

魔幻三角形

Magic Triangle

第7組

410631242 吳承遠

410531236 林柏安

410831242 吳明珠

410631210 高浚洋

410731105 馬紹恆

三角形求角度/邊長常用定理

1. 相似形

2. 全等

3. 平行線截比例線段

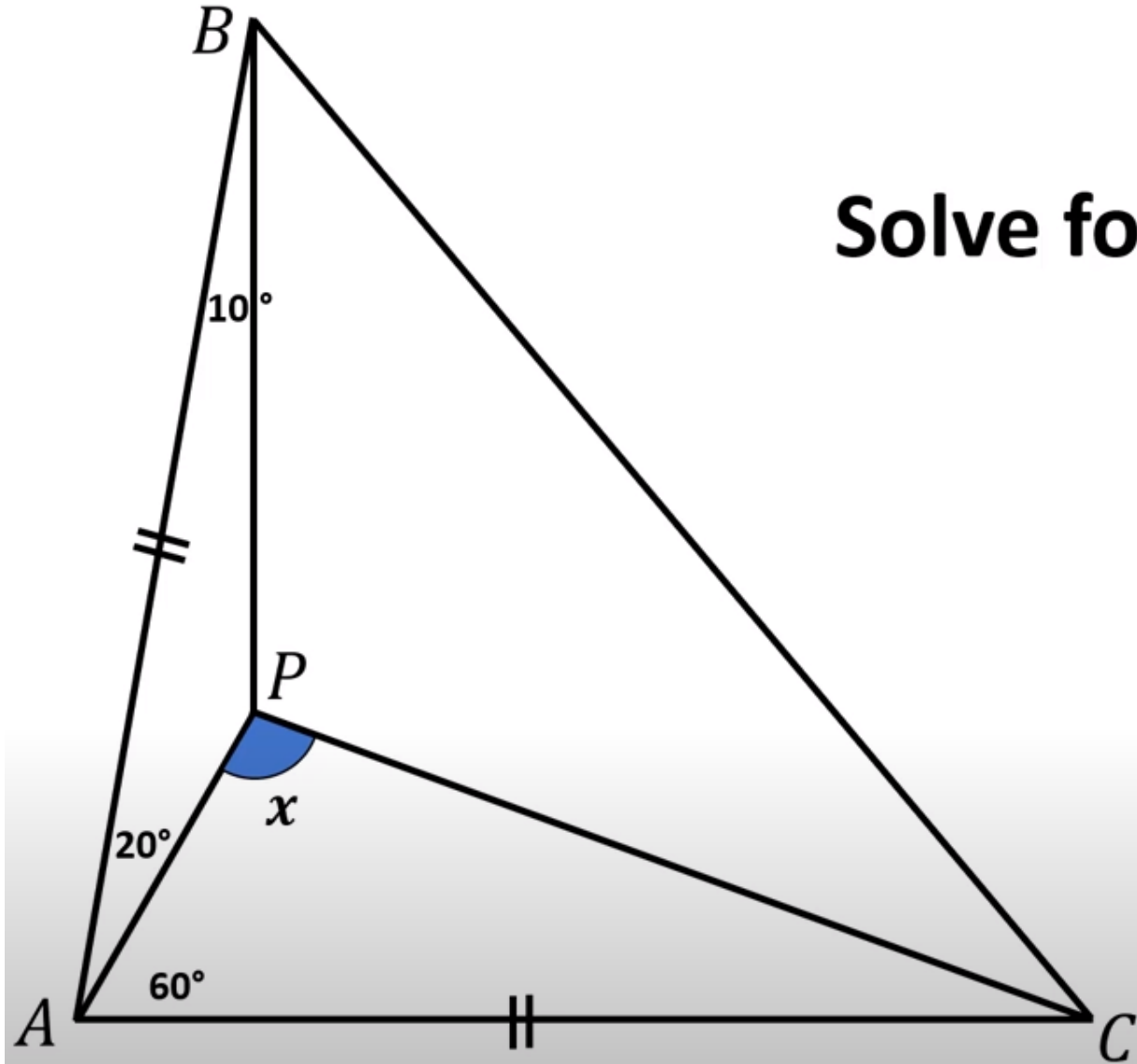
4. 餘弦定理

5. 輔助線

6. 三角形三心性質

Question:

Solve for x .



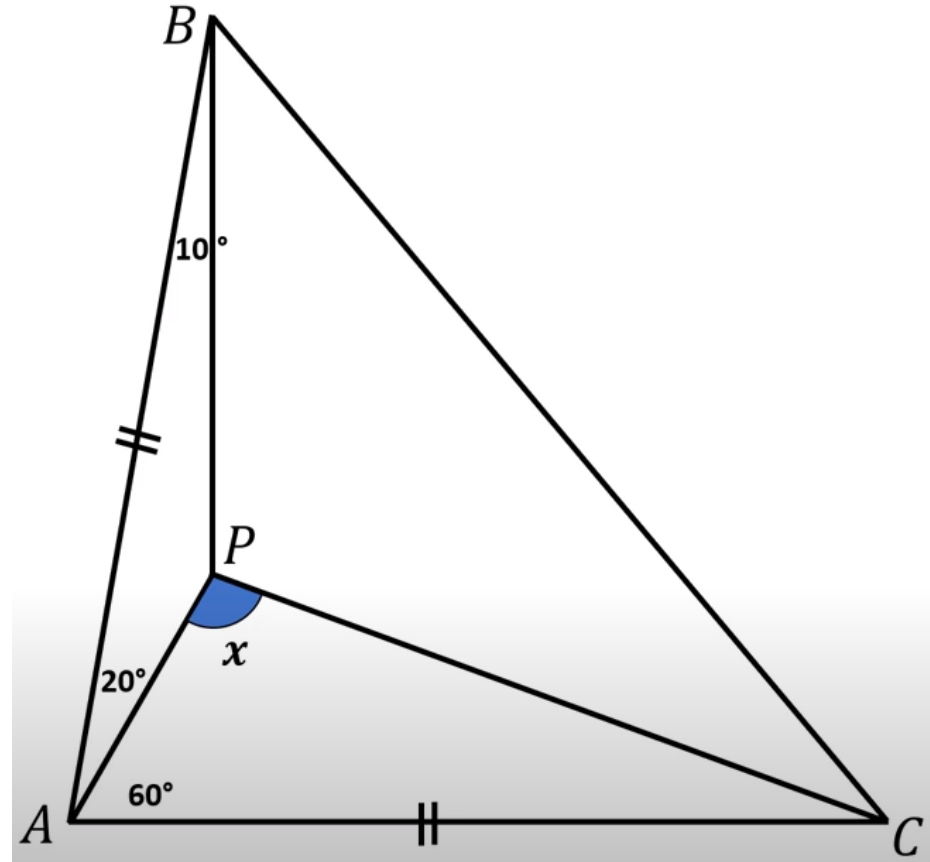
Solution:

STEP 1

$$AB = AC$$

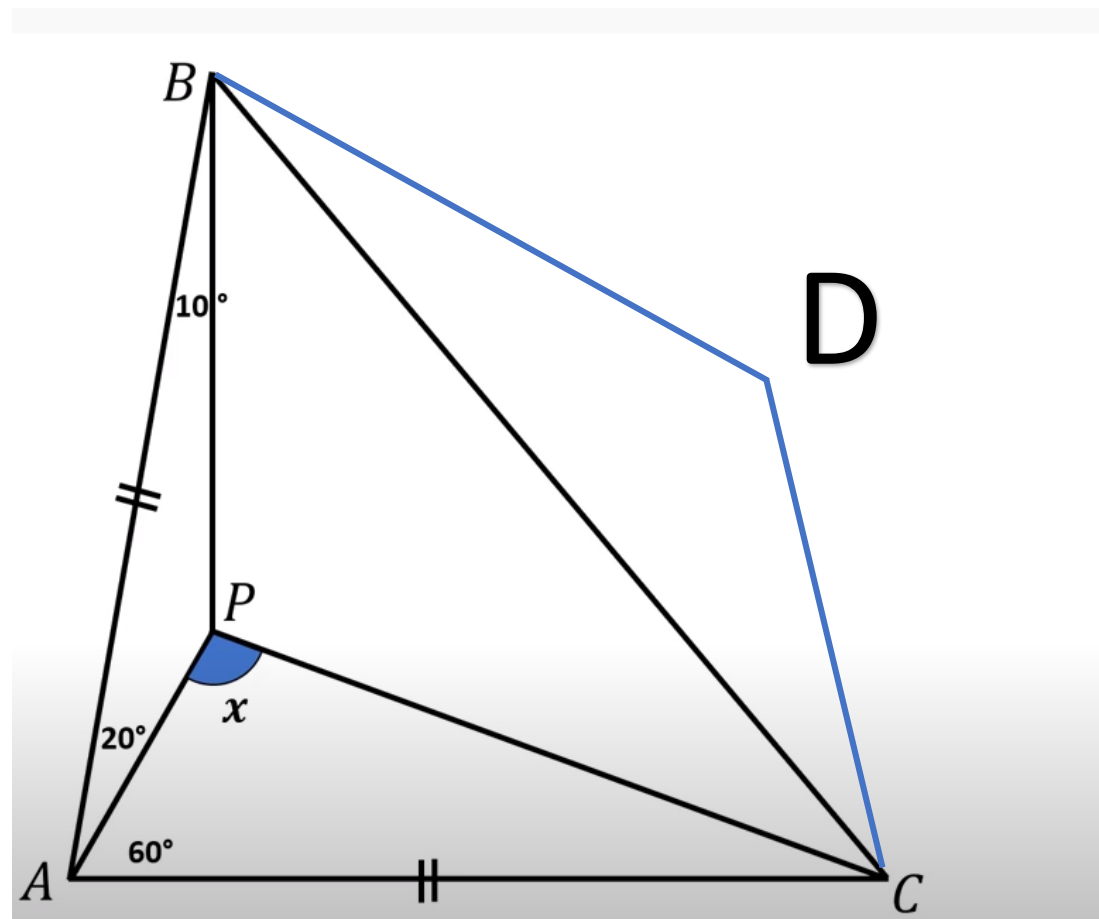
$$\text{而且 } \angle PBC = 3x \angle PAB$$

