

# IMO 三培

葉均承

國立高雄師範大學

Jun, 07, 2021

# 組合極值問題

## 分塊估計

給定集合  $X$ ,  $A$  是  $X$  中的某個子集合, 求  $|A|$ 。基本題型：

- ①  $A$  中任意  $r$  個元素都滿足性質  $p$ , 求  $|A|$  最大值。將  $X$  分為  $X_1, X_2, \dots, X_t$  使得  $X_i$  中任意  $r$  個元素都不具有性質  $p$ , 則  $|X_i \cap A| \leq r - 1$ 。
- ②  $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t$ , 由  $|X_i \cap A| = k_i$ , 得到  $|A| \leq k_1 + \dots + k_t$ 。
- ③ 有時候  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  具有性質  $p$ , 任意的集合  $A + k = \{a_1 + k, a_2 + k, \dots, a_n + k\}$  也有性質  $p$ , 則可將  $X$  均勻分塊。

# 問題

設  $M = \{1, 2, \dots, 2005\}$ ,  $A$  是  $M$  的子集, 若對於任何  $a_i, a_j \in A$ ,  $a_i \neq a_j$  都能以  $a_i, a_j$  為邊長唯一地確定一個等腰三角形, 求  $|A|$  的最大值。

# 問題

設  $A$  是正整數集合  $\mathbb{N}^*$  的子集, 對任何  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$  有  $|x - y| \geq \frac{xy}{25}$ , 求  $|A|$  的最大值。

# 問題

設  $A \subset \{0, 1, 2, \dots, 29\}$ , 滿足：對任何整數  $k$  及  $A$  中任意數  $a, b$  (可以相同),  $a + b + 30k$  均不是兩個相鄰整數之積, 是求出所有元素個數最多的  $A$ 。

# 問題

設  $A$  是  $X = \{1, 2, \dots, 1989\}$  的子集，對任何  $x, y \in A$  有  $|x - y| \neq 4, 7$ 。求  $|A|$  的最大值。

# 整體估計

為了估計某個變量的變化範圍，可將其放在數個變量構成的整體中一起考慮，從整體上估計它們的取值範圍，進而得到原特定變量的變化範圍。



# 問題

求最大的正整數  $A$ ，使  $1, 2, \dots, 100$  的任何一個排列，都有 10 個連續的項的和不小於  $A$ 。

# 問題

設  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 30$ ) 是  $M = \{1, 2, \dots, 1990\}$  的子集,  
 $|A_i| \geq 660$ 。求證：存在  $i, j$ , ( $1 \leq i < j \leq 30$ ), 使  $|A_i \cap A_j| \geq 200$ 。

# 問題

有 10 人到書店買書，已知每人都買了三種書，任何兩人所買的書都至少有一種相同。問：買的人數最多的一種書最少有幾人購買。

# 問題

一群童子軍，年齡是 7 到 13 的整數，來自 11 個國家。求證：  
至少有 5 個孩子，對其中的任何一個孩子，在童子軍中與其同年  
齡的人多於同國籍的人。

# 參數估計

變動的因素太多時，引入新的參數，將整體問題參數化，可將題目轉換唯一元/二元參數函數，使題目化簡。

# 問題

已知 20 名體操運動員表演後，九名裁判分別給她們判定 1 到 20 明得名次。已知，每一個運動員得到的九個名次中，最大者與最小者至多相差 3。現將個人得到的名次的和排列為  $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_{20}$ 。求  $c_1$  的最大值。

# 問題

有  $r$  個人參加象棋比賽，每兩人都比一局，每局勝者得 2 分，負者得 0 分，平局每人得 1 分。比賽後，恰有一人勝的局數最少，且只有她得分最多。求  $r$  的最小值。

# 問題

有  $n$  ( $n \geq 5$ ) 隻足球隊進行單循環賽，每兩隊比賽一場，勝隊得 3 分，負隊得 0 分，平局各得 1 分。結果取得倒數第三名的隊伍，得分卻比名次在前面的隊都少，比後兩名都多；勝場數比名次在前面的隊伍都多，卻比後兩名少。求隊伍數  $n$  的最小值。



# 問題

有 1000 張編號為 000, 001, ..., 999 的證件, 和 100 個編號為 00, 01, ..., 99 的盒子。若盒子的號碼可由證件的號碼劃掉一個而得到, 則該證件可以放入該盒子中。若選擇  $k$  個盒子可以裝下所有證件, 求  $k$  的最小值。

# 算兩次

這是估計的一種典型，基本概念為：

對於集合  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ，設  $F = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  是  $X$  的子集（記得注意子集的交集是否非空），其中  $r_i = |A_i|$ 。希望求得某種計算量  $\Omega$  的個數  $|\Omega|$ 。

- ① 一方面，對整體  $X$  計算，考慮每個元素對整體的貢獻。
- ② 另一方面，從  $F$  出發，考慮計算量在每個子集的數量（記得扣掉交集的個數）。

算兩次的關鍵是『算什麼』！

# 問題

某次會議中有 30 名議員，每兩個議員或為政敵，或為朋友。而且，每個議員都恰有六個政敵，對於由三個議員組成的委員會，若這三個人中任何兩個人都是朋友或是任何兩個人都是政敵，則稱之為奇異委員會。問：共有多少個奇異委員會？

# 問題

平面上有 18 個點，其中任意三點不共線，每兩點用線段連接，將這些線段染紅藍二色，每條線段只染一種顏色。已知其中某點 A 引出的紅色線段為奇數條，且其餘的 17 點引出的紅色線段數互不相等。

- 1 求此圖中紅色三角形的個數。
- 2 求此圖中恰有兩邊為紅色的三角形的個數。

# 問題

設  $S = \{1, 2, \dots, 15\}$ 。從  $S$  中取出  $n$  個子集  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ，滿足下列條件：

- ①  $|A_i| = 7, i = 1, 2, \dots, n$ 。
- ②  $|A_i \cap A_j| \leq 3, 1 \leq i < j \leq n$ 。
- ③ 對  $S$  中任何三元子集  $M$ ，存在某個  $A_k$  使得  $M \subset A_k$ 。

求這樣的字集個數  $n$  的最小值。

# 問題

有八位歌手參加藝術節，要為他們安排  $m$  次演出，每次由其中 4 未登台表演，要求八位歌手中任意兩位同時演出的次數都一樣多。請設計一種方案，使得演出的次數  $m$  最少。。