

# Estimación del Value at Risk - Expected Shortfall de Portafolio mediante Cópulas Elípticas

Jean Taipe Chávez

[jtaipec@uni.pe](mailto:jtaipec@uni.pe)

Universidad Nacional de Ingeniería

## Resumen

La presente investigación estima el Valor en Riesgo (VaR) , Expected Shortfall (ES) para un Portafolio de 12 activos mediante la metodología Cópula elípticas Gaussiana y  $t$ student. Los resultados muestran que la Cópula  $t$ student tiene menor VaR y menor ES, es por lo tanto esta metodología mas conservadora para la gestión de un portafolio.

**Palabras clave:** Valor en Riesgo, Expected Shortfall, Copula, Markowitz

## 1. Introducción

La investigación teórica que se basó en el VaR como medida de riesgo fue iniciada por Jorion (1997) y Dowd (1998), quienes aplicaron el enfoque del VaR basado en la gestión del riesgo emergente como el estándar de la industria por elección o por reglamento. La literatura académica existente relacionada con el VaR se centra principalmente en sobre la medición del VaR de diferentes métodos de estimación como el enfoques histórico, de Montecarlo y de varianza-covarianza.

Hay metodologías mas robustas para estimar el VaR del Portafolio y la finalidad de esta investigación es proponer Cópulas para el calculo del Valor en Riesgo.

## 2. Metodología

### 2.1. Valor en Riesgo (VaR)

El VaR es creado por JP Morgan , es una técnica estadística que permite cuantificar la máxima perdida esperada a un nivel de significancia  $\alpha$ .

$$Pr[Q \leq VaR(\alpha)] \quad (1)$$

Se puede escribir mediante la integral (Danielsson, 2011).

$$\alpha = \int_{-\infty}^{VaR(\alpha)} f_q(x)dx = F_q(VaR(\alpha)) \quad (2)$$

Entonces el VaR se escribe como la inversa de la distribución de pérdidas con un nivel de significancia  $\alpha$ .

$$VaR_\alpha = F_q^{-1}(\alpha) \quad (3)$$

## 2.2. Expected Shortfall (ES)

Una crítica al VaR es que no nos dice nada sobre la cola de la distribución. Más allá del VaR, es posible que también queramos saber qué tan grande será la pérdida cuando tengamos un evento de superación. Usando el concepto de probabilidad condicional, podemos definir el esperado del valor de una pérdida como :

$$E(L|L \leq VaR] = ES \quad (4)$$

Nos referimos a esta pérdida esperada condicional como el Expected Shortfall (ES). El uso del término el Expected Shortfall no es universal. Muchos se refieren a esta estadística como condicional VaR (CVaR).

Si el beneficio esperado de un fondo puede describirse mediante una función de densidad de probabilidad dada por  $f(x)$ , y VaR es el VaR en el nivel de confianza  $\gamma$  podemos encontrar el Expected Shortfall como :

$$ES = -\frac{1}{1-\gamma} \int_{-\infty}^{VaR} xf(x)dx \quad (5)$$

## 2.3. Teoría de Markowitz

La teoría desarrollada por Markowitz (1952) se tiene el Retorno de Portafolio y la Varianza del portofolio como:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i R_i$$

$$Var(R_p) = w \Sigma w'$$

Para hallar los pesos óptimos del portafolio se puede maximizar el Ratio de Sharpe se asumira que la tasa libre de riesgo es cero.

$$Max \quad Ratio \ Sharpe = \frac{E(R_p)}{sd(R_p)}$$

## 2.4. Cópulas

- $C(X) = 0 \quad X \in [0, 1]^2$
- $C(x, 1) = C(1, y) = 1$  para todo  $(x, y)$  en el cuadrado  $[0, 1]^2$
- Para  $u_1, v_1, u_2, v_2$  en  $\mathbf{I} = [0, 1]^2$   $u_1 \leq u_2$  y  $v_1 \leq v_2$  se cumple lo siguiente :

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \quad (6)$$

### 2.4.1. Teorema de Sklar

El teorema de Sklar

$$H(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \quad (7)$$

Donde  $F_i$  son las distribuciones marginales continuas ,  $H$  es una función de distribución conjunta. (Nelsen,2006).

### 2.4.2. Familia de cópulas

- **Cópula Gaussiana :**

$$C(u) = \Phi_{\Sigma}(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_d)) \quad (8)$$

Donde  $F_i^{-1}$  es la distribución inversa de la distribución marginales.

- **Cópula t :** Para una cópula Bivariado t-student se muestra a continuación:

$$C_{\nu, \rho}^t(u, \nu) = \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(\nu)} \frac{(1 + \frac{a^2 - 2\rho ab + b^2}{\nu(1 - \rho^2)}) - \frac{(\nu+2)}{2}}{2\pi(1 - \rho^2)^{1/2}} \quad (9)$$

- **Cóputas Arquimedianas** : Son de clase asociativa de cóputas admite fórmula explícita, permite el modelamiento de dimensionalidad muy elevadas debido a un solo parámetro.

$$C(u, 1, \dots, u_d; \theta) = \psi^{[-1]}(\psi(u_1; \theta) + \dots + \psi(u_d; \theta); \theta) \quad (10)$$

Donde  $\psi$  es una función decreciente, continua y convexa pertenece al intervalo  $[0, 1]$  x  $\theta \rightarrow [0, \infty >$ ,  $\theta$  es el parámetro de la cóputa y  $\psi^{[-1]}$ , que es la pseudo inversa de  $\psi$ .

Cóputa	Función de Distribución	Parámetro
Ali-Mikhail-Haq	$\frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}$	$\theta \in [-1, 1 >$
Clayton	$[max u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1; 0]^{-1/\theta}$	$\theta \in [-1, \infty > / 0$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \log[1 + \frac{(\exp(-\theta u)-1)(\exp(-\theta v)-1)}{\exp(-\theta)-1}]$	$\theta = (R)/0$
Gumbel	$\exp[-((- \log(u))^{\theta} + (- \log(v))^{\theta})^{1/\theta}]$	$\theta \in [1, +\infty >$
Joe	$1 - [(1-u)^{\theta} + (1-v)^{\theta} - (1-u)^{\theta}(1-v)^{\theta}]^{1/\theta}$	$\theta \in [1, +\infty >$

Tabla 1: Cóputas Arquimedianas , Nelsen (2006)

### 3. Resultados y discusión

Los Rendimientos son forma discreta en logaritmos para los retornos de AAPL, NFLX, MSFT, TSLA, GOOG, FB, KO, IBM, ABEV, DIS, F, BAC del 01-01-2013 hasta 01-01-2017 con frecuencia diaria se tomo estos periodos debido que no se esta tomando la crisis financiera por ejemplo debido que la distribuciones de los retornos en esos casos podrían ser distribuciones extremas y habría mucha volatilidad y clusters.