可以做一條AD使 $\angle PAD = 40^\circ$



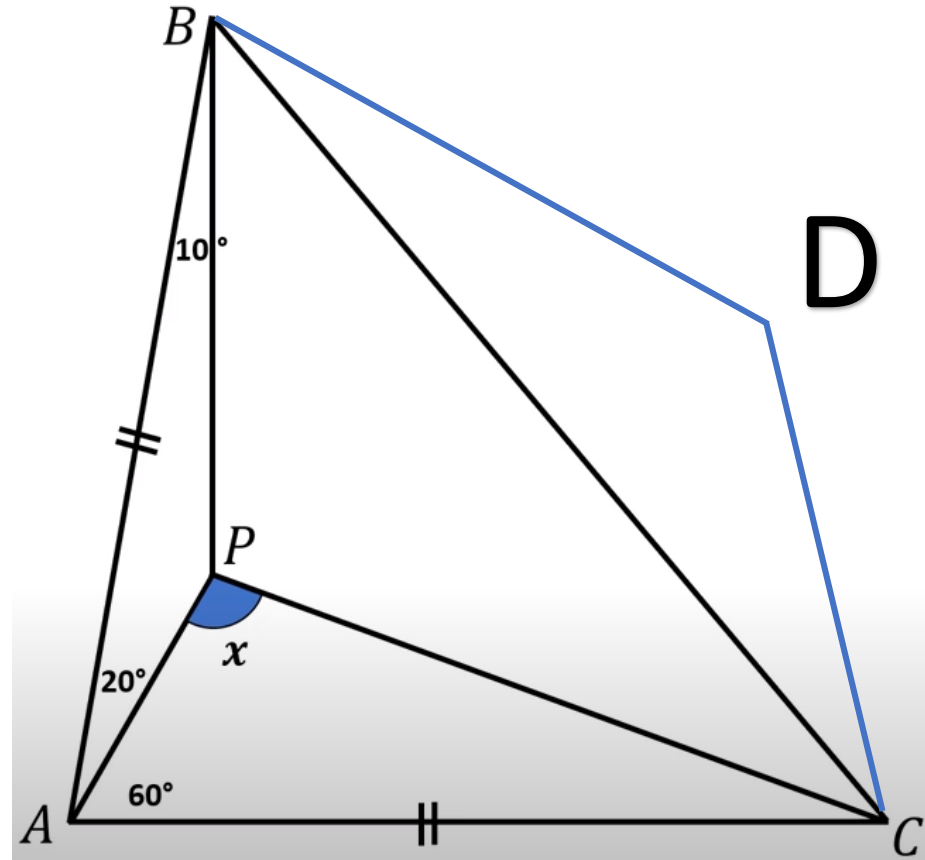
STEP 2

連接BD CD 得到兩個全等三角形



要得到X 要先知道 $\angle PCA$

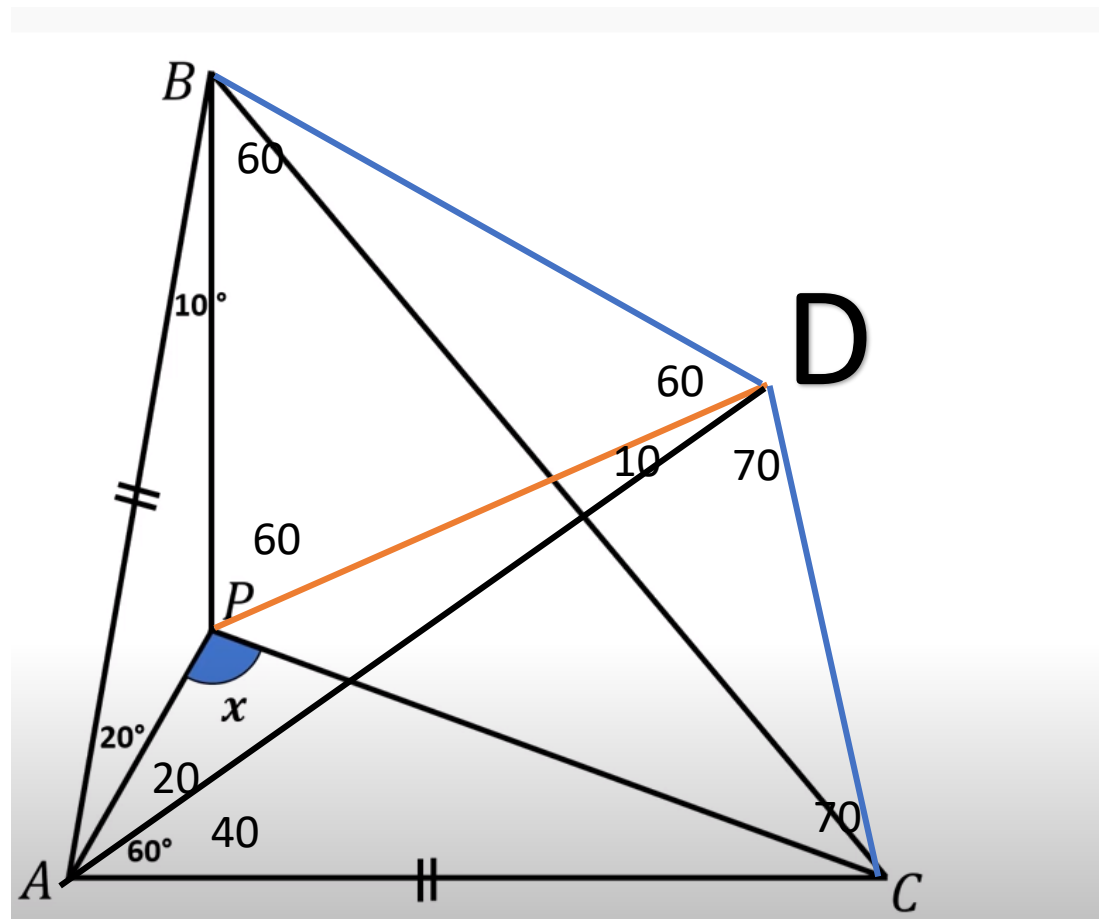
$$\angle DCA = \angle ADC = 70^\circ$$



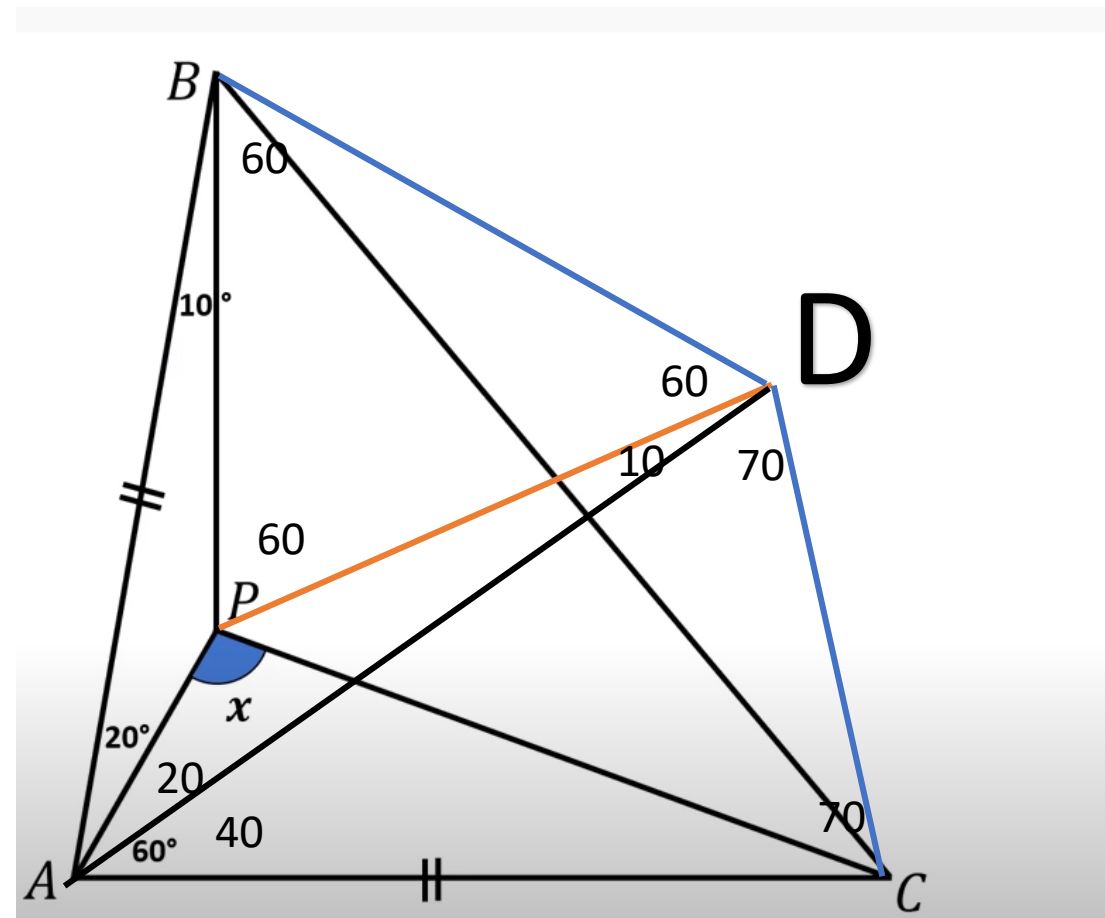
連接PD

因為BAD是等腰三角形 且BAP和DAP全等

我們可以得到BPD是正三角形 所以 $DP=DC$

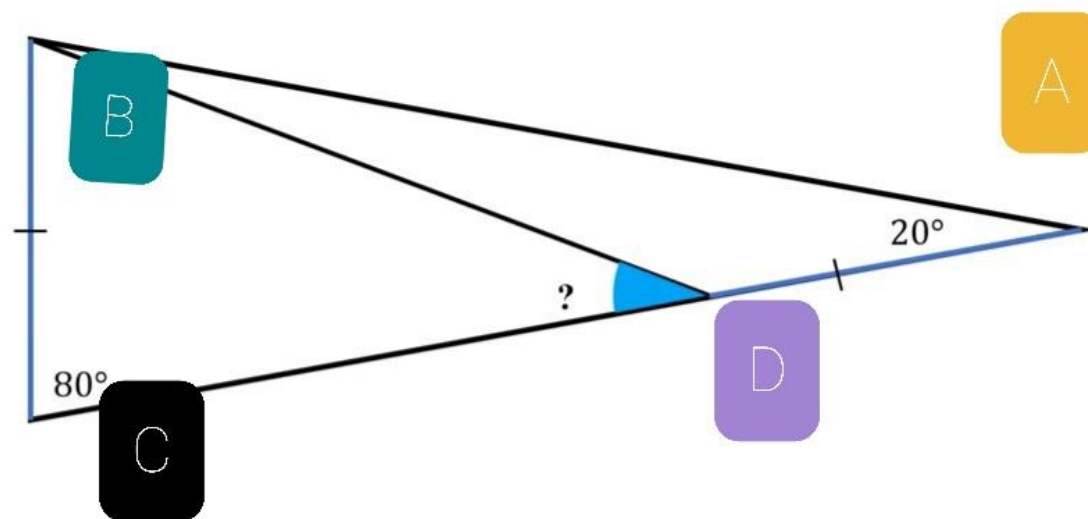


因為 $DP=DC$ 所以 PDC 是等腰三角形
 可得 $\angle DPC=50^\circ$
 因此 $x=360-150-60-50=100^\circ$



