



—— 第二組 ——


目錄


- 1 小組名單
- 2 什麼是河內塔？
- 3 河內塔的起源
- 4 遊戲規則
- 5 遊戲示範
- 6 求解
- 7 補充
- 8 相關內容
- 9 參考資料





小組名單


小組名單


 411031106 張心玫

 411031108 魏碩廷

 411031109 羅允澤

 411031128 蔣一豪

 411031136 陳筠婷

 411031142 倪詩晶

2

什麼是河內塔？

什麼是河內塔？





河内塔的起源

河內塔的起源

 法國數學家愛德華·盧卡斯。

 傳說越南河內梵天寺院有三根銀棒，其中一根上串64個金盤。

寺院裡的僧侶依照一個古老的預言，移動這些圓盤；預言說當這些圓盤移動完畢，世界就會滅亡。這個傳說叫做梵天寺之塔問題(Tower of Brahma puzzle)。另外，有人說是因為在越南河內，所以被命名為「河內塔」。



遊戲規則

遊戲規則

有三根杆子A、B和C。A杆上有N個($N \geq 1$)穿孔圓盤，圓盤的尺寸由下到上依次變小。要求按下列規則將所有圓盤移至C杆：

1. 每次只能移動一個圓盤
2. 大盤不能疊在小盤上面

Q: 如何移？最少要移動多少次？

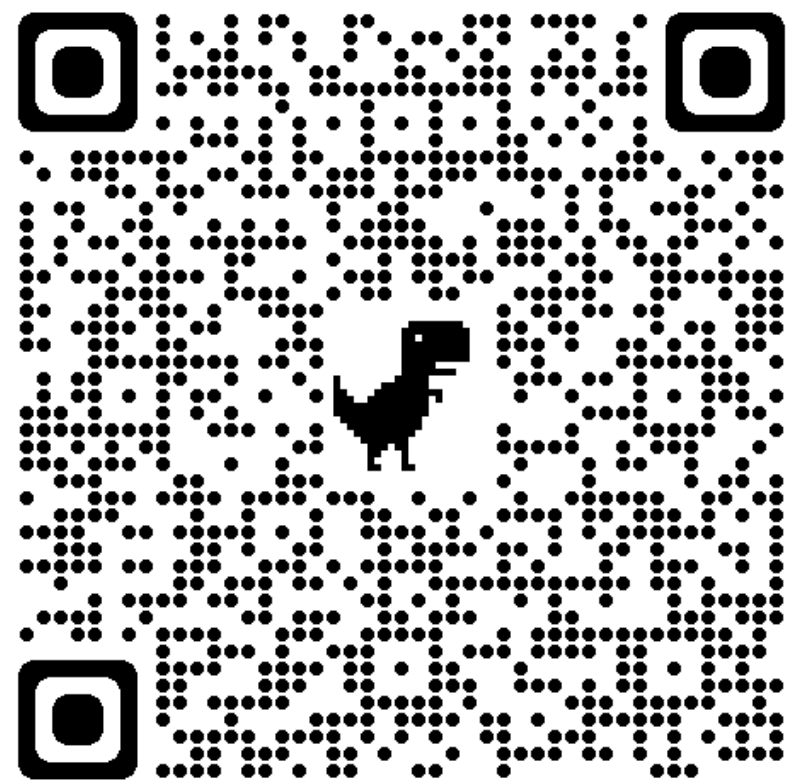
 Hint: 可將圓盤臨時置於B杆，也可將從A杆移出的圓盤重新移回A杆，但都必須遵循上述兩條規則。