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

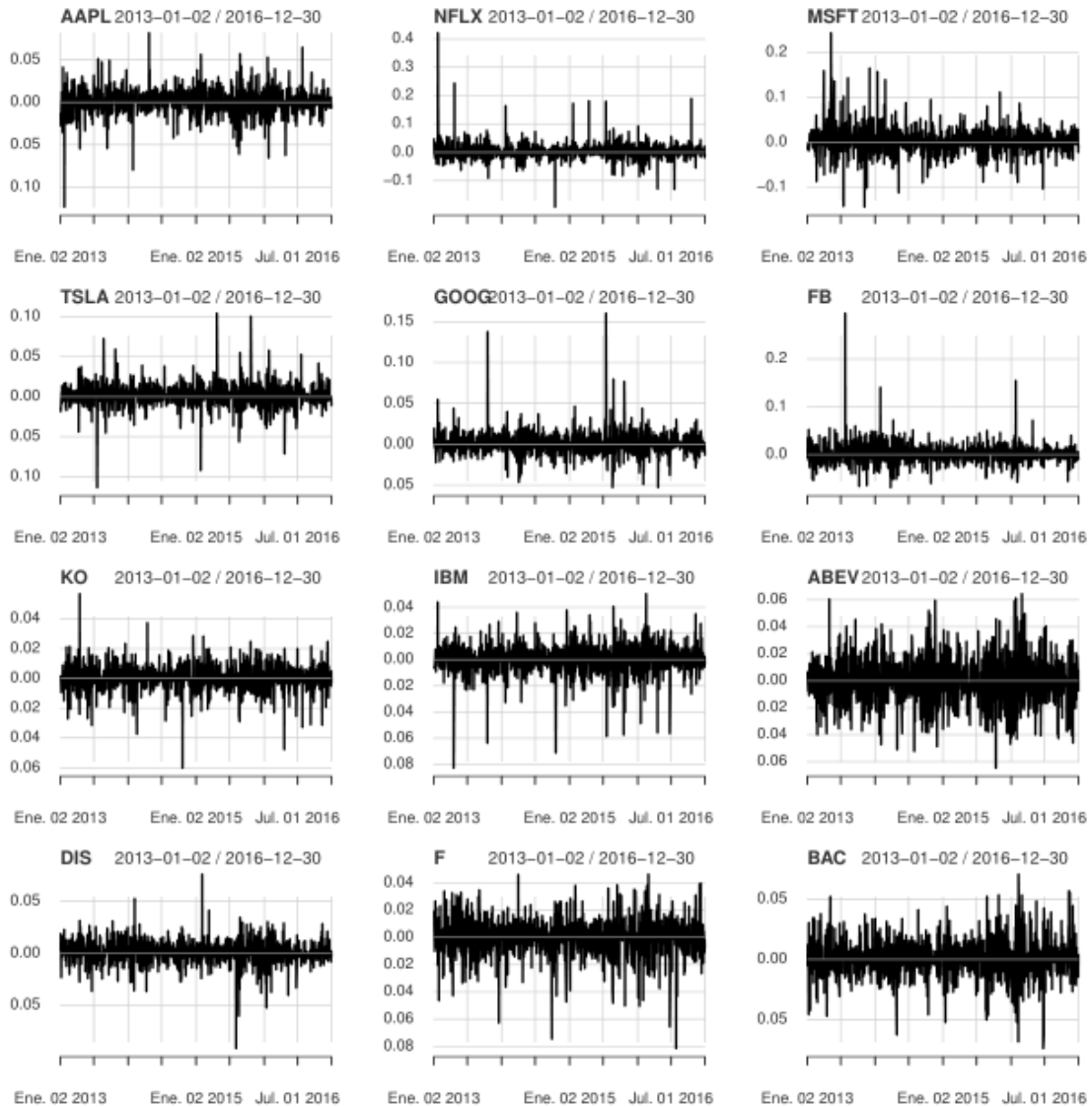


Figura 1: Retornos

Se hizo el ajuste por distribución para los 12 activos con las siguientes distribuciones Normal, tstudent scaled, Logística y Cauchy, se muestra a continuación las métricas de log verosimilitud, Criterio de Información AIC y el Criterio de Información BIC para los 12 activos, se tomara como criterio el mayor logaritmo de la Verosimilitud para elegir la mejor distribución.

Tabla 2: Fit distribución Retornos

AAPL						
	loglike	AIC	BIC	loglike	AIC	BIC
normal	2745.326	-5486.651	-5476.822	2023.815	-4043.631	-5476.822
tstudent scaled	2822.172	-5638.344	-5623.600	2281.790	-4557.580	-5623.600
logistica	2809.664	-5615.329	-5605.499	2219.752	-4435.504	-5605.499
cauchy	2719.348	-5434.695	-5424.866	2209.170	-4414.340	-5424.866
MSFT						
	loglike	AIC	BIC	loglike	AIC	BIC
normal	2054.264	-4104.527	-4094.698	2798.164	-5592.327	-5582.498
tstudent scaled	2179.632	-4353.265	-4338.520	2924.689	-5843.378	-5828.634
logistica	2149.059	-4294.118	-4284.289	2898.236	-5792.472	-5782.643
cauchy	2209.170	-4197.838	-4188.009	2834.385	-5664.769	-5654.940
GOOG						
	loglike	AIC	BIC	loglike	AIC	BIC
normal	2816.290	-5628.581	-5618.751	2415.264	-4826.527	-4816.698
tstudent scaled	2959.281	-5912.562	-5897.818	2568.178	-5130.357	-5115.612
logistica	2935.165	-5866.330	-5856.501	2544.008	-5084.016	-5074.186
cauchy	2834.385	-5664.769	-5654.940	2473.232	-4942.463	-4932.634
KO						
	loglike	AIC	BIC	loglike	AIC	BIC
normal	3285.155	-6566.310	-6556.480	3016.856	-6029.711	-6019.882
tstudent scaled	3347.932	-6689.864	-6675.119	3103.107	-6200.213	-6185.469
logistica	3338.865	-6673.729	-6663.900	3088.464	-6172.928	-6163.099
cauchy	3245.590	-6487.180	-6477.350	2992.427	-5980.854	-5971.024
ABEV						
	loglike	AIC	BIC	loglike	AIC	BIC
normal	2613.039	-5222.077	-5212.248	3032.207	-6060.414	-6050.585
tstudent scaled	2618.468	-5230.937	-5216.193	3104.695	-6203.389	-6188.645
logistica	2618.227	-5232.454	-5222.624	3094.167	-6184.335	-6174.506
cauchy	2472.256	-4940.511	-4930.682	2997.679	-5991.358	-5981.528
F						
	loglike	AIC	BIC	loglike	AIC	BIC
normal	2824.332	-5644.664	-5634.834	2712.401	-5420.802	-5410.972
tstudent scaled	2865.785	-5725.571	-5710.826	2751.003	-5496.006	-5481.262
logistica	2861.852	-5719.703	-5709.874	2747.378	-5490.756	-5480.927
cauchy	2750.767	-5497.535	-5487.705	2642.917	-5281.833	-5272.004

Como se muestra en la Tabla 2 , los ajuste por distribución para los 12 Retornos AAPL, NFLX, MSFT, TSLA, GOOG, FB, KO, IBM, ABEV, DIS, F, BAC se toma en cuenta para elegir el mejor ajuste de distribución el mayor logaritmo de la Verosimilitud, por lo tanto para los 12 retornos se ajustaria mejor a la distribución tstudent scaled.