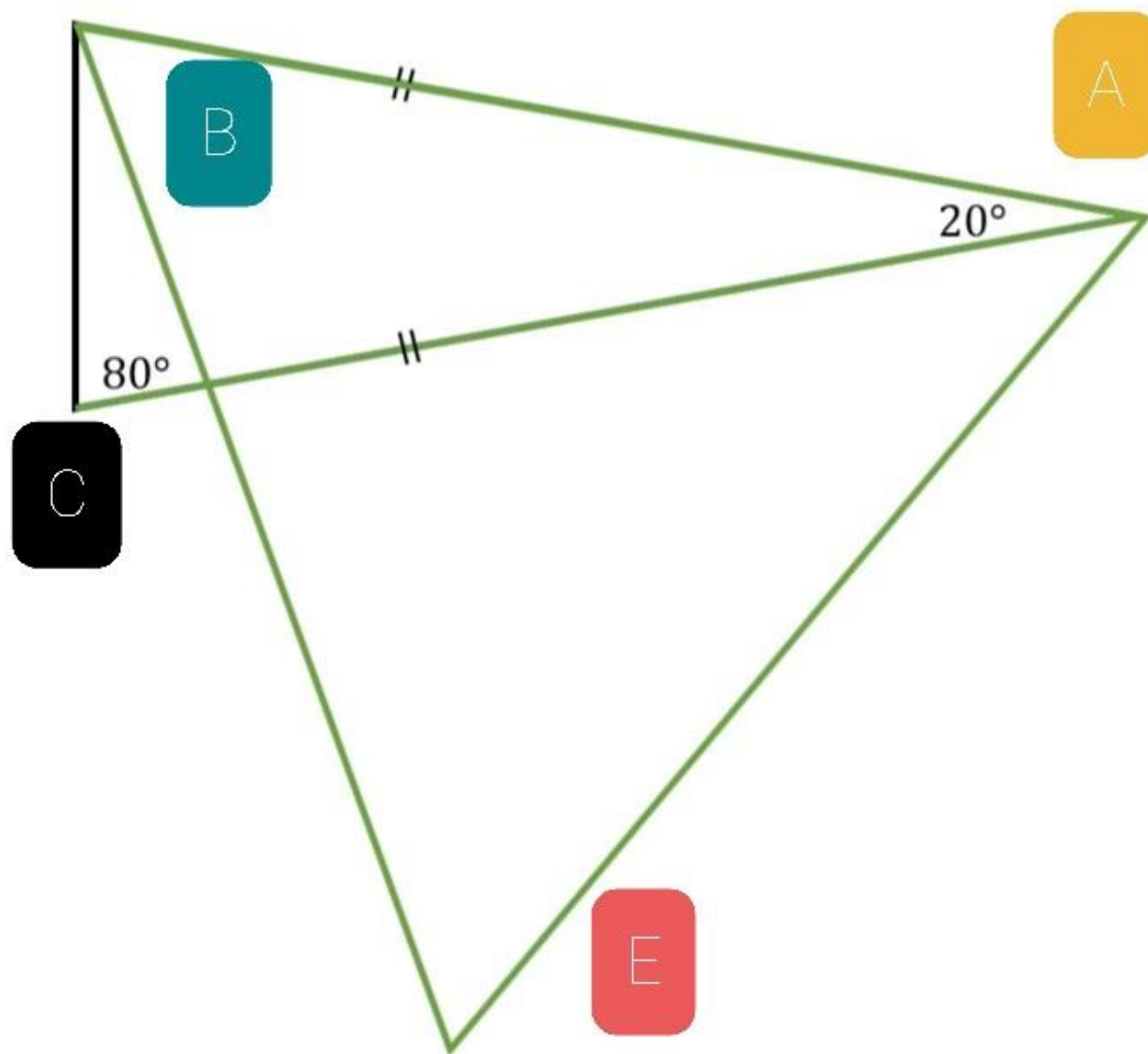
Question:

今有一等腰三角形ABC如圖
若在AC上取一點D使得 $AD=BC$
求 $\angle BDC=?$



Solution:

取一點E使得三角形ABE
為一正三角形



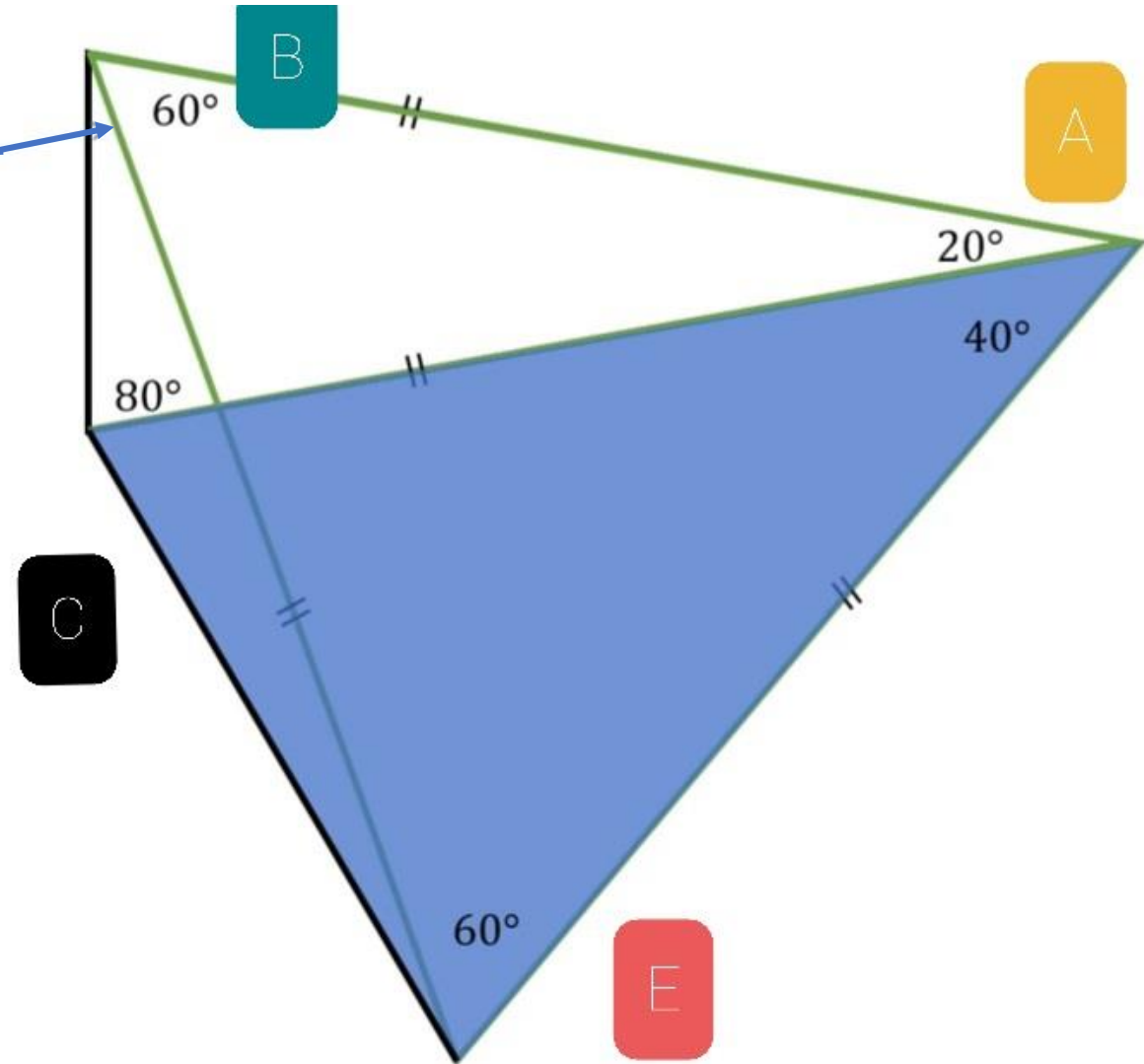
已知 $\triangle ABE$ 為正三角

則我們知道 $\angle EBC = 80 - 60 = 20$ 度

已知 $\triangle CAE$ 為等腰因為

$AB = AE = EC$ 可知 $\angle AEC$ 與 $\angle ECB$ 為 $(180 - 40) / 2 = 70^\circ$

則 $\angle BEC = 70 - 60 = 10^\circ$



最後我們可以找到 $\angle EBC = 20^\circ$

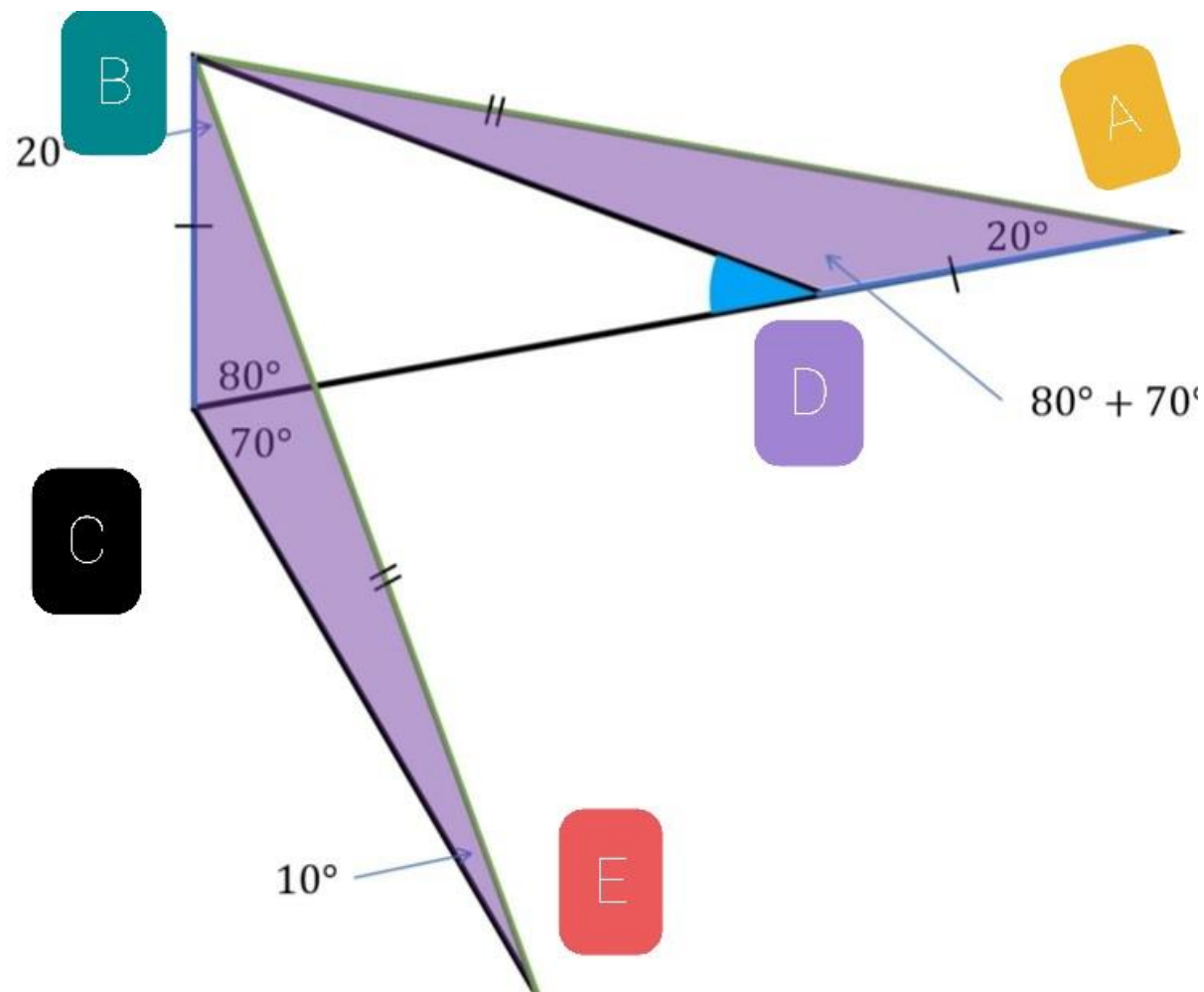
以及題目給的 $BC = AD$

還有取正三角形而得的 $AB = BE$

而形成一個SAS全等三角形

得知 $\angle BCD = \angle ADB = 150^\circ$

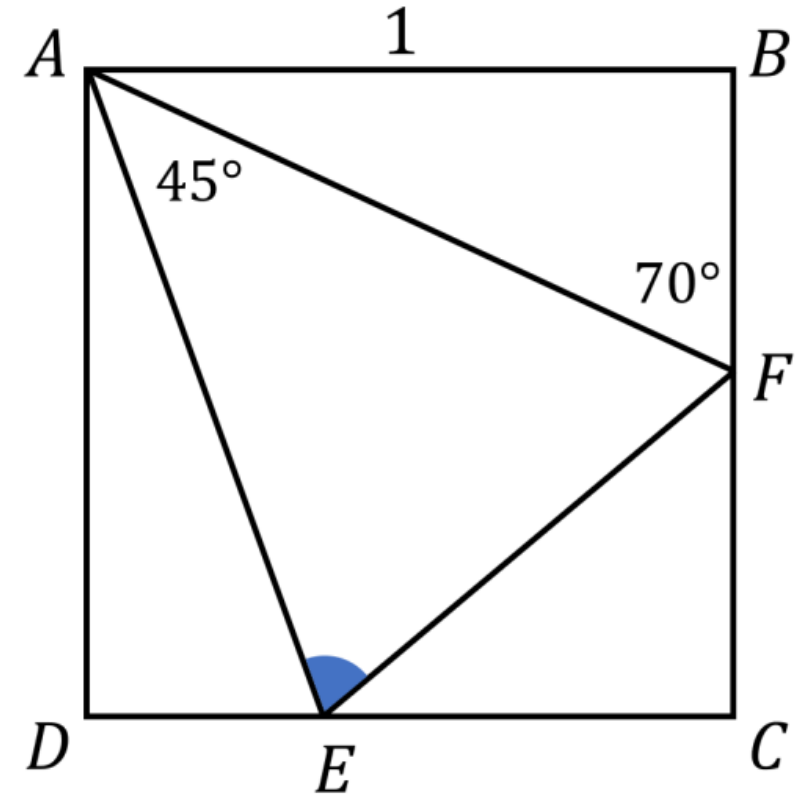
則 $\angle BDC = 180 - 150 = 30^\circ$



Question:

在ABCD為正方形

$\angle AFB = 70^\circ$ $\angle EAF = 45^\circ$ $AB = 1$ 的條件下
求 $\angle AEF = ?$ 、 $EC + CF + FE = ?$



這一題可以先利用正方形和三角形的性質得到需要的資訊

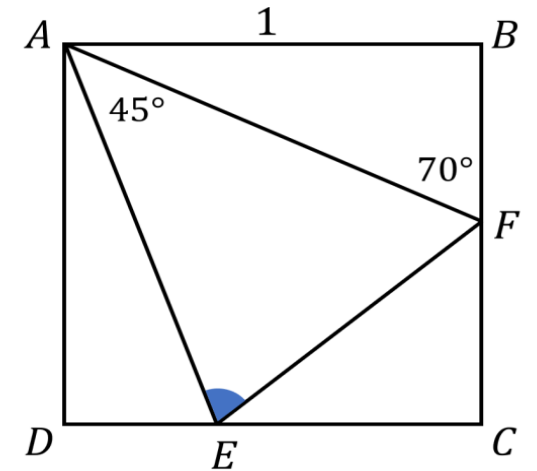
因為 $ABCD$ 為正方形，可得 $\angle ABF = 90^\circ$

因為 ABF 為三角形，進而得出 $\angle FAB = 20^\circ$

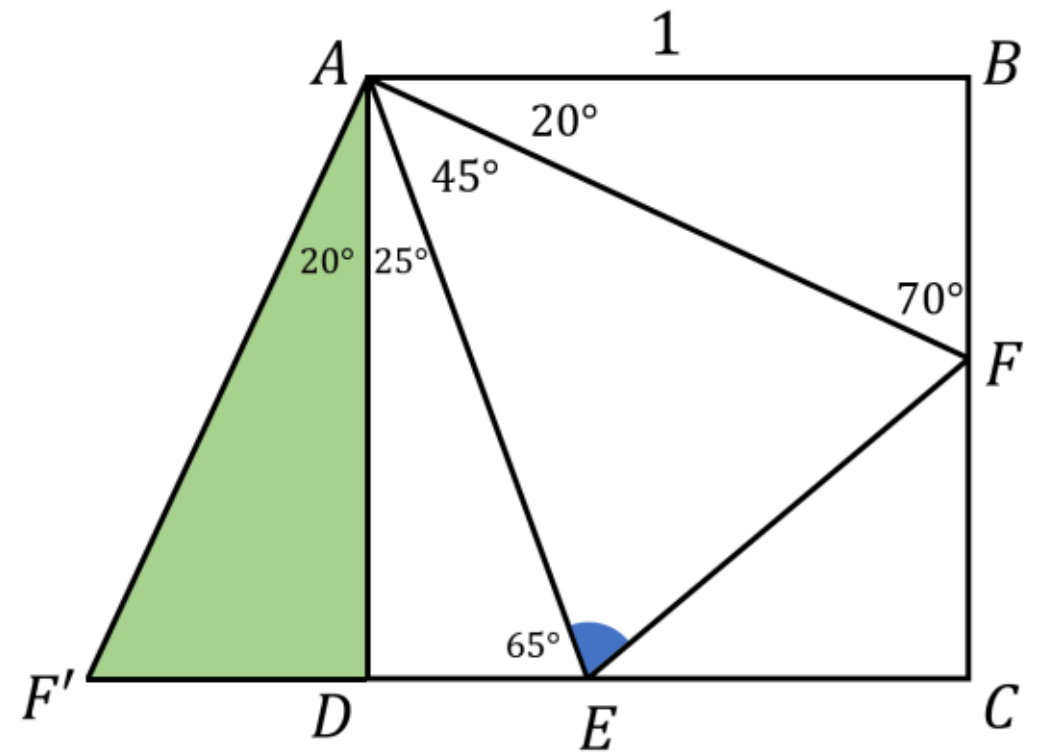
同理， $\angle DAE = 90^\circ - 20^\circ - 45^\circ = 25^\circ$

因為 $\angle ADE = 90^\circ$ ， $\angle AED = 65^\circ$

因為 $AB = AD = 1$ ，由 $\triangle AFB$ 以點 A 為圓心順時針旋轉 90° 轉變為 $\triangle AF'D$ ，得 $\triangle AF'E$ 。

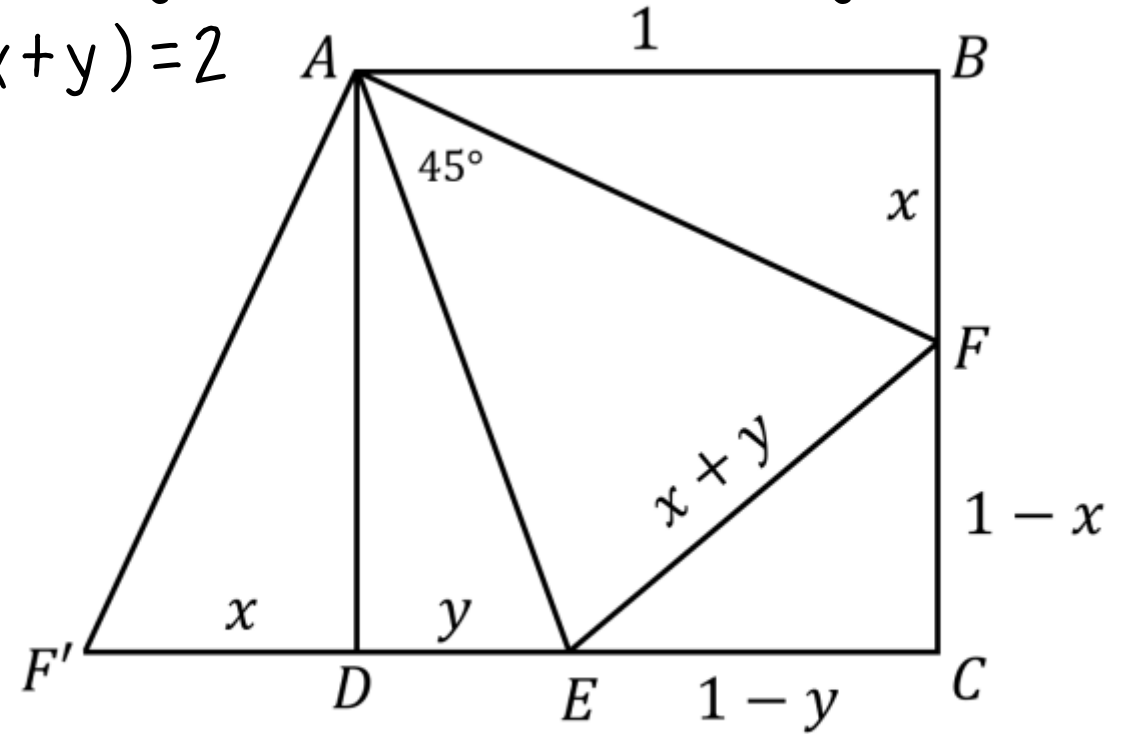


由於 $\angle F'AE = \angle F'AD + \angle EAD = 20^\circ + 25^\circ = 45^\circ = \angle EAF$ ，且
 $AF' = AF$ 、 $AE = AE$
根據SAS定理，得 $\triangle AF'E$ 全等於 $\triangle AFE$
因此可以得知 $\angle AEF = \angle AEF' = 65^\circ$



承上題，這邊已經知道 $\triangle AF'E$ 全等於 $\triangle AFE$ 以及 $\triangle AF'D$ 為 $\triangle AFB$ 以點 A 為圓心順時針旋轉 90° 轉變的，

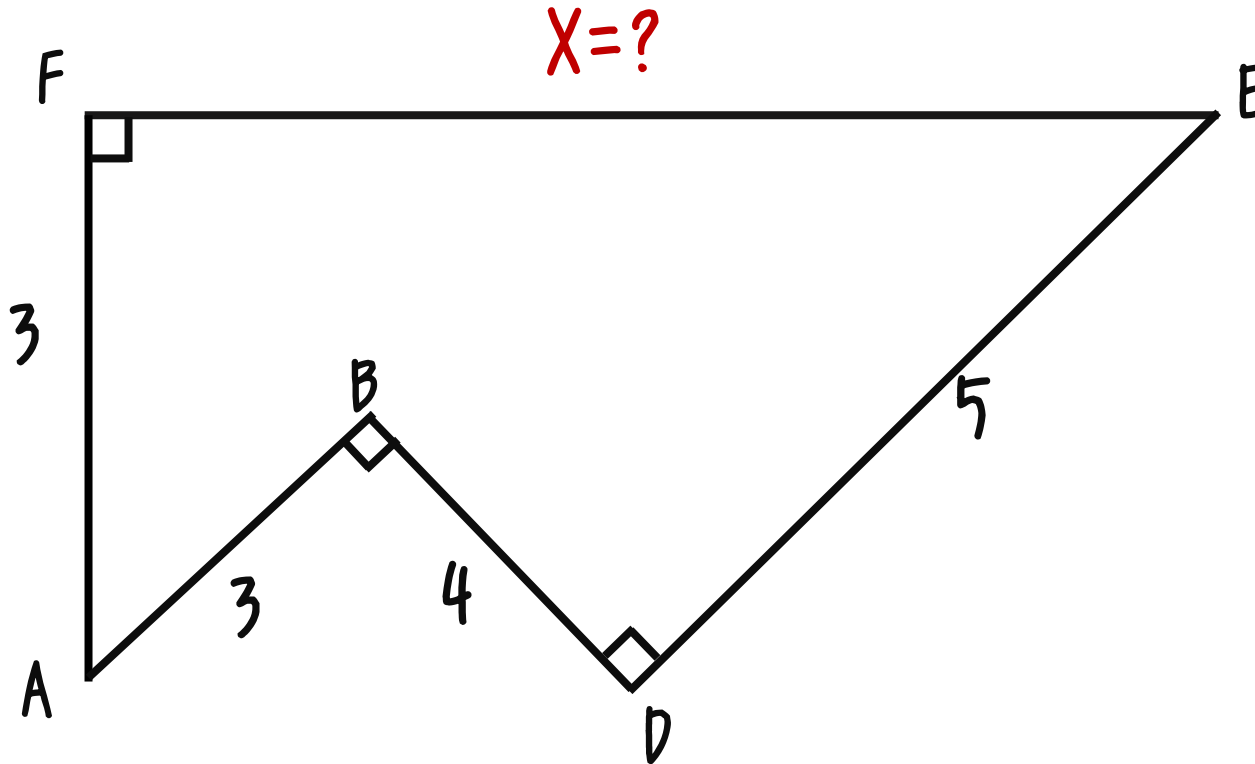
所以假設 $BF = F'D = x$ ， $DE = y$ ，則 $FE = x + y$ ， $CF = 1 - x$ ， $EC = 1 - y$ ，
所以 $EC + CF + FE = (1 - y) + (1 - x) + (x + y) = 2$