遊戲示範

遊戲示範

以3杆3圓盤的河內塔為例，首先全都串在其中一根杆子上，由下到上，再由大到小順序放置。將所有的圓盤，依照規則，移到另一根杆子上。





求解

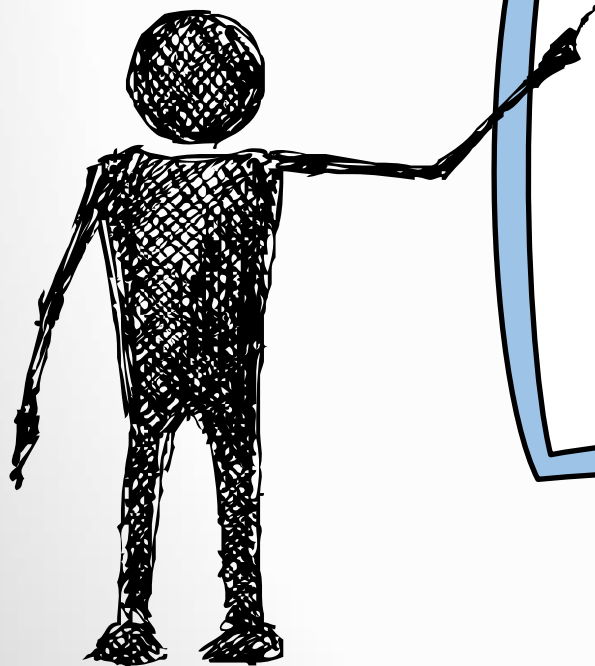
解法

法一

算法求解

法二

圖像解釋



算

求

法

解

算法求解

假設有三根杆子，其中一根杆子上有N個圓盤，大盤在小盤的下方。
如果要將它們全部移到另一根杆子，依規則，至少需移動 $T(N)$ 次，則：

$$T(1) = 1$$

$$T(2) = 2T(1) + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$T(3) = 2T(2) + 1 = 2^2 + 2 + 1 = 7$$

$$T(4) = 2T(3) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 15$$

⋮

$$T(N) = 2^{N-1} + 2^{N-2} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^N - 1$$

算法求解

若傳說屬實，則僧侶們需要 $2^{64} - 1$ 步才能完成這個任務。

也就是說 $N=64$ ，假設移動一次需一秒，將64個圓盤全數移到另一根杆子，總共需移動 $T(64)$ 次，也就是需要 $T(64)$ 秒，而 $T(64) = 2^{64} - 1 = 5.85 \times 10^{11}$ 秒，約585億年。

