

Estimación Valor en Riesgo de Portafolio mediante Cópula-Bayesian-GARCH-HMC

Jean Carlos Taipe Chávez

Diplomado en Finanzas Cuantitativas, Universidad del Cema

Resumen: La presente investigación estima el Valor en Riesgo (VaR) para un Portafolio de los ETF de AIA y AAXJ mediante la metodología Bayesian-Cópula t-GARCH estimado por Monte Carlo Hamiltoniano (HMC). Los resultados indican que el mejor modelo para el Valor en riesgo es Copula tstudent-Bayesian-GARCH(1,1)-HMC .

Palabras clave: Valor en Riesgo, GARCH, Inferencia Bayesiana, HMC.

1. Introducción

La investigación teórica que se basó en el VaR como medida de riesgo fue iniciada por Jorion (1997) y Dowd (1998), quienes aplicaron el enfoque del VaR basado en la gestión del riesgo emergente como el estándar de la industria por elección o por reglamento. La literatura académica existente relacionada con el VaR se centra principalmente en sobre la medición del VaR de diferentes métodos de estimación como el enfoque histórico, de Montecarlo y de varianza-covarianza.

Hay metodologías mas robustas para estimar el VaR del Portafolio y la finalidad de esta investigación es proponer el método Bayesiano con Cópulas para modelos de Volatilidad.

2. Metodología

2.1. Valor en Riesgo (VaR)

El VaR es creado por JP Morgan , es una técnica estadística que permite cuantificar la máxima pérdida esperada a un nivel de significancia α .

$$Pr[Q \leq VaR(\alpha)] \quad (1)$$

Se puede escribir mediante la integral (Danielsson, 2011).

$$\alpha = \int_{-\infty}^{VaR(\alpha)} f_q(x) dx = F_q(VaR(\alpha)) \quad (2)$$

Entonces el VaR se escribe como la inversa de la distribución de pérdidas con un nivel de significancia α .

$$VaR_\alpha = F_q^{-1}(\alpha) \quad (3)$$

2.2. Modelo ARMA

El modelo ARMA tiene la estructura que depende de los rezagos de la variable dependiente , que es la par-

te autoregresiva así como también depende del componente Medias Móviles

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + e_t + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_q e_{t-q} \quad (4)$$

2.3. Modelo GARCH-n y GARCH-t

Sea X_t $t = 1, \dots, T$ los rendimientos de un activo dado. Consideramos que GARCH (1,1) con innovación estándar es un distribución normal estándar (GARCH-n) o una distribución estandarizada de Student-t (GARCH t) respectivamente, donde el modelo es el siguiente.

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + a_t \\ a_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ \epsilon_t &\sim N(0, 1) \quad o \quad \epsilon_t \sim t_v \end{aligned}$$

2.4. Modelo GJR-n y GJR-t

En el modelo GJR (ver Glosten et al., 1993) , el modelo GJR-n es el modelo GJR con error de distribución normal estandar y GJR-t es con error de distribución t-student.

$$\begin{aligned} x_t &= u + a_t \\ a_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma s_{t-1} a_{t-1}^2 \\ \epsilon_t &\sim N(0, 1) \quad o \quad \epsilon_t \sim t_v \end{aligned}$$

$$\text{Donde } s_{t-1} = \begin{cases} 1, & a_{t-1} \leq 0 \\ 0, & a_{t-1} \geq 0 \end{cases}$$

2.5. Cópulas

$$\blacksquare C(X) = 0 \quad X \in [0, 1]^2$$

- $C(x, 1) = C(1, y) = 1$ para todo (x, y) en el cuadrado $[0, 1]^2$
- Para u_1, v_1, u_2, v_2 en $\mathbf{I} = [0, 1]^2$ $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$ se cumple lo siguiente :

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \quad (5)$$

2.5.1. Teorema de Sklar

El teorema de Sklar

$$H(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \quad (6)$$

Donde F_1 y F_2 son las distribuciones marginales continuas, H es una función de distribución conjunta con las marginales F_1 y F_2 . (Nelsen, 2006).