Figura 2: Fit Distribución tstudent scaled AAPL

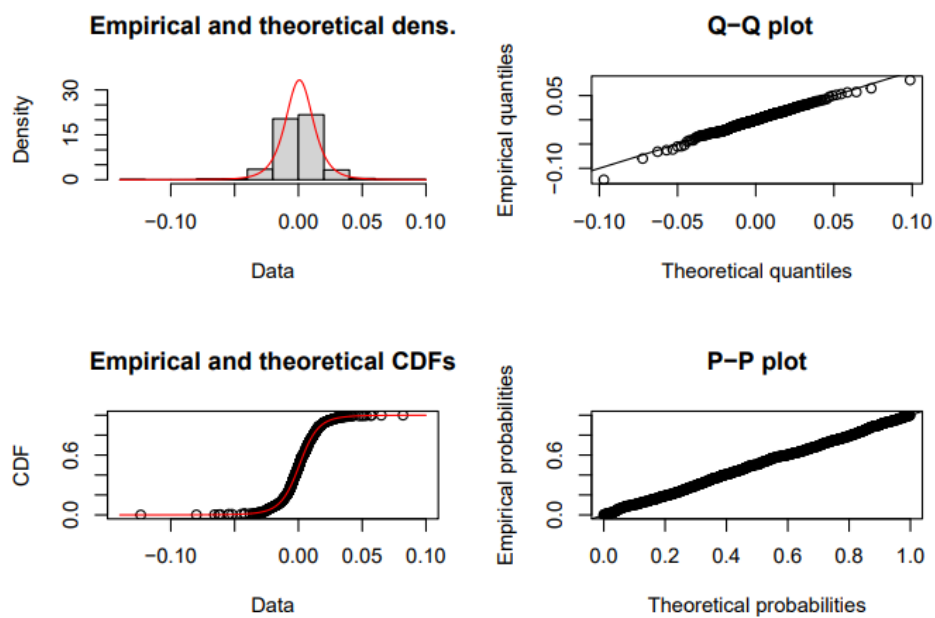


Figura 3: Fit Distribución tstudent scaled NFLX

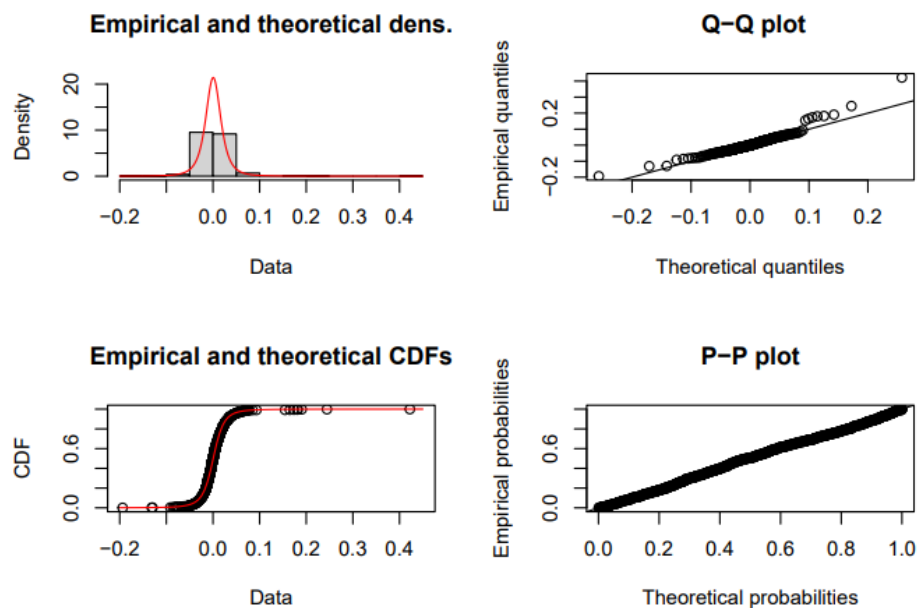


Figura 4: Fit Distribución tstudent scaled MSFT

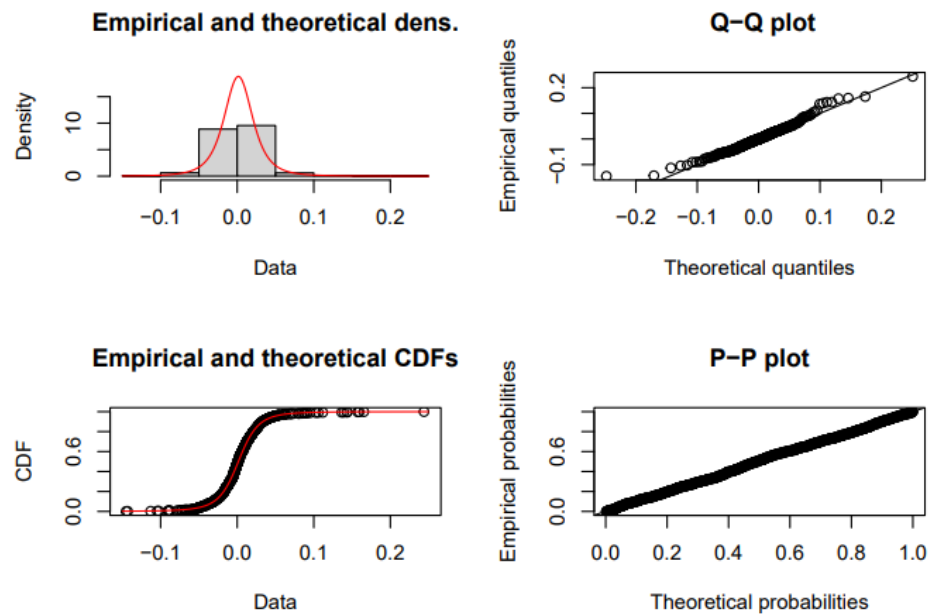


Figura 5: Fit Distribución tstudent scaled TSLA

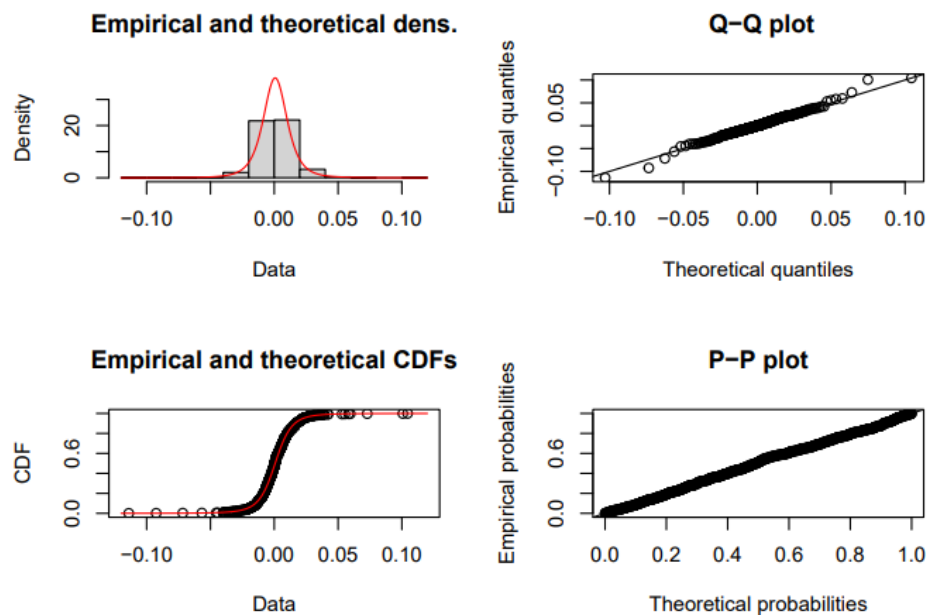




Figura 6: Fit Distribución tstudent scaled GOOG

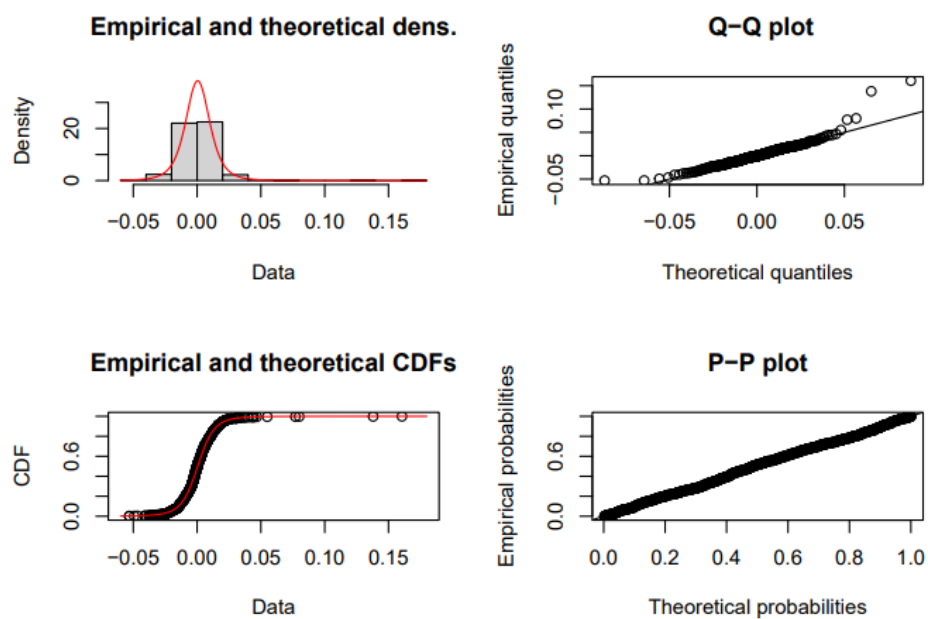


Figura 7: Fit Distribución tstudent scaled FB

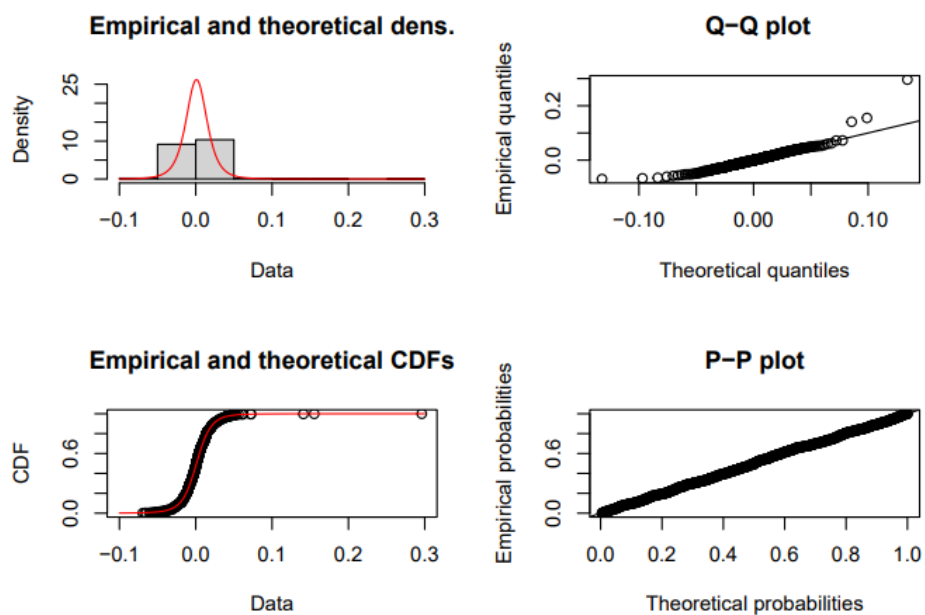


Figura 8: Fit Distribución tstudent scaled KO

