end{aligned} \quad (21.143)$$

Le système (21.119) se réduit à l'équation (21.126), avec :

$$\begin{aligned} I_{11}^{00} &= 1, \quad I_{11}^{11} = 12,30262, \quad I_{11}^{20} = -I_{11}^{11} = -12,30262, \\ I_{11}^{22} &= 500,564, \quad I_1^0 = -0,8309. \end{aligned}$$

D'où :

$$A_{11} = \frac{0,001379 a^4 q_0}{D_{11} + 0,6047(D_{12} + 2D_{66})R^2 + D_{22}R^4}. \quad (21.144)$$

D'où l'expression de la flèche :

$$w_0(x, y) = A_{11}X_1(x)Y_1(y), \quad (21.145)$$

où les fonctions  $X_1(x)$  et  $Y_1(y)$  sont exprimées en (21.143).

La flèche est maximum au centre de la plaque et s'obtient en explicitant  $X_1(a/2)$  et  $Y_1(b/2)$  dans l'équation précédente, soit :

$$w_{0\max} = 0,00348 \frac{a^4 q_0}{D_{11} + 0,6047(D_{12} + 2D_{66})R^2 + D_{22}R^4}. \quad (21.146)$$

## 21.5.4 Comparaison entre les solutions approchées

La comparaison entre les expressions (21.130) et (21.146) de la flèche maximale fait apparaître une similitude des résultats obtenus dans le cas d'une approximation avec un terme ( $M = N = 1$ ). Cette comparaison peut être précisée en reprenant le stratifié de l'exemple 21.2.2.2, pour lequel les coefficients de flexion  $D_{ij}$  sont donnés en (21.40) :

$$\begin{aligned} D_{11} &= 272,64 \text{ Nm}, & D_{12} &= 64,834 \text{ Nm}, \\ D_{22} &= D_{11} = 272,64 \text{ Nm}, & D_{66} &= 67,358 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

Pour un rapport longueur sur largeur de la plaque égal à 4 ( $R = 4$ ), l'approximation (21.130) par les polynômes conduit à :

$$\frac{w_{0\max}}{a^4 q_0} = 6,714 \times 10^{-7} \text{ Nm}^{-1}, \quad (21.147)$$

et l'approximation (21.146) par les fonctions poutres conduit à :

$$\frac{w_{0\max}}{a^4 q_0} = 6,797 \times 10^{-7} \text{ Nm}^{-1}. \quad (21.148)$$

Soit un écart de 1,2 % entre les deux approximations.

En utilisant plusieurs termes dans l'approximation, la recherche de la solution approchée nécessite d'établir le système d'équations (21.119), puis de le résoudre pour obtenir les coefficients  $A_{mn}$ . La flèche est ensuite exprimée par la relation (21.99) et la flèche maximale au centre de la plaque s'écrit :

$$w_{0\max} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(a/2) Y_n(b/2). \quad (21.149)$$

Le tableau 21.5 montre les résultats obtenus en répétant ce processus pour  $M = N$  variant de 1 à 11, en utilisant une approximation soit avec des polynômes, soit avec des fonctions poutres, en reprenant les valeurs numériques précédentes. Ces résultats montrent, dans le cas de l'approximation avec des polynômes, une convergence assez rapide de la solution approchée vers la solution exacte, atteinte

TABLEAU 21.5. Convergence de la solution approchée lorsque  $M = N$  augmente.

$M = N$	$w_{0\max} / a^4 q_0 (\times 10^{-7} \text{N}^{-1} \text{m}^{-1})$	
	polynômes	fonctions poutres
1	6,714	6,797
3	5,911	5,825
5	5,972	6,006
7	5,973	5,962
9	5,973	5,977
11	5,973	5,971

pratiquement pour  $M = N = 5$ , soit :

$$\frac{w_{0\max}}{a^4 q_0} = 5,973 \times 10^{-7} \text{Nm}^{-1}. \quad (21.150)$$

La convergence est plus lente dans le cas de l'approximation par les fonctions poutres. Par ailleurs, l'écart entre l'approximation à un terme et la solution obtenue avec un nombre élevé de termes est de 12,4 % dans le cas de l'approximation par les polynômes et de 13,8 % dans l'autre cas.

Si les approximations par les polynômes ou par les fonctions poutres font apparaître une convergence semblable de la solution approchée, les propriétés d'orthogonalité (21.139) et (21.140) des fonctions poutres introduisent de nombreux zéros dans les termes non diagonaux du système d'équations (21.119). La résolution de ce système est alors grandement simplifiée.

Ayant obtenu la flèche, les moments de flexion peuvent être déterminés à partir de l'expression (14.29). Par exemple :

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}. \quad (21.151)$$

L'approximation (21.129) par les polynômes conduit à :

$$M_x = -\frac{1,75R^4 q_0}{a^4} \frac{D_{11}(6x^2 - 6ax + a^2)(y^2 - by)^2 + D_{12}(x^2 - ax)^2(6y^2 - 6by + b^2)}{D_{11} + 0,571(D_{12} + 2D_{66})R^2 + D_{22}R^4} \quad (21.152)$$

Le moment au milieu du côté  $x = 0$  s'écrit :

$$M_x(0, b/2) = -0,109a^2 q_0 \frac{D_{11}}{D_{11} + 0,571(D_{12} + 2D_{66})R^2 + D_{22}R^4}. \quad (21.153)$$

Ce qui conduit, avec les valeurs numériques précédentes, à :

$$M_x(0, b/2) = -5,857 \times 10^{-3} a^2 q_0. \quad (21.154)$$

De la même manière, l'approximation (21.145) par les fonctions poutres conduit à :

$$M_x(0, b/2) = -5,221 \times 10^{-3} a^2 q_0. \quad (21.155)$$

En utilisant un nombre élevé de termes  $M = N = 11$  dans la série (21.99), nous obtenons, dans le cas d'une approximation par les polynômes, la valeur :

$$M_x(0, b/2) = -14,190 \times 10^{-3} a^2 q_0. \quad (21.156)$$

Nous observons que l'approximation avec un terme ( $M = N = 1$ ) conduit dans le cas des valeurs du moment au milieu du côté  $x = 0$  à des écarts très importants avec la valeur exacte : -59% pour l'approximation par les polynômes et -63% dans l'autre cas. Nous retrouvons ici un résultat analogue à celui observé dans le cas de plaques rectangulaires en appuis simples (paragraphe 21.2.2.2), où la convergence est beaucoup plus lente dans l'estimation des contraintes.

De manière à illustrer plus complètement les approximations par les polynômes et les fonctions poutres, nous avons reporté dans les tableaux 21.6 à 21.8 les résultats obtenus dans le cas de la flexion d'une plaque isotrope (tableau 21.6), d'une plaque orthotrope équilibrée (tableau 21.7) et d'une plaque orthotrope de type unidirectionnelle (tableau 21.8). Diverses valeurs du rapport longueur sur largeur de plaque ont été considérées.

TABLEAU 21.6. Flèches et moments maxima dans le cas d'une plaque isotrope ( $D_{11} = D_{22} = D_{12} + 2D_{66} = D$ ), pour des rapports longueur sur largeur égaux à 1 et 2.

$R = 1$				
$M = N$	Polynômes		Fonctions poutres	
	$w_{0\max} D/a^4 q_0$ ( $\times 10^{-3}$ )	$M_x/a^2 q_0$	$w_{0\max} D/a^4 q_0$ ( $\times 10^{-3}$ )	$M_x/a^2 q_0$
1	1,3292	-0,04253	1,3354	-0,03763
3	1,2645	-0,05116	1,2526	-0,04526
5	1,2653	-0,05128	1,2671	-0,04839
7	1,2653	-0,05139	1,2645	-0,04952
9	1,2653	-0,05133	1,2655	-0,05011
11	1,2653	-0,05132	1,2652	-0,05049

$R = 2$				
$M = N$	Polynômes		Fonctions poutres	
	$w_{0\max} D/a^4 q_0$ ( $\times 10^{-3}$ )	$M_x/a^2 q_0$	$w_{0\max} D/a^4 q_0$ ( $\times 10^{-3}$ )	$M_x/a^2 q_0$
1	1,7723	-0,00567	1,7912	-0,00505
3	1,5635	-0,01262	1,5415	-0,00930
5	1,5835	-0,01420	1,5924	-0,01143
7	1,5831	-0,01425	1,5797	-0,01244
9	1,5832	-0,01432	1,5843	-0,01301
11	1,5831	-0,01425	1,5825	-0,01335

TABLEAU 21.7. Flèches et moments maxima dans le cas d'une plaque carrée orthotrope équilibrée ( $D_{11} = D_{22} = 272,64 \text{ Nm}$ ,  $D_{12} = 64,834 \text{ Nm}$ ,  $D_{22} = 67,358 \text{ Nm}$ ).

$M=N$	Polynômes		Fonctions poutres	
	$w_{0\max} D/a^4 q_0$ ( $\times 10^{-6} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ )	$M_x/a^4 q_0$	$w_{0\max} D/a^4 q_0$ ( $\times 10^{-6} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ )	$M_x/a^4 q_0$
1	5,1842	-0,04523	5,2232	-0,04012
3	4,9542	-0,05281	4,9130	-0,04730
5	4,9539	-0,05274	4,9603	-0,05019
7	4,9540	-0,02810	4,9514	-0,05117
9	4,9540	-0,05279	4,9547	-0,05171
11	4,9540	-0,05275	4,9536	-0,05203

TABLEAU 21.8 — Flèches et moments maxima dans le cas d'une plaque orthotrope unidirectionnelle ( $D_{11} = D_{22} = 272,64 \text{ Nm}$ ,  $D_{12} = 64,834 \text{ Nm}$ ,  $D_{22} = 67,358 \text{ Nm}$ ), pour des rapports longueur sur largeur égaux à 1/2, 1 et 2.

$R = 1/2$				
$M=N$	Polynômes		Fonctions poutres	
	$w_{0\max} D/a^4 q_0$ ( $\times 10^{-5} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ )	$M_x/a^4 q_0$	$w_{0\max} D/a^4 q_0$ ( $\times 10^{-5} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ )	$M_x/a^4 q_0$
1	3,2519	-0,10406	3,3023	-0,09304
3	2,4950	-0,07830	2,4499	-0,07457
5	2,6412	-0,08498	2,6862	-0,08499
7	2,6334	-0,08401	2,6138	-0,08222
9	2,6320	-0,08408	2,6396	-0,08397
11	2,6319	-0,08403	2,6287	-0,08346
$R = 1$				
$M=N$	Polynômes		Fonctions poutres	
	$w_{0\max} D/a^4 q_0$ ( $\times 10^{-5} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ )	$M_x/a^4 q_0$	$w_{0\max} D/a^4 q_0$ ( $\times 10^{-5} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ )	$M_x/a^4 q_0$
1	2,5238	-0,08076	2,5515	-0,07189
3	2,3585	-0,07872	2,3339	-0,07400
5	2,3611	-0,07907	2,3664	-0,07739
7	2,3613	-0,07916	2,3595	-0,07782
9	2,3614	-0,07893	2,3619	-0,07834
11	2,3613	-0,07907	2,3610	-0,07854
$R = 2$				
$M=N$	Polynômes		Fonctions poutres	
	$w_{0\max} D/a^4 q_0$ ( $\times 10^{-6} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ )	$M_x/a^4 q_0$	$w_{0\max} D/a^4 q_0$ ( $\times 10^{-6} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ )	$M_x/a^4 q_0$
1	7,0954	-0,02270	7,1673	-0,02019
3	6,7149	-0,03204	6,6533	-0,02709
5	6,7163	-0,03212	6,7277	-0,02959
7	6,7167	-0,03210	6,7127	-0,03055
9	6,7166	-0,03220	6,7179	-0,03107
11	6,7167	-0,03211	6,7160	-0,03136

## 21.6 PLAQUES SANDWICHES EN APPUIS SIMPLES

Nous étudions le cas d'une plaque sandwich rectangulaire, comportant deux peaux identiques constituées d'un stratifié orthotrope dont les axes principaux coïncident avec les axes de référence de la plaque ( $D_{16} = D_{26} = 0$ ) et d'une âme dont les axes principaux sont également confondus avec les axes de la plaque. Cette plaque est soumise à la charge transverse :

$$q(x, y) = q_0 \sin \pi \frac{x}{a} \sin \pi \frac{y}{b}. \quad (21.157)$$

L'étude d'un chargement quelconque se déduit de ce cas de chargement par décomposition en double série de Fourier suivant (21.8).

Le sandwich étant symétrique, nous avons (18.30) :

$$B_{ij} = 0, \quad C_{ij} = 0. \quad (21.158)$$

Les relations fondamentales de la flexion sont données par les relations (17.27) à (17.29), (18.31) et (18.32), les coefficients  $A_{ij}$ ,  $D_{ij}$  et  $F_{ij}$  étant définis à partir des relations (18.22) à (18.30), associées à (18.14) et (18.15). Les relations (17.27) et (17.28) impliquent pour un sandwich symétrique :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad (21.159)$$

et les relations fondamentales de flexion se réduisent à :

$$hG_{13}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + hG_{23}\left(\frac{\partial\varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + q = 0, \quad (21.160)$$

$$D_{11}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial x^2} + D_{66}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66})\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial x\partial y} - hG_{13}\left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) = 0, \quad (21.161)$$

$$(D_{12} + D_{66})\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial x\partial y} + D_{66}\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial x^2} + D_{22}\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial y^2} - hG_{23}\left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) = 0. \quad (21.162)$$

Nous sommes ramenés à la détermination des trois fonctions :  $w_0$ ,  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$ .

Dans le cas d'une plaque en appuis simples sur ses quatre côtés, les conditions aux appuis s'écrivent :

— sur les côtés  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$w_0 = 0, \quad \varphi_y = 0, \quad M_x = D_{11}\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + D_{12}\frac{\partial\varphi_y}{\partial y} = 0, \quad (21.163)$$

— sur les côtés  $y = 0$  et  $y = b$  :

$$w_0 = 0, \quad \varphi_x = 0, \quad M_y = D_{12}\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + D_{22}\frac{\partial\varphi_y}{\partial y} = 0. \quad (21.164)$$

Ces conditions aux appuis sont vérifiées par des fonctions de la forme :

$$\begin{aligned}\varphi_x &= A \cos \pi \frac{x}{a} \sin \pi \frac{y}{b}, \\ \varphi_y &= B \sin \pi \frac{x}{a} \cos \pi \frac{y}{b}, \\ w_0 &= C \sin \pi \frac{x}{a} \sin \pi \frac{y}{b}.\end{aligned}\quad (21.165)$$

En reportant les expressions (21.165) dans les équations (21.160) à (21.162), nous obtenons :

$$\begin{aligned}-G_{13}\pi \frac{h}{a}A - G_{23}\pi \frac{h}{b}B - \pi^2 h \left( \frac{G_{13}}{a^2} + \frac{G_{23}}{b^2} \right)C + q_0 &= 0, \\ \left( D_{11} \frac{\pi^2}{a^2} + D_{66} \frac{\pi^2}{b^2} + hG_{13} \right)A + (D_{12} + D_{66}) \frac{\pi^2}{ab}B + G_{13}\pi \frac{h}{a}C &= 0, \\ (D_{12} + D_{66}) \frac{\pi^2}{ab}A + \left( D_{66} \frac{\pi^2}{a^2} + D_{22} \frac{\pi^2}{b^2} + hG_{23} \right)B + G_{23}\pi \frac{h}{b}C &= 0.\end{aligned}\quad (21.166)$$

Ces équations peuvent être réécrites sous la forme :

$$\begin{aligned}a_1A + a_2B + a_3C &= 0, \\ a_2A + a_4B + a_5C &= 0, \\ a_3A + a_5B + a_6C &= \frac{a^2}{\pi^2}q_0,\end{aligned}\quad (21.167)$$

en posant :

$$\begin{aligned}a_1 &= D_{11} + D_{66}R^2 + G_{13} \frac{ha^2}{\pi^2}, \\ a_2 &= (D_{12} + D_{66})R, \\ a_3 &= G_{13} \frac{ha}{\pi}, \\ a_4 &= D_{66} + D_{22}R^2 + G_{23} \frac{ha^2}{\pi^2}, \\ a_5 &= G_{23} \frac{ha}{\pi}R, \\ a_6 &= h(G_{13} + G_{23}R^2),\end{aligned}\quad (21.168)$$

où  $R$  est le rapport longueur sur largeur de la plaque.

La résolution du système d'équations (21.167) conduit à :

$$A = \frac{a^2 q_0}{\pi^2 D} (a_2 a_5 - a_3 a_4), \quad (21.169)$$

$$B = \frac{a^2 q_0}{\pi^2 D} (a_2 a_3 - a_1 a_5), \quad (21.170)$$

$$C = \frac{a^2 q_0}{\pi^2 D} (a_1 a_4 - a_2^2), \quad (21.171)$$

avec

$$D = a_1 a_4 a_6 + 2 a_2 a_3 a_5 - a_1 a_5^2 - a_4 a_3^2 - a_6 a_2^2. \quad (21.172)$$

Les fonctions (21.165) avec les coefficients donnés par les relations (21.169) à (21.171) constituent les solutions au problème de flexion.

Comme exemple, nous considérons le cas d'une plaque sandwich constituée de deux peaux comportant chacune une seule couche de matériau orthotrope (composite à renfort unidirectionnel ou renfort tissu). Les couches sont caractérisées par leurs modules  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$  et  $G_{LT}$ . Le calcul des paramètres de flexion  $D_{ij}$ , exprimés par les relations (18.30) et (18.26) conduit à :

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{h h_l (h + h_l) E_L}{2 \left( 1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L} \right)}, \\ D_{22} &= \frac{h h_l (h + h_l) E_T}{2 \left( 1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L} \right)} = \frac{E_T}{E_L} D_{11}, \\ D_{22} &= \frac{h h_l (h + h_l) \nu_{LT} E_T}{2 \left( 1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L} \right)} = \nu_{LT} D_{22}, \\ D_{66} &= \frac{1}{2} h h_l (h + h_l) G_{LT}, \end{aligned} \quad (21.173)$$

ou

$$\begin{aligned} D_{11} &= \alpha \beta h^3 E_L, & D_{22} &= \alpha \beta h^3 E_T, \\ D_{12} &= \alpha \beta h^3 \nu_{LT} E_T, & D_{66} &= \alpha h^3 G_{LT}, \end{aligned} \quad (21.174)$$

avec

$$\alpha = \frac{h_l (h + h_l)}{h^2}, \quad \beta = \frac{1}{2 \left( 1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L} \right)}. \quad (21.175)$$

En reportant les expressions (21.174) de  $D_{ij}$  dans les relations (21.168), les coefficients  $a_i$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} a_1 &= \left( \alpha_1 + \beta_1 \frac{a^2}{h^2} \right) E_T h^3, & a_2 &= \alpha_2 E_T h^3, & a_3 &= \alpha_3 E_T h a, \\ a_4 &= \left( \alpha_4 + \beta_4 \frac{a^2}{h^2} \right) E_T h^3, & a_5 &= \alpha_5 E_T h a, & a_6 &= \alpha_6 E_T h, \end{aligned} \quad (21.176)$$

en posant :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha\beta \frac{E_L}{E_T} + \alpha R^2 \frac{G_{LT}}{E_T}, & \beta_1 &= \frac{1}{\pi^2} \frac{G_{13}}{E_T}, \\ \alpha_2 &= \left( \alpha\beta\nu_{LT} + \alpha \frac{G_{LT}}{E_T} \right) R, & \alpha_3 &= \frac{1}{\pi} \frac{G_{13}}{E_T} = \pi\beta_1, \\ \alpha_4 &= \alpha \frac{G_{LT}}{E_T} + \alpha\beta R^2, & \beta_4 &= \frac{1}{\pi^2} \frac{G_{23}}{E_T}, \\ \alpha_5 &= \frac{1}{\pi} \frac{G_{23}}{E_T} R = \pi\beta_4 R, & \alpha_6 &= \frac{G_{13}}{E_T} + \frac{G_{23}}{E_T} R^2 = \pi^2 (\beta_1 + \beta_4 R^2).\end{aligned}\tag{21.177}$$

En reportant les expressions (21.176) dans la relation (21.172), nous obtenons :

$$D = E_T^3 h^7 \left( d_1 + d_2 \frac{a^2}{h^2} + d_3 \frac{a^4}{h^4} \right),\tag{21.178}$$

en posant :

$$\begin{aligned}d_1 &= \alpha_1\alpha_4\alpha_6 - \alpha_6\alpha_2^2, \\ d_2 &= 2\alpha_2\alpha_3\alpha_5 + \alpha_6(\alpha_1\beta_4 + \alpha_4\beta_1) - \alpha_1\alpha_5^2 - \alpha_4\alpha_3^2, \\ d_3 &= \alpha_6\beta_1\beta_4 - \beta_1\alpha_5^2 - \beta_4\alpha_3^2.\end{aligned}\tag{21.179}$$

De même, nous pouvons écrire :

$$a_1 a_4 - a_2^2 = E_T^2 h^6 \left( c_1 + c_2 \frac{a^2}{h^2} + c_3 \frac{a^4}{h^4} \right),\tag{21.180}$$

avec

$$c_1 = \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2^2, \quad c_2 = \alpha_1\beta_4 + \alpha_4\beta_1, \quad c_3 = \beta_1\beta_4.\tag{21.181}$$

Il en résulte que la flèche maximale (flèche au centre de la plaque) s'écrit :

$$w_{0\max} = \frac{a^2 q_0}{\pi^2 E_T h} \frac{c_1 + c_2 \left( \frac{a}{h} \right)^2 + c_3 \left( \frac{a}{h} \right)^4}{d_1 + d_2 \left( \frac{a}{h} \right)^2 + d_3 \left( \frac{a}{h} \right)^4}.\tag{21.182}$$

La variation de la flèche maximale en fonction du rapport  $a/h$  est reportée sur la figure 21.6 pour une plaque carrée, dans le cas où les caractéristiques des peaux sont :

$$\frac{E_L}{E_T} = 4,5, \quad \frac{G_{LT}}{E_T} = 0,45, \quad \nu_{LT} = 0,3,\tag{21.183}$$

les modules de cisaillement de l'âme sont donnés par :

$$\frac{G_{13}}{E_T} = \frac{G_{23}}{E_T} = 0,04,\tag{21.184}$$

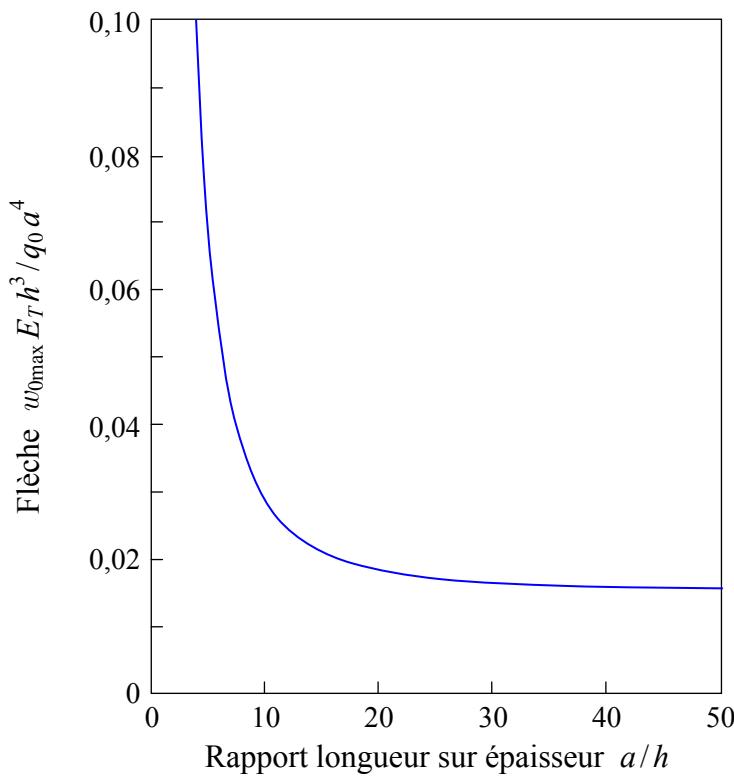


FIGURE 21.6. Flèche maximale d'une plaque sandwich soumise à une charge transverse.

et l'épaisseur des peaux est :

$$h_l = 0,1h_t = \frac{h}{8}. \quad (21.185)$$

## EXERCICES

**21.1** La plaque en appuis simples considérée dans l'exemple 21.2.2.2 est soumise à une charge  $P = 1$  kN, concentrée au point  $(x_0 = a/4, y_0 = b/4)$ .

Expliciter la flèche au point  $(x, y)$ , au point  $(x_0, y_0)$ , puis au centre de la plaque.

Expliciter les contraintes dans chaque couche au point  $(x, y)$ , au point  $(x_0, y_0)$ , puis au centre de la plaque.

**21.2** Dans le cas d'une plaque rectangulaire orthotrope encastrée sur ses quatre côtés, exprimer les intégrales intervenant dans le système (21.114), lorsque l'on utilise les fonctions polynomiales (21.122).

Les calculer pour  $m$  variant de 1 à 8.

**21.3** Expliciter le système (21.119) pour  $M = N = 3$  dans le cas d'une plaque rectangulaire encastrée soumise à une charge uniforme, en utilisant les fonctions

polynomiales (21.122), puis les fonctions poutres (21.131) et (21.132). Tenir compte des propriétés (21.139) à (21.142) dans le cas des fonctions poutres. Comparer les deux systèmes obtenus.

**21.4** On considère le système d'équations établis dans l'exercice précédent, dans le cas des fonctions poutres.

Expliciter le système pour une plaque de longueur double de la largeur et de caractéristiques :

$$D_{12} = 0,08D_{11}, \quad D_{22} = 0,50D_{11}, \quad D_{66} = 0,12D_{11}.$$

Calculer les coefficients  $A_{ij}$  (rapportés à  $a^4q_0/D_{11}$ ).

Exprimer ensuite la flèche au point  $(x, y)$ , puis au centre de la plaque. Comparer au cas d'une plaque en appuis simples sur tous les côtés.

**21.5** On considère une plaque rectangulaire encastrée sur deux côtés consécutifs et libres sur les autres. Pour résoudre le problème de flexion de la plaque soumise à une charge uniforme, on considère les fonctions poutres (24.147) et (24.148), introduites au chapitre 24.

Exprimer les intégrales intervenant dans le système (21.119) pour  $M$  et  $N$  variant de 1 à 3.

Reprendre dans le cas présent l'exercice 21.4.

## CHAPITRE 22

# Flexion de Plaques Constituées de Stratifiés Symétriques, Croisés, Équilibrés

## 22.1 PLAQUES STRATIFIÉES SYMÉTRIQUES

### 22.1.1 Expressions générales

Nous considérons une plaque symétrique soumise à une charge répartie :  $q = q(x, y)$  (figure 21.1). Dans le cas d'un stratifié symétrique les termes  $B_{ij}$  sont nuls, d'où l'absence de couplage membrane-flexion/torsion. Par contre, à la différence des stratifiés orthotropes, les coefficients  $D_{16}$  et  $D_{26}$  ne sont pas nuls, et les stratifiés symétriques présentent de ce fait un couplage flexion-torsion. Dans le cas de plaques en stratifiés symétriques, l'équation de flexion ( $u_0 = v_0 = 0$ ) est donnée par la relation (16.9) :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = q. \quad (22.1)$$

Cette équation diffère de l'équation de flexion (21.3) des stratifiés orthotropes par la présence des termes  $D_{16}$  et  $D_{26}$ , introduisant des dérivations impaires de  $w_0$ . Il en résulte que, contrairement aux stratifiés orthotropes, l'équation (22.1) de flexion ne peut être résolue, dans le cas d'appuis simples, en développant la charge suivant une double série de Fourier (21.8) et en recherchant  $w_0$  sous la forme (21.12). En raison de ces difficultés, il est nécessaire de rechercher des solutions approchées en utilisant la méthode de Ritz (paragraphe 8.4), suivant la même procédure que celle utilisée au paragraphe 21.4.

Dans le cas de stratifiés symétriques, l'énergie de déformation est donnée par la relation (16.37) :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + C. \quad (22.2)$$

Comme en (21.99), la solution approchée est recherchée sous la forme d'une série double à variables séparées :

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y). \quad (22.3)$$

Les fonctions  $X_m(x)$  et  $Y_n(y)$  sont choisies de manière à vérifier les conditions aux frontières, et les coefficients  $A_{mn}$  sont déterminés par les conditions (21.100) de stationnarité.

L'expression (22.2) de l'énergie de déformation diffère de l'expression (21.97) par l'introduction des termes en  $D_{16}$  et  $D_{26}$ . En procédant comme au paragraphe 21.4, le premier membre de l'expression (21.100) s'obtient en complétant l'expression (21.107) par les termes en  $D_{16}$  et  $D_{26}$ . Soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}_d}{\partial A_{mn}} = & \frac{1}{Ra^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ D_{11} I_{mi}^{22} J_{nj}^{00} + \left[ D_{12} \left( I_{mi}^{20} J_{nj}^{02} + I_{mi}^{02} J_{nj}^{20} \right) + 4D_{66} I_{mi}^{11} J_{nj}^{11} \right] R^2 \right. \\ & \left. + D_{22} I_{mi}^{00} J_{nj}^{22} R^4 + 2D_{16} \left( I_{mi}^{12} J_{nj}^{10} + I_{mi}^{21} J_{nj}^{01} \right) R + 2D_{26} \left( I_{mi}^{10} J_{nj}^{12} + I_{mi}^{01} J_{nj}^{21} \right) R^3 \right\} A_{ij}. \end{aligned} \quad (22.4)$$

En plus des intégrales définies en (21.108) et (21.109), cette expression introduit les intégrales correspondant à  $pq, rs = 01, 10, 12$  et  $21$ .

Le système d'équations (21.114) ou (21.115) est alors modifié conformément à l'expression précédente. Dans le cas d'une charge uniforme il s'écrit, en explicitant les produits d'intégrales sous la forme (21.116), suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ D_{11} C_{minj}^{2200} + \left[ D_{12} \left( C_{minj}^{2002} + C_{minj}^{0220} \right) + 4D_{66} C_{minj}^{1111} \right] R^2 + D_{22} C_{minj}^{0022} R^4 \right. \\ \left. + 2D_{16} \left( C_{minj}^{1210} + C_{minj}^{2101} \right) R + 2D_{26} \left( C_{minj}^{1012} + C_{minj}^{0121} \right) R^3 \right\} A_{ij} = a^4 q_0 I_m^0 J_n^0, \end{aligned}$$

pour  $m = 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots, N.$  (22.5)

Ce système remplace dans le cas de plaques symétriques le système écrit en (21.119).

## 22.1.2 Plaques stratifiées symétriques en appuis simples

Dans le cas d'une plaque rectangulaire en appuis simples sur ses quatre côtés, les conditions aux frontières sont données par les relations (21.4) et (21.5). Les expressions des moments  $M_x$  et  $M_y$  sont tirées de l'équation constitutive (14.29), et les conditions aux appuis s'écrivent :

— côtés  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$w_0 = 0, \quad M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0, \quad (22.6)$$

— côtés  $y = 0$  et  $y = b$  :

$$w_0 = 0, \quad M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0. \quad (22.7)$$

Il n'existe pas de fonctions  $X_m(x)$  et  $Y_n(y)$  de la solution approchée (22.3) satisfaisant les conditions imposées sur les moments  $M_x$  et  $M_y$ . Cette difficulté n'est cependant qu'apparente, puisque dans la méthode de Ritz, seules les conditions sur les déplacements doivent être vérifiées aux frontières. Nous choisissons donc comme fonctions  $X_m(x)$  et  $Y_n(y)$  des fonctions trigonométriques de la forme :

$$X_m(x) = \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad (22.8)$$

$$Y_n(y) = \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (22.9)$$

Les conditions aux frontières sur les déplacements sont bien vérifiées. Les conditions sur les moments n'étant pas satisfaites, il en résultera une convergence moins rapide de la solution approchée (22.3) vers la solution exacte.

Dans le cas où  $M = N = 1$ , l'approximation est de la forme :

$$w_0(x, y) = A_{11} \sin \pi \frac{x}{a} \sin \pi \frac{y}{b}, \quad (22.10)$$

où le coefficient  $A_{11}$  est obtenu en explicitant la relation (22.5). Soit :

$$A_{11} = \frac{16}{\pi^6} \frac{a^4 q_0}{D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22}R^4}, \quad (22.11)$$

où  $R$  est le rapport longueur sur largeur de la plaque. Nous observons que la première approximation ne contient pas les termes de couplage  $D_{16}$  et  $D_{26}$ . Ce fait résulte de la nullité des intégrales de  $D_{16}$  et  $D_{26}$  pour  $m = n = 1$ . La flèche est maximale au centre de la plaque, soit :

$$w_{0\max} = \frac{16}{\pi^6} \frac{a^4 q_0}{D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22}R^4}. \quad (22.12)$$

Comme application numérique, nous considérons le cas d'une plaque de longueur double de la largeur ( $R = 2$ ), constituée du stratifié déjà considéré dans le paragraphe 21.5.4, mais orienté à  $30^\circ$  des axes géométriques de la plaque. Les coefficients de flexion  $D_{ij}$ , dans les axes de la plaque, sont alors simplement déterminés en appliquant le changement d'orientation défini dans le tableau 11.6. Soit :

$$\begin{aligned} D_{11} &= 245,23 \text{ Nm}, & D_{12} &= 92,243 \text{ Nm}, & D_{16} &= 15,824 \text{ Nm}, \\ D_{22} &= 245,23 \text{ Nm}, & D_{26} &= -15,824, & D_{66} &= 94,767 \text{ Nm}. \end{aligned} \quad (22.13)$$

L'application de la relation (22.12) conduit à une flèche maximale égale à :

$$\frac{w_{0\max}}{a^4 q_0} = 2,591 \times 10^{-6} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}. \quad (22.14)$$

TABLEAU 22.1. Convergence de la solution approchée pour une plaque orthotrope orientée à 30°, lorsque le nombre de termes augmente.

$M = N$	1	3	5	7	9	11
$w_{0\max}/a^4 q_0$ ( $\times 10^{-6} \text{N}^{-1} \text{m}^{-1}$ )	2,591	2,455	2,471	2,468	2,469	2,469
$M_x/a^2 q_0$	0,01571	0,01220	0,01319	0,01279	0,01297	0,01288

Le tableau 22.1 donne les valeurs numériques obtenues pour  $M = N$  variant de 1 à 11. L'approximation à 121 termes ( $M = N = 11$ ) donne une flèche maximale égale à :

$$\frac{w_{0\max}}{a^4 q_0} = 2,469 \times 10^{-6} \text{N}^{-1} \text{m}^{-1}. \quad (22.15)$$

L'écart avec l'approximation à un terme est 4,9%. Avec une approximation à 9 termes ( $M = N = 3$ ), l'écart est réduit à 0,57%.

### 22.1.3 Plaques stratifiées symétriques encastrées

Une solution approchée au problème de la flexion de plaques rectangulaires, constituées d'un stratifié symétrique et encastrées sur ses côtés, peut être obtenues en introduisant les fonctions  $X_m(x)$  et  $Y_n(y)$  introduites en (21.131) et (21.132). Les coefficients  $A_{mn}$  de la solution approchée (22.3) sont obtenus en reportant les fonctions (21.131) et (21.132) dans le système d'équations (22.5). Ce type de solution a été considéré par J.E Ashton et M.E Waddoups [31]. La résolution du système (22.5) nécessite de déterminer au préalable les valeurs numériques des intégrales de la forme  $I_{mi}^{01}$  et  $I_{mi}^{12}$ . Ces valeurs sont reportées dans les tableaux A.5 et A.6 de l'annexe A, pour les polynômes, et dans les tableaux B.4 et B.5 de l'annexe B, pour les fonctions poutres.

Comme exemple, nous considérons le cas d'une plaque constituée d'une couche orthotrope (type composite unidirectionnel à fibres de carbone) de caractéristiques mécaniques :

$$E_L = 12E_T, \quad G_{LT} = 0,40E_T, \quad \nu_{LT} = 0,32. \quad (22.16)$$

La flèche maximale, déterminée dans le cas d'une plaque carrée ( $R = 1$ ) en utilisant 121 termes ( $M = N = 11$ ), est reportée sur la figure 22.1 en fonction de l'angle que font les axes du matériau de la couche avec les côtés de la plaque. Ces flèches, obtenues dans le cas où les termes de couplage  $D_{16}$  et  $D_{26}$  sont pris en compte, sont comparées aux flèches obtenues en négligeant les termes de couplage :  $D_{16} = D_{26} = 0$  (cas d'une plaque orthotrope par rapport aux axes de la plaque).

Les flèches maximales sont également reportées sur la figure 22.2 dans le cas d'une plaque rectangulaire du même matériau, pour une plaque ayant une

longueur double de la largeur ( $R = 2$ ). Nous observons une influence plus grande de l'orientation des axes du matériau que dans le cas d'une plaque carrée.

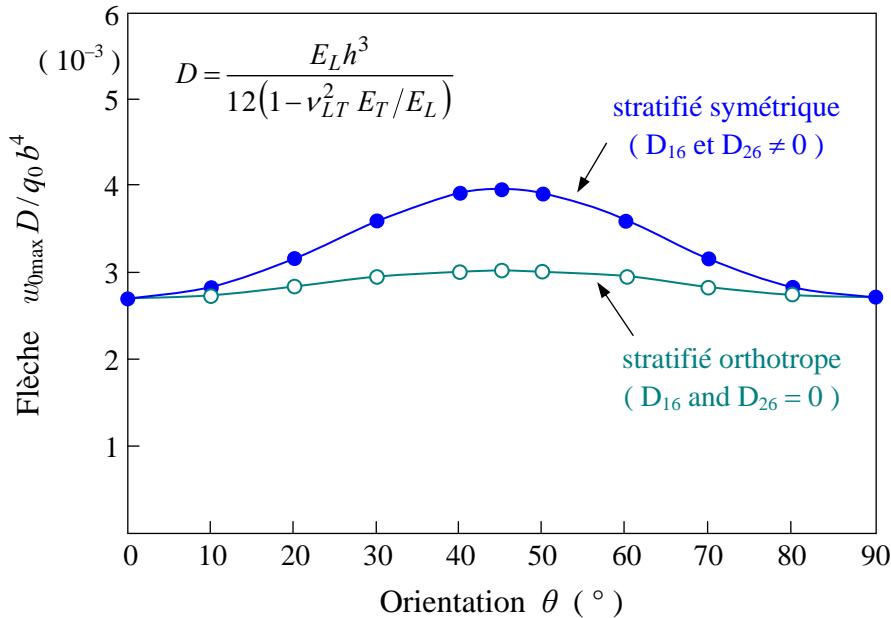


FIGURE 22.1. Flèche maximale d'une plaque symétrique carrée encastrée, constituée d'un matériau orthotrope, en fonction de l'orientation du matériau.

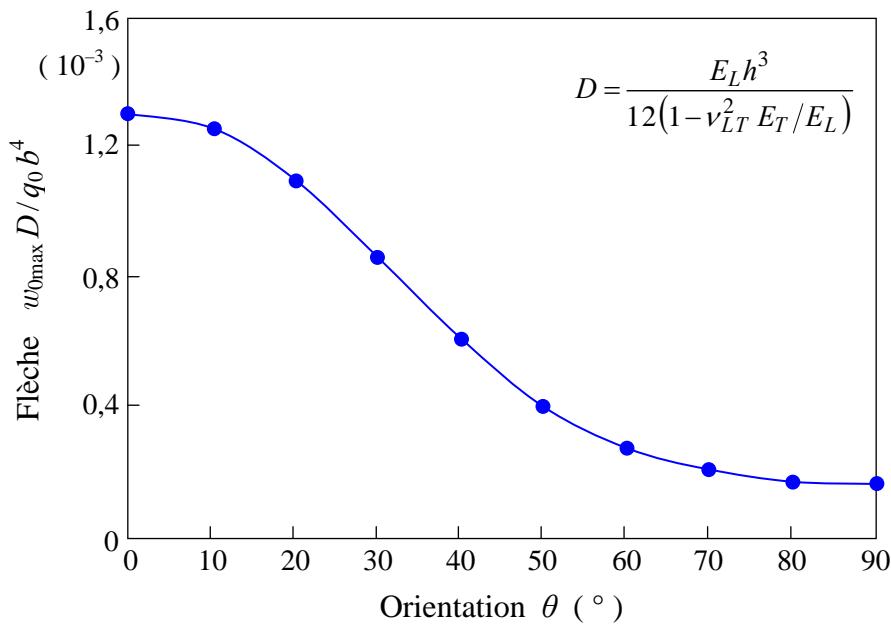


FIGURE 22.2. Flèche maximale d'une plaque symétrique rectangulaire encastrée, constituée d'un matériau orthotrope, en fonction de l'orientation du matériau.

## 22.2 PLAQUES RECTANGULAIRES CROISÉES

### 22.2.1 Expressions générales

Nous considérons une plaque rectangulaire de dimensions  $a$  et  $b$ , constituée d'un stratifié croisé  $[0^\circ/90^\circ]_p$  antisymétrique. Pour ce type de stratifié (tableau 15.3), nous avons :

$$\begin{aligned} A_{22} &= A_{11}, & A_{16} = A_{26} &= 0, \\ B_{22} &= -B_{11}, & B_{12} = B_{16} = B_{26} = B_{66} &= 0, \\ D_{22} &= D_{11}, & D_{16} = D_{26} &= 0. \end{aligned} \quad (22.17)$$

Les équations de flexion sont données par les équations (16.10) à (16.12) :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} &= 0, \\ (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{11} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} &= 0, \quad (22.18) \\ D_{11} \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - B_{11} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) &= q. \end{aligned}$$

Nous étudions le cas où chaque côté de la plaque est soumis à une liaison pivot, libre dans la direction normale au côté. Les conditions aux frontières s'écrivent dans ce cas :

— côtés  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$w_0 = 0, \quad M_x = 0, \quad v_0 = 0, \quad N_x = 0, \quad (22.19)$$

— côtés  $y = 0$  et  $y = b$  :

$$w_0 = 0, \quad M_y = 0, \quad u_0 = 0, \quad N_y = 0. \quad (22.20)$$

Les résultantes en membrane et les moments de flexion se déduisent de l'équation constitutive (14.29). Soit :

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\ M_x &= B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\ N_y &= A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{11} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\ M_y &= -B_{11} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (22.21)$$

Les conditions aux frontières s'écrivent donc :

— côtés  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$w_0 = 0, \quad M_x = B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0, \quad (22.22)$$

$$v_0 = 0, \quad N_x = A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0, \quad (22.23)$$

— côtés  $y = 0$  et  $y = b$  :

$$w_0 = 0, \quad M_y = -B_{11} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0, \quad (22.24)$$

$$u_0 = 0, \quad N_y = A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{11} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0. \quad (22.25)$$

La charge transverse  $q = q(x, y)$  est développée suivant une double série de Fourier (relation (21.8)) :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (22.26)$$

Les solutions au problème de flexion sont recherchées en écrivant les déplacements sous forme de séries doubles de Fourier, satisfaisant aux conditions aux frontières (22.22) à (22.25). Soit :

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \\ v_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b}, \\ w_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}. \end{aligned} \quad (22.27)$$

En reportant les expressions (22.27) dans le système (22.18), nous obtenons :

$$\begin{aligned} (m^2 A_{11} + n^2 R^2 A_{66}) A_{mn} + mnR(A_{12} + A_{66}) B_{mn} - m^3 \frac{\pi}{a} B_{11} C_{mn} &= 0, \\ mnR(A_{12} + A_{66}) A_{mn} + (m^2 A_{66} + n^2 R^2 A_{11}) B_{mn} + n^3 R^3 \frac{\pi}{a} B_{11} C_{mn} &= 0, \\ -m^3 B_{11} A_{mn} + n^3 R^3 B_{11} B_{mn} \\ + \left[ (m^4 + n^4 R^4) D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 R^2 \right] \frac{\pi}{a} C_{mn} &= \frac{a^4}{\pi^4} q_{mn}. \end{aligned} \quad (22.28)$$

Le déterminant de ce système d'équations s'écrit :

$$\Delta = \frac{\pi}{a} \Delta_{mn}, \quad (22.29)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta_{mn} = & \left[ (m^4 + n^4 R^4) D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) \right] \\ & \times \left[ (m^2 A_{11} + n^2 R^2 A_{66}) (m^2 A_{66} + n^2 R^2 A_{11}) - m^2 n^2 R^2 (A_{12} + A_{66})^2 \right] \\ & - B_{11}^2 \left[ m^2 n^2 R^2 (m^4 + n^4 R^4) A_{11} + 2m^4 n^4 R^4 (A_{12} + A_{66}) + (m^8 + n^8 R^8) A_{66} \right]. \end{aligned} \quad (22.30)$$

La résolution du système (22.28) conduit à :

$$A_{mn} = \frac{ma^3 B_{11}}{\pi^3 \Delta_{mn}} q_{mn} \left[ m^4 A_{66} + m^2 n^2 R^2 A_{11} + n^4 R^4 (A_{12} + A_{66}) \right], \quad (22.31)$$

$$B_{mn} = -\frac{na^3 R B_{11}}{\pi^3 \Delta_{mn}} q_{mn} \left[ m^4 (A_{12} + A_{66}) + m^2 n^2 R^2 A_{11} + n^4 R^4 A_{66} \right], \quad (22.32)$$

$$C_{mn} = \frac{a^4}{\pi^4 \Delta_{mn}} q_{mn} \left[ m^4 A_{11} A_{66} + m^2 n^2 R^2 (A_{11}^2 - A_{12}^2 - 2A_{12} A_{66}) + n^4 R^4 A_{11} A_{66} \right]. \quad (22.33)$$

Les expressions des résultantes, moments et contraintes peuvent ensuite être déterminées à partir des expressions (16.13) à (16.25).

Dans le cas d'un stratifié tel que  $B_{11} = 0$ , la solution se réduit à :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \quad v_0 = 0, \\ w_0 &= \frac{a^4}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \frac{\sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}}{(m^4 + n^4 R^4) D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66})}. \end{aligned} \quad (22.34)$$

Cette expression est confondue avec la flèche (21.14) obtenue dans le cas d'une plaque en appuis simples et constituée d'un stratifié orthotrope tel que  $D_{22} = D_{11}$ .

## 22.2.2 Influence des modules

Dans le cas d'un chargement de la forme :

$$q = q_0 \sin \pi \frac{x}{a} \sin \pi \frac{y}{b}, \quad (22.35)$$

les solutions (22.27) du problème de flexion se réduisent à :

$$\begin{aligned} u_0 &= A \cos \pi \frac{x}{a} \sin \pi \frac{y}{b}, \\ v_0 &= B \sin \pi \frac{x}{a} \cos \pi \frac{y}{b}, \\ w_0 &= C \sin \pi \frac{x}{a} \sin \pi \frac{y}{b}. \end{aligned} \quad (22.36)$$

Les amplitudes  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont exprimées suivant :

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^3 B_{11}}{\pi^3 D} q_0 \left[ A_{66} (1 + R^4) + A_{11} R^2 + A_{12} R^4 \right], \\ B &= -\frac{a^3 B_{11} R}{\pi^3 D} q_0 \left[ A_{12} + A_{11} R^2 + A_{66} (1 + R^4) \right], \\ C &= \frac{a^4}{\pi^4 D} q_0 \left[ A_{11} A_{66} (1 + R^4) + (A_{11}^2 - A_{12}^2 - 2 A_{12} A_{66}) R^2 \right], \end{aligned} \quad (22.37)$$

avec

$$D = \left[ D_{11} (1 + R^4) + 2(D_{12} + 2D_{66}) R^2 \right] \left[ (A_{11} + A_{66} R^2)(A_{66} + A_{11} R^2) - (A_{12} + A_{66})^2 R^2 \right] - B_{11}^2 \left[ A_{11} R^2 (1 + R^4) + 2(A_{12} + A_{66}) R^4 + A_{66} (1 + R^8) \right].$$

Il en résulte que dans le cas d'une plaque carrée ( $R = 1$ ), la flèche maximale s'écrit sous la forme :

$$w_{0\max} = \frac{a^4 q_0}{\pi^4} \frac{1}{2(D_{11} + D_{12} + 2D_{66})} \frac{1}{1 - \alpha \frac{B_{11}^2}{D_{11} + D_{12} + 2D_{66}}}, \quad (22.38)$$

avec

$$\alpha = \frac{A_{11} + A_{12} + 2A_{66}}{A_{11}^2 + 2(A_{11} - A_{12}) A_{66} - A_{12}^2}, \quad (22.39)$$

où le terme  $\alpha$  est indépendant du nombre de couches.

Pour un stratifié croisé antisymétrique  $[0^\circ/90^\circ]_p$ , les coefficients de rigidité sont obtenus à partir des résultats portés dans le tableau 15.3. Nous en déduisons :

$$A_{11} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{E_T}{E_L} \right) Q_{11} h, \quad A_{12} = Q_{12} h, \quad A_{66} = Q_{66} h, \quad (22.40)$$

$$B_{11} = \frac{1}{8p} \left( \frac{E_T}{E_L} - 1 \right) Q_{11} h^2, \quad (22.41)$$

$$D_{11} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{E_T}{E_L} \right) \frac{Q_{11} h^3}{12}, \quad D_{12} = \frac{Q_{12} h^3}{12}, \quad D_{66} = \frac{Q_{66} h^3}{12}, \quad (22.42)$$

avec

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, \quad Q_{66} = G_{LT}. \quad (22.43)$$

La flèche maximale peut donc se mettre sous la forme :

$$w_{0\max} = \frac{12}{\pi^4} \frac{a^4 q_0}{E_T h^3} \frac{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}{1 + \frac{E_L}{E_T} + 2\nu_{LT} + 4 \left( 1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L} \right) \frac{G_{LT}}{E_T}} f \left( \frac{E_L}{E_T}, \frac{1}{p^2} \right), \quad (22.44)$$

avec

$$f\left(\frac{E_L}{E_T}, \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{1 - \frac{3}{16p^2} \frac{\left(\frac{E_L}{E_T}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{G_{LT}}{E_T}\right) \frac{E_L}{E_T} + \left[\frac{1}{4} + (1 - 2\nu_{LT}) \frac{G_{LT}}{E_T} - \nu_{LT}^2\right]}{\left(1 - \frac{E_L}{E_T}\right)^2}}. \quad (22.45)$$

La figure 22.3 montre la variation de la flèche maximale en fonction du rapport des modules  $E_L/E_T$ , dans le cas où les couches ont les caractéristiques mécaniques suivantes :

$$\frac{G_{LT}}{E_T} = 0,50, \quad \nu_{LT} = 0,30. \quad (22.46)$$

Les résultats reportés montrent que la solution du stratifié orthotrope ( $B_{11} = 0$ ) est rapidement atteinte lorsque le nombre de couches du stratifié augmente.