2.5.2. Familia de cópulas

- **Cópula Gaussiana :**

$$C(u) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)) \quad (7)$$

Donde Φ^{-1} es la distribución inversa de la distribución normal Φ_{Σ} .

- **Cópula t :** Para una cópula Bivariado t-student se muestra a continuación:

$$C_{\nu, \rho}^t(u, v) = \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(v)} \frac{(1 + \frac{a^2 - 2\rho ab + b^2}{\nu(1 - \rho^2)})^{-\frac{(\nu+2)}{2}}}{2\pi(1 - \rho^2)^{1/2}} \quad (8)$$

- **Cópulas Arquimedianas :** Son de clase asociativa de cópulas admite fórmula explícita, permite el modelamiento de dimensionalidad muy elevadas debido a un solo parámetro.

$$C(u, 1, \dots, u_d; \theta) = \psi^{[-1]}(\psi(u_1; \theta) + \dots + \psi(u_d; \theta); \theta) \quad (9)$$

Donde ψ es una función decreciente, continua y convexa pertenece al intervalo $[0, 1]$ x $\theta \rightarrow [0, \infty >$, θ es el parámetro de la cópula y $\psi^{[-1]}$, que es la pseudo inversa de ψ .

Cópula	Función de Distribución	Parámetro
Ali-Mikhail-Haq	$\frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$	$\theta \in [-1, 1 >$
Clayton	$[max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1; 0)]^{-1/\theta}$	$\theta \in [-1, \infty > / 0$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \log[1 + \frac{(exp(-\theta u) - 1)(exp(-\theta v) - 1)}{exp(-\theta) - 1}]$	$\theta = (R)/0$
Gumbel	$exp[-((-log(u))^{\theta} + (-log(v))^{\theta})^{1/\theta}]$	$\theta \in [1, +\infty >$
Joe	$1 - [(1-u)^{\theta} + (1-v)^{\theta} - (1-u)^{\theta}(1-v)^{\theta}]^{1/\theta}$	$\theta \in [1, +\infty >$

Cuadro 1: Cópulas Arquimedianas, Nelsen (2006)

2.6. Inferencia Bayesiana

El teorema de Bayes (1973) en la inferencia Bayesiana considera que θ es una variable aleatoria, se le asigna una distribución inicial, que se le llama (Prior) de la probabilidad $p(\theta)$, también se tiene la función Verosimilitud $p(y|\theta)$ que es obtenido por el conjunto de información $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ y este último depende del parámetro θ (O'Hagan Forser, 2004).

$$P(\theta|y) = \frac{P(y|\theta)P(\theta)}{P(y)} \quad (10)$$

2.7. Hamiltoniano Monte Carlo (HMC)

Sea $\theta \in R$ una variable aleatoria p-dimensional con densidad $\pi(\theta)$. El muestreo HMC considera una variable aleatoria independiente $\omega \in R^d$, tal que $\omega \sim N_d(0, M)$. La densidad de probabilidad negativa es :

$$H(\theta, \omega) = -L(\theta) + \frac{1}{2} \log(2\pi)^p |M| + \frac{1}{2} \omega^T M^{-1} \omega$$

Donde $L(\theta) = \log(\pi(\theta))$, θ representa la posición de la partícula, $-L$ describe la energía potencial, ω representa el momento de la energía cinética y Masa a que son análogos en la investigación como M la matriz de Masas. La función H representa la energía total del sistema, se conoce como la función Hamiltoniana.