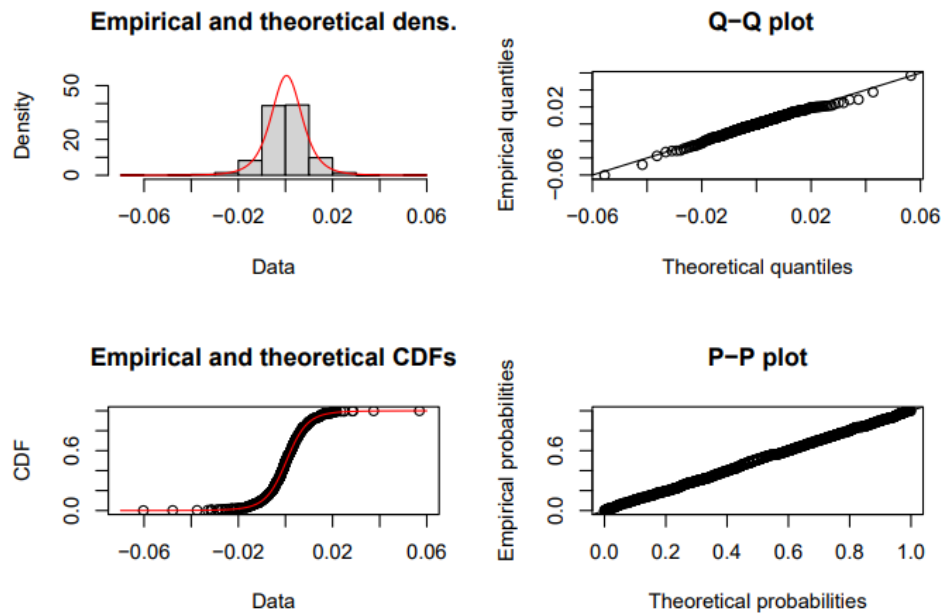


Figura 9: Fit Distribución tstudent scaled IBM

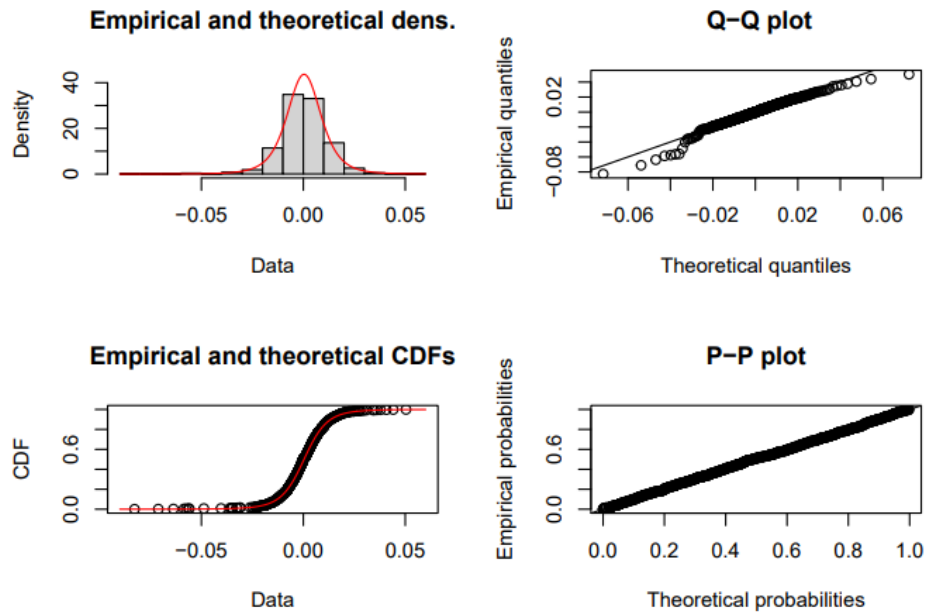


Figura 10: Fit Distribución tstudent scaled ABEV

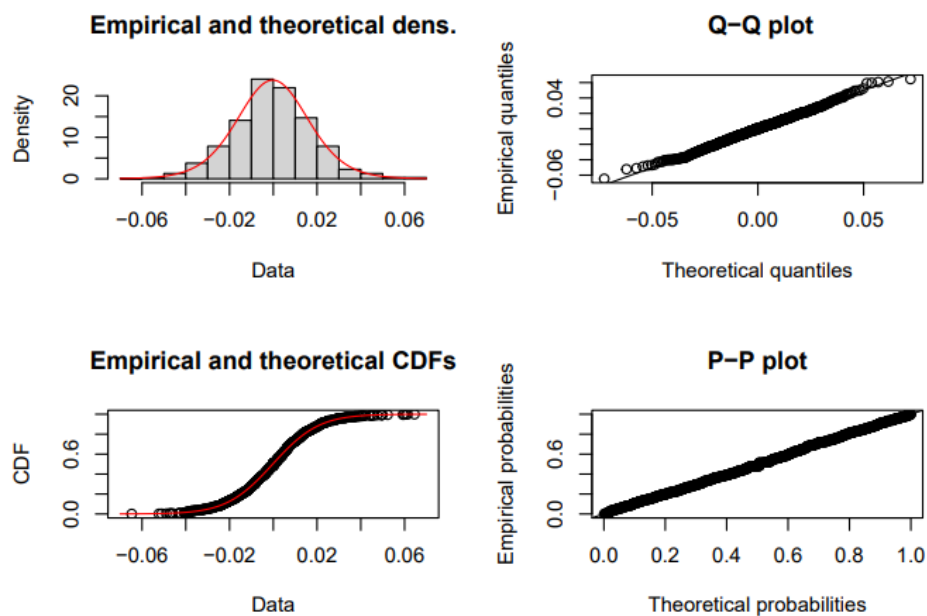


Figura 11: Fit Distribución tstudent scaled DIS

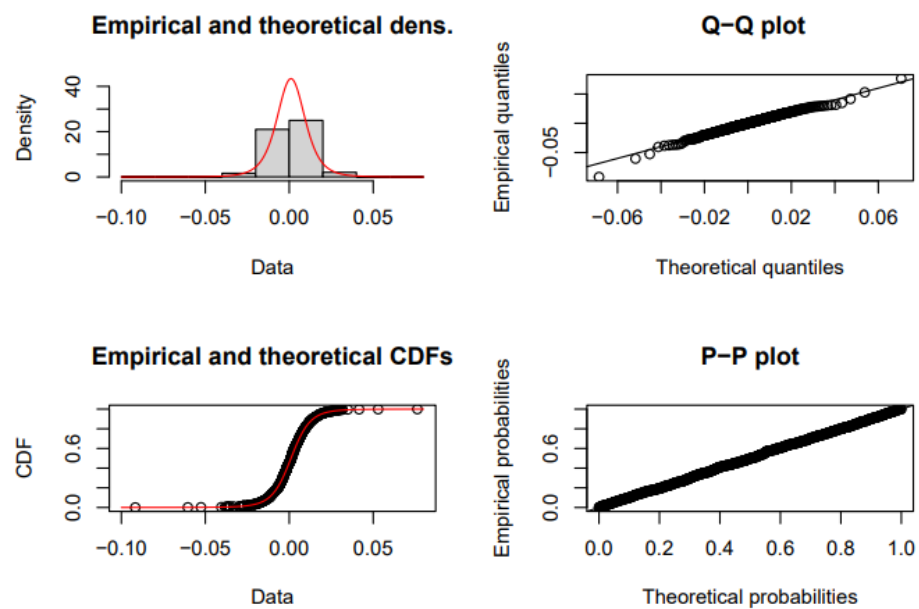


Figura 12: Fit Distribución tstudent scaled F

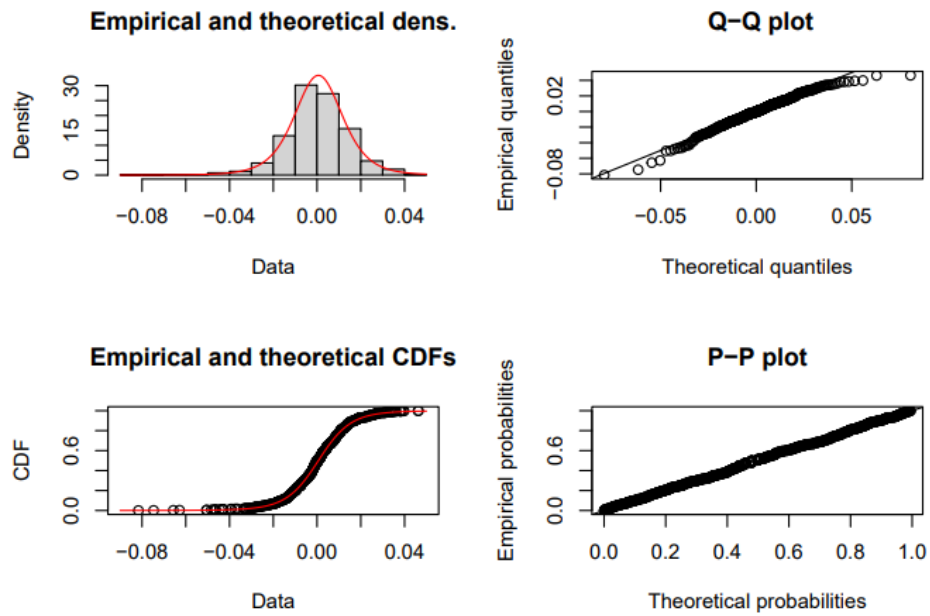


Figura 13: Fit Distribución tstudent scaled BAC

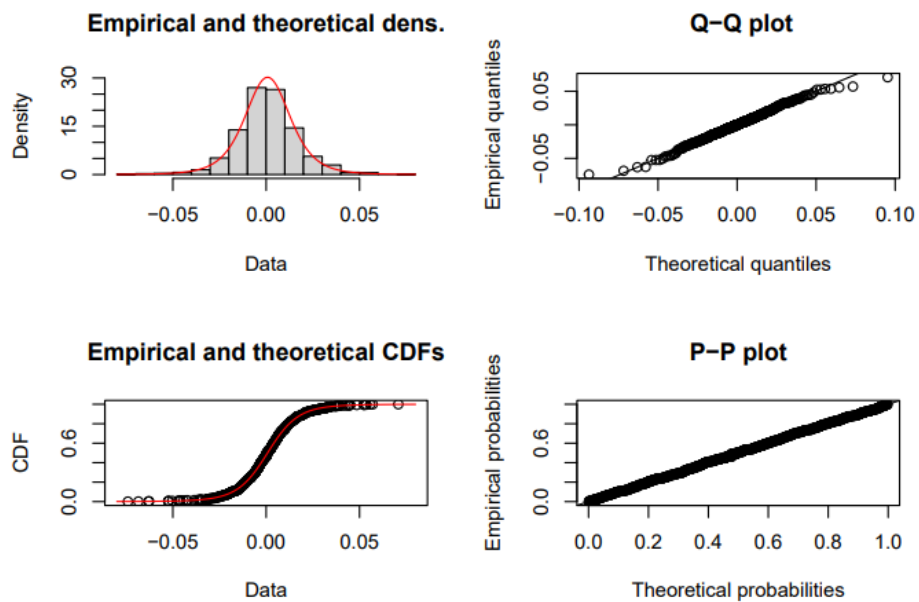


Tabla 3: Parámetros de las mejores distribuciones tstudent scaled de los retornos

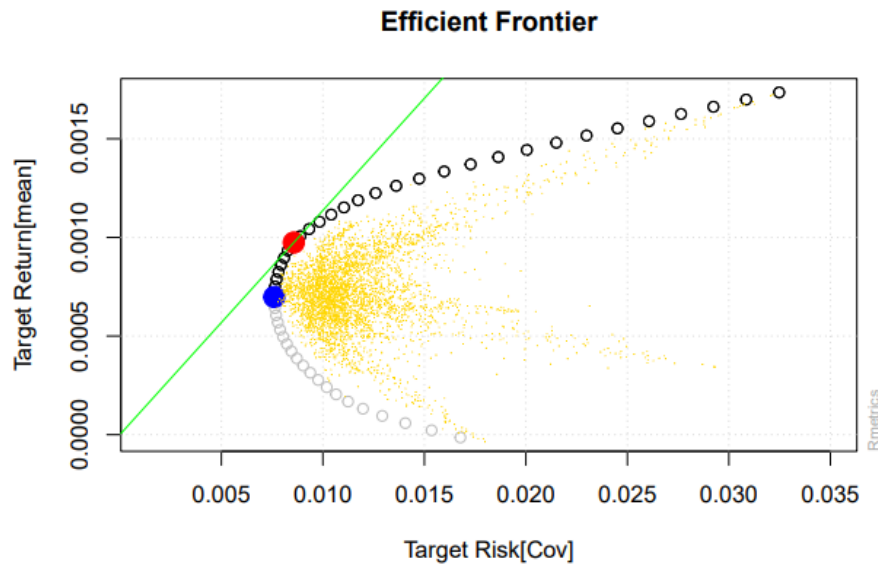