結語

- 這一題主要求三角形的角度，需要運用到三角形的全等性質而且要充分了解正方形和三角形，才得以用可行的方式算出來。
- 首先依照題目給予的條件，可以知道大部分的角度，這邊問題不大，比較需要注意的是如何運用得到的角度，這裡很容易卡住，需要思考，方法不只一種，我想先提供其中一種算法給各位參考。

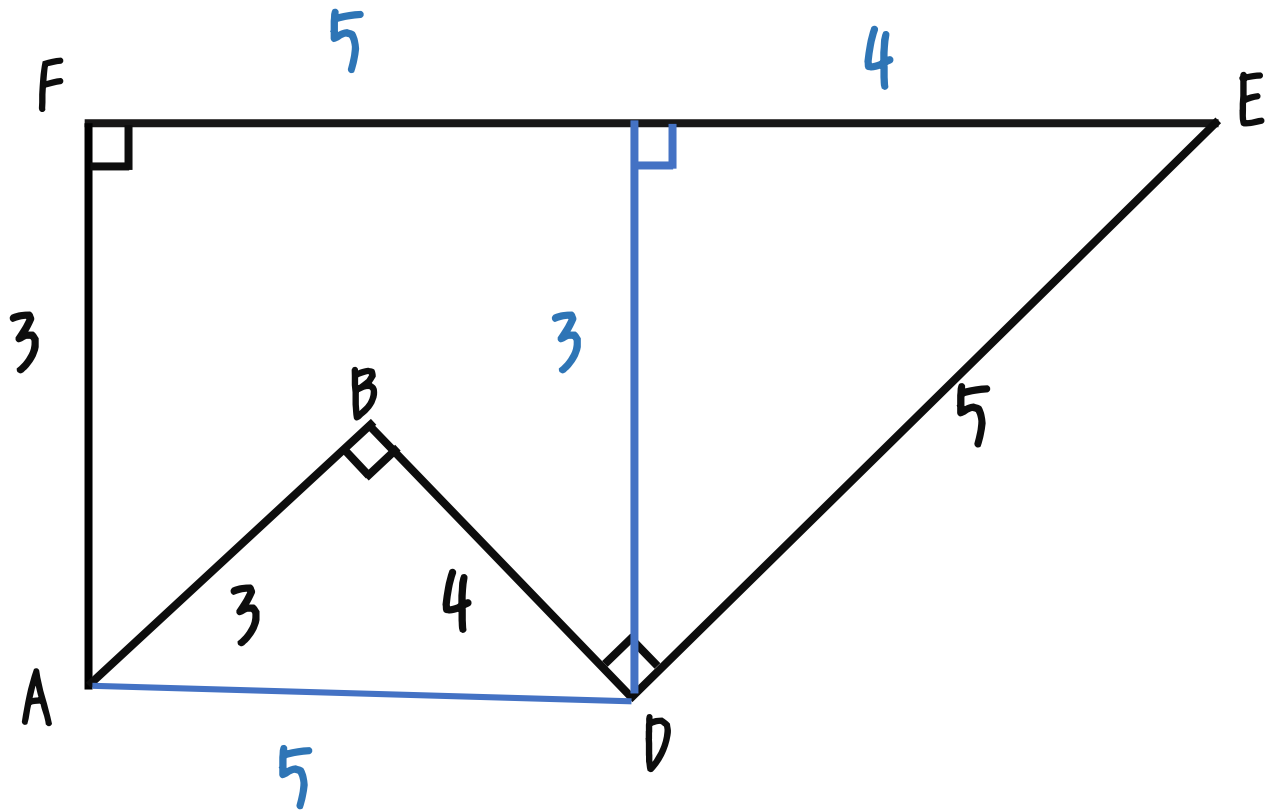
Question: What is The Length?

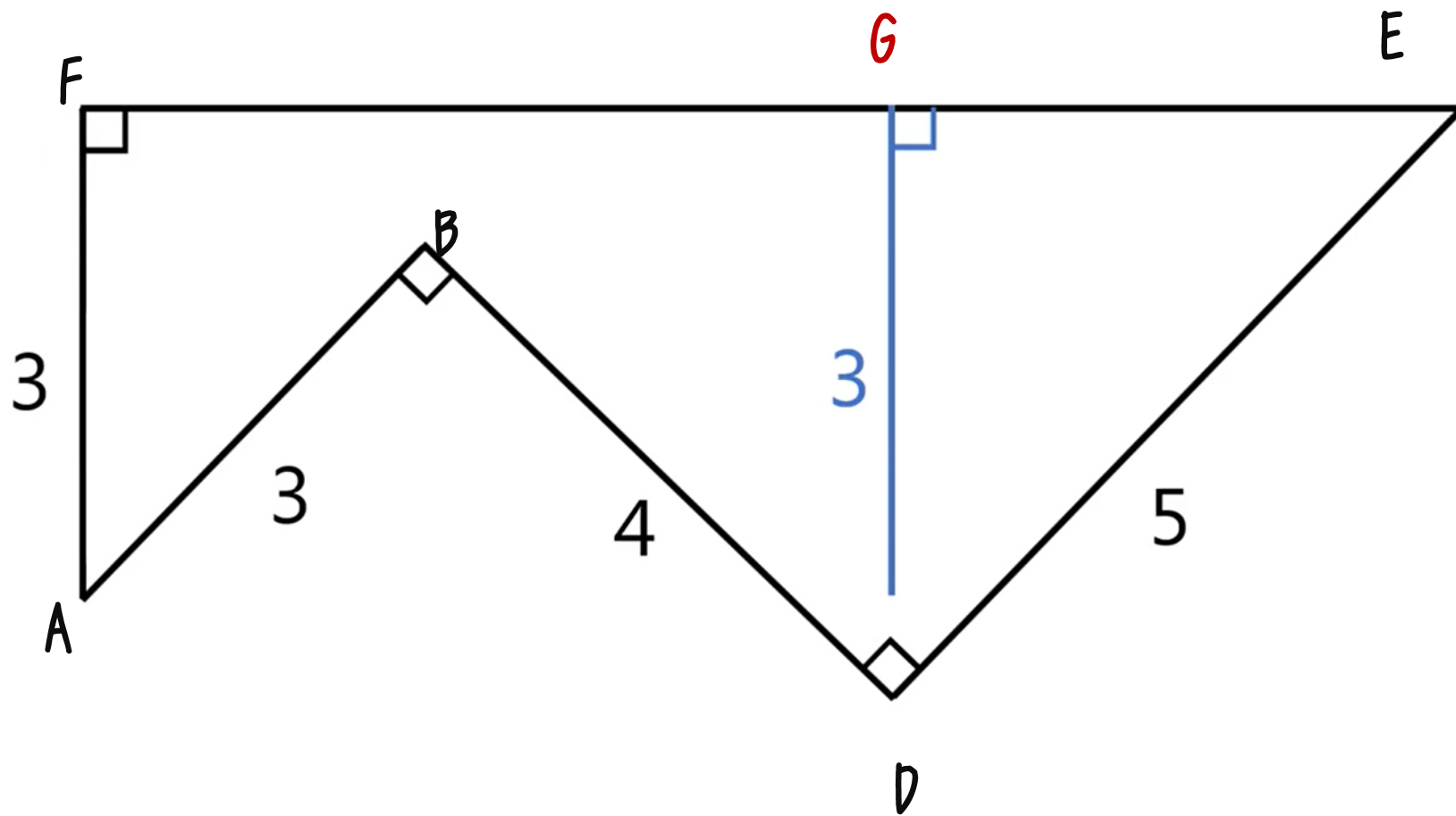


(Diagram not to scale)

(Mind your decisions- Michael Timothy)

【Wrong Method】

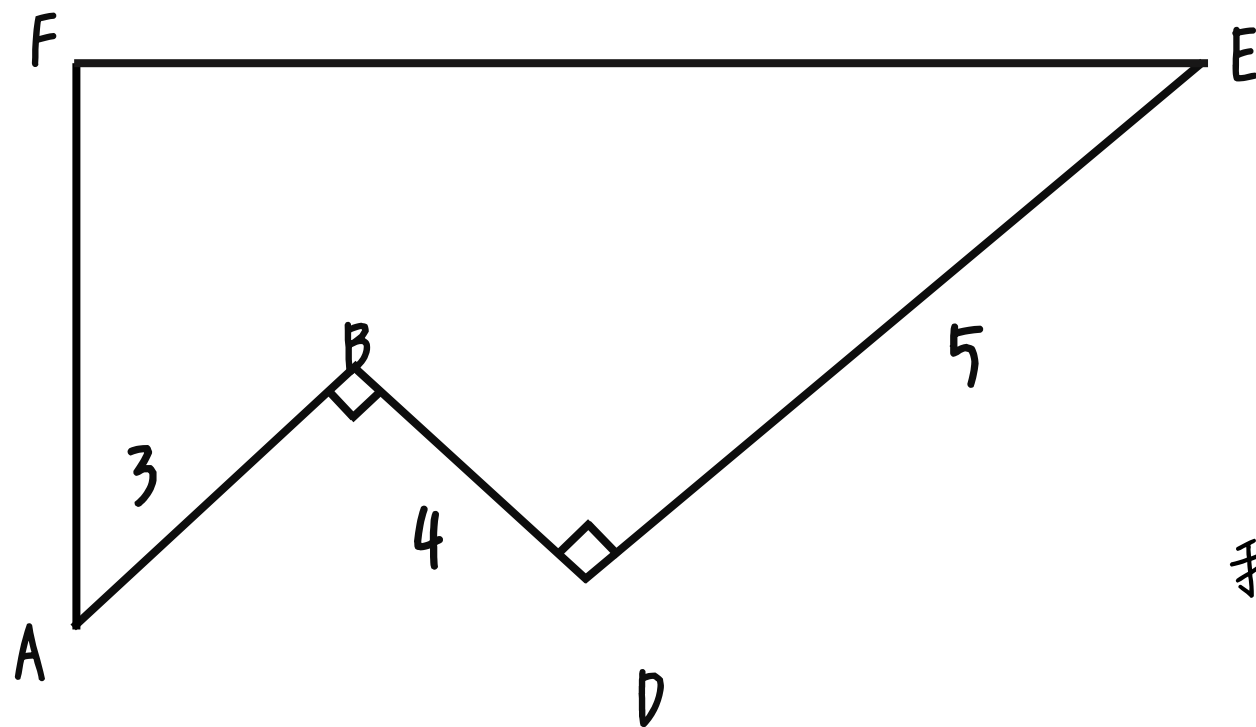




當按照比例去畫圖的時候， $GD \neq 3$

(Diagram to scale)