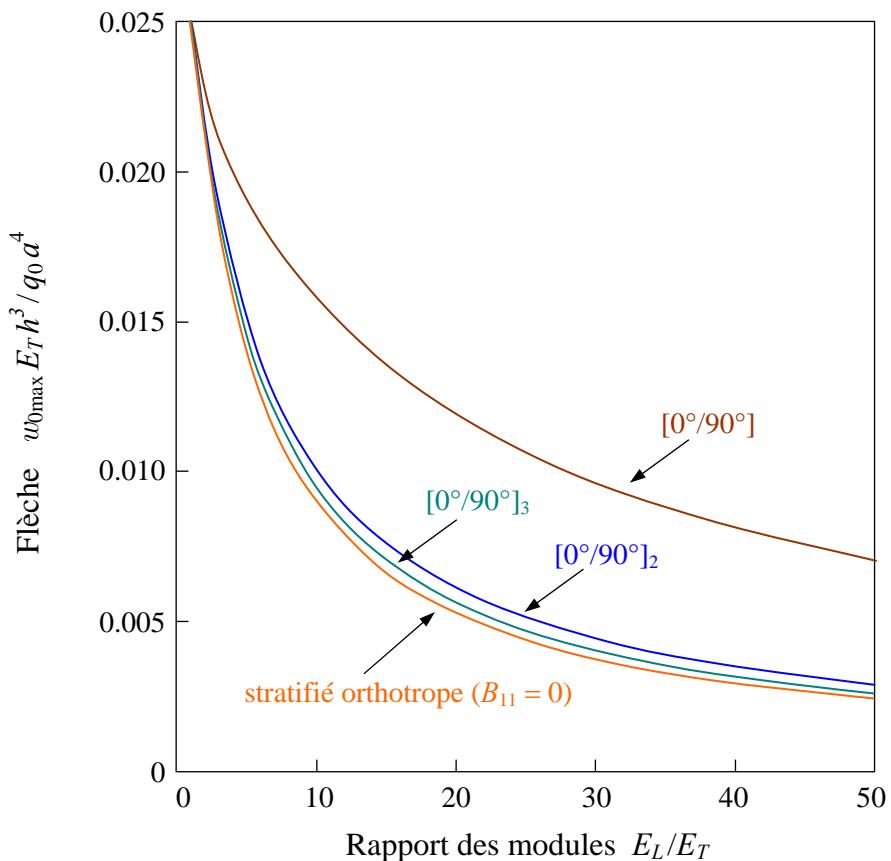


FIGURE 22.3. Flèche maximale d'une plaque carrée, constituée d'un stratifié croisé antisymétrique, en fonction du rapport des modules d'Young.

### 22.2.3 Influence du rapport longueur sur largeur

Dans le cas d'un chargement de la forme (22.35), la flèche maximale est donnée d'après (22.37) par :

$$w_{0\max} = \frac{a^4 q_0}{\pi^4 D} \left[ A_{11} A_{66} (1 + R^4) + (A_{11}^2 - A_{12}^2 - 2A_{12} A_{66}) R^2 \right]. \quad (22.47)$$

Dans le cas d'un stratifié orthotrope ( $B_{11} = 0$ ), la flèche maximale s'écrit :

$$w_{0\max} = \frac{a^4 q_0}{\pi^4} \frac{1}{D_{11}(1 + R^4) + 2(D_{12} + 2D_{66})R^4}, \quad (22.48)$$

et dans le cas d'un rapport longueur sur largeur élevé, elle se réduit à :

$$w_{0\max} = \frac{a^4 q_0}{\pi^4 D_{11} R^4} = \frac{b^4 q_0}{\pi^4 D_{11}}. \quad (22.49)$$

Cette expression est confondue avec la relation (19.37) obtenue dans le cas d'une flexion cylindrique (les rôles de  $a$  et  $b$  étant inversés dans les deux cas).

Pour un stratifié croisé antisymétrique  $[0^\circ/90^\circ]_p$ , dont les coefficients de rigidité sont exprimés en (22.40) à (22.43), la relation (22.49) peut se mettre sous la forme :

$$w_{0\max} = \frac{a^4 q_0}{\pi^4} \frac{1}{E_T h^3} \frac{1}{D(R)} \frac{1}{1 - \frac{E(R)}{p^2}}, \quad (22.50)$$

avec :

$$\begin{aligned} D(R) &= d_{11}(1 + R^4) + 2(d_{12} + 2d_{66})R^2, \\ E(R) &= \frac{b_{11}^2}{64} \frac{A(R)}{B(R)}, \\ A(R) &= a_{11}(1 + R^4)R^2 + 2(a_{12} + a_{66})R^4 + a_{66}(1 + R^8), \\ B(R) &= a_{11}a_{66}(1 + R^4) + (a_{11}^2 - a_{12}^2 - 2a_{12}a_{66})R^2, \end{aligned} \quad (22.51)$$

et

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{1}{24} \frac{1 + \frac{E_T}{E_L}}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} \frac{E_L}{E_T}, & d_{12} &= \frac{1}{12} \frac{\nu_{LT}}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, & d_{66} &= \frac{1}{12} \frac{G_{LT}}{E_T}, \\ a_{11} &= 12d_{11}, & a_{12} &= 12d_{12}, & a_{66} &= 12d_{66}, \\ b_{11} &= \frac{1}{8} \frac{\frac{E_T}{E_L} - 1}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} \frac{E_L}{E_T}. \end{aligned} \quad (22.52)$$

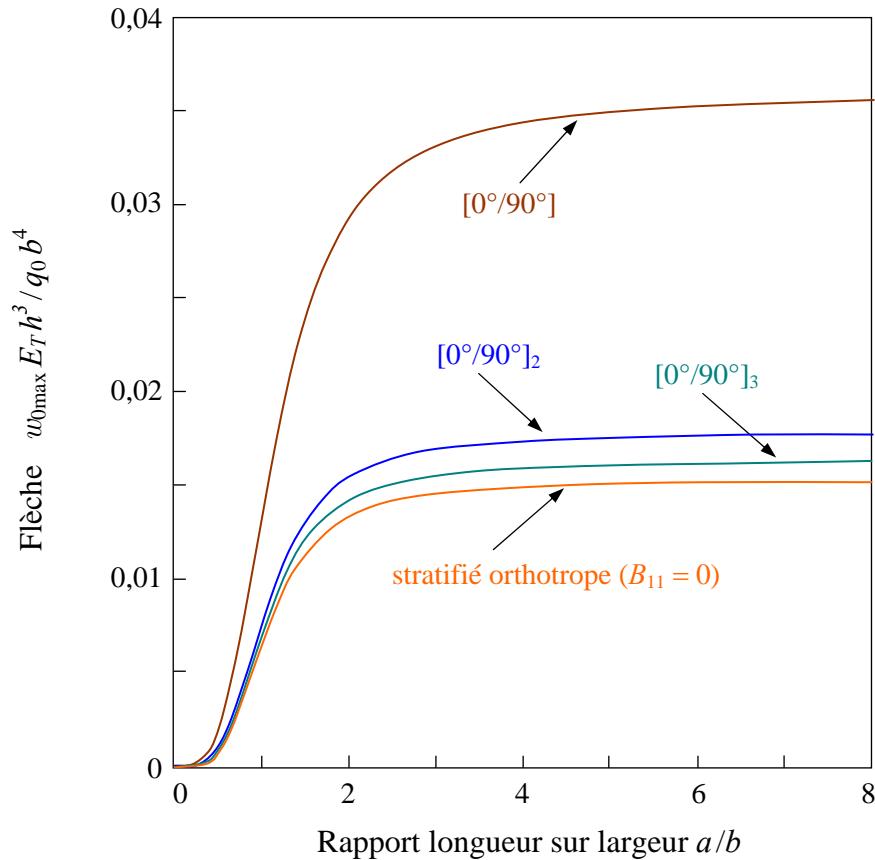


FIGURE 22.4. Flèche maximale en fonction du rapport longueur sur largeur d'une plaque rectangulaire croisée.

Dans le cas d'un stratifié orthotrope et d'une flexion cylindrique, la relation (22.51) conduit à :

$$w_{0\max} = \frac{1}{\pi^4 d_{11}} \frac{a^4 q_0}{E_T h^3 R^4} = \frac{1}{\pi^4 d_{11}} \frac{b^4 q_0}{E_T h^3}. \quad (22.53)$$

L'influence du rapport longueur sur largeur de la plaque est reportée sur la figure 22.4, dans le cas où les couches ont les caractéristiques (22.47) et pour un rapport des modules  $E_L/E_T = 15$ . Comme précédemment, nous observons que la solution du stratifié orthotrope est rapidement atteinte lorsque le nombre de couches du stratifié croisé antisymétrique augmente. La figure 22.4 montre également que la solution de la flexion cylindrique (chapitre 19) est atteinte pour des rapports longueur/largeur sensiblement égaux à 4.

## 22.3 PLAQUES RECTANGULAIRES ÉQUILIBRÉES

Nous considérons dans ce paragraphe le cas d'une plaque rectangulaire, constituée d'un stratifié équilibré  $[\pm\theta]_p$ , comportant un nombre  $n_c = 2p$  pair de couches d'épaisseur totale  $h$ . Le stratifié est alterné antisymétrique et les

coefficients de rigidité sont (relations (15.26)) exprimés par :

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= hQ'_{ij} && \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\
 A_{ij} &= 0 && \text{si } ij = 16, 26. \\
 B_{ij} &= 0 && \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\
 B_{ij} &= -\frac{h^2}{4p}Q'_{ij} && \text{si } ij = 16, 26. \\
 D_{ij} &= \frac{h^3}{12}Q'_{ij} && \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\
 D_{ij} &= 0 && \text{si } ij = 16, 26 \text{ et } n \text{ pair.}
 \end{aligned} \tag{22.54}$$

Les équations de flexion sont déduites des équations (16.1) à (16.3) et s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} &= 0, \\
 (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} &= 0, \\
 D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\
 - B_{16} \left( 3 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} \right) - B_{26} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + 3 \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \right) &= q.
 \end{aligned} \tag{22.55}$$

Nous étudions le cas où chaque côté de la plaque est soumis à une liaison pivot, libre suivant la direction du côté. Les conditions aux frontières s'écrivent alors :

— côtés  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$w_0 = 0, \quad M_x = 0, \quad u_0 = 0, \quad N_{xy} = 0, \tag{22.56}$$

— côtés  $y = 0$  et  $y = b$  :

$$w_0 = 0, \quad M_y = 0, \quad v_0 = 0, \quad N_{xy} = 0. \tag{22.57}$$

La résultante en membrane  $N_{xy}$  et les moments de flexion se déduisent de l'équation constitutive (14.29). Soit :

$$\begin{aligned}
 N_{xy} &= A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\
 M_x &= B_{16} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\
 M_y &= B_{26} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}.
 \end{aligned} \tag{22.58}$$

Les conditions aux frontières s'écrivent donc :

— côtés  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$w_0 = 0, \quad M_x = B_{16} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0, \quad (22.59)$$

$$u_0 = 0, \quad N_{xy} = A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0, \quad (22.60)$$

— côtés  $y = 0$  et  $y = b$  :

$$w_0 = 0, \quad M_y = B_{26} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0, \quad (22.61)$$

$$v_0 = 0, \quad N_{xy} = A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0. \quad (22.62)$$

La charge transverse  $q = q(x, y)$  est développée suivant une double série de Fourier. Les solutions au problème de flexion sont recherchées en écrivant les déplacements sous forme de séries doubles de Fourier, satisfaisant aux conditions aux frontières (22.59) à (22.62). Soit :

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b}, \\ v_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \\ w_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}. \end{aligned} \quad (22.63)$$

En reportant les expressions (22.63) dans les équations (22.55) de flexion, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\left( m^2 A_{11} + n^2 R^2 A_{66} \right) A_{mn} + mnR(A_{12} + A_{66})B_{mn} \\ &\quad - nR \left( 3m^2 B_{16} + n^2 R^2 B_{26} \right) \frac{\pi}{a} C_{mn} = 0, \\ &mnR(A_{12} + A_{66})A_{mn} + \left( m^2 A_{66} + n^2 R^2 A_{22} \right) B_{mn} \\ &\quad - m \left( m^2 B_{16} + 3n^2 R^2 B_{26} \right) \frac{\pi}{a} C_{mn} = 0, \\ &-nR \left( 3m^2 B_{16} + n^2 R^2 B_{26} \right) A_{mn} - m \left( m^2 B_{16} + 3n^2 R^2 B_{26} \right) B_{mn} \\ &\quad + \left[ m^4 D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2 n^2 R^2 + n^4 R^4 D_{22} \right] \frac{\pi}{a} C_{mn} = \frac{a^3}{\pi^3} q_{mn}. \end{aligned} \quad (22.64)$$

Le déterminant de ce système d'équations s'écrit :

$$\Delta = \frac{\pi}{a} \Delta_{mn}, \quad (22.65)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta_{mn} = & \left[ m^4 D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + n^4 R^4 D_{22} \right] \\ & \times \left[ (m^2 A_{11} + n^2 R^2 A_{66})(m^2 A_{66} + n^2 R^2 A_{22}) - m^2 n^2 R^2 (A_{12} + A_{66})^2 \right] \\ & + 2m^2 n^2 R^2 (A_{12} + A_{66}) + (3m^2 B_{16} + n^2 R^2 B_{26})(m^2 B_{16} + 3n^2 R^2 B_{26}) \\ & - m^2 (m^2 B_{16} + 3n^2 R^2 B_{26})^2 (m^2 A_{11} + n^2 R^2 A_{66}) \\ & - n^2 R^2 (3m^2 B_{16} + n^2 R^2 B_{26})^2 (m^2 A_{66} + n^2 R^2 A_{22}). \end{aligned} \quad (22.66)$$

La résolution du système (22.64) conduit alors à :

$$\begin{aligned} A_{mn} = & \frac{nRa^3}{\pi^3 \Delta_{mn}} q_{mn} \left[ (m^2 A_{66} + n^2 R^2 A_{22})(3m^2 B_{16} + n^2 R^2 B_{26}) \right. \\ & \left. - m^2 (A_{12} + A_{66})(m^2 B_{16} + 3n^2 R^2 B_{26}) \right], \\ B_{mn} = & \frac{ma^3}{\pi^3 \Delta_{mn}} q_{mn} \left[ (m^2 A_{11} + n^2 R^2 A_{66})(m^2 B_{16} + 3n^2 R^2 B_{26}) \right. \\ & \left. - n^2 R^2 (3m^2 B_{16} + n^2 R^2 B_{26})(A_{12} + A_{66}) \right], \\ C_{mn} = & \frac{a^4}{\pi^4 \Delta_{mn}} q_{mn} \left[ (m^2 A_{11} + n^2 R^2 A_{66})(m^2 A_{66} + n^2 R^2 A_{22}) \right. \\ & \left. - m^2 n^2 R^2 (A_{12} + A_{66})^2 \right]. \end{aligned} \quad (22.67)$$

L'expression du coefficient  $C_{mn}$  peut être écrite sous la forme :

$$C_{mn} = C_{mn}^0 \frac{1}{1 + \alpha_{ijklpq} \frac{A_{ij} B_{kl} B_{pq}}{\Delta_{mn}^0}}, \quad (22.68)$$

avec

$$\begin{aligned} C_{mn}^0 = & \frac{a^4}{\pi^4} \frac{1}{\Delta_{mn}^0} q_{mn}, \\ \Delta_{mn}^0 = & m^4 D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2 n^2 R^2 + n^4 R^4 D_{22}, \\ i, j, k, l, p, q = & 1, 2, 6. \end{aligned} \quad (22.69)$$

Lorsque le nombre de couches est assez grand, les relations (22.54) montrent que :

$$C_{mn} \approx C_{mn}^0, \quad (22.70)$$

et l'expression de la flèche est confondue avec la solution d'une plaque orthotrope ( $B_{16} = B_{26} = 0$ ), soit d'après (22.54) :

$$w_0 = \frac{12}{\pi^4} \frac{a^4}{h^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \frac{\sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}}{m^4 Q'_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (Q'_{12} + 2Q'_{66}) + n^4 R^4 Q'_{22}}. \quad (22.71)$$

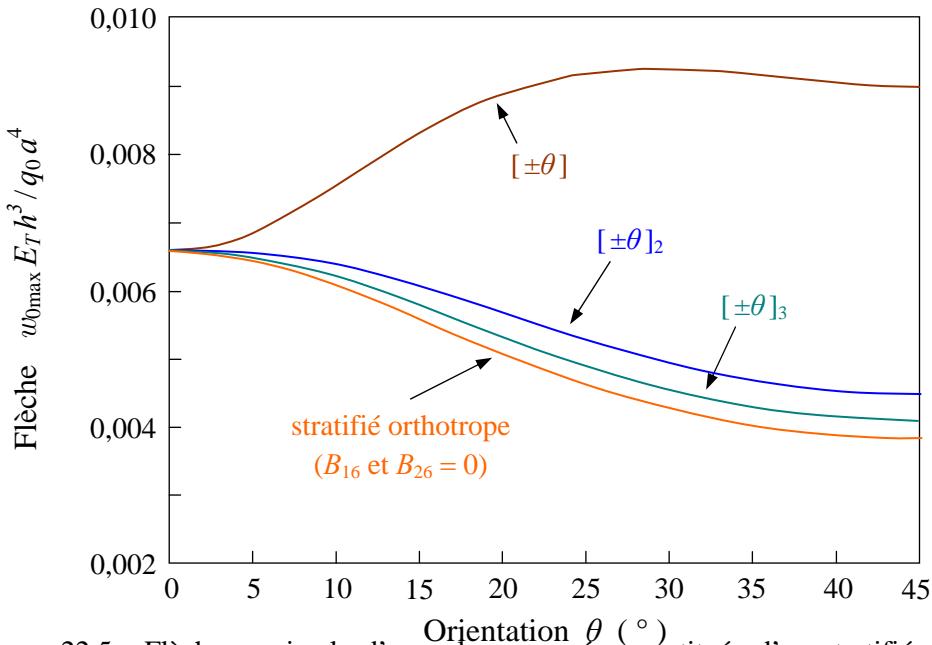


FIGURE 22.5. Flèche maximale d'une plaque carrée, constituée d'un stratifié alterné antisymétrique, en fonction de l'orientation du stratifié.

Comme dans le cas des stratifiés croisés (paragraphe 22.2), la solution orthotrope est la solution limite lorsque le nombre de couches augmente. Il en résulte que si le couplage dû aux termes  $B_{16}$  et  $B_{26}$  peut être important pour un nombre faible de couches, il décroît rapidement lorsque le nombre de couches du stratifié croît. Ces résultats sont illustrés sur la figure 22.5, dans le cas d'une plaque carrée soumise à une charge transverse de la forme :

$$q = q_0 \sin \pi \frac{x}{a} \sin \pi \frac{y}{b}. \quad (22.72)$$

La flèche maximale au centre est reportée en fonction de l'orientation  $\theta$  des couches, dans le cas où les couches ont les caractéristiques mécaniques suivantes :

$$\frac{E_L}{E_T} = 15, \quad \frac{G_{LT}}{E_T} = 0,50, \quad \nu_{LT} = 0,30. \quad (22.73)$$

## EXERCICES

**22.1** Une plaque orthotrope de longueur double de la largeur est encastrée sur ses quatre côtés. Les axes d'orthotropie du matériau font un angle de  $30^\circ$  avec les côtés de la plaque. Les rigidités en flexion dans les axes du matériau sont :

$$D_{12}^0 = 0,09 D_{11}^0, \quad D_{66}^0 = 0,125 D_{11}^0, \quad D_{22}^0 = 0,75 D_{11}^0.$$

Exprimer les rigidités en flexion dans les axes géométriques de la plaque.  
En utilisant les fonctions poutres, établir le système (22.5) pour  $M = N = 3$ .

Calculer les coefficient  $A_{ij}$  (rapportés à  $a^4 q_0 / D_{11}^0$ ).

Exprimer la flèche au point  $(x, y)$ , puis au centre de la plaque.

**22.2** Reprendre l'exercice précédent, dans le cas où la plaque a deux côtés consécutifs encastrés, les deux autres étant libres. Le problème sera résolu en prenant les fonctions poutres considérées dans l'exercice 21.5.

## CHAPITRE 23

# Flambement des Poutres et des Plaques Stratifiées et Sandwiches

### 23.1 RELATIONS FONDAMENTALES TENANT COMPTE DU FLAMBEMENT

#### 23.1.1 Introduction

Dans le cas de stratifiés symétriques ou orthotropes, les équations de la théorie classique (16.1) à (16.3) des stratifiés ou de la théorie tenant compte du cisaillement (17.27) à (17.31) sont découplées : les équations permettant de déterminer la déformée latérale du stratifié sont indépendantes des équations des déplacements en membrane. Il résulte de ces équations qu'un chargement de membrane (déplacement ou force imposée) ne peut produire que des déformations en membrane. Par exemple, si l'on considère une poutre droite (figure 23.1), encastrée suivant l'une de ses extrémités et soumise à un effort de compression  $F$ , les équations des plaques montrent que la poutre se raccourcit, la ligne moyenne restant rectiligne (figure 23.1a). Si en un point  $M$  de la poutre, on crée une petite perturbation transversale, le système revient à sa position initiale lorsque la perturbation disparaît : l'équilibre est stable.

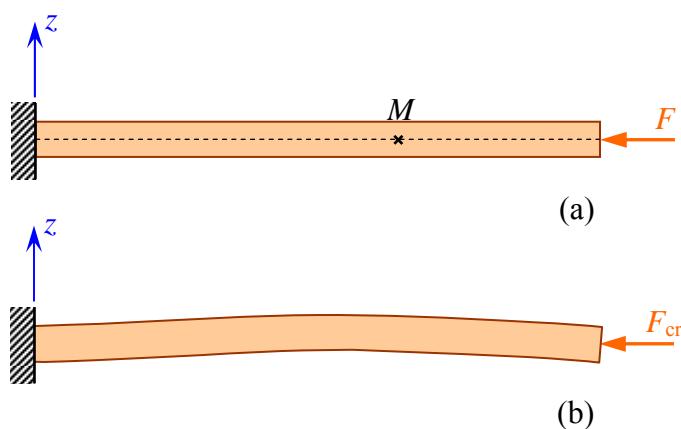


FIGURE 23.1. Flambement d'une poutre.

Si l'on fait croître progressivement la charge  $F$ , on observe toutefois que, dans le cas d'une poutre à élancement élevé et pour une certaine valeur critique  $F_{cr}$  correspondant à une valeur  $\sigma_{cr}$  de la contrainte normale bien inférieure à la contrainte de rupture, il se produit une déformation latérale (figure 23.1b). Il n'est plus possible alors d'augmenter la charge de compression sans provoquer la rupture ou une flèche très importante de la poutre. Ce phénomène est appelé *flambement* ou *instabilité élastique*.

Pour décrire ce phénomène, il est alors nécessaire de développer des équations prenant en compte un déplacement latéral des plaques dans le cas d'un chargement en membrane.

### 23.1.2 Équations des plaques tenant compte du flambement

Pour prendre en compte le phénomène de flambement, il est donc nécessaire d'écrire les équations des plaques en tenant compte de la déformation latérale, c'est-à-dire en considérant pour chaque point de la structure les coordonnées après déformation, contrairement à la théorie initiale. Nous établissons ces équations en considérant directement les résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de plaque de côtés  $dx$  et  $dy$  (figure 23.2).

La déformée latérale dans le plan ( $x, z$ ) sous l'action de la résultante  $N_x$  est schématisée sur la figure 23.3. Il en résulte que la composante suivant  $z$  de la charge  $N_x$ , exercée sur l'élément de plaque, est pour de faibles déformations :

$$\frac{1}{dx dy} \left[ \left( N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} dx \right) - N_x dy \frac{\partial w_0}{\partial x} \right]. \quad (23.1)$$

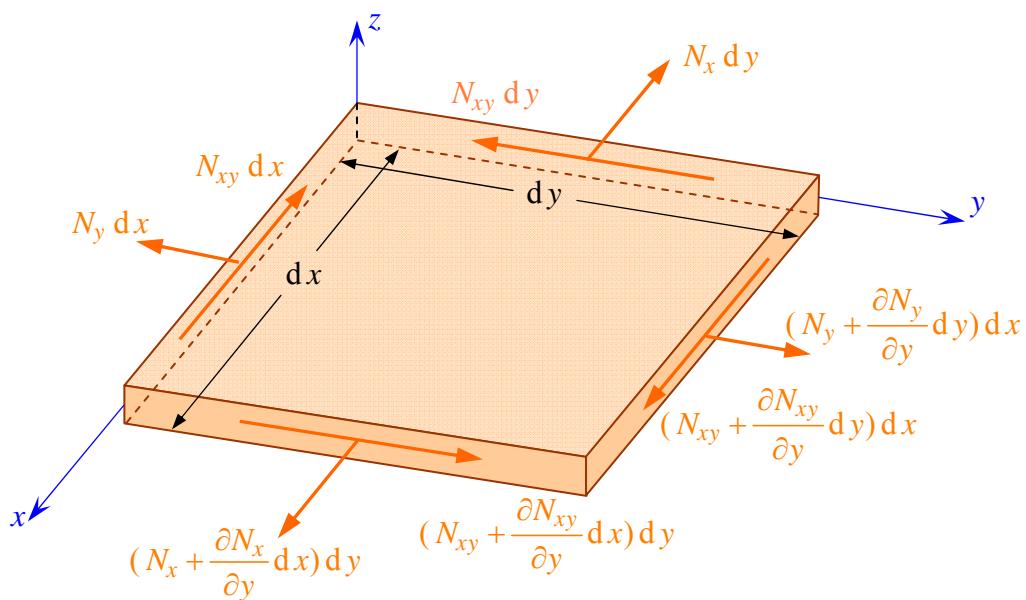


FIGURE 23.2. Résultantes en membrane exercées sur un élément de plaque.

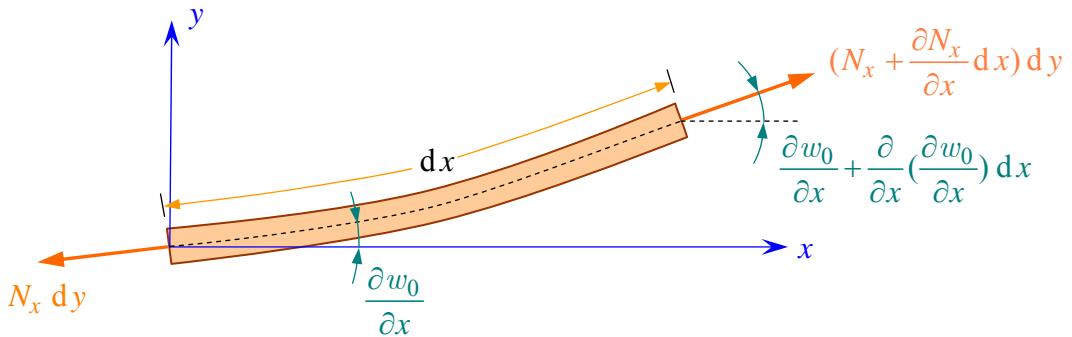


FIGURE 23.3. Résultantes normales en membrane s'exerçant sur un élément de plaque déformée.

En se limitant aux termes du deuxième ordre, la résultante par unité de surface de plaque dans la direction  $z$  est :

$$N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x}. \quad (23.2)$$

De la même manière, la composante suivant  $z$  due à la résultante  $N_y$  est :

$$N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y}. \quad (23.3)$$

La composante suivant  $z$  due à la résultante en cisaillement  $N_{xy}$  peut être évaluée à partir du schéma de la figure 23.4. Elle s'exprime suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{dx dy} & \left[ \left( N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right) \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) dy + \left( N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy \right) \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) dx \right. \\ & \left. + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} dy - N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} dx \right], \end{aligned} \quad (23.4)$$

ou en se limitant aux termes du deuxième ordre :

$$2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial x}. \quad (23.5)$$

En regroupant les expressions (23.2), (23.3) et (23.5), la composante totale suivant  $z$  s'écrit :

$$\begin{aligned} & N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ & + \frac{\partial w_0}{\partial x} \left( \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial y} \left( \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (23.6)$$

Les équations des plaques (13.56) et (13.58) montrent que les deux derniers termes de l'expression précédente sont nuls dans le cas de problèmes statiques et

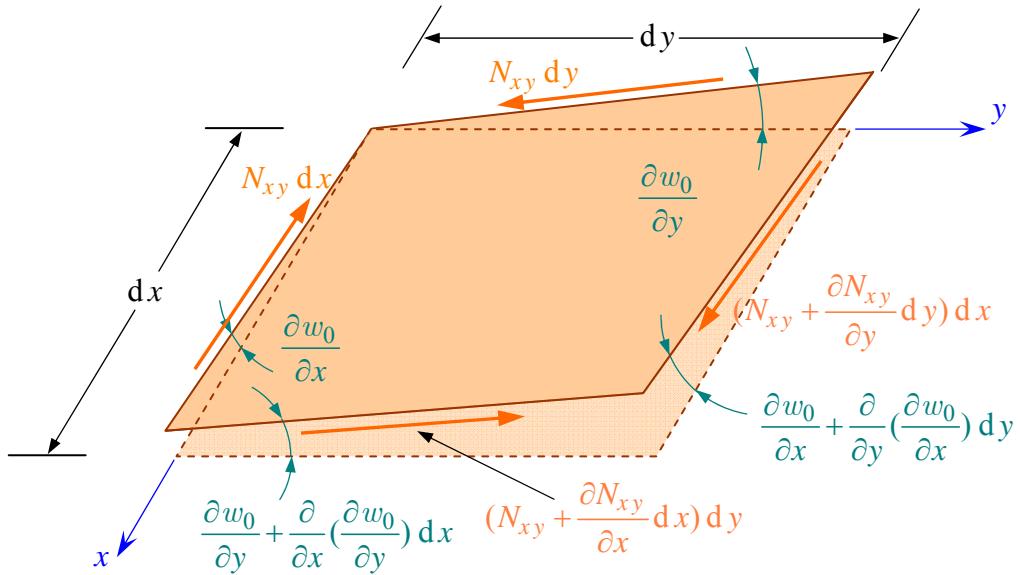


FIGURE 23.4. Résultantes de cisaillement en membrane s'exerçant sur un élément de plaque déformée.

du troisième ordre dans le cas de problèmes dynamiques. Il en résulte que la composante (23.6) suivant  $z$  se réduit à :

$$N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}. \quad (23.7)$$

Les équations des plaques prenant en compte la déformation latérale sont alors obtenues en introduisant la composante en  $z$  dans les équations (13.56). Soit :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad (23.8)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \quad (23.9)$$

$$N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \quad (23.10)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad (23.11)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0. \quad (23.12)$$

Ces équations diffèrent des équations classiques (13.56) uniquement par la modification de la troisième équation. Ces équations peuvent également être écrites en

éliminant les résultantes de cisaillement suivant une forme analogue à (13.57). Soit :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad (23.13)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \quad (23.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (23.15)$$

Ces équations diffèrent des équations (13.57) par la modification de la troisième équation.

### 23.1.3 Équations de la théorie classique des stratifiés tenant compte de la déformation latérale

Si l'équation (23.15) est utilisée sous cette forme pour déterminer la charge critique de flambement, le problème devient alors non linéaire dans le cas de stratifiés non symétriques ( $B_{ij} \neq 0$ ). Pour résoudre le problème de flambement, on est amené à utiliser une méthode de perturbation qui permet d'aboutir à des équations linéaires. Le champ des déplacements est écrit sous la forme :

$$u_0 = u_0^i + \lambda u_0, \quad v_0 = v_0^i + \lambda v_0, \quad w_0 = w_0^i + \lambda w_0, \quad (23.16)$$

où  $(u_0^i, v_0^i, w_0^i)$  est le champ des déplacements avant flambement,  $(u_0, v_0, w_0)$  est un champ admissible et quelconque des déplacements (vérifiant toutes les conditions aux limites et satisfaisant les conditions de continuité),  $\lambda$  est un scalaire infiniment petit, indépendant des coordonnées.

Le phénomène de flambement apparaît ainsi comme le processus qui produit un écart infiniment petit avec la position d'équilibre.

La relation (23.16) associée à l'équation constitutive (14.30) conduit aux relations matricielles :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_m^i + \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}^i + \lambda (\mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{N}^i + \lambda \mathbf{N}, \\ \mathbf{M} &= \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_m^i + \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}^i + \lambda (\mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{M}^i + \lambda \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (23.17)$$

En reportant les relations (23.16) et (23.17) dans l'équation (23.15), on obtient une équation du premier degré en  $\lambda$ , en négligeant les termes du second ordre en  $\lambda$ . Cette équation est vérifiée quelle que soit la valeur de  $\lambda$ , si les termes de l'équation en  $\lambda$  sont nuls, soit :

$$\frac{\partial^2 M_x^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^i}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^i}{\partial x \partial y} + N_x^i \frac{\partial^2 w_0^i}{\partial x^2} + 2N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0^i}{\partial x \partial y} + N_y^i \frac{\partial^2 w_0^i}{\partial y^2} + q^i = \rho_s \frac{\partial^2 w_0^i}{\partial t^2}, \quad (23.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_x \frac{\partial^2 w_0^i}{\partial x^2} \\ + 2N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0^i}{\partial x \partial y} + N_y^i \frac{\partial^2 w_0^i}{\partial y^2} + N_y \frac{\partial^2 w_0^i}{\partial y^2} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (23.19)$$

La première équation (23.18), confondue avec (23.15), permet de déterminer la configuration initiale (configuration élastique) dans le cas de grandes déformations latérales. Cette équation n'est toutefois pas linéaire, et la simplification usuelle consiste à déterminer la configuration initiale à l'aide de la théorie linéaire (équations (13.57)). La configuration initiale étant déterminée dans le cas de faibles déformations latérales  $w_0^i$ , il en résulte que les termes, contenant les courbures initiales, peuvent être négligés dans l'équation (23.19). Cette équation devient alors :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \quad (23.20)$$

Cette équation constitue l'équation de flambement qui est associée aux équations (23.13) et (23.14), inchangées par rapport aux équations (13.57). Les équations fondamentales de la théorie classique des stratifiés, permettant de formuler le flambement comportent donc les équations (16.1) et (16.2). Tenant compte de (23.20), l'équation (16.3) est remplacée par :

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\ - B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} \\ - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (23.21) \\ = N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q. \end{aligned}$$

Dans le cas de stratifiés symétriques ( $B_{ij} = 0$ ), les équations en membrane et les équations de flexion sont découplées, avec dans le cas d'une flexion pure :

$$u_0 = v_0 = N_x = N_y = N_{xy} = 0. \quad (23.22)$$

Il n'est plus alors nécessaire de distinguer les équations de pré-flambement et de flambement. Dans ce cas, l'équation (23.21) s'écrit :

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \\ + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q. \end{aligned} \quad (23.23)$$

Dans le cas de stratifiés orthotropes ( $D_{16} = D_{26} = 0$ ), l'équation (23.23) se réduit à :

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\ = N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q. \end{aligned} \quad (23.24)$$

Enfin, dans le cas d'une plaque homogène isotrope, nous avons (relations (15.2)) :

$$D_{11} = D_{22} = 2(D_{12} + 2D_{66}) = D, \quad (23.25)$$

avec

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12}, \quad (23.26)$$

et l'équation (23.24) de flambement s'écrit suivant la relation classique des plaques homogènes isotropes :

$$D \nabla^4 w_0 + \rho \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q, \quad (23.27)$$

En introduisant l'opérateur

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (23.28)$$

### 23.1.4 Formulation énergétique du problème de flambement

Dans le cas où l'on tient compte de la déformation latérale, les actions exercées sur le stratifié résultent des charges transverses  $q$  exercées sur les faces inférieure et supérieure du stratifié, et des charges en membrane. La variation du travail des actions exercées sur le stratifié s'écrit donc :

$$\delta W = \delta W_f + \delta W_m, \quad (23.29)$$

où la variation  $\delta W_f$  a été explicitée en (16.44). La fonction énergie  $W_m$  des actions en membrane s'exprime suivant :

$$W_m = - \iint \left( N_x^i \varepsilon'_{xx} + N_y^i \varepsilon'_{yy} + N_{xy}^i \gamma'_{xy} \right) dx dy, \quad (23.30)$$

où  $\varepsilon'_{xx}$ ,  $\varepsilon'_{yy}$  et  $\gamma'_{xy}$  sont les déformations en membrane résultant de la flèche  $w_0$ .

Ces déformations sont déduites des expressions générales (6.10), incluant les grandes déformations. Dans le cas où l'on tient compte seulement de grandes déformations latérales, les déformations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 = \varepsilon_{xx}^0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 = \varepsilon_{yy}^0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} = \gamma_{xy}^0 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}. \end{aligned} \quad (23.31)$$

Il en résulte que les déformations en membrane dues à la déformation latérale s'expriment suivant :

$$\varepsilon'_{xx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon'_{yy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2, \quad \gamma'_{xy} = \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (23.32)$$

et l'énergie  $W_m$  s'écrit :

$$W_m = - \frac{1}{2} \iint \left[ N_x^i \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + N_y^i \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy}^i \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] dx dy. \quad (23.33)$$

La variation du travail des actions en membrane s'exprime finalement en prenant la variation de (23.33), soit :

$$\delta W_m = - \iint \left( N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \delta w_0 dx dy. \quad (23.34)$$

Les formulations variationnelles du problème de flambement sont déduites des relations (8.45) dans le cas de problèmes statiques et de (8.57) dans le cas de problèmes dynamiques. Elles s'écrivent ici :

— cas de problèmes statiques :

$$\delta (U_d - W_f - W_m) = 0, \quad (23.35)$$

— cas de problèmes dynamiques :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta (U_d - W_f - W_m - E_c) dt = 0, \quad (23.36)$$

où les fonctions  $U_d$ ,  $W_f$ ,  $W_m$  et  $E_c$  sont données respectivement par les expressions (16.35) à (16.38), (16.45), (23.33) et (16.42).

### 23.1.5 Équations de la théorie avec cisaillement transverse tenant compte de la déformation latérale

Un développement semblable à celui du paragraphe 23.1.3, appliqué à l'équation (23.10), conduit à l'équation de flambement :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \quad (23.37)$$

Les équations fondamentales de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse, permettant de formuler le flambement, sont donc constituées des équations (17.27) à (17.31), l'équation (17.29) étant remplacée compte tenu de (23.37) par l'équation :

$$\begin{aligned} H_{55} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + H_{45} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + H_{44} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ + q + N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (23.38)$$

où les coefficients  $H_{ij}$  sont les coefficients généraux de cisaillement introduits dans la relation (17.53).

### 23.1.6 Équations de la théorie des sandwiches tenant compte de la déformation latérale

L'équation de flambement des plaques sandwiches est identique à l'équation (23.37). Compte tenu des éléments apportés au paragraphe 18.3.2, les équations fondamentales des plaques sandwiches permettant de formuler le flambement sont constituées des équations (17.27), (17.28), (17.29), (18.31) et (18.32), la relation (17.29) étant modifiée suivant :

$$\begin{aligned} hC'_{55} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + hC'_{45} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + hC'_{44} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ + q + N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (23.39)$$

Dans le cas où les axes principaux de l'âme coïncident avec les axes de référence de la plaque, les coefficients  $C'_{ij}^a$  sont :

$$C'_{44}^a = G_{23}^a, \quad C'_{55}^a = G_{13}^a, \quad C'_{44}^a = 0, \quad (23.40)$$

et la relation (23.39) se réduit à :

$$\begin{aligned} hG_{13}^a \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + hG_{23}^a \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ + q + N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (23.41)$$

## 23.2 FLAMBEMENT SUIVANT UNE FLEXION CYLINDRIQUE

### 23.2.1 Théorie classique des stratifiés

Nous considérons le cas d'une plaque stratifiée, comportant un nombre quelconque de couches et de longueur très grande dans la direction  $y$  (paragraphe 19.1). Cette plaque est soumise à une charge initiale de compression :  $N_x^i = -N_0$  (figure 23.5), aucune charge latérale n'étant exercée :  $q = 0$ . L'équation (19.4) est remplacée par l'équation :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + N_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0, \quad (23.42)$$

et se réduit ici (flambement statique) à :

$$D_{11} \frac{d^4 w_0}{dx^4} - B_{11} \frac{d^3 u_0}{dx^3} - B_{16} \frac{d^3 v_0}{dx^3} + N_0 \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0. \quad (23.43)$$

En dérivant les équations (19.5) et (19.6), et en reportant les résultats dans l'équation (23.43), nous obtenons l'équation différentielle en  $w_0$  :

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} + \frac{A}{D} N_0 \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0, \quad (23.44)$$

où les coefficients  $A$  et  $D$  sont exprimés en (19.7) et (19.9). Les équations du flambement sont donc constituées des équations (19.5), (19.6) et (23.44). Dans le cas où la plaque est en appuis simples sur ses côtés  $x = 0$  et  $x = a$ , les conditions aux frontières sont satisfaites avec les déplacements :

$$\begin{aligned} u_0 &= A_m \cos m\pi \frac{x}{a}, \\ v_0 &= B_m \cos m\pi \frac{x}{a}, \\ w_0 &= C_m \sin m\pi \frac{x}{a}. \end{aligned} \quad (23.45)$$

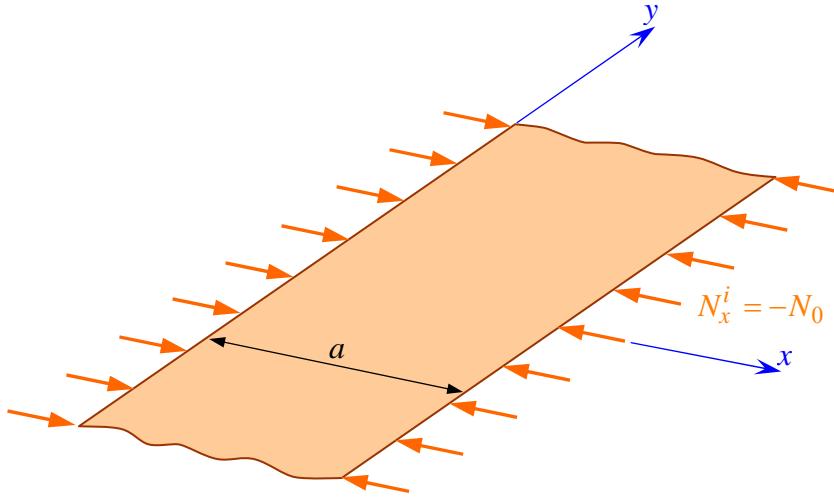


FIGURE 23.5. Plaque de longueur élevée soumise à une compression.

En reportant ces expressions dans les équations (19.5), (19.6) et (23.44), nous obtenons les équations :

$$\begin{aligned} A_m - \frac{m\pi}{a} \frac{A}{B} C_m &= 0, \\ B_m - \frac{m\pi}{a} \frac{C}{A} C_m &= 0, \\ \left( \frac{m^2\pi^2}{a^2} - \frac{A}{D} N_0 \right) C_m &= 0. \end{aligned} \quad (23.46)$$

Une solution non nulle est obtenue dans le cas où :

$$\frac{m^2\pi^2}{a^2} - \frac{A}{D} N_0 = 0. \quad (23.47)$$

D'où la charge critique correspondant au mode  $m$  :

$$N_{cr} = m^2 \frac{\pi^2}{a^2} \frac{D}{A}. \quad (23.48)$$

Il en résulte que la charge critique à prendre en compte est la charge la plus faible, correspondant au mode fondamental ( $m = 1$ , déformée en demi-onde) :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2}{a^2} \frac{D}{A}. \quad (23.49)$$

Les équations (23.46) montrent que la flèche  $w_0$  a alors une amplitude  $C_m$  quelconque. L'équilibre obtenu sous chargement critique est indifférent. Dans le cas où il n'existe pas de couplage membrane-flexion/torsion ( $B_{ij} = 0$ ), la charge critique est d'après (19.9) :

$$N'_{\text{cr}} = \frac{\pi^2}{a^2} D_{11}. \quad (23.50)$$

En présence de couplage, la charge critique s'écrit donc :

$$N_{\text{cr}} = (1 - H) N'_{\text{cr}}, \quad (23.51)$$

avec

$$H = \frac{B_{11}B + B_{16}C}{AD_{11}}. \quad (23.52)$$

Le coefficient  $H$  étant positif, il résulte que le couplage membrane-flexion/torsion diminue la charge critique de flambement.

### 23.2.2 Prise en compte du cisaillement transverse

Nous reprenons la plaque chargée en compression et étudiée dans le paragraphe précédent, dans le cas d'un stratifié orthotrope :

$$A_{16} = A_{26} = 0, \quad B_{16} = B_{26} = 0, \quad D_{16} = D_{26} = 0. \quad (23.53)$$

Avec les hypothèses faites en (19.39) et en tenant compte de l'équation (23.38), les équations (19.40) à (19.42) sont modifiées suivant :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \quad (23.54)$$

$$k_{55}F_{55} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + q + N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \quad (23.55)$$

$$B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - k_{55}F_{55} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}. \quad (23.56)$$

Dans le cas du flambement en compression ( $N_x^i = -N_0$ ) et d'un stratifié orthotrope symétrique ( $B_{ij} = 0$ ), les équations précédentes se réduisent à :

$$u_0 = 0, \quad (23.57)$$

$$k_{55}F_{55} \left( \frac{d \varphi_x}{dx} + \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) - N_0 \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0, \quad (23.58)$$

$$D_{11} \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} - k_{55}F_{55} \left( \varphi_x + \frac{d w_0}{dx} \right) = 0. \quad (23.59)$$

Dans le cas d'appuis simples, les conditions aux frontières (19.46) se réduisent à :

$$w_0 = 0, \quad M_x = D_{11} \frac{d \varphi_x}{dx} = 0. \quad (23.60)$$

Une solution aux équations (23.58) et (23.59), satisfaisant aux conditions aux

frontières (23.60) est de la forme :

$$\begin{aligned}\varphi_x &= A_m \cos m\pi \frac{x}{a}, \\ w_0 &= B_m \sin m\pi \frac{x}{a}.\end{aligned}\quad (23.61)$$

En reportant ces expressions dans les équations (23.58) et (23.59), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\left( D_{11} + \frac{a^2}{m^2 \pi^2} k_{55} F_{55} \right) A_m + \frac{a}{m\pi} k_{55} F_{55} B_m &= 0, \\ \frac{a}{m\pi} k_{55} F_{55} A_m + (k_{55} F_{55} - N_0) B_m &= 0.\end{aligned}\quad (23.62)$$

Une solution non nulle existe dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients  $A_m, B_m$  est nul, ce qui conduit à :

$$N_0 = \frac{m^2 \pi^2 k_{55} F_{55} D_{11}}{m^2 \pi^2 D_{11} + a^2 k_{55} F_{55}}. \quad (23.63)$$

La charge critique correspondant à la plus faible valeur de  $N_0$  est obtenue pour le mode fondamental  $m = 1$  :

$$N_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 k_{55} F_{55} D_{11}}{\pi^2 D_{11} + a^2 k_{55} F_{55}}. \quad (23.64)$$

La charge critique de flambement peut se mettre sous la forme :

$$N_{\text{cr}} = \frac{1}{1 + \pi^2 S} N'_{\text{cr}}, \quad (23.65)$$

où  $S$  est le terme tenant compte du cisaillement exprimé par la relation (19.52), et  $N'_{\text{cr}}$  est la charge critique de flambement en l'absence de cisaillement et donnée par l'expression (23.50). L'expression (23.65) montre que la déformation en cisaillement diminue la charge critique de flambement. L'importance du cisaillement dépend (19.55) du rapport  $\bar{Q}_{11}/\bar{G}_{13}$  et du rapport d'élancement  $a/h$ . Dans le cas d'un stratifié symétrique  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  constitué de couches unidirectionnelles contenant 60 % de fibres de verre et de caractéristiques mécaniques :

$$\begin{aligned}E_L &= 46 \text{ GPa}, & E_T &= 10,5 \text{ GPa}, & \nu_{LT} &= 0,3, \\ G_{LT} &= 4,6 \text{ GPa}, & G_{TT'} &= 4 \text{ GPa}.\end{aligned}\quad (23.66)$$

Pour ces composites, le rapport  $\bar{Q}_{11}/\bar{G}_{13}$  est proche de 10. La variation de la charge critique de flambement en fonction du rapport d'élancement  $a/h$  est reportée sur la figure 23.6 avec  $k_{55} = 1$  et  $k_{55} = \frac{2}{3}$ . Pour des valeurs du rapport supérieures à 20, la solution (23.65) est pratiquement confondue avec celle déduite de la théorie classique des stratifiés.