	parámetros		
	df	mean	sd
AAPL	3.97419	0.00077	0.01126
NFLX	2.75435	0.00057	0.01704
MSFT	3.02616	0.00154	0.01955
TSLA	3.97419	0.00077	0.01126
GOOG	3.87180	0.00045	0.00045
FB	3.74521	0.00099	0.01425
KO	4.14170	0.00047	0.00047
IBM	4.10616	0.00035	0.00860
ABEV	11.19968	-0.00026	0.01640
DIS	4.27004	0.00103	0.00867
F	4.84939	0.00062	0.01133
BAC	4.51801	0.00075	0.01249

Para los 12 activos la mejor distribución ajustada fue la tstudent scaled, como se muestra en la Tabla 3, sus parámetros de grados de libertad, media y desviación estándar; esto se usará para las copula Gaussiana y tstudent como marginales.

Para la Cópula Gaussiana y la Cópula tstudent es con 2000 simulaciones para los activos.

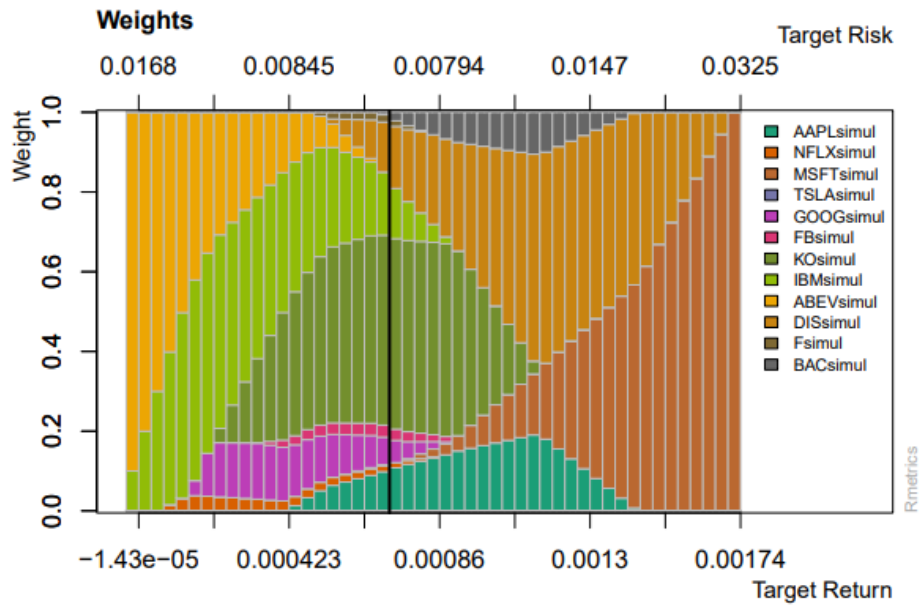
Para el Portafolio simulado por Copula Gaussiana se halla los pesos óptimos maximizando el Ratio de Sharpe de los retornos simulados, a continuación se muestra la Figura 14 la frontera eficiente con el Riesgo vs el Retorno del Portafolio de los datos de la Copula Gaussiana simulada.

Figura 14: Frontera Eficiente



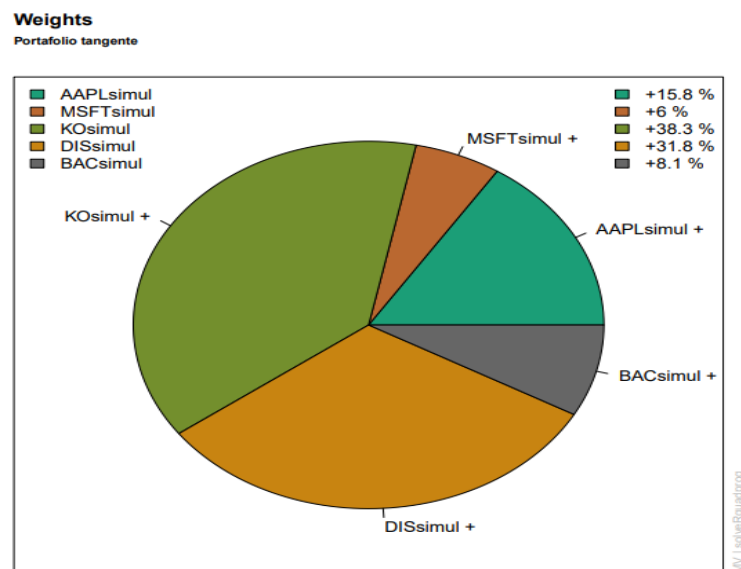
Por otra parte en la Figura 15 se tiene la composición de los pesos estimados para el portafolio de la Copula Gaussiana.