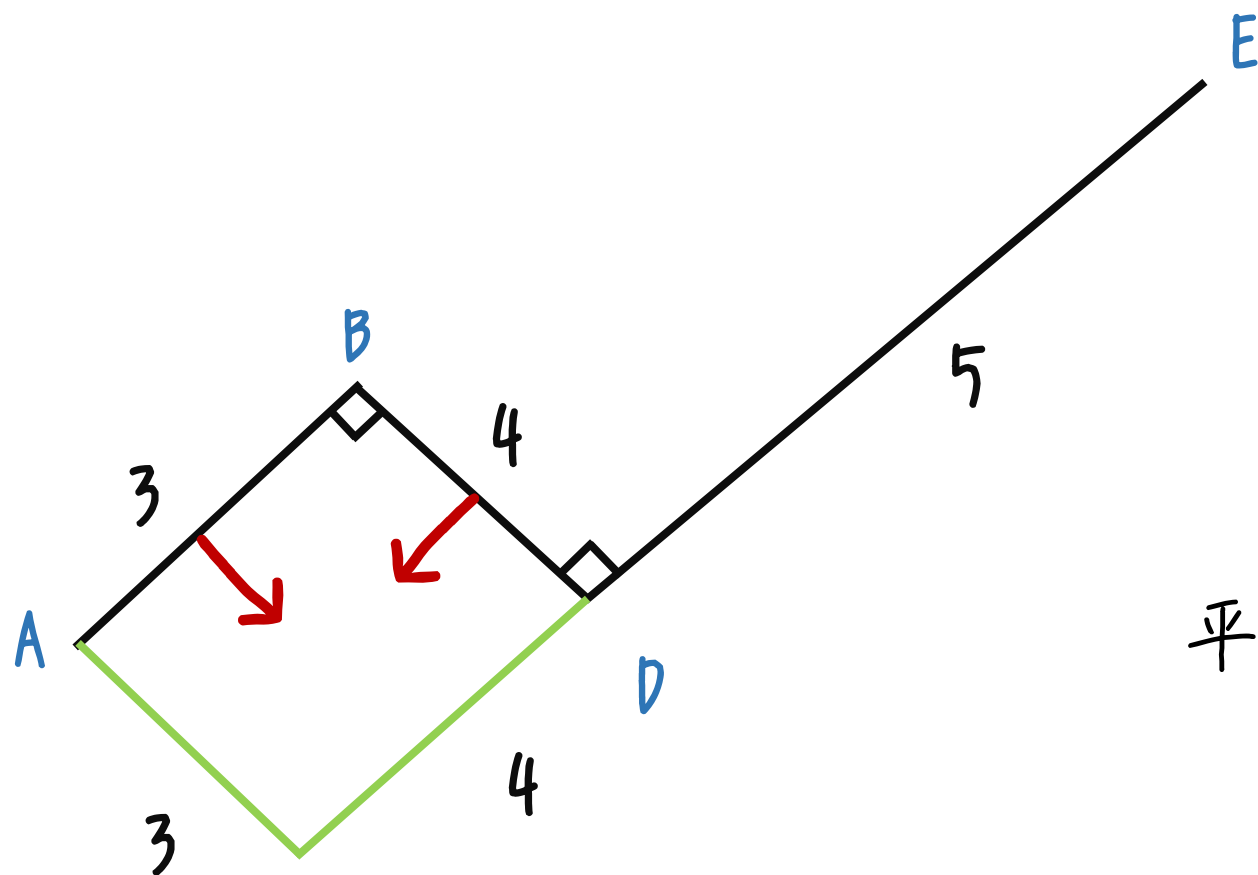
【Video】Solution



我們先拿掉AF和FE

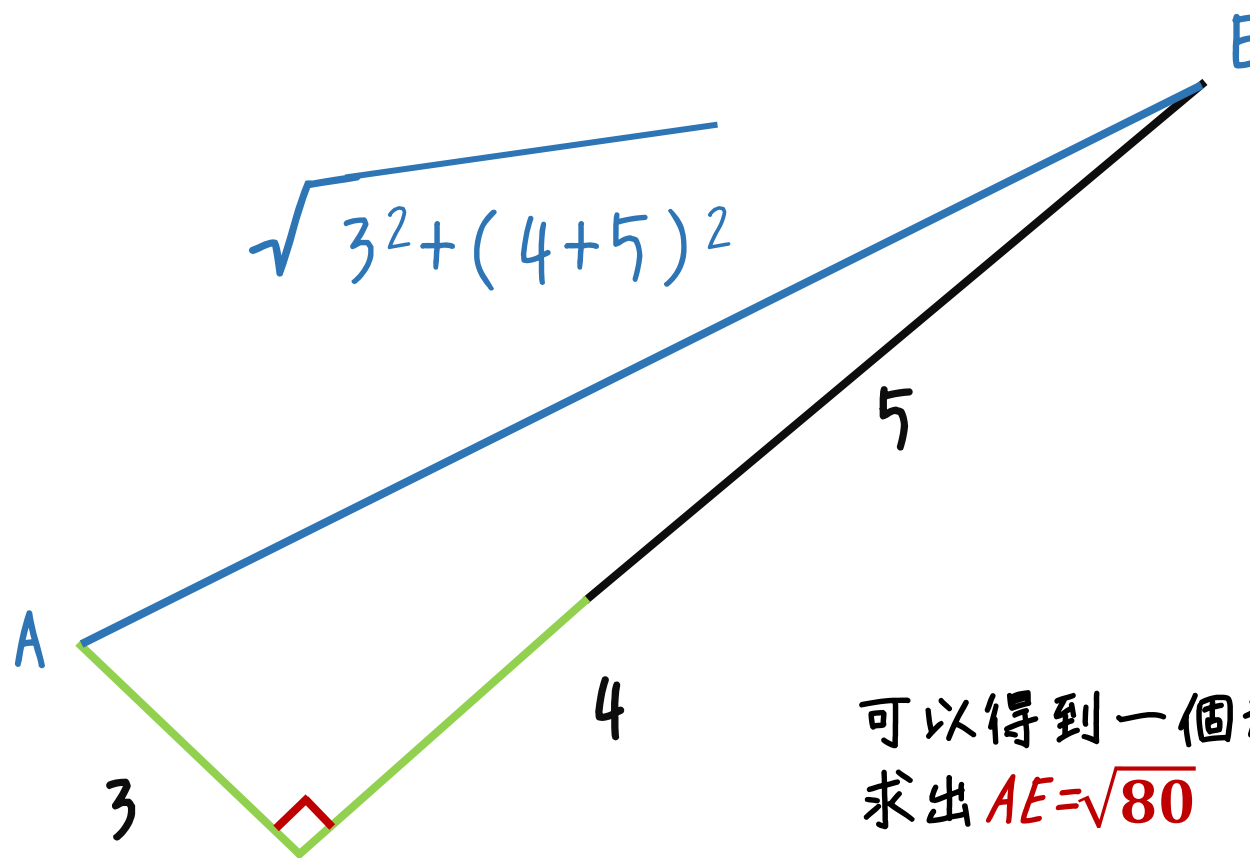
(Diagram not to scale)