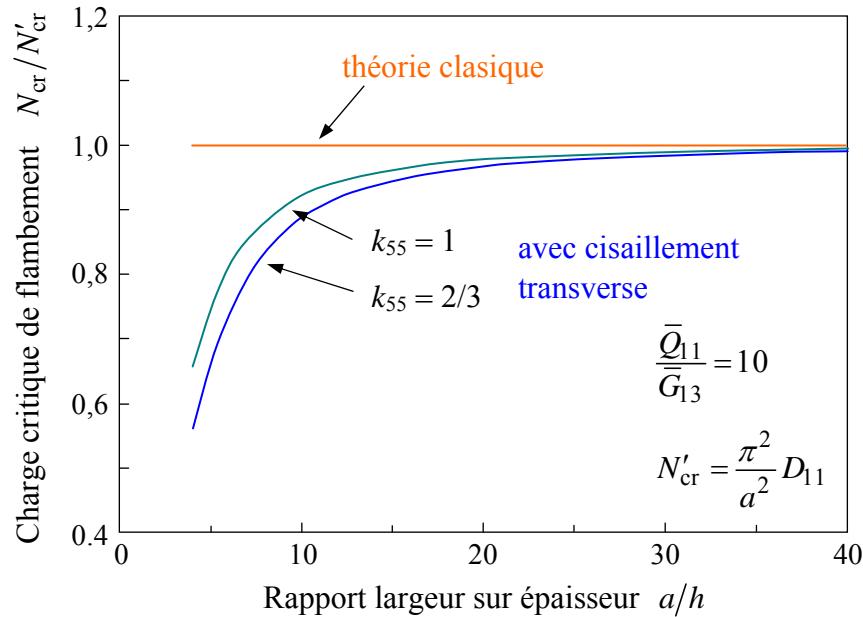


FIGURE 23.6. Charge critique de flambement d'une plaque de longueur élevée, chargée en compression, en fonction de l'élancement.

### 23.2.3 Flambement d'une plaque sandwich

Dans le cas d'une plaque, constituée du matériau sandwich considéré au paragraphe 19.6 et soumise à une compression latérale  $N_0$  (figure 23.5), les équations (19.101) et (19.102) sont modifiées suivant :

$$D_{11} \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} - h G_{13} \left( \varphi_x + \frac{d w_0}{dx} \right) = 0, \quad (23.67)$$

$$h G_{13} \left( \frac{d \varphi_x}{dx} + \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) - N_0 \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0. \quad (23.68)$$

Ces équations ont la même forme que les équations (23.58) et (23.59). Par transposition des résultats obtenus, la charge critique de flambement s'exprime sous la forme (23.65) avec

$$N_{\text{cr}} = \frac{\pi^2}{a^2} D_{11}, \quad (23.69)$$

et

$$S = \frac{1}{ha^2} \frac{D_{11}}{G_{13}}. \quad (23.70)$$

La variation de la charge critique en fonction du rapport d'élancement  $a/h$  est de la même forme (figure 23.6) que dans le cas d'une plaque stratifiée avec cisaillement transverse.

## 23.3 FLAMBEMENT DES POUTRES

### 23.3.1 Équation du flambement

L'équation (23.20) s'écrit dans le cadre de la théorie des poutres (paragraphe 20.2) sous la forme :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \quad (23.71)$$

Le moment et la flèche sont liés par l'expression (20.10), soit :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{M}{E_x I} = -b \frac{Mx}{E_x I}, \quad (23.72)$$

où  $E_x$  et  $I$  sont respectivement les module et moment de la poutre introduits en (20.11) et (20.12). L'expression (23.71) s'écrit :

$$-\frac{E_x I}{b} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \quad (23.73)$$

Dans le cas où la poutre est soumise à une compression uniforme  $N_x^i = -N_0$ , l'équation (23.73) se met sous la forme :

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{b}{E_x I} \left( N_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) = 0, \quad (23.74)$$

ou en introduisant l'expression (20.12) du moment  $I$  :

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{12}{E_x h^3} \left( N_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (23.75)$$

L'équation du flambement statique se déduit de ces équations et s'écrit sous l'une des formes :

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \frac{b}{E_x I} N_0 \frac{d^2 w_0}{dx^2} &= 0, \\ \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \frac{12}{E_x h^3} N_0 \frac{d^2 w_0}{dx^2} &= 0. \end{aligned} \quad (23.76)$$

Ces équations ont une forme identique à l'équation (23.44) obtenue dans le cas du flambement suivant une flexion cylindrique. Les résultats obtenus peuvent donc être transposés entre les deux cas.

L'équation (23.76) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0, \quad (23.77)$$

avec

$$k^2 = \frac{bN_0}{E_x I} = \frac{12N_0}{E_x h^3}. \quad (23.78)$$

La solution générale de cette équation est de la forme :

$$w_0(x) = A \cos kx + B \sin kx + Cx + D. \quad (23.79)$$

Les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  dépendent des conditions imposées aux extrémités de la poutre  $x = 0$  et  $x = L$ , où  $L$  est la longueur de la poutre.

### 23.3.2 Poutre en appuis simples

Dans le cas d'appuis simples ou d'articulations (figure 23.7) aux extrémités de la poutre, les conditions aux frontières sont aux extrémités  $x = 0$  et  $x = L$  :

$$w_0 = 0, \quad M_x = 0 \text{ ou d'après (23.72)} \quad \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0. \quad (23.80)$$

Compte tenu de (23.79), les conditions à l'extrémité  $x = 0$  conduisent à :

$$\begin{aligned} A + D &= 0, \\ A &= 0. \end{aligned}$$

Soit :

$$A = D = 0. \quad (23.81)$$

Les conditions à l'extrémité  $x = L$  s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} B \sin kL + CL &= 0, \\ B \sin kL &= 0. \end{aligned} \quad (23.82)$$

Pour avoir une solution différente de zéro, il faut :

$$kL = m\pi. \quad (23.83)$$

Il en résulte que le coefficient  $B$  est quelconque et que  $C$  est nul. La solution

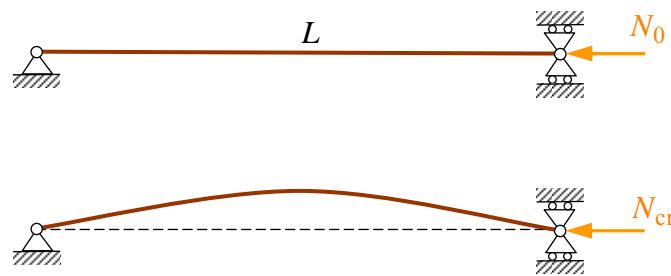


FIGURE 23.7. Poutre en appuis simples.

s'exprime alors sous la forme :

$$w_0 = B_m \sin m\pi \frac{x}{L}. \quad (23.84)$$

La relation (23.83) conduit à la résultante de compression :

$$N_0 = \frac{m^2 \pi^2 E_x h^3}{12 L^2}. \quad (23.85)$$

La charge critique correspond donc au mode fondamental ( $m = 1$ ). Soit :

$$N_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E_x h^3}{12 L^2} = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{1}{D_{11}^*}, \quad (23.86)$$

où  $D_{11}^*$  a été explicité en (20.4). La comparaison avec la relation (23.50) dans le cas d'un stratifié symétrique montre que la différence entre flexion cylindrique et flexion de poutre résulte des termes  $D_{11}$  et  $1/D_{11}^*$ . Cette différence est analogue à la différence entre déformations planes et contraintes planes de la théorie de l'élasticité. La flexion cylindrique correspond à un état de déformations planes et la théorie des poutres à un état de contraintes planes. Généralement, les résultats numériques obtenus dans les deux cas sont voisins.

### 23.3.3 Poutre encastrée

Dans le cas d'un encastrement des deux extrémités de la poutre, les conditions pour  $x = 0$  et  $x = L$  sont :

$$w_0 = 0, \quad \frac{dw_0}{dx} = 0. \quad (23.87)$$

Compte tenu de (23.79), ces conditions s'écrivent :

$$\begin{aligned} A + D &= 0, \\ kB + C &= 0, \\ A \cos kL + B \sin kL + CL + D &= 0, \\ -Ak \sin kL + kB \cos kL + C &= 0, \end{aligned} \quad (23.88)$$

ce qui conduit à :

$$D = -A, \quad C = -kB, \quad (23.89)$$

$$\begin{aligned} A(\cos kL - 1) + B(\sin kL - kL) &= 0, \\ -A \sin kL + B(\cos kL - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (23.90)$$

Une solution non nulle existe si le déterminant de la matrice des coefficients de  $A$  et  $B$  est nul dans les équations (23.90), ce qui conduit à l'équation :

$$2 - 2 \cos kL - kL \sin kL = 0. \quad (23.91)$$

Cette équation a pour solution :

$$kL = 2m\pi. \quad (23.92)$$



FIGURE 23.8. Flambement d'une poutre encastrée.

Il en résulte alors que  $B = 0$  et la solution s'exprime suivant :

$$w_0 = D \left( 1 - \cos 2m\pi \frac{x}{L} \right). \quad (23.93)$$

La relation (23.92) conduit à l'expression de la résultante en compression :

$$N_0 = \frac{m^2 \pi^2 E_x h^3}{3L^2}. \quad (23.94)$$

La charge critique correspond au mode fondamental ( $m = 1$ , figure 23.8). Soit :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E_x h^3}{3L^2}. \quad (23.95)$$

La comparaison entre les équations (23.86) et (23.95) montre que l'encastrement des extrémités multiplie par 4 la charge critique de flambement obtenue dans le cas d'appuis simples.

### 23.3.4 Autres conditions d'appuis

Diverses conditions d'appuis peuvent être étudiées de la même manière. Dans le cas d'une poutre encastrée à une extrémité et en appui simple à l'autre, la charge critique est exprimée par :

$$N_{cr} = 2,047 \frac{\pi^2 E_x h^3}{12L^2}. \quad (23.96)$$

La déformée est schématisée sur la figure 23.9.

Dans le cas d'une poutre encastrée à une extrémité, l'autre extrémité étant libre (figure 23.10), la charge critique s'exprime par :

$$N_{cr} = 0,25 \frac{\pi^2 E_x h^3}{12L^2}. \quad (23.97)$$

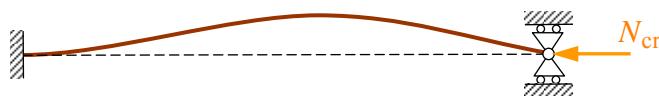


FIGURE 23.9. Flambement d'une poutre encastrée-appui simple.

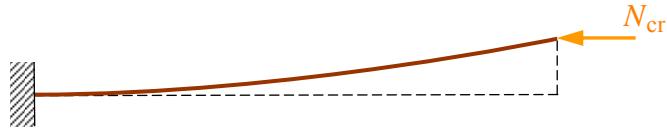


FIGURE 23.10. Flambement d'une poutre encastrée-libre.

### 23.3.5 Prise en compte du cisaillement transverse

Dans le cas où l'on tient compte du cisaillement transverse, les équations du flambement sont constituées de l'équation (20.86), et de l'équation (20.89) modifiée de manière à tenir compte de la déformation latérale. Soit :

$$\frac{1}{F_{55}^*} \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{d \varphi_x}{dx} \right) - N_0 \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0, \quad (23.98)$$

$$\frac{1}{D_{11}^*} \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} - \frac{1}{F_{55}^*} \left( \varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) = 0. \quad (23.99)$$

Ces équations sont semblables aux équations (23.58) et (23.59) obtenues dans le cas d'une flexion cylindrique, les coefficients  $D_{11}$  et  $k_{55}F_{55}$  étant remplacés respectivement par  $1/D_{11}^*$  et  $1/F_{55}^*$ . Les résultats obtenus dans le cas de la flexion cylindrique peuvent donc être transposés au cas du flambement des poutres. En particulier, la charge critique de flambement d'une poutre en appuis simples s'écrit d'après (23.65) suivant :

$$N_{\text{cr}} = \frac{1}{1 + \pi^2 S'} N'_{\text{cr}}, \quad (23.100)$$

avec

$$N'_{\text{cr}} = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{1}{D_{11}^*}, \quad (23.101)$$

et  $S$  est un coefficient de cisaillement qui peut être explicité en fonction du coefficient  $S$  introduit en (20.101) :

$$S' = \frac{F_{55}^*}{h^2 D_{11}^*} \left( \frac{h}{L} \right)^2 = \frac{1}{12} \frac{E_x}{G_{xz}} \left( \frac{h}{L} \right)^2 = \frac{S}{12}. \quad (23.102)$$

### 23.3.6 Flambement d'une poutre sandwich

Dans le cas d'une poutre soumise à une compression en membrane  $N_x^i = -N_0$ , les équations de flambement de la poutre sandwich sont semblables aux équations

(23.98) et (23.99) avec :

$$\frac{1}{F_{55}^*} = hG_{13}. \quad (23.103)$$

Les équations s'écrivent :

$$hG_{13}\left(\frac{d^2w_0}{dx^2} + \frac{d\varphi_x}{dx}\right) - N_0 \frac{d^2w_0}{dx^2} = 0, \quad (23.104)$$

$$\frac{1}{D_{11}^*} \frac{d^2\varphi_x}{dx^2} - hG_{13}\left(\varphi_x + \frac{dw_0}{dx}\right) = 0. \quad (23.105)$$

Ces équations ont la même forme que les équations (23.67) et (23.68) obtenues dans le cas du flambement suivant une flexion cylindrique. La charge critique de flambement de la poutre s'écrit donc sous la même forme :

$$N_{cr} = \frac{1}{1 + \pi^2 S'} N'_{cr}, \quad (23.106)$$

avec

$$N'_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{1}{D_{11}^*}, \quad S' = \frac{S}{12}, \quad S = \frac{E_x}{G_{13}} \left(\frac{h}{L}\right)^2. \quad (23.107)$$

La variation de la charge critique a la même forme que celle portée sur la figure 23.6. Dans le cas d'une poutre sandwich dont l'âme a un faible module de cisaillement  $G_{13}$ , le terme de cisaillement  $\pi^2 S'$  peut devenir important, diminuant fortement la charge critique de flambement.

## 23.4 FLAMBEMENT DE PLAQUES ORTHOTROPES SOUMISES À UNE COMPRESSION BIAXIALE

### 23.4.1 Expressions générales

Nous considérons (figure 23.11) une plaque rectangulaire en appuis simples sur ses quatre côtés, constituée d'un stratifié orthotrope. Cette plaque est soumise à une compression uniforme sur chaque côté, de résultantes respectives  $N_x$  et  $N_y$ , aucune charge latérale n'étant exercée ( $q = 0$ ). L'équation de flambement se déduit de l'équation (23.24), soit :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}. \quad (23.108)$$

Les conditions aux frontières s'écrivent :

— sur les côtés  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$w_0 = 0, \quad M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0, \quad (23.109)$$

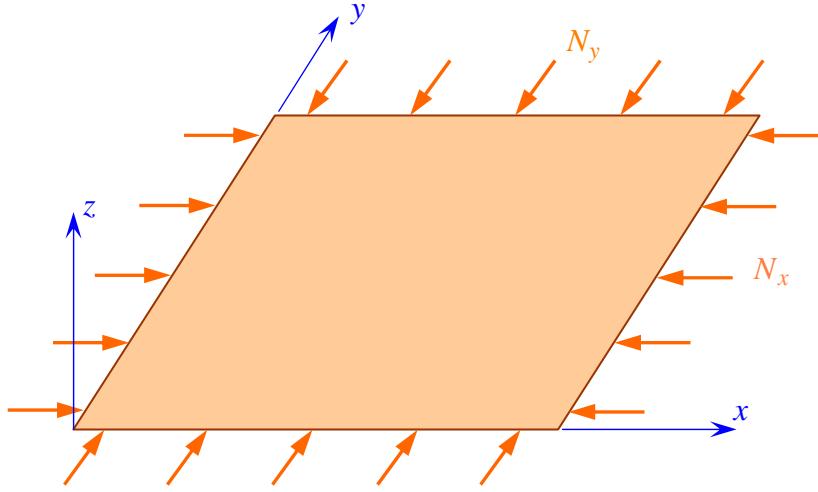


FIGURE 23.11. Plaque rectangulaire soumise à une compression biaxiale.

— sur les côtés  $y = 0$  et  $y = b$  :

$$w_0 = 0, \quad M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0. \quad (23.110)$$

Les conditions sont satisfaites avec une flèche de la forme :

$$w_0(x, y) = A_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (23.111)$$

En reportant cette expression dans l'équation (23.108), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \pi^2 A_{mn} & \left[ m^4 D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + n^4 R^4 D_{22} \right] \\ & = -A_{mn} (m^2 N_x + n^2 R^2 N_y) a^2, \end{aligned} \quad (23.112)$$

où  $R$  est le rapport longueur sur largeur de la plaque.

Une solution non nulle au problème de flambement conduit à l'expression des résultantes :

$$m^2 N_x + n^2 R^2 N_y = -\frac{\pi^2}{a^2} \left[ m^4 D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + n^4 R^4 D_{22} \right]. \quad (23.113)$$

Nous examinons le cas d'une compression uniforme sur chaque côté de la forme :

$$N_x = -N_0, \quad N_y = -\alpha N_0, \quad (23.114)$$

où  $N_0$  est positif. L'expression (23.113) conduit à :

$$N_0 = \frac{\pi^2}{a^2} \frac{\left[ m^4 D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + n^4 R^4 D_{22} \right]}{m^2 + \alpha n^2 R^2}. \quad (23.115)$$

La charge critique de flambement correspond aux valeurs de  $m$  et  $n$ , conduisant aux valeurs les plus faibles de  $N_0$ . Nous étudions divers types de chargements.

### 23.4.2 Compression uniaxiale

Dans le cas d'une compression uniaxiale suivant  $x$ , nous avons  $\alpha = 0$ , et l'expression (23.115) devient :

$$N_0 = \frac{\pi^2}{m^2 a^2} [m^4 D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + n^4 R^4 D_{22}]. \quad (23.116)$$

Pour  $m$  donné, la plus faible valeur de  $N_0$  est obtenue pour  $n = 1$ , soit :

$$N_0 = \frac{\pi^2}{m^2 a^2} [m^4 D_{11} + 2m^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + R^4 D_{22}]. \quad (23.117)$$

L'expression de la charge critique dépend du rapport longueur sur largeur de la plaque. En effet, nous avons :

$$\Delta N_0 = N_0(m+1) - N_0(m) = \frac{\pi^2}{a^2} \frac{2m+1}{m^2 (m+1)^2} D_{22} \left[ \frac{D_{11}}{D_{22}} m^2 (m+1)^2 - R^4 \right]. \quad (23.118)$$

La valeur de  $\Delta N_0$  change de signe pour :

$$R = R_m = \sqrt{m(m+1)} \left( \frac{D_{11}}{D_{22}} \right)^{1/4}. \quad (23.119)$$

Il en résulte que :

$$\text{— si } R \leq R_m : \quad N_{\text{cr}} = N_0(m), \quad (23.120)$$

$$\text{— si } R \geq R_m : \quad N_{\text{cr}} = N_0(m+1). \quad (23.121)$$

Ce qui conduit pour les premières valeurs de  $m$  à :

$$\text{— pour } R \leq \sqrt{2} \left( \frac{D_{11}}{D_{22}} \right)^{1/4} :$$

$$N_{\text{cr}} = \frac{\pi^2}{a^2} [D_{11} + 2R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + R^4 D_{22}], \quad (23.122)$$

$$\text{— pour } \sqrt{2} \left( \frac{D_{11}}{D_{22}} \right)^{1/4} \leq R \leq \sqrt{6} \left( \frac{D_{11}}{D_{22}} \right)^{1/4} :$$

$$N_{\text{cr}} = \frac{\pi^2}{4a^2} [16D_{11} + 8R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + R^4 D_{22}], \quad (23.123)$$

$$\text{— pour } \sqrt{6} \left( \frac{D_{11}}{D_{22}} \right)^{1/4} \leq R \leq \sqrt{12} \left( \frac{D_{11}}{D_{22}} \right)^{1/4} :$$

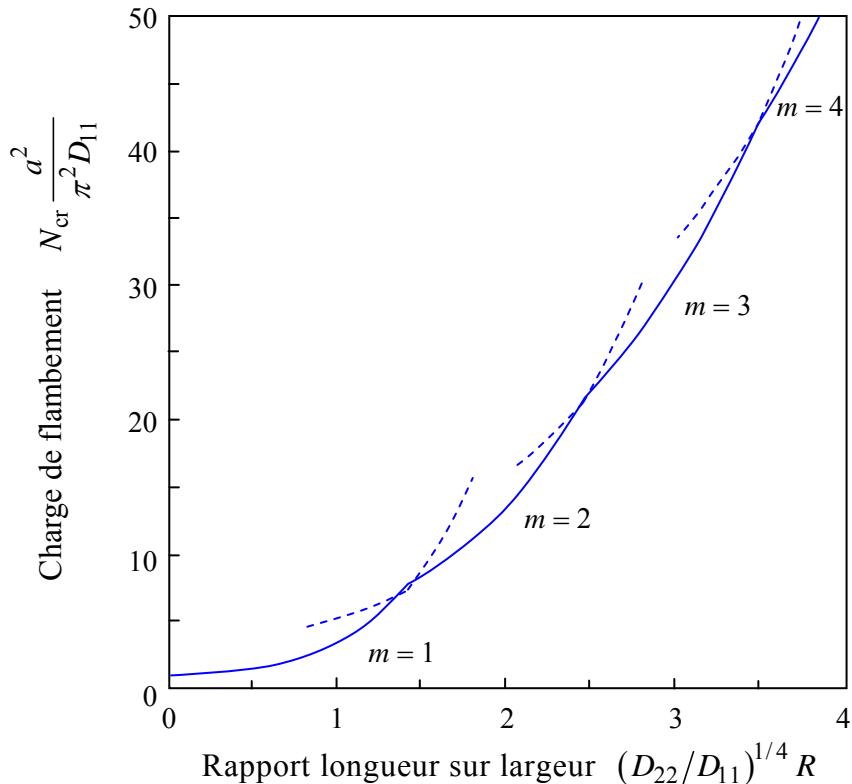


FIGURE 23.12. Variation de la charge critique de flambement d'une plaque en compression uniaxiale, en fonction du rapport longueur sur largeur de la plaque.

$$N_{\text{cr}} = \frac{\pi^2}{9a^2} [81D_{11} + 18R^2(D_{12} + 2D_{66}) + R^4 D_{22}]. \quad (23.124)$$

La variation de la charge critique de flambement en fonction du rapport longueur sur largeur de la plaque est reportée sur la figure 23.12 pour :

$$D_{11} = D_{22}, \quad D_{12} + 2D_{66} = 0,7D_{22}. \quad (23.125)$$

Pour les valeurs (23.119) du rapport longueur sur largeur, deux modes de flambement, conduisant à la même valeur de la charge critique, sont possibles :

$$w_0 = A_{m1} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin \pi \frac{y}{b}, \quad (23.126)$$

et

$$w_0 = A_{m+1,1} \sin(m+1)\pi \frac{x}{a} \sin \pi \frac{y}{b}. \quad (23.127)$$

### 23.4.3 Plaque carrée soumise à une compression biaxiale

Dans le cas d'une plaque carrée soumise à une compression biaxiale de valeurs identiques sur les deux côtés, nous avons  $\alpha = 1$  et  $R = 1$ . L'expression (23.115)

s'écrit :

$$N_0 = \frac{\pi^2}{(m^2 + \alpha n^2) a^2} \left[ m^4 D_{11} + 2m^2 n^2 (D_{12} + 2D_{66}) + n^4 D_{22} \right]. \quad (23.128)$$

Cette expression montre que, pour  $D_{11} \geq D_{22}$ , la plus faible valeur de  $N_0$  est obtenue pour  $m = 1$ , soit :

$$N_0 = \frac{\pi^2}{(1+n^2) a^2} D_{22} \left[ \frac{D_{11}}{D_{22}} + 2n^2 \frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}} + n^4 \right]. \quad (23.129)$$

Pour  $n = 1$  :

$$N_0(1) = \frac{\pi^2}{a^2} D_{22} \frac{1}{2} \left[ \frac{D_{11}}{D_{22}} + 2 \frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}} + 1 \right], \quad (23.130)$$

et pour  $n = 2$  :

$$N_0(2) = \frac{\pi^2}{a^2} D_{22} \frac{1}{5} \left[ \frac{D_{11}}{D_{22}} + 8 \frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}} + 16 \right]. \quad (23.131)$$

La comparaison des expressions (23.130) et (23.131) montre que dans le cas où :

$$\frac{D_{11}}{D_{22}} \leq 2 \frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}} + 9, \quad (23.132)$$

la charge critique correspond à  $n = 1$ , soit :

$$N_{\text{cr}} = N_0(1), \quad (23.133)$$

et le mode de flambement est :

$$w_0 = A_{l1} \sin \pi \frac{x}{a} \sin \pi \frac{y}{b}. \quad (23.134)$$

Dans le cas où :

$$\frac{D_{11}}{D_{22}} \geq 2 \frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}} + 9, \quad (23.135)$$

la charge critique correspond à  $n = 2$ , soit :

$$N_{\text{cr}} = N_0(2), \quad (23.136)$$

et le mode de flambement est :

$$w_0 = A_{l2} \sin \pi \frac{x}{a} \sin 2\pi \frac{y}{b}. \quad (23.137)$$

## 23.5 FLAMBEMENT DE PLAQUES ORTHOTROPES SOUMISES À DES CONDITIONS QUELCONQUES

### 23.5.1 Expressions générales

Nous considérons une plaque rectangulaire, constituée d'un stratifié orthotrope

dont les axes du matériau coïncident avec les axes géométriques de la plaque. Cette plaque est soumise à des forces uniformes de compression ( $N_x$  sur les côtés  $x = 0$  et  $x = a$ ,  $N_y$  sur les côtés  $y = 0$  et  $y = b$ ) et de cisaillement ( $N_{xy}$  sur les quatre côtés). Les conditions aux frontières sur les quatre côtés sont à priori quelconques.

Nous recherchons une solution au problème du flambement par la méthode de Ritz. En l'absence de charges transversales, l'association des expressions (8.46), (16.38), (23.29) et (23.33) conduit à l'expression suivante de l'énergie potentielle totale :

$$U = \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 + N_x \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] dx dy. \quad (23.138)$$

La solution approchée est recherchée sous la forme usuelle d'une série double à variables séparées :

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y), \quad (23.139)$$

où les fonctions  $X_m(x)$  et  $Y_n(y)$  doivent constituer des bases fonctionnelles, et sont choisies de manière à vérifier les conditions aux frontières sur les quatre côtés. Les coefficients  $A_{mn}$  sont obtenus à partir des conditions (8.62) de stationnarité qui s'écrivent :

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial A_{mn}} = 0 \quad \begin{aligned} m &= 1, 2, \dots, M, \\ n &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (23.140)$$

En procédant comme au paragraphe 21.4 et en tenant compte de l'expression (21.107), nous obtenons facilement le système d'équations des coefficients  $A_{ij}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N & \left\{ D_{11} I_{mi}^{22} J_{nj}^{00} + \left[ D_{12} (I_{mi}^{20} J_{nj}^{02} + I_{mi}^{02} J_{nj}^{20}) + 4D_{66} I_{mi}^{11} J_{nj}^{11} \right] R^2 + D_{22} I_{mi}^{00} J_{nj}^{22} R^4 \right. \\ & \left. + a^2 \left[ N_x I_{mi}^{11} J_{nj}^{00} + N_y I_{mi}^{00} J_{nj}^{11} R^2 + N_{xy} (I_{mi}^{10} J_{nj}^{01} + I_{mi}^{01} J_{nj}^{10}) R \right] \right\} A_{ij} = 0, \\ \text{pour } m &= 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (23.141)$$

Le système d'équations (23.141) peut également être réécrit en explicitant le produit des intégrales sous la forme (21.116). Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N & \left\{ D_{11} C_{minj}^{2200} + \left[ D_{12} (C_{minj}^{2002} + C_{minj}^{0220}) + 4D_{66} C_{minj}^{1111} \right] R^2 + D_{22} C_{minj}^{0022} R^4 \right. \\ & \left. + a^2 \left[ N_x C_{minj}^{1100} + N_y C_{minj}^{0011} R^2 + N_{xy} (C_{minj}^{1001} + C_{minj}^{0110}) R \right] \right\} A_{ij} = 0, \\ \text{pour } m &= 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (23.142)$$

Dans les équations précédentes  $R$  est le rapport entre la longueur et la largeur de la plaque.

Une solution non nulle du système (23.141) ou (23.142) est obtenue dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients  $A_{ij}$  du système s'annule. Cette condition permet de déterminer la combinaison de plus faible valeur des résultantes  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$  qui annule le déterminant.

### 23.5.2 Plaques orthotropes encastrées soumises à un cisaillement uniforme

Comme exemple du cas général traité dans le paragraphe précédent, nous recherchons la solution au problème de flambement d'une plaque orthotrope encastrée sur ses quatre côtés et soumise à un cisaillement uniforme sur les quatre côtés, de résultante  $N_{xy} = S$  (figure 23.13). Le système d'équations (23.142) se réduit dans ce cas à :

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ D_{11} C_{minj}^{2200} + [D_{12} (C_{minj}^{2002} + C_{minj}^{0220}) + 4D_{66} C_{minj}^{1111}] R^2 + D_{22} C_{minj}^{0022} R^4 + a^2 S (C_{minj}^{1001} + C_{minj}^{0110}) R \right\} A_{ij} = 0, \quad (23.143)$$

pour  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Les conditions d'enca斯特ment sur les quatre côtés ont été écrites en (21.120) et (21.121).

La solution approchée (23.139) est recherchée en utilisant les fonctions  $X_m$  et  $Y_n$  introduites en (21.131) et (21.132). Ces fonctions s'expriment en fonction des

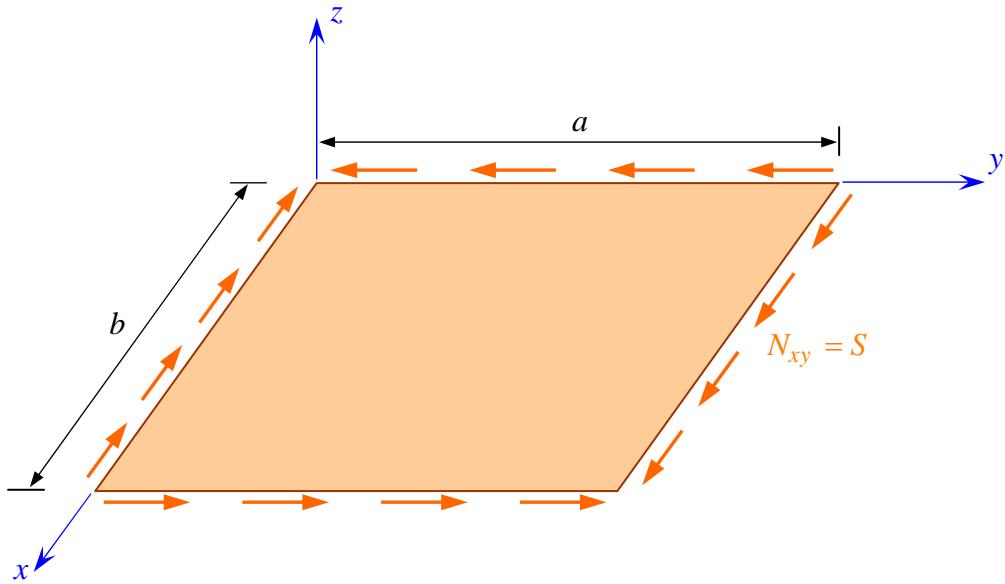


FIGURE 23.13. Plaque rectangulaire soumise à un cisaillement.

coefficients  $\lambda_i$  et  $\gamma_i$  ( $i = m, n$ ) dont les valeurs sont reportées dans le tableau 21.3. Par ailleurs les valeurs des intégrales intervenant dans le système (23.143) ont été déterminées au paragraphe 21.5.3 (expressions (21.139) à (21.142) et tableaux B.1 à B.5 de l'annexe B).

Les intégrales ayant été évaluées, le système (23.143) pourra être résolu numériquement comme un problème aux valeurs propres et vecteurs propres, pour lequel les valeurs propres sont les valeurs  $S$  des charges de flambement et les vecteurs propres déterminent les modes de flambement. La charge critique de flambement correspond à la plus faible des valeurs de  $S$ .

Pour  $M = N = 1$ , les intégrales multiplicatives de  $S$  sont nulles, et la charge correspondante de flambement est infinie. La première approximation est alors obtenue pour  $M = N = 2$ . En explicitant les intégrales, les équations (23.143) s'écrivent :

$$\begin{aligned} [500,56D_{11} + 302,71(D_{12} + 2D_{66})R^2 + 500,56D_{22}R^4]A_{11} + 22,34a^2SRA_{22} &= 0, \\ 22,34a^2SRA_{11} + [3803,5D_{11} + 4241,2(D_{12} + 2D_{66})R^2 + 3803,5D_{22}R^4]A_{22} &= 0, \\ A_{12} &= 0, \quad A_{21} = 0. \end{aligned} \quad (23.144)$$

Une solution non nulle est obtenue en annulant le déterminant, ce qui conduit à la charge critique de flambement :

$$\begin{aligned} S_{\text{cr}} = \pm \left\{ \left[ 1,904D_{11}^2 + (3,808D_{11}D_{22} + 1,284(D_{11} + 2D_{66})^2)R^4 \right. \right. \\ \left. \left. + 3,274(D_{11} + D_{22}R^4)(D_{12} + 2D_{66})R^2 + 1,904D_{22}^2R^8 \right] \frac{10^6}{499,08Ra^2} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (23.145)$$

Le signe  $\pm$  montre que la charge de cisaillement peut être positive ou négative : il n'y a pas de direction préférentielle du cisaillement critique.

Pour le cas d'une plaque orthotrope telle que :

$$D_{11} = 10D_{22}, \quad D_{12} + 2D_{66} = 1,2D_{22}, \quad a = b, \quad (23.146)$$

l'approximation (23.145) conduit, dans le cas des fonctions poutres, à :

$$S_{\text{cr}} = \pm 74,297 \frac{D_{11}}{a^2}. \quad (23.147)$$

TABLEAU 23.1. Charge critique de flambement en cisaillement d'une plaque carrée orthotrope.

$M = N$	2	4	6	8	10
$k$ (fonctions poutres)	74,297	47,673	47,426	47,393	47,386
$k$ (polynômes)	76,590	48,257	47,412	47,382	47,382

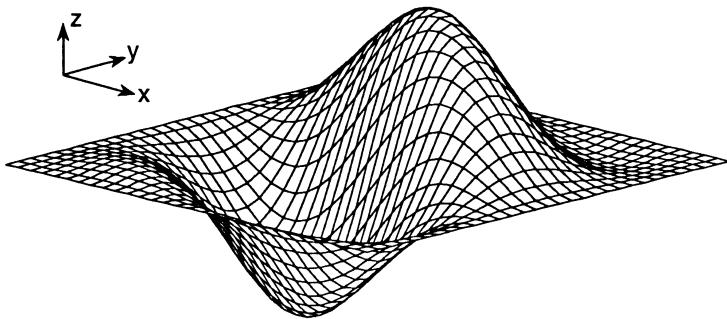


FIGURE 23.14. Flambement en cisaillement d'une plaque orthotrope carrée.

Les valeurs obtenues en utilisant un nombre plus élevé de termes dans la série (23.139) sont reportées dans le tableau 23.1, dans le cas des approximations par les fonctions poutres et par les polynômes. Ces valeurs montrent que la convergence est lente et que l'approximation (23.147) à deux termes est très éloignée de la valeur réelle.

Dans le cas d'une plaque isotrope, l'équation (23.145) se réduit à :

$$S_{\text{cr}} = \pm 176 \frac{D}{a^2}, \quad D = D_{11} = D_{22} = D_{12} + 2D_{66}, \quad (23.148)$$

alors que la solution, par exemple [32], est :

$$S_{\text{cr}} = \pm 145 \frac{D}{a^2}. \quad (23.149)$$

L'approximation à deux termes conduit à une erreur supérieure à 20%.

La figure 23.14 schématisé la déformation en flambement de la plaque orthotrope considérée, obtenue en utilisant un grand nombre de termes dans la série (23.139). Cette figure montre la dissymétrie de la déformée, due à l'orthotropie de la plaque.

## EXERCICES

**23.1** Une poutre est constituée d'un stratifié symétrique comportant cinq couches. Les couches 1, 3 et 5 sont des couches à renfort mat de caractéristiques:

$$E_L = E_T = 8 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,30, \quad G_{LT} = 3 \text{ GPa}.$$

Les couches 1 et 5 ont une épaisseur de 1 mm. La couche 3 a une épaisseur double égale à 2 mm.

Les couches 2 et 4 sont des couches à renfort unidirectionnel d'épaisseurs égales à 1,5 mm et de caractéristiques.

$$E_L = 45 \text{ GPa}, \quad E_T = 10 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,30, \quad G_{LT} = 5 \text{ GPa}.$$

Déterminer la charge critique de flambement d'une poutre de longueur  $L$  suivant que la poutre est en appuis simples ou encastrée aux deux extrémités.

Reprendre cette question lorsque les couches précédentes sont modifiées de la manière suivante. Le stratifié comporte 3 couches. Les couches 1 et 3 sont des couches (épaisseur égales à 2mm), à renfort mat précédent. La couche 2 est une couche double (épaisseur égale à 3 mm) du renfort unidirectionnel précédent.

**23.2** Le stratifié symétrique à cinq couches considéré précédemment constitue par moitié les peaux d'une poutre sandwich dont l'âme isotrope a une épaisseur de 30 mm et les caractéristiques mécaniques sont :

$$E_a = 70 \text{ MPa}, \quad G_a = 30 \text{ MPa}.$$

Déterminer la charge critique de flambement d'une poutre de longueur  $L$ , encastrée aux deux extrémités. Comparer au résultat obtenu en 23.1.

**23.3** Une plaque carrée constituée du stratifié à cinq couches considéré dans l'exercice 23.1 est en appuis simples sur ses quatre côtés.

Exprimer la charge critique de flambement (rapportée à la longueur  $a$  du côté de la plaque) et le mode de flambement dans le cas d'une compression uniaxiale suivant la direction  $L$ , suivant la direction  $T$  ; dans le cas d'une compression biaxiale.

**23.4** Expliciter le système (23.143) pour  $M = N = 3$ . Déterminer la charge critique en cisaillement et le mode de flambement d'une plaque carrée constituée du stratifié symétrique à cinq couches considéré dans l'exercice 23.1.

Reprendre cette question dans le cas où la plaque est constituée du matériau sandwich considéré dans l'exercice 23.5.

## CHAPITRE 24

# Vibration des Poutres et des Plaques Stratifiées et Sandwiches

## 24.1 INTRODUCTION

Dans le cas où le temps est pris en compte, le champ général des déplacements en un point  $(x, y, z)$  à l'instant  $t$  s'écrit pour un schéma du premier ordre sous la forme (13.27) :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t). \end{aligned} \quad (24.1)$$

Les fonctions  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  sont solutions des relations fondamentales (17.27) à (17.31). En l'absence de cisaillement transverse, les fonctions  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  s'expriment (14.2) en fonction de  $w_0$ , et le champ des déplacements est entièrement déterminé par la connaissance des fonctions  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ . Ces fonctions sont solutions des relations fondamentales (16.1) à (16.3), en tenant compte éventuellement de l'équation (23.21) dans le cas de grandes déformations transversales en présence d'un chargement en membrane.

L'analyse de la vibration des plaques consiste d'abord à rechercher les fréquences propres de vibration. Cette recherche s'effectue généralement en exprimant, par exemple en absence de cisaillement transverse, le champ des déplacements sous la forme :

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= u_0(x, y) e^{i\omega t}, \\ v_0(x, y, t) &= v_0(x, y) e^{i\omega t}, \\ w_0(x, y, t) &= w_0(x, y) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (24.2)$$

où  $\omega$  est la fréquence de vibration de la plaque. La détermination des fréquences propres est obtenue ensuite en reportant ces expressions dans les relations fondamentales. Les fréquences propres peuvent également être obtenues par la méthode de Ritz (paragraphe 8.4). L'énergie cinétique (16.42) s'exprime alors suivant

l'expression :

$$E_c = \frac{1}{2} \omega^2 \iint \rho_s (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) dx dy, \quad (24.3)$$

où l'intégrale est étendue aux dimensions de la plaque.

## 24.2 FLEXION CYLINDRIQUE

### 24.2.1 Théorie classique des stratifiés

Dans le cas d'une plaque stratifiée soumise à une charge de compression initiale  $-N_0$ , aucune charge latérale n'étant exercée ( $q = 0$ ), les relations fondamentales sont données par les équations (19.2), (19.3) et (23.42) :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad (24.4)$$

$$A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \quad (24.5)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + N_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0. \quad (24.6)$$

Soit en tenant compte de (24.2) :

$$A_{11} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + A_{16} \frac{d^2 v_0}{dx^2} - B_{11} \frac{d^3 w_0}{dx^3} + \rho_s \omega^2 u_0 = 0, \quad (24.7)$$

$$A_{16} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + A_{66} \frac{d^2 v_0}{dx^2} - B_{16} \frac{d^3 w_0}{dx^3} + \rho_s \omega^2 v_0 = 0, \quad (24.8)$$

$$D_{11} \frac{d^4 w_0}{dx^4} - B_{11} \frac{d^3 u_0}{dx^3} - B_{16} \frac{d^3 v_0}{dx^3} + N_0 \frac{d^2 w_0}{dx^2} - \rho_s \omega^2 w_0 = 0. \quad (24.9)$$

Dans le cas où la plaque est en appuis simples sur ses côtés  $x = 0$  et  $x = a$ , les conditions aux frontières sont satisfaites avec les déplacements :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= A_m \cos m\pi \frac{x}{a}, \\ v_0(x) &= B_m \cos m\pi \frac{x}{a}, \\ w_0(x) &= C_m \sin m\pi \frac{x}{a}. \end{aligned} \quad (24.10)$$

En reportant ces expressions dans les équations (24.7) à (24.9), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left( \rho_s \omega^2 - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} A_{11} \right) A_m - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} A_{16} B_m + \frac{m^3 \pi^3}{a^3} B_{11} C_m &= 0, \\ -\frac{m^2 \pi^2}{a^2} A_{16} A_m + \left( \rho_s \omega^2 - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} A_{66} \right) B_m + \frac{m^3 \pi^3}{a^3} B_{16} C_m &= 0, \quad (24.11) \\ -\frac{m^3 \pi^3}{a^3} B_{11} A_m - \frac{m^3 \pi^3}{a^3} B_{16} B_m + \left( \frac{m^4 \pi^4}{a^4} D_{11} - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} N_0 - \rho_s \omega^2 \right) C_m &= 0. \end{aligned}$$

En fonction de l'ordre de grandeur des fréquences propres, il est possible de négliger le terme  $\rho_s \omega^2$  dans les coefficients de  $A_m$  et  $B_m$  dans les deux premières équations. Les équations (24.11) s'écrivent alors :

$$-A_{11} A_m - A_{16} B_m + \frac{m \pi}{a} B_{11} C_m = 0, \quad (24.12)$$

$$-A_{16} A_m - A_{66} B_m + \frac{m \pi}{a} B_{16} C_m = 0, \quad (24.13)$$

$$-\frac{m^3 \pi^3}{a^3} B_{11} A_m - \frac{m^3 \pi^3}{a^3} B_{16} B_m + \left( \frac{m^4 \pi^4}{a^4} D_{11} - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} N_0 - \rho_s \omega^2 \right) C_m = 0. \quad (24.14)$$

La résolution des deux premières équations conduit à :

$$A_m = \frac{m \pi}{a} \frac{B}{A} C_m, \quad B_m = \frac{m \pi}{a} \frac{C}{A} C_m, \quad (24.15)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= A_{11} A_{66} - A_{16}^2, \\ B &= A_{66} B_{11} - A_{16} B_{16}, \\ C &= A_{11} B_{16} - A_{16} B_{11}. \end{aligned} \quad (24.16)$$

En reportant  $A_m$  et  $B_m$  dans la dernière équation (24.14), nous obtenons :

$$\left( \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \frac{D}{A} - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} N_0 - \rho_s \omega^2 \right) C_m = 0, \quad (24.17)$$

avec

$$D = D_{11} A - B_{11} B - B_{16} C. \quad (24.18)$$

Les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ont déjà été introduits lors de l'étude de la flexion cylindrique en (19.7) et (19.9).

Une solution non nulle à l'équation (24.17) est obtenue seulement dans le cas où le coefficient de  $C_m$  s'annule. Ce qui conduit à l'expression des fréquences propres de vibration :

$$\omega_m = \frac{m \pi}{a} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{D}{A} - N_0 \right)}, \quad N_0 > 0. \quad (24.19)$$

Si  $N_0 = 0$ , l'expression (24.19) des fréquences propres peut s'écrire sous la forme :

$$\omega_m = \omega'_m \sqrt{1 - H}, \quad (24.20)$$

où le coefficient  $H$  a été introduit en (23.52) :

$$H = \frac{B_{11}B + B_{16}C}{AD_{11}}, \quad (24.21)$$

et  $\omega'_m$  est la fréquence propre de vibration en flexion dans le cas où il n'existe pas de couplage membrane-flexion/torsion ( $B_{ij} = 0$ ), exprimée suivant :

$$\omega'_m = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D_{11}}{\rho_s}}. \quad (24.22)$$

Le couplage membrane-flexion/torsion réduit donc les valeurs des fréquences propres de vibration en flexion.

Dans le cas d'une compression initiale en membrane de valeur  $-N_0$ , avec  $N_0 < N_{\text{cr}}$  où  $N_{\text{cr}}$  est la charge critique de flambement exprimée en (23.48), les valeurs (24.20) des fréquences propres sont réduites. La fréquence propre la plus basse s'écrit :

$$\omega_l = \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} \left( \frac{\pi^2 D}{a^2 A} - N_0 \right)}, \quad 0 \leq N_0 \leq \frac{\pi^2 D}{a^2 A}. \quad (24.23)$$

Dans le cas où l'on exerce une charge initiale de traction de valeur  $N_0$ , l'expression des fréquences propres s'écrit :

$$\omega_m = \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} \left( \frac{m^2 \pi^2 D}{a^2 A} + N_0 \right)}, \quad N_0 > 0. \quad (24.24)$$

La charge de traction augmente donc les valeurs des fréquences propres des vibrations en flexion. La fréquence fondamentale s'exprime suivant :

$$\omega_l = \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} \left( \frac{\pi^2 D}{a^2 A} + N_0 \right)}. \quad (24.25)$$

## 24.2.2 Prise en compte du cisaillement transverse

Nous considérons maintenant l'effet de la déformation en cisaillement transverse sur les fréquences de vibration. Dans le cas de stratifiés orthotropes et symétriques ( $B_{ij} = 0$ ), en l'absence de charges latérales, les équations (19.40) à (19.42) se réduisent à :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, & v_0 &= 0, \\ k_{55}F_{55}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \\ D_{11}\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - k_{55}F_{55}\left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) &= I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (24.26)$$

Dans le cas d'appuis simples, les conditions aux frontières sont données par les équations (19.47). Les solutions  $\varphi_x$  et  $w_0$  satisfaisant à ces conditions aux frontières et aux équations (24.26), sont, par extension des expressions (19.49) de la forme :

$$\begin{aligned} \varphi_x &= B_m e^{i\omega t} \cos m\pi \frac{x}{a}, \\ w_0 &= C_m e^{i\omega t} \sin m\pi \frac{x}{a}. \end{aligned} \quad (24.27)$$

En reportant ces expressions dans les équations (24.26), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{m\pi}{a} k_{55}F_{55}B_m + \left( \frac{m^2\pi^2}{a^2} k_{55}F_{55} - \rho_s \omega^2 \right) C_m &= 0, \\ \left( \frac{m^2\pi^2}{a^2} D_{11} + k_{55}F_{55} - I_{xy}\omega^2 \right) B_m + \frac{m\pi}{a} k_{55}F_{55}C_m &= 0. \end{aligned} \quad (24.28)$$

Une solution non nulle est obtenue lorsque le déterminant des équations précédentes est nul. D'où l'expression des fréquences propres :

$$\omega_m^2 = \frac{1}{2\rho_s I_{xy}} \left[ \left( \frac{m^2\pi^2}{a^2} I_{xy} + \rho_s \right) k_{55}F_{55} + \frac{m^2\pi^2}{a^2} \rho_s D_{11} \pm \sqrt{\Delta} \right], \quad (24.29)$$

avec

$$\Delta = \left[ \left( \frac{m^2\pi^2}{a^2} I_{xy} + \rho_s \right) k_{55}F_{55} + \frac{m^2\pi^2}{a^2} \rho_s D_{11} \right]^2 - 4 \frac{m^4\pi^4}{a^4} \rho_s I_{xy} k_{55}F_{55} D_{11}. \quad (24.30)$$

Dans le cas d'un stratifié composé de couches constituées du même matériau, mais d'orientations et d'épaisseurs différentes, la masse volumique de chaque couche est identique. Il en résulte que :

$$\rho_s = \rho_0 h, \quad I_{xy} = \rho_0 \frac{h^3}{12}, \quad (24.31)$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique du matériau. Les fréquences propres s'expriment suivant :

$$\omega_m^2 = \frac{6}{\rho_0 a^2 h^3} \left[ \left( a^2 + m^2 \pi^2 \frac{h^2}{12} \right) k_{55}F_{55} + m^2 \pi^2 D_{11} \pm \sqrt{\Delta'} \right], \quad (24.32)$$

où  $\Delta'$  est exprimé suivant l'expression :

$$\Delta' = \left[ \left( a^2 + m^2 \pi^2 \frac{h^2}{12} \right) k_{55} F_{55} + m^2 \pi^2 D_{11} \right]^2 - \frac{m^4 \pi^4 h^4}{3a^2} k_{55} F_{55} D_{11}. \quad (24.33)$$

Si l'on néglige les termes d'inertie ( $I_{xy} = 0$ ), les équations (24.28) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{m\pi}{a} k_{55} F_{55} B_m + \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} k_{55} F_{55} - \rho_s \omega^2 \right) C_m &= 0, \\ \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} D_{11} + k_{55} F_{55} \right) B_m + \frac{m\pi}{a} k_{55} F_{55} C_m &= 0. \end{aligned} \quad (24.34)$$

Les fréquences propres s'expriment alors sous la forme :

$$\omega_m = \omega'_m \sqrt{\frac{1}{1 + m^2 \pi^2 S}}, \quad (24.35)$$

où  $S$  est le terme de cisaillement introduit en (19.52) :

$$S = \frac{D_{11}}{a^2 k_{55} F_{55}}, \quad (24.36)$$

et  $\omega'_m$  est la fréquence propre en l'absence de cisaillement, donnée par l'expression (24.22). La déformation en cisaillement transverse réduit la valeur des fréquences propres. Comme dans le cas de la flexion statique (chapitre 19), l'influence du cisaillement sur les valeurs des fréquences propres dépend du rapport  $\bar{Q}_{11}/\bar{G}_{13}$  (relation (19.55)) et du rapport d'élancement  $a/h$  : distance entre appuis sur épaisseur du stratifié. La variation de la fréquence fondamentale ( $m = 1$ ) en fonction du rapport  $a/h$  est reportée sur la figure 24.1, dans le cas d'un stratifié  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  dont les caractéristiques sont données en (19.92).

