



生活中的數學

數學思維與解題 第一組 期末報告



前言

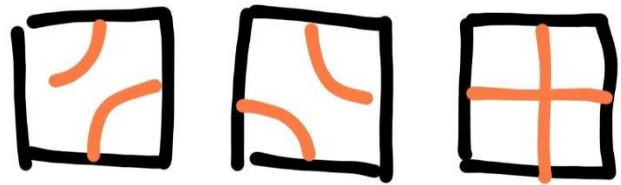
在電影、動畫、遊戲等娛樂內容中，是否有注意到有些問題或情況，可以用數學方法討論。根據不同決策者或視角，利用機率、邏輯推理等方法，對控管風險或尋求利益最大化提供決策的參考，嘗試找出最佳策略。

壹、嗜謊者-迷宮遊戲

一、前言

這裡我們會討論作品中的說法是不是正確的，規則如下：

在 6×6 的格子裡有一個迷宮由右邊三種路線組成(如圖一)，其中十字的只有 1 個，而且在起點，到終點的路徑是一條最短的路徑，經過每一格，最後到達終點。



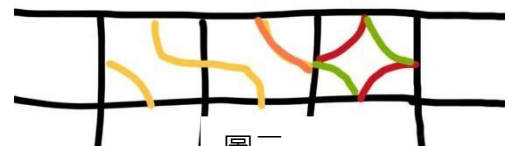
圖一

漫畫有提到終點只有可能是六個，而且經過的邊會是 43 個。接下來要驗證是否是正確的。

二、驗證過程

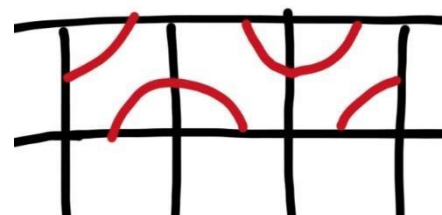
1. 邊的情況說明

如圖二，設有連到外面，則會出現黃色線的情況，這時候到終點的路徑一定得經過橘色，但如果是紅色的情況，不可能相連。如果是綠色的情況，一樣會連到外面，也不符合。



圖二

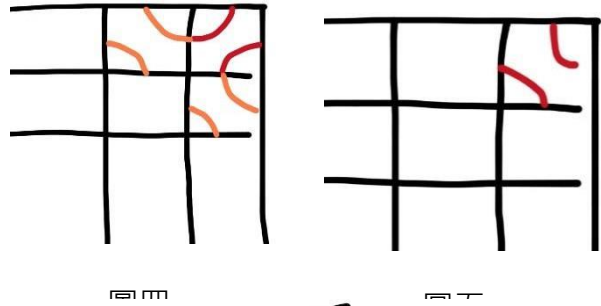
所以，邊的情況必定呈現如圖三的情況。



圖三

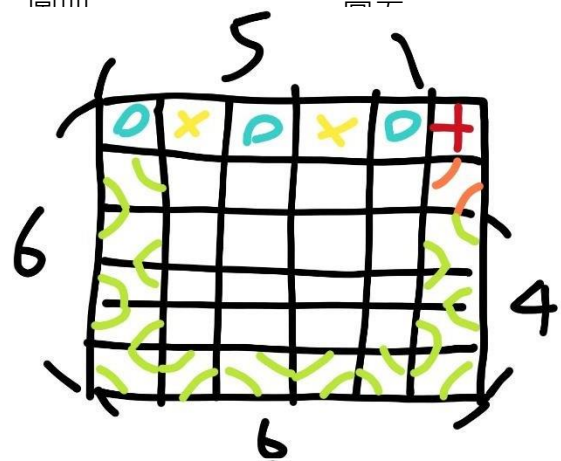
