數學解題方法第八組期末報告

畢達哥拉斯

數四甲　410631122　黃翊瑄
數四甲　410631128　葉宗愿
數四乙　410531226　王怡堯
數四乙　410631207　唐仲暄

壹、畢達哥拉斯

一、畢達哥拉斯生平

畢達哥拉斯是一名古希臘哲學家、數學家和音樂理論家，生於希臘東部薩摩斯，卒於他林敦，畢達哥拉斯早年曾游歷埃及、巴比倫等地，接受古代流傳下來的天文、數學知識。最後定居在克羅托內，並建立一個宗教、政治、學術合一的團體——畢達哥拉斯學派。他認為數學可以解釋世界上的一切事物，對數字癡迷到幾近崇拜，同時認為一切真理都可以用比例、平方及直角三角形去反映和證實。

二、畢達哥拉斯學派

繼伊奧尼亞學派後古希臘第二個重要的學派。這個團體後來在政治鬥爭中遭到破壞，畢達哥拉斯最終被殺害。畢氏學派有一個教規，就是一切發現都歸功於學派的領袖，且對外保密，故討論其學術成就時，很難將畢達哥拉斯本人和他的學派分開。

畢氏學派將抽象的數作為萬物的本源，研究數的目的不是為了實際應用，而是通過揭露數的奧秘來探索宇宙的永恆真理。他們對數深入研究，並得到很多結果：將學問分為四類，即算術、音樂、幾何、天文。根據簡單整數比原理創造一套音樂理論，將自然數進行分類，如奇數、偶數、完全數、親合數、三角數、平方數、五角數、六角數等等，發現勾股定理和勾股數、五種正多面體、不可通約量。

三、重要發現

1. 畢氏定理

在平面上的直角三角形的兩條直角邊的長度的平方和等於斜邊長的平方。反之，若平面上三角形中兩邊長的平方和等於第三邊邊長的平方，則它是直角三角形。畢氏定理是人類早期發現並證明的重要數學定理之一。

此定理又稱勾股定理、商高定理、新娘座椅定理或百牛定理。「畢氏」所指的是其中一個發現這個定理的古希臘數學家畢達

哥拉斯，但歷史學家相信這個定理早在畢達哥拉斯出生的一千年前已經在世界各地廣泛應用，由畢達哥拉斯證明了定理的普遍性，所以現代西方數學界統一稱呼它為「畢達哥拉斯定理」。

2. 發現無理數

是這個學派最重大的貢獻，是數學史上重要的里程碑。由希帕索斯發現，但這一發現卻和他們的會條相抵觸，引發了第一次數學危機，以至於有一段時間，他們費了很大的勁將此事保密，不準外傳，但希帕索斯無意中對外人洩漏了這個驚人秘密，因而以「瀆神」的罪名被扔到地中海裡。大約在公元前 370 年，這個"矛盾"被畢氏學派晚期的重要成員阿爾希塔斯的學生，傑出的歐多克斯通過給比例下新定義的方法解決了。

貳、畢氏三元數

一、畢氏三元數

滿足方程式 $x^2+y^2=z^2$ 的任何一組正整數解答(x,y,z)就叫做畢氏三元數，例如常見的直角三角形比例(3,4,5)、(5,12,13)、(7,24,25)等等皆為畢氏三元數。

二、畢氏三元數生成公式有下列三種

甲、$\begin{cases} a=2n+1 \\ b=2n^2+2n \qquad ,n\in\mathbb{N},n>1 \\ c=2n^2+2n+1 \end{cases}$

乙、$\begin{cases} a=2n \\ b=n^2-1,n\in\mathbb{N},n>1 \\ c=n^2+1 \end{cases}$

丙、$\begin{cases} a=l\left(u^2-v^2\right) \\ b=2luv \qquad ,u,v,l\in\mathbb{N},u>v \\ c=l\left(u^2+v^2\right) \end{cases}$

三、畢氏三元數生成公式證明

甲：畢氏公式

首先我們知道$\left(k-1\right)^2=k^2-2k+1$，

透過移項可得$\left(2k-1\right)+\left(k-1\right)^2=k^2-\oplus$，

此時畢達哥拉斯假設 $2k-1=m^2$，

這裡的m為奇數，所以可以知道$k=\dfrac{m^2+1}{2}$，

再將k代回$\oplus$，可得$m^2+\left(\dfrac{m^2-1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{m^2+1}{2}\right)^2$，

