

數學思維解題第五組期末報告

報告主題：凱利公式與 21 點

組員：410831118 李冠言、410831120 黃子宸、410731134 張浚毓、
410831102 王珮文、410831113 張宸睿、410831240 施昕湧

報告內容：

凱利公式－負責人：410831118 李冠言、410831120 黃子宸

凱利公式可以用在投資抑或是賭注，公式的出發點是假設賭博可以無限次的進行而且沒有下注的上下限。用你手裡的最大資金來根據公式求得最佳化下注利益， $f^* = bp - q/b$ ， f 代表現有資金進行投注的比例、 b 則代表這次賭注之賠率、 p 代表獲勝機率、 q 代表失敗機率，由此可見每一次下注都不會是拿身上的全部資金來押注，故才有公式永遠不會有完全丟失身上所有資金的情形之說。而接著我們就要來推導凱利公式，以下分成單一事件及多重事件做說明。

在單一事件下會有贏或是輸的情況，假設此賭局可以不斷的重複遊玩下去，且每次都要手上全部資金的部分比例 f ，我們就必須討論當 f 為多少時能使得在玩過多次賭局後，資金成長速度最快。因此假設 A_t 表示玩到第 t 次賭局後的資金，若 $t-1$ 次賭局結果為贏則 A_t 就會等於 A_{t-1} 的 $1+bf$ 倍，每次都壓原本資金的 f 。所以在 $t-1$ 時一共壓了 A_{t-1} 乘 f 的資金。因為賭局結果為贏且賠率為 b ，所以會淨賺 $A_{t-1}(bf)$ ，加上原本的資金 A_{t-1} ，故在時間點 t 的資金變為 A_{t-1} 的 $1+bf$ 倍，得證。若 $t-1$ 次賭局結果為輸則 A_t 就會等於 A_{t-1} 的 $1-f$ 倍，每次都壓原本資金的 f 。所以在 $t-1$ 時一共壓了 A_{t-1} 乘 f 的資金。因為賭局結果為輸所以資金是輸光的，一共賠了資金 A_{t-1} 減掉 A_{t-1} 乘 f 。故在時間點 t 的資金變為 A_{t-1} 的 $1-f$ 倍，得證。從單一事件的贏跟輸來觀察，只要下一次賭注結果為贏就將資金再乘上 $(1+bf)$ ；若輸掉則乘上 $(1-f)$ 。我們假設總共玩了 T 次，而在 T 次的賭局裡贏了 W 次輸了 L 次（視為 $T=W+L$ ），從一開始手上的資金為 A_0 ，到時間點 T 的總資金可以表示如 $A_T = A_0(1 + bf)^W(1 - f)^L$ 。這是一個微積分求最大值的計算問題，我們要決定 f 為多少使得 A_T 可以最大化。首先把 $A_T = A_0(1 + bf)^W(1 - f)^L$ 兩邊取 \log ，若 T 逼近到無窮大（玩了無限多次），因為勝率是 p 所以 W/T 會趨近於 p ；而 L/T 會趨近於 $1-p$ 。再來我們要決定 f 使其有最大值，所以我們令微分後等於 0 解出 f 是我們的期望淨利除以賠率。

那在多重事件下，賭局的情況又會有所不同，假設拋硬幣，人頭出現機率為 p_1 ，賠率為 b_1 ；數字出現機率為 p_2 ，賠率為 b_2 。假設每次下注的方式為壓資金的 f_1 比例在人頭，壓資金的 f_2 比例在數字。則 f_1 與 f_2 要如何決定，可以使得玩過多次賭局後，資金成長最快。我們假設 A_t 表示玩到第 t 次的總資金，若在第 $t-1$ 回合人頭出現，則 $A_t = A_{t-1}(1 + b_1f_1 - f_2)$ ，因為每次都壓原來資金的 f_1