2. 角落情況說明

如圖四，如果角落是紅色這種情況，旁邊的格子根據上一個推論只能是橘色這樣，但此時角落的格子無法有路徑經過，所以不可能是紅色這種情形。所以角落只有可能是圖五的情況。

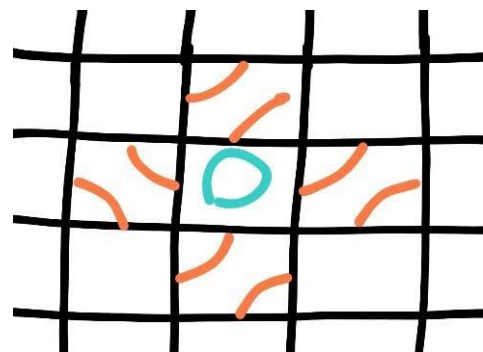


3. 終點的位置

如圖六，已知起點在右上角，假設一開始往下，前面推導出來在邊上可能的路徑必需兩兩一組，只有最上的邊是奇數個，如果分在有畫綠色的格子，會出現不只一個邊是奇數無法符合。如果分在黃色叉的格子，會無法分成兩兩一組。最左邊的青色圈，雖然會導致最左邊剩餘的格子數為奇數，但多出來的可以當作到終點的那格，跟終點算作一對，所以只有青色圈的三格有可能。而假設終點在中間部分的話，會有四條有可能的路線可以到，但只有一條是可行的，代表其他的是互相連接，或連到外面(前面推導過不行)。但互相連接是兩個一組，總共有三條，所以不行在中間。



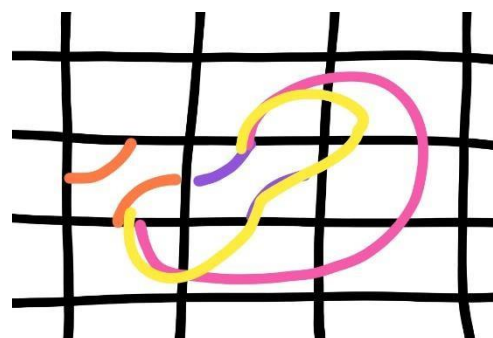
圖六



圖七

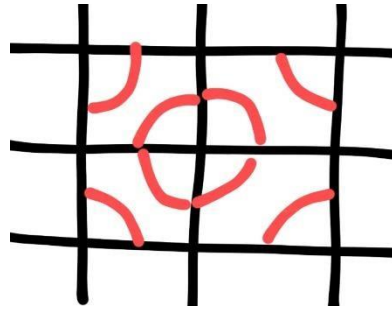
4. 閉環

在走迷宮時有可能存在閉環，如圖八，假設從紫色開始，如果到橘色改變轉彎方向，會有黃色跟粉色兩種情形能形成閉環，黃色的路徑會導致紫色兩條都在閉環上，不符合。如果是粉色的路徑(圖形只是示意圖，實際上不會長這樣)會讓其中一條紫色在閉環上，另外一條在閉環裡，都無法到達。所以一定是同個方向旋轉。