與畢氏定理$x^2+y^2=z^2$比對，即可發現當m是比1大的奇數時即符合畢氏定理，於是可以假設$m=2n+1,n\in\mathbb{N},n>1$，

就可以得到甲式$\begin{cases}a=2n+1\\ b=2n^2+2n \quad ,n\in\mathbb{N},n>1\\ c=2n^2+2n+1\end{cases}$

乙：柏拉圖公式

透過等式$\left(k+1\right)^2=\left(k-1\right)^2+4k-\otimes$，柏拉圖假設$4k=\left(2n\right)^2$再代入$\otimes$，

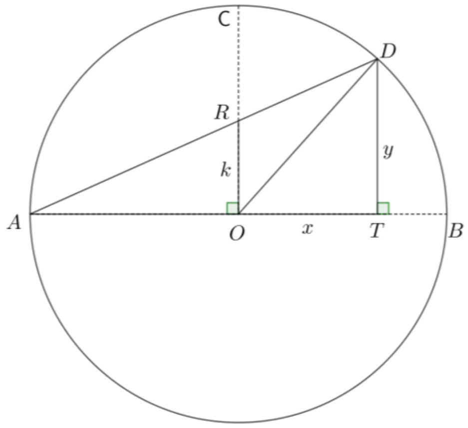
由於$4k$為偶數，所以將後面的完全平方數設定為偶數

可得$\left(n^2+1\right)^2=\left(n^2-1\right)^2+\left(2n\right)^2$與畢氏定理$x^2+y^2=z^2$比對，即可發現

當m是比1大時即符合畢氏定理，於是可證明$\begin{cases}a=2n\\ b=n^2-1,n\in\mathbb{N},n>1\\ c=n^2+1\end{cases}$

由上述甲、乙兩式的證明過程，可以清楚看到，甲只針對奇數，乙只針對偶數，於是後來歐基里德證明出一個通式，也就是我們等等要證明的丙式

丙：歐氏公式



上圖，點 A、B、C、D 位在以 O 為圓心半徑為l的圓上，不失一般性以下運算過程皆以半徑為 1 運算，

假設：$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=1$、$\overline{OT}=x$、$\overline{DT}=y$、$\overline{OR}=k$，由於$\triangle OAR$與$\triangle TAD$三內角相等，於是可以知道兩者是相似三角形，透過相似三角形邊長成比例可以列出下式：

$$\frac{\overline{DT}}{\overline{RO}}=\frac{\overline{TA}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{RA}}\Rightarrow\frac{\overline{DT}}{\overline{RO}}=\frac{\overline{TO}+\overline{OA}}{\overline{OA}}\Rightarrow\frac{y}{k}=\frac{x+1}{1}$$

$$\Rightarrow y=(1+x)k$$

而且$\triangle OTD$為直角三角形，於是可以知道$1=x^2+y^2$

$$\begin{cases}1=x^2+y^2---(1)\\ y=(1+x)k---(2)\end{cases}$$

將(2)代入(1)得$1=x^2+\left[k(x+1)\right]^2\Rightarrow\left(k^2+1\right)x^2+2k^2x+k^2-1=0$

透過公式解得到$x=\dfrac{k^2-1}{k^2+1}---(3)$

將(3)代入(2)，得到$y=\dfrac{2k}{1+k^2}---(4)$，此時令$k=\dfrac{v}{u}$代回去(3)和(4)

$x=\dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$，$y=\dfrac{2uv}{u^2+v^2}$再代回(1)

$\Rightarrow 1=\left(\dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\right)^2+\left(\dfrac{2uv}{u^2+v^2}\right)^2$，同時$\times\left(u^2+v^2\right)^2$

$\Rightarrow\left(u^2+v^2\right)^2=\left(u^2-v^2\right)^2+(2uv)^2$，此時再將一開始的半徑$l$乘回去

$$\Rightarrow\left(l\left(u^2+v^2\right)\right)^2=\left(l\left(u^2-v^2\right)\right)^2+\left(2luv\right)^2$$ ，

此即為$\begin{cases}a=l\left(u^2-v^2\right)\\ b=2luv \qquad ,u,v,l\in\mathbb{N},u>v\\ c=l\left(u^2+v^2\right)\end{cases}$，