比例在人頭上， f_2 比例在數字上。如果時間點 $t - 1$ 時人頭出現，且賠率為 b_1 ，則可淨賺 $(A_{t-1})c(b_1)x(f_1)$ ，但是壓在數字上面的金額 $(A_{t-1})(f_2)$ 會全部輸光。最後，再加上原來資金 A_{t-1} ，故在時間點 t 的資金變為 $A_t = A_{t-1} + (A_{t-1})(f_1)(b_1) - (A_{t-1})(f_2) = A_{t-1}(1 + b_1f_1 - f_2)$ 。若在第 $t - 1$ 回合數字出現，則 $A_t = A_{t-1}(1 + b_2f_2 - f_1)$ ，此情況的推導過程完全與人頭出現時對稱， f_1 跟 f_2 對調、 b_1 跟 b_2 對調而已。有了上面兩個情況後，我們可以開始計算每一次賭局後的資金變化。結合上述兩種情況，只要下一個時間點人頭出現，就原來的資金乘上 $(1 + b_1f_1 - f_2)$ ，只要下一個時間點數字出現，就原來的資金乘上 $(1 + b_2f_2 - f_1)$ 。我們假設賭局進行 T 回合，人頭出現 W_1 次，數字出現 W_2 次。因此，從一開始手上的現金為 A_0 ，到時間點 T 的總資產可以表示如下： $A_T = A_0(1 + b_1f_1 - f_2)^{W_1} \times (1 + b_2f_2 - f_1)^{W_2}$ ，再來便是決定 f 為多少，使得 A_T 可以最大化。首先把 $A_T = A_0(1 + b_1f_1 - f_2)^{W_1} \times (1 + b_2f_2 - f_1)^{W_2}$ 兩邊取 \log ，若 T 逼近到無窮大(玩了無限多次)，因為人頭出現機率為 P_1 ，故 W_1/T 會趨近於 P_1 ，同理數字出現機率為 P_2 ，故 W_2/T 會趨近於 P_2 ，再來我們要使 f_1 和 f_2 有最大值，分別取偏微分後設為 0 可解出 f_1 和 f_2 分別等於 P_1 和 P_2 。

但當凱莉公式應用於真錢賭場遊戲時，凱莉公式並不完美。原因是輪盤賭注和二十一點等賭場遊戲發生的次數是有限的，這與支持凱利公式的無限次發生不同。賭場遊戲中的高波動性使得直接的凱利投注變得不切實際。玩家不願意在每個結果上冒很大比例的資金風險，尤其是在玩有很多變數的遊戲時。因此一些投注者採用了凱利方法，例如始終下註一半的凱利數字，以保護他們的資金並降低對長期產生巨大影響的計算中的誤差。因此二十一點投注者將凱莉公式修改後得到 $f = a/v$ 。我們通過將我們的優勢除以遊戲的方差來確定我們的理想下注規模 f ， a 代表博弈者的優勢， v 代表遊戲標準差的平方。

二十一點的玩法(21 點的遊玩方式)－負責人：410731134 張浚毓

- 擁有最高點數的玩家獲勝
- 其點數必須等於或低於 21 點
- 1. 超過 21 點的玩家稱為爆牌 (Bust)
- 2. 2 點至 10 點的牌以牌面的點數計算
- 3. J、Q、K 每張為 10 點
- 4. A 可記為 1 點或 11 點

若玩家會因 A 而爆牌則 A 可算為 1 點。當一手牌中的 A 算為 11 點時，這手牌便稱為「軟牌」(soft hand)，因為除非玩者再拿另一張牌，否則不會出現爆牌。

Ps:軟牌&硬牌

軟牌(soft)和硬牌(hard)手牌組合

前提條件:要有 Ace 的時候

Soft:當你的 Ace 牌能當作 1 點或 11 點，而總點數不超過 21 時

Hard:當你的 Ace 牌只能當作 1 或只能當作 11，總點數才不會超過 21 時

[軟牌 Soft 和硬牌 Hard，肯定是要有 Ace 的時候才討論的，简单来说，手中有 一个 Ace=11 牌还能不爆，则为软牌。如果有一个 A=1 和 A=11 都能保证不爆，那么这个时候是 Soft 的，两张牌的时候必然是 Soft 的，因为另外一张牌最大是 10（此时构成 BlackJack）在手牌中如果有多个 A 时，你只需要讨论其中一个是否能为 11，因为多余 1 个的 A=11 必然爆掉，其余 A 都当 1。当有三张甚至更多张牌的时候，例如，A+3+5，这个时候是 Soft 的，因为 A=11 的时候依旧不会爆掉。但是，如果是 A+2+K，这个时候就是如果 A=11 会爆掉，A 只能为 1 才能保证不爆掉，牌就变 Hard 了，任何时候，只可能从 Soft 变为 Hard，而不可能出现 Hard 变 Soft 的情形。A+5，A+5+2 显然都是软牌，因为 A=11 时没有爆掉。