p.s. 整個宇宙到現在也才過了約137億年而已。



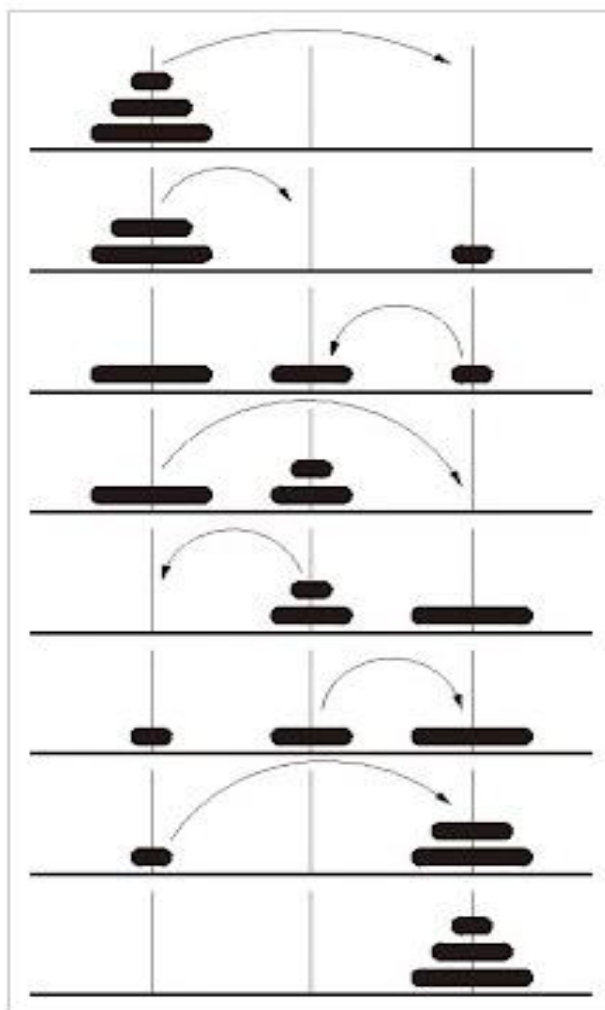
圖

解

像

釋

移動示意圖



圖像解釋及規則

數學家想到了一種更適合的語言來描述，就是用*無向圖來表示河內塔：

令每一個節點表示放置圓盤的其中一種可能位置，每一條邊表示一種移動圓盤的方法，如此則形成所有狀態及其移動的關聯圖。



無向圖：
圖形上我們用一條連接兩個定點的直線來代表，並且不畫上箭頭



p.s.這裡不考慮在兩個杆子之間沒有意義or來回移動的情況。

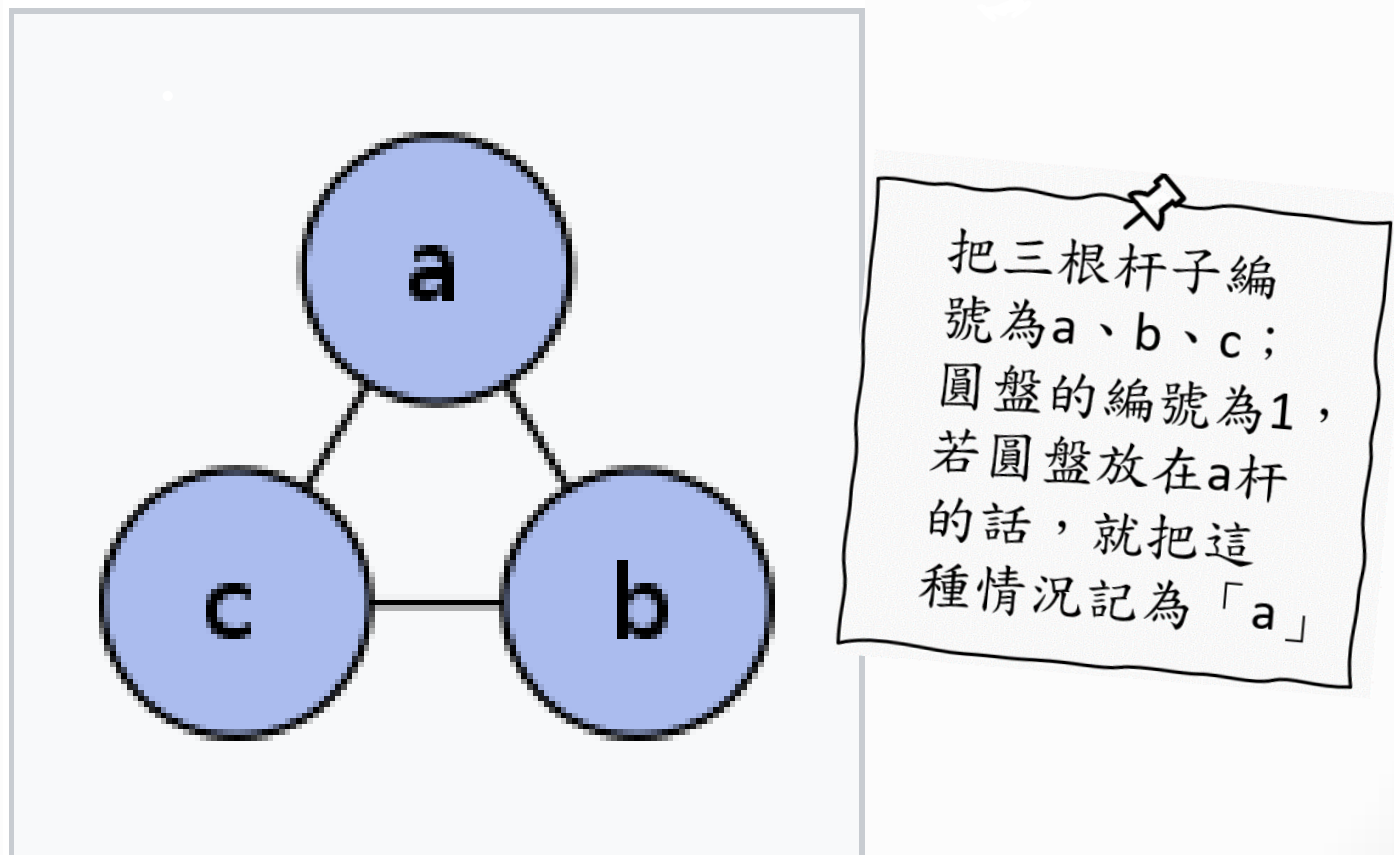
三杆一盤



把三根杆子編號為a、b、c；
圓盤的編號為1，