歐氏公式不同於前兩者有基偶數的限定，窮盡所有正整數解。

參、第一次數學危機

一、第一次數學危機

屬於畢達哥拉斯學派的希帕索斯發現邊長為 1 的正方形的對角線長度不能用整數或分數來表達。於是畢達哥拉斯學派對這個新發現的「怪數」保密，可希帕索斯則無意中泄露了這個發現，相傳他因此被畢達哥拉斯學派的人扔進大海淹死（希帕索斯被淹死是多個傳說中一個，另還有被眾神（畢達哥拉斯學派信仰的數字之神）判處淹死，以及開除學派等說法）。

二、不為有理數證明

若$\sqrt{2}$為有理數，則可以寫成$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$其中a,b為互質自然數，兩邊平方得到$a^2=2b^2$，所以 a為偶數，可以表示成$a=2m$，代回上式可得$2b^2=a^2=4m^2$，可得b亦為偶數，因此a,b不互質，矛盾，$\sqrt{2}$不為有理數。

三， 比例論

1.原畢達哥拉斯學派裡的比例論

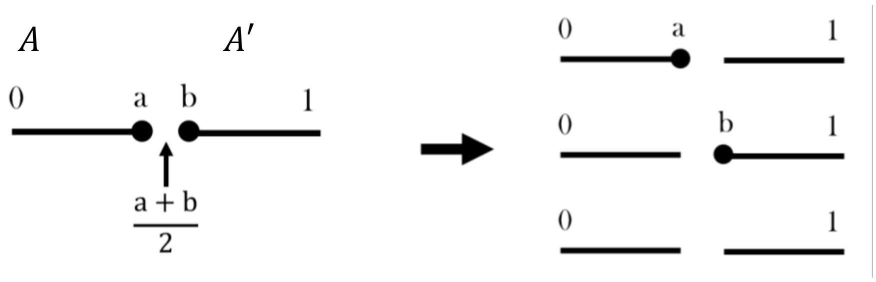
如果兩個物體的比例是相同的，以數學式來表示，是一個等比關係$a:b=c:d$ 其中a,b,c,d為正整數，且存在正整數n使得$a=nc$與$b=nd$

2.Eudoxus 的比例論

$a:b=c:d \Leftrightarrow (ma<nb \Rightarrow mc<nd,\ ma=nb \Rightarrow mc=nd,$ $(ma>nb \Rightarrow mc>nd)$，這個定義迴避了數系的規範，因此，即使 a,b,c,d是無理數，等比關係也可以成立。

四、戴德金分割

在[0,1]有理數的數線上剪一刀，在第三種情況，這個“空隙”所對應的數既不屬於A，也不屬於A'，因此它不是有理數，它所對應的數就是無理數。



五、例子

1.將所有≤ 0的有理數劃分為集合 A，將所有剩下的有理數劃分為集合A'，則屬於分類中的第 1 種情形。

2.將所有<0的有理數劃分為集合 A ，將所有餘下的有理數（即大於或等於 0 的有理數）劃分為集合 A'，屬於分類中的第 2 種情形。

3.將所有≤ 0、或其平方≤ 3的正有理數劃分到集合 A ，將剩下的有理數（即其平方大於 3 的正有理數）劃分到集合 A ，屬於分類中的第 3 種情形，此時定義了無理數$\sqrt{3}$。

肆、競賽題目

一、題目

Let (a, b, c) be a Pythagorean triple, i.e., a triplet of positive integers with $a^2+b^2=c^2$

(a) Prove that $(\frac{c}{a}+\frac{c}{b})^2 > 8$.

(b) Prove that there does not exist any integer n for which we can find a Pythagorean triple (a, b, c) satisfying $(\frac{c}{a}+\frac{c}{b})^2$ = n.