A+5+2+A 也是软牌，多余一个的时候只考虑一个 A 能否等于 11，其他的 A 都当 1。在涉及到软牌和硬牌的问题上，一些赌场具有不同的规则。这个就是 S17 和 H17 问题。众所周知玩 BlackJack 的时候，如果庄家的牌不是 BJ，在所有玩家都 Stand 之后，庄家亮出底牌，然后根据牌的点数来确定是否要牌，不到 17 点必须要牌，大于或者等于 17 点的时候不能要牌。]

莊家 vs 玩家

莊家在取得 17 點之前必須要牌，因規則不同會有軟 17 點或硬 17 點才停牌的具體區分。且莊家如果拿牌五張而沒有爆牌則視為莊家勝利。

每位玩家的目的是要取得最接近 21 點數的牌來擊敗莊家，但同時要避免爆牌。要注意的是，若玩家爆牌在先即為輸，就算隨後莊家爆牌也是如此。若玩家和莊家擁有同樣點數，這樣的狀態稱為「push」，玩家和莊家皆不算輸贏。每位玩者和莊家之間的遊戲都是獨立的，因此在同一局內，莊家有可能會輸給某些玩家，但也同時擊敗另一些玩家。

賭注 & 牌局

牌桌上通常會印有最小和最大的賭注，每一間賭場的每一張牌桌的限額都可能不同。在第一筆籌碼下注後，莊家開始發牌，若是從一副或兩副牌中發牌，稱為「pitch」牌局；較常見的則是從四副牌中發牌。莊家會發給每位玩家和自己兩張牌，莊家的兩張牌中會有一張是點數朝上的「明牌」，所有玩家皆可看見，另一張則是點數朝下的「暗牌」。若是四副牌時，發牌時點數會朝上，若為「pitch」牌局則發牌時點數朝下。

美式 21 點

在美式的二十一點遊戲中，若莊家的明牌是 A 或價值 10 的牌，莊家會確認他的暗牌是否會形成二十一點。這項確認會在所有玩家選擇之前進行，但進行前會先詢問玩家是否需要「保險」(insurance，在明牌是 A 的情況下)。若莊家的牌為二十一點 (blackjack)，則所有的玩家即時算輸，將損失第一筆賭注籌碼，除非玩者本身也是二十一點，形成同點數的 push 狀況。(在某些美國的賭場，莊家採用歐式的規則，在全部玩家都出手前不會先去確認暗牌。在這樣的情況下，當莊家的牌揭開後為二十一點時，則所有沒有二十一點的玩家算輸。)

兩張牌點數相加為 21 (一張 A 再加一張價值 10 點的牌) 稱為「二十一點」(black jack)，擁有這副牌的玩家即自動成為贏家 (除非莊家也同時持有二十一點，這種點數相同的情形就稱為 push)。擁有二十一點的玩家可贏得下注籌碼的 1.5 倍。部份的賭場僅付給 1.2 倍的金額；但通常是在僅使用一副牌遊玩的賭局中。通常每次以四至六副撲克牌遊玩，直至玩剩一副或一半為止，再重新洗牌。

BLACK JACK

二十一點的前身是在 1700 年左右起源於法國賭場的「vingt-et-un」（法文中 21 之意），當時的遊戲對於兩張牌的二十一點並未提供三比二的賠付分紅。

起初二十一點在美國並不流行，因此賭場試著提供各種額外的獎金吸引賭客參與牌局。其中之一的額外獎金是當玩者手中同時擁有黑桃 A 和黑色的 J（黑桃 J 或梅花 J 都可）時，獎金將會變成十倍。這樣的牌稱為「black jack」（黑傑克，二十一點），而這個名字就漸漸成為美國版二十一點遊戲的名稱，即使後來這項額外獎金規則停止，「black jack」名稱還是繼續存在。規則發展至今日，「blackjack」已經不一定需要包含 J 或黑色的牌了。

[起源於約西元 1700 年的法國賭場，法文的 vingt-et-un 即是 21 的意思；一開始此遊戲在美國並不流行，賭場提供額外獎金做為吸客手法，只要賭客手中同時擁有「黑桃 A」和「黑色的 J」（黑桃 J 或梅花 J 都可以），獎金就可以翻為 10 倍，而此種牌型被稱為「黑傑克」，由此，這個遊戲的名字漸漸變成「Black Jack」，是美國版 21 點博弈遊戲的名稱，後來雖然額外獎金規則被取消，但名字還是持續流傳。]