Figura 15: Pesos Simulados Copula Gaussiana



Optimizando el ratio de Sharpe se tiene los pesos óptimos de los retornos simulados de la Copula Gaussiana en la Figura 16.

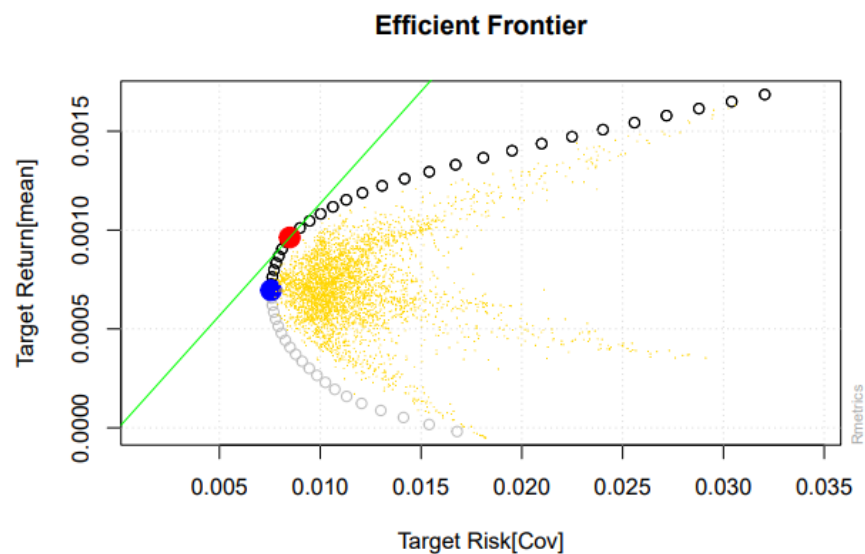
Figura 16: Pesos óptimos Portafolio Copula Gaussiana



Entonces para el portafolio simulado mediante Copula Gaussiana los pesos optimos serían para AAPL,NFLX, MSFT, TSLA, GOOG, FB, KO, IBM, ABEV, DIS, F, BAC: 15.80 %, 0.00 %, 6.00 %, 0.00 %, 0.00 %, 0.00 %, 38.30 %, 0.00 %, 0.00 %, 31.80 %, 0.00 %, 8.10 % respectivamente

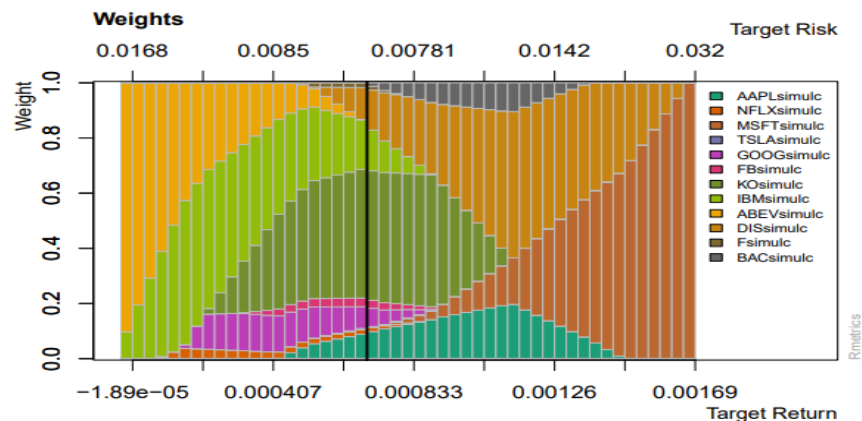
Para el Portafolio simulado por Copula tstudent se halla los pesos optimos maximizando el Ratio de Sharpe de los retornos simulados, a continuación se muestra la Figura 17 la frontera eficiente con el Riesgo vs el Retorno del Portafolio de los datos de la Copula Gaussiana simulada.

Figura 17: Frontera Eficiente



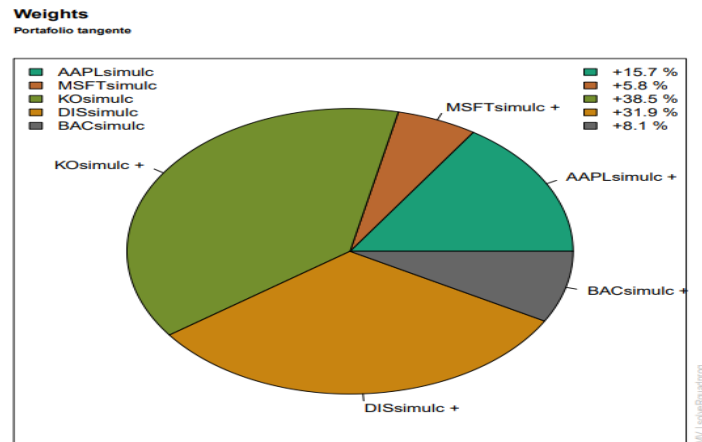
Por otra parte en la Figura 18 se tiene la composición de los pesos estimados para el portafolio de la Copula tstudent.

Figura 18: Pesos Simulados Copula tstudent



Optimizando el ratio de Sharpe se tiene los pesos óptimos de los retornos simulados de la Copula tstudent en la Figura 19.

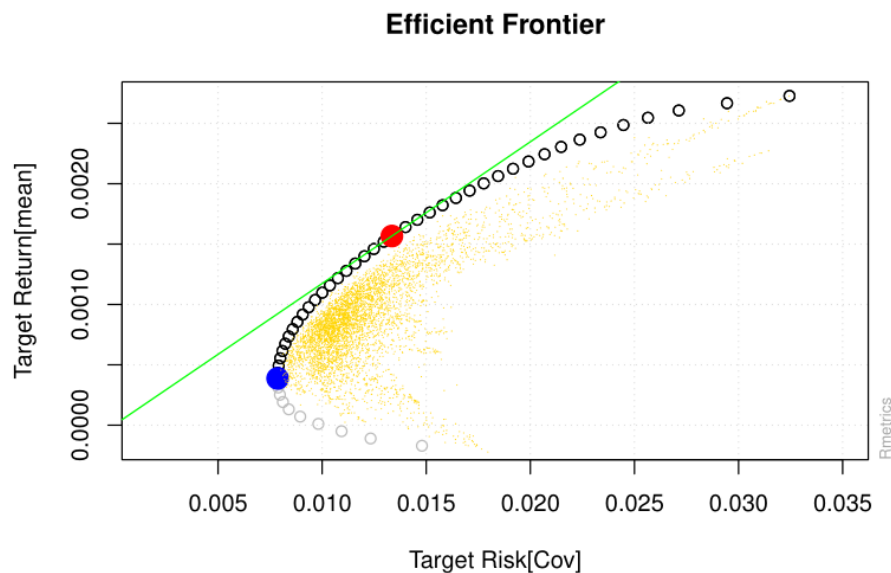
Figura 19: Pesos óptimos Copula tstudent



Entonces para el portafolio simmulado mediante Copula tstudent los pesos óptimos serían para AAPL,NFLX, MSFT, TSLA, GOOG, FB, KO, IBM, ABEV, DIS, F, BAC: 15.70 %, 0.00 %, 5.80 %, 0.00 %, 0.00 %, 0.00 %, 38.50 %, 0.00 %, 0.00 %, 31.90 %, 0.00 %, 8.10 % respectivamente.