### 24.2.3 Vibrations de plaques sandwiches

Dans le cas de plaques sandwiches symétriques en flexion cylindrique, les relations fondamentales (19.99) et (19.100) s'écrivent en l'absence de charges latérales :

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - h G_{13} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) &= I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \\ h G_{13} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (24.37)$$

Ces équations ont la même forme que les équations (24.26).

Dans le cas d'appuis simples, les résultats sont déduits des résultats (24.29) à (24.36) en changeant  $k_{55} F_{55}$  en  $h G_{13}$ . En particulier, en négligeant les termes d'inertie, les fréquences propres s'expriment par la relation (24.35) :

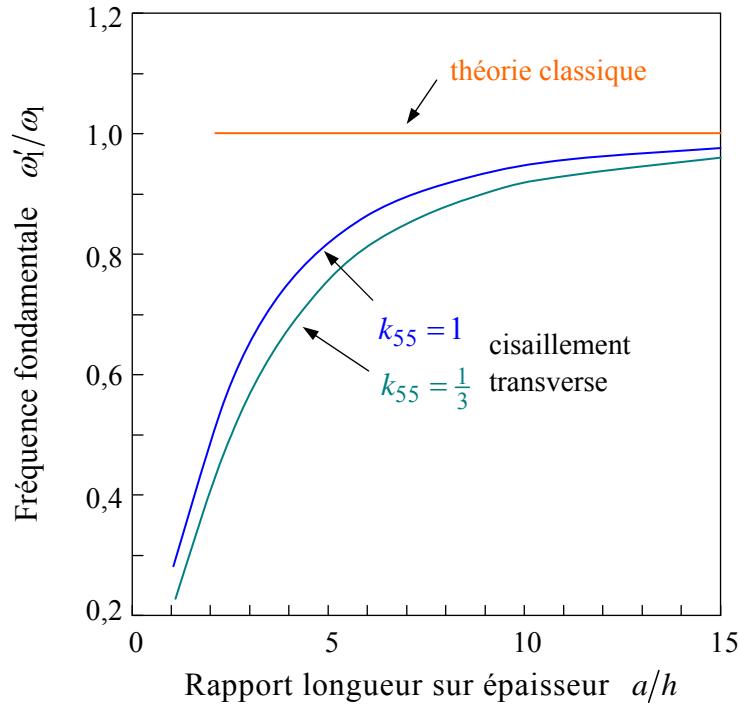


FIGURE 24.1. Influence du cisaillement transverse sur la fréquence fondamentale d'une plaque orthotrope soumise à une flexion cylindrique.

$$\omega_m = \omega'_m \sqrt{\frac{1}{1 + m^2 \pi^2 S}}, \quad (24.38)$$

avec

$$\omega'_m = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D_{11}}{\rho_s}}, \quad (24.39)$$

où  $S$  est le terme de cisaillement introduit en (23.70) :

$$S = \frac{D_{11}}{a^2 h G_{13}}. \quad (24.40)$$

## 24.3 VIBRATION DES POUTRES

### 24.3.1 Équation générale

Dans le cas d'une poutre soumise à une compression, la relation fondamentale des vibrations est donnée par l'expression (23.75) :

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{12}{E_x h^3} \left( N_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (24.41)$$

L'équation aux fréquences propres est obtenue en écrivant  $w_0$  sous la forme habituelle :

$$w_0(x, t) = w_0(x)e^{i\omega t}. \quad (24.42)$$

En reportant cette expression dans (24.41), nous obtenons :

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} + \frac{12}{E_x h^3} \left( N_0 \frac{d^2 w_0}{dx^2} - \rho_s \omega^2 w_0 \right) = 0. \quad (24.43)$$

### 24.3.2 Poutre en appuis simples

Pour une poutre en appuis simples, les conditions aux frontières sont (relations (16.28)) :

— appui  $x = 0$  :

$$w_0(0) = 0, \quad M(0) = 0, \quad (24.44)$$

— appui  $x = L$  :

$$w_0(L) = 0, \quad M(L) = 0, \quad (24.45)$$

le moment  $M$  étant défini en (20.10). Une solution de l'équation (24.43), satisfaisant aux conditions aux frontières, est de la forme :

$$w_0(x) = C_m \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (24.46)$$

En reportant cette expression dans l'équation (24.43), il vient :

$$\left[ \frac{m^4 \pi^4}{L^4} - \frac{12}{E_x h^3} \left( \frac{m^2 \pi^2}{L^2} N_0 + \rho_s \omega^2 \right) \right] C_m = 0. \quad (24.47)$$

Une solution non nulle est obtenue seulement dans le cas où le coefficient de  $C_m$  s'annule. D'où l'expression des fréquences propres de vibration :

$$\omega_m = \frac{m\pi}{L} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} \left( \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \frac{E_x h^3}{12} - N_0 \right)}, \quad N_0 > 0. \quad (24.48)$$

Si  $N_0 = 0$ , l'expression précédente se réduit à :

$$\omega_m = \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{E_x h^3}{12 \rho_s}}. \quad (24.49)$$

Dans le cas d'une compression initiale  $-N_0$  en membrane, avec  $N_0 < N_{cr}$  où  $N_{cr}$  est la charge critique de flambement exprimée par la relation (23.86), la fréquence

fondamentale s'écrit :

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} \left( \frac{\pi^2 E_x h^3}{L^2} - N_0 \right)}, \quad 0 \leq N_0 \leq \frac{\pi^2 E_x h^3}{L^2}. \quad (24.50)$$

Dans le cas où l'on exerce une charge initiale de traction de valeur  $N_0$ , l'expression des fréquences propres est :

$$\omega_m = \frac{m\pi}{L} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} \left( \frac{m^2 \pi^2 E_x h^3}{L^2} + N_0 \right)}, \quad N_0 > 0. \quad (24.51)$$

Les valeurs des fréquences propres sont augmentées par la présence d'une charge de traction.

### 24.3.3 Poutre encastrée

Dans le cas d'une poutre encastrée aux extrémités, les conditions aux frontières sont (16.30) :

— extrémité  $x = 0$  :

$$w_0(0) = 0, \quad \frac{dw_0}{dx}(0) = 0, \quad (24.52)$$

— extrémité  $x = L$  :

$$w_0(L) = 0, \quad \frac{dw_0}{dx}(L) = 0. \quad (24.53)$$

Ces conditions sont vérifiées en écrivant la flèche sous la forme :

$$w_0(x) = C_m X_m(x), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (24.54)$$

où  $X_m(x)$  est la fonction introduite en (21.131) et qui s'exprime ici suivant :

$$X_m(x) = \cos \lambda_m \frac{x}{L} - \cosh \lambda_m \frac{x}{L} - \gamma_m \left( \sin \lambda_m \frac{x}{L} - \sinh \lambda_m \frac{x}{L} \right). \quad (24.55)$$

Les coefficients  $\lambda_m$  sont solutions de l'équation (21.136) et  $\gamma_m$  est exprimé par la relation (21.137). Les valeurs de  $\lambda_m$  et  $\gamma_m$  sont reportées dans le tableau 21.3 pour  $m \leq 8$ .

En reportant l'expression (24.54) dans l'équation (24.43), nous obtenons en l'absence de charge initiale en membrane ( $N_0 = 0$ ) :

$$\left( \frac{\lambda_m^4}{L^4} - \frac{12}{E_x h^3} \rho_s \omega^2 \right) C_m X_m(x) = 0. \quad (24.56)$$

Une solution non nulle pour  $C_m$  est obtenue seulement dans le cas où le coefficient de  $C_m$  s'annule. D'où l'expression des fréquences propres de vibration en flexion :

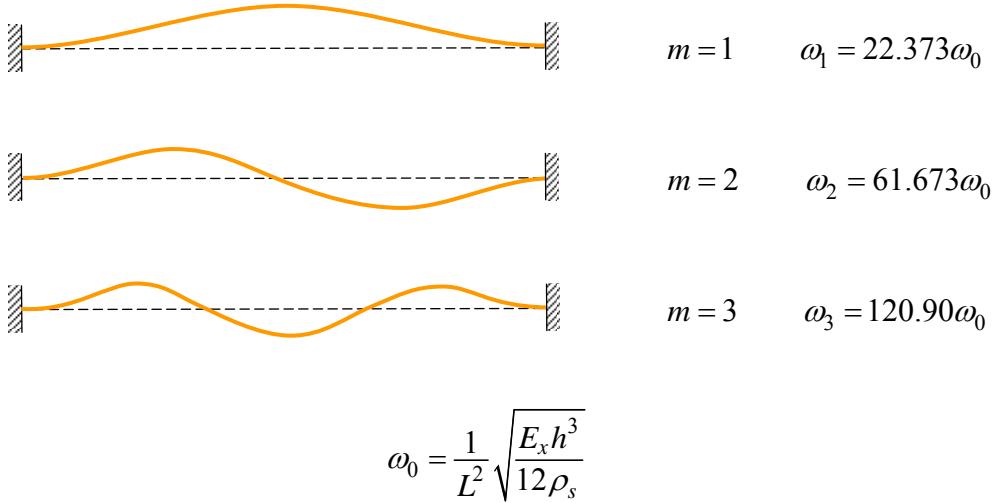


FIGURE 24.2. Vibration d'une poutre encastrée.

$$\omega_m = \frac{\lambda_m^2}{L^2} \sqrt{\frac{E_x h^3}{12 \rho_s}}. \quad (24.57)$$

La fréquence fondamentale est :

$$\omega_1 = \frac{22,373}{L^2} \sqrt{\frac{E_x h^3}{12 \rho_s}}. \quad (24.58)$$

La déformée obtenue par la relation (24.54) est reportée sur la figure 24.2 pour  $m = 1, 2$  et  $3$ . La valeur de l'amplitude  $C_m$  des vibrations dépend de la déformation initiale imposée.

### 24.3.4 Poutre encastrée à une extrémité et en appui simple à l'autre

Nous considérons le cas d'une poutre encastrée à l'extrémité  $x = 0$  et en appui simple à l'extrémité  $x = L$ . Les conditions aux frontières sont donc :

— extrémité  $x = 0$  :

$$w_0(0) = 0, \quad \frac{dw_0}{dx}(0) = 0, \quad (24.59)$$

— extrémité  $x = L$  :

$$w_0(L) = 0, \quad M(L) = 0. \quad (24.60)$$

La condition imposée sur le moment est d'après (20.10) équivalente à :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2}(L) = 0, \quad (24.61)$$

Nous exprimons la flèche sous la forme introduite en (24.54) :

$$w_0(x) = C_m X_m(x), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (24.62)$$

avec

$$X_m(x) = \cos \lambda_m \frac{x}{L} - \cosh \lambda_m \frac{x}{L} - \gamma_m \left( \sin \lambda_m \frac{x}{L} - \sinh \lambda_m \frac{x}{L} \right). \quad (24.63)$$

Ces fonctions vérifient les conditions d'encastrement à l'extrémité  $x = 0$ . Il reste à vérifier les conditions :

$$X_m(L) = 0, \quad \frac{d^2 X_m}{dx^2}(L) = 0. \quad (24.64)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \cos \lambda_m - \cosh \lambda_m - \gamma_m (\sin \lambda_m - \sinh \lambda_m) &= 0, \\ \cos \lambda_m + \cosh \lambda_m - \gamma_m (\sin \lambda_m + \sinh \lambda_m) &= 0. \end{aligned} \quad (24.65)$$

Une solution différente de  $\gamma_m = 0$  est obtenue lorsque :

$$\frac{\cos \lambda_m - \cosh \lambda_m}{\sin \lambda_m - \sinh \lambda_m} = \frac{\cos \lambda_m + \cosh \lambda_m}{\sin \lambda_m + \sinh \lambda_m},$$

ou

$$\tan \lambda_m = \tanh \lambda_m. \quad (24.66)$$

Les huit premières solutions de cette équation sont reportées dans le tableau 24.1. Le coefficient  $\gamma_m$  est ensuite déterminé par :

$$\gamma_m = \frac{\cos \lambda_m - \cosh \lambda_m}{\sin \lambda_m - \sinh \lambda_m}. \quad (24.67)$$

Les valeurs de  $\gamma_m$  sont pratiquement confondues avec 1.

Il est à noter que pour des valeurs assez élevées de  $\gamma_m$  :

$$\tanh \lambda_m \approx 1,$$

et l'équation (24.66) se réduit à :

$$\tan \lambda_m = 1. \quad (24.68)$$

Les solutions de cette équation sont :

$$\lambda_m = (m + 0,25)\pi. \quad (24.69)$$

Le calcul de ces solutions approchées montre qu'elles sont identiques aux valeurs exactes des solutions de l'équation (24.66).

TABLEAU 24.1. Coefficient  $\lambda_m$  de la fonction d'une poutre encastrée-appui simple.

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda_m$	3,927	7,069	10,210	13,352	16,493	19,635	22,776	25,918

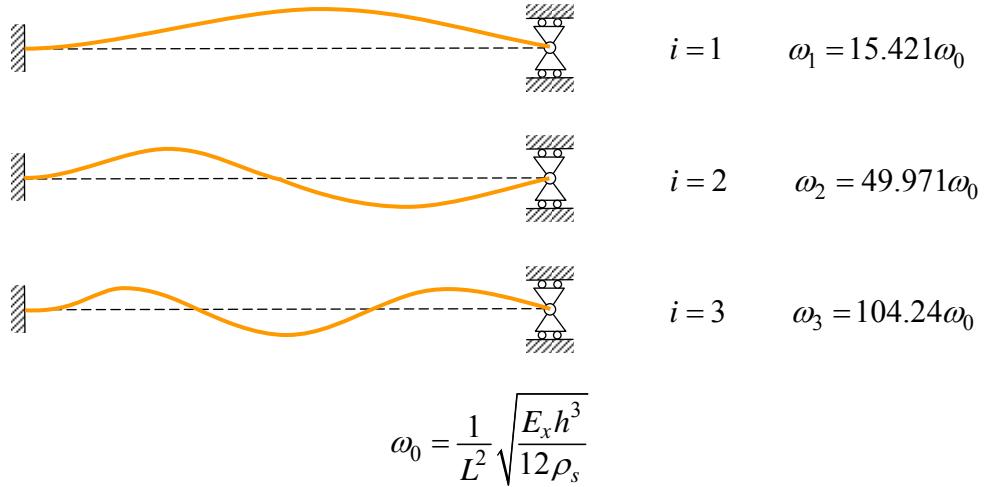


FIGURE 24.3. Vibration d'une poutre encastrée à une extrémité et en appui simple à l'autre extrémité.

Les fréquences propres des vibrations sont obtenues en reportant (24.62) dans l'expression (24.43). En l'absence de charge initiale en membrane, l'expression obtenue est identique à l'expression (24.57) :

$$\omega_m = \frac{\lambda_m^2}{L^2} \sqrt{\frac{E_x h^3}{12 \rho_s}} . \quad (24.70)$$

Les valeurs de  $\lambda_m$  sont reportées dans le tableau 24.1. La fréquence fondamentale est par exemple donnée par :

$$\omega_1 = \frac{15,421}{L^2} \sqrt{\frac{E_x h^3}{12 \rho_s}} . \quad (24.71)$$

La déformée exprimée par la relation (24.62) est reportée sur la figure 24.3 pour  $m = 1, 2$  et  $3$ .

### 24.3.5 Poutre encastrée à une extrémité, l'autre étant libre

Dans le cas d'une poutre encastrée à l'extrémité  $x = 0$  et libre à l'autre extrémité  $x = L$ , les conditions aux frontières sont :

— extrémité  $x = 0$  :

$$w_0(0) = 0, \quad \frac{dw_0}{dx}(0) = 0, \quad (24.72)$$

— extrémité  $x = L$ , d'après (16.32) :

$$M_x(L) = 0, \quad Q_x(L) = 0, \quad (24.73)$$

ou d'après (20.10) et (20.18) :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2}(L) = 0, \quad \frac{d^3 w_0}{dx^3}(L) = 0. \quad (24.74)$$

La flèche est à nouveau exprimée sous la forme (24.54). La fonction  $X_m(x)$  satisfaisant les conditions d'encastrement à l'extrémité  $x = 0$ , il reste à vérifier :

$$\frac{d^2 X_m}{dx^2}(L) = 0, \quad \frac{d^3 X_m}{dx^3}(L) = 0. \quad (24.75)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \cos \lambda_m + \cosh \lambda_m - \gamma_m (\sin \lambda_m + \sinh \lambda_m) &= 0, \\ \sin \lambda_m - \sinh \lambda_m + \gamma_m (\cos \lambda_m + \cosh \lambda_m) &= 0. \end{aligned} \quad (24.76)$$

Une solution non nulle de  $\gamma_m$  est obtenue lorsque :

$$\frac{\cos \lambda_m + \cosh \lambda_m}{\sin \lambda_m + \sinh \lambda_m} = -\frac{\sin \lambda_m - \sinh \lambda_m}{\cos \lambda_m + \cosh \lambda_m},$$

ou

$$\cos \lambda_m \cosh \lambda_m = -1. \quad (24.77)$$

Le coefficient  $\gamma_m$  est ensuite déterminé par l'expression :

$$\gamma_m = \frac{\cos \lambda_m + \cosh \lambda_m}{\sin \lambda_m + \sinh \lambda_m}. \quad (24.78)$$

Les huit premières solutions de l'équation (24.77) sont reportées dans le tableau 24.2, avec les valeurs correspondantes de  $\gamma_m$ . Pour des valeurs assez élevées de  $\lambda_m$ , des valeurs approchées peuvent être exprimées sous la forme :

$$\lambda_m = (m - 0,5)\pi. \quad (24.79)$$

Ces valeurs sont également reportées dans le tableau 24.2, et montrent qu'elles sont confondues avec les solutions de (24.77) pratiquement pour  $m \geq 3$ .

Les fréquences propres sont obtenues en reportant l'expression (24.54) de la flèche dans l'équation (24.43), ce qui conduit à l'expression (24.57) des fréquences propres. La fréquence fondamentale s'écrit :

TABLEAU 24.2. Coefficients de la fonction d'une poutre encastrée-libre.

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda_m$	1,875	4,694	7,855	10,996	14,137	17,279	20,420	23,562
$\gamma_m$	0,734	1,018	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$(m - 0,5)\pi$	1,571	4,712	7,854	10,996	14,137	17,279	20,420	23,562

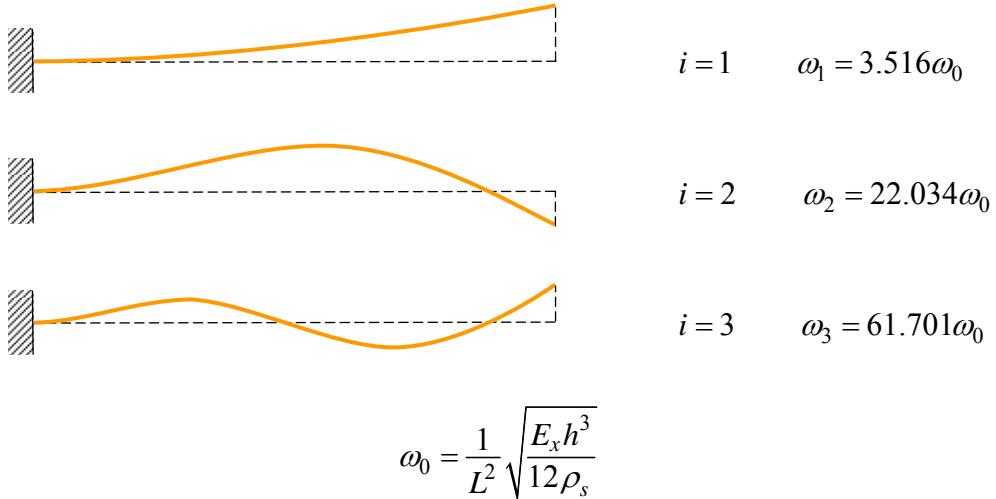


FIGURE 24.4. Vibration d'une poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre.

$$\omega_1 = \frac{3,516}{L^2} \sqrt{\frac{E_x h^3}{12 \rho_s}}. \quad (24.80)$$

La déformée exprimée par la relation (24.54) avec les valeurs de  $\lambda_m$  et  $\gamma_m$  du tableau 24.2 est reportée sur la figure 24.4 pour  $m = 1, 2$  et  $3$ .

### 24.3.6 Poutre ayant ses deux extrémités libres

Dans le cas d'une poutre libre aux deux extrémités, les conditions aux frontières sont :

$$\frac{d^2 X_m}{dx^2}(0) = 0, \quad \frac{d^3 X_m}{dx^3}(0) = 0, \quad \frac{d^2 X_m}{dx^2}(L) = 0, \quad \frac{d^3 X_m}{dx^3}(L) = 0. \quad (24.81)$$

La flèche est à nouveau exprimée sous la forme (24.54), les deux premières conditions étant vérifiées en exprimant la fonction  $X_m(x)$  sous la forme :

$$X_m(x) = \cos \lambda_m \frac{x}{L} + \cosh \lambda_m \frac{x}{L} + \gamma_m \left( \sin \lambda_m \frac{x}{L} + \sinh \lambda_m \frac{x}{L} \right). \quad (24.82)$$

Les deux conditions à l'extrémité libre  $x = L$  sont vérifiées si :

$$\begin{aligned} -\cos \lambda_m + \cosh \lambda_m + \gamma_m (-\sin \lambda_m + \sinh \lambda_m) &= 0, \\ \sin \lambda_m + \sinh \lambda_m + \gamma_m (-\cos \lambda_m + \cosh \lambda_m) &= 0. \end{aligned} \quad (24.83)$$

Une solution non nulle de  $\gamma_m$  est obtenue lorsque le déterminant de ces équations est nul. Soit :

TABLEAU 24.3. Valeurs des coefficients de la fonction d'une poutre libre-libre.

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda_m$	0	0	4,730	7,853	10,996	14,137	17,279	20,420	23,562
$\gamma_m$			-0,9825	-1,0008	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000

$$(-\cos \lambda_m + \cosh \lambda_m)^2 - (-\sinh^2 \lambda_m + \sin^2 \lambda_m) = 0,$$

ou

$$\cos \lambda_m \cosh \lambda_m = 1. \quad (24.84)$$

Le coefficient  $\gamma_m$  est ensuite exprimé suivant :

$$\gamma_m = \frac{\sin \lambda_m + \sinh \lambda_m}{\cos \lambda_m - \cosh \lambda_m}. \quad (24.85)$$

La première racine, nulle, est une racine double correspondant au mouvement rigide de la poutre qui peut être exprimé sous la forme :

$$w_0(x) = C_1 X_1(x) + C_2 X_2(x), \quad (24.86)$$

avec

$$X_1(x) = 1, \quad (24.87)$$

$$X_2(x) = \sqrt{3} \left( 1 - 2 \frac{x}{L} \right). \quad (24.88)$$

Ces fonctions correspondent aux modes rigides de translation et de rotation de la poutre. Elles sont normalisées conformément à la relation (21.139). À ces fonctions sont associées les deux racines  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 = 0$ . Les autres racines  $\lambda_m$  de l'équation (24.84) et les valeurs  $\gamma_m$  correspondantes sont identiques à celles trouvées dans le cas de deux extrémités encastrées (relations (21.136) et (21.137)). L'ensemble des valeurs est reporté dans le tableau 24.3, pour  $m$  variant de 1 à 9. Le premier mode des vibrations libres est obtenu pour  $m = 3$ . Les fréquences propres sont identiques à celles d'une poutre avec les extrémités encastrées. Par contre les déformées diffèrent (expression (24.82)). Les déformées sont reportées sur la figure 24.5 pour les trois premiers modes.

## 24.4 VIBRATIONS DE PLAQUES ORTHOTROPES RECTANGULAIRES EN APPUIS SIMPLES

Dans le cas d'un stratifié orthotrope (stratifié symétrique pour lequel  $D_{16} = D_{26} = 0$ ), les relations fondamentales (16.4) à (16.6) s'écrivent, en tenant compte des résultats établis au paragraphe 21.2.1 et en l'absence de charges latérales ( $q = 0$ ), sous la forme :

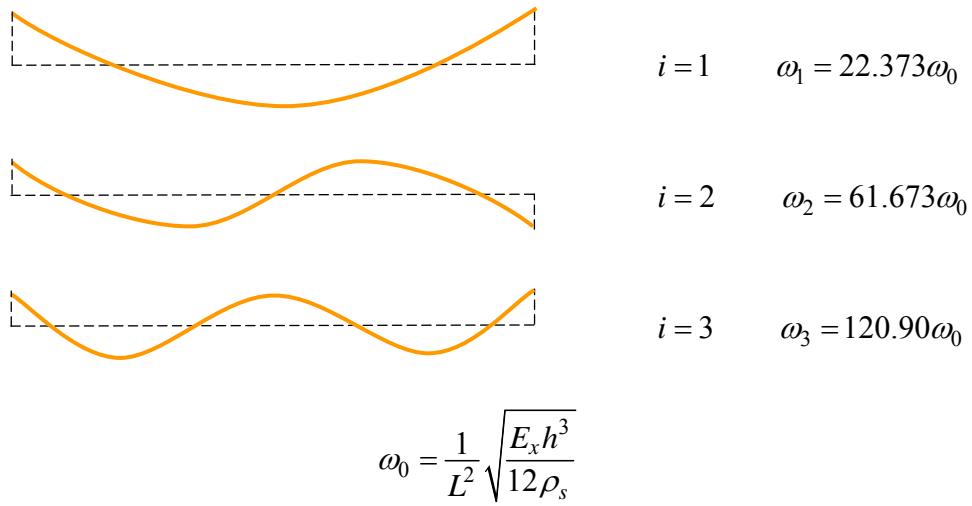


FIGURE 24.5. Vibration d'une poutre ayant ses deux extrémités libres.

$$\begin{aligned}
& u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \\
& D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\
& = I_{xy} \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right). \tag{24.89}
\end{aligned}$$

Dans le cas où les termes d'inertie peuvent être négligés ( $I_{xy} = 0$ ), la dernière équation se réduit à :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0. \tag{24.90}$$

La flèche exprimée sous la forme :

$$w_0(x, y, t) = w_0(x, y) e^{i\omega t}, \tag{24.91}$$

où  $\omega$  est la fréquence de vibration, conduit en reportant cette expression dans l'équation (24.90) à :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - \rho_s \omega^2 w_0 = 0. \tag{24.92}$$

Dans le cas d'appuis simples, les conditions aux frontières sont données par les relations (21.4) à (21.7), et  $w_0(x, y)$  peut se mettre sous la forme :

$$w_0(x, y) = C_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \tag{24.93}$$

déduite de l'expression (21.12) et satisfaisant aux conditions d'appuis. En reportant cette expression dans l'équation (24.92), il vient :

$$\left[ \frac{m^4 \pi^4}{a^4} D_{11} + 2 \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} (D_{12} + 2D_{66}) + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} D_{22} - \rho_s \omega^2 \right] C_{mn} = 0. \quad (24.94)$$

Une valeur non nulle de  $C_{mn}$  est obtenue si le coefficient de  $C_{mn}$  est nul, d'où l'expression des fréquences propres :

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} \left[ m^4 D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + n^4 R^4 D_{22} \right]}, \quad (24.95)$$

où  $R$  est le rapport longueur sur largeur ( $a/b$ ) de la plaque. Dans le cas d'une plaque isotrope ( $D_{11} = D_{22} = D_{12} + 2D_{66} = D$ ), l'expression des fréquences propres se réduit à :

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_s} \left[ m^4 + 2m^2 n^2 R^2 + n^4 R^4 \right]}. \quad (24.96)$$

La déformée de la plaque correspondant à la valeur propre  $\omega_{mn}$  est donnée par l'expression (24.93).

La fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée correspond à  $m = n = 1$  et s'exprime suivant :

$$\omega_{11} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} \left[ D_{11} + 2R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + R^4 D_{22} \right]}, \quad (24.97)$$

et dans le cas d'une plaque isotrope, elle s'écrit :

$$\omega_{11} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_s} (1 + R^2)}. \quad (24.98)$$

La déformée du mode fondamental est donnée dans les deux cas par :

$$w_0(x, y) = C_{11} \sin \pi \frac{x}{a} \sin \pi \frac{y}{b}. \quad (24.99)$$

De manière à apprécier l'influence de l'anisotropie, nous comparons le comportement d'une plaque carrée constituée d'un matériau orthotrope de caractéristiques :

$$D_{11} = 10D_{22}, \quad D_{12} + 2D_{66} = D_{22}, \quad (24.100)$$

au comportement d'une plaque constituée d'un matériau isotrope. Dans le cas du matériau isotrope, les fréquences propres (24.96) s'écrivent :

$$\omega_{mn} = k_{mn} \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_s}}, \quad k_{mn} = m^2 + n^2, \quad (24.101)$$

alors que pour la plaque constituée d'un matériau orthotrope, les fréquences propres s'expriment suivant :

TABLEAU 24.4. Fréquences et modes de vibration d'une plaque carrée isotrope en appuis simples sur ses quatre côtés.

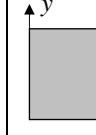
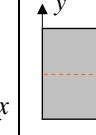
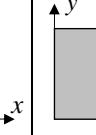
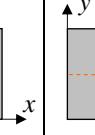
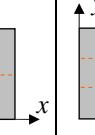
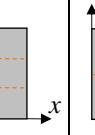
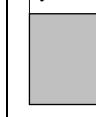
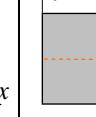
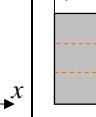
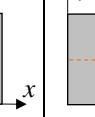
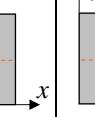
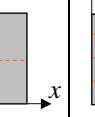
	$\omega_{mn} = k_{mn} \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_s}}$					
	1er mode	2ème mode		3ème mode	4ème mode	
<i>m</i>	1	1	2	2	1	3
<i>n</i>	1	2	1	2	3	1
<i>k<sub>mn</sub></i>	2,0	5,0	5,0	8,0	10,0	10,0
lignes nodales						

TABLEAU 24.5. Fréquences et modes de vibration d'une plaque carrée orthotrope en appuis simples sur ses quatre côtés.

	$\omega_{mn} = k_{mn} \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D_{22}}{\rho_s}}$					
	1er mode	2ème mode	3ème mode	4ème mode	5ème mode	6ème mode
<i>m</i>	1	1	1	2	2	1
<i>n</i>	1	2	3	1	2	4
<i>k<sub>mn</sub></i>	3,61	5,83	10,44	13,0	14,42	17,26
lignes nodales						



$$\omega_{mn} = k_{mn} \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D_{22}}{\rho_s}}, \quad (24.102)$$

avec

$$k_{mn} = \sqrt{10m^4 + 2m^2n^2 + n^4}. \quad (24.103)$$

Les valeurs des fréquences et des modes de vibration correspondants sont reportées dans les tableaux 24.4 pour la plaque isotrope et 24.5 pour la plaque orthotrope. Les résultats obtenus montrent qu'il n'y a pas de direction privilégiée dans le cas d'une plaque isotrope (mêmes fréquences propres pour  $m = 1, n = 2$  et  $m = 2, n = 1$ ; pour  $m = 1, n = 3$  et  $m = 3, n = 1$ , etc.). Par contre, dans le cas du matériau orthotrope, par exemple, le deuxième mode correspond à  $m = 1, n = 2$  (avec  $k_{mn} = 5,83$ ), alors que  $m = 2, n = 1$  correspond au quatrième mode (avec  $k_{mn} = 13,0$ ), etc.

## 24.5 VIBRATIONS DE PLAQUES ORTHOTROPES AVEC DIVERSES CONDITIONS SUR LES CÔTÉS

### 24.5.1 Expressions générales

Dans le paragraphe précédent, nous avons obtenu les solutions exactes de l'équation (24.90) dans le cas d'une plaque en appuis simples sur ses quatre côtés. Dans le cas d'autres conditions d'appuis, il n'est pas possible de résoudre directement l'équation (24.90). La recherche des fréquences propres nécessite alors d'utiliser des méthodes d'approximation. Nous développons ci-après la méthode de Ritz (paragraphe 8.4).

Dans le cas de stratifiés orthotropes, l'énergie  $U_d$  de déformation est donnée par l'expression (21.97), alors que l'énergie cinétique maximum s'écrit d'après (16.42), en introduisant  $w_0$  sous la forme (24.91), suivant :

$$E_{c\max} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \rho_s \omega^2 w_0^2 \, dx \, dy. \quad (24.104)$$

En l'absence de charges latérales, la fonction énergie maximum (relation (8.65)) se réduit à  $U_{d\max} - E_{c\max}$  avec :

$$\begin{aligned} U_{d\max} - E_{c\max} &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \rho_s \omega^2 w_0^2 \right] \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (24.105)$$

La solution approchée est recherchée sous la forme usuelle d'une série double de fonctions à variables séparées :

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y), \quad (24.106)$$

où les fonctions  $X_m(x)$  et  $Y_n(y)$  doivent vérifier les conditions aux frontières sur les côtés  $x = 0$ ,  $x = a$  et  $y = 0$ ,  $y = b$ . Les coefficients  $A_{mn}$  sont déterminés par les conditions (8.66) de stationnarité :

$$\frac{\partial}{\partial A_{mn}} [\tilde{U}_{d\max} - \tilde{E}_{c\max}] = 0 \quad \begin{matrix} m = 1, 2, \dots, M, \\ n = 1, 2, \dots, N, \end{matrix} \quad (24.107)$$

où  $\tilde{U}_{d\max} - \tilde{E}_{c\max}$  est l'énergie obtenue en reportant l'expression (24.106) de la flèche dans les expressions (24.104) et (24.105). Compte tenu de l'expression (21.107), les conditions (24.107) de stationnarité conduisent alors aux  $M \times N$  équations homogènes :

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ D_{11} I_{mi}^{22} J_{nj}^{00} + \left[ D_{12} (I_{mi}^{20} J_{nj}^{02} + I_{mi}^{02} J_{nj}^{20}) + 4D_{66} I_{mi}^{11} J_{nj}^{11} \right] R^2 + D_{22} I_{mi}^{00} J_{nj}^{22} R^4 - \rho_s a^4 \omega^2 I_{mi}^{00} J_{nj}^{00} \right\} A_{ij} = 0, \quad (24.108)$$

pour  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,

où les intégrales  $I_{mi}^{pq}$  et  $J_{nj}^{rs}$  ont été introduites en (21.108) et (21.109).

En explicitant le produit des intégrales sous la forme (21.116) le système d'équations (24.108) peut être réécrit sous la forme d'un système sans dimensions, suivant :

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ C_{minj}^{2200} + \left[ \alpha_{12} (C_{minj}^{2002} + C_{minj}^{0220}) + 4\alpha_{66} C_{minj}^{1111} \right] R^2 + \alpha_{22} C_{minj}^{0022} R^4 - \Omega^2 C_{minj}^{0000} \right\} A_{ij} = 0, \quad (24.109)$$

pour  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,

en exprimant les coefficients de rigidité en flexion  $D_{ij}$  en fonction de  $D_{11}$  :

$$D_{12} = \alpha_{12} D_{11}, \quad D_{66} = \alpha_{66} D_{11}, \quad D_{22} = \alpha_{22} D_{11}, \quad (24.110)$$

et en introduisant la fréquence réduite :

$$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_s}{D_{11}}}. \quad (24.111)$$

La comparaison des équations (21.114), (23.141) et (24.108) fait apparaître une similitude entre les équations obtenues par la méthode de Ritz dans le cas de

la flexion, du flambement et des vibrations. La similitude résulte de la partie de l'expression de l'énergie de déformation  $U_d$  commune à ces équations.

Le système (24.108) ou (24.109) d'équations en  $A_{ij}$  étant homogène, une solution non nulle est obtenue lorsque le déterminant du système est nul. Cette condition conduit à une équation dont les solutions sont les fréquences propres  $\omega_{mn}$  de vibration en flexion de la plaque.

## 24.5.2 Approximation de Rayleigh

L'approximation de Rayleigh consiste à utiliser pour un mode donné  $mn$  le terme dominant de la série (24.106) :

$$w_{mn}(x, y) = A_{mn} X_m(x) Y_n(y). \quad (24.112)$$

La fréquence propre du mode est alors obtenue en égalant l'énergie de déformation maximum à l'énergie cinétique maximum associées au déplacement transverse maximum  $w_{mn}$ .

D'après (24.104), l'énergie cinétique maximum s'écrit :

$$\tilde{E}_{c\max} = \frac{1}{2} \rho_s \omega^2 ab I_{mm}^{00} J_{nn}^{00} A_{mn}^2, \quad (24.113)$$

et l'énergie de déformation maximum est déduite de l'expression (21.97) :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{d\max} &= \frac{1}{2} A_{mn}^2 \left[ D_{11} I_{mm}^{22} J_{nn}^{00} + 2(D_{12} I_{mm}^{20} J_{nn}^{02} + 2D_{66} I_{mm}^{11} J_{nn}^{11})R^2 \right. \\ &\quad \left. + D_{22} I_{mm}^{00} J_{nn}^{22} R^4 \right] ab. \end{aligned} \quad (24.114)$$

L'égalité des deux expressions (24.113) et (24.114) conduit, avec des notations déjà introduites, à :

$$\Omega_{mn}^2 = \frac{B_{mmnn}}{C_{mmnn}^{0000}}, \quad (24.115)$$

où le coefficient  $B_{mmnn}$  est exprimé suivant :

$$B_{mmnn} = C_{mmnn}^{2200} + 2(\alpha_{12} C_{mmnn}^{2002} + 2\alpha_{66} C_{mmnn}^{1111})R^2 + \alpha_{22} C_{mmnn}^{0022} R^4. \quad (24.116)$$

Dans le cas de vibrations transverses de plaques orthotropes, l'écart entre la valeur de la fréquence propre obtenue par l'approximation de Rayleigh et la valeur déduite d'une approximation avec un nombre élevé de termes (24.109) est faible (inférieure à quelques %) dans le cas d'une plaque ayant ses côtés encastrés ou en appuis simples. Cet écart augmente lorsque les contraintes géométriques imposées aux quatre côtés diminuent. Schématiquement, le changement d'un côté encastré ou en appui simple en un côté libre accroît sensiblement l'écart, l'intersection de deux côtés libres (un coin libre) produit les écarts les plus élevés.

### 24.5.3 Approximation à deux termes

Dans le cas d'une approximation à deux termes, le déplacement transverse est exprimé, par exemple, suivant :

$$w_0(x, y) = A_{l1} X_1(x) Y_1(y) + A_{l2} X_1(x) Y_2(y), \quad (24.117)$$

et le système d'équations (24.109) se réduit à un système de deux équations :

$$\begin{aligned} (B_{1111} - \Omega^2 C_{1111}^{0000}) A_{l1} + (B_{1112} - \Omega^2 C_{1112}^{0000}) A_{l2} &= 0, \\ (B_{1112} - \Omega^2 C_{1121}^{0000}) A_{l1} + (B_{1122} - \Omega^2 C_{1122}^{0000}) A_{l2} &= 0, \end{aligned} \quad (24.118)$$

avec

$$B_{11ij} = C_{11ij}^{2200} + 2(\alpha_{12} C_{11ij}^{2002} - 2\alpha_{66} C_{11ij}^{1111}) R^2 + \alpha_{22} C_{11ij}^{0022} R^4 = 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (24.119)$$

Les fréquences propres des modes 11 et 12 sont obtenues en annulant le déterminant du système (24.118). Soit :

$$\det \begin{bmatrix} B_{1111} - \Omega^2 C_{1111}^{0000} & B_{1112} - \Omega^2 C_{1112}^{0000} \\ B_{1112} - \Omega^2 C_{1121}^{0000} & B_{1122} - \Omega^2 C_{1122}^{0000} \end{bmatrix} = 0. \quad (24.120)$$

Les approximations de Rayleigh des deux modes 11 et 12 sont obtenues directement à partir des termes diagonaux. Soit :

$$\Omega_{l1}^2 = \frac{B_{1111}}{C_{1111}^{0000}} \quad \text{et} \quad \Omega_{l2}^2 = \frac{B_{1122}}{C_{1122}^{0000}}. \quad (24.121)$$

Nous retrouvons les approximations données par l'expression (24.115).

### 24.5.4 Plaque orthotrope dont les côtés sont encastrés ou en appuis simples

Comme application, nous considérons dans ce paragraphe le cas d'une plaque rectangulaire soumise sur ses quatre côtés à des encastrements ou à des appuis simples.

Dans le cas de côtés opposés encastrés, il est possible d'utiliser les fonctions introduites en (21.131) et (21.132) :

— encastrements des côtés  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$X_m(x) = \cos \lambda_m \frac{x}{a} - \cosh \lambda_m \frac{x}{a} - \gamma_m \left( \sin \lambda_m \frac{x}{a} - \sinh \lambda_m \frac{x}{a} \right), \quad (24.122)$$

— encastrements des côtés  $y = 0$  et  $y = b$  :

$$Y_n(y) = \cos \lambda_n \frac{y}{b} - \cosh \lambda_n \frac{y}{b} - \gamma_n \left( \sin \lambda_n \frac{y}{b} - \sinh \lambda_n \frac{y}{b} \right), \quad (24.123)$$

où  $\lambda_m$ ,  $\lambda_n$ ,  $\gamma_m$  et  $\gamma_n$  sont donnés par les relations (21.136) et (21.137) :

$$\begin{aligned} \cos \lambda_i \cosh \lambda_i &= 1, \\ \gamma_i &= \frac{\cos \lambda_i - \cosh \lambda_i}{\sin \lambda_i - \sinh \lambda_i}, \quad i = m, n. \end{aligned} \quad (24.124)$$

Les valeurs des coefficients  $\lambda_i$  et  $\gamma_i$  sont reportées dans le tableau 21.3. Les valeurs reportées montrent que :

$$\lambda_1 = 4,730, \quad \lambda_i = (i + 0,5)\pi \quad i = 2, 3, \dots \quad (24.125)$$

Dans le cas de côtés opposés en appuis simples, les fonctions utilisées sont les fonctions introduites dans l'expression (24.93) :

— côtés  $x = 0$  et  $x = a$  en appuis simples :

$$X_m(x) = \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad (24.126)$$

— côtés  $y = 0$  et  $y = b$  en appuis simples :

$$Y_n(y) = \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (24.127)$$

Dans le cas de côtés opposés l'un encastré, l'autre en appui simple, il est possible d'exprimer la flèche à partir des fonctions déduites de la fonction introduite en (24.63) :

— côté  $x = 0$  encastré et côté  $x = a$  en appui simple :

$$X_m(x) = \cos \lambda_m \frac{x}{a} - \cosh \lambda_m \frac{x}{a} - \gamma_m \left( \sin \lambda_m \frac{x}{a} - \sinh \lambda_m \frac{x}{a} \right), \quad (24.128)$$

— côté  $y = 0$  encastré et  $y = b$  en appui simple :

$$Y_n(y) = \cos \lambda_n \frac{y}{b} - \cosh \lambda_n \frac{y}{b} - \gamma_n \left( \sin \lambda_n \frac{y}{b} - \sinh \lambda_n \frac{y}{b} \right), \quad (24.129)$$

où  $\lambda_m$ ,  $\lambda_n$ ,  $\gamma_m$  et  $\gamma_n$  sont donnés par les relations (24.66) et (24.67) :

$$\begin{aligned} \tan \lambda_i &= \tanh \lambda_i, \\ \gamma_i &= \frac{\cos \lambda_i - \cosh \lambda_i}{\sin \lambda_i - \sinh \lambda_i}, \quad i = m, n. \end{aligned} \quad (24.130)$$

Les valeurs de  $\lambda_i$ , reportées dans le tableau 24.1, s'expriment (24.69), suivant :

$$\lambda_i = (i + 0,25)\pi. \quad (24.131)$$

Les fréquences propres et les modes propres sont ensuite déterminés en introduisant les diverses fonctions (24.122) à (24.131) dans le système d'équations (24.109). Nous avons les relations :

$$C_{mni}^{0000} = 1, \quad C_{mni}^{2002} = C_{mni}^{0220} = C_{mni}^{1111}. \quad (24.132)$$

Le système d'équation (24.109) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left[ C_{minj}^{2200} + 2(\alpha_{12} + 2\alpha_{66})C_{minj}^{1111}R^2 + \alpha_{22}C_{minj}^{0022}R^4 - \Omega^2 \right] A_{ij} = 0, \quad (24.133)$$

pour  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,

avec

$$C_{minj}^{2200} = I_{mi}^{22}J_{nj}^{00} = I_{mi}^{22}, \quad C_{minj}^{1111} = I_{mi}^{11}J_{nj}^{11}, \quad C_{minj}^{0022} = I_{mi}^{00}J_{nj}^{22} = J_{nj}^{22}. \quad (24.134)$$

Les valeurs de ces intégrales sont reportées dans les tableaux B.1 à B.5 de l'annexe B, dans le cas où deux côtés opposés sont encastrés. Dans les autres cas, ces intégrales restent à évaluer.

En se limitant à l'approximation de Rayleigh (24.115) la fréquence propre du mode  $mn$  s'exprime sous la forme :

$$\omega_{mn} = \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D_{11}}{\rho_s}} \sqrt{C_{mmnn}^{2200} + 2(\alpha_{12} + 2\alpha_{66})C_{mmnn}^{1111}R^2 + \alpha_{22}C_{mmnn}^{0022}R^4}. \quad (24.135)$$

Dans le cas de deux côtés opposés en appuis simples :

$$C_{mmnn}^{2200} = m^4\pi^4, \quad C_{mmnn}^{1111} = m^2n^2\pi^2, \quad C_{mmnn}^{0022} = n^4\pi^4. \quad (24.136)$$

Dans le cas de deux côtés opposés encastrés, ou d'un côté encastré et l'autre en appui simple :

$$C_{mmnn}^{2200} = \lambda_m^4, \quad C_{mmnn}^{0022} = \lambda_n^4, \quad (24.137)$$

et

$$C_{mmnn}^{1111} = I_{mm}^{11}J_{nn}^{11}. \quad (24.138)$$

Les valeurs de  $\lambda_m$  et  $\lambda_n$  sont reportées dans le tableau 21.3 dans le cas de deux côtés opposés encastrés et dans le tableau 24.1 dans le cas d'un côté encastré et d'un côté en appui simple. Les valeurs des intégrales  $I_{mm}^{11}$  et  $J_{nn}^{11}$  sont reportées dans le tableau B.2 de l'annexe B dans le cas de deux côtés opposés encastrés. Ces valeurs montrent que :

$$I_{ii}^{11} = 12,30, \quad I_{ii}^{11} \approx \lambda_i(\lambda_i - 2) \quad i = 2, 3, 4, \dots \quad (24.139)$$

Enfin, l'évaluation de ces intégrales dans le cas d'un côté encastré l'autre étant en appui simple montre que :

$$I_{ii}^{11} \approx \lambda_i(\lambda_i - 1) \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (24.140)$$

Finalement l'expression (24.135), associée aux relations (24.136) à (24.140), montre que l'approximation de Rayleigh de la fréquence propre du mode  $mn$  peut s'écrire sous la forme :

$$\omega_{mn} = \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D_{11}}{\rho_s}} \sqrt{c_1^4 + 2(\alpha_{12} + 2\alpha_{66})R^2c_2 + \alpha_{22}R^4c_3^4}, \quad (24.141)$$

TABLEAU 24.6. Coefficients intervenant dans l'expression des fréquences propres de vibration d'une plaque orthotrope (côtés encastrés : *E* ou en appuis simples : *S*).

Conditions aux frontières	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>c</i> <sub>1</sub>	<i>c</i> <sub>3</sub>	<i>c</i> <sub>2</sub>
	1	1	4,730	4,730	$12,3^2 = 151,3$
	1	2, 3, 4, ...	4,730	$(n + 0,5)\pi$	$12,3c_3(c_3 - 2)$
	2, 3, 4, ...	1	$(m + 0,5)\pi$	4,730	$12,3c_1(c_1 - 2)$
	2, 3, 4, ...	2, 3, 4, ...	$(m + 0,5)\pi$	$(n + 0,5)\pi$	$c_1(c_1 - 2)c_3(c_3 - 2)$
	1, 2, 3, ...	1, 2, 3, ...	$m\pi$	$n\pi$	$m^2 n^2 \pi^4$
	1, 2, 3, ...	1, 2, 3, ...	$(m + 0,25)\pi$	$(n + 0,25)\pi$	$c_1(c_1 - 2)c_3(c_3 - 2)$
	1	1, 2, 3, ...	4,730	$n\pi$	$12,3n^2 \pi^2$
2, 3, 4, ...	1, 2, 3, ...	$(m + 0,5)\pi$	$n\pi$	$n^2 \pi^2 c_1(c_1 - 2)$	
	1	1, 2, 3, ...	4,730	$(n + 0,25)\pi$	$12,3c_3(c_3 - 2)$
2, 3, 4, ...	1, 2, 3, ...	$(m + 0,5)\pi$	$(n + 0,25)\pi$	$c_1(c_1 - 2)c_3(c_3 - 2)$	
	1, 2, 3, ...	1, 2, 3, ...	$(m + 0,25)\pi$	$n\pi$	$n^2 \pi^2 c_1(c_1 - 2)$

où les valeurs des coefficients  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  sont reportés dans le tableau 24.6 pour les diverses combinaisons : encastrements et appuis simples sur les côtés de la plaque.