若圓盤放在a杆
的話，就把這種情況記為「a」

三杆一盤

對於只有一個圓盤的河內塔，可以表示為：



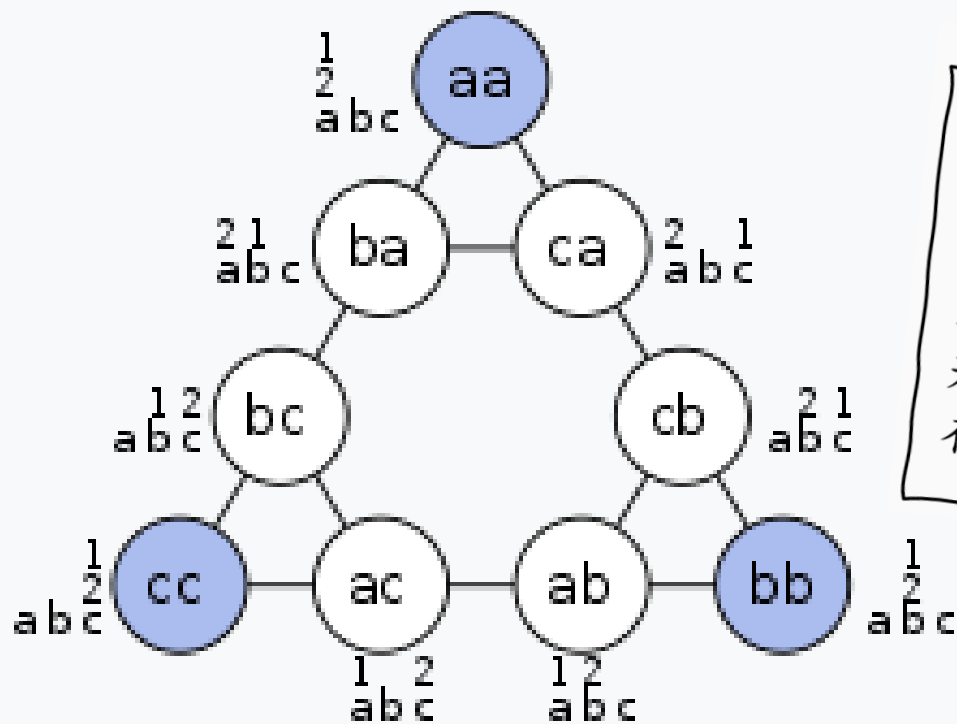
三杆兩盤



把三根杆子編號為a、b、c；
圓盤由小到大編號為1、2，
若兩個圓盤都放在a杆的話，
就把這種情況記為「aa」；
若1號圓盤在c杆，2號圓盤
在b杆，就記為「cb」。

三杆兩盤

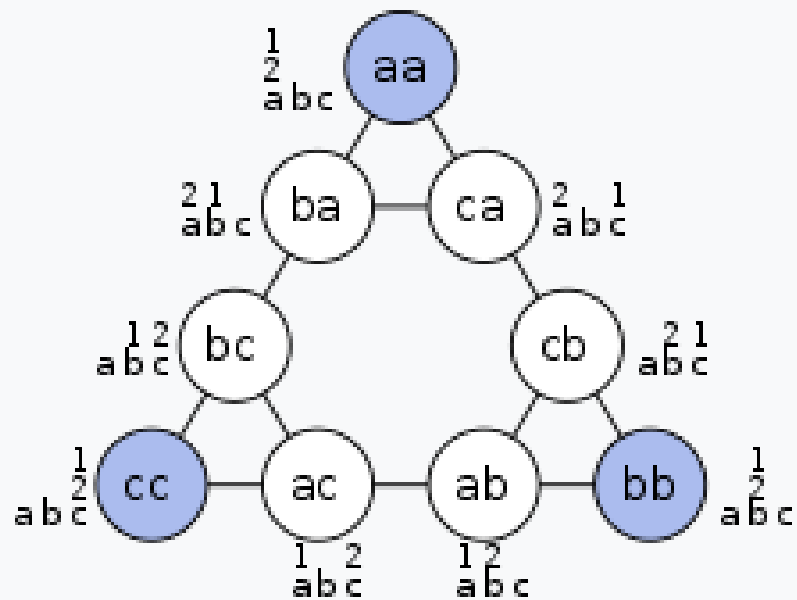
對於有兩個圓盤的河內塔，可以表示為：



把三根杆子編號為a、b、c；
圓盤由小到大編號為1、2。
若兩個圓盤都放在a杆的話，
就把這種情況記為「aa」；
若1號圓盤在c杆，2號圓盤
在b杆，就記為「cb」。