Para el Portafolio Histórico se halla los pesos óptimos maximizando el Ratio de Sharpe de los retornos históricos, a continuación se muestra la Figura 20 la frontera eficiente con el Riesgo vs el Retorno del Portafolio Histórico.

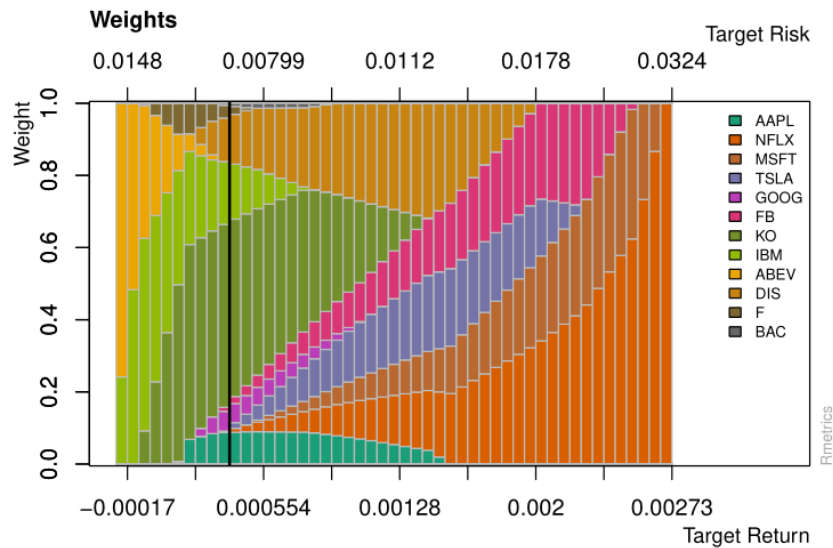
Figura 20: Frontera Eficiente





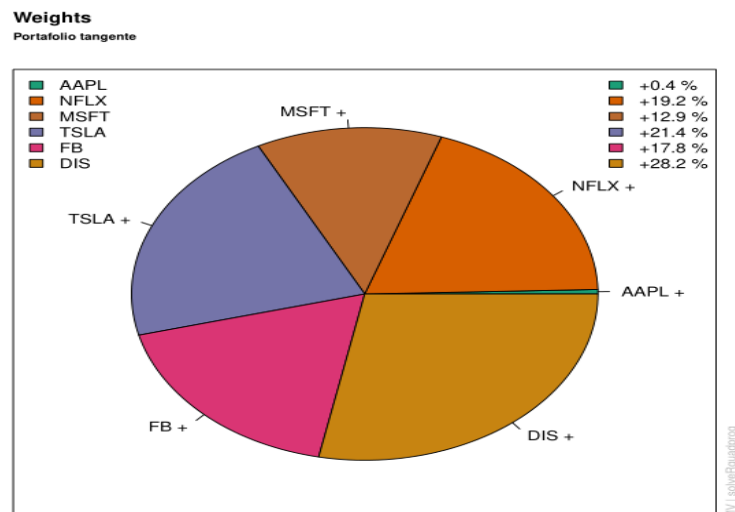
Por otra parte en la Figura 21 se tiene la composición de los pesos estimados para el portafolio Histórico.

Figura 21: Pesos de Metodo Historico



Optimizando el ratio de Sharpe se tiene los pesos óptimos de los retornos Históricos en la Figura 22.

Figura 22: Pesos óptimos Portafolio Histórico



Entonces para el portafolio Histórico los pesos óptimos serían para AAPL,NFLX, MSFT, TSLA, GOOG, FB, KO, IBM, ABEV, DIS, F, BAC: 0.40 %, 19.20 %, 12.90 %, 21.40 %, 0.00 %, 17.80 %, 0.00 %, 0.00 %,0.00 %, 28.20 %, 0.00 %, 0.00 % respectivamente.

Se halló el Valor en Riesgo y Expected Shortfall mediante el método histórico, Copula Gaussiana y Copula tstudent se muestra a continuación en la Tabla 4.

Tabla 4: Resumen de los modelos Copula Gaussiana -Copula tstudent, Método Histórico al 1 % de significancia

Retornos	Histórico		Cópula Gaussiana		Cópula tstudent	
	VaR	ES	VaR	ES	VaR	ES
AAPL	-0.04221	-0.06215	-0.03806	-0.05056	-0.03806	-0.05056
NFLX	-0.06827	-0.09954	-0.07928	-0.12808	-0.07858	-0.12773
MSFT	-0.07521	-0.10171	-0.09485	-0.11726	-0.08990	-0.11635
TSLA	-0.03823	-0.05653	-0.04167	-0.06260	-0.04086	-0.05977
GOOG	-0.03510	-0.04242	-0.03770	-0.05043	-0.03585	-0.04726
FB	-0.05140	-0.05801	-0.05390	-0.06950	-0.05179	-0.06910
KO	-0.02694	-0.03498	-0.02387	-0.02974	-0.02293	-0.03000
IBM	-0.03532	-0.05515	-0.03064	-0.04248	-0.02943	-0.04166
ABEV	-0.04077	-0.04788	-0.04292	-0.05151	-0.04171	-0.05055
DIS	-0.03312	-0.04536	-0.02844	-0.03890	-0.02743	-0.03713
F	-0.04439	-0.05626	-0.03665	-0.04491	-0.03574	-0.04400
BAC	-0.04600	-0.05596	-0.03985	-0.05658	-0.03837	-0.05354
Portafolio	-0.03471	-0.04230	-0.02030	-0.02602	-0.02022	-0.02506

### 3.1. Conclusiones

En las distribuciones Marginales que se usaron para la Cópula Gaussiana y tstudent para los 12 activos se usaron la distribución tstudent scaled, debido que dicha distribución se ajustó mejor a cada retorno.

Los pesos óptimos de los 3 portafolios de la Cópula Gaussiana, Cópula tstudent y el Método Histórico se hallaron mediante la optimización del Ratio de Sharpe.

La estimación al 1 % de significancia del Value at Risk y el Expected Shortfall de la Copula Gaussiana y la Copula tstudent para el portafolio muestran tener menor riesgo que el método histórico, esta diferencia es debido a la asignación de los pesos óptimos para los 3 portafolios.

El Expected Shortfall calculado del método de la Cópula Gaussiana proporciona un nivel de riesgo ligeramente mayor que el Expected Shortfall calculado del método de la Cópula tstudent, de igual manera con el VaR de ambas Cópulas.

El uso del Expected Shortfall basado en la Cópula tstudent es, por lo tanto, más razonable para los inversores para gestionar de forma conservadora su cartera.

Faltaría en esta investigación proponer para los retornos una estructura ARMA-GARCH y las Cópulas Elipticas.