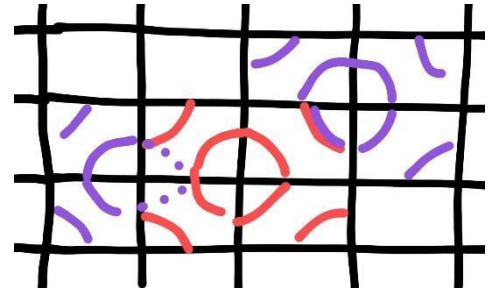


圖八

同時呢，閉環一定是圓形，而且四周不會有圓，因為如果在側邊會跟原本的圓衝突，而如果在斜角會導致有格子無法經過。

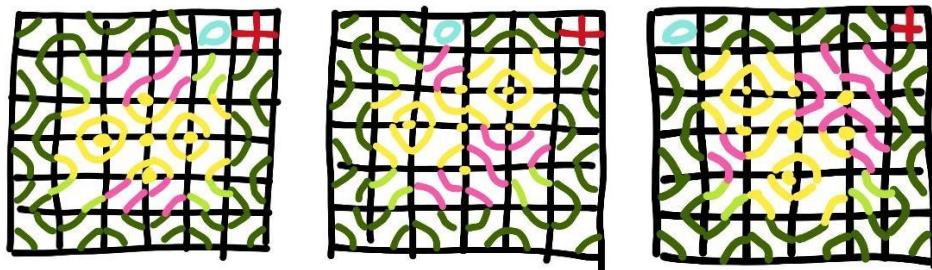


圖九



圖十

三、驗證結果

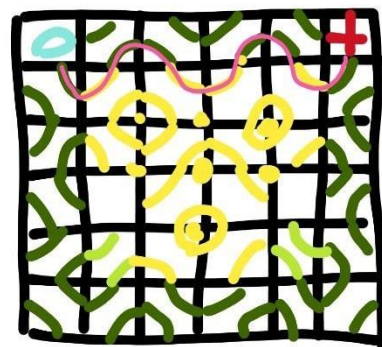


如上圖，針對三種解去討論，顏色說明如下：

1. 紅色是起點
2. 淺藍色是終點
3. 墨綠色是邊上確定的格子
4. 淺綠是根據條件推出的格子
5. 黃色的點是有可能產生閉環的部份
6. 黃色的圈是實際選中的
7. 粉色是將剩於的格子連成符合條件的

則我們可以得知：邊的數目=2(一格有 2 條線)×34(除了起點跟終點的格子)+1(頭尾都有)-18(除了起點跟終點邊上的格子)-4x(閉環會減少的線)≥43(漫畫給的要驗證)

由上面三解可發現，黃色的點可能產生的閉環最多有可能是 2 個，雖然黃色的點可能產生的閉環最多可能是 3 個但如果是三個，只有可能是右圖的情況，不符合每格都經過的條件。



貳、 狂賭深淵-雙重印地安撲克

一、 背景介紹

私立百花王學園舉辦「債務整理大集會」，蛇喰夢子和早乙女芽亞里被分到同一組，同一組的還有木渡潤和他的奴隸蕾菜美，四人以雙重印地安撲克展開對決讓自己的債務減輕甚至歸零，將負債由小到大排列，依照名次分配。

二、 遊戲規則介紹

四人各拿一張底牌及一張公開牌，每人只能看自己的底牌及其他人的公開牌，之後下注比誰的牌大，每人最小需下注一枚籌碼，可棄牌，每人初始有十枚籌碼，每個人的籌碼面值不同，共十局，在結束時以金額多寡排名(對子最大，同花其次，散牌最小，若同牌型則比點數合計大小)

三、 原作遊戲過程與分析

1. 申報金額

- 夢子：3100 萬(實際 500 萬)
- 芽亞里：500 萬(實際 3,100 萬)
- 潤：100 萬
- 菜菜美：200 萬

2. 遊戲過程

前兩局潤贏了不少籌碼，占了巨大優勢，但第三局夢子直接下注三枚自己的籌碼，並以合計點數較大的同花戰勝潤的同花。不過在第四回合時，潤突然發現其實夢子和芽亞里有互相提示對方的牌，所以在芽亞里想誘導自己跟注時選擇棄牌，殊不知芽亞里其實只有散牌，就這麼白白送了機會。接下來兩局潤皆被玩弄，正當潤疑惑的時候，夢子告訴他，原來其實他早就發現潤和菜菜子也有互相提示對方的牌，同時潤自己的行為舉止也早就透露一切了。在接下來的兩局潤也被摸透，不過第九局時，在脅迫菜菜美把夢子的籌碼賭下去後，潤成功以合計點數較大的同花戰勝夢子的同花，成功逆轉情勢。但在第十局時，事情又有反轉，菜菜美在夢子的激將下跟注，並以對子成功獲得第一，而潤得第二，就當一切塵埃落定時，結果卻是芽亞里第一，菜菜美第二，夢子第三，潤反而最後，原來因為夢子和芽亞里當時申報了對方的債金，所以其實兩人的籌碼面值是對調的，而兩人也就此成功打敗了潤並且成功還清債務。

在整場遊戲中，一共有三種策略被執行。第一和第二種皆為提示對方的手牌，分別是夢子和芽亞里兩人以及潤與菜菜美兩人，而過程中又因潤的表情和動作舉止過於明顯而被看透，等於是讓夢子和芽亞里多了更多的資訊。最後一種則是透過規則漏洞，夢子和芽亞里互相申報對方的債務金額，進而讓兩人的籌碼面值對調，成功的騙過所有人。

四、 正常策略(完全公平公正，無合作)