「二十一點」Black Jack 又名為「自然」Black Jack (Natural Black Jack)。如果閒家手中的一張暗牌和一張明牌分別是一張 A 牌（可作 11 點）和一張十點牌（K、Q、J、10），這副牌叫做二十一點（Black Jack）（屬例牌）莊家須向該閒家賠上 1.5 倍（或 1.2 倍）注碼。

流程

1. 洗牌
2. 向各玩家分別派發一張牌
3. 莊家發給自己一張牌
4. 向各玩家派第二張牌
5. 莊家再發給自己一張牌
注: (不是所有賭場都會有這個步驟, 大部份賭場都是在所有玩家結束要牌後才發第二張明牌給莊家)
6. 如果莊家明牌是 A、荷官會詢問玩家是否購買保險
注: 當莊家面牌是 A, 閒家可以注碼的一半選擇是否購買保險, 以賭莊家的首二張牌總和會不會是 21 點, 如莊家不是 21 點會立即沒收保險金; 若是 21 點便可獲得保險金額的 2 倍賠償。
7. 玩家可進行加注、投降、分牌等動作
8. 莊家逐位詢問玩家是否加牌、直至閒家不加牌才詢問下一位玩家, 輪流詢問玩家直至最後一位玩家加牌完成
9. 莊家如不足 17 點便需加牌直至超過或等於 17 點
10. 對未有爆牌的玩家, 比點數大小, 大者勝, 可得賠金; 如莊家爆牌、未有爆牌的玩家便可得賠金
11. 回收已使用的牌及給小費
注: 回收已使用的牌必須順序回收。如分開大牌和小牌個別回收等不正常收牌行為, 便有出千的可能, 並且可能會被請提出異議而被迫離開。

基本算牌法名詞介紹－負責人：410831102 王佩文

發牌

由莊家負責發牌,其餘的為閒家。莊家會以順時針方向發給閒家一張明牌,然後給自己一張暗牌;再次以順時針方向向各閒家發明牌,最後也發給自己一張明牌。

要牌

閒家如認為自己手上的 2 張牌不足以擊敗莊家,可向莊家繼續要牌。莊家以順時針方向詢問各閒家是否繼續要牌。

停牌

閒家認為自己的點數夠了,可選擇停牌,點數即固定。

雙倍下注

如果閒家手上的兩張牌點數總和是 11 點,閒家可以選擇加倍投注,投注後會再獲得 1 張牌。

分牌

當被發到對子的時候可進行分牌,可將牌分拆成兩組單獨的牌手,但必須加注,下注金額需與原注相同。

投降

閒家覺得自己牌很差,可以選擇放棄,但要付出一半的賭注。

點數計算

A：1 點或 11 點

2~10：牌面點數:

J、Q、K：10 點

基本策略表

基本策略表是在 60 年代，由 4 位數學家 Roger Baldwin、Wilbert Cantey、Herbert Maisel 和 James McDermott 發明出來的。他們合稱「四巨頭」(the Four Horsemen of Aberdeen)

金大發娛樂城jdf88.com		21點基本策略表									
你的手牌	莊家										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	A	
5	補	補	補	補	補	補	補	補	補	補	
6	補	補	補	補	補	補	補	補	補	補	
7	補	補	補	補	補	補	補	補	補	補	
8	補	補	補	補	補	補	補	補	補	補	
9	補	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	補	補	補	補	補	
10	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	補	補	
11	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	補	
12	補	補	停牌	停牌	停牌	補	補	補	補	補	
13	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	補	補	補	補	補	
14	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	補	補	補	補	補	
15	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	補	補	補	補	補	
16	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	補	補	補	補	補	
17	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	
拿到A和2	補	補	補	雙倍下注	雙倍下注	補	補	補	補	補	
拿到A和3	補	補	補	雙倍下注	雙倍下注	補	補	補	補	補	
拿到A和4	補	補	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	補	補	補	補	補	
拿到A和5	補	補	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	補	補	補	補	補	
拿到A和6	補	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	補	補	補	補	補	
拿到A和7	停牌	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	停牌	停牌	補	補	補	
拿到A和8	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	
拿到A和9	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	
拿到2張2	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	補	補	補	補	
拿到2張3	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	補	補	補	補	
拿到2張4	補	補	補	分牌	分牌	補	補	補	補	補	
拿到2張5	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	雙倍下注	補	補	
拿到2張6	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	補	補	補	補	補	
拿到2張7	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	補	補	補	補	
拿到2張8	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	
拿到2張9	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	停牌	分牌	分牌	停牌	停牌	
拿到2張10	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	停牌	
拿到2張A	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	分牌	

Ex：

- (1)若手牌是 15，莊家是 5，則需補牌還是停牌?
- (2)若手牌是 A 和 2，莊家是 10，則需補牌還是停牌?