Dans le cas d'une plaque isotrope ( $D_{11} = D_{22} = D_{12} + 2D_{66} = D$ ), l'expression des fréquences propres s'écrit sous la forme :

$$\omega_{mn} = \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_s}} \sqrt{c_1^4 + 2R^2 c_2 + R^4 c_3^4}. \quad (24.142)$$

Pour une plaque isotrope carrée encastrée sur ses quatre côtés, les valeurs tirées du tableau 24.6 conduisent à l'expression suivante de la fréquence fondamentale :

$$\omega_{11} = \frac{36,1}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_s}}. \quad (24.143)$$

En utilisant une série de 64 termes ( $M = N = 8$ ), la résolution du système (24.133) conduit à l'expression :

$$\omega_{11} = \frac{35,99}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_s}}. \quad (24.144)$$

La valeur déduite de l'approximation à un terme est donc très proche de la valeur exacte.

Dans le cas d'une plaque orthotrope carrée, encastrée sur ses quatre côtés, de caractéristiques :

$$D_{11} = 10D_{22}, \quad D_{12} + 2D_{66} = 1,2D_{22}, \quad (24.145)$$

les valeurs des fréquences propres obtenues par l'approximation (24.141) à un terme sont comparées dans le tableau 24.7 avec les valeurs obtenues en utilisant une série de 64 termes. Ces résultats montrent que les valeurs déduites de l'approximation à un terme sont suffisamment précises.

TABLEAU 24.7. Fréquences propres d'une plaque carrée orthotrope encastrée sur ses quatre côtés.

		$\omega_{mn} = k_{mn} \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_s}}$	
$m$	$n$	$k_{mn}$	
		approximation (24.141)	série à 64 termes
1	1	24,227	24,213
1	2	31,889	31,861
1	3	47,480	47,436
2	1	63,163	63,116
2	2	68,504	68,428
1	4	70,722	70,645
2	3	79,740	79,676
2	4	98,460	98,369

## 24.6 VIBRATIONS DE PLAQUES STRATIFIÉES SYMÉTRIQUES

### 24.6.1 Expressions générales

L'étude des fréquences propres en flexion de plaques stratifiées symétriques se fait de la même manière qu'au paragraphe 24.5. Dans le cas présent, l'énergie de déformation à considérer est celle introduite en (22.2). Il en résulte que le système (24.108) ou (24.109) est modifié en introduisant les termes en  $D_{16}$  et  $D_{26}$ . D'où le système de  $M \times N$  équations homogènes :

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ D_{11} C_{minj}^{2200} + [D_{12} (C_{minj}^{2002} + C_{minj}^{0220}) + 4D_{66} C_{minj}^{1111}] R^2 + D_{22} C_{minj}^{0022} R^4 + 2D_{16} (C_{minj}^{1210} + C_{minj}^{2101}) R + 2D_{26} (C_{minj}^{1012} + C_{minj}^{0121}) R^3 - \rho_s a^4 \omega^2 C_{minj}^{0000} \right\} A_{ij} = 0,$$

pour  $m = 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots, N.$

(24.146)

Comme dans le cas de plaques orthotropes, il est possible d'expliciter l'approximation de Rayleigh (paragraphe 24.5.2) ou l'approximation à deux termes (paragraphe 24.5.3), suivant des expressions analogues respectivement à (24.115) et à (24.120). Toutefois dans le cas présent, l'approximation de Rayleigh s'écarte notablement des valeurs obtenues avec un nombre élevé de termes. En effet, dans le cas de stratifiés symétriques, la déformée à un terme ne décrit pas assez correctement la déformée réelle.

### 24.6.2 Plaque symétrique dont les côtés sont encastrés ou libres

Comme application de la formulation générale précédente, nous considérons ici le cas d'une plaque rectangulaire constituée d'un stratifié symétrique, dont les côtés sont encastrés ou libres.

Le cas de côtés opposés encastrés a déjà été considéré au paragraphe 24.5.4 (relations (24.122) à (24.125)).

Dans le cas de côtés opposés l'un encastré, l'autre étant libre, il est possible d'exprimer la flèche à partir des fonctions déduites de la fonction poutre introduite au paragraphe 24.3.5 :

— côté  $x = 0$  encastré et côté  $x = a$  libre :

$$X_m(x) = \cos \lambda_m \frac{x}{a} - \cosh \lambda_m \frac{x}{a} - \gamma_m \left( \sin \lambda_m \frac{x}{a} - \sinh \lambda_m \frac{x}{a} \right), \quad (24.147)$$

— côté  $y = 0$  encastré et côté  $y = b$  libre :

$$Y_n(y) = \cos \lambda_n \frac{y}{b} - \cosh \lambda_n \frac{y}{b} - \gamma_n \left( \sin \lambda_n \frac{y}{b} - \sinh \lambda_n \frac{y}{b} \right), \quad (24.148)$$

où  $\lambda_m$ ,  $\lambda_n$ ,  $\gamma_m$  et  $\gamma_n$  sont donnés par les relations (24.77) et (24.78) :

$$\begin{aligned} \cos \lambda_i \cosh \lambda_i &= -1, \\ \gamma_i &= \frac{\cos \lambda_i + \cosh \lambda_i}{\sin \lambda_i + \sinh \lambda_i}, \quad i = m, n. \end{aligned} \quad (24.149)$$

Les valeurs de  $\lambda_i$  et  $\gamma_i$  sont reportées dans le tableau 24.2.

Dans le cas de côtés opposés libres, la flèche est exprimée à partir des fonctions déduites de la fonction poutre introduite en (24.82), (24.87) et (24.88) :

— côté  $x = 0$  libre et côté  $x = a$  libre :

$$\begin{aligned} X_1(x) &= 1, \\ X_2(x) &= \sqrt{3} \left( 1 - 2 \frac{x}{a} \right), \\ X_m(x) &= \cos \lambda_m \frac{x}{a} + \cosh \lambda_m \frac{x}{a} + \gamma_m \left( \sin \lambda_m \frac{x}{a} + \sinh \lambda_m \frac{x}{a} \right), \quad m \geq 3, \end{aligned} \quad (24.150)$$

— côté  $y = 0$  libre et côté  $y = b$  libre :

$$\begin{aligned} Y_1(y) &= 1, \\ Y_2(y) &= \sqrt{3} \left( 1 - 2 \frac{y}{b} \right), \\ Y_n(y) &= \cos \lambda_n \frac{y}{b} + \cosh \lambda_n \frac{y}{b} + \gamma_n \left( \sin \lambda_n \frac{y}{b} + \sinh \lambda_n \frac{y}{b} \right), \quad n \geq 3. \end{aligned} \quad (24.151)$$

Les coefficients  $\lambda_m$ ,  $\lambda_n$ ,  $\gamma_m$  et  $\gamma_n$  sont exprimés par les relations (24.84) et (24.85) :

$$\begin{aligned} \cos \lambda_i \cosh \lambda_i &= 1, \\ \gamma_i &= \frac{\sin \lambda_i + \sinh \lambda_i}{\cos \lambda_i - \cosh \lambda_i}, \quad i = m, n \geq 3. \end{aligned} \quad (24.152)$$

Les valeurs de  $\lambda_i$  et  $\gamma_i$  sont reportées dans le tableau 24.3.

Il est important de noter que si les fonctions poutres (24.147) à (24.152) vérifient exactement les conditions (24.81) aux frontières sur les extrémités libres d'une poutre, elles ne vérifient que de manière approchée les conditions aux frontières dans le cas de côtés libres d'une plaque. En effet, dans le cas d'un côté libre de direction parallèle à  $y$ , par exemple, les conditions aux frontières (16.32) s'écrivent :

$$M_x = 0, \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0. \quad (24.153)$$

La résultante  $Q_x$  de cisaillement transverse est exprimée par la quatrième équation des plaques (13.56). Et les conditions aux frontières s'écrivent :

$$M_x = 0, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0. \quad (24.154)$$

Les expressions du moment de flexion  $M_x$  et du moment de torsion  $M_{xy}$  sont déduites de l'équation constitutive (14.29) des stratifiés. Les conditions aux frontières sur un côté libre de direction parallèle à  $y$  s'écrivent donc finalement :

$$D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0, \quad (24.155)$$

$$D_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + 4D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0. \quad (24.156)$$

Dans le cas d'un côté libre de direction parallèle à  $x$ , ces conditions se transposent facilement, en intervertissant les rôles respectifs des variables  $x$  et  $y$ , et des indices 1 et 2.

Les fonctions poutres (24.147) et (24.150), dans la direction  $x$ , vérifient les conditions (24.81) d'extrémités libres d'une poutre. Soit :

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = 0. \quad (24.157)$$

Il en résulte que les conditions (24.155) et (24.156) ne sont qu'approchées par les fonctions poutres. L'approche par la méthode de Ritz est alors moins précise dans le cas de côtés libres.

À partir des fonctions correspondant aux conditions imposées sur les quatre côtés de la plaque, il est possible d'évaluer les intégrales  $I_{mi}^{pq}$  et  $J_{nj}^{rs}$  et d'établir le système (24.146) d'équations homogènes correspondant. Ce système d'équations homogènes peut être résolu comme un problème aux valeurs propres et vecteurs propres, où les valeurs propres sont les fréquences propres des vibrations et les vecteurs propres déterminent les modes propres des vibrations. L'ensemble de ces calculs est grandement facilité par l'utilisation d'un logiciel de calcul numérique d'usage général.

Comme application numérique, nous considérons le cas d'une plaque constituée d'un stratifié orthotrope de coefficients de flexion dans ses axes principaux :

$$D_{22}^0 = 0,25D_{11}^0, \quad D_{12}^0 = 0,075D_{11}^0, \quad D_{66}^0 = 0,125D_{11}^0. \quad (24.158)$$

Les axes principaux sont orientés à  $30^\circ$  des axes géométriques de la plaque. Les coefficients de flexion par rapport aux directions des côtés de la plaque sont alors déterminés en appliquant aux coefficients (24.158) le changement d'orientation défini dans le tableau 11.6. Soit :

$$\begin{aligned} D_{11} &= 0,70D_{11}^0, & D_{12} &= 0,1875D_{11}^0, & D_{16} &= 0,2273D_{11}^0, \\ D_{22} &= 0,325D_{11}^0, & D_{26} &= 0,0974D_{11}^0, & D_{66} &= 0,2375D_{11}^0. \end{aligned} \quad (24.159)$$

Les valeurs des fréquences propres des 6 premiers modes sont reportées dans le tableau 24.8, pour les diverses combinaisons : encastrements ou côtés libres. Les fréquences ont été calculées en prenant une série de 64 termes pour la fonction déplacement. Les formes des modes sont reportées sur les figures 24.6 et 24.7

TABLEAU 24.8. Fréquences propres de vibration en flexion des six premiers modes d'une plaque carrée d'un matériau composite symétrique, (côtés encastrés : E ou côtés libres : L).

Conditions aux frontières	$k_i$					
	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4	mode 5	mode 6
EEEE	25,670	45,090	58,648	71,211	82,994	100,929
LLLL	8,311	11,645	18,532	19,577	26,853	36,077
EELL	5,429	15,108	22,092	31,833	39,625	51,835
EELL	18,096	19,723	30,478	49,198	52,061	52,282
EEEL	18,995	28,191	47,226	51,570	62,619	74,397
ELLL	2,693	6,145	15,698	17,373	23,521	34,431

dans le cas de quatre côtés encastrés (figure 24.6), et dans le cas de deux côtés consécutifs encastrés, les deux autres étant libres (figure 24.7).

## 24.7 VIBRATIONS DE PLAQUES STRATIFIÉES NON SYMÉTRIQUES

### 24.7.1 Plaque constituée d'un stratifié croisé antisymétrique

Nous considérons le cas d'une plaque rectangulaire de dimensions  $a$  et  $b$ , constituée d'un stratifié croisé  $[0^\circ/90^\circ]_p$ . Ce stratifié est caractérisé par :

$$\begin{aligned} A_{16} = A_{26} &= 0, & B_{12} = B_{16} = B_{26} = B_{66} &= 0, & D_{16} = D_{26} &= 0, & (24.160) \\ A_{22} = A_{11}, & & B_{22} = -B_{11}, & & D_{22} = D_{11}. & \end{aligned}$$

En introduisant les expressions (24.2) des déplacements dans les équations (16.1) à (16.3), nous obtenons en l'absence de charges transversales ( $q = 0$ ) et en négligeant les termes d'inertie en rotation :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} &= 0, \\ (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{11} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} &= 0, & (24.161) \\ D_{11} \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - B_{11} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) - \rho_s \omega^2 w_0 &= 0. \end{aligned}$$

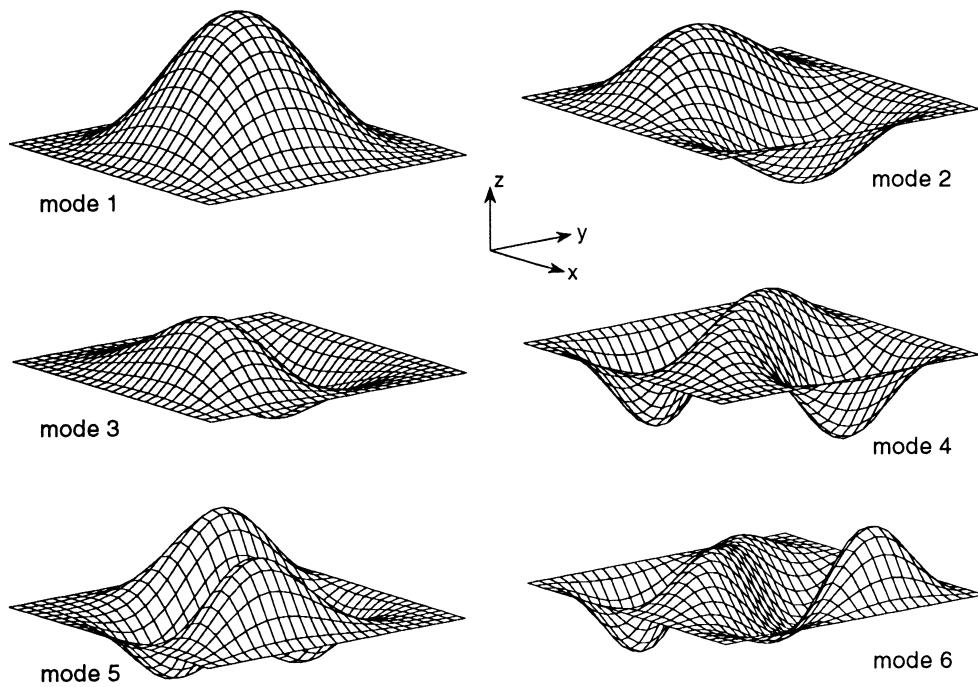


FIGURE 24.6. Modes propres d'une plaque carrée en matériau composite symétrique, encastrée sur les quatre côtés.

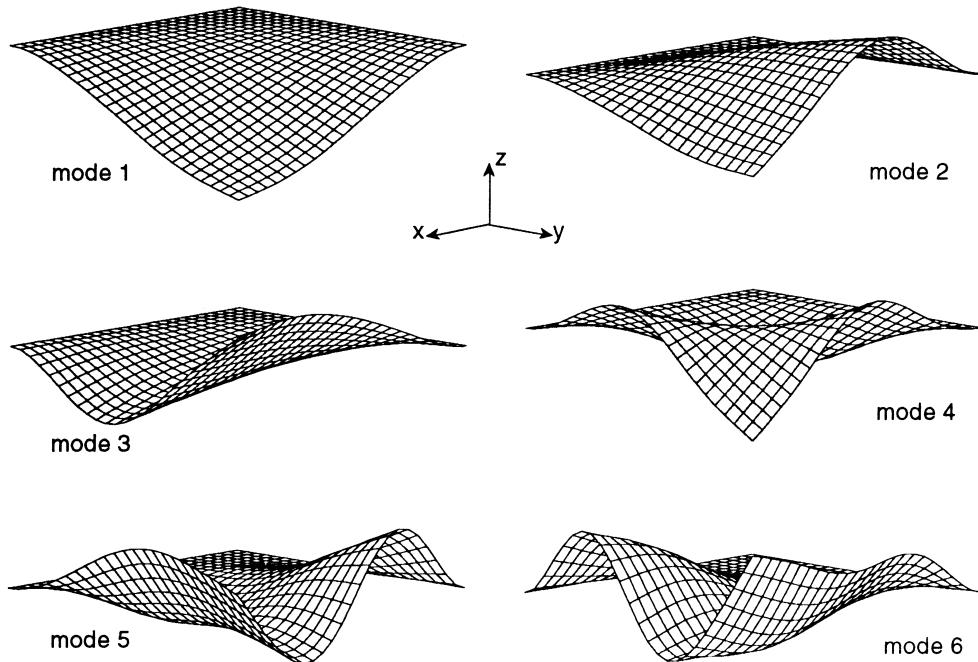


FIGURE 24.7. Modes propres d'une plaque carrée en matériau composite symétrique, dont deux côtés consécutifs sont encastrés, les deux autres étant libres.

Dans le cas où les côtés de la plaque sont en liaison pivot, libre dans la direction normale, les conditions aux frontières s'écrivent :

— sur les côtés  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$\begin{aligned} w_0 &= 0, & M_x &= B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} &= 0, \\ v_0 &= 0, & N_x &= A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} &= 0, \end{aligned} \quad (24.162)$$

— sur les côtés  $y = 0$  et  $y = b$  :

$$\begin{aligned} w_0 &= 0, & M_y &= -B_{11} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} &= 0, \\ u_0 &= 0, & N_y &= A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{11} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (24.163)$$

Les conditions aux frontières sont vérifiées avec des déplacements de la forme :

$$\begin{aligned} u_0 &= A_{mn} \cos m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \\ v_0 &= B_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b}, \\ w_0 &= C_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}. \end{aligned} \quad (24.164)$$

En reportant ces expressions dans les équations (24.161), nous obtenons :

$$\begin{aligned} a_1 A_{mn} + a_2 B_{mn} + a_3 C_{mn} &= 0, \\ a_2 A_{mn} + a_4 B_{mn} + a_5 C_{mn} &= 0, \\ a_3 A_{mn} + a_5 B_{mn} + \left( a_6 - \frac{\rho_s a^2}{\pi^2} \omega^2 \right) C_{mn} &= 0, \end{aligned} \quad (24.165)$$

avec

$$\begin{aligned} a_1 &= m^2 A_{11} + n^2 R^2 A_{66}, \\ a_2 &= mnR(A_{12} + A_{66}), \\ a_3 &= -m^3 \frac{\pi}{a} B_{11}, \\ a_4 &= m^2 A_{66} + n^2 R^2 A_{11}, \\ a_5 &= n^3 R^3 \frac{\pi}{a} B_{11}, \\ a_6 &= \frac{\pi^2}{a^2} \left[ (m^4 + n^4 R^4) D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) \right], \\ R &= \frac{a}{b}. \end{aligned} \quad (24.166)$$

Une solution non nulle est obtenue, lorsque le déterminant du système d'équations homogènes (24.165) est nul. Cette condition conduit à l'expression des fréquences propres :

$$\begin{aligned}\omega_{mn}^2 = & \frac{\pi^4}{\rho_s a^4} \left\{ \left[ (m^4 + n^4 R^4) D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) \right] \right. \\ & \left. - \frac{B_{11}^2}{\Delta_1} (m^4 \Delta_3 + n^4 R^4 \Delta_2) \right\},\end{aligned}\quad (24.167)$$

en posant :

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= (m^2 A_{11} + n^2 R^2 A_{66})(m^2 A_{66} + n^2 R^2 A_{11}) - m^2 n^2 R^2 (A_{12} + A_{66})^2, \\ \Delta_2 &= m^4 (A_{12} + A_{66})^2 + m^2 n^2 R^2 A_{11} + n^4 R^4 A_{66}, \\ \Delta_3 &= m^4 A_{66} + m^2 n^2 R^2 A_{11} + n^4 R^4 (A_{12} + A_{66}).\end{aligned}\quad (24.168)$$

Lorsque le couplage membrane-flexion/torsion est négligé ( $B_{11} = 0$ ), l'expression (24.167) des fréquences propres se réduit à :

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4}{\rho_s a^4} \left[ (m^4 + n^4 R^4) D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) \right], \quad (24.169)$$

qui est l'expression (24.95) des fréquences propres de vibrations en flexion de plaques orthotropes en appuis simples sur ses côtés et dans le cas où la plaque est constituée d'un matériau pour lequel  $D_{22} = D_{11}$ .

Dans le cas de stratifiés orthotropes, l'expression (24.169) montre que la fréquence fondamentale correspond à  $m = n = 1$ . Il n'en est pas de même dans le cas où il existe un couplage. Le numéro du mode correspondant alors à la fréquence fondamentale ne peut être déduit dans le cas général de l'expression (24.167). Il dépend des caractéristiques mécaniques des couches constituant le stratifié.

Nous examinons le cas de stratifiés croisés antisymétriques constitués de couches dont les caractéristiques mécaniques sont :

$$E_L = 20E_T, \quad G_{LT} = 0,5E_T, \quad \nu_{LT} = 0,25. \quad (24.170)$$

Les valeurs des coefficients de rigidité sont déterminées à l'aide des relations (22.40) à (22.46). La variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport longueur sur largeur ( $a/b$ ) de la plaque est reportée sur la figure 24.8 dans le cas des stratifiés croisés  $[0^\circ/90^\circ]$ ,  $[0^\circ/90^\circ]_2$ ,  $[0^\circ/90^\circ]_3$ , et dans le cas d'un stratifié orthotrope ( $B_{11} = 0$ ). Les fréquences fondamentales correspondent dans tous les cas à  $m = n = 1$ . Nous observons que le couplage membrane/flexion réduit la valeur des fréquences propres et les résultats reportés montrent que les valeurs des fréquences propres tendent rapidement vers la solution (24.169) d'un stratifié orthotrope.

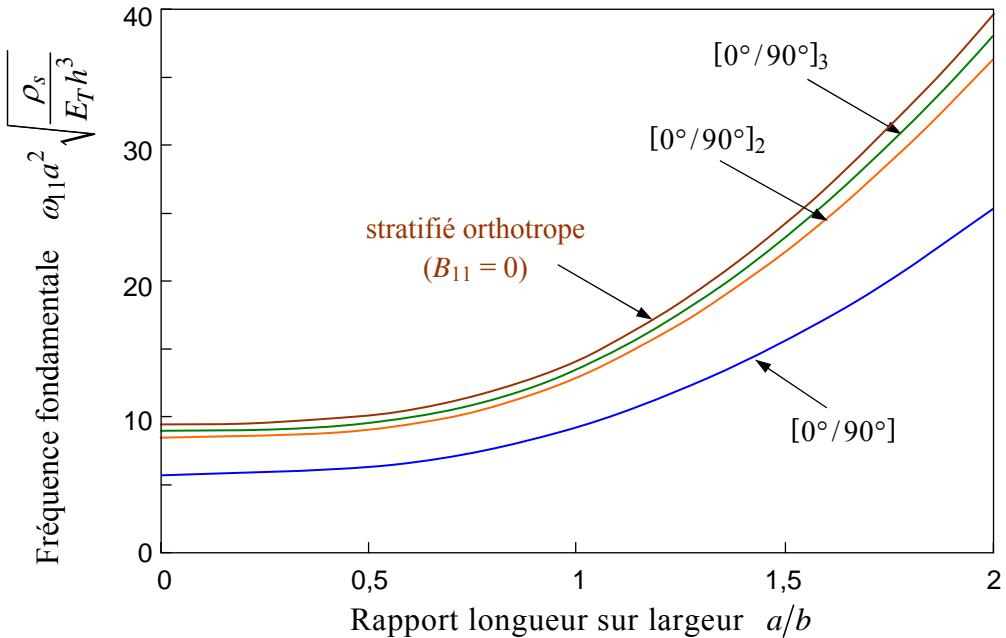


FIGURE 24.8. Variation de la fréquence fondamentale d'une plaque rectangulaire, constituée d'un stratifié croisé, en fonction du rapport longueur sur largeur de la plaque.

## 24.7.2 Plaque constituée d'un stratifié équilibré

Nous examinons dans ce paragraphe le cas d'une plaque rectangulaire, constituée d'un stratifié équilibré  $[\pm\theta]_n$ . Ce stratifié est caractérisé par :

$$A_{16} = A_{26} = 0, \quad B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = 0, \quad D_{16} = D_{26} = 0. \quad (24.171)$$

L'introduction des expressions (24.2) des déplacements dans les équations (16.1) à (16.3) conduit, en l'absence de charges transversales ( $q = 0$ ) et en négligeant les termes d'inertie en membrane, à :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} &= 0, \\ (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} &= 0, \\ D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\ - B_{16} \left( 3 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} \right) - B_{26} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + 3 \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \right) - \rho_s \omega^2 w_0 &= 0. \end{aligned} \quad (24.172)$$

Dans le cas où les côtés de la plaque sont en liaison pivot, libre dans la direction des côtés, les conditions aux frontières s'écrivent :

— sur les côtés  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$\begin{aligned} w_0 &= 0, \quad M_x = B_{16} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0, \\ u_0 &= 0, \quad N_{xy} = A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0, \end{aligned} \quad (24.173)$$

— sur les côtés  $y = 0$  et  $y = b$  :

$$\begin{aligned} w_0 &= 0, \quad M_y = B_{26} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0, \\ v_0 &= 0, \quad N_{xy} = A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0. \end{aligned} \quad (24.174)$$

Ces conditions aux frontières sont vérifiées avec des déplacements de la forme :

$$\begin{aligned} u_0 &= A_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b}, \\ v_0 &= B_{mn} \cos m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \\ w_0 &= C_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}. \end{aligned} \quad (24.175)$$

En reportant ces expressions dans les équations (24.172), nous obtenons :

$$\begin{aligned} a_1 A_{mn} + a_2 B_{mn} + a'_3 C_{mn} &= 0, \\ a_2 A_{mn} + a'_4 B_{mn} + a'_5 C_{mn} &= 0, \\ a'_3 A_{mn} + a'_5 B_{mn} + \left( a'_6 - \frac{\rho_s a^2}{\pi^2} \omega^2 \right) C_{mn} &= 0. \end{aligned} \quad (24.176)$$

Le système obtenu a la même forme que le système (24.165), avec :

$$\begin{aligned} a'_3 &= -\frac{\pi}{a} n R \left( 3m^2 B_{16} + n^2 R^2 B_{26} \right), \\ a'_4 &= m^2 A_{66} + n^2 R^2 A_{22}, \\ a'_5 &= -\frac{\pi}{a} m \left( m^2 B_{16} + 3n^2 R^2 B_{26} \right), \\ a'_6 &= \frac{\pi^2}{a^2} \left[ m^4 D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + n^4 R^4 D_{22} \right]. \end{aligned} \quad (24.177)$$

L'expression des fréquences propres s'écrit alors sous une forme analogue à la relation (24.167) :

$$\begin{aligned}\omega_{mn}^2 = & \frac{\pi^4}{\rho_s a^4} \left\{ \left[ m^4 D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + n^4 R^4 D_{22} \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Delta'_1} \left[ m(m^2 B_{16} + 3n^2 R^2 B_{26}) \Delta'_2 + nR(3m^2 B_{16} + n^2 R^2 B_{26}) \Delta'_3 \right] \right\},\end{aligned}\quad (24.178)$$

en posant :

$$\begin{aligned}\Delta'_1 &= (m^2 A_{11} + n^2 R^2 A_{66})(m^2 A_{66} + n^2 R^2 A_{22}) - m^2 n^2 R^2 (A_{12} + A_{66})^2, \\ \Delta'_2 &= (m^2 A_{11} + n^2 R^2 A_{66})(m^2 B_{16} + 3n^2 R^2 B_{26}) \\ &\quad - n^2 R^2 (A_{12} + A_{66})(3m^2 B_{16} + n^2 R^2 B_{26}), \\ \Delta'_3 &= (m^2 A_{66} + n^2 R^2 A_{22})(3m^2 B_{16} + n^2 R^2 B_{26}) \\ &\quad - n^2 R^2 (A_{12} + A_{66})(m^2 B_{16} + 3n^2 R^2 B_{26}).\end{aligned}\quad (24.179)$$

Lorsque le couplage membrane-flexion/torsion est négligé ( $B_{16} = B_{26} = 0$ ), l'expression (24.178) des fréquences propres des vibrations se réduit à l'expression (24.95) obtenue dans le cas de plaques orthotropes dont les côtés sont en appuis simples. Dans le cas où il existe un couplage, le numéro du mode fondamental de vibration dépend des caractéristiques mécaniques des couches constituant le stratifié.

Nous considérons le cas d'un stratifié équilibré, constitué de couches dont les caractéristiques mécaniques sont données en (24.170). La variation de la fréquence fondamentale (correspondant dans ce cas à  $m = n = 1$ ) est reportée sur la figure 24.9 pour une plaque carrée, dans le cas de stratifiés  $[+\theta/-\theta]$ ,  $[+\theta/-\theta]_2$ ,  $[+\theta/-\theta]_3$  et dans le cas d'un stratifié orthotrope ( $B_{16} = B_{26} = 0$ ). Les résultats obtenus montrent que les valeurs des fréquences propres tendent rapidement vers la solution du stratifié orthotrope (24.95), lorsque le nombre de couches augmente.

## EXERCICES

**24.1** Une poutre est constituée du stratifié symétrique à cinq couches considéré dans l'exercice 23.1. Tracer en fonction de la longueur  $L$  de la poutre les valeurs des fréquences des quatre premiers modes : dans le cas où la poutre a ses extrémités en appuis simples, dans le cas où les extrémités sont encastrées, dans le cas d'une extrémité encastrée et d'une extrémité libre.

**24.2** Reprendre l'exercice précédent dans le cas où la poutre est constituée du matériau sandwich considéré dans l'exercice 23.2.

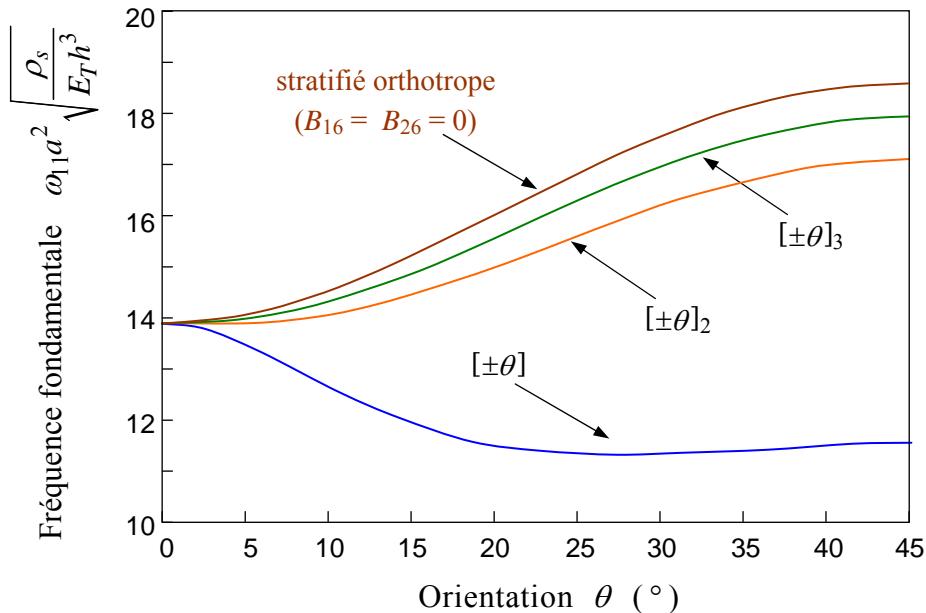


FIGURE 24.9. Variation de la fréquence fondamentale de vibration d'une plaque carrée, constituée d'un stratifié équilibré, en fonction de l'orientation des couches.

**24.3** On considère une plaque constituée d'un matériau sandwich symétrique orthotrope.

Expliciter les équations de vibrations en flexion dans le cas où les termes d'inertie sont négligeables.

Dans le cas d'appuis simples, les modes propres sont recherchés sous la forme :

$$\begin{aligned}\varphi_x(x, y) &= A_{mn} \cos m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \\ \varphi_y(x, y) &= B_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b}, \\ w_0(x, y) &= C_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}.\end{aligned}$$

Montrer que ces fonctions vérifient bien les conditions d'appuis simples sur les quatre côtés.

Établir le système d'équation des fréquences propres et modes propres. En déduire l'expression des fréquences propres.

**24.4** Expliciter le système (24.109) pour  $M = N = 3$  dans le cas d'une plaque rectangulaire encastrée, en utilisant les fonctions poutres.

À partir du système d'équations obtenu, calculer les fréquences propres réduites et les modes propres de vibrations pour une plaque de longueur double de la largeur et de caractéristiques :

$$D_{12} = 0,08D_{11}, \quad D_{66} = 0,12D_{11}, \quad D_{22} = 0,5D_{11}.$$

**24.5** On considère une plaque rectangulaire orthotrope encastrée sur deux côtés consécutifs et libres sur les deux autres. Pour résoudre le problème de vibrations, on considère les fonctions poutres (24.147) et (24.148).

Reprendre dans le cas présent l'exercice 24.4.

**24.6** On étudie les vibrations de la plaque considérée dans l'exercice 22.1.

À partir du système obtenu pour les vibrations de la plaque, calculer les fréquences propres (fréquences réduites) et les modes propres de vibrations.

**24.7** Reprendre l'exercice précédent, dans le cas où la plaque a deux côtés consécutifs encastrés et deux côtés libres. Le problème sera résolu en prenant les fonctions poutres (24.147) et (24.148).

## CHAPITRE 25

# Influence des Phénomènes de Dilatation sur le Comportement Mécanique des Stratifiés

## 25.1 INTRODUCTION

Généralement, les propriétés des matériaux composites sont affectées par les conditions d'environnement auxquelles ils sont soumis. Parmi les facteurs liés à l'environnement, ceux qui introduisent des variations de déformation en l'absence de tout chargement mécanique revêtent un intérêt particulier. Dans le cas des structures en matériaux composites, ces phénomènes sont la conséquence de la variation de température, de l'absorption par la matrice polymère d'agents de gonflement tels que la vapeur d'eau, de la dilatation de gaz absorbés par la matrice, etc. Ces phénomènes induisent des déformations et contraintes qui peuvent modifier notablement le comportement mécanique des structures en matériaux composites : rigidité, flambement, fréquences de vibration, etc.

Dans ce chapitre, nous examinons de quelle manière sont modifiées les équations des stratifiés, dans le cas où l'on tient compte de ces phénomènes de dilatation, et les conséquences induites sur le comportement mécanique des plaques constituées de stratifiés.

## 25.2 ÉQUATIONS DU COMPORTEMENT DES MATERIAUX COMPOSITES TENANT COMPTE DES PHÉNOMÈNES DE DILATATION

### 25.2.1 Relations d'élasticité dans les axes des matériaux

L'étude du comportement mécanique des stratifiés a, jusqu'ici, été menée en considérant que le matériau était rapporté à un état de référence en température, pour lequel le champ des déformations et le champ des contraintes dans le matériau étaient considérés comme étant nuls en l'absence de chargement mécanique. Dans la pratique, les structures sont soumises à des variations de températures aussi bien durant leur mise en œuvre qu'au cours de leur utilisation. Le premier effet de variation de la température est de modifier la rigidité et les caractéristiques à la rupture du matériau. En outre, la variation de la température produit une dilatation thermique (extension ou contraction) du matériau. Les phénomènes

de dilatation thermique peuvent être décrits en écrivant les déformations en un point  $(x, y, z)$  et à l'instant  $t$  sous la forme :

$$\varepsilon_{i(\text{thermique})}^* = \alpha_i \Delta T(x, y, z, t), \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (25.1)$$

où  $\alpha_i$  sont les coefficients de dilatation thermique et  $\Delta T$  est la variation de température à partir d'une température de référence pour laquelle les déformations thermiques sont considérées comme étant égales à zéro. La répartition des températures dans la structure et au cours du temps est déterminée à partir des phénomènes de transfert de chaleur.

Les phénomènes de dilatation par absorption d'humidité ou de gaz conduisent à des effets analogues aux effets thermiques. Les déformations qui en résultent peuvent se mettre sous la forme :

$$\varepsilon_{i(\text{gonflement})}^* = \beta_i \Delta C(x, y, z, t), \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (25.2)$$

où  $\beta_i$  sont les coefficients de gonflement (par exemple coefficients de dilatation hygrométrique), et  $\Delta C$  est la variation de la concentration de l'agent de gonflement à partir d'un état où les déformations de gonflement sont nulles. La répartition des concentrations en agent de gonflement est déterminée à partir de concepts physico-chimiques tels la loi de Fick [33].

De manière à inclure les effets des phénomènes de dilatation, la loi d'élasticité (7.3), écrite dans un état de référence où les déformations dues aux phénomènes de dilatation sont nulles, doit être modifiée et écrite sous la forme :

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^6 S_{ij} \sigma_j + \varepsilon_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (25.3)$$

où  $S_{ij}$  sont les constantes de souplesse et  $\varepsilon_i^*$  les déformations dues aux effets thermiques, aux agents de gonflement, etc :

$$\varepsilon_i^* = \varepsilon_{i(\text{thermique})}^* + \varepsilon_{i(\text{gonflement})}^* + \dots \quad (25.4)$$

La forme inverse de la relation (25.3) d'élasticité s'écrit :

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^6 C_{ij} (\varepsilon_j - \varepsilon_j^*), \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (25.5)$$

où  $C_{ij}$  sont les constantes de rigidité.

Dans la pratique, les phénomènes thermiques et de gonflement ne produisent que des extensions ou contractions (appelées sous le terme général de dilatations), n'affectant pas les déformations en cisaillement. Dans ce cas, les relations d'élasticité peuvent être réécrites suivant :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \sum_{j=1}^6 S_{ij} \sigma_j + \varepsilon_i^*, \quad i = 1, 2, 3, \\ \varepsilon_i &= \sum_{j=1}^6 S_{ij} \sigma_j, \quad i = 4, 5, 6, \end{aligned} \quad (25.6)$$

et

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \sum_{j=1}^3 C_{ij} (\varepsilon_j - \varepsilon_j^*) + \sum_{j=4}^6 C_{ij} \varepsilon_j, & i &= 1, 2, 3, \\ \sigma_i &= \sum_{j=1}^6 C_{ij} \varepsilon_j, & i &= 4, 5, 6.\end{aligned}\quad (25.7)$$

Dans le cas de matériaux orthotropes, la relation d'élasticité (25.5), rapportée aux axes principaux du matériau s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^* \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^* \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_3^* \\ \varepsilon_4 - \varepsilon_4^* \\ \varepsilon_5 - \varepsilon_5^* \\ \varepsilon_6 - \varepsilon_6^* \end{bmatrix}. \quad (25.8)$$

Soit, dans la pratique :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T - \beta_1 \Delta C \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T - \beta_2 \Delta C \\ \varepsilon_3 - \alpha_3 \Delta T - \beta_3 \Delta C \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (25.9)$$

avec dans le cas d'un matériau unidirectionnel :

$$C_{13} = C_{12}, \quad C_{33} = C_{22}, \quad C_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}), \quad C_{55} = C_{66}. \quad (25.10)$$

Dans un état de contraintes planes (paragraphe 11.3), la relation (25.8) se réduit à :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^* \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^* \\ \varepsilon_6 - \varepsilon_6^* \end{bmatrix}, \quad (25.11)$$

en introduisant les constantes de rigidité réduites (11.47) du matériau.

## 25.2.2 Relations d'élasticité en dehors des axes

Dans le cas où les axes principaux du matériau font un angle  $\theta$  (figure 11.1) avec des axes de référence ( $x, y, z$ ), la relation d'élasticité rapportée à ces axes

s'écrit par extension de la relation (11.3) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{11} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^* \\ \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^* \\ \gamma_{yz} - \gamma_{yz}^* \\ \gamma_{xz} - \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{xy} - \gamma_{xy}^* \end{bmatrix}, \quad (25.12)$$

où  $\varepsilon_{xx}^*$ ,  $\varepsilon_{yy}^*$ ,  $\varepsilon_{zz}^*$ ,  $\gamma_{yz}^*$ ,  $\gamma_{xz}^*$ ,  $\gamma_{xy}^*$  sont les déformations dues aux phénomènes de dilatation, rapportées aux axes de référence ( $x, y$ ). Les expressions des constantes de rigidité sont celles qui sont exprimées dans le tableau 11.3 en fonction des constantes de rigidité dans les axes principaux. Les relations liant les déformations  $\varepsilon_{xx}^*$ ,  $\varepsilon_{yy}^*$ , etc., en fonction des dilatations  $\varepsilon_{11}^*$ ,  $\varepsilon_{22}^*$ , etc., exprimées dans les axes des matériaux sont déduites des relations (6.42) et (6.44), en notant que le changement de base (1, 2, 3)  $\rightarrow$  ( $x, y, z$ ) se fait par une rotation d'angle  $-\theta$ . Nous avons par exemple :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \varepsilon_{zz}^* \\ \gamma_{yz}^* \\ \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{bmatrix} = \mathbf{T}_\varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^* \\ \varepsilon_{22}^* \\ \varepsilon_{33}^* \\ \gamma_{23}^* \\ \gamma_{13}^* \\ \gamma_{12}^* \end{bmatrix}, \quad (25.13)$$

où la matrice de changement de référence  $\mathbf{T}_\varepsilon^{-1}$  est exprimée en (6.45). Dans le cas de matériaux orthotropes, les relations d'élasticité rapportées aux axes des matériaux sont décrites par les relations (25.6) et (25.7). Dans les axes des matériaux les déformations en cisaillement sont nulles, soit :

$$\gamma_{23}^* = \gamma_{13}^* = \gamma_{12}^* = 0. \quad (25.14)$$

Les déformations de dilatation dans le système d'axes ( $x, y, z$ ) se réduisent donc, en appliquant la relation (25.13), à :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \varepsilon_{zz}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^* \\ \varepsilon_{22}^* \\ \varepsilon_{33}^* \end{bmatrix}. \quad (25.15)$$

La relation d'élasticité (25.12) exprimées dans les axes de référence ( $x, y, z$ ) se réduit alors à :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{11} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^* \\ \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^* \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} - \gamma_{xy}^* \end{bmatrix}. \quad (25.16)$$

Dans le cas d'un état de contraintes planes,  $\varepsilon_{zz}^* = 0$ , et la relation (25.15) se réduit à :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^* \\ \varepsilon_{22}^* \end{bmatrix}. \quad (25.17)$$

La relation d'élasticité s'écrit alors, compte tenu de (11.43), sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{bmatrix}, \quad (25.18)$$

où les déformations  $\varepsilon_{xx}^*$ ,  $\varepsilon_{yy}^*$ ,  $\gamma_{xy}^*$  s'expriment suivant la relation (25.17) en fonction des dilatations  $\varepsilon_{11}^*$ ,  $\varepsilon_{22}^*$ , rapportées aux axes du matériau. Les paramètres  $Q'_{ij}$  sont exprimés dans le tableau 11.6.

## 25.3 ÉQUATIONS DU COMPORTEMENT D'UN STRATIFIÉ

### 25.3.1 Équation constitutive

Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, la relation (14.20) exprimant les contraintes dans la couche  $k$  est remplacée, en tenant compte de l'expression (25.18), par la relation :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 + z\kappa_x \\ \varepsilon_{yy}^0 + z\kappa_y \\ \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{bmatrix}. \quad (25.19)$$

L'équation constitutive s'obtient ensuite en combinant l'expression précédente avec les relations de définitions (13.17) et (13.19) des résultantes et des moments. Nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ N_{xy}^* \\ M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{bmatrix}, \quad (25.20)$$

où les coefficients  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$  sont les coefficients de rigidité du stratifié exprimés par les relations (14.31) à (14.33), et où sont introduits les résultantes et moments dus aux phénomènes de dilatation, définis par :

$$(N_x^*, M_x^*) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{11}\varepsilon_{xx}^* + Q'_{12}\varepsilon_{yy}^* + Q'_{16}\gamma_{xy}^*)_k (1, z) dz,$$

$$(N_y^*, M_y^*) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{12}\varepsilon_{xx}^* + Q'_{22}\varepsilon_{yy}^* + Q'_{26}\gamma_{xy}^*)_k (1, z) dz, \quad (25.21)$$

$$(N_{xy}^*, M_{xy}^*) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{16}\varepsilon_{xx}^* + Q'_{26}\varepsilon_{yy}^* + Q'_{66}\gamma_{xy}^*)_k (1, z) dz.$$

Les déformations  $(\varepsilon_{xx}^*, \varepsilon_{yy}^*, \gamma_{xy}^*)_k$  dans chaque couche sont exprimées en fonction des dilatations  $(\varepsilon_{11}^*, \varepsilon_{22}^*)_k$ , rapportées aux axes du matériau de la couche, par la relation (25.17). Les dilatations  $(\varepsilon_{11}^*, \varepsilon_{22}^*)_k$  s'expriment elles-mêmes par des relations du type (25.1) et (25.2).

L'équation constitutive (25.20) tenant compte des phénomènes de dilatation diffère de l'équation constitutive (14.29) de la théorie classique initiale, par l'adjonction des résultantes et des moments dus aux phénomènes thermiques, à l'absorption d'agents de gonflement, etc.

Les contraintes de dilatation (thermiques, hygrométriques, etc.) exprimées dans la relation (25.19) sont induites lorsque les conditions de température, d'hygrométrie, etc. du stratifié diffèrent de l'état où le stratifié est libre de toutes contraintes hygrothermiques. Ces contraintes ne sont pas en fait induites par la seule dilatation (ou la contraction) hygrothermique du stratifié, mais résultent à la fois des phénomènes de dilatation et du fait que le stratifié n'est pas libre de se dilater ou de se contracter. En effet, aucune force ou moment résultant n'est induit dans le stratifié par effet hygrothermique, lorsque celui-ci est totalement libre de se déformer en membrane, en flexion et en torsion. Toutefois, chaque couche du stratifié influence la dilatation ou contraction des couches voisines, du fait de propriétés mécaniques et hygrothermiques différentes. Les couches ne sont alors plus libres de se déformer. Les contraintes hygrothermiques dans chaque couche résultent donc des restrictions imposées à leurs déformations par les couches voisines.

Les contraintes thermiques induites lors du refroidissement des stratifiés, après une mise en œuvre en température, sont pratiquement inévitables. Dans certains cas, ces contraintes, appelées contraintes résiduelles, peuvent être suffisamment élevées pour modifier les caractéristiques à la rupture des stratifiés. Il est alors nécessaire de les prendre en compte lors de la conception des structures en stratifiés. Dans la pratique, la matrice a un coefficient de dilatation thermique supérieur à celui de la fibre, produisant une compression radiale des fibres à l'interface fibre-matrice. Cette compression permet un transfert des charges de la matrice aux fibres par cisaillement, même en l'absence d'une bonne adhérence fibre-matrice.

## 25.3.2 Exemples

### 25.3.2.1 Calcul des contraintes d'origine thermique

Nous considérons le cas d'un stratifié croisé symétrique constitué (figure 25.1) de 3 couches unidirectionnelles de 1 mm d'épaisseur, de caractéristiques mécaniques :

$$E_L = 45 \text{ GPa}, \quad E_T = 10 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,31, \quad G_{LT} = 4,5 \text{ GPa}, \quad (25.22)$$

et de coefficients de dilatation thermique :

$$\alpha_L = 5 \times 10^{-6} /^\circ\text{C}, \quad \alpha_T = 20 \times 10^{-6} /^\circ\text{C}. \quad (25.23)$$

La polymérisation du stratifié a été effectuée à une température de 120 °C. Nous voulons déterminer les contraintes résiduelles à la température d'utilisation de 20 °C.

Rapportées aux axes des matériaux des couches, les constantes de rigidité des couches sont (11.52) :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= 45,982 \text{ GPa}, & Q_{12} &= 3,168 \text{ GPa}, & Q_{16} &= 0, \\ Q_{22} &= 10,218 \text{ GPa}, & Q_{26} &= 0, & Q_{66} &= 4,5 \text{ GPa}. \end{aligned}$$

Les matrices de rigidité des couches s'expriment alors suivant :

$$Q_{0^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}, \quad Q_{90^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}.$$

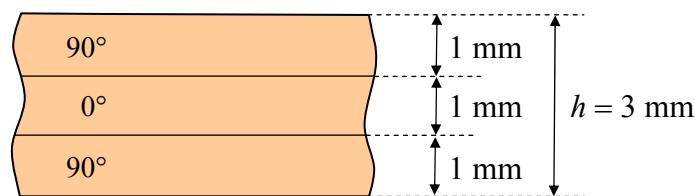


FIGURE 25.1. Stratifié croisé symétrique.