在沒有人合作的情況下，該賭同花還是對子，該跟注或棄牌，這時就要觀察一下場上的牌：

1. 有 n 個人與自己同花色=>同花機率 $= (12-n)/48$

for $n=0,1,2,3$

2. 有 n 個人與自己同數字=>對子機率 $= (3-n)/48$

for $n=0,1,2,3$

(這裡可注意到，當其他三人與自己同數字時，除了確定自己不是對子外，同時其他人也絕不會是對子，所以此情況下只要考慮同花即可)

五、 有合作時的策略

在作品中有合作的策略使他們能更好的去行動，這裡我們來討論合作時可以有怎麼樣的行動。這裡分為知道自己的公開牌或對方的手牌的資訊，以及知道花色、數字或兩者的情況。

1. 知道自己的公開牌資訊

- ①. 花色：若為同花色則可視情況行動；若為不同花色則考慮對子的可能性再行動
- ②. 數字：若為同數字則視情況下注；若為不同數字則考慮同花的可能性再行動
- ③. 兩者：視手牌情況以及其他人的牌來下注或棄牌

2. 知道對方的手牌資訊

- ①. 花色：若為同花色則可視情況行動；若為不同花色則考慮對子的可能性再行動
- ②. 數字：若為同數字則視情況棄牌；若為不同數字則考慮同花的可能性再行動
- ③. 兩者：視合作方手牌情況以及自己的牌來行動

六、在籌碼面值不同的情況下

籌碼面額較大的人會更謹慎的行動，而籌碼面額較小的人在情勢有利時相對會比較敢跟注，再加上大家籌碼有限，是否跟注關係到往後局勢的優劣勢。

例：現在 C 和 D 棄牌，剩下 A 和 B 在比，而 A 的籌碼面值為 100 萬，B 為 500 萬，目前雙方尚未下注，場上有四人的籌碼各一(為首輪，大家的籌碼數皆為十，雙方皆不知道對方的牌好壞)，以下為兩人的利益表

| 可能獲利(單位：萬元) | 下/跟注 | 棄牌 |
|-------------|-------------|---------|
| A | $+500b+C+D$ | $-100a$ |
| B | $+100a+C+D$ | $-500b$ |

其中 a 和 b 為 A、B 兩人下注的籌碼量，C 和 D 為 C、D 兩人的籌碼面值，但因兩人皆已棄牌，不納入討論，故以 C、D 代為之。由此可見，B 下注一枚他的籌碼等於 A 的五枚籌碼，所以相對於 A，B 在下注時會更謹慎，同時在情況較為不利時也較可能會選擇棄牌。

參、桌遊-達文西密碼

一、基本規則介紹與可討論點

在開始討論前，我們先了解這個桌遊的基本規則：

1. 總共有白黑兩色 0~11 還有-共 26 張牌，-是特殊牌，可以放任意位置
2. 手牌要由小到大由左至右排列，數字一樣黑排左邊
3. 遊戲開始時，每個人依照人數從除了-以外的部分拿牌 2~3 人拿 4 張,4 個人拿 3 張
4. 之後每回合從中間拿一張牌，並猜對手的一張牌
5. 如果猜對對手要翻開，你可以選擇繼續猜，猜錯必須翻開剛才拿的牌，之後輪到下一位玩家
6. 如果中間沒牌，就直接猜對手的牌，猜對一樣可以繼續，猜錯則是自己選一張手牌翻開
7. 依照這樣進行，當玩家手牌全部翻開了則淘汰出局，直到場上只剩一位玩家，遊戲結束。

針對以上的規則，我們想了幾個討論點(以下皆以 2~3 人的情況討論)：

- 一開始該怎麼拿
- 每回合要拿那種顏色的牌
- 如何猜牌
- 特殊牌-要擺哪

這幾點要做的目標都是一樣的也就是，增加自己牌的可能組合，減少對手的可能組合

二、討論

以下開始討論。

1. 一開始該怎麼拿

依照不同的顏色排列情況可以算出可能的組合數(暫不考慮-)