三杆兩盤

每一個節點的第二個字母表示更大的圓盤，且最初時沒有被移動；對於每一個頂端的小三角形，表示一個圓盤移動的方式。



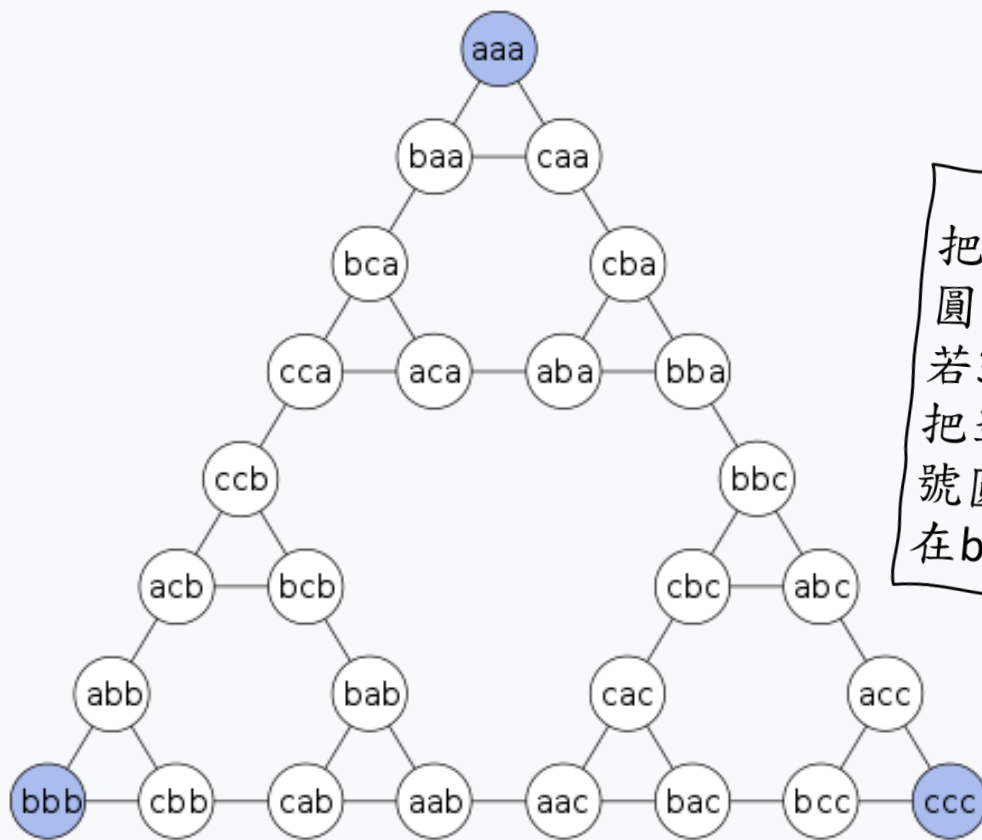
三杆三盤



把三根杆子編號為a、b、c；
圓盤由小到大編號為1、2、3。
若3個圓盤都放在a杆的話，就
把這種情況記為「aaa」；若1
號圓盤在c杆，2、3號圓盤都
在b杆，就記為「cbb」。

