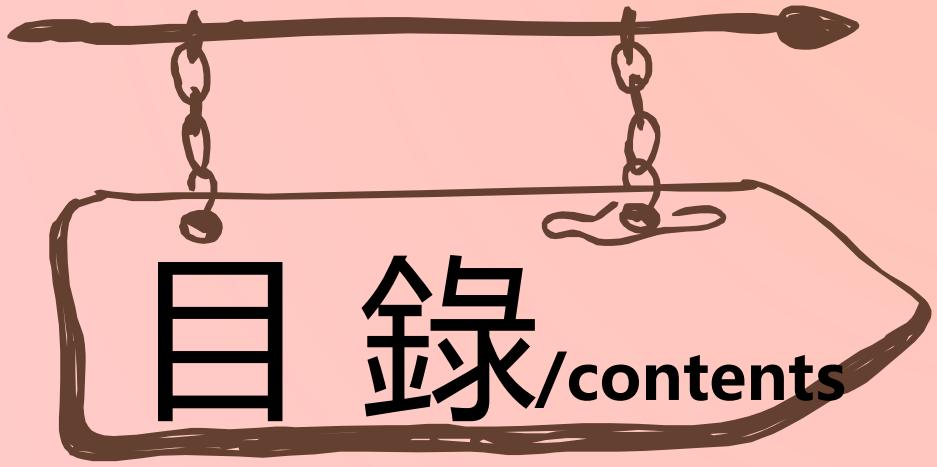




# 最優終止法則

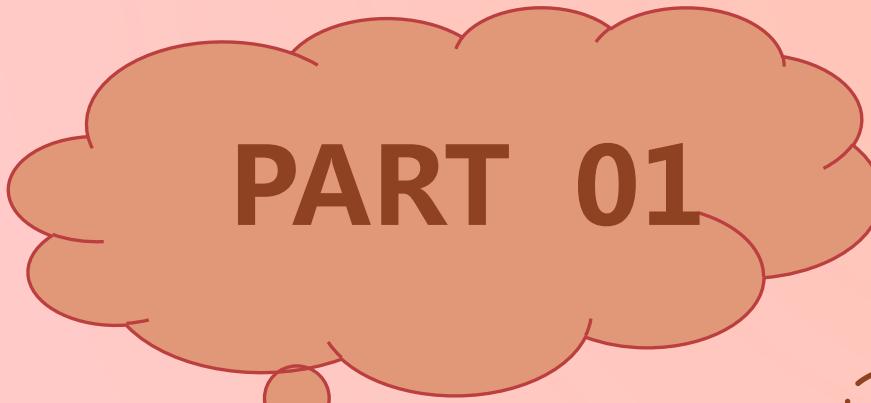
(Optimal Stopping Rule)

第03組: 410731248曾清湧 411031102戴世勳  
411031103潘柏銓 411031107林亮辰  
411031113黃俊穎 411031123李柔樺



# 目 錄 /contents

1. 靈感來源之選購樂器
  2. 最佳終止法則
  3. 祕書問題
  4. 愛情數學
  5. 3 7 法則
- 



## PART 01

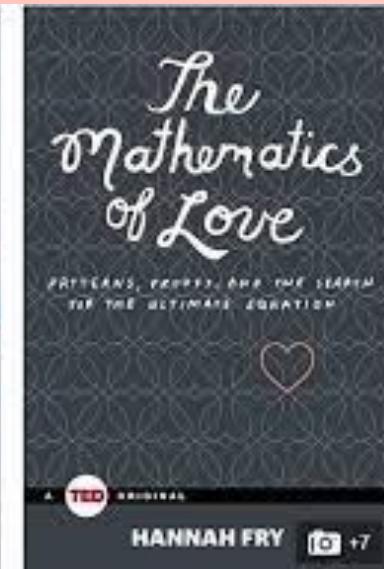
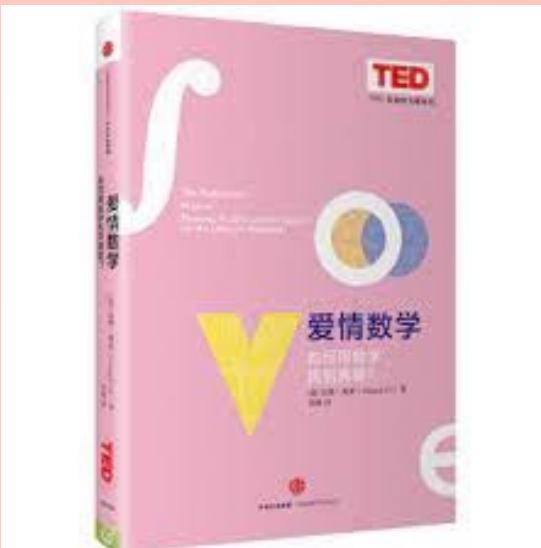
1