熟習基本策略後，是否代表賭客能贏莊家的錢？

不正確。

運用基本策略，只是減少莊家在 21 點上的優勢。長賭下去，賭客還是會輸錢。但如果配合注碼控制，在贏面大時，買大些，在贏面小時，買小一些，優勢便會在賭客這邊。在這優勢下，長賭下去，賭客就能贏錢。

✧ 高低算牌法 — 負責人：410831113 張宸睿、410831240 施昕湧

在學習應對技巧前，首先要具備正確的邏輯和觀念，我們先假設一副完整撲克牌中的 52 張牌出現之概率是相同的，這也代表即便是內含 6~8 副牌的一整條牌靴，每張牌開出的機率也同樣是相同的，因此，我們便能得知每張牌相互之間都是獨立的這個觀念。

然而，在什麼情況下，單牌的出現機率會出現變化？當然就是牌局開始進行後，並發出第一張牌開始機率就不再是相同，舉例來說，假設牌局進行了幾局，前面已經開出了 5 張公（10 點牌），那麼請問後面開出的機率會與原先相同嗎？答案當然是不會，以 8 副牌來說，每副牌有 16 張公，8 副牌總共有 128 張公，開出了 10 張之後，機率呈現當然也不會是一樣，因此我們也能得知先開出的牌會影響往後牌局之開牌情況這個觀念。

✧ 流水數

我們將一副牌的 2~6 當作小牌，7~9 當作中性牌，A、10~K 當作大牌。莊家洗好牌後，流水數從 0 開始計算，莊家每發一張牌，賭客要計算流水數，出現一張小牌，就要將流水數+1；出現一張中性牌，流水數+0；出現一張大牌，則將流水數-1。

Ex：

- (1)當前流水數是 0，莊家手牌為 10，賭客手牌為 K、Q，則流水數是-3
 - (2)當前流水數是-3，莊家手牌為 7，賭客手牌為 2、3，則流水數是-1。
 - (3)當前流水數是-1，莊家手牌為 4，賭客手牌為 5、6，則流水數是 2。
 - (4)當前流水數是+2，莊家手牌為 2，賭客手牌為 4、6，則流水數是 5。
- （當流水數是+5 時，賭客的贏面相對大。）

✧ 真數

由於 21 點不是只玩一副牌，很多時候是 4 副或 6 副牌。計算出流水數後，我們找出真數。透過數學計算，我們可以利用真數的大小，判斷莊家、玩家的贏牌優勢，同時可以判斷接下來下注的多寡。

計算真數公式：

$$\text{真數} = \text{流水數} \div \text{餘下牌副數}$$

Ex：

- (1)流水數為 8，餘下牌副數是 2 副，則 $8 \div 2 = 4$ ，可得真數為+4。
- (2)流水數為-10，餘下牌副數是 2.5 副，則 $-10 \div 2.5 = -4$ ，可得真數為-4。
- (3)流水數為 20，餘下牌副數是 1 副，則 $20 \div 1 = 20$ ，可得真數為 20。

莊家優勢

真數

真數 ≥ 0 , 莊家優勢 ≤ 0

賭注減少或不下注

正常下注區

賭注逐漸加大區

分牌 (Pair Splitting)										
	庄家明牌 (Dealer's Upcard)									
	2	3	4	5	6	7	8	9	T	A
(A,A)	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
(T,T)	N	N	6	5	4	N	N	N	N	N
(9,9)	Y	Y	Y	Y	Y	N	Y	Y	N	N
(8,8)	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
(7,7)	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N	N	N	N
(6,6)	Y	Y	Y	Y	Y	N	N	N	N	N
(5,5)	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
(4,4)	N	N	N	Y/N	Y/N	N	N	N	N	N
(3,3)	Y/N	Y/N	Y	Y	Y	Y	N	N	N	N
(2,2)	Y/N	Y/N	Y	Y	Y	Y	N	N	N	N