3. Resultados y discusión

Los Rendimientos son forma continua en logaritmos para ambos ETF AAXJ y AIA.

$$R_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$$

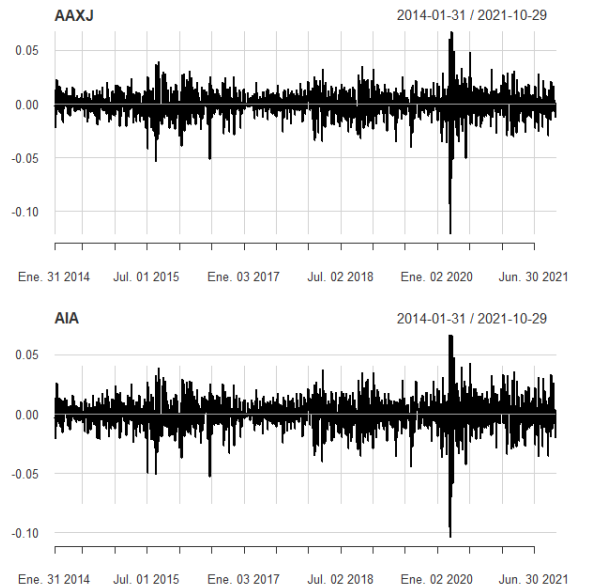


Figura 1: Retornos de AAXJ, AIA

Se propone el modelo ARMA para la ecuación de la media para cada ETF, el mejor modelo para cada uno se eligio mediante el Criterio de Información AIC el menor de iguala manera se hallo el Correlograma los dos ETF ,concluyendo que ambos son Autoregresivos de orden 2, AR(2). Revisando el Correlograma de los residuos al cuadrado se encontró que presenta términos ARCH y GARCH , se propone un GARCH(1,1) para cada activo, es decir:

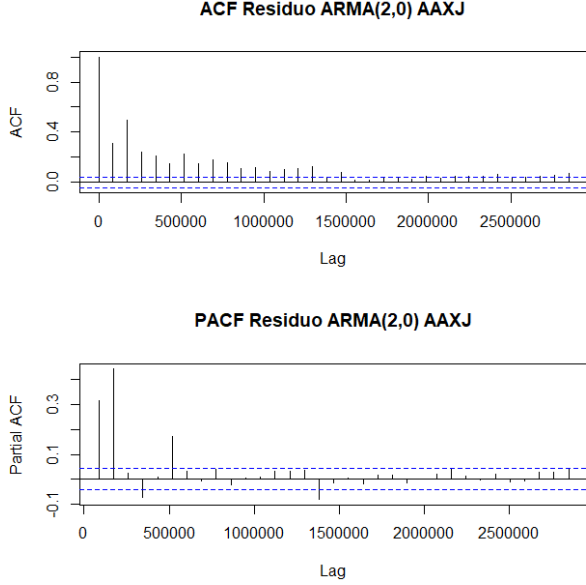


Figura 2: Correlograma de los residuos ARMA(2,0) AAXJ

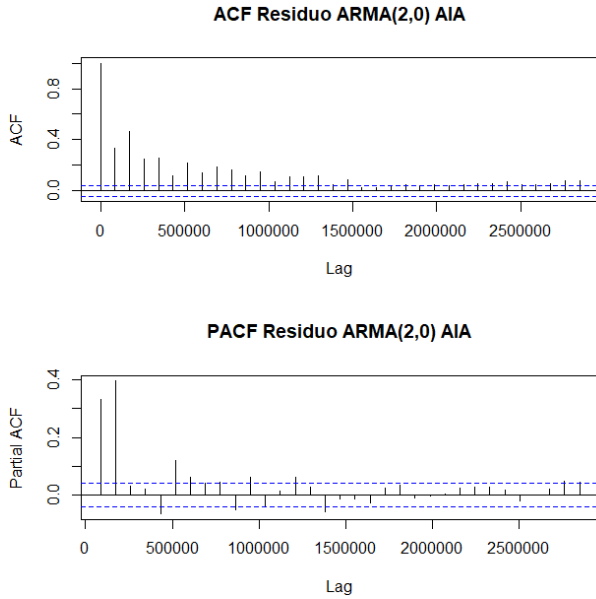


Figura 3: Correlograma de los residuos ARMA(2,0) AIA

El Modelo ARMA-GARCH(1,1) para los dos ETF AAXJ

y AIA quedarían planteados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}x_t &= \mu + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \epsilon_t \\ \epsilon_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ z_t &= \mu + \psi_1 z_{t-1} + \psi_2 z_{t-2} + u_t \\ u_t &= \sigma_t u_t \\ h_t^2 &= \gamma_0 + \gamma_1 a_{t-1}^2 + \omega h_{t-1}^2\end{aligned}$$