【Video】Solution



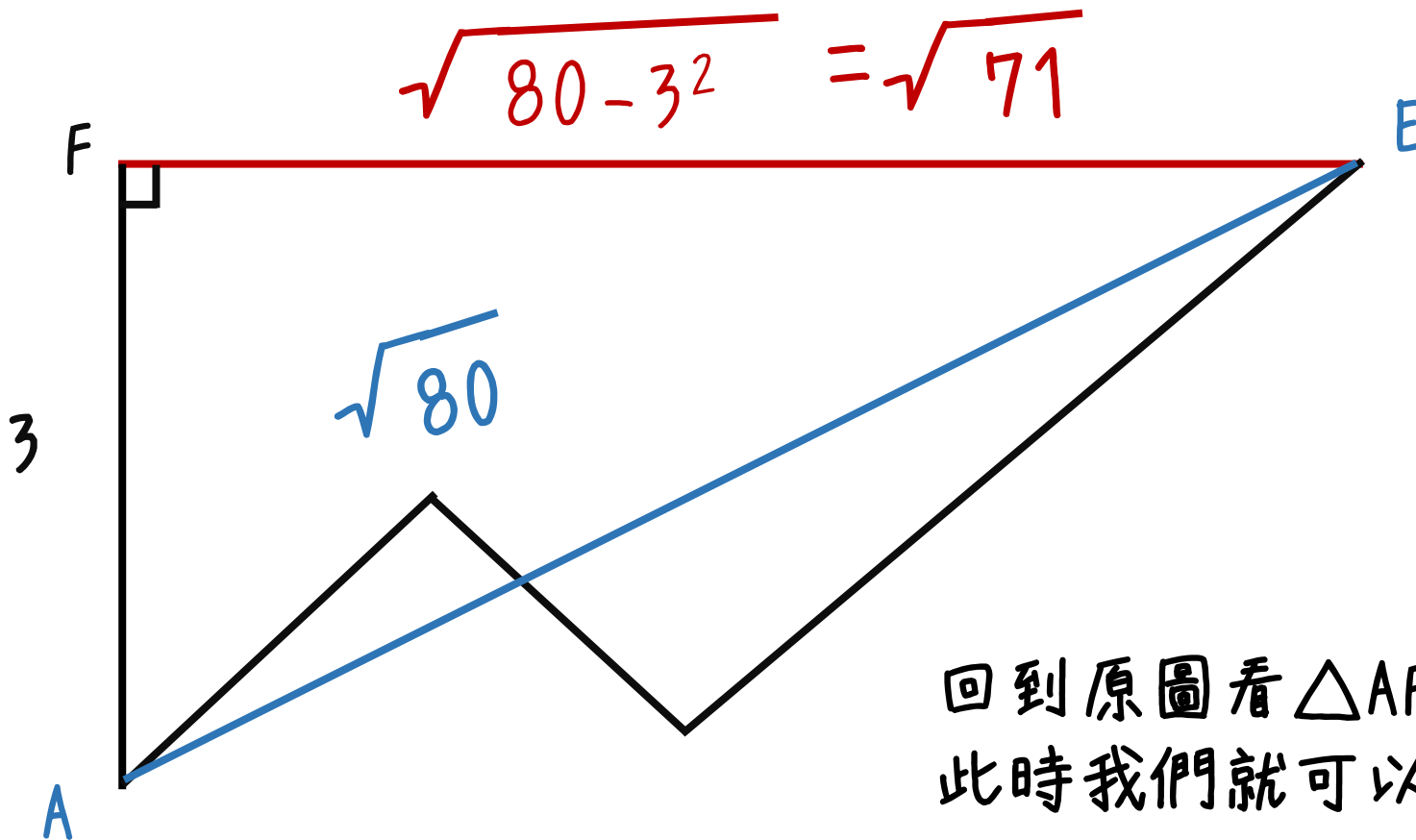
平移線段BD和AB

【Video】Solution



可以得到一個和AE相關的直角三角形
求出 $AE = \sqrt{80}$

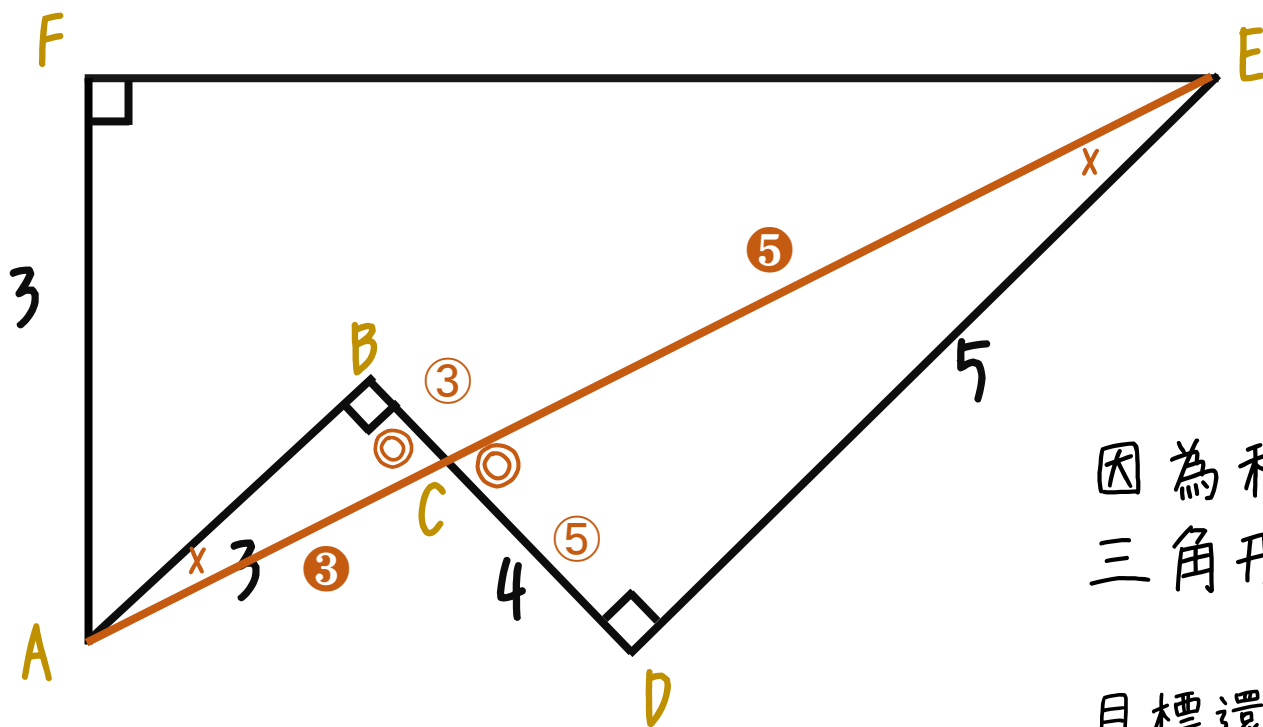
【Video】Solution



回到原圖看 $\triangle AFE$

此時我們就可以求線段 $EF = \sqrt{71}$

【用相似形解】

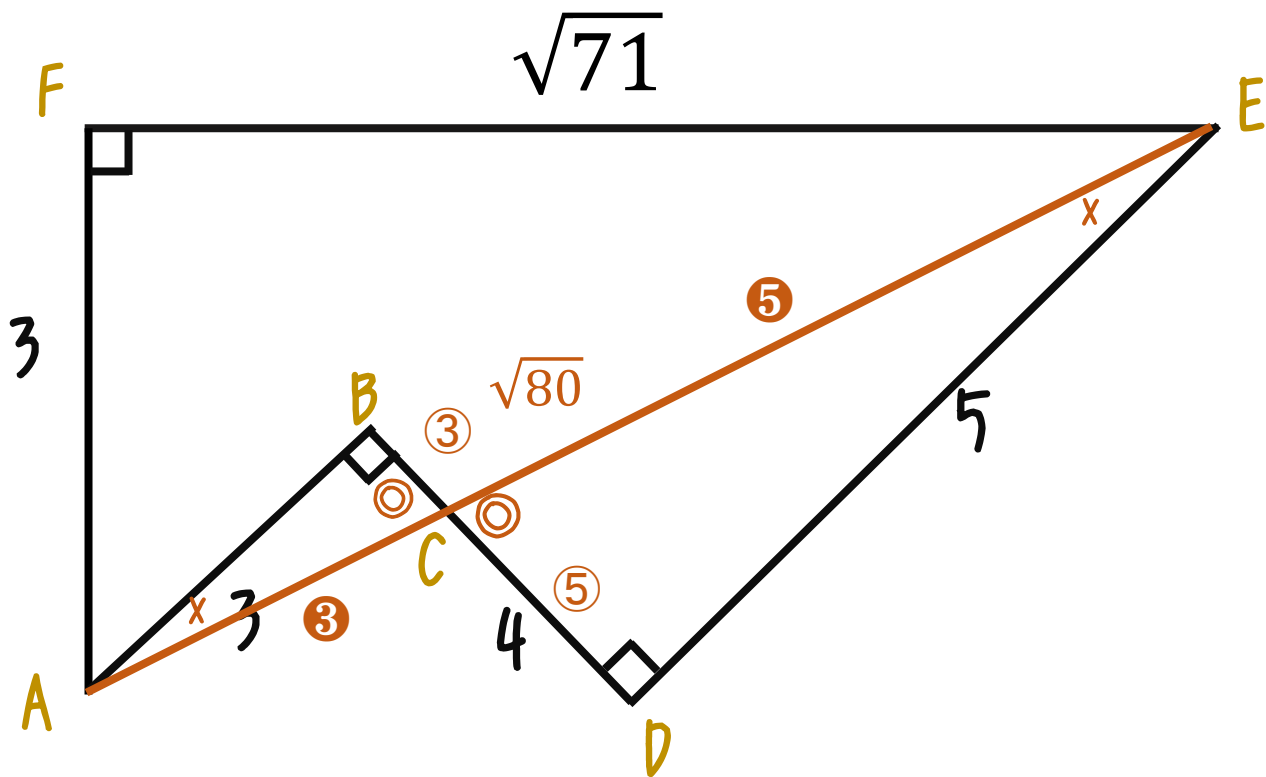


因為和EF線段最相關的
三角形還是 $\triangle AEF$

目標還是先求出AE

→連接AE

【用相似形解】



$$\triangle ABC \sim \triangle EDC$$

$$BC = \frac{3}{2}, CD = \frac{5}{2}$$

$$AC = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$CE = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow AE = \sqrt{80}$$

$$\triangle AEF$$

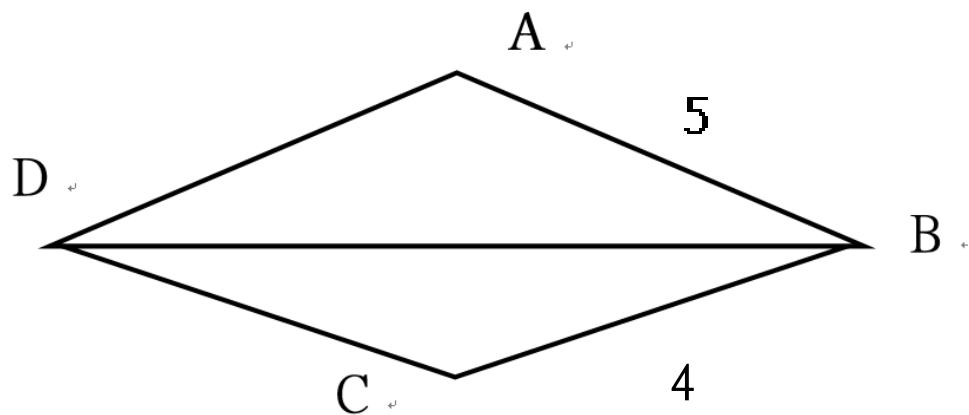
$$AF = 3$$

$$AE = \sqrt{80}$$

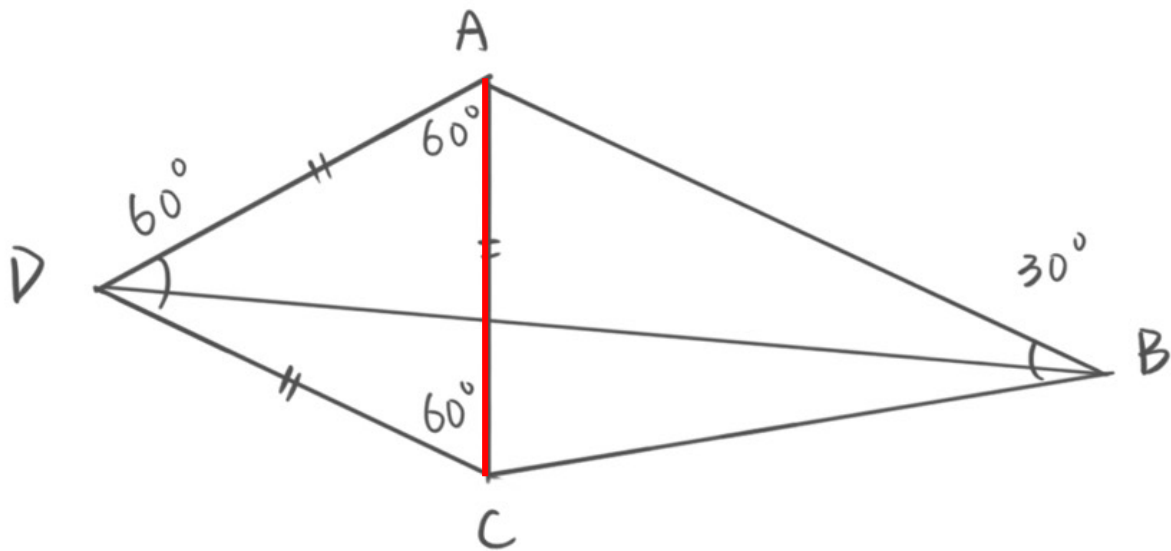
$$EF = \sqrt{71}$$

Question: What is The Length?

