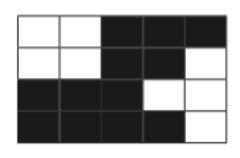
第一題

題目:給定一個 $m \times n$ 的網格,其中正方形的顏色為黑色或白色,如果有一些黑色正方形,它同一行的左邊有白色正方形,並且上方也有白色正方形,我們就稱黑色正方形擱淺(stranded)。請為一個 $2 \times n$ 的網格找一個式子,讓黑色正方形沒有擱淺。



這是一個黑色正方形沒有擱淺的4×5網格

第二題

從紙板上切出兩個不同半徑的圓,每個圓都 被細分為200個扇形,其中,100個扇形為白 色,另100個扇形為黑色,小一點的圓會放在 大一點的圓的上面,讓他們的中心點重合。 證明一個可以旋轉小圓圈,使扇形上的扇形 兩個圓圈對齊,小圓圈上的至少有100個扇形 位於大圓圈上的顏色相同。

第三題(代數)

$$f(x, y, z) = \frac{(xy+yz+zx)(x+y+z)}{(x+y)(x+z)(y+z)}$$

►在 $x \cdot y \cdot z$ 皆是任意正實數的條件下,尋找滿足f(x,y,z) =r的集合並證明之(r屬於任意實數)

第四題

找到所有的有序數對 (a, b),其中 a,b 為 整數日 3^a+7^b 為完全平方數

Ans.

根據題目很明顯 \mathbf{a} , \mathbf{b} 是正整數。先假設 $\mathbf{3}^a + \mathbf{7}^b = n^2$ 且 \mathbf{n} 為正整數。

利用同餘4的到以下列式: $n^2 \equiv (-1)^a + (-1)^b \pmod{4}$ 由於沒有平方數和2在除以4之下同餘,所以先分成兩種情況:

- (i) a為奇數,b為偶數
- (i) a為偶數,b為奇數

情況(i):設b=2c,則 3^a =(n- 7^c)(n+ 7^c)。 觀察後發現3不可以整除 $n-7^c$, $n+7^c$,但個別可 為3的次方 首先假設 $n-7^c=1$,則 $3^a=2\times 7^c+1$ 假如 c=0,則 a=1。所以得到 a=1,b=0。 所以假設c≥1,則 $3^a \equiv 1 \pmod{7}$ 。 很明顯的此假設為錯誤的。 因為在整數中最小的a=6,並不符合第一個假設 a為奇數,b為偶數。

情況(ii):設a=2c,則 7^a =(n- 3^c)(n+ 3^c)。 觀察後發現7不可以整除 $n-3^c$, $n+3^c$, 但個別可為7的坎方 首先假設 $n-3^c=1$,則 $7^b=2\times 3^c+1$ 假如 c=1,則 b=1。所以得到 a=2, b=1。 所以假設c≥1,則 $7^b \equiv 1 \pmod{9}$ 。 得知最小的整數b=3,因此假設b=3d,且d為奇數並d≥1。 設 $y=7^d$,則 $y^3-1=2\times3^c$ 。得知 $2\times3^c=(y-1)(y^2+y+1)$ 令(y-1)=2 × 3^u (u為部分正整數) 及 y^2 +y+1=3^v (部分 $y \ge 2$) 但由於 $3y=(y^2+y+1)-(y-1)^2$,所以3整除y(當3無法整除(y-1)

延伸題

找到所有的有序數對 (a, b),其中 a,b 為整數 $12^a + 5^b$ 為完全平方數。

Ans.

根據題目很明顯a,b是正整數。先假設 $2^a + 5^b = n^2$,且n為正整數。

利用同餘5的到以下列式: $n^2 \equiv 2^a \pmod{5}$

此列式蘊含2整除a,所以令c為正整數且整除2c=a。

$$(2^2)^c + 5^b = n^2 \implies 5^b = (n - 2^c)(n + 2^c)$$

 $(n-2^c)$, $(n+2^c)$ 兩者皆為**5**的次方

$$\exists s, t \in N | b = s + t, s > t, 5^s = n + 2^c, 5^t = n - 2^c$$

$$5^s = n + 2^c$$
 (1)

$$5^t = n - 2^c$$
 (2)

將 (2) 帶入 (1) 得到 $5^s - 5^t = 2 \times 2^c$

將 5^t 提出得到 $5^t((5^s \div 5^t) - 1) = 2 \times 2^c$

很明顯5無法整除 2×2^c ,所以t=0且s=b。

```
因此得知5^b - 1 = 2 \times 2^c (3)
5^b - 5 + 2^2 = 2 \times 2^c (4)
5^b - 5 = 2 \times 2^c - 2^2 (5)
5((5^b \div 5) - 1) = 2^2((2^c \div 2) - 1) (6)
5 \mid l.h.s \text{ of } (6) \implies 5 \mid r.h.s \text{ of } (6)
由(6)得知·5|(2^c \div 2) - 1 \Rightarrow 4|c - 1(7)
l.h.s of (6) \equiv 0, 20, 27 \pmod{31} | r.h.s of (6) \equiv 0, 4, 12, 28, 12
29 ( mod 31 )
使兩邊相等的唯一方法就是整除31
由於31|2^2,所以31|(2^c \div 2) - 1 \Rightarrow 5|c - 1 (8)
根據(7)和(8)得知 20|c-1 \Rightarrow 25|(2^c \div 2)-1 \Rightarrow 5|(5^b \div 5)-1
故b=1帶入(5)得知c=1,所以a=2,此時的n=3。
```

第五題

在平面上有一個點集合,其性質是集合中任三個點都能以半徑為1的圓覆蓋。

試證明集合中所有的點的都可以半徑為1的圓覆蓋。