En los modelos propuestos ARMA-GARCH se estima los residuos y según el gráfico qqplot no son normales, tiene colas pesadas por lo que indicaria una distribución tstudent , se estimo los grados de libertad de los dos rendimientos mediante el ajuste de máxima verosimilitud de distribuciones univariadas. El valor estimado de los grados de libertad son 4.63 y 4.79 para los rendimientos de AAXJ y AIA respectivamente. Con los grados de libertad se estima las probabilidades para la mejor Cópula , en este caso la mejor seleccionada fue t-student.

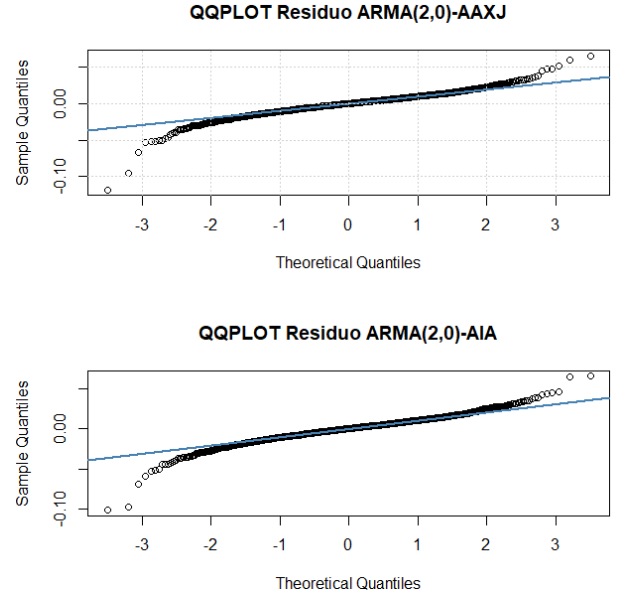


Figura 4: QQPlot de los residuos ARMA(2,0)

La Cópula Bivariada t-student fue tomada de (Parra Koodi, 2006).

$$f(u_1, u_2, \rho) = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{a^2 - 2\rho ab + b^2}{\nu(1-\rho^2)} \right)^{-\frac{(\nu+2)}{2}} \quad (11)$$

Donde u_1 y u_2 son los vectores de Cópulas de los retornos de AAXJ y AIA respectivamente , ν son los grados de libertad, ρ es la correlación entre u_1 y u_2 .

Las distribuciones Prior asumidas son:

$$\begin{aligned}\rho &\sim U(0, 0.9) \\ \nu &\sim Gamma(10, 10)\end{aligned}$$

Implementando la metodología Hamiltoniano Montecarlo (HMC) ,el valor mediano de los grados de Libertad estimado es 7.635685 y el valor mediano del coeficiente de correlación es 0.8999354.