### 靈感來源之選購樂器



# 靈 感 來 源

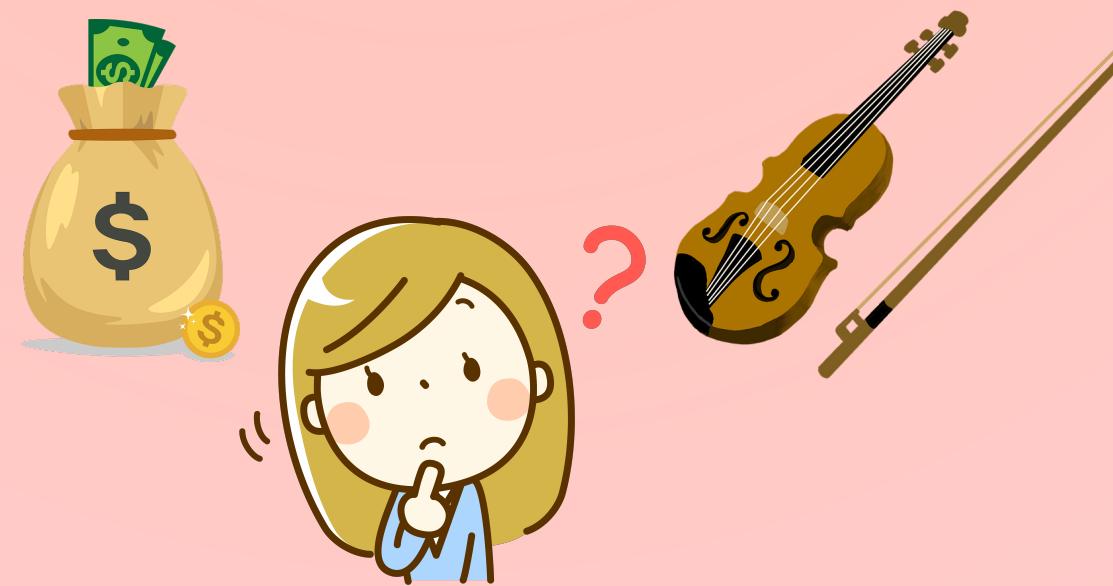
- 最初想到製作最優終止法則這項問題是因為數學史課程有接觸到，與組員們溝通過後，大家也都對這項主題有很高的興趣，透過上網搜尋，我們發現此法則可以運用在很多生活例子上，甚至有美國數學家用這個法則出了一本愛情數學的書，希望同學們聽完能用數學解決部分的選擇困難症，那就開始我們的課程吧...



## 故 事 背 景

### 如何選購二手音響器材？

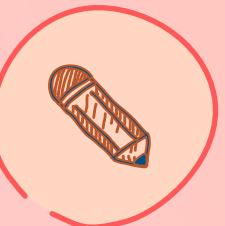
- 某無線電月刊，差不多每期都有一份出讓二手音響器材的廣告。對每一部出讓的音響器材，你可以根據它的年份、牌子、狀態來估計它的合理價錢。通常，這個你認為是合理的價錢不一定等於真正的售價。為了看看購買這部二手音響器材有沒有划算？你可以計算它的超值率E。



# 超 值 率 E

## 如何選購二手音響器材?

- 超值=合理價錢-售價
- 超值率 $E=[(\text{合理價錢}-\text{售價})/\text{售價}]\times 100\%$



例1:

一部二手音響器材售1000元，你估計它應該值1200元，這部二手音響器材的超值是200元，而它的超值率是20%

例2:

