# (105) Reaction wheel pendulum.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a \cdot \sin(x_1) - b \cdot u \\ \dot{x}_3 = -a \cdot \sin(x_1) + c \cdot u \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_1 : \text{angle du pendule} \\ x_2 : \text{vitesse angulaire (pendule)} \\ x_3 : \text{vitesse de rotation du disque.} \\ a = 10 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

① voir .py.

② $y = x_1$

$\dot{y} = x_2$

$\ddot{y} = a \sin(x_1) - b \cdot u$ on prend $u = \dfrac{a \sin x_1 - v}{b}$

pour faire disparaître $\sin(x_1)$ et $b$ $\Rightarrow$ $\ddot{y} = v$

d'où $v = \underbrace{(y_d - y)}_{e} + 2 \cdot \underbrace{(\dot{y}_d - \dot{y})}_{\dot{e}} + \underbrace{\ddot{y}_d}_{\ddot{e}}$ avec $y_d = y$ désiré

$e$ : error

$\Rightarrow e + 2\dot{e} + \ddot{e} = 0 \rightarrow$ l'erreur converge vers 0.

$\Rightarrow (y - y_d) \xrightarrow{\text{conv.}} 0$

$\Leftrightarrow (x_1 - 0) \xrightarrow{\text{conv.}} 0$

③ • $\boxed{y = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \alpha_3 \cdot x_3}$

• $\dot{y} = \alpha_1 \dot{x}_1 + \alpha_2 \dot{x}_2 + \alpha_3 \dot{x}_3$ → $u$ va apparaître (on n'en veut pas)

on prend donc $\alpha_2 b = \alpha_3 c$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = \alpha_2 \\ b = \alpha_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{y} = \alpha_1 \cdot x_2 + a(c-b) \cdot \sin(x_2)}$$

• $\ddot{y} = \alpha_1 \cdot \dot{x}_2 + \eta \dot{x}_1 \cos(x_1) = \alpha_1 \cdot (a \cdot \sin(x_1) - b \cdot u) + \eta \cdot x_2 \cdot \cos(x_1)$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0$ (pour faire disparaître $u$)

$$\boxed{\Rightarrow \ddot{y} = \eta x_2 \cdot \cos(x_1)}$$

• $\dddot{y} = \eta \dot{x}_2 \cdot \cos(x_1) - \eta \cdot x_2 \cdot \dot{x}_1 \cdot \sin(x_1) = \eta \cdot (a \cdot \sin x_1 - bu) \cdot \cos(x_1)$
$- \eta \cdot x_2^2 \sin(x_1)$

$$\boxed{\dddot{y} = \underbrace{-b\eta \cos(x_1)}_{a(x)} \cdot u + \underbrace{\eta \cdot \sin(x_1) \left(a \cos x_1 - x_2^2\right)}_{b(x)}}$$

donc $\dddot{y} = a(x) u + b(x)$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{-b(x) + v}{a(x)} \rightsquigarrow \dddot{y} = v}$$

donc $\mathbf{0} = \underbrace{(y_d - y)}_{e} + 3 \cdot \underbrace{(\dot{y}_d - \dot{y})}_{\dot{e}} + 3\underbrace{(\ddot{y}_d - \ddot{y})}_{\ddot{e}} + \underbrace{\overbrace{\dddot{y}_d - \dddot{y}}^{(= v)}}_{\dddot{e}}$

$$P(s) = 1 + 3s + 3s^2 + s^3 = (s+1)^3$$

$\Rightarrow$ on va maintenant pouvoir controller 3 variables !