La relation (25.17) permet d'exprimer les déformations d'origine thermique dans la couche à  $0^\circ$  :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_L \\ \alpha_T \end{bmatrix} \Delta T.$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} \alpha_L \Delta T \\ \alpha_T \Delta T \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (25.24)$$

De même, pour les couches à  $90^\circ$  :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{bmatrix}_{90^\circ} = \begin{bmatrix} \alpha_T \Delta T \\ \alpha_L \Delta T \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (25.25)$$

Les résultantes d'origine thermique, déduites des relations (25.21), s'écrivent :

$$\begin{aligned} N_x^* &= [(Q_{11} + 2Q_{12})\alpha_L + (2Q_{22} + Q_{12})\alpha_T] \frac{h}{3} \Delta T, \\ N_y^* &= [(Q_{22} + 2Q_{12})\alpha_T + (2Q_{11} + Q_{12})\alpha_L] \frac{h}{3} \Delta T, \\ N_{xy}^* &= 0 \quad (\text{résultant de } Q_{16} = Q_{26} = 0 \text{ et } \gamma_{xy}^* = 0). \end{aligned} \quad (25.26)$$

Les moments sont nuls du fait de la symétrie du stratifié :

$$M_x^* = M_y^* = M_{xy}^* = 0.$$

L'application numérique conduit à :

$$N_x^* = 733,7 \Delta T, \quad N_y^* = 806,7 \Delta T.$$

Les déformations et courbures sont déterminées en reportant les résultantes et moments dans l'équation constitutive (25.20) qui s'écrit en l'absence d'actions mécaniques exercées sur le stratifié :

$$\begin{bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ N_{xy}^* \\ M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (25.27)$$

Soit :

$$\begin{aligned} N_x^* &= A_{11}\varepsilon_{xx}^0 + A_{12}\varepsilon_{yy}^0, \\ N_y^* &= A_{12}\varepsilon_{xx}^0 + A_{22}\varepsilon_{yy}^0, \\ \gamma_{xy}^0 &= 0, \\ \kappa_x = \kappa_y = \kappa_{xy} &= 0. \end{aligned} \tag{25.28}$$

Nous en déduisons les déformations du plan moyen :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= A'_{11}N_x^* + A'_{12}N_y^*, \\ \varepsilon_{yy}^0 &= A'_{12}N_x^* + A'_{22}N_y^*, \end{aligned} \tag{25.29}$$

avec

$$\begin{aligned} A'_{11} &= \frac{A_{22}}{\Delta}, & A'_{12} &= -\frac{A_{12}}{\Delta}, \\ A'_{22} &= \frac{A_{11}}{\Delta}, & \Delta &= A_{11}A_{22} - A_{12}^2. \end{aligned}$$

Les coefficients de rigidité du stratifié s'écrivent :

$$\begin{aligned} A_{11} &= (Q_{11} + 2Q_{22}) \frac{h}{3} = 66,418 \times 10^6 \text{ Nm}^{-1}, \\ A_{12} &= 3Q_{12} \frac{h}{3} = 9,504 \times 10^6 \text{ Nm}^{-1}, \\ A_{22} &= (Q_{22} + 2Q_{11}) \frac{h}{3} = 102,18 \times 10^6 \text{ Nm}^{-1}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} A'_{11} &= 15,259 \times 10^{-9} \text{ m/N}, \\ A'_{12} &= -1,4193 \times 10^{-9} \text{ m/N}, \\ A'_{22} &= 9,919 \times 10^{-9} \text{ m/N}. \end{aligned} \tag{25.30}$$

Ce qui conduit à :

$$\varepsilon_{xx}^0 = 10,05 \times 10^{-6} \Delta T, \quad \varepsilon_{yy}^0 = 6,96 \times 10^{-6} \Delta T. \tag{25.31}$$

Les contraintes dans les couches sont ensuite déterminées à partir de la relation (25.18). Pour la couche orientée à  $0^\circ$  :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 - \alpha_L \Delta T \\ \varepsilon_{yy}^0 - \alpha_T \Delta T \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{11}(\varepsilon_{xx}^0 - \alpha_L \Delta T) + Q_{12}(\varepsilon_{yy}^0 - \alpha_T \Delta T) \\ Q_{12}(\varepsilon_{xx}^0 - \alpha_L \Delta T) + Q_{22}(\varepsilon_{yy}^0 - \alpha_T \Delta T) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (25.32)$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 190,9 \times 10^3 \Delta T \\ -117,2 \times 10^3 \Delta T \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (25.33)$$

Pour les couches orientées à  $90^\circ$  :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{90^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{22}(\varepsilon_{xx}^0 - \alpha_T \Delta T) + Q_{12}(\varepsilon_{yy}^0 - \alpha_L \Delta T) \\ Q_{12}(\varepsilon_{xx}^0 - \alpha_T \Delta T) + Q_{11}(\varepsilon_{yy}^0 - \alpha_L \Delta T) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (25.34)$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{90^\circ} = \begin{bmatrix} -95,5 \times 10^3 \Delta T \\ 58,6 \times 10^3 \Delta T \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (25.35)$$

Pour la variation de température considérée :  $\Delta T = -100$  °C, les valeurs des contraintes sont :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} -19,1 \text{ MPa} \\ 11,7 \text{ MPa} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 9,6 \text{ MPa} \\ -5,9 \text{ MPa} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (25.36)$$

L'état des contraintes d'origine thermique est schématisé sur la figure 25.2. Il est à noter que la contrainte dans la couche à  $0^\circ$  atteint la valeur de 11,7 MPa dans la direction transverse aux fibres, soit de l'ordre du quart au tiers de la contrainte à la rupture dans cette direction. Il apparaît ainsi que les contraintes d'origine thermique, liées au mode de mise en œuvre : polymérisation à une température plus élevée que la température d'utilisation, doivent être prises en compte lors de certains dimensionnements.

### 25.3.2.2 Dilatation thermique d'un stratifié équilibré symétrique

Dans le cas d'une couche rapportée à des axes ( $x, y$ ) faisant un angle  $\theta$  avec la direction  $L$  (figure 25.3), les déformations d'origine thermique s'écrivent d'après

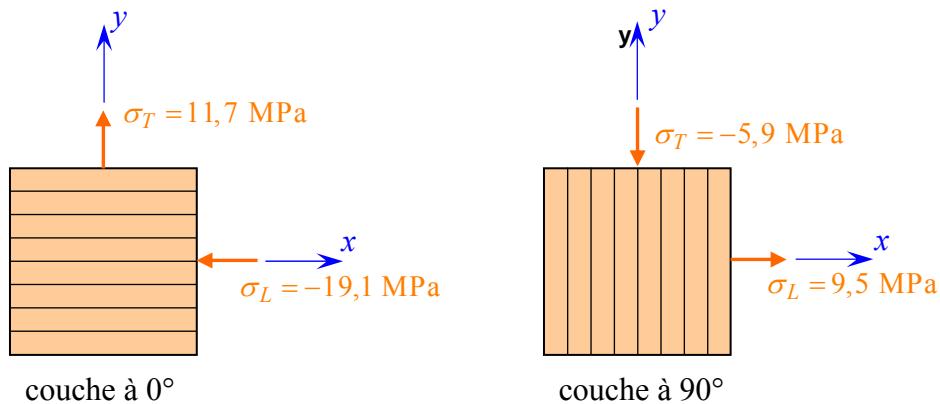


FIGURE 25.2. Contraintes d'origine thermique dans les couches du stratifié croisé symétrique de la figure 25.1.

la relation (25.17) :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta \\ \sin 2\theta & -\sin 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_L \\ \alpha_T \end{bmatrix} \Delta T. \quad (25.37)$$

Les déformations peuvent donc s'exprimer sous la forme :

$$\varepsilon_{xx}^* = \alpha_x^1 \Delta T, \quad \varepsilon_{yy}^* = \alpha_y^1 \Delta T, \quad \gamma_{xy}^* = \alpha_{xy}^1 \Delta T, \quad (25.38)$$

en introduisant les coefficients de dilatation rapportés aux axes de la couche :

$$\begin{aligned} \alpha_x^1 &= \alpha_L \cos^2 \theta + \alpha_T \sin^2 \theta, \\ \alpha_y^1 &= \alpha_L \sin^2 \theta + \alpha_T \cos^2 \theta, \\ \alpha_{xy}^1 &= (\alpha_L - \alpha_T) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (25.39)$$

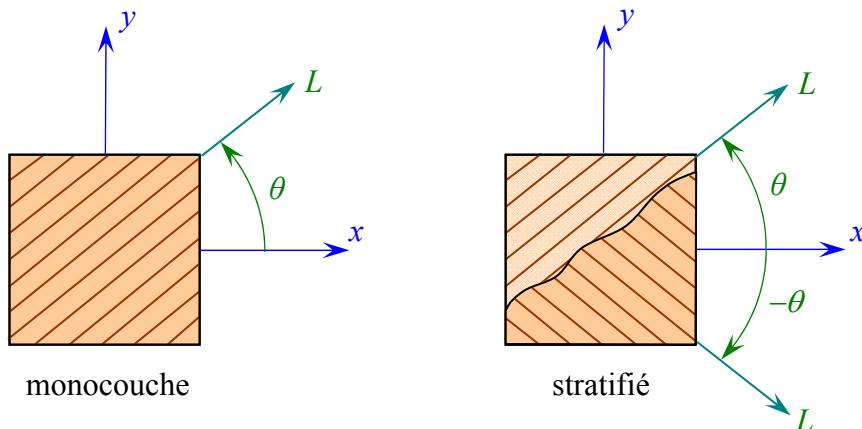


FIGURE 25.3. Monocouche et stratifié équilibré symétrique d'orientation  $\theta$ .

Dans le cas de la couche considérée dans le paragraphe précédent, le coefficient de dilatation thermique dans la direction  $x$  s'exprime suivant :

$$\alpha_x^1 = (5 \cos^2 \theta + 20 \sin^2 \theta) \times 10^{-6} /^\circ\text{C}. \quad (25.40)$$

La variation de  $\alpha_x^1$  en fonction de  $\theta$  est reportée sur la figure 25.4.

Dans le cas d'un stratifié équilibré symétrique constitué de  $n$  couches, les coefficients de rigidité des couches à  $\pm\theta$  sont :

$$\begin{aligned} Q'_{11-\theta} &= Q'_{11+\theta}, & Q'_{12-\theta} &= Q'_{12+\theta}, & Q'_{16-\theta} &= -Q'_{16+\theta}, \\ Q'_{22-\theta} &= Q'_{22+\theta}, & Q'_{26-\theta} &= -Q'_{26+\theta}, & Q'_{66-\theta} &= Q'_{66+\theta}, \end{aligned} \quad (25.41)$$

et les déformations d'origine thermique sont liées par :

$$\varepsilon_{xx-\theta}^* = \varepsilon_{xx+\theta}^*, \quad \varepsilon_{yy-\theta}^* = \varepsilon_{yy+\theta}^*, \quad \gamma_{xy-\theta}^* = -\gamma_{xy+\theta}^*. \quad (25.42)$$

Les résultantes et les moments d'origine thermique, déduits des relations (25.21), s'écrivent :

$$\begin{aligned} N_x^* &= h(Q'_{11}\alpha_x^1 + Q'_{12}\alpha_y^1 + Q'_{16}\alpha_{xy}^1)\Delta T, \\ N_y^* &= h(Q'_{12}\alpha_x^1 + Q'_{22}\alpha_y^1 + Q'_{26}\alpha_{xy}^1)\Delta T, \\ N_{xy}^* &= 0, \end{aligned} \quad (25.43)$$

où  $h$  est l'épaisseur du stratifié et en notant  $Q'_{ij}$  les rigidités  $Q'_{ij+\theta}$  de la couche

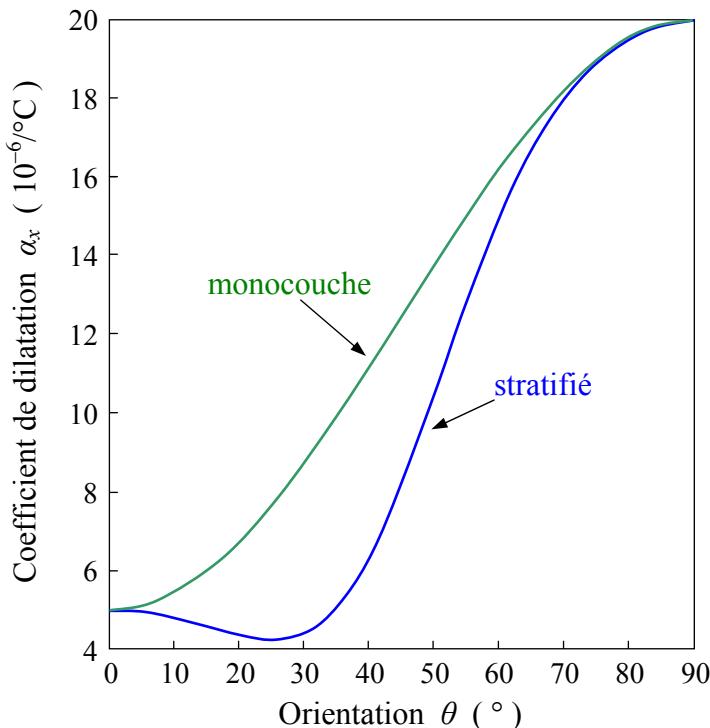


FIGURE 25.4. Variation du coefficient de dilatation d'une couche et d'un stratifié équilibré symétrique.

de direction  $\theta$ . La symétrie du stratifié implique que les moments sont nuls :

$$M_x^* = M_y^* = M_{xy}^* = 0.$$

Les déformations et courbures sont déduites de l'équation constitutive (25.20) :

$$\begin{aligned} N_x^* &= A_{11}\varepsilon_{xx}^0 + A_{12}\varepsilon_{yy}^0, \\ N_y^* &= A_{12}\varepsilon_{xx}^0 + A_{22}\varepsilon_{yy}^0, \\ \gamma_{xy}^0 &= 0, \quad \kappa_x = \kappa_y = \kappa_{xy} = 0. \end{aligned} \tag{25.44}$$

Nous en déduisons les déformations du plan moyen :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{1}{\Delta} \left( A_{22}N_x^* - A_{12}N_y^* \right), \\ \varepsilon_{yy}^0 &= \frac{1}{\Delta} \left( -A_{12}N_x^* + A_{11}N_y^* \right), \end{aligned} \tag{25.45}$$

avec

$$\Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}^2.$$

Les coefficients de rigidité du stratifié sont :

$$A_{11} = hQ'_{11}, \quad A_{12} = hQ'_{12}, \quad A_{22} = hQ'_{22}.$$

D'où l'expression de l'allongement unitaire dans la direction  $x$  :

$$\varepsilon_{xx}^0 = \left( \alpha_x^1 + \frac{Q'_{22}Q'_{16} - Q'_{12}Q'_{26}}{Q'_{11}Q'_{22} - Q'_{12}^2} \alpha_{xy}^1 \right) \Delta T. \tag{25.46}$$

Le coefficient de dilatation du stratifié dans la direction  $x$  s'exprime donc suivant :

$$\alpha_x^n = \alpha_x^1 + \frac{Q'_{22}Q'_{16} - Q'_{12}Q'_{26}}{Q'_{11}Q'_{22} - Q'_{12}^2} \alpha_{xy}^1. \tag{25.47}$$

La variation du coefficient de dilatation  $\alpha_x^n$  d'un stratifié équilibré symétrique en fonction de l'angle  $\theta$  du stratifié est comparée sur la figure 25.4 au coefficient de dilatation  $\alpha_x^1$  d'une couche.

### 25.3.3 Relations fondamentales

Les relations fondamentales du comportement mécanique des stratifiés, en présence de phénomènes de dilatation, sont obtenues en reportant l'équation constitutive (25.20) dans les relations fondamentales (13.57) du comportement des plaques sans cisaillement transverse, ou dans les équations (23.13) à (23.15), pour rendre compte du flambement. Les déformations étant exprimées par les

relations (14.15), nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\
 & - \frac{\partial N_x^*}{\partial x} - \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial y} \\
 & = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \tag{25.48}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\
 & - \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial x} - \frac{\partial N_y^*}{\partial y} \\
 & = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \tag{25.49}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\
 & - B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} \\
 & - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
 & + \frac{\partial^2 M_x^*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^*}{\partial y^2} + \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\
 & = q + N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}. \tag{25.50}
 \end{aligned}$$

Ces relations diffèrent des relations fondamentales (16.1), (16.2) et (23.21) par la présence des résultantes et des moments dus aux phénomènes de dilatation. Dans le cas où les dilatations ( $\varepsilon_{11}^*$ ,  $\varepsilon_{22}^*$ ) sont indépendantes de  $x$  et  $y$  (comme le type de problèmes considérés dans le paragraphe 25.4), les résultantes et moments, dus aux phénomènes de dilatation, sont également indépendants des variables  $x$  et  $y$ .

et n'interviennent pas alors explicitement dans les relations fondamentales (25.48) à (25.50). Toutefois, les conditions imposées aux frontières induisent des charges en membrane représentées par les résultantes  $N_x^i$ ,  $N_y^i$ ,  $N_{xy}^i$ , de préflambement. Ces charges affectent généralement le comportement de la structure : comportement en flexion, vibrations et flambement.

### 25.3.4 Énergie de déformation

Dans le cas d'une formulation variationnelle des relations fondamentales des stratifiés, les expressions obtenues au paragraphe 16.3 montrent que les phénomènes de dilatation n'interviennent que dans l'expression de l'énergie de déformation. En présence de phénomènes de dilatation, l'expression (16.33) est modifiée suivant :

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint \left[ \sigma_{xx} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^*) + \sigma_{yy} (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^*) + \sigma_{zz} (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^*) + \sigma_{yz} (\gamma_{yz} - \gamma_{yz}^*) + \sigma_{xz} (\gamma_{xz} - \gamma_{xz}^*) + \sigma_{xy} (\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^*) \right] dx dy dz. \quad (25.51)$$

En tenant compte des hypothèses de la théorie classique des stratifiés :  $\sigma_{zz} = 0$ ,  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz}^* = \gamma_{yz}^* = 0$ , et de l'expression (25.18) des contraintes dans chaque couche, l'expression (25.51) s'écrit sous la forme :

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint \left[ Q_{11}^k (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^{*k})^2 + Q_{22}^k (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^{*k})^2 + Q_{66}^k (\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^{*k})^2 + 2Q_{12}^k (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^{*k})(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^{*k}) + 2Q_{16}^k (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^{*k})(\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^{*k}) + 2Q_{26}^k (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^{*k})(\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^{*k}) \right] dx dy dz, \quad (25.52)$$

où les coefficients de rigidité  $(Q'_{ij})_k$  hors axes de la couche  $k$  sont notés  $Q_{ij}^k$ .

L'expression (25.52) de l'énergie de déformation remplace, en présence de phénomènes de dilatation, l'expression (16.34). En introduisant dans l'expression (25.52) les relations déformations-déplacements (14.14) et (14.15), puis en intégrant en  $z$  suivant l'épaisseur du stratifié, nous obtenons :

$$\begin{aligned} U_d = U_d(\varepsilon^* = 0) & - \iint \left[ N_x^* \frac{\partial u_0}{\partial x} + N_y^* \frac{\partial v_0}{\partial y} + N_{xy}^* \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] dx dy \\ & + \iint \left( M_x^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + M_y^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2M_{xy}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) dx dy \\ & + \iint \left[ \int_{-h/2}^{h/2} f(\varepsilon_i^{*k}) \right] dx dy, \end{aligned} \quad (25.53)$$

où  $U_d(\varepsilon^* = 0)$  est l'énergie de déformation, en l'absence de phénomènes de

dilatation, exprimée par (16.35), et :

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_i^{*k}) = & Q_{11}^k (\varepsilon_{xx}^{*k})^2 + Q_{22}^k (\varepsilon_{yy}^{*k})^2 + Q_{66}^k (\gamma_{xy}^{*k})^2 \\ & + 2Q_{12}^k \varepsilon_{xx}^{*k} \varepsilon_{yy}^{*k} + 2Q_{16}^k \varepsilon_{xx}^{*k} \gamma_{xy}^{*k} + 2Q_{26}^k \varepsilon_{yy}^{*k} \gamma_{xy}^{*k}. \end{aligned} \quad (25.54)$$

La fonction  $f(\varepsilon_i^{*k})$  étant indépendante des déplacements  $u_0, v_0$  et  $w_0$ , l'intégrale faisant intervenir cette fonction s'annulera dans l'expression de la première variation  $\delta U_d$  de l'énergie de déformation.

## 25.4 COMPORTEMENT DE PLAQUES RECTANGULAIRES

### 25.4.1 Plaque rectangulaire constituée d'un stratifié symétrique

Nous examinons dans ce paragraphe l'influence des phénomènes de dilatation sur le comportement en flexion, le flambement et les vibrations d'une plaque rectangulaire constituée d'un stratifié symétrique. Ce type de stratifié est caractérisé par :

$$B_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 6. \quad (25.55)$$

La présence des coefficients  $D_{16}$  et  $D_{26}$  de couplage flexion-torsion ne permettant pas dans ce cas de résoudre directement les relations fondamentales (25.48) à (25.50), des solutions approchées peuvent être obtenues par la méthode de Ritz.

Nous considérons le cas de résultantes initiales en membrane induites par des phénomènes de dilatation, du fait des conditions imposées aux frontières. Si les dilatations sont indépendantes des coordonnées  $(x, y)$  et fonction paire de la variable  $z$ , les relations (25.21) montrent que les résultantes dues aux dilatations sont constantes et les moments sont nuls :  $M_x^* = M_y^* = M_{xy}^* = 0$ . Pour des stratifiés symétriques (paragraphe 22.1), les déplacements  $u_0$  et  $v_0$  sont nuls. Il en résulte que l'énergie de déformation (25.53) est identique à l'énergie de déformation exprimée en (22.2) :

$$\begin{aligned} U_d = & \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned} \quad (25.56)$$

La fonction énergie :

$$U = U_d - W_m + W_f - E_c \quad (25.57)$$

s'écrit alors :

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ & + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_x \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 \\ & \left. + N_y \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 2N_{xy} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - (2q + \rho_s \omega^2) w_0 \right] dx dy, \end{aligned} \quad (25.58)$$

où  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$  sont les résultantes en membrane (comme définies en (23.23)) induites par les phénomènes de dilatation, en liaison avec les conditions imposées aux frontières. La solution approchée est recherchée sous la forme usuelle d'une série double :

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y), \quad (25.59)$$

où les fonctions  $X_m(x)$  et  $Y_n(y)$  doivent satisfaire les conditions imposées sur les côtés  $x = 0$ ,  $x = a$  et  $y = 0$ ,  $y = b$ . Les coefficients  $A_{mn}$  sont déterminés par les conditions (8.66) de stationnarité :

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial A_{mn}} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (25.60)$$

où  $\tilde{U}$  est l'énergie obtenue en reportant l'expression approchée (25.59) de la flèche dans l'expression (25.58). Les conditions (25.60) conduisent alors aux  $M \times N$  équations :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ & D_{11} C_{minj}^{2200} + \left[ D_{12} (C_{minj}^{2002} + C_{minj}^{0220}) + 4D_{66} C_{minj}^{1111} \right] R^2 + D_{22} C_{minj}^{0022} R^4 \right. \\ & + 2D_{16} (C_{minj}^{1210} + C_{minj}^{2101}) R + 2D_{26} (C_{minj}^{1012} + C_{minj}^{0121}) R^3 \\ & + a^2 \left[ N_x C_{minj}^{1100} + N_y C_{minj}^{0011} R^2 + N_{xy} (C_{minj}^{1001} + C_{minj}^{0110}) R \right] \\ & \left. - \rho_s a^4 \omega^2 C_{minj}^{0000} \right\} A_{ij} = a^4 q_0 I_m^0 J_n^0, \end{aligned} \quad \text{pour } m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (25.61)$$

où les coefficients  $C_{minj}^{pqrs}$  ont été introduits en (21.116).

Le système d'équations ainsi obtenu regroupe et généralise les équations de flexion des plaques (relations (21.119), (22.5)), les équations de flambelement (relation (23.142)) et les équations de vibration en flexion (relations (24.109) et (24.146)). Le système d'équations s'applique aussi bien au cas où la plaque est

soumise à des dilatations indépendantes de  $(x, y)$ , qu'au cas où il n'y a pas de phénomènes de dilatation. Dans ce dernier cas, les résultantes  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$  sont les résultantes en membrane initiales imposées sur les frontières (autrement que par les phénomènes de dilatation), les moments imposés étant nuls. Lorsque l'on tient compte des phénomènes de dilatation de la plaque, les résultantes  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$  sont les résultantes en membrane induites par les dilatations et les restrictions imposées du fait des conditions imposées sur les côtés de la plaque.

En fonction des diverses analyses effectuées dans les chapitres précédents, les fonctions poutres utilisées pour l'étude des vibrations des poutres (paragraphe 24.3) peuvent être choisies comme fonctions  $X_m(x)$  et  $Y_n(y)$  pour exprimer les solutions approchées (25.59). Dans le cas de l'étude de la plaque soumise à un chargement statique latéral ( $N_x = N_y = N_{xy} = 0$ ,  $\omega = 0$ ), la résolution du système (25.60) conduit à la détermination des coefficients  $A_{ij}$ . En l'absence de charges latérales ( $q = 0$ ), les équations (25.61) constituent un système d'équations homogènes. Une solution non nulle ( $A_{ij} \neq 0$ ) indéterminée est alors obtenue lorsque le déterminant de la matrice des coefficients  $A_{ij}$  s'annule. Cette condition permet de déterminer les fréquences propres de vibration de la plaque soumise ou non à des charges en membrane initiales, imposées ou non par des phénomènes de dilatation. Cette condition permet également de déterminer la charge critique de flambement (résultant ou non de phénomènes de dilatation) qui correspond, dans le cas où  $\omega = 0$ , à la combinaison de plus faible valeur des résultantes  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$  qui annule le déterminant.

## 25.4.2 Plaque rectangulaire constituée d'un stratifié antisymétrique équilibré

Un stratifié antisymétrique équilibré  $[\pm\theta]_p$ , comportant un nombre pair de couches, est caractérisé (relation (22.54)) par :

$$A_{16} = A_{26} = 0, \quad B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = 0, \quad D_{16} = D_{26} = 0. \quad (25.62)$$

Dans le cas où les dilatations sont indépendantes des coordonnées  $(x, y)$  et fonctions paires de  $z$  dans chaque couche, les relations (25.21) et (25.17) montrent que  $N_x^*$ ,  $N_y^*$  et  $M_{xy}^*$  sont constants, alors que  $N_{xy}^* = M_x^* = M_y^* = 0$ . Dans le cas d'une flexion en présence de charges initiales en membrane, les relations fondamentales (25.48) à (25.50) se réduisent alors à :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0, \quad (25.63)$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad (25.64)$$

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \\
& - B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \\
& = q + N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}. \tag{25.65}
\end{aligned}$$

D'après l'équation constitutive (25.20), en relation avec les expressions (14.15) exprimant les déformations en fonction des déplacements, les résultantes en membrane s'expriment suivant :

$$N_x = -N_x^* + A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - 2B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, \tag{25.66}$$

$$N_y = -N_y^* + A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - 2B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, \tag{25.67}$$

$$N_{xy} = A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}. \tag{25.68}$$

Les résultantes  $N_x^*$  et  $N_y^*$ , dues aux phénomènes de dilatation, sont induites par les dilatations et les restrictions imposées aux frontières, alors que les autres termes résultent des déformations induites par la charge de flexion  $q$ . Dans le cas où l'on s'intéresse à l'effet des charges en membrane résultant des phénomènes de dilatation, les charges initiales en membrane, intervenant dans l'équation (25.65), s'expriment suivant :

$$N_x^i = -N_x^*, \quad N_y^i = -N_y^*, \quad N_{xy}^i = 0. \tag{25.69}$$

Nous examinons le cas où chaque côté de la plaque est soumis à une liaison pivot, libre suivant la direction du côté. Les conditions aux frontières sont alors exprimées suivant les relations (22.56) à (22.62). La charge transversale  $q = q(x, y)$  est développée suivant une série double de Fourier :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \tag{25.70}$$

avec

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b q(x, y) \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} dx dy. \tag{25.71}$$

Les solutions du problème sont alors recherchées en écrivant les déplacements sous forme de séries doubles de Fourier, satisfaisant aux conditions aux frontières (22.59) à (22.62) :

$$u_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b}, \quad (25.72)$$

$$v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \quad (25.73)$$

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (25.74)$$

En reportant les expressions (25.72) à (25.74) dans les équations (25.63) à (25.65), puis en résolvant le système d'équations obtenues, nous trouvons :

$$\begin{aligned} A_{mn} &= q_{mn} \frac{a^3}{\pi^3 \Delta_{mn}} nR \left[ (m^2 A_{66} + n^2 R^2 A_{22}) (3m^2 B_{16} + n^2 R^2 B_{26}) \right. \\ &\quad \left. - m^2 (A_{12} + A_{66}) (m^2 B_{16} + 3n^2 R^2 B_{26}) \right], \\ B_{mn} &= q_{mn} \frac{a^3}{\pi^3 \Delta_{mn}} m \left[ (m^2 A_{11} + n^2 R^2 A_{66}) (m^2 B_{16} + 3n^2 R^2 B_{26}) \right. \\ &\quad \left. - n^2 R^2 (3m^2 B_{16} + n^2 R^2 B_{26}) (A_{12} + A_{66}) \right], \\ C_{mn} &= q_{mn} \frac{a^4}{\pi^4 \Delta_{mn}} \left[ (m^2 A_{11} + n^2 R^2 A_{66}) (m^2 A_{66} + n^2 R^2 A_{22}) \right. \\ &\quad \left. - m^2 n^2 R^2 (A_{12} + A_{66})^2 \right], \end{aligned} \quad (25.75)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta_{mn} &= \left[ m^4 D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + n^4 R^4 D_{22} - \frac{a^2}{\pi^2} (m^2 N_x^* + n^2 R^2 N_y^*) \right] \\ &\quad \times \left[ (m^2 A_{11} + n^2 R^2 A_{66}) (m^2 A_{66} + n^2 R^2 A_{22}) - m^2 n^2 R^2 (A_{12} + A_{66})^2 \right] \\ &\quad + 2m^2 n^2 R^2 (A_{12} + A_{66}) (3m^2 B_{16} + n^2 R^2 B_{26}) (m^2 B_{16} + 3n^2 R^2 B_{26}) \\ &\quad - m^2 (m^2 B_{16} + 3n^2 R^2 B_{26})^2 (m^2 A_{11} + n^2 R^2 A_{66}) \\ &\quad - n^2 R^2 (3m^2 B_{16} + n^2 R^2 B_{26})^2 (m^2 A_{66} + n^2 R^2 A_{22}). \end{aligned} \quad (25.76)$$

Les expressions (25.75) ont une forme identique aux expressions (22.67) obtenues dans le cas de la flexion sous la seule charge  $q$ . Elles n'en diffèrent que par l'introduction dans l'expression de  $\Delta_{mn}$  des résultantes  $N_x^*$  et  $N_y^*$  dues aux phénomènes de dilatation. En outre, la charge critique de flambement correspond à la combinaison de plus faible valeur des résultantes  $N_x^*$  et  $N_y^*$ , annulant  $\Delta_{mn}$ , les coefficients  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  et  $C_{mn}$  étant alors indéfinis.

### 25.4.3 Effets thermiques

Dans les paragraphes précédents 25.4.1 et 25.4.2, nous avons pris en compte les effets des phénomènes de dilatation sans en définir la nature (thermique, gonflement, etc.). En illustration des résultats obtenus, nous examinons dans ce paragraphe les effets induits par les phénomènes de dilatation thermique, dans le cas d'une plaque rectangulaire constituée d'un stratifié équilibré symétrique du type  $[(\pm\theta_p)]_s$ . Ce stratifié est caractérisé (relations (15.25)) par :

$$A_{16} = A_{26} = 0, \quad B_{ij} = 0, \quad D_{16} = D_{26} = 0. \quad (25.77)$$

Dans le cas où la plaque est encastrée sur les côtés  $x = 0$  et  $x = a$ , et libre sur les côtés  $y = 0$  et  $y = b$ , les conditions aux frontières sont :

— pour les côtés  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$w_0 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0, \quad (25.78)$$

— pour les côtés  $y = 0$  et  $y = b$  :

$$M_y = 0, \quad 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_x}{\partial y} = 0. \quad (25.79)$$

Les conditions (25.79) sur les côtés libres sont déduites des conditions (16.32) et des relations (13.56) des plaques. Ces conditions conduisent, pour  $y = 0$  et  $y = b$  à :

$$-D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0, \quad (25.80)$$

$$2D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0. \quad (25.81)$$

Conformément aux résultats établis dans le paragraphe 25.4.1, la flexion de la plaque est étudiée par la méthode de Ritz, en introduisant les fonctions poutres correspondant aux conditions aux frontières imposées :

— côtés  $x = 0$  et  $x = a$ , encastrés :

$$X_m(x) = \cos \lambda_m \frac{x}{a} - \cosh \lambda_m \frac{x}{a} - \gamma_m \left( \sin \lambda_m \frac{x}{a} - \sinh \lambda_m \frac{x}{a} \right), \quad (25.82)$$

— côtés  $y = 0$  et  $y = b$ , libres :

$$\begin{aligned} Y_1(y) &= 1, \\ Y_2(y) &= \sqrt{3} \left( 1 - 2 \frac{y}{b} \right), \\ Y_n(x) &= \cos \lambda_n \frac{y}{b} + \cosh \lambda_n \frac{y}{b} + \gamma_n \left( \sin \lambda_n \frac{y}{b} + \sinh \lambda_n \frac{y}{b} \right), \quad n \geq 3. \end{aligned} \quad (25.83)$$

Les valeurs des coefficients  $\lambda_i$  et  $\gamma_i$  sont reportées dans le tableau 21.3 pour la fonction poutre encastrée-encastrée et dans le tableau 24.3 dans le cas de la fonction poutre libre-libre. Les valeurs des intégrales intervenant dans l'expression (25.60) sont reportées dans les tableaux de l'annexe B pour la fonction poutre encastrée-encastrée. Les valeurs des intégrales sont à évaluer dans le cas de la fonction poutre libre-libre. Ces valeurs permettent (paragraphe 25.4.1) soit de décrire la flexion de la plaque en déterminant les coefficients  $A_{ij}$  par résolution du système (25.61), soit de déterminer la charge critique de flambement en annulant le déterminant du système (25.61).

Dans le cas de la détermination de la charge critique de flambement, les charges en membrane  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$  intervenant dans l'équation (25.61) peuvent être exprimées à partir de l'équation constitutive (25.20), soit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ N_{xy}^* \end{bmatrix}. \quad (25.84)$$

D'autre part, les conditions aux frontières imposent :

— pour les côtés  $x = 0$  et  $x = a$ , encastrés :

$$\varepsilon_{xx}^0 = 0, \quad (25.85)$$

— pour les côtés  $y = 0$  et  $y = b$ , libres :

$$N_y = N_{xy} = 0. \quad (25.86)$$

La combinaison de ces résultats conduit à :

$$N_x = -N_x^* + \frac{A_{12}}{A_{22}} N_y^*, \quad (25.87)$$

ou d'après les expressions (15.25) :

$$N_x = -N_x^* + \frac{Q'_{12}}{Q'_{22}} N_y^*. \quad (25.88)$$

Les résultantes dues aux effets thermiques s'écrivent (relation (25.21)) :

$$N_x^* = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{11}\varepsilon_{xx}^* + Q'_{12}\varepsilon_{yy}^* + Q'_{16}\gamma_{xy}^*)_k dz, \quad (25.89)$$

$$N_y^* = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{12}\varepsilon_{xx}^* + Q'_{22}\varepsilon_{yy}^* + Q'_{26}\gamma_{xy}^*)_k dz, \quad (25.90)$$

où, compte tenu des relations (25.1) et (25.17), les déformations thermiques rapportées aux axes de référence de la plaque s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_L \\ \alpha_T \end{bmatrix} \Delta T, \quad (25.91)$$

en introduisant les coefficients de dilatation thermique d'une couche, rapportés aux directions principales ( $L, T$ ) de la couche. Soit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^* &= (\alpha_L \cos^2 \theta + \alpha_T \sin^2 \theta) \Delta T, \\ \varepsilon_{yy}^* &= (\alpha_L \sin^2 \theta + \alpha_T \cos^2 \theta) \Delta T, \\ \gamma_{xy}^* &= (\alpha_L - \alpha_T) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (25.92)$$

En reportant ces expressions dans les relations (25.88) à (25.90), puis en tenant compte des symétries du stratifié, nous obtenons :

$$N_x = \left[ \left( -Q'_{11} + \frac{Q'^2_{12}}{Q'_{11}} \right) (\alpha_L \cos^2 \theta + \alpha_T \sin^2 \theta) + \left( -Q'_{16} + Q'_{26} \frac{Q'_{12}}{Q'_{11}} \right) (\alpha_L - \alpha_T) \sin 2\theta \right] h \Delta T, \quad (25.93)$$

où  $h$  est l'épaisseur du stratifié.

La substitution de l'expression  $N_x$  dans le système d'équations (25.61) permet ensuite soit d'étudier l'influence de la température sur les fréquences de vibration de la plaque, soit de déterminer la variation de température critique qui conduit au flambement de la plaque.

Une approche similaire peut également être menée pour analyser les effets des phénomènes hygrométriques.

## EXERCICES

**24.1** Un matériau stratifié symétrique est constitué de trois couches. Les couches 1 et 3 sont des couches à renfort unidirectionnel d'épaisseurs égales à 1,2mm, de caractéristiques mécaniques :

$$E_L = 46 \text{ GPa}, \quad E_T = 10 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,30, \quad G_{LT} = 4,8 \text{ GPa},$$

et de coefficients de dilatation thermique :

$$\alpha_L = 5 \times 10^{-6} /^\circ\text{C}, \quad \alpha_T = 22 \times 10^{-6} /^\circ\text{C}.$$

La couche 2 est une couche double à renfort mat d'épaisseur 2,8mm, de caractéristiques mécaniques :

$$E_L = E_T = 8 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,32, \quad G_{LT} = 3,2 \text{ GPa},$$

et de coefficients de dilatation thermique :

$$\alpha_L = \alpha_T = 18 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

La polymérisation du stratifié a été effectuée à une température de  $125^\circ\text{C}$ . On étudie son état mécanique à la température d'utilisation de  $22^\circ\text{C}$  et dans ses axes principaux ( $x, y$ ) confondus avec les axes ( $L, T$ ) des couches 1 et 3.

Exprimer les déformations dans les couches et les résultantes en membrane d'origine thermique.

En déduire les déformations en membrane du stratifié.

Déterminer les contraintes en membrane dans chaque couche.

**25.2** Un matériau stratifié non symétrique est constitué de deux couches. La couche 1 a les mêmes caractéristiques que les couches 1 et 3 du problème 25.1. La couche 2 a les mêmes caractéristiques mécaniques et thermiques que la couche 2 du problème 25.1, mais une épaisseur moitié (épaisseur égale à 1,4 mm). La polymérisation est effectuée à la même température de  $125^\circ\text{C}$  et on considère son état mécanique à  $22^\circ\text{C}$ .

Exprimer les déformations dans les couches, les résultantes en membrane et les moments.

En déduire les déformations en membrane et les courbures du stratifié. Exprimer la flèche observée sur une plaque de longueur  $a$  et largeur  $b$ , après démoulage.

Déterminer les contraintes en membrane dans chaque couche.

**25.3** Une plaque constituée du matériau considéré au problème 25.1 est encastrée (à la température de  $22^\circ\text{C}$ ) sur quatre côtés, parallèles aux axes principaux du matériau. La plaque est ensuite portée à une température de  $50^\circ\text{C}$ .

Exprimer les déformations dans les couches et les résultantes en membrane, à la température de  $50^\circ\text{C}$ .

En déduire les déformations en membrane. Déterminer les contraintes en membrane dans chaque couche.

**25.4** Une poutre, de longueur  $L$ , constituée du matériau stratifié considéré au problème 25.1 est encastrée à ses deux extrémités. On étudie le flambement et les vibrations en flexion de la poutre, à la température de  $22^\circ\text{C}$ .

Déterminer la charge critique de flambement de la poutre.

Explicitier les fréquences propres des vibrations en flexion de la poutre.

Dans les deux cas, comparer les résultats obtenus au cas où il n'y aurait pas de dilatation thermique induite.

## CHAPITRE 26

# Prédimensionnement des Structures Composites et Sandwiches

## 26.1 PROBLÈME DU DIMENSIONNEMENT

Les parties 1 et 3 de cet ouvrage mettent en évidence comment l'ingénieur peut "façonner" les matériaux composites, de manière à obtenir les propriétés souhaitées en faisant un choix approprié des constituants (fibres et matrices), de la proportion du renfort, de la forme du renfort (renfort unidirectionnel, tissu, mat, etc.), de la nature de l'interface fibre-matrice (bonne ou faible adhérence), de la séquence d'empilement, du type de composite (stratifié ou sandwich), etc. Ainsi la possibilité de façonner à la carte les matériaux composites modifie considérablement l'approche conventionnelle du dimensionnement d'une structure en matériau composite. Les concepts de "matériau" et "structure", qui sont distincts et indépendants dans les processus traditionnels de dimensionnement, deviennent étroitement liés dans le dimensionnement des structures en matériaux composites [34, 35].

Le dimensionnement d'une structure qui doit être réalisée en matériau composite nécessite de choisir le matériau le mieux adapté, tant au niveau de chaque couche qu'à celui du matériau stratifié ou sandwich, en étroite relation avec le processus de dimensionnement de la structure. Ainsi dans le processus de dimensionnement et d'optimisation des structures en matériaux composites, l'élaboration du choix du matériau joue un rôle fondamental et consiste : (1) à définir le choix de chaque couche en optimisant ses propriétés en fonction des constituants (natures des fibres et de la matrice), de la proportion de fibres, de l'interface fibre-matrice, de l'arrangement des fibres, etc., (2) à dimensionner le stratifié ou le matériau sandwich en optimisant ses propriétés en fonction des propriétés des couches et de l'arrangement de la séquence d'empilement. Du fait de ces caractéristiques particulières, propres aux matériaux composites, il n'est pas possible de fixer un point d'entrée bien défini dans le processus de dimensionnement. Les performances de la structure dépendent des propriétés du matériau composite utilisé, propriétés qui peuvent également être dimensionnées à la carte. Ainsi, un "processus circulaire" de dimensionnement est induit allant des constituants aux matériaux, des matériaux à la structure, et ainsi de suite. Le dimensionnement n'est donc pas limité seulement à des considérations de

structure, mais inclut l'optimisation des matériaux ainsi que les technologies de fabrication. Le fait de pouvoir façonner à la carte les matériaux composites enrichit donc à l'infini les possibilités d'optimisation des structures en matériaux composites, toutefois au prix d'une grande complexité des processus d'optimisation qui ne peuvent être menés efficacement qu'avec l'aide d'outils informatiques avancés.

Le problème du dimensionnement des structures en matériaux composites peut être abordé par des approches analytiques ou des méthodes numériques. L'avantage des approches analytiques réside dans leur possibilité d'application générale, permettant de rendre compte de l'influence des divers paramètres. Les applications des méthodes analytiques (développées dans la partie 4 de cet ouvrage) sont toutefois limitées à l'analyse d'éléments simples de structures en matériaux composites (partie 5), tels que les poutres et les plaques. Elles constituent l'introduction nécessaire et indispensable à l'analyse du problème du dimensionnement de structures complexes par des méthodes numériques, ces méthodes étant basées sur les modèles analytiques considérés dans la partie 4.

En fait, nous avons noté que la possibilité de façonner à la carte les matériaux composites introduit une très grande complexité du processus de dimensionnement des matériaux et de la structure, ce qui nécessite une connaissance de haut niveau de la part des analystes et des concepteurs. Un dimensionnement efficace nécessite donc des outils avancés de l'analyse et nécessite d'avoir recours aux outils informatiques dès les premières étapes de la conception. Schématiquement, les propriétés mécaniques des couches peuvent être obtenues à partir d'essais mécaniques ou évalués par des procédures analytiques en fonction des propriétés des constituants (partie 3). Le comportement mécanique d'un matériau stratifié ou d'un matériau sandwich est décrit par différents modèles analytiques (partie 4) sur lesquels sont construites les méthodes numériques de dimensionnement. Enfin, l'optimisation du dimensionnement de structures complexes en matériaux composites combinera une conception assistée par ordinateur avec une analyse des performances mécaniques à l'aide de la méthode des éléments finis.

## 26.2 ÉLÉMENTS DE BASE DES STRUCTURES EN COMPOSITES

### 26.2.1 Poutres simples

#### 26.2.1.1 Plan de stratification orthogonal au chargement

Dans le cas où le chargement est orthogonal au plan de stratification (figure 26.1), l'équation différentielle d'une poutre constituée d'un stratifié symétrique est (20.10) :

$$\frac{d^2w_0}{dx^2} = -\frac{M}{E_x I}, \quad (26.1)$$

en introduisant le moment quadratique de la section droite de la poutre :

$$I = I_{xy} = \frac{bh^3}{12}, \quad (26.2)$$

et le module de flexion de la poutre :

$$E_x = \frac{12}{h^3 D_{11}^*}, \quad (26.3)$$

avec

$$D_{11}^* = \frac{1}{\Delta} (D_{22} D_{66} - D_{26}^2),$$

$$\Delta = D_{11} D_{22} D_{66} + 2D_{12} D_{16} D_{26} - D_{11} D_{26}^2 - D_{22} D_{16}^2 - D_{66} D_{12}^2.$$

Les coefficients de rigidité sont exprimés suivant les relations (14.27) ou (14.33) :

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right). \quad (26.4)$$

La théorie des poutres fait l'hypothèse (20.7) que la flèche  $w_0$  n'est fonction que de  $x$ . Cette hypothèse est vérifiée dans le cas où le rapport longueur sur largeur ( $L/b$ ) de la poutre est suffisamment élevé. L'équation (26.1) est analogue à l'équation de la théorie classique des poutres isotropes, et s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{M}{J_x}, \quad (26.5)$$

où  $J_x$  est la rigidité en flexion de la poutre dans la direction  $x$ , exprimée suivant :

$$J_x = E_x I = \frac{b}{D_{11}^*}. \quad (26.6)$$

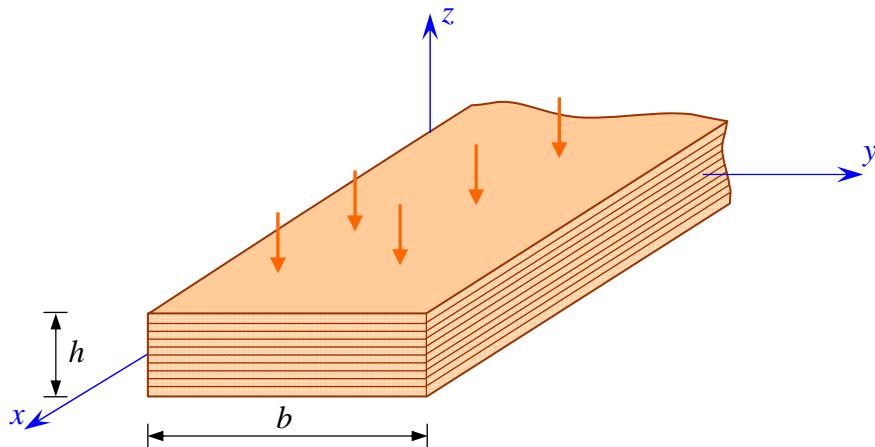


FIGURE 26.1. Poutre avec chargement orthogonal au plan de stratification.

Dans le cas de stratifiés orthotropes ( $D_{16} = D_{26} = 0$ ), le module de flexion et la rigidité en flexion s'expriment suivant :

$$E_x = \frac{12}{h^3} \left( D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}} \right), \quad (26.7)$$

et

$$J_x = b \left( D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}} \right). \quad (26.8)$$

Dans le cas où le terme  $D_{12}^2/D_{22}$  est négligeable devant  $D_{11}$ , le module et la rigidité se réduisent à :

$$E_x = 12 \frac{D_{11}}{h^3}, \quad (26.9)$$

et

$$J_x = bD_{11} = \frac{b}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{11})_k. \quad (26.10)$$

### 26.2.1.2 Plan de stratification dans le plan du chargement

Dans le cas d'un chargement dans le plan de stratification (figure 26.2), l'état de contraintes planes dans la couche  $k$  s'écrit (11.43) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}. \quad (26.11)$$

En explicitant le champ des déformations sous la forme introduite en (14.14) :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{zz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_z \\ \kappa_{xz} \end{bmatrix}, \quad (26.12)$$

et en introduisant les moments de flexion et de torsion par unité de largeur de poutre définis, par analogie avec (13.19), suivant :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_z \\ M_{xz} \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n \int_{y=h_{k-1}}^{h_k} \int_{z=-b/2}^{b/2} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k dy dz, \quad (26.13)$$

l'équation constitutive de flexion suivant l'axe  $x$ , correspondant à des déformations en membrane nulles ( $\varepsilon_{xx}^0 = \varepsilon_{zz}^0 = \gamma_{xz}^0 = 0$ ), s'écrit, dans le cas d'un stratifié symétrique, en combinant les équations (26.11) à (26.13), sous la forme :

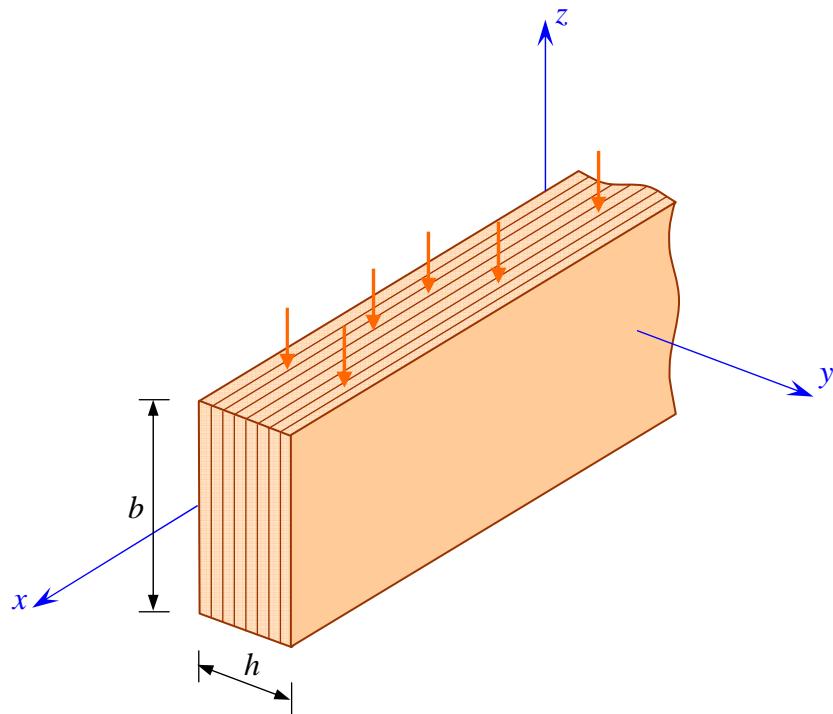


FIGURE 26.2. Poutre avec chargement dans le plan de stratification.

