

數學解題方法

Week 14

Jean yeh
2021. 05.26

問題 1

假設有某一種昂貴的檢測劑可測量血液中是否有愛滋病毒：當血液中有愛滋病毒時，與此檢驗劑混合會呈陽性反應，如果沒有病毒則會呈陰性反應。今假設兵役單位已抽取 1~6 號六位役男的血液備用。未檢驗前已經知道此六位役男中**最多只有一位感染愛滋病**，我們想知道是哪一位、或者根本六人都未染病。如果以檢測劑一一測試六位役男的血液，則需要六劑檢測劑。

如何提供一種只要四劑就足夠測驗六人的方法。且四次的檢測是事先安排好以讓四次檢測同時進行，我們要求不能參考檢測一的結果再決定檢測二時要檢測哪些人的混合血液。

	1 號	2 號	3 號	4 號	5 號	6 號	檢測結果
檢測一	取	取	取	不取	不取	不取	陽性
檢測二	取	不取	不取	取	取	不取	陰性
檢測三	不取	取	不取	取	不取	取	陰性
檢測四	不取	不取	取	不取	取	取	陽性

上表提供一種只要四劑就足夠測驗六人的方法。這個方法每一次檢測一群人的混合血液，以檢測一為例：我們將 1 號、2 號、3 號三人血液混合一起檢測，其結果呈陽性，所以顯示三人中有一人帶愛滋病毒。檢測二取了 1 號、4 號、5 號而結果呈陰性，所以這三人都不帶病毒。由以上兩檢測得知 2 號和 3 號其中必有一人帶愛滋病毒。利用類似討論於檢測三，也可排除 2 號感染的可能性，所以 3 號是染愛滋病者。更詳細的討論可以知道不管哪一種檢測結果都可以知道哪一位染愛滋病。以上四次的檢測是事先安排好以讓四次檢測同時進行，我們要求不能參考檢測一的結果再決定檢測二時要檢測哪些人的混合血液。

問題 1-1

假設已抽取 18 位役男的血液待測，且假設其中最多只有一位感染愛滋病。試仿上表設計一種使用 t 個檢測劑就能成功的檢測表，其中 $t < 18$ 且愈小愈好。試將數字 18 換成任意自然數 n 而推廣你們的結果。

問題 1-2

假設已抽取 n 位役男的血液待測，且假設其中最多只有兩位感染愛滋病。試討論使用 t 個檢測劑能成功檢測 n 位役男的檢測表所具有的數學性質，並自行選擇兩個差距愈大愈好的數 $t < n$ ，建構此表。

精準防疫100天

台灣模式

名詞解釋

敏感性：有病的人被檢出陽性的比例

特異性：沒病的人被檢出陰性的比例

		確診	
		+	-
檢驗	+	a 陽性個案	c 偽陽性
	-	b 偽陰性	d 真正陰性

$$\text{敏感性} = \frac{\text{檢驗陽性}(a)}{\text{有病的人}(a+b)}$$

$$\text{特異性} = \frac{\text{檢驗陰性}(d)}{\text{沒病的人}(c+d)}$$

真陽性：

有病者檢驗結果為陽性。

真陰性：

無病者檢驗結果為陰性。

偽陽性：

無病者被檢驗為陽性。

偽陰性：

有病者被檢驗為陰性。

假設今天台灣人口是兩千三百萬人，盛行率為 0.18%

PCR：

特異性(真陰性率) = 0.9999

敏感性(真陽性率) = 0.95

	染疫	健康
陽性反應	真陽	偽陽
陰性反應	偽陰	真陰

快篩：

特異性(真陰性率) = 0.99

敏感性(真陽性率) = 0.75

	染疫	健康
陽性反應	真陽	偽陽
陰性反應	偽陰	真陰

假設今天台灣人口是兩千三百萬人，盛行率為 18%

PCR：

特異性(真陰性率) = 0.9999

敏感性(真陽性率) = 0.95

	染疫	健康
陽性反應	真陽	偽陽
陰性反應	偽陰	真陰

快篩：

特異性(真陰性率) = 0.99

敏感性(真陽性率) = 0.75

	染疫	健康
陽性反應	真陽	偽陽
陰性反應	偽陰	真陰

數感實驗室

- **Facebook** : <https://www.facebook.com/numeracylab>
- **Youtube playlist** : <https://www.youtube.com/c/%E6%95%B8%E6%84%9F%E5%AF%A6%E9%A9%97%E5%AE%A4NumeracyLab/playlists>

UniMath

- **線性回歸** : <https://www.facebook.com/UniMathTw/posts/4487518594625473>
- **穩定婚姻配對問題** : <https://www.facebook.com/UniMathTw/posts/4480926505284682>
- **人與人的連結** : <https://www.facebook.com/UniMathTw/posts/4463661910344475>

穩定婚姻配對問題

假設現有 n 男 n 女，每個人對異性均排出其喜好的順序，下面圖7中的表裏顯示出4男4女，男生用 a, b, c, d 命名，女生用 A, B, C, D 為名。在某一男生所對應的橫列，及某一女生所對應的直行所在位置有二個數目，第一個數目表示這男生對這女生的排序，第二個數目表示這女生對這男生的排序；

例如

- (a, A) 位置所記載的1, 3表示 a 第1喜歡 A ，而 A 第3喜歡 a 。
- 就 a 來說，他第1喜歡 A ，第2喜歡 B ，第3喜歡 C ，第4喜歡 D ；就 A 來說，她第1喜歡 d ，第2喜歡 c ，第3喜歡 a ，第4喜歡 b 。

	A	B	C	D
a	1, 3	2, 3	3, 2	4, 3
b	1, 4	4, 1	3, 3	2, 2
c	2, 2	1, 4	3, 4	4, 1
d	4, 1	2, 2	3, 1	1, 4

UniMath — 奧數專區

IMO 總共考**兩天**，每天只有**三題**，而且給你**四個半小時寫三題**！！

你想說四個半小時寫三題怎麼會寫不完？

那請容我跟各位報告一下，上面這份考卷是 2017 年第一天的考卷，總共有 615 個選手。其中第三題，只有 **2 個人**答對！

我說的是全世界最頂尖的 615 個選手裡，只有 2 個人答對這一題！

事實上，IMO 題目難度之高，使得你只要兩天的六題裡面有拿到一題滿分，你就保證有榮譽獎 [3]。而要拿到銅牌、銀牌或是金牌，難度當然就更高。

UniMath — 奧數專區

- **出題範圍**：<https://sites.google.com/a/g2.nctu.edu.tw/unimath/shu-ao-zhuan-qu/coverage>
- **怎麼打分數**：<https://sites.google.com/a/g2.nctu.edu.tw/unimath/shu-ao-zhuan-qu/scheme>

問題 2

假設正實數 x, y, z 滿足 $xyz \geq 1$ 。證明：

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0$$

解答

假設存在 x, y, z 滿足 $xyz \geq 1$ 。

證明：
$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0$$

題目可由以下三步驟證明：

1. 需證明：
$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \leq 3$$

2. 需證明：
$$\frac{x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}}{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1$$

3. 需證明：
$$yz + xz + xy \leq xyz(x^2 + y^2 + z^2)$$

問題 3

假設實數 a, b 滿足

$$a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0$$

$$b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0$$

試求： $a + b$

問題 4

證明，對任意 $n \in \mathbb{N}^*$ ，恰有一組數 x_1, \dots, x_n 滿足
以下方程

$$(1 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 + x_n^2 = \frac{1}{n+1}$$