四邊形ABCD中， $\angle ABC = 30^\circ$ $\angle ADC = 60^\circ$ 且 $AD = CD$ 若 $BC = 4$ $AB = 5$ 則 $BD = ?$



Solution1



連接線段AC

餘弦定理得

$$AC^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ$$

設 $\angle CAB = \theta$

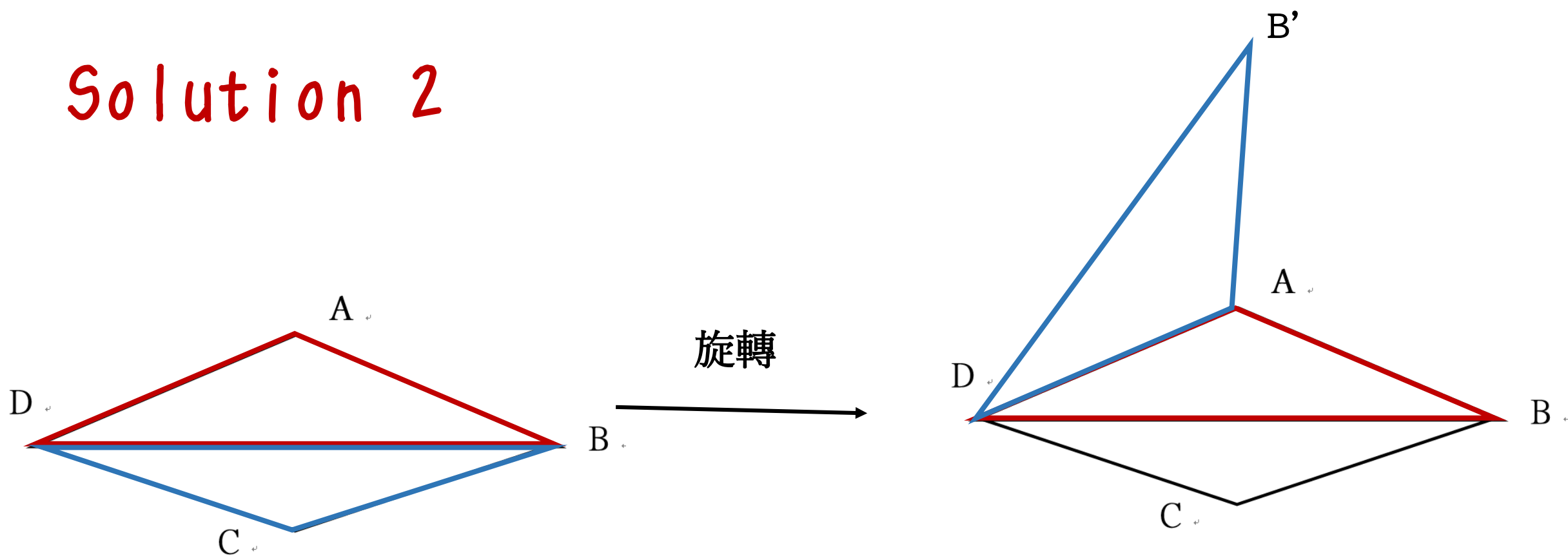
$$\angle ACB = 150^\circ - \theta$$

$$\text{則 } \angle DAB = 60^\circ + \theta$$

$$\angle DCB = 210^\circ - \theta$$

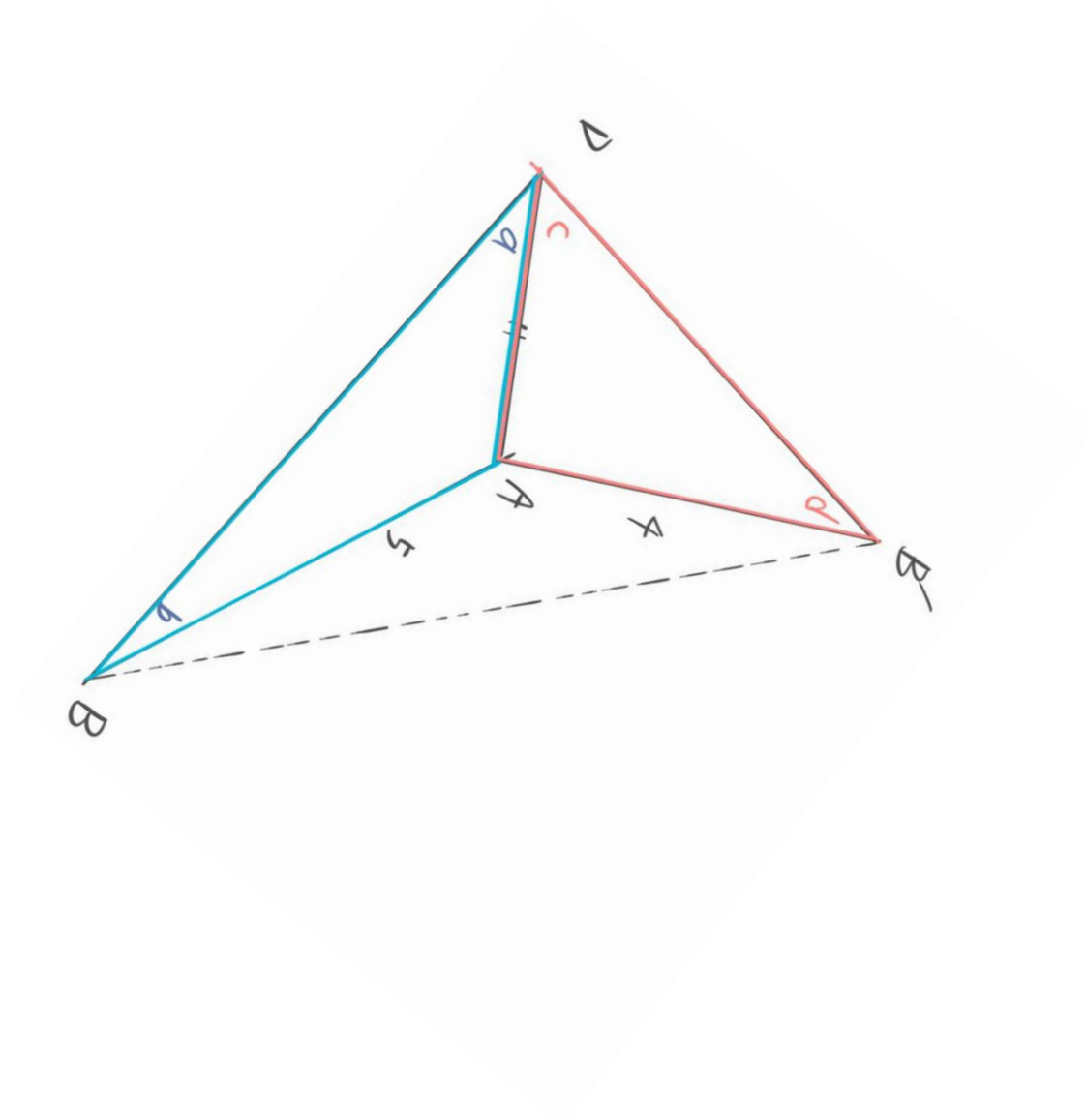
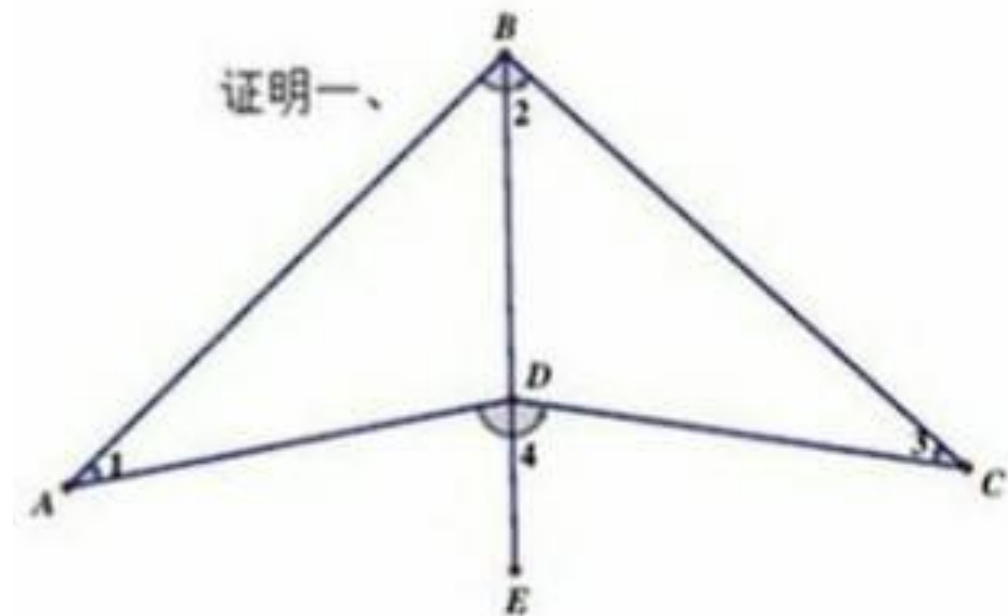
$$\begin{aligned} (AD)^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot (AD) \cdot \cos(60^\circ + \theta) \\ = (CD)^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot (CD) \cdot \cos(210^\circ - \theta) \\ = (BD)^2 \end{aligned}$$

Solution 2

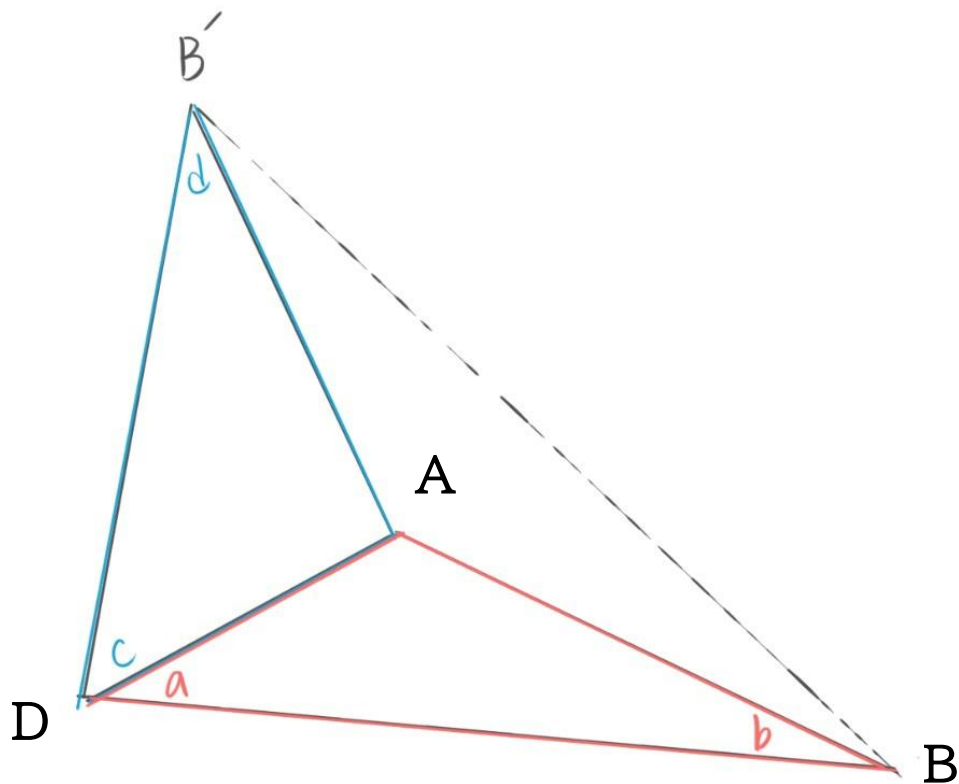


旋轉三角形 BCD ，以 D 為圓心，逆時針旋轉 60° ，使 DC 對齊 DA

鏢型角度



Solution 2



圖型形成一個鏢型，因此角

$$\angle BAB' = \angle ABD + \angle ADB' + \angle BDB'$$

$$= (\angle ABD + \angle ADB') + \angle BDB'$$

$$= 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$$

因此三角形 BAB' 為一個直角三角形，所以線段

$$BB' = 5^2 + 4^2 = \sqrt{41}$$


又因線段 $BD =$ 線段 $B'D$ 及角 $\angle BDB'$ 為 60° ，所以三角形 BDB' 為正三角形

$$\text{故得出線段 } B'D = \text{線段 } DB = \text{線段 } BB' = \sqrt{41}$$

參考資料：

- <https://www.youtube.com/watch?v=kfi juP5HDjU>
- https://www.youtube.com/watch?v=ct_9170Bf6o&t=192s
- <https://www.youtube.com/watch?v=Rjo-PcrKrB0&t=182s>
- <https://www.youtube.com/watch?v=5vhklRWogzo>

新竹市107學年度國中數學能力競賽 數學達人賽



THE END