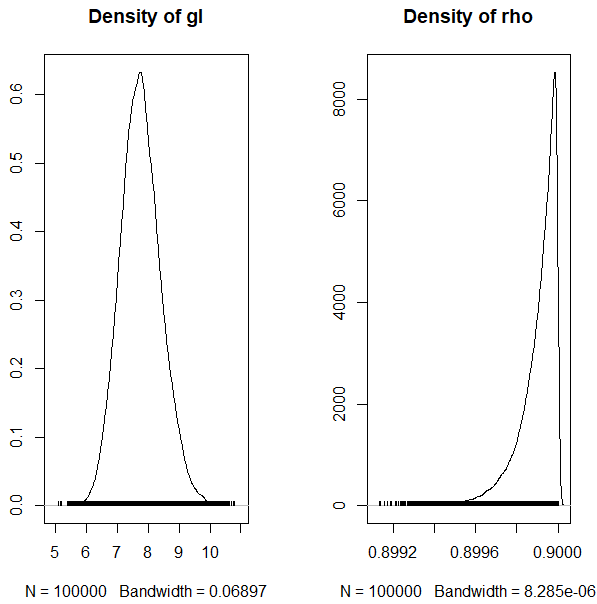


Figura 5: Distribución Posterior de v y ρ

Se observa que la autocorrelación esta convergiendo, de igual manera las cadenas de Markov , también pasaron el test de Estacionariedad , los grados de libertad y el coeficiente de correlación.

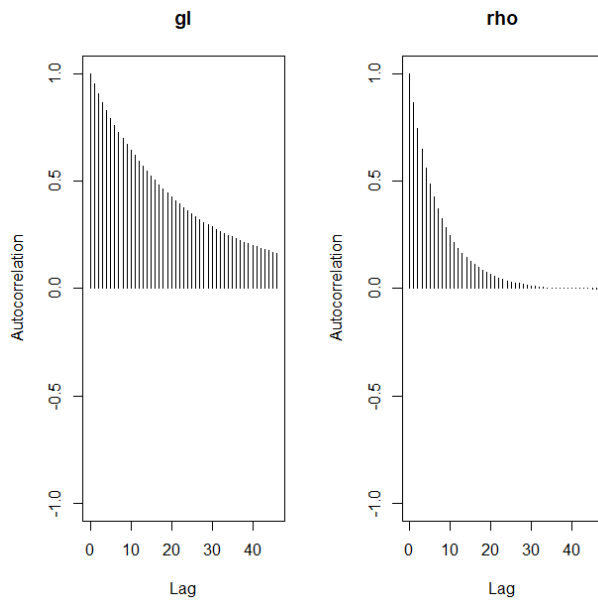


Figura 6: Autocorrelación de v y ρ

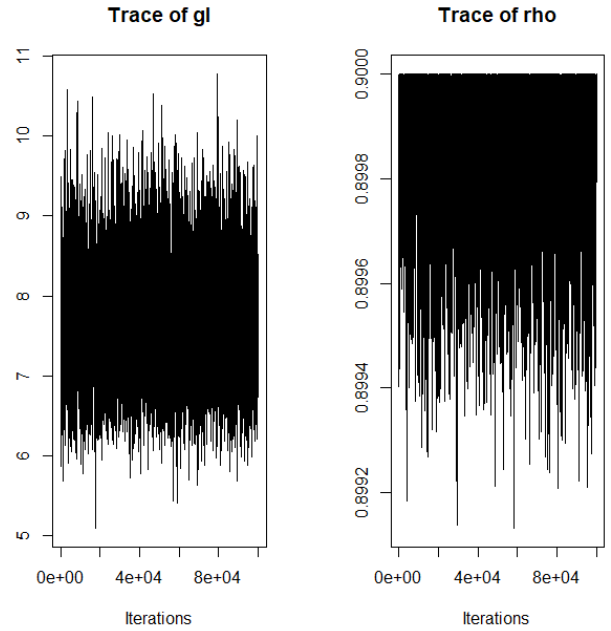


Figura 7: Cadenas HMC de v y ρ

Luego para el cálculo de VaR Bayesian-Cópula t-GARCH, se generaron 10,000 pares de valores a las posibles pérdidas para el momento $t + 1$ de la Cópula t . Las pérdidas se pondera con el error (σ_t) para cada activo en $t + 1$ mediante el ARMA-GARCH.