(翻譯：令(a,b,c)為畢氏三元數，此為正整數的三元組

其中 $a^2+b^2=c^2$

(a)證明$(\frac{c}{a}+\frac{c}{b})^2 > 8$

(b)證明不存在任何整數n可以找到滿足$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2 = n$的畢氏三元組$(a,b,c)$)

二、解法

1.(a)解法一

Let (a, b, c) be a Pythagorean triple. View a, b as lengths of the legs of a right angled triangle with hypotenuse of length c; let θ be the angle determined by the sides with lengths a and c. Then

$$(\frac{c}{a}+\frac{c}{b})^2=(\frac{1}{sin\theta}+\frac{1}{cos\theta})^2=\frac{sin^2\theta+cos^2\theta+2sin\theta cos\theta}{(sin\theta\cos\theta)^2}=4(\frac{1+sin2\theta}{sin^2 2\theta})=\frac{4}{sin^2 2\theta}+\frac{4}{sin2\theta}$$

Note that because $0<\theta<90^\circ$, we have $0<\sin 2\theta\leq 1$, with equality only if $\theta=45^\circ$. But then $a=b$ and we obtain $\sqrt{2}=\frac{c}{a}$, contradicting a, c both being integers. Thus, $0<\sin 2\theta<1$ which gives $(\frac{c}{a}+\frac{c}{b})^2>8$.

(翻譯：令(a,b,c)為畢氏三元數，令a,b是直角三角形的短邊c為長邊，且令θ為a,c的夾角，因為$0<\theta<90^0$，得到 $0<\sin 2\theta\leq 1$，在$\theta=45^0$時會等於 8，但當$a=b$時我們得到$\sqrt{2}=\frac{c}{a}$，與a,c為整數矛盾，也就是$0<\sin 2\theta<1\Rightarrow(\frac{c}{a}+\frac{c}{b})^2>8$)

2.(a)解法二

By simplifying and using the AM-GM inequality.

$(\frac{c}{a}+\frac{c}{b})^2=c^2(\frac{a+b}{ab})^2=\frac{(a^2+b^2)(a+b)^2}{a^2b^2}\geq\frac{2\sqrt{a^2b^2}2\sqrt{ab}^2}{a^2b^2}=8$

with equality only if $a = b$. By using the same argument as in Solution 1, a cannot equal b and the inequality is strict.

(翻譯：利用算幾幾何不等式，只有在 a=b 時等於 8，用方法一的想法，一樣與 a 不等於 b 矛盾)

3.(b)解法

Since $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ is rational, $(\frac{c}{a}+\frac{c}{b})^2$ can only be an integer if $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ is an integer. Suppose $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=m$. We may assume that gcd(a, b) = 1. (If not, divide the common factor from (a, b, c), leaving munchanged.) Since $c(a+b)=mab$ and gcd(a, $a+b$) = 1, a must divide c, say $c=ak$. This gives $a^2+b^2=a^2k^2$ which implies $b^2=(k^2-1)a^2$. But then a dividesb contradicting the fact that gcd(a, b) = 1. Therefore $(\frac{c}{a}+\frac{c}{b})^2$ is not equal to any integern.

(翻譯：因為$\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$是有理數，$(\frac{c}{a}+\frac{c}{b})^2$只在$\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$為整數時才為整數。假設$\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=m$, $gcd(a,b)=1$。因為$c(a+b)=mab$且$gcd(a,a+b)=1$。a一定可以整除c，設$c=ak$。可得$a^2+b^2=a^2k^2\Rightarrow b^2=(k^2-1)a^2$。與$gcd(a,b)=1$矛盾，故$(\frac{c}{a}+\frac{c}{b})^2$不為整數)

伍、參考資料

1. 畢達哥拉斯- 維基百科，自由的百科全書
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AF%95%E8%BE%BE%E5%93%A5%E6%8B%89%E6%96%AF
2. 畢達哥拉斯
http://www3.ptgsh.ptc.edu.tw/sub/math/math-history/Pythagoras.htm
3. 數學家的故事---畢達哥拉斯
https://www.youtube.com/watch?v=Ace92dIvqu0

4. 薛西弗斯的巨石談費瑪最後定理（第 2 頁）
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_26_01_1/page2.html
5. 38209 畢氏三元數生成公式之研究與發展 - 中央研究院
https://web.math.sinica.edu.tw/mathmedia/HTMLarticle18.jsp?mID=38209
6. 比例論-維基百科
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AF%94%E4%BE%8B%E8%AB%96
7.分割-維基百科
https://zh.wikipedia.org/wiki/分划
8.第一次數學危機：差點逼瘋畢達哥拉斯的√2
https://kopu.chat/2017/06/04/第一次數學危機：差點逼瘋畢達哥拉斯的√2/
9.CMO-2005
https://www2.cms.math.ca/Competitions/CMO/archive/sol2005.pdf