黑 0 對應到 1，黑 1 對應到 3，...，黑 11 對應到 23

白 0 對應到 2，白 1 對應到 4，...，白 11 對應到 24

例如：排列是黑黑白黑白

一開始要先符合奇偶性

1,2,1,1,1,18

1 奇數

1+2 奇數

1+2+1 偶數

1+2+1+1 奇數

1+2+1+1+1 偶數

1+2+1+1+1+18=24

18÷2=9

可看作 9 個 2 和 5 個,排列，會有 2002 種

例如 222,2,22,2,2,2

可以推回原本應該是

7,11,16,19,22=> 黑 3,黑 5,白 7,黑 9,白 10

利用此方法可以算出一開始拿牌的組合數，如下：

①. 4 黑=> $C(12,4)=495$ 種

②. 3 黑 1 白 $C(12,3) \times C(12,1)=2640$ 種

- 黑黑黑白=>715 種
- 黑黑白黑=>715 種
- 黑白黑黑=>715 種

➤ 白黑黑黑= \rightarrow 495 種
期望值：673.75 種

③. 2 黑 2 白 $C(12,2) \times C(12,2) = 4356$ 種

➤ 黑黑白白= \rightarrow 715 種
➤ 黑白黑白= \rightarrow 1001 種
➤ 黑白白黑= \rightarrow 715 種
➤ 白黑黑白= \rightarrow 715 種
➤ 白黑白黑= \rightarrow 715 種
➤ 白白黑黑= \rightarrow 495 種
期望值：755.72 種

④. 1 黑 3 白 $C(12,1) \times C(12,3) = 2640$ 種

➤ 白白白黑= \rightarrow 495 種
➤ 白白黑白= \rightarrow 715 種
➤ 白黑白白= \rightarrow 715 種
➤ 黑白白白= \rightarrow 715 種
期望值：673.75 種

⑤. 4 白= $\rightarrow C(12,4) = 495$ 種

由此可見，2 黑 2 白的拿法較好(其實還需考慮遇到對手不同拿法時，是否還是此拿法最好，但所須計算有些複雜暫不考慮)

2. 每回合要拿那種顏色的牌以及如何猜牌

各個位置不同數字出現的機率並不相同，以下簡單討論幾種情況：

①. 白 3 和白 10 之間有 3 張白，這三張分別為編號 1,2,3，共二十種可能

| | 白 4 | 白 5 | 白 6 | 白 7 | 白 8 | 白 9 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 編號 1 | 10 | 6 | 3 | 1 | | |
| 編號 2 | | 4 | 6 | 6 | 4 | |
| 編號 3 | | | 1 | 3 | 6 | 10 |

- ②. 白 3 和白 10 之間有 4 張白，這三張分別為編號 1,2,3,4，共十五種可能

| | 白 4 | 白 5 | 白 6 | 白 7 | 白 8 | 白 9 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 編號 1 | 10 | 4 | 1 | | | |
| 編號 2 | | 6 | 6 | 3 | | |
| 編號 3 | | | 3 | 6 | 6 | |
| 編號 4 | | | | 1 | 4 | 10 |

- ③. 白 4 和白 10 之間有 3 張白，這三張分別為編號 1,2,3，共十種可能

| | 白 5 | 白 6 | 白 7 | 白 8 | 白 9 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 編號 1 | 6 | 3 | 1 | | |
| 編號 2 | | 3 | 4 | 3 | |
| 編號 3 | | | 1 | 3 | 6 |

一個區間最旁邊的 2 張牌出現邊界值的可能性很高，所以猜牌從兩邊猜較好；而猜中是否繼續則看抽到的牌或手牌而定。同時推薦讓手牌保持黑白兩色平衡，數字分散，如果一種顏色過多會導致可能的組合數較少，如果數字過於集中會較容易被猜到

3. 特殊牌-要擺哪

特殊牌是為了擾亂對手的判斷，不要太快被發現是最好的，所以將特殊牌擺在範圍較大的區域較或較沒有翻開的牌附近是最好的策略。

肆、參考資料

噬謊者—作者及繪者：迫稔雄

狂賭深淵—作者：河本焰；繪者：尚村透

DA VINCI CODE 終極密碼—作者：Eiji Wakasugi

投影片中所使用圖片：《狂賭深淵》動畫版及真人版劇照；達文西密碼桌遊盒上圖片