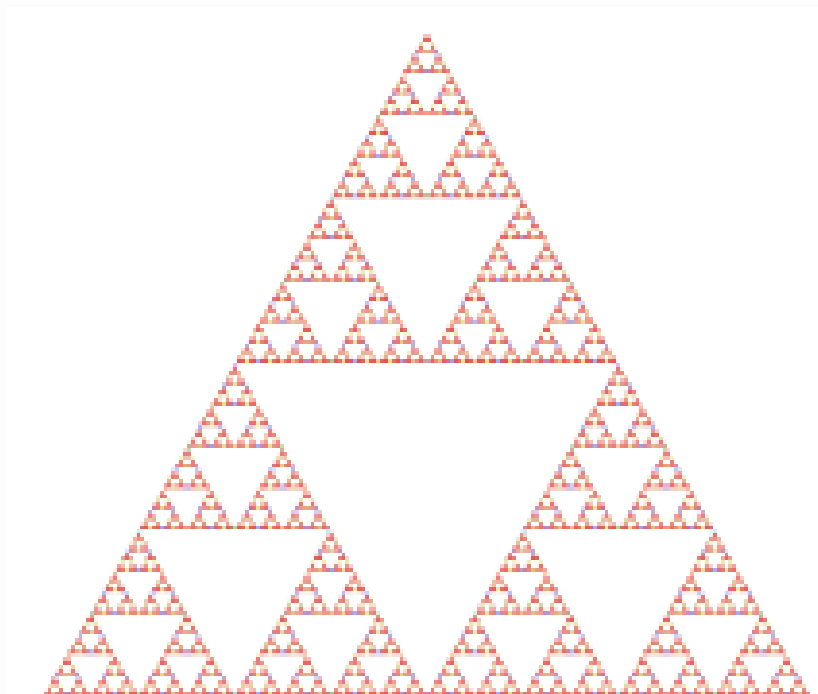
三杆三盤

對於有三個圓盤的河內塔，可以表示為：



把三根杆子編號為a、b、c；
圓盤由小到大編號為1、2、3。
若3個圓盤都放在a杆的話，就
把這種情況記為「aaa」；若1
號圓盤在c杆，2、3號圓盤都
在b杆，就記為「cbb」。

說明



具有3杆7個圓盤的河內塔的圖與7級的謝爾賓斯基三角形的聯繫

謝爾賓斯基三角形：

1. 取一個實心的三角形。（多數使用等邊三角形）
2. 沿三邊中點的連線，將它分成四個小三角形。
3. 去掉中間的那一個小三角形。
4. 對其餘三個小三角形重複以上步驟



結論

1. 對於具有 n 個圓盤的無向圖，有 3^n 個節點。
2. 對於 $n+1$ 個圓盤，就可以"複製" n 個圓盤時候的三角形圖，然後拼成一個新的大三角形圖，稍微改動一下，那麼這個大的三角形圖就可以用來表示 $n+1$ 個圓盤時的情況了!!!

