數學解題方法

Week 15

Jean yeh
2021. 06. 02

問題 1

假設正實數 x, y, z 滿足 $xyz \geq 1$。證明：

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0$$

2005 IMO 第三題

解答

假設存在 x, y, z 滿足 $xyz \geq 1$。

證明：$\dfrac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \dfrac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \dfrac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0$

題目可由以下三步驟證明：

1. 需證明：$\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \leq 3$

2. 需證明：$\dfrac{x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}}{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1$

3. 需證明：$yz + xz + xy \leq xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

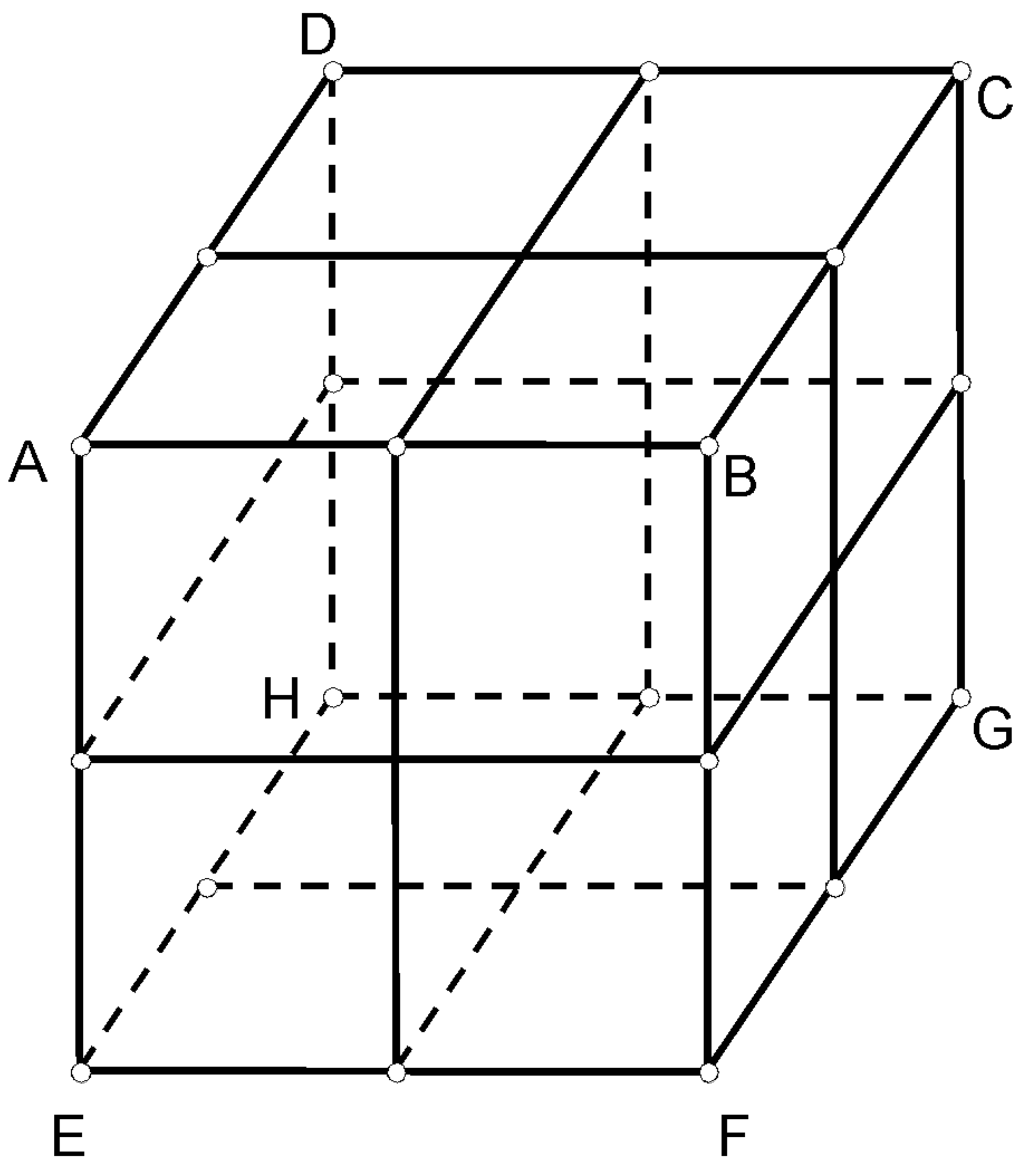
問題 2

(a)給定三種不同的顏色和一個 3n 角柱，試證必可以將 3n 角柱的頂點，塗上前述三種顏色之一，使得從任一頂點出發的三條稜邊所連的相鄰三個頂點上的顏色都不相同。（註：一個 m 角柱的兩個底為全等的 m 邊形。）

(b)給定三種不同顏色和一個 n 角柱，如果能將 n 角柱的頂點塗上前述三種顏色之一，使得從任一頂點出發的三條稜邊所連的相鄰三個頂點上的顏色都不相同，試證 n 是3的倍數。