同上題，但這次你估計它應該值900元，這部二手音響器材的超值是-100元，而它的超值率是-10%

## 發 現 問 題

### 如何選購二手音響器材？

- 假定你計劃由1月至12月這年內購買一部二手音響器材，怎樣辦才可以選購到最高超值率的一部呢？



## 最 理 想 方 式

### 如何選購二手音響器材?

- 等到年底，然後把十二個月來在廣告上出現過的二手音響器材比較一番，看看哪部超值率最高便買那部

BUT

- 等到年底才作出決定有可能太遲了，你心目中想買的一部，可能早已沽出！

# 最 優 終 止 法 則



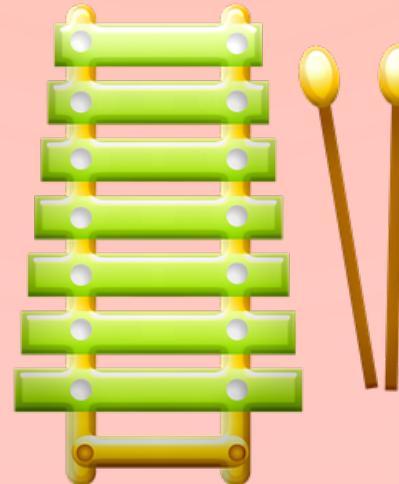
## 如何選購二手音響器材?

- 為便於說明起見，我們把問題簡化，時間由 12 個月縮短為 3 個月，即要求在三個月內選購一部二手音響器材：



A

>



B

>



C

# 最 優 終 止 法 則

## 如何選購二手音響器材?

- 按照以下方式選購↓
- 一定不買一月那部，如果二月那部的超值率較一月那部的超值率高，便買二月那部，否則便買三月那部

可能次序	概率	購買月份	購買的二手樂器
ABC	$1/6$	三月	C
ACB	$1/6$	三月	B
BAC	$1/6$	二月	A
BCA	$1/6$	三月	A
CAB	$1/6$	二月	A
CBA	$1/6$	二月	B

# 發 現 結 論

## 如何選購二手音響器材?

- (甲)三個月中任意購買，買到最高超值率的一部的概率是 $\frac{1}{3}$
- (乙)利用最優終止法則買到最高超值率的一部的概率是 $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

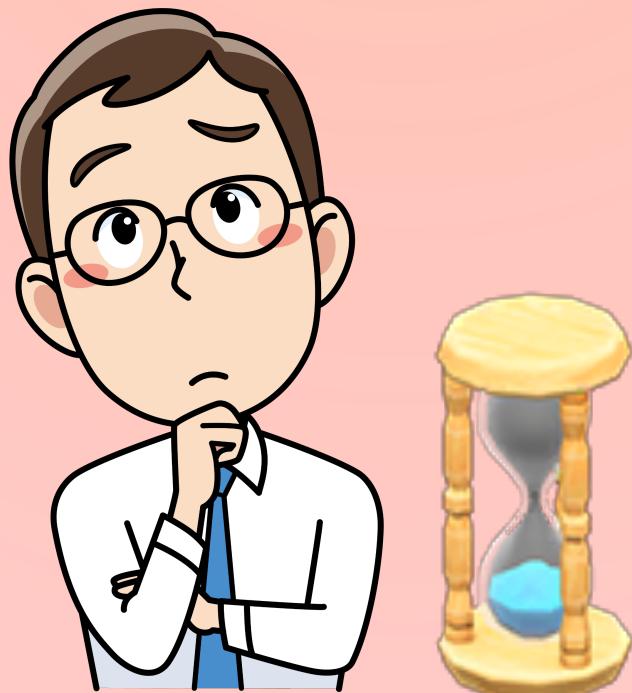
利用最優終止法則買到最高超值率那一部的概率大大提高了!!!

思 考 — 下



## 如何選購二手音響器材？

- 題目增加到4個月，我該從何時終止？



# 四個月怎麼買

## 如何選購二手音響器材？

- ①一月一定不買，二三月依序跟一月比，超值率有高於前者的買下，否則就買四月。
- ②一月一定不買，二月跟一月比，二月較高則買；一月較高則不買，但是把較高月刪除。
- ③一二月一定不買，三月跟一二月比，超值率有高於前者就買下，否則就買四月。