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_z = 0 \\ M_{xz} = 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \frac{b^3}{12} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_z \\ \kappa_{xz} \end{bmatrix}, \quad (26.14)$$

où les coefficients  $A_{ij}$  sont les coefficients de rigidité en membrane introduits en (14.23) :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k. \quad (26.15)$$

L'équation (26.14) remplace donc, dans le cas d'une flexion dans le plan de stratification, l'équation (20.1) établie pour une flexion orthogonale au plan de stratification. Par analogie avec les résultats établis au paragraphe 20.2.1, l'équation différentielle de flexion s'écrit sous la forme (20.10) ou (26.1) :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{M}{E_x I}, \quad (26.16)$$

où le moment quadratique de la section droite de la poutre est exprimé suivant :

$$I = I_{xz} = \frac{hb^3}{12}, \quad (26.17)$$

et le module de flexion est donné par :

$$E_x = \frac{1}{hA_{11}^*}, \quad (26.18)$$

avec

$$\begin{aligned} A_{11}^* &= \frac{1}{\Delta} (A_{22}A_{66} - A_{26}^2), \\ \Delta &= A_{11}A_{22}A_{66} + 2A_{12}A_{16}A_{26} - A_{11}A_{26}^2 - A_{22}A_{16}^2 - A_{66}A_{12}^2. \end{aligned}$$

L'équation (26.16) s'écrit également sous la forme (26.5) :

$$\frac{d^2w_0}{dx^2} = -\frac{M}{J_x}, \quad (26.19)$$

en introduisant la rigidité en flexion de la poutre exprimée suivant :

$$J_x = E_x I = \frac{b^3}{12A_{11}^*}. \quad (26.20)$$

Dans le cas de stratifiés orthotropes ( $A_{16} = A_{26} = 0$ ), le module de flexion et la rigidité en flexion s'expriment suivant :

$$E_x = \frac{1}{h} \left( A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right), \quad (26.21)$$

et

$$J_x = \frac{b^3}{12} \left( A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right). \quad (26.22)$$

Dans le cas où le terme  $A_{12}^2/A_{22}$  est négligeable devant  $A_{11}$ , le module et la rigidité se réduisent à :

$$E_x = \frac{A_{11}}{h}, \quad (26.23)$$

et

$$J_x = \frac{b^3}{12} A_{11} = \frac{b^3}{12} \sum_{k=1}^n (Q'_{11})_k e_k. \quad (26.24)$$

## 26.2.2 Profilés

Dans le cas de profilés constitués de parois dans le plan du chargement et orthogonales au plan de chargement, l'équation différentielle de flexion peut également se mettre sous la forme (26.5) :

$$\frac{d^2w_0}{dx^2} = -\frac{M}{J_x}, \quad (26.25)$$

où la rigidité en flexion est obtenue en combinant les résultats obtenus dans les paragraphes 26.2.1.1 et 26.2.1.2. Nous considérons deux exemples ci-après.

### 1. Profil en I

Nous considérons la poutre en I de la figure 26.3, constituée de couches de mats et d'unidirectionnels d'épaisseur 1 mm, et de caractéristiques mécaniques :

- couches unidirectionnelles (UD) :

$$E_L = 38 \text{ GPa}, \quad E_T = 9 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,32, \quad G_{LT} = 3,6 \text{ GPa},$$

- couches à renfort mat (M) :

$$E_L = E_T = 7,5 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,33.$$

Les coefficients de rigidité des couches sont :

- couches unidirectionnelles :

$$\begin{aligned} Q_{11}^{\text{UD}} &= 38,945 \text{ GPa}, & Q_{12}^{\text{UD}} &= 2,952 \text{ GPa}, \\ Q_{22}^{\text{UD}} &= 9,224 \text{ GPa}, & Q_{66}^{\text{UD}} &= 3,6 \text{ GPa}, \end{aligned}$$

- couche mat :

$$\begin{aligned} Q_{11}^{\text{M}} &= 8,417 \text{ GPa}, & Q_{12}^{\text{M}} &= 2,777 \text{ GPa}, \\ Q_{22}^{\text{M}} &= 8,417 \text{ GPa}, & Q_{66}^{\text{M}} &= 2,820 \text{ GPa}. \end{aligned}$$

Les coefficients de rigidité en membrane du stratifié sont donnés par :

$$A_{ij} = (4Q_{ij}^{\text{UD}} + 3Q_{ij}^{\text{M}}) \times 10^{-3},$$

soit :

$$A_{11} = 181,031 \times 10^6 \text{ N/m}, \quad A_{12} = 20,139 \times 10^6 \text{ N/m}, \quad A_{16} = 0,$$

$$A_{22} = 62,147 \times 10^6 \text{ N/m}, \quad A_{26} = 0, \quad A_{66} = 22,860 \times 10^6 \text{ N/m}.$$

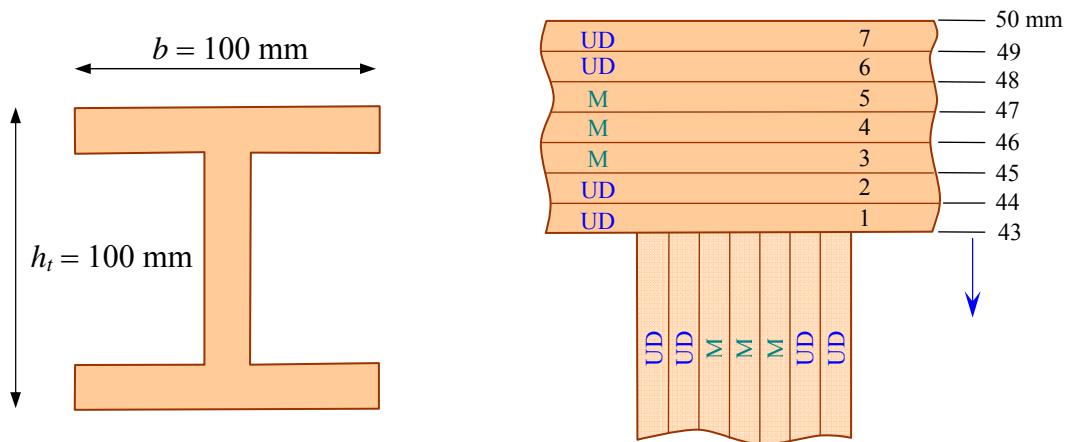


FIGURE 26.3. Poutre de profil en I.

Les coefficients de rigidité en flexion d'une aile, rapportés au plan moyen sont :

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{3} \left\{ \left[ (45^3 - 43^3) + (50^3 - 48^3) \right] Q_{ij}^{\text{UD}} + (45^3 - 43^3) Q_{ij}^{\text{M}} \right\} [0,1] \\ &= \frac{1}{3} (26\ 026 Q_{ij}^{\text{UD}} + 19\ 467 Q_{ij}^{\text{M}}) \times 10^{-9}. \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} D_{11} &= 392,479 \times 10^3 \text{ Nm}, & D_{12} &= 43,630 \times 10^3 \text{ Nm}, & D_{16} &= 0, \\ D_{22} &= 134,639 \times 10^3 \text{ Nm}, & D_{26} &= 0, & D_{66} &= 49,530 \times 10^3 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

Les rigidités en flexion des ailes 1 et 2 sont déterminées par l'expression (26.8) et conduisent à :

$$J_x^1 = J_x^2 = 37\ 834 \text{ Nm}^2. \quad (26.26)$$

La rigidité en flexion de l'âme, déterminée par l'expression (26.22) est :

$$J_x^3 = 9\ 250 \text{ Nm}^2.$$

La rigidité en flexion du profil est alors :

$$J_x = J_x^1 + J_x^2 + J_x^3 = 84\ 973 \text{ Nm}^2. \quad (26.27)$$

En utilisant les relations approchées (26.9) et (26.24), la rigidité calculée est :

$$J_x = 88\ 091 \text{ Nm}^2, \quad (26.28)$$

soit une erreur inférieure à 4 %.

## 2. Profil carré

Un calcul semblable au précédent peut être mené dans le cas du profil de la figure 26.4. La différence avec le profil en I réside dans le doublement de la paroi dans le plan du chargement. Avec la même constitution du stratifié que précédemment, la rigidité en flexion s'écrit :

$$J_x = J_x^1 + J_x^2 + 2J_x^3 = 94\ 223 \text{ Nm}^2. \quad (26.29)$$

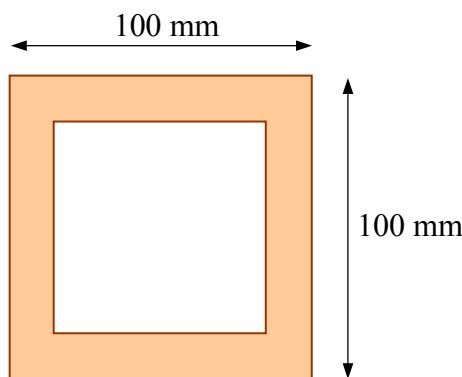


FIGURE 26.4. Poutre avec un profil carré.

### 26.2.3 Poutres sandwiches

La flexion des poutres sandwiches a été traitée au paragraphe 20.4. La flexion peut être analysée (paragraphe 20.4.2) soit par la théorie des sandwiches, soit par la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse. Dans les deux cas, les équations différentielles de flexion (20.86) à (20.90) font intervenir les deux fonctions  $w_0$  et  $\varphi_x$ .

Dans le cas où le rapport longueur sur largeur de la poutre est assez élevé, la flexion des poutres sandwiches peut être approchée par la théorie classique des stratifiés. L'équation différentielle de flexion s'écrit alors sous la forme classique (26.5), la rigidité en flexion étant exprimée par (26.6) ou (26.8). Comme illustration, nous considérons la poutre sandwich de la figure 26.5 dont les peaux sont constituées du stratifié considéré au paragraphe 26.2.2 (figure 26.3) et d'une âme en mousse de caractéristiques mécaniques :

$$E_a = 200 \text{ MPa}, \quad \nu_a = 0,40.$$

La matrice de rigidité de l'âme est (20.147) :

$$\left[ Q_{ij}^a \right] = \begin{bmatrix} 238,095 & 95,238 & 0 \\ 95,238 & 238,095 & 0 \\ 0 & 0 & 71,429 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

D'après les résultats établis au paragraphe 26.2.2, les coefficients de rigidité s'expriment suivant :

$$D_{ij} = \frac{2}{3} (26\ 026 Q_{ij}^{\text{UD}} + 19\ 467 Q_{ij}^M + 79\ 507 Q_{ij}^a) \times 10^{-9}.$$

Soit :

$$\begin{aligned} D_{11} &= 797,578 \times 10^3 \text{ Nm}, & D_{12} &= 92,307 \times 10^3 \text{ Nm}, & D_{16} &= 0, \\ D_{22} &= 281,899 \times 10^3 \text{ Nm}, & D_{26} &= 0, & D_{66} &= 102,846 \times 10^3 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

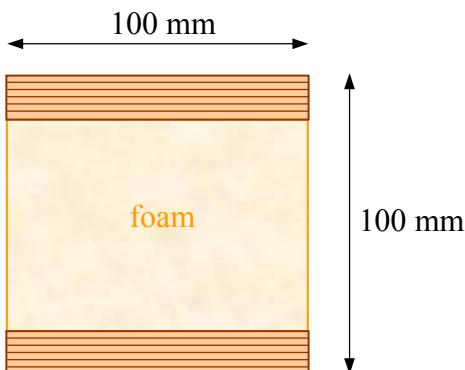


FIGURE 26.5. Poutre sandwich.

D'où la rigidité en flexion déterminée par l'expression (26.8) :

$$J_x = 76\ 735 \text{ Nm}^2. \quad (26.30)$$

En négligeant la rigidité de la mousse, la rigidité en flexion de la poutre est :

$$J_x = 2J_x^1 = 75\ 668 \text{ Nm}^2, \quad (26.31)$$

où  $J_x^1$  est la rigidité des peaux déterminée au paragraphe 26.2.2. La mousse ne participe donc pratiquement pas à la rigidité totale de la poutre.

## 26.2.4 Plaques

L'analyse du comportement linéaire des plaques a été effectuée dans la partie 4. L'étude de la flexion des plaques constituées de stratifiés peut être faite par la théorie classique des stratifiés (chapitre 16) dans le cas de faibles épaisseurs de plaques, ou par la théorie des stratifiés prenant en compte le cisaillement transverse (chapitre 17) dans le cas de plaques épaisses. L'analyse des plaques sandwiches peut être abordée par la théorie des plaques sandwiches (chapitre 18) dans le cas où l'épaisseur des peaux est faible ou (paragraphe (20.4.2)) par la théorie des stratifiés prenant en compte le cisaillement transverse dans le cas de peaux épaisses. Le flambement des poutres et des plaques a été analysé au chapitre 23.

# 26.3 DÉTERMINATION DES GRANDEURS DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE

## 26.3.1 Modules

La théorie classique des stratifiés nécessite la connaissance de quatre modules par couche :  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$  et  $G_{LT}$ . La prise en compte du cisaillement transverse nécessite en plus la connaissance des modules de cisaillement transverse :  $G_{LT'}$  (confondu avec  $G_{LT}$  dans le cas d'une couche unidirectionnelle) et  $G_{TT'}$ . Ces modules peuvent être déterminés analytiquement, à partir des caractéristiques mécaniques des constituants, dans le cas de couches unidirectionnelles (chapitre 9) et dans le cas de couches tissus ou mats (chapitre 15). Expérimentalement, les modules  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$  et  $G_{LT}$  peuvent être déterminés dans des essais de traction (paragraphe 11.4). Les valeurs des modules de cisaillement transverse  $G_{LT'}$  et  $G_{TT'}$  peuvent être obtenues à partir d'essais de flexion 3-points (paragraphe 20.3.2) effectués dans la direction  $L$  ou  $T$  et pour diverses distances entre appuis.

## 26.3.2 Caractéristiques à la rupture

Les critères de rupture nécessitent la connaissance (chapitre 12) des contraintes

à la rupture de chaque couche :  $X_t$ ,  $X_c$ ,  $Y_t$ ,  $Y_c$ ,  $S$ . Ces contraintes sont déterminées expérimentalement (paragraphe 12.2.2.2) dans des essais de traction, de compression ou de cisaillement. Les valeurs obtenues, associées à un critère de rupture donné, permettront alors de déterminer l'état de chargement limite que pourra supporter la structure considérée.

Quand un stratifié est soumis à des charges connues, l'état des déformations et des contraintes peut être déterminé dans chaque couche à partir des relations (14.44), (14.14), (14.46), (14.19) et (14.48). Les déformations et contraintes obtenues peuvent alors être comparées au critère de rupture retenu (paragraphe 12.2). Cette comparaison permet de déterminer la charge de première rupture de couche, correspondant généralement à la rupture des couches dont la direction des fibres est orthogonale à la direction de chargement. Toutefois, dans le cas de couches d'orientations différentes, le stratifié pourra supporter, au cours de ruptures successives, un chargement croissant, bien qu'à rigidité décroissante jusqu'à la rupture finale du stratifié. Pour illustrer ce comportement, nous considérons le cas d'un stratifié équilibré symétrique (figure 26.6), constitué de couches d'un même matériau et de mêmes épaisseurs, mais d'orientations différentes :  $[0^\circ/30^\circ/60^\circ/90^\circ/120^\circ/150^\circ]_S$ . Les caractéristiques des couches sont :

$$E_L = 45 \text{ GPa}, \quad E_T = 10 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,31, \quad G_{LT} = 4,5 \text{ GPa}.$$

Le stratifié est soumis à un état de déformation imposée dans la direction  $x$ . Comme critères de rupture, nous retenons trois modes de rupture possibles :

— rupture en traction dans le sens  $L$  :

$$\sigma_L \leq X_t = 1\ 400 \text{ MPa}, \quad (\sigma_L > 0), \quad (26.32)$$

— rupture en traction dans le sens  $T$  :

$$\sigma_T \leq Y_t = 40 \text{ MPa}, \quad (\sigma_T > 0), \quad (26.33)$$

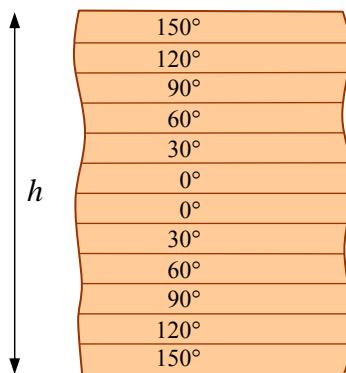


FIGURE 26.6. Stratifié équilibré symétrique.

— rupture en cisaillement :

$$|\sigma_{LT}| \leq S = 70 \text{ MPa}. \quad (26.34)$$

Le stratifié étant symétrique et équilibré, l'équation constitutive (14.29) se réduit à :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}, \quad (26.35)$$

ou

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11}\varepsilon_{xx}^0 + A_{12}\varepsilon_{yy}^0, \\ 0 &= A_{12}\varepsilon_{xx}^0 + A_{22}\varepsilon_{yy}^0, \\ \gamma_{xy}^0 &= 0. \end{aligned} \quad (26.36)$$

Ces équations permettent de déterminer  $N_x$  et  $\varepsilon_{yy}^0$  en fonction de  $\varepsilon_{xx}^0$ . D'autre part, l'état des contraintes pour chaque valeur de  $\varepsilon_{xx}^0$  est déterminé dans chaque couche par les relations (14.20) et (14.48). Soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_k = T'Q'_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (26.37)$$

Le processus adopté pour établir la courbe  $N_x$  en fonction de  $\varepsilon_{xx}^0$  à déformation imposée est le suivant :

- $N_x$  en fonction de  $\varepsilon_{xx}^0$  est exprimé par la relation (26.36) ;
- l'état de rupture de chaque couche est déterminé conformément aux critères (26.32) à (26.34) ;
- après rupture en traction d'une couche dans le sens  $T$  (26.33) ou rupture en cisaillement (26.34), les modules  $E_T$  et  $G_{LT}$  de la couche sont annulés ;
- après rupture en traction d'une couche dans le sens  $L$  (26.32), les modules  $E_L$  et  $G_{LT}$  sont annulés.

La courbe obtenue en appliquant ce processus est reportée sur la figure 26.7 : la première rupture se produit par rupture transverse des couches orientées à  $90^\circ$ , la deuxième rupture par rupture transverse des couches orientées à  $60^\circ$  et à  $120^\circ$ , la troisième rupture par rupture en cisaillement des couches orientées à  $30^\circ$  et à  $150^\circ$ . La rupture finale se produit par rupture dans le sens  $L$  des couches à  $0^\circ$ , entraînant la rupture dans le sens  $L$  des couches orientées à  $30^\circ$  et à  $150^\circ$ . Nous observons que la première rupture correspond à une charge faible (sensiblement 20 % de la charge finale), alors qu'avant rupture finale la rigidité est encore 69 % de la rigidité initiale. Cet exemple met en évidence la nature progressive de la

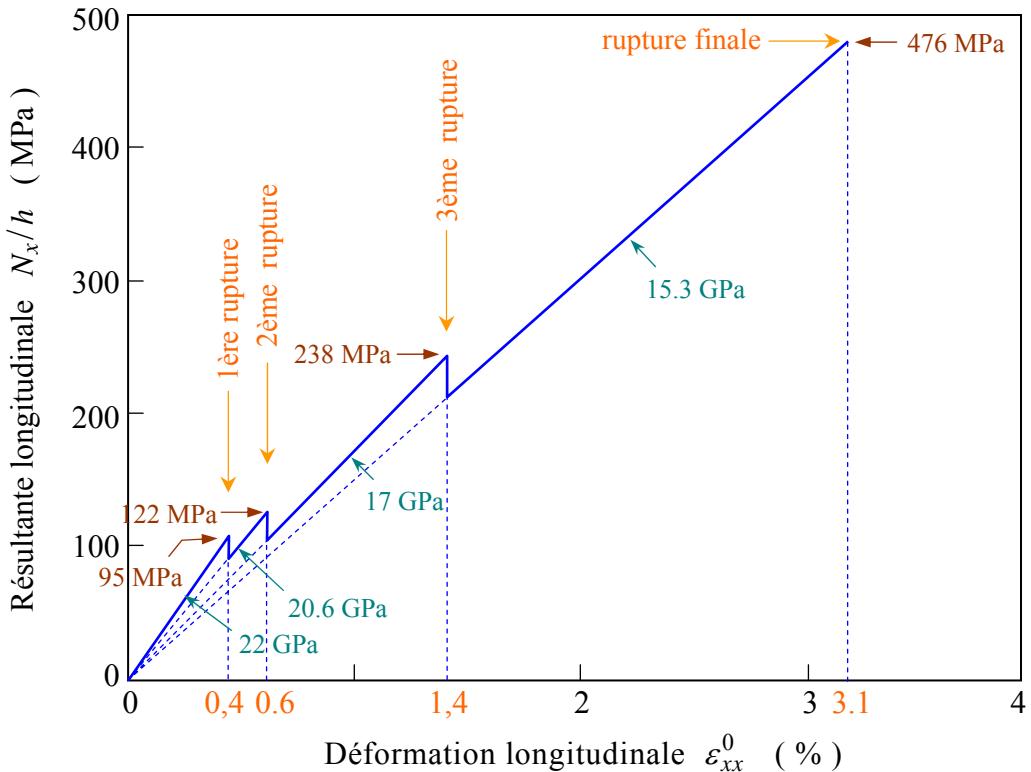


FIGURE 26.7. Courbe de rupture du stratifié de la figure 26.6.

dégradation d'un stratifié, dont il sera nécessaire de tenir compte lors d'un dimensionnement, vis-à-vis d'un chargement limite, d'une structure constituée d'un stratifié ou d'un sandwich.

## 26.4 ANALYSE DES STRUCTURES PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENS FINIS

### 26.4.1 Introduction

La constitution optimale d'un stratifié d'une structure donnée ne peut être recherchée en considérant divers stratifiés soumis à un état donné des résultantes en membrane ( $N_x, N_y, N_{xy}$ ) et des moments de flexion et torsion ( $M_x, M_y, M_{xy}$ ). En effet, dans la pratique, la structure à dimensionner est soumise à des conditions données d'appuis et de chargements. Ces conditions imposent un champ des résultantes et des moments qui dépend en fait du type de stratifié considéré. Pour illustrer ce fait, nous considérons la plaque de la figure 26.8, encastrée sur ses côtés  $AB$  et  $CD$ , et soumise à des charges réparties de résultantes 4 kN et 10 kN appliquées respectivement au centre de la plaque et aux points  $F$  et  $G$  de part et d'autre du centre. Trois types de matériaux (figure 26.9) sont considérés : un matériau  $M_1$  constitué de couches à renforts mat et tissu, un matériau  $M_2$  constitué

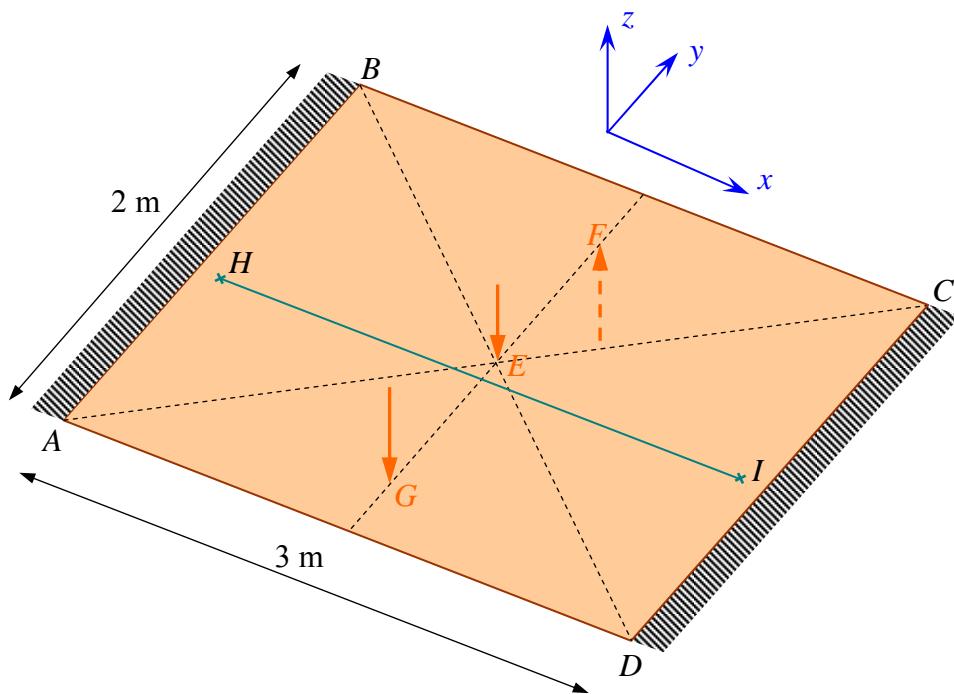


FIGURE 26.8. Plaque encastrée.

de couches à renfort mat et de couches unidirectionnelles croisées, un matériau  $M_3$  constitué de couches à renfort mat et de couches à renfort tissu orienté à  $45^\circ$ .

Les caractéristiques des couches sont :

— couches à renfort mat :

$$E_L = E_T = 7,67 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,33, \quad G_{LT} = 2,88 \text{ GPa},$$

— couches unidirectionnelles :

$$E_L = 45 \text{ GPa}, \quad E_T = 10 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,32, \quad G_{LT} = 4 \text{ GPa},$$

— couches à renfort tissu :

$$E_L = E_T = 16 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,14, \quad G_{LT} = 2 \text{ GPa}.$$

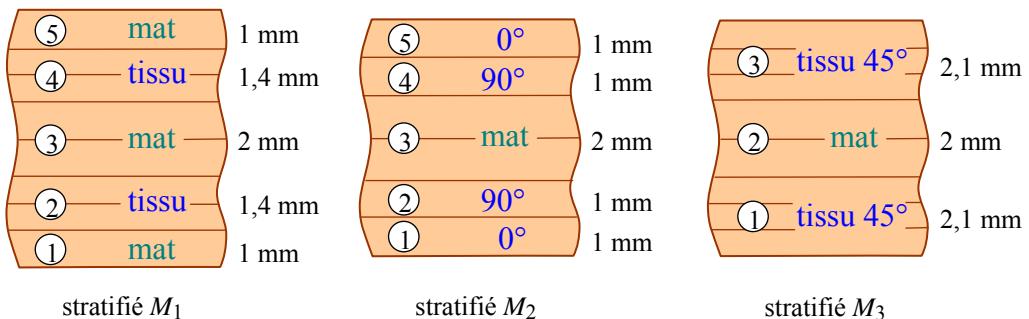


FIGURE 26.9. Matériaux étudiés dans le cas de la plaque de la figure 26.8.

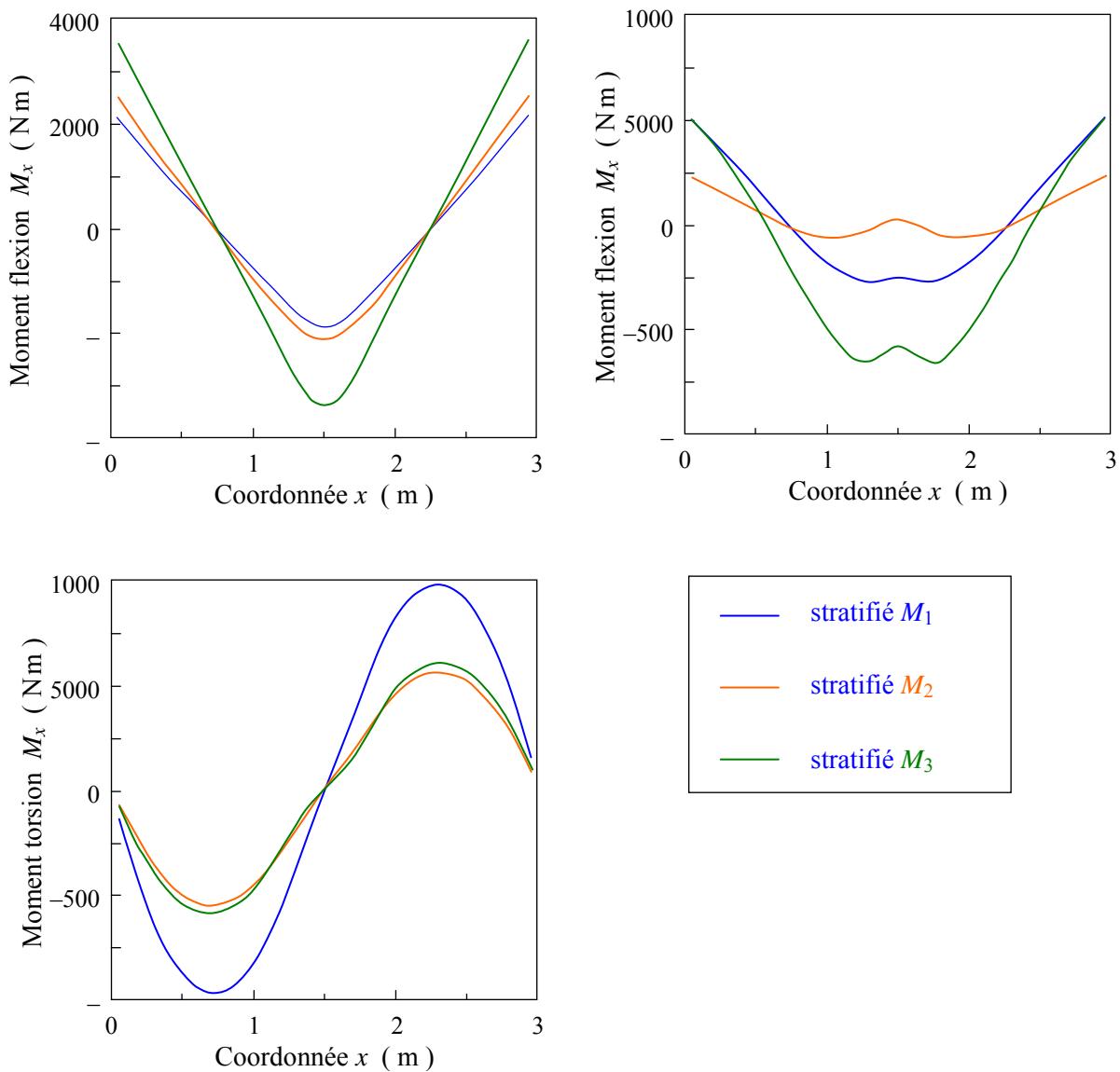


FIGURE 26.10. Variation des moments suivant le type de matériau.

Les variations des moments  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  le long de  $HI$  (figure 26.8) ont été évaluées par une analyse par éléments finis et sont reportées sur la figure 26.10 pour les divers stratifiés. Les résultats obtenus montrent l'influence de la nature du stratifié sur la répartition des moments et mettent en évidence la nécessité de mener une optimisation des matériaux en effectuant une analyse complète de la répartition des déformations et des contraintes dans toute la structure étudiée.

## 26.4.2 Méthode des éléments finis

L'analyse d'une structure par la méthode des éléments finis consiste à découper la structure considérée en éléments (figure 26.11), et à établir aux nœuds

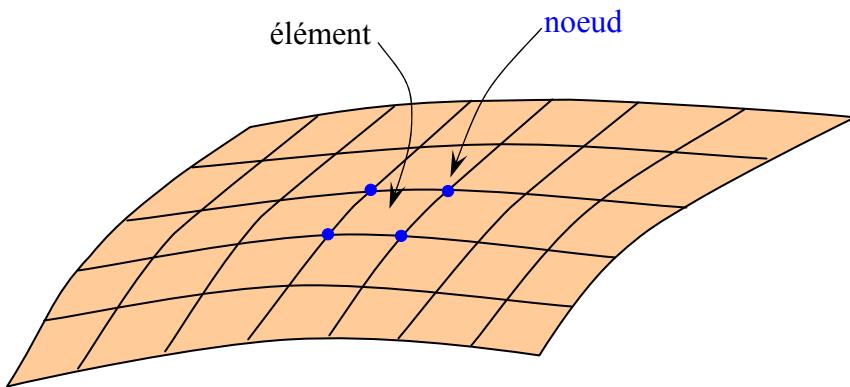


FIGURE 26.11. Maillage d'une structure.

sommets des éléments les relations forces-déplacements, en tenant compte des conditions de charges et d'appuis imposées à la structure. On obtient alors un système d'équations linéaires de grande dimension, dont la résolution numérique conduit à la valeur du déplacement en chaque nœud. Le champ des contraintes est ensuite déterminé à partir du champ des déplacements.

L'analyse par la méthode des éléments finis nécessite le découpage préalable de la structure en éléments. Cette fonction de découpage est assurée par un processus dit de maillage de la structure, permettant à l'opérateur d'obtenir un découpage automatisé de la structure. Le maillage peut être effectué directement dans le cas de structures simples. Dans le cas de structures complexes, le maillage ne peut être effectué aisément qu'après modélisation géométrique de la structure, reposant par exemple sur un formalisme de type Bézier ou Spline.

L'analyse par la méthode des éléments finis apparaît ainsi comme l'une des étapes intégrée dans un système de conception, assistée par ordinateur, partant de la définition de la structure (modélisation géométrique) pour aboutir à son prédimensionnement par la méthode des éléments finis. Le processus de conception est alors schématisé sur la figure 26.12. Nous avons noté au paragraphe 26.1 la complexité du processus d'optimisation du dimensionnement des structures en matériaux composites, cette optimisation incluant celle des matériaux au niveau de leurs couches et de l'arrangement de ces couches.

Les exemples traités ci-après dans le présent chapitre sont analysés à l'aide du programme d'éléments finis PERMAS<sup>1</sup>. Ce programme est intégré dans un ensemble de conception assistée par ordinateur, comportant des modules de modélisation, maillage, analyse par éléments finis et dépouillement des résultats. En ce qui concerne les matériaux composites, le programme comporte des éléments basés sur la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse (chapitre 17) et des éléments basés sur la théorie des plaques sandwiches (chapitre 18).

1. PERMAS – Développé par INTES GmbH, Stuttgart, Allemagne.

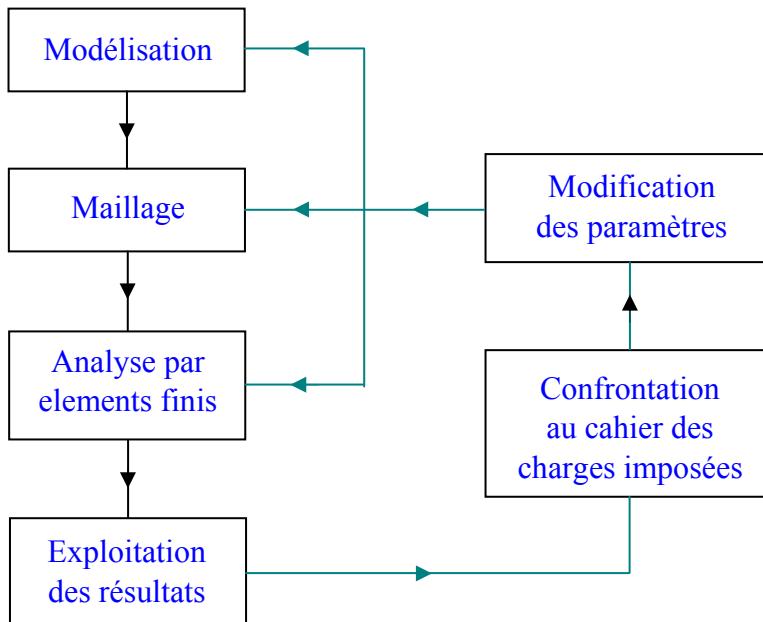


FIGURE 26.12. Processus de conception.

### 26.4.3 Validation

L'utilisation d'un programme d'éléments finis nécessite d'avoir une estimation de la validité des résultats numériques obtenus lors de l'analyse du comportement mécanique de la structure en matériau composite. Cette validité doit être vérifiée en comparant les résultats obtenus par le programme d'éléments finis sur diverses structures tests avec les résultats déduits d'essais expérimentaux. Dans le cas de structures simples, les résultats obtenus par éléments finis peuvent être également comparés avec les résultats déduits d'un calcul analytique.

Comme exemple, nous avons étudié par éléments finis le comportement de la plaque rectangulaire considérée au paragraphe 21.2.2.2. La plaque de longueur  $a = 2,8 \text{ m}$  et de largeur  $b = 0,7 \text{ m}$ , en appuis simples sur ses quatre côtés, est soumise à une pression uniforme de 500 Pa (figure 21.2). La plaque a été divisée en 28 éléments dans le sens de la longueur et 7 éléments dans le sens de la largeur, soit 196 éléments au total. Le calcul par éléments finis donne une flèche maximale au centre de la plaque :

$$w_{0\max} = 5,642 \text{ mm}$$

alors que le calcul analytique donne (relation (21.43)) une valeur de 5,728 mm. Les valeurs pour les contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  par la méthode des éléments finis sont comparées dans le tableau 26.1 aux valeurs obtenues par le calcul analytique (relations (21.45) à (21.50) et figure 21.3). Nous observons un très bon accord entre les valeurs déduites de l'analyse par éléments finis et les valeurs analytiques

(écart de l'ordre de 1,5 %).

TABLEAU 26.1. Valeurs des contraintes dans les couches.

$z$ (mm)	$\sigma_{xx}$ (MPa)		$\sigma_{yy}$ (MPa)	
	valeur analytique	éléments finis	valeur analytique	éléments finis
Couches à renfort mat	1	0,327	0,323	0,974
	2,4	0,785	0,777	2,339
	3,4	1,112	1,099	3,313
Couches à renfort tissu	1	0,199	0,195	1,573
	2,4	0,477	0,470	3,774

## 26.5 EXEMPLES DE PRÉDIMENSIONNEMENTS

### 26.5.1 Prédimensionnement de la coque d'un voilier

#### 26.5.1.1 *Introduction*

Le premier exemple concerne le dimensionnement de la coque d'un voilier (figure 26.13) de longueur égale à 17 m. L'objet du dimensionnement était de définir le choix et l'épaisseur du matériau, de manière à avoir la déformée minimale de la coque sans endommagement, lors du haubanage du mât, déformée déterminée à la limite de rupture des haubans.

#### 26.5.1.2 *Matériaux*

Deux matériaux sandwichs étaient à considérer, constitués de peaux stratifiées et d'une âme soit en mousse rigide de polychlorure de vinyle PVC (Airex), soit en nid d'abeilles en polypropylène (Nidoplast). L'objet du dimensionnement était de choisir l'âme la mieux adaptée, en liaison avec les problèmes de coût et de mise en œuvre, et de déterminer la composition des peaux stratifiées à partir de renforts tissus verre, croisés ou unidirectionnels, et de mats de verre.

Dans le cadre du prédimensionnement, trois matériaux sandwichs ont été considérés initialement. Ces matériaux (figure 26.14) sont constitués de peaux identiques, comportant deux couches d'épaisseur 0,8 mm de tissu équilibré de masse surfacique 736 g/m<sup>2</sup> et d'une couche de même épaisseur 0,8 mm de mat de masse surfacique 400 g/m<sup>2</sup>. Ils diffèrent par les caractéristiques de l'âme :

- un matériau noté sandwich 1, avec une âme en Airex d'épaisseur 20 mm,
- un matériau noté sandwich 2, avec une âme en Nidoplast d'épaisseur 20 mm,
- un matériau noté sandwich 3, avec une âme en Nidoplast d'épaisseur 40 mm.

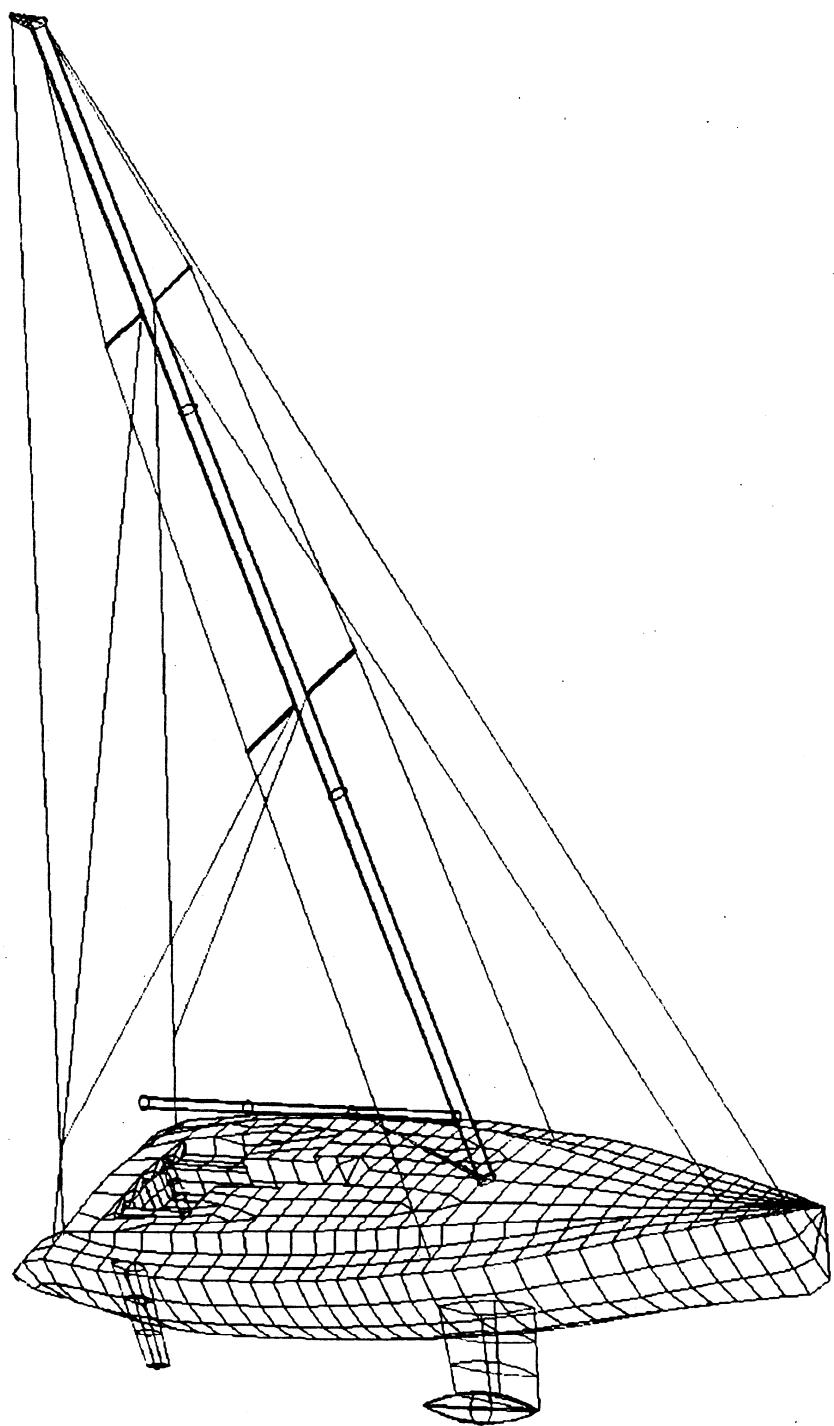


FIGURE 26.13. Voilier à coque sandwich.

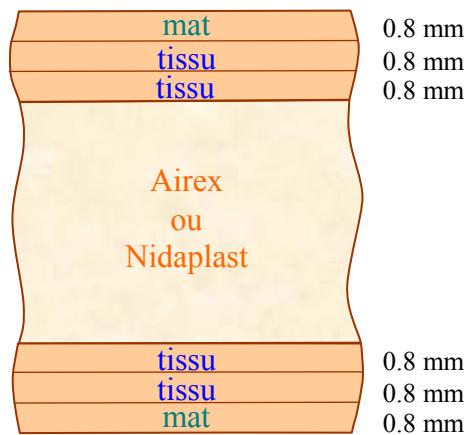


FIGURE 26.14. Sandwich étudié pour la coque du voilier.

### 26.5.1.3 Détermination des caractéristiques mécaniques des matériaux

Les caractéristiques de la mousse Airex et du nid d'abeilles Nidaplast ont été déterminées dans des essais de traction, compression et cisaillement. Les valeurs obtenues sont :

— mousse Airex :

$$E_a = 70 \text{ MPa}, \quad G_a = 25 \text{ MPa}, \quad \nu_a = \frac{E_a}{2G_a} - 1 = 0,4, \quad (26.38)$$

— nid d'abeilles Nidaplast :

$$E_a = 15 \text{ MPa}, \quad G_a = 8 \text{ MPa}. \quad (26.39)$$

Les modules d'élasticité des peaux sont déduits d'essais de traction, effectués sur le matériau sandwich à  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  des directions principales des peaux (paragraphe 11.4) :

$$E_{Lp} = E_{Tp} = 13,9 \text{ GPa}, \quad G_{LTp} = 2,2 \text{ GPa}, \quad \nu_{LTp} = 0,16, \quad (26.40)$$

Un calcul analytique (chapitre 15, paragraphe 15.2) conduit à des valeurs de modules :

$$E_{Lp} = E_{Tp} = 14,2 \text{ GPa}, \quad G_{LTp} = 2,5 \text{ GPa}, \quad \nu_{LTp} = 0,15, \quad (26.41)$$

valeurs en bon accord avec les valeurs expérimentales.

### 26.5.1.4 Validation du modèle du comportement mécanique des matériaux

La validation a été effectuée dans le cas d'essais de flexion 3-points et dans le cas d'une plaque en appuis sur trois points et soumise à une charge.

### 1. Essais de flexion 3-points

Les résultats établis au paragraphe 20.4, dans le cadre de la théorie des sandwiches, montrent que, dans un essai de flexion 3-points, la relation entre la flèche  $w_c$  au centre et la charge  $P$  imposée s'exprime en fonction de la distance  $L$  entre appuis par la relation (20.103) :

$$\frac{w_c}{P} = \frac{PL^3}{48b} \left( D_{11}^* + \frac{12}{L^2} F_{55}^* \right). \quad (26.42)$$

Cette relation s'écrit pour les matériaux considérés sous une forme analogue à (20.162), soit :

$$\frac{w_c}{PL} = \frac{A}{E_{Lp}} L^2 + \frac{B}{G_a}, \quad (26.43)$$

où les paramètres  $A$  et  $B$  s'expriment en fonction de  $b$ ,  $h$  et  $h_1$  conformément à la relation (20.162).

La figure 26.15 montre les résultats expérimentaux obtenus dans le cas des sandwiches 2 et 3 avec une âme en Nidaplast. Les valeurs expérimentales alignées sur des droites confirment la validité de la relation (26.43) et conduisent à :

— sandwich 2 (Nidaplast,  $h = 20$  mm) :

$$E_{Lp} = 13,3 \text{ GPa}, \quad G_a = 12,8 \text{ MPa}, \quad (26.44)$$

— sandwich 3 (Nidaplast,  $h = 40$  mm) :

$$E_{Lp} = 13,8 \text{ GPa}, \quad G_a = 9,4 \text{ MPa}. \quad (26.45)$$

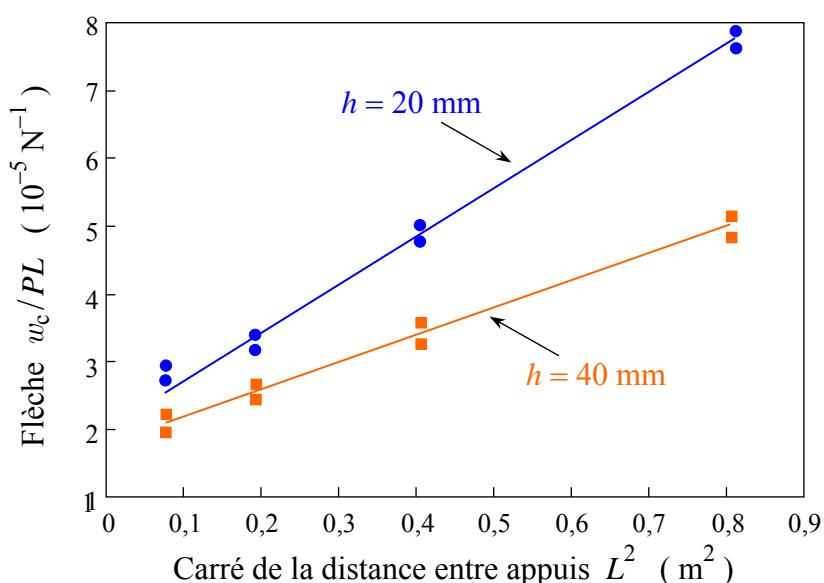


FIGURE 26.15. Flèche au centre en fonction de la distance entre appuis dans un essai de flexion 3-points (matériaux sandwiches avec âme en Nidaplast).

Une détermination identique dans le cas du sandwich 1 (âme en Airex,  $h = 20$  mm) conduit à :

$$E_{Lp} = 13,3 \text{ GPa}, \quad G_a = 28 \text{ MPa}. \quad (26.46)$$

L'ensemble des valeurs déduites des essais de flexion sur les matériaux sandwichs, relations (26.44) à (26.46), est cohérent avec les valeurs déterminées initialement sur les constituants des matériaux, relations (26.38) et (26.39).