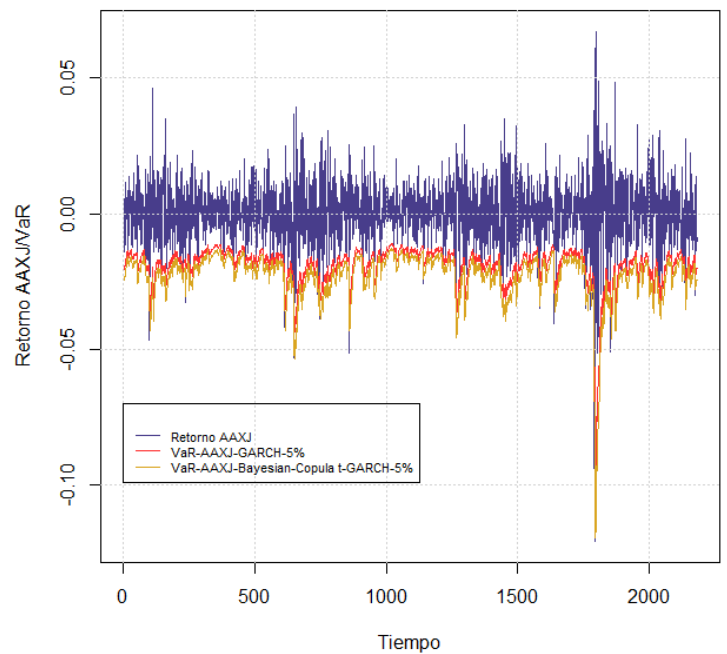


Figura 8: VaR Retorno AAXJ

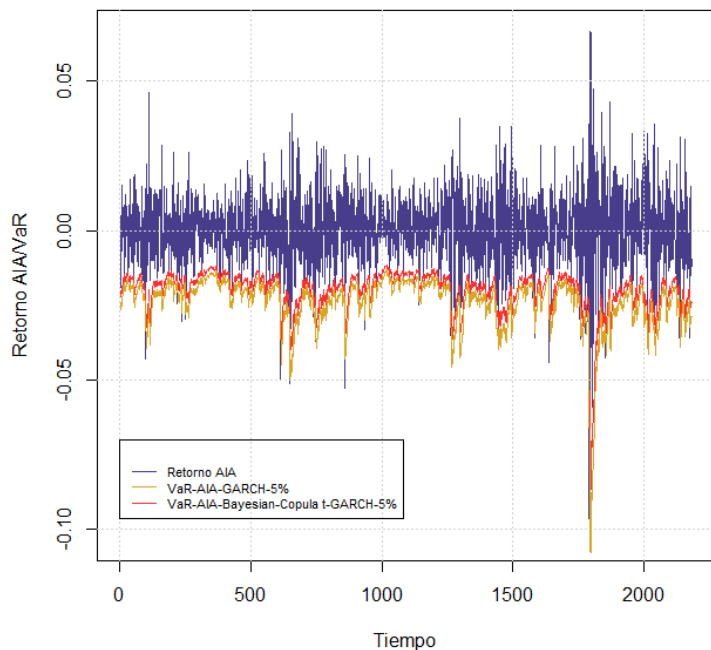


Figura 9: VaR Retorno AIA

El VaR Bayesian-Copula t-GARCH para los dos rendimientos AAXJ y AIA capturan mejor las pérdidas. El VaR del Portafolio-GARCH en comparación con VaR-Bayesian-Cópula t-GARCH el que que captura mejor las perdidas es el último.