备注:	Y	分牌
	N	不分牌。但如果牌的真数达到红色的值, 则应该分牌。
	Y/N	如果分牌后允许加倍就分牌, 否则, 不分牌。

软点数牌 (Soft Totals)										
	庄家明牌 (Dealer's Upcard)									
	2	3	4	5	6	7	8	9	T	A
(A,9)	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
(A,8)	S	S	3	1	1	S	S	S	S	S
(A,7)	Ds	Ds	Ds	Ds	Ds	S	S	H	H	H
(A,6)	1	D	D	D	D	H	H	H	H	H
(A,5)	H	H	D	D	D	H	H	H	H	H
(A,4)	H	H	H	D	D	H	H	H	H	H
(A,3)	H	H	H	D	D	H	H	H	H	H
(A,2)	H	H	H	D	D	H	H	H	H	H
备注:	H	拿牌 (Hit)。但如果牌的真数达到红色的值应该加倍。								
	S	停牌 (Stand)。但如果牌的真数达到红色的值应该加倍。								
	D	如果允许就加倍 (Double down)，否则拿牌。								
	Ds	如果允许就加倍就分牌 (Split)，否则，停牌 (Stand)。								

硬点数牌 (Hard Totals)										
	庄家明牌 (Dealer's Upcard)									
	2	3	4	5	6	7	8	9	T	A
17	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
16	S	S	S	S	S	H	H	4	0+	H
15	S	S	S	S	S	H	H	H	3	H
14	S	S	S	S	S	H	H	H	H	H
13	-1	S	S	S	S	H	H	H	H	H
12	3	2	0-	S	S	H	H	H	H	H
11	D	D	D	D	D	D	D	D	D	1
10	D	D	D	D	D	D	D	D	4	3
9	1	D	D	D	D	3	H	H	H	H
8	H	H	H	H	2	H	H	H	H	H
7	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
备注:	H	拿牌 (Hit)。但如果牌的真数达到红色的值应该停牌 (>11) 或加倍 (<12)。								
	S	停牌 (Stand)。但如果牌的真数达到红色的值应该拿牌。								
	D	如果允许就加倍 (Double Down)，否则，拿牌 (Hit)。								

✧ 真數與玩家優勢、玩家勝率、下注比例關係表：

在 21 點遊戲中，除了 Blackjack 的賠率是 1.5，其他投注可得的賠率（不含本金）為 1，

若忽略 Blackjack 的影響， $b = 1$ 。

則凱利公式可化為：

$$f^* = \frac{bp - q}{b} = \frac{bp - (1 - p)}{b} = 2p - 1$$

f^* ：現有資金應進行下次投注的比例

p ：獲勝率

真數	玩家優勢 (%)	玩家勝率 (%)	投注比例 (%)
≤1	≤0	≤50	0
1.5	0.25	50.25	0.5
2	0.5	50.5	1
2.5	0.75	50.75	1.5
3	1	51	2
3.5	1.25	51.25	2.5
4	1.5	51.5	3
4.5	1.75	51.75	3.5
5	2	52	4
5.5	2.25	52.25	4.5
6	2.5	52.5	5
6.5	2.75	52.75	5.5
7	3	53	6
7.5	3.25	53.25	6.5
8	3.5	53.5	7
8.5	3.75	53.75	7.5
9	4	54	8
9.5	4.25	54.25	8.5
10	4.5	54.5	9

☆ 實際練習

實際操作並且利用以上算牌法，計算或是發想策略，進而驗收大家在此次報告過程中，是否學會使用算牌法

資料來源：

1. 二十一點：

<https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/%E4%BA%8C%E5%8D%81%E4%B8%80%E9%BB%9E>

2. 決勝 21 點玩法、規則、算牌技巧一次全到位：<https://twcasino.net/blackjack/>

3. 軟牌與硬牌：<https://www.zhihu.com/question/27687053/answer/180775683>

4. 完勝 21 點之一：https://youtu.be/V5FWM8TPM_s

5. 完勝 21 點之二：<https://youtu.be/lbWlQwlmJnY>

6. 完勝 21 點之三：<https://youtu.be/CvuVTkliOjQ>

7. 凱莉公式的推導：<https://www.bituzi.com/2013/06/kellyproof.html?m=1>

8. 凱利標準和二十一點：

<https://ap55688.com/%E5%87%B1%E5%88%A9%E6%A8%99%E6%BA%96%E5%92%8C%E4%BA%8C%E5%8D%81%E4%B8%80%E9%BB%9E/>