## 2. Plaque en appuis

La validation du comportement mécanique a également été effectuée dans le cas d'une plaque en appuis en  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , et soumise à une charge  $F_D$  en  $D$  (figure 26.16). La flèche  $w_D$ , mesurée en  $D$ , est comparée à la valeur calculée par la méthode des éléments finis, avec les valeurs des modules déterminées précédemment. Les valeurs trouvées pour la flèche  $w_D$  dans le cas d'une charge  $F_D = 2000$  N sont :

	Mesures (mm)	Éléments finis (mm)
Sandwich 1	5,76	5,54
Sandwich 2	9,32	8,65
Sandwich 3	5,20	4,92

Ces résultats font apparaître des écarts de 4 à 8 % entre les valeurs mesurées et les valeurs calculées par éléments finis. Ces écarts permettent de conclure à la validité du modèle sandwich utilisé pour l'analyse par éléments finis.

### 26.5.1.5 Prédimensionnement

Les premières analyses effectuées par éléments finis ont montré la nécessité de renforcer la coque par des poutres et des couples sandwiches avec un profil en  $\Omega$

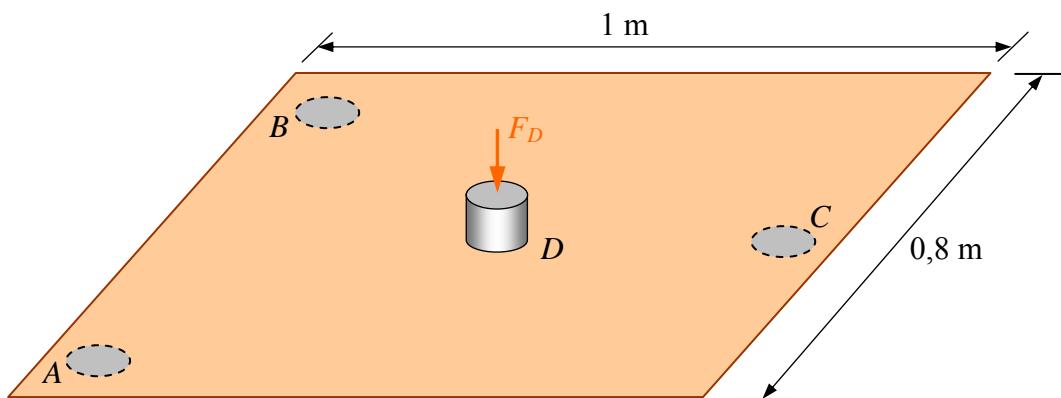


FIGURE 26.16. Plaque en appuis soumise à une charge.

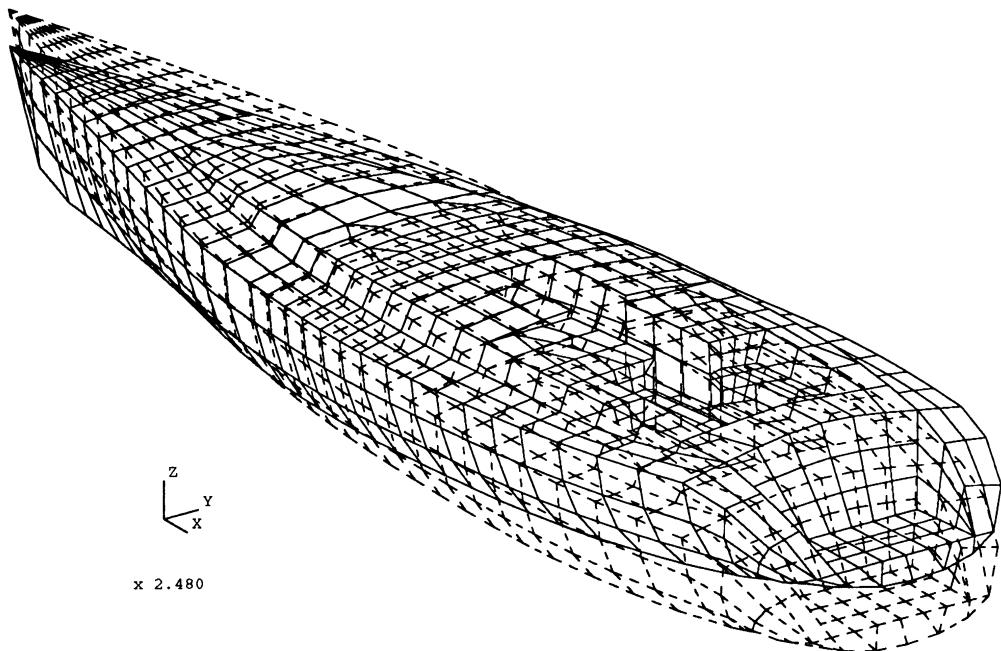


FIGURE 26.17. Déformée de la coque de voilier lors du haubanage du mât.

au voisinage du support du mât. Les figures 26.17 à 26.19 donnent des exemples obtenus au cours du dimensionnement pour la déformée de la coque (figure 26.17) et les cartes d'isocontraintes (figures 26.18 et 26.19), lors du haubanage du mât. Les analyses successives, associées aux considérations du coût de fabrication, ont finalement conduit à réaliser la coque en matériau sandwich avec âme en mousse Airex et le pont en matériau sandwich avec âme en nid d'abeilles en polypropylène.

## 26.5.2 Prédimensionnement d'un capot d'automobile

Le deuxième exemple concerne le dimensionnement d'un capot d'automobile, mené suivant une démarche analogue à la précédente.

### 26.5.2.1 Matériau

Le matériau utilisé est un sandwich constitué (figure 26.20) d'une âme en mousse polyuréthane et de deux peaux mousse polyuréthane-mat de verre. Ce type de matériau est lié au choix d'une technologie de mise en œuvre par expansion de la mousse à la fois dans l'âme et dans les peaux. L'objet du

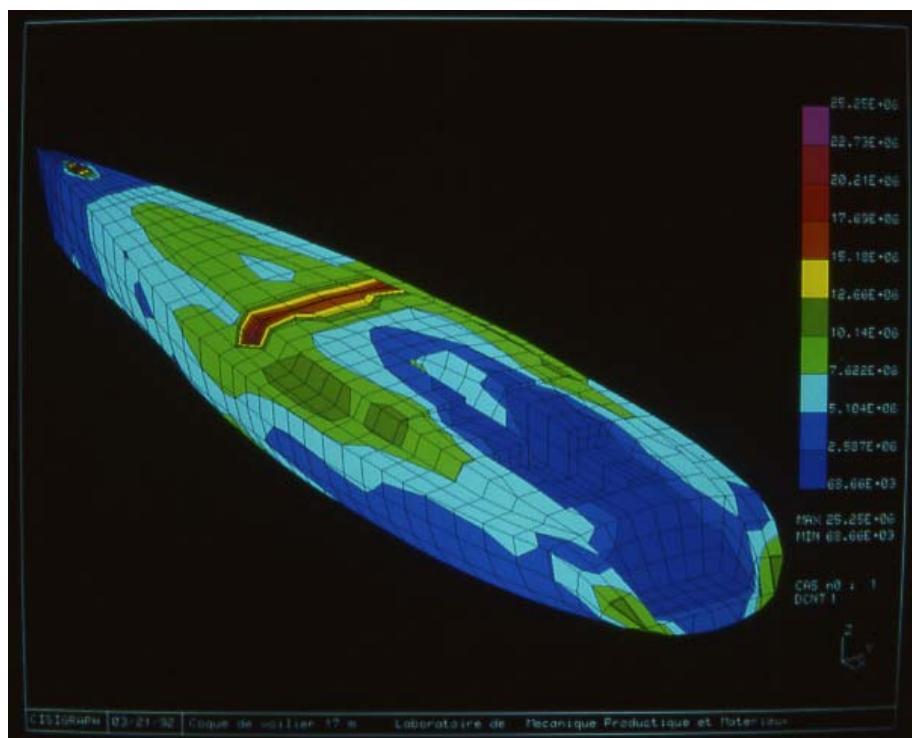


FIGURE 26.18. Répartition des contraintes dans la coque lors du haubanage du mât.

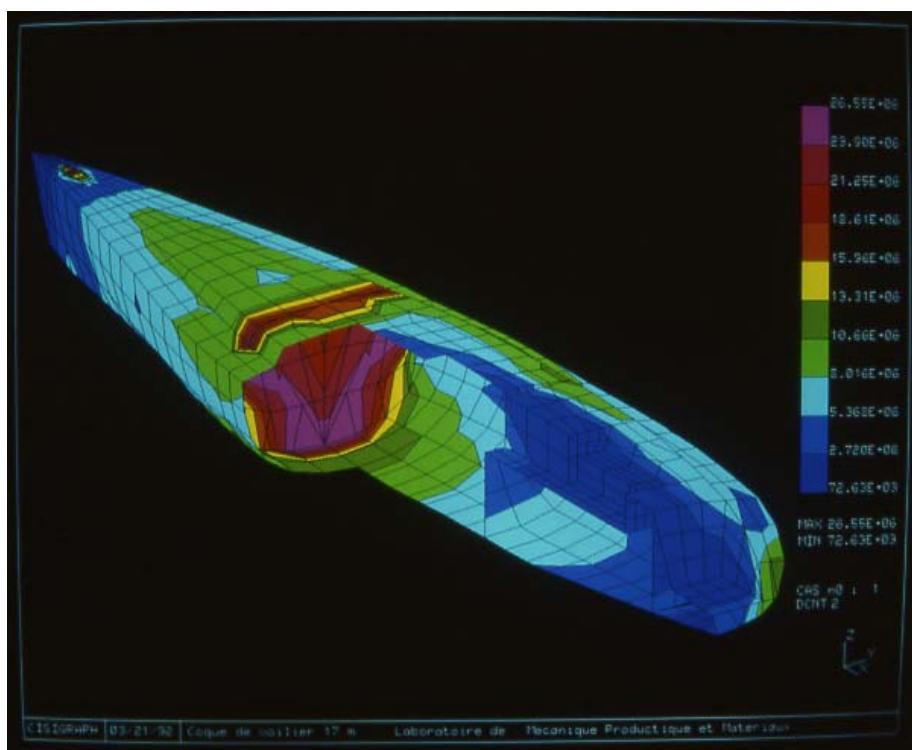


FIGURE 26.19. Répartition des contraintes à l'intérieur de la coque lors du haubanage du mât.

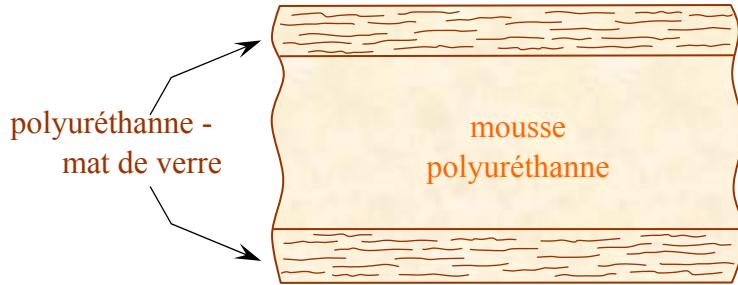


FIGURE 26.20. Sandwich utilisé pour le capot.

dimensionnement était d'optimiser le matériau en épaisseur (épaisseur de l'âme, épaisseur des peaux), la fraction volumique de fibres et la densité de la mousse polyuréthane. Les caractéristiques du matériau initial étaient :

- épaisseur du sandwich :  $h_t = 16 \text{ mm}$ ,
- épaisseur des peaux :  $h_1 = 3 \text{ mm}$ ,
- densité de la mousse polyuréthane :  $100 \text{ kg/m}^3$ ,
- dans chaque peau, 2 mats de verre de densité surfacique :  $M_s = 450 \text{ g/m}^2$ .

### 26.5.2.2 Détermination des caractéristiques mécaniques du matériau

Les caractéristiques mécaniques de la mousse ont été mesurées dans des essais de traction, compression et cisaillement. Les valeurs obtenues sont :

- modules d'élasticité :

$$E_a = 78 \text{ MPa}, \quad G_a = 27 \text{ MPa}, \quad \nu_a = 0,45, \quad (26.47)$$

- contraintes à la rupture :

• en traction	$\sigma_{ta} = 1,5 \text{ MPa}$ ,
• en compression	$\sigma_{ca} = 0,8 \text{ MPa}$ ,
• en cisaillement	$S_a = 1 \text{ MPa}$ .

(26.48)

Les modules d'élasticité des peaux sont déduits d'essais de traction et de compression, effectués sur le matériau sandwich. Les valeurs obtenues sont :

$$E_{Lm} = E_{Tm} = 2\,800 \text{ MPa}, \quad G_{LTm} = 1\,200 \text{ MPa}, \quad \nu_{LTm} = 0,35. \quad (26.49)$$

Un calcul analytique en fonction des caractéristiques des constituants (chapitre 15, paragraphe 15.2.6) conduit aux valeurs :

$$E_{Lm} = E_{Tm} = 2\,888 \text{ MPa}, \quad G_{LTm} = 1\,080 \text{ MPa}, \quad \nu_{LTm} = 0,33, \quad (26.50)$$

valeurs en bon accord avec les valeurs expérimentales.

### 26.5.2.3 Modélisation du comportement mécanique

L'étude du comportement mécanique du matériau a été menée dans le cas d'essais de flexion 3-points et dans le cas d'une plaque de grandes dimensions soumise à une charge.

#### 1. Essais de flexion

Dans le cas des essais de flexion 3-points, les résultats expérimentaux en fonction de la distance  $L$  entre appuis sont reportés sur la figure 26.20. L'application de la relation (26.43) conduit à :

$$E_{Lm} = 4\ 500 \text{ MPa}, \quad G_a = 46 \text{ MPa}. \quad (26.51)$$

Ces valeurs sont en désaccord avec les valeurs (26.47), (26.49) et (26.50). Il apparaît donc ici une difficulté qui provient du fait que l'épaisseur des peaux n'est pas beaucoup plus petite que l'épaisseur de l'âme, ce qu'admet la relation (26.43). La modélisation sandwich conduit à la valeur d'un module fictif (4 500 MPa) bien plus élevé que le module réel (2 800/2 900 MPa), le module de cisaillement de l'âme étant également plus élevé.

Les résultats, établis au paragraphe 20.3, montrent que, dans le cadre de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse, la relation entre la flèche  $w_c$  au centre et la charge  $P$  imposée s'exprime suivant la relation (26.42). Dans le cas du matériau considéré, elle s'écrit (relation 20.163) sous la forme :

$$\frac{w_c}{PL} = \frac{A}{\alpha_D E_{Lm}} L^2 + \frac{B}{G_a \left( 1 + 2 \frac{h_l}{h} \frac{G_m}{G_a} \right)}, \quad \alpha_D = 1 + \frac{h_l}{h} \frac{h + \frac{4}{3} h_l}{h + h_l}. \quad (26.52)$$

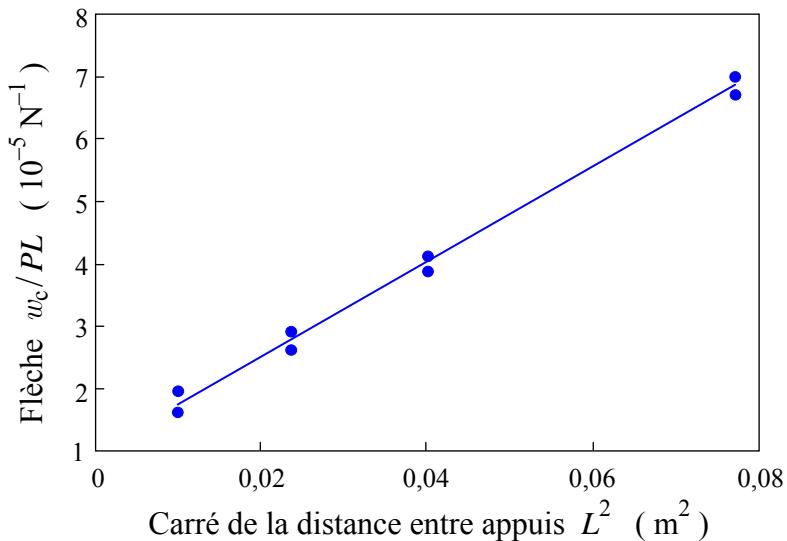


FIGURE 26.21. Flèche au centre en fonction de la distance entre appuis dans un essai de flexion.

Les expressions (26.43) et (26.52) coïncident en fait dans le cas de faibles épaisseurs des peaux ( $h_l \ll h$ ).

L'utilisation de la relation (26.52), avec les résultats expérimentaux de la figure 26.19, conduit à :

$$E_{Lm} = 3\ 400 \text{ MPa}, \quad G_a = 33 \text{ MPa}. \quad (26.53)$$

Le module  $E_{Lm}$  est abaissé à 3 400 MPa, mais reste encore éloigné du module réel mesuré 2 800/2 900 MPa.

Enfin, une analyse par éléments finis avec les modules réels associés à des éléments de volume conduit à des résultats pratiquement confondus avec les résultats expérimentaux.

Ainsi, il apparaît que le comportement mécanique du matériau peut être décrit, dans une flexion 3-points, par un modèle sandwich ou un modèle stratifié avec cisaillement transverse, mais en introduisant un module fictif de peau ( $E_{Lm} = 4\ 500 \text{ MPa}$  pour le modèle sandwich,  $E_{Lm} = 3\ 400 \text{ MPa}$  pour le modèle stratifié), différent du module réel. Une description avec les valeurs réelles des modules nécessite l'utilisation soit d'une théorie des stratifiés d'ordre supérieur à 1 [36, 37], soit d'une analyse par éléments finis de volume, au prix d'une complexité plus grande de ces analyses.

## 2. Flexion de plaque

Le comportement mécanique du matériau sandwich a également été étudié dans le cas d'une plaque encastrée, soumise à un chargement ponctuel exercé en l'un des points  $A, B, \dots, H$  (figure 26.22). La flèche mesurée aux divers points ( $A, B, \dots, H$ ) a été comparée aux valeurs déterminées par la méthode des éléments finis avec les valeurs des modules déterminés précédemment dans la modélisation considérée. Les tableaux 26.2 et 26.3 comparent certaines des valeurs obtenues. Pour comparaison sont également reportées les valeurs obtenues en considérant, pour chaque modélisation, les valeurs réelles des modules des peaux. Comme dans le cas de la flexion 3-points, le comportement mécanique de la plaque peut être décrit par un modèle sandwich ou un modèle stratifié avec cisaillement

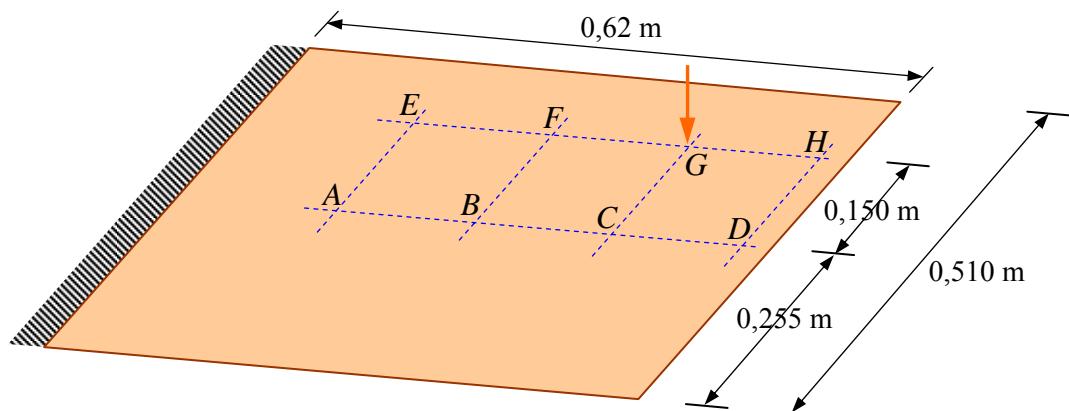


FIGURE 26.22. Plaque encastrée et chargée en divers points.

TABLEAU 26.2. Chargement de 10 N au point *C* de la plaque de la figure 26.22.

Modélisation	Sandwich		Stratifié		Éléments de volume	Valeurs expérimentales
$E_{Lm}$ (MPa)	4500	2900	3400	2900	2900	
Flèches (mm) en :						
<i>C</i>	0,575	0,890	0,590	0,691	0,58	0,595
<i>A</i>	0,089	0,153	0,092	0,108	0,096	0,092
<i>D</i>	0,822	1,291	0,856	1,012	0,841	0,875

TABLEAU 26.3. Chargement de 10 N au point *G* de la plaque de la figure 26.22.

Modélisation	Sandwich		Stratifié		Éléments de volume	Valeurs expérimentales
$E_{Lm}$ (MPa)	4500	2900	3400	2900	2900	
Flèches (mm) en :						
<i>A</i>	0,097	0,153	0,092	0,108	0,094	0,099
<i>D</i>	0,801	1,258	0,834	0,976	0,812	0,841
<i>E</i>	0,116	0,184	0,142	0,166	0,122	0,135
<i>G</i>	0,648	1,024	0,656	0,768	0,623	0,639
<i>H</i>	0,908	1,429	0,924	1,081	0,882	0,89

transverse en adaptant les valeurs du module  $E_{Lm}$  aux valeurs déterminées respectivement en (26.51) et (26.54). Les résultats donnés par l'analyse à l'aide d'éléments de volume, avec la valeur (26.50) du module des peaux, concordent avec les valeurs expérimentales. L'introduction de cette valeur du module dans l'analyse avec des éléments sandwiches ou avec des éléments stratifiés conduit à des écarts notables, mais toutefois moindres avec la théorie des stratifiés (écart de l'ordre de 17 %) qu'avec la théorie des sandwiches (écart de l'ordre de 50 %).

#### 26.5.2.4 Première étape du dimensionnement

Parmi les spécifications mécaniques imposées par le cahier des charges, le prédimensionnement a été mené en considérant les spécifications suivantes :

- déformation sans endommagement du capot fermé sous une charge localisée ;
- faible déformation du capot sous son poids propre ;
- déformation sans endommagement du capot ouvert sous une charge répartie (action du vent sur le capot ouvert) ;
- résistance à un choc latéral.

La figure 26.23 montre le maillage utilisé pour l'analyse du comportement mécanique du capot. Le capot s'ouvre d'avant en arrière, par l'intermédiaire de deux liaisons en *A* et *B*. Fermé, le capot est en appui sur les points *C*, *D* et *E*.

La flèche maximale déterminée par éléments finis dans la déformation du capot soumis à son poids propre est de 4 mm. La figure 26.24 donne la déformée du capot soumis à un choc latéral. Les figures 26.25 et 26.26 montrent les isovaleurs des contraintes obtenues suivant un critère de type Von Mises (figure 26.25) et de contraintes maximales en traction (figure 26.26), dans le cas du capot fermé soumis à une charge localisée de 1 kN. Les valeurs des contraintes maximales conduisent à un facteur de sécurité de l'ordre de 3 vis-à-vis d'un premier endommagement.

Les phases suivantes du dimensionnement ont conduit à une conception du capot avec nervures et zones d'épaisseurs différentes du matériau sandwich.

### 26.5.3 Conclusions sur le prédimensionnement

Les deux exemples traités précédemment mettent en évidence la nécessité d'avoir recours à des essais d'une part pour caractériser les matériaux étudiés et d'autre part pour valider le comportement mécanique de la structure déduite d'analyses par éléments finis.

Les essais sur les matériaux sont effectués sur les constituants : couches dans le cas des matériaux stratifiés, peaux et âmes dans le cas des matériaux sandwiches. Dans le cadre d'un prédimensionnement les caractéristiques des stratifiés ou

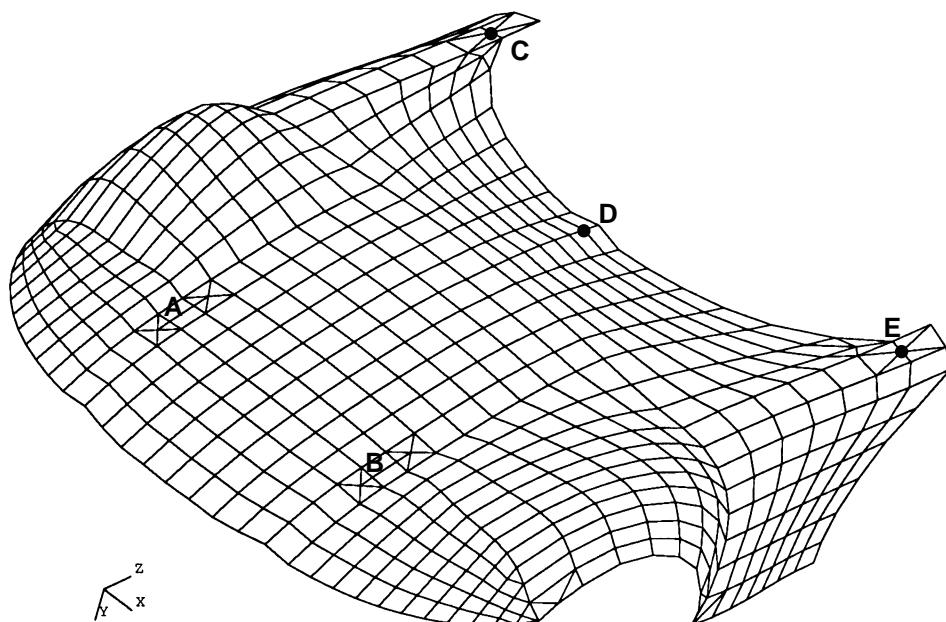


FIGURE 26.23. Maillage du capot.

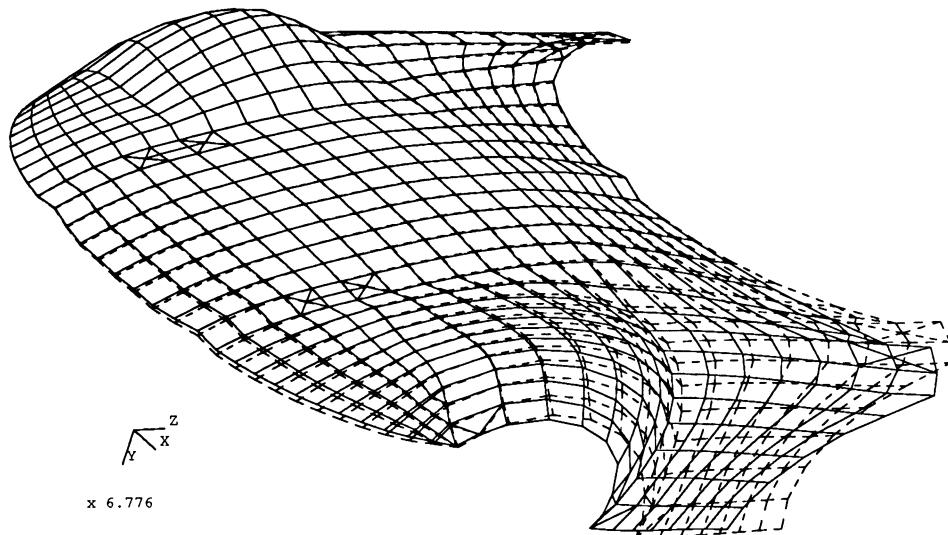


FIGURE 26.24. Déformée du capot soumis à un choc latéral.

des matériaux sandwiches peuvent être également évalués par les approches analytiques développées dans les parties 3 et 4. Les approches analytiques permettent alors d'évaluer rapidement l'influence des divers paramètres tels que les caractéristiques mécaniques des constituants, leurs proportions, la structure du matériau en fonction de l'empilement des couches, etc.

Le comportement mécanique global et local de la structure est ensuite évalué par une analyse par éléments finis. Nous avons, dans les exemples traités précédemment porté l'attention sur la nécessité de valider les analyses par éléments finis en recalant les résultats obtenus avec les résultats expérimentaux sur des structures simples. Une fois cette évaluation effectuée, l'analyse par éléments finis sera effectuée en utilisant le type de modélisation la mieux adaptée aux matériaux considérés.

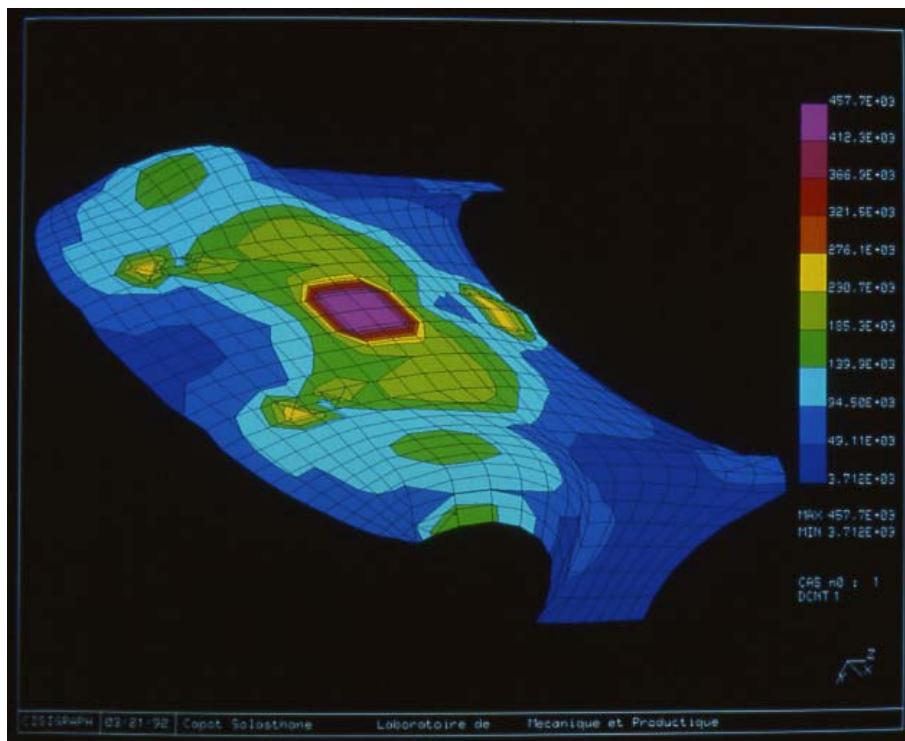


FIGURE 26.25. Répartition des contraintes dans le capot soumis à une charge localisée (critère de type Von Mises).

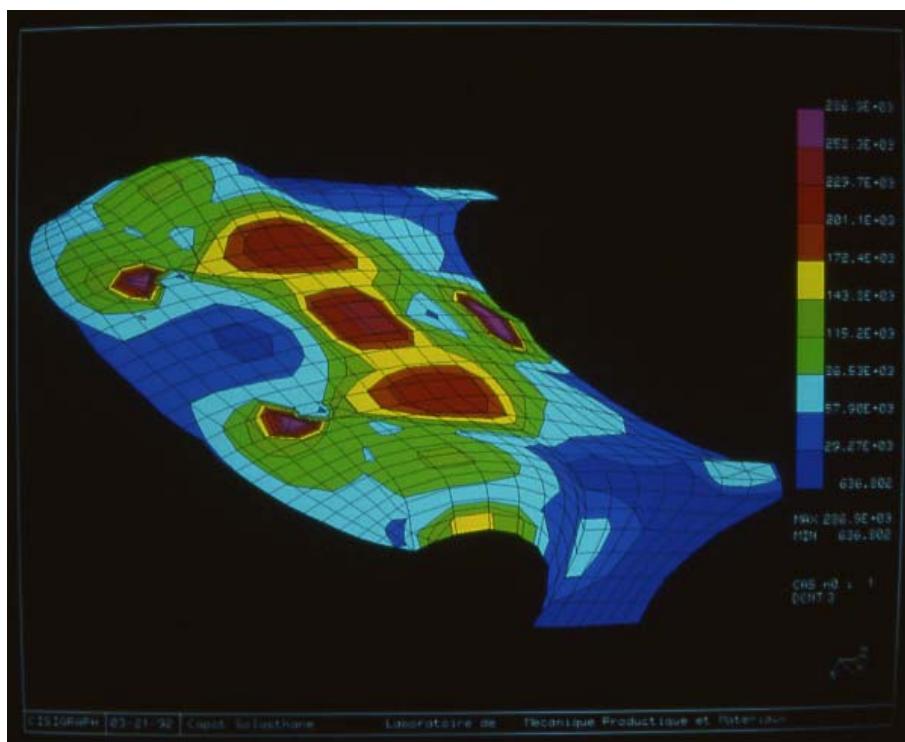


FIGURE 26.26. Répartition des contraintes dans le capot soumis à une charge localisée (critère de contraintes maximales en traction).



# Références Bibliographiques

- [1] R.G. Weatherhead (1980). *FRP Technology. Fibre Reinforced Resin Systems.* Applied Science Publishers, Londres.
- [2] J. Weiss et C. Bord (1983). *Les Matériaux Composites* (tomes 1 et 2). Éditions de l'Usine, Paris.
- [3] M. Geier et D. Duedal (1985). *Guide pratique des matériaux composites.* Technique et Documentation, Paris.
- [4] G. Chrétien (1986). *Matériaux composites à matrice organique.* Technique et Documentation, Paris.
- [5] I.K. Partridge (éd.) (1989). *Advanced Composites.* Elsevier Applied Science, Londres et New York.
- [6] C.C. Chamis et G.P. Sendeckyj (1968). Critique on theories predicting thermoelastic properties of fibrous composites. *J. Compos. Mat.* (juillet), 332-358.
- [7] R.M. Christensen (1979). *Mechanics of Composite Materials.* John Wiley & Sons, New York.
- [8] Z. Hashin (1965). On elastic behaviour of fibre reinforced materials of arbitrary transverse plane geometry. *J. Mech. Phys. Solids,* **13**, 119.
- [9] R. Hill (1964). Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials : I. Elastic behavior. *J. Mech. Phys. Solids,* **12**, 199.
- [10] Z. Hashin et B.W. Rosen (1964). The elastic moduli of fiber-reinforced materials. *J. Appl. Mech.* (juin), 223-232.
- [11] Z. Hashin (1966). Viscoelastic fiber reinforced materials. *AIAA J.,* **4**, 1411.
- [12] J.J. Hermans (1967). The elastic properties of fiber reinforced materials when the fibers are aligned. *Proc. K. Ned. Akad. Wet.,* **B70**, 1.
- [13] R.M. Christensen et K.H. Lo (1979). Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Solids,* **27**(4)4.
- [14] J.C. Halpin et S.W. Tsai (1969). Effects of environmental factors on composite materials. *AFML-TR 67-243,* (juin).
- [15] D.F. Adams et D.R. Doner (1967). Transverse normal loading of a unidirectional composite. *J. of Compo. Mat.* (avril), 152-164.
- [16] D.F. Adams et D.R. Doner (1967). Longitudinal shear loading of a unidirectional composite. *J. Compos. Mat.* (janvier), 4-17.

- [17] R. Hill (1950). *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, Londres.
- [18] V.D. Azzi et S.W. Tsai (1965). Anisotropic Strength of Components. *Exper. Mech.*, **5**, 286-288.
- [19] O. Hoffman (1967). The Brittle Strength of Orthotropic Materials. *J. Compos. Mat.*, **1**, 200-206.
- [20] S.W. Tsai et E.M. Wu (1971). A General Theory of Strength for Anisotropic Materials. *J. Compos. Mat.*, **5**, 58-80.
- [21] J.C. Halpin, K. Jerine et J.M. Whitney (1971). The Laminate Analogy for 2 and 3 Dimensional Composite Materials. *J. Compos. Mat.*, **5**, 36-49.
- [22] E. Reissner (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, **12**, 69-77.
- [23] R.D. Mindlin (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J. Appl. Mech.*, **18**, 336-343.
- [24] J.M. Whitney et N.J. Pagano (1970). Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *J. Appl. Mech.*, **37**, 1031-1036.
- [25] J.M. Whitney (1972). Stress analysis of thick laminated composite and sandwich plates. *J. Compos. Mat.*, **6**, 426-440.
- [26] N.J. Pagano (1969). Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending. *J. Compos. Mat.*, **3**, 398-411.
- [27] S.P. Timoshenko (1955). *Strength of Materials, Vol. 1*, 3ème édition. Von Nostrand , Princeton.
- [28] D. Young (1950). Vibration of Rectangular Plates by Ritz Method. *J. Appl. Mech.*, **17**, 448-453.
- [29] J.M. Whitney (1987). *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*. Technomic Publishing Company, Lancaster.
- [30] S. Timoshenko, D.H. Young et W. Weaver, Jr (1974). *Vibration Problems in Engineering*, 4ème édition. John Wiley & Sons, New York, Londres, Sydney, Toronto.
- [31] J.E. Ashton et M.E. Waddoups (1969). Analysis of Anisotropic Plates. *J. Compos. Mat.*, **3**, 148-165.
- [32] S. Timoshenko et J.M. Gere (1961). *Theory of Elastic Stability*. Mc Graw-Hill, New York.
- [33] J. Crank (1975). *The Mathematics of Diffusion*, 2ème édition. Oxford University Press, Oxford.
- [34] P. Cirese, M. Marchetti et S. Sgubini (1990). Design and manufacturing criteria for high precision composite antenna reflectors. Prediction of the residual distortions after the manufacturing process. *Compos. Struct.*, **16**, 209-235.

- [35] J.-M. Berthelot (1995). High mechanical performance composites and design of composite structures. *Polymers and Other Advanced Materials*, éds. P.N. Prasad et al., Plenum Press, New York.
- [36] K.H. Lo, R.M. Christensen et E.M. Wu (1977). A High-Order Theory of Plate Deformation. Part 2 : Laminated Plates. *J. Appl. Mech.*, **44**, *Trans. ASME, Ser. E*, **99**, 669-676.
- [37] B.N. Pandya et T. Kant (1987). Finite Element Analysis of Laminated Composite Plates using a High-Order Displacement Model. *Compos. Sci. Technol.*, **32**, 137-155.



# Index

## A

ADAMS D.F., 179, 637  
Additifs  
    agents anti UV, 25  
    agents de démoulage, 24  
    agents de fluage, 25  
    anti-retrait, 25  
    colorants, 24  
    lubrifiants, 24  
    pigments, 24  
Anisotropie, 121  
Appui simple, 355, 371, 401, 454, 490, 521, 542, 544, 549, 556  
Architecture des matériaux composites, 72, 267  
ASHTON J.E., 492, 638  
AZZI V.D., 257, 636

## B

BERTHELOT J.-M., 597, 639  
BORD C., 15, 637  
Bord libre, 357, 371, 546, 548, 561

## C

Caractéristiques à la rupture  
    des composites, 249  
    des fibres aramides, 48  
    des fibres céramiques, 50  
    des fibres de carbone, 47  
    des fibres de verre, 35  
    des fibres thermostables, 52, 53  
Chaîne, 27, 188, 334  
CHAMIS C.C., 161, 637  
Changement de base, 85, 88, 120, 196-200  
Charge critique de flambement

    avec cisaillement transverse, 517, 524  
    flexion cylindrique, 515  
    flexion des poutres, 520  
    plaques orthotropes, 525, 529  
    plaque sandwich, 519  
CHRETIEN G., 15, 637  
CHRISTENSEN R.M., 163, 171, 623, 637, 639  
Composites  
    à fibres, 5, 6  
    à particules, 5, 6  
Compounds, 68  
Conditions aux frontières  
    appui simple, 355, 371  
    bord libre, 357, 371  
    encastrement, 356, 372  
Constantes  
    d'élasticité, 119, 120, 123, 125, 202  
    de flexibilité, 120  
    de rigidité, 119, 127, 152, 158, 192, 197, 199  
    de souplesse, 120, 127, 153, 160, 191, 198, 199  
    réduites de rigidité, 214, 218  
Contraintes  
    à la rupture, 246, 249  
    principales, 95  
    de cisaillement, 94, 98, 101  
    matrice des contraintes, 101  
    planes, 100, 212  
    tenseur des contraintes, 91  
    transformation, 96, 102  
Convergence, 145  
Couche à renfort mat, 78, 343, 344, 460, 610

Couche à renfort tissu, 73, 78, 332, 344, 460, 610

Couche isotrope, 313

Couche orthotrope, 186, 314, 316

Couplage

flexion-torsion, 332, 333

membrane-flexion, 328, 332, 333

membrane-torsion, 322, 332, 333

traction-cisaillement, 317, 332, 333

CRANK J., 574, 638

Critères de rupture

en contraintes, 246, 255

en déformations, 252, 255

interactifs, 256

## D

Déformations

en cisaillement, 110

en un point, 104, 107, 110

matrice des déformations, 115

principales, 112

tenseur des déformations, 106

transformation, 116, 119

Délaminage, 236, 237

Directions principales, 95, 112

DONER D.R., 179, 637

DUEDAL D., 15, 637

## E

Élaboration des fibres

aramides, 48

de carbone, 44

de verre, 30

Éléments finis, 609, 611

Empilement des couches, 73, 313

Encastrement, 356, 372, 402, 492, 522, 543, 544, 546, 556

Énergie cinétique, 142, 360, 536, 553, 555

Énergie de déformation, 141, 358, 470, 489, 553, 587

Énergie potentielle totale, 141, 530

Ensimage, 33

Équation constitutive

avec cisaillement transverse, 368

prise en compte des phénomènes de dilatation, 578

théorie classique des stratifiés, 294

théorie des plaques sandwiches, 391

Équations de compatibilité, 109, 136

## F

Fibres

aramides, 47

autres, 52

composite à fibres, 10

céramiques, 49

de carbone, 43

de verre, 30

thermostables, 50

Filament, 25

Flambement

des plaques sandwiches, 519

des plaques stratifiées, 525, 529

des poutres, 520

formulation énergétique, 512

relations fondamentales, 506

suivant une flexion cylindrique, 515

Flexion cylindrique

avec cisaillement transverse, 405, 538

de plaques sandwiches, 416

flambement, 515

solution exacte, 410

théorie classique des stratifiés, 399, 536

Flexion de plaques croisées, 494

Flexion de plaques équilibrées, 500

Flexion des plaques stratifiées orthotropes

plaques en appuis simples, 454

plaques en appuis simples sur deux côtés, 465

plaques encastrées, 473

plaques sandwiches, 483

Flexion de plaques stratifiées symétriques, 489

Flexion des poutres

avec cisaillement transverse, 435

poutres sandwiches, 443

théorie classique des stratifiés, 423

Flexion 3-points, 427, 438

Flexion 4-points, 432, 441

Formulation énergétique

flambement, 512

théorie classique des stratifiés, 358

Fraction massique, 5, 12

Fraction volumique, 5, 11

Fréquences propres de vibration

flexion cylindrique, 536

plaques antisymétriques, 564

plaques équilibrées, 568

plaques orthotropes, 549, 553

plaques sandwiches, 540

plaques symétriques 561

vibration des poutres, 541

## G

GEIER M., 15, 637

GERE J.M., 533, 638

## H

HALPIN J.C., 178, 179, 338, 637, 638

HASHIN Z., 163, 164, 170, 637

HERMANS J.J., 171, 637

HILL R., 163, 164, 170, 256, 258, 638

HOFFMAN O., 259, 638

Homogénéisation, 149

## J

JERINE K., 338, 638

## K

KANT T., 623, 639

## L

LO K.H., 171, 623, 637, 639

Loi de Fick, 574

Loi de Hooke, 119, 151, 187

## M

Matériau anisotope, 121

Matériau isotrope, 123

Matériau orthotrope, 122, 186

Matériau unidirectionnel, 122, 149

Matériaux composites

classification, 5

composites à fibres, 5, 6

composites à particules, 5, 6

composites au sens large, 4

généralités, 3

pourquoi des composites, 7

Matrice

de flexibilité, 120

de rigidité, 119, 127, 152, 187, 195, 201, 295

de souplesse, 120, 127, 153, 187, 195, 201

Mats, 26, 40, 343

Mécanismes de rupture

délamination, 236, 237

rupture de la matrice, 228, 229, 236, 237

rupture de l'interface, 228, 229, 230, 236, 237

rupture des fibres, 228, 229, 237

Méthode de Ritz, 143, 470, 530, 554

Méthodes variationnelles, 143

MINDLIN R.D., 362, 638

Monofilament, 25

Module de flexion, 424

Modules

approches simplifiées, 171

approches théoriques, 160

bornes sur les modules, 163

de l'ingénieur, 153, 188

solutions exactes, 165

valeurs numériques, 179

Moments de flexion et de torsion, 276, 293, 352, 390

Moulage

au contact, 54

enroulement filamentaire, 63

par centrifugation, 62

par compression, 57, 58

par injection, 59

par projection, 55

par pultrusion, 61

sans pression, 54

sous vide, 56, 57

**N**

- Notation de l'ingénieur  
 contraintes, 101  
 déformations, 114  
 modules, 153, 188  
 Notation des stratifiés, 74

**P**

- PANDYA B.N., 623, 639  
 PAGANO N.J., 362, 410, 638  
 PARTRIDGE I.K., 15, 637  
 Phénomènes de dilatation  
   absorption d'humidité ou de gaz, 574  
   comportement de plaques rectangulaires, 588  
   effets thermiques, 573, 579, 593  
   équations du comportement des matériaux, 573  
   équations du comportement d'un stratifié, 577  
 Porosités, 14  
 Prédimensionnement  
   problème du prédimensionnement, 597  
   capot d'automobile, 619  
   coque de voilier, 614  
 Préformes, 28  
 Préimprégnés, 66  
 Prise en compte du cisaillement transverse  
   champs des déformations et contraintes, 362, 364, 366, 372  
   équation constitutive, 367  
   relations fondamentales, 369  
   théorie modifiée, 374  
 Problème de la mécanique des solides déformables, 130  
 Propriétés mécaniques  
   fibres aramides, 48  
   fibres céramiques, 50, 51  
   fibres de carbone, 47  
   fibres de verre, 34, 35  
   fibres thermostables, 51, 52  
   résines, 16, 17, 18, 19, 21

**R**

- REISSNER E., 362, 638  
 Relation fondamentale d'un milieu continu, 130, 132, 136  
 Relations fondamentales des plaques, 278  
 Relations fondamentales des plaques sandwiches, 392  
 Relations fondamentales des stratifiés  
   avec cisaillement transverse, 369  
   théorie classique, 349  
 Résines  
   de condensation, 17  
   époxydes, 18  
   furaniques, 18  
   phénoliques, 18  
   polyesters, 16  
   polyimides, 20  
   thermodurcissables, 16  
   thermoplastiques, 16, 19  
   thermostables, 20  
 Résultantes en membrane, 275, 292, 352, 390  
 Résultantes en cisaillement, 276  
 ROSEN B.W., 163, 637  
 Rupture  
   contraintes à la rupture, 246  
   critères, 245, 246, 252, 256  
   mécanismes, 228

**S**

- Sandwiches, 78, 386, 443, 483, 519, 524, 540, 597, 605, 614, 619  
 SENDECKYJ, G.P., 161, 637  
 Stratifiés  
   à couches isotropes, 331  
   alternés, 328  
   antisymétriques, 319, 351  
   croisés, 321, 414, 415, 540  
   croisés antisymétriques, 326, 489, 564, 590  
   croisés symétriques, 325, 440, 579  
   équilibrés, 328, 408, 500, 568, 590  
   notations, 74, 268

- orthotropes, 186, 314, 316, 454, 525, 553  
quelconques, 332  
symétriques, 76, 317, 350, 429  
Stratifil, 36
- T**
- Tenseur  
des contraintes, 91  
des déformations, 106  
généralités, 87
- Théorème des travaux virtuels, 139
- Théorie classique des stratifiés  
champ des contraintes, 291, 304, 353  
champ des déformations, 287, 303  
contraintes et déformations, 302  
équation constitutive, 294  
formulation énergétique, 358  
relations fondamentales, 349, 585  
résultantes et moments, 275, 276
- Théorie des plaques sandwiches  
champs des déformations et contraintes, 386, 388, 389  
équation constitutive, 390  
relations fondamentales, 392
- TIMOSHENKO S.R., 438, 476, 533, 638
- Tissus  
armures, 28  
caractérisation, 334  
chaîne, 27, 187  
modules, 338, 340
- multidirectionnels, 29  
satin, 27  
sergé, 27  
taffetas, 26  
trame, 26, 27, 189, 334  
Trame, 26, 27, 189, 334
- Tresses, 28
- TSAI S.W., 178, 179, 258, 259, 263, 637, 638
- V**
- Valeurs propres, 88  
Vecteurs propres, 88
- Vibrations  
des plaques, 540, 553, 561, 564  
des poutres, 541  
en flexion cylindrique, 536
- W**
- WADDOUPS M.E., 492, 638  
WEATHERHEAD R.G., 15, 637  
WEAVER W., 476, 638  
WEISS J., 15, 637  
WHITNEY J.M., 338, 362, 475, 638  
WU E.M., 259, 263, 623, 639
- Y**
- YOUNG D., 475, 476, 637



Imprimé en France par Jean-Marie Berthelot  
Les Clousures, Chemin des Horts  
05290 Vallouise  
Septembre 2013





L'ouvrage présente les **concepts fondamentaux** de l'analyse du comportement mécanique des matériaux composites, des stratifiés, des sandwiches et des structures composites.

L'ouvrage est divisé en cinq parties.

- La première partie considère les **éléments constituants** et l'**architecture** des matériaux composites.
- La deuxième partie rappelle les **bases fondamentales** nécessaires pour analyser le comportement mécanique des matériaux et structures composites.
- La troisième partie développe l'**analyse du comportement des matériaux composites en fonction des constituants**.
- La quatrième partie considère les concepts fondamentaux utilisés **pour analyser le comportement mécanique** des matériaux **stratifiés** et des matériaux **sandwiches**.
- **Flexion, flambement** et **vibrations** des structures composites sont analysés dans la cinquième partie.

Synthèse rigoureuse du comportement mécanique des composites, l'ouvrage "Mécanique des Matériaux et Structures Composites" constitue l'ouvrage de référence les étudiants de 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> cycles, les ingénieurs, chercheurs, techniciens supérieurs.

**Jean-Marie Berthelot est Professeur Honoraire des Universités. Il exerce ses compétences dans les domaines de la Mécanique des Matériaux et des Matériaux Composites. Spécialiste reconnu au niveau international, ses travaux dans le domaine du Comportement Mécanique des Matériaux Composites font l'objet de publications régulières dans des congrès et journaux scientifiques. Il est l'auteur de différents ouvrages sur la Mécanique des Solides et sur le Comportement des Matériaux Composites.**