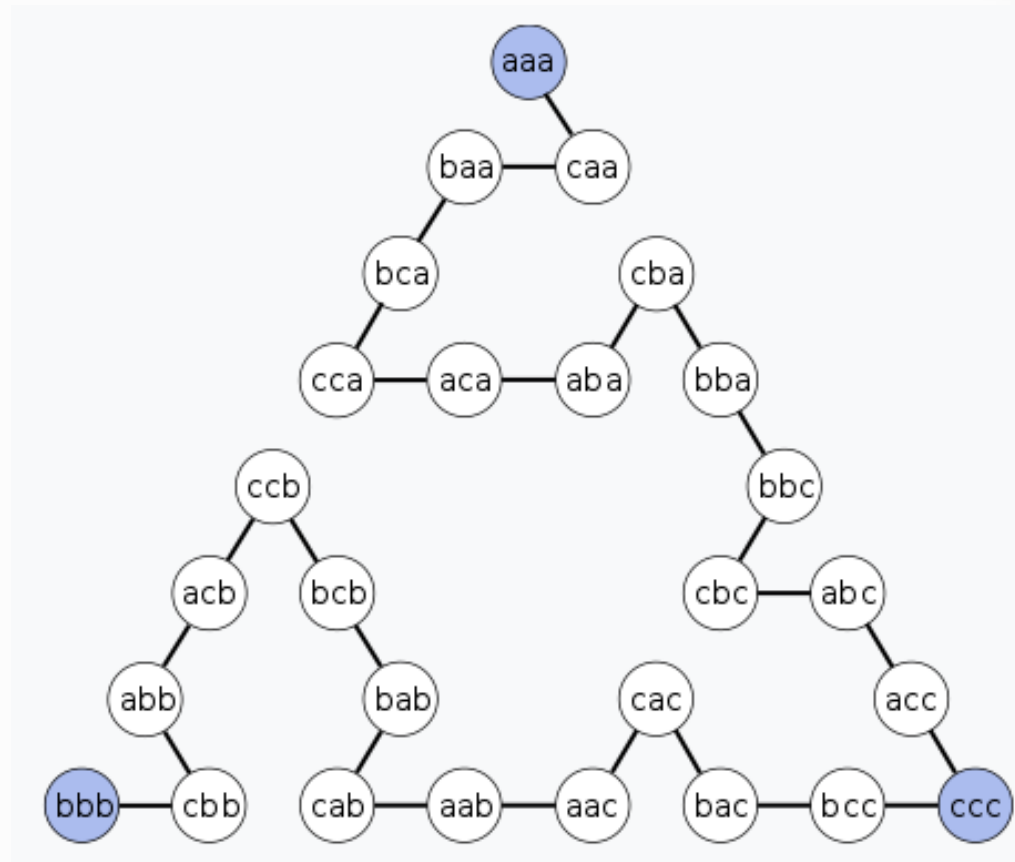


補充

哈密頓通路之最多步數的移法

「最多步」指的是「不重複的最多步走法」，也就是狀態說不能重複。

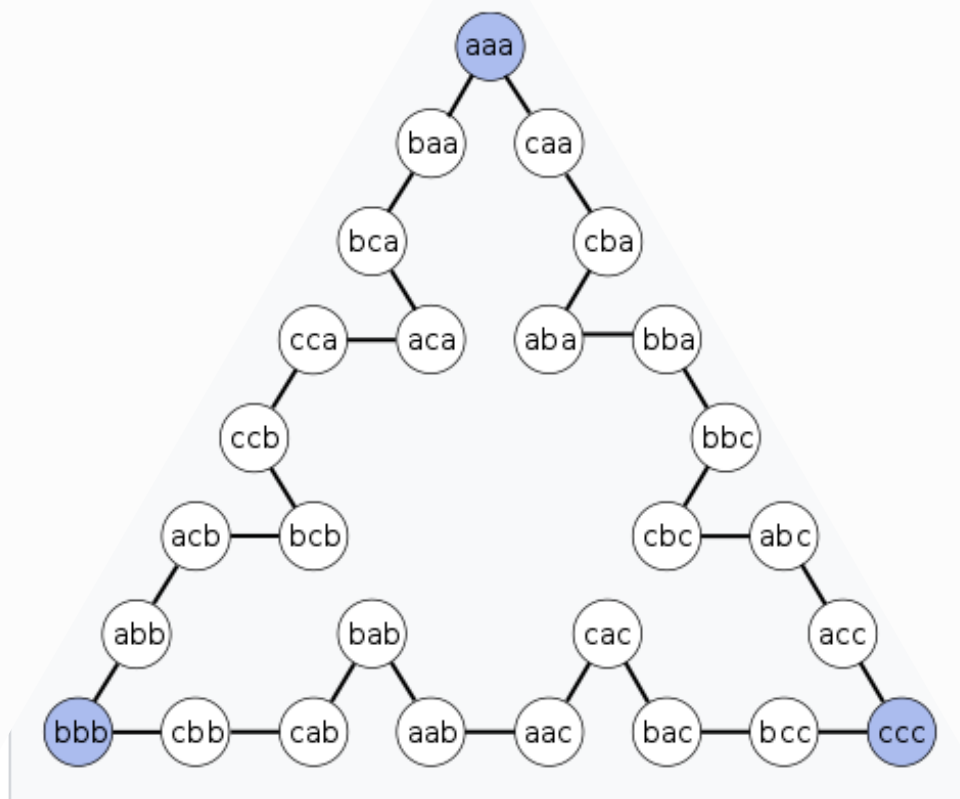
既然不能重複，那所有的狀態數 $3^n - 1$ 就是極限了（在討論3杆n盤的情況下）。



3圓盤從「aaa」移到「bbb」的最多步走法

哈密頓迴路

對於全部圓盤在一根杆子的情況下，將所有圓盤移動數次再回到原本的杆子的最短路徑只有一個。途中經過所有其他節點且只經過一次。





相關內容

相關內容

2011年電影《猿人爭霸戰：猩凶革命》曾出現利用河內塔來測試猩猩智商的內容。其後續電影《猩球崛起2》中也有類似的場景。



相關內容

九連環





參考資料

參考資料

- 維基百科:漢諾塔(港臺:河內塔)

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B1%89%E8%AF%BA%E5%A1%94>

- 河內塔遊戲

<http://www.mathland.idv.tw/game/hanoi/hanoi.htm>

- [離散數學] 河內塔難題再下一塔

<https://sites.google.com/a/g2.nctu.edu.tw/unimath/2017-11/Hanoi>

參考資料

- 維基百科:謝爾賓斯基三角形

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%AC%9D%E7%88%B%E8%B3%93%E6%96%AF%E5%9F%BA%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2>

- 維基百科:哈密頓迴路

<https://baike.baidu.hk/item/%E5%93%88%E5%AF%86%E9%A0%93%E8%BF%B4%E8%B7%AF/5575399>

THANKS
FOR
LISTENING