問題 3

有一種正立方體的特製骰子，在它三對相對的面上，有一對刻有1個黑點，另外一對刻有2個黑點，最後一對刻有3個黑點。將8個這種骰子組合成一個 $2\times2\times2$ 的大正立方體。規定大正方體每一個面上黑點數目的總和為這個面的點數。是否有一種組合方式，使得大正立方體的六個面的點數分別為6個連續的整數？



問題 4

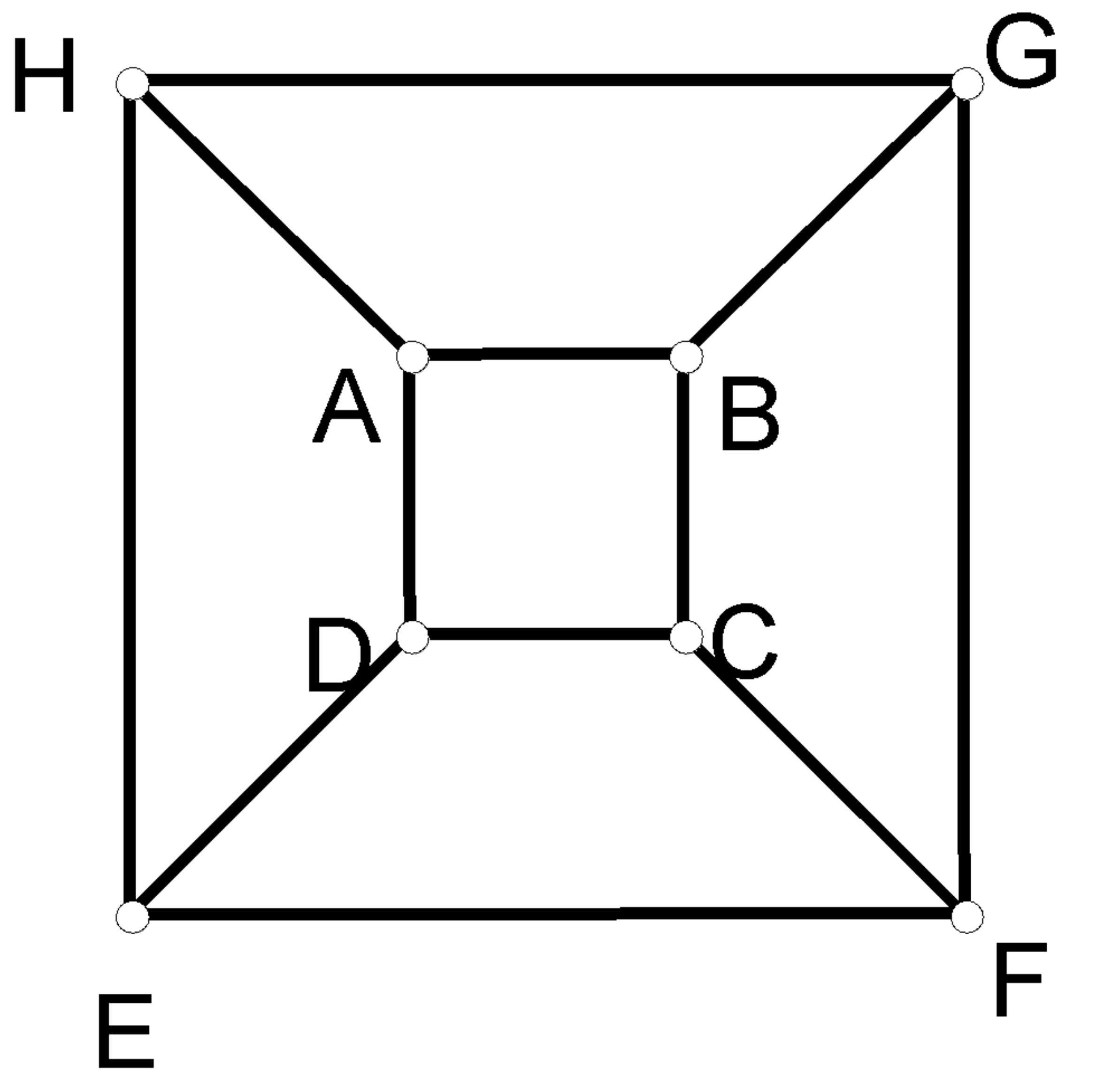
假設實數 a, b 滿足

$$a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0$$
$$b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0$$

試求：$a + b$

問題 5

能否在立方體的所有頂點上都安置一個自然數，使得每條稜的兩端所安置的數對必有倍數關係(倍數關係是指其中的一個數是另外一個數的倍數)，但沒有稜邊相連接的數對則沒有倍數關係？(五分)



問題 6

證明，對任意 $n \in \mathbb{N}^*$，恰有一組數 $x_1, \ldots, x_n$ 滿足以下方程

$$(1-x_1)^2 + (x_1-x_2)^2 + \ldots + (x_{n-1}-x_n)^2 + x_n^2 = \frac{1}{n+1}$$

英國, 1975