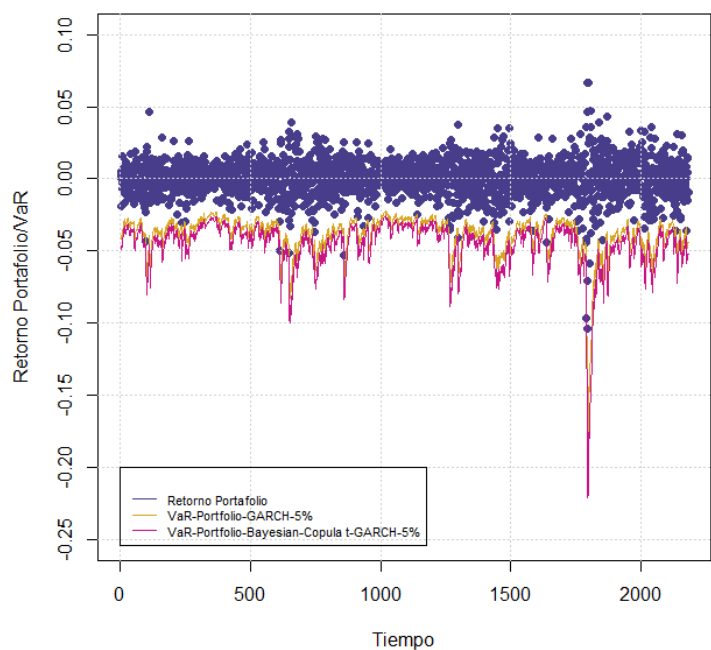


Figura 10: Comparación de Métodos de VaR Portafolio

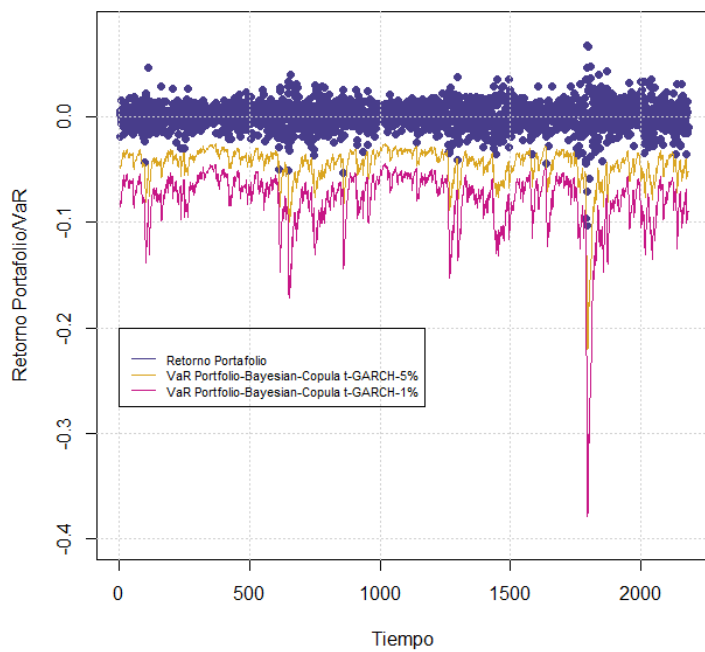


Figura 11: VaR Portafolio Bayesian-Copula t-GARCH

4. Conclusión

Se encuentra que el VaR de Portafolio mediante Cópula tstudent Bayesiana GARCH lograr capturar mejor las posibles pérdidas. La comparación del rendimiento del Portafolio del método de cópula tstudent Bayesiana GARCH (VaR Bayesian Cópula t-GARCH) con el del método tradicional VaR GARCH muestra que el modelo de cópula t Bayesiana GARCH captura el VaR con mayor éxito. El método de la cópula Bayesiana tiene la característica de flexibilidad en la distribución y además proponer la distribución Prior, es más apropiada para estudiar mercados financieros altamente volátiles.

Referencias

- [1] Huang, Jen-Jsung Lee, Kuo-Jung Liang, Hueimei Lin, Wei-Fu, 2009. "Estimating value at risk of portfolio by conditional copula-GARCH method,".
- [2] Sampid MG, Hasim HM, Dai H (2018) Refining value-at-risk estimates using a Bayesian Markov-switching GJR-GARCH copula-EVT model. PLoS ONE 13(6): e0198753.
- [3] Ang, A., Chen, J., 2002. Asymmetric correlations of equity portfolios. Journal of Financial Economics 63, 443–494.
- [4] Daniel Triana, Bayesian estimation for the calculation of Value at Risk (VaR) in models of financial series with relations of non-linear dependence in Colombia