# 方法 ① ② 比 較



## 如何選購二手音響器材？

可能次序	方法一	方法二
ABCD	D	D
ABDC	C	C
ACBD	D	B
ACDB	B	B
ADBC	C	B
ADCB	B	C

可能次序	方法一	方法二
BACD	A	A
BADC	A	A
BCAD	A	A
BCDA	A	A
BDAC	A	A
BDCA	A	C

可能次序	方法一	方法二
CABD	A	A
CADB	A	A
CBAD	B	B
CBDA	B	B
CDAB	A	A
CDBA	B	B

可能次序	方法一	方法二
DABC	A	A
DACB	A	A
DBAC	B	B
DBCA	B	B
DCAB	C	C
DCBA	C	C

## 發 現 結 論

### 如何選購二手音響器材？

- ①一月一定不買，二三月依序跟一月比，超值率有高於前者的買下，否則就買四月。此法買到最高超值率的一部的概率是**0.46**；買到最低超值率的一部的概率是**0.08**
- ②一月一定不買，二月跟一月比，二月較高則買；一月較高則不買，但是把較高月刪除。此法買到最高超值率的一部的概率是**0.42**；買到最低超值率的一部的概率是**0.04**

同樣是最優終止法則，且終止時間相同，  
但篩選方式不同，交易結果也會不同。勝負難定!!

# 方法 ① ③ 比較



## 如何選購二手音響器材？

可能次序	方法一	方法三
ABCD	D	D
ABDC	C	C
ACBD	D	D
ACDB	B	B
ADBC	C	C
ADCB	B	B

可能次序	方法一	方法三
BACD	A	D
BADC	A	C
BCAD	A	A
BCDA	A	A
BDAC	A	A
BDCA	A	A

可能次序	方法一	方法三
CABD	A	D
CADB	A	B
CBAD	B	A
CBDA	B	A
CDAB	A	A
CDBA	B	B

可能次序	方法一	方法三
DABC	A	C
DACB	A	B
DBAC	B	A
DBCA	B	A
DCAB	C	A
DCBA	C	B

# 發 現 結 論

## 如何選購二手音響器材？

- ①一月一定不買，二三月依序跟一月比，超值率有高於前者的買下，否則就買四月。此法買到最高超值率的一部的概率是0.46；買到最低超值率的一部的概率是0.08
- ③一二月一定不買，三月跟一二月比，超值率有高於前者就買下，否則就買四月。此法買到最高超值率的一部的概率是0.42；買到最低超值率的一部的概率是0.17

同樣是最優終止法則，但終止時間不同，交易結果也會不同。後面會有我們組員介紹最好的終止界線。



## PART 02

# 2 最佳終止法則

# 最佳終止法則

- 在概論及博奕論上，秘書問題（Secretary problem），類似的名稱有相親問題、止步問題、見好就收問題、蘇丹的嫁妝問題、挑剔的求婚者問題等，屬於最佳終止法則。

# 最佳終止法則

- 若要論起相親問題最早的雛型，基本可溯源到 1611 年歷史上發生的一件趣事。當時遠近馳名的天文學家克卜勒 (Kepler) 在一次傷寒的意外中失去了他摯愛的妻子，隨著妻子的離去，獨留下來的克卜勒為了照顧孩子、打理家務，打算再娶一位新的老婆來幫忙。
- 那時他一共找了 11 位候選人來當他的對象，希望在這裡面能遇到符合他期待的女子，接下來他要做的就是一一與他們會面，並且從中找出他最對上眼的。
- 於是他開始逐次與這些女子相處，身為一個科學家，他也不免俗嚴謹地將對女子的評價一一記錄下來，當他相處到第四位女子時，他覺得自己已經找到了真愛，可以停止繼續會面下一個對象了。
- 雖然他到最後還是決定跟剩下的女子再約過一輪會，並且選中其中的第五位女子，但他這種情境的問題，到了二十世紀中葉，開始廣泛為人討論。

# 麥 穂 理 論

兩千五百年前，三個學生問蘇格拉底一個問題：「怎樣才能找到理想的人生伴侶？」蘇格拉底帶著學生來到一片麥田前，並對他們說：「請你們走進麥田，一直往前不要回頭，途中摘下一支最大的麥穗，只能摘一支。」

# 麥 穂 理 論

用三分之一的時間觀察，用三分之一的時間驗證這個觀察，得出「最基本的滿意標準」，然後在最後一個三分之一的時間裡，選擇第一個好於這個標準的，並不再尋找最優方案。

**PART 03**

**3 秘書問題題**



# 秘書問題

- 內容是這樣的：要聘請一名秘書，有  $n$  個應聘者。每次面試一人，面試後就要及時決定是否聘他，如果當時決定不聘他，他便不會回來。面試後總能清楚了解應聘者的合適程度，並能和之前的每個人做比較。問什麼樣的策略，才使最佳人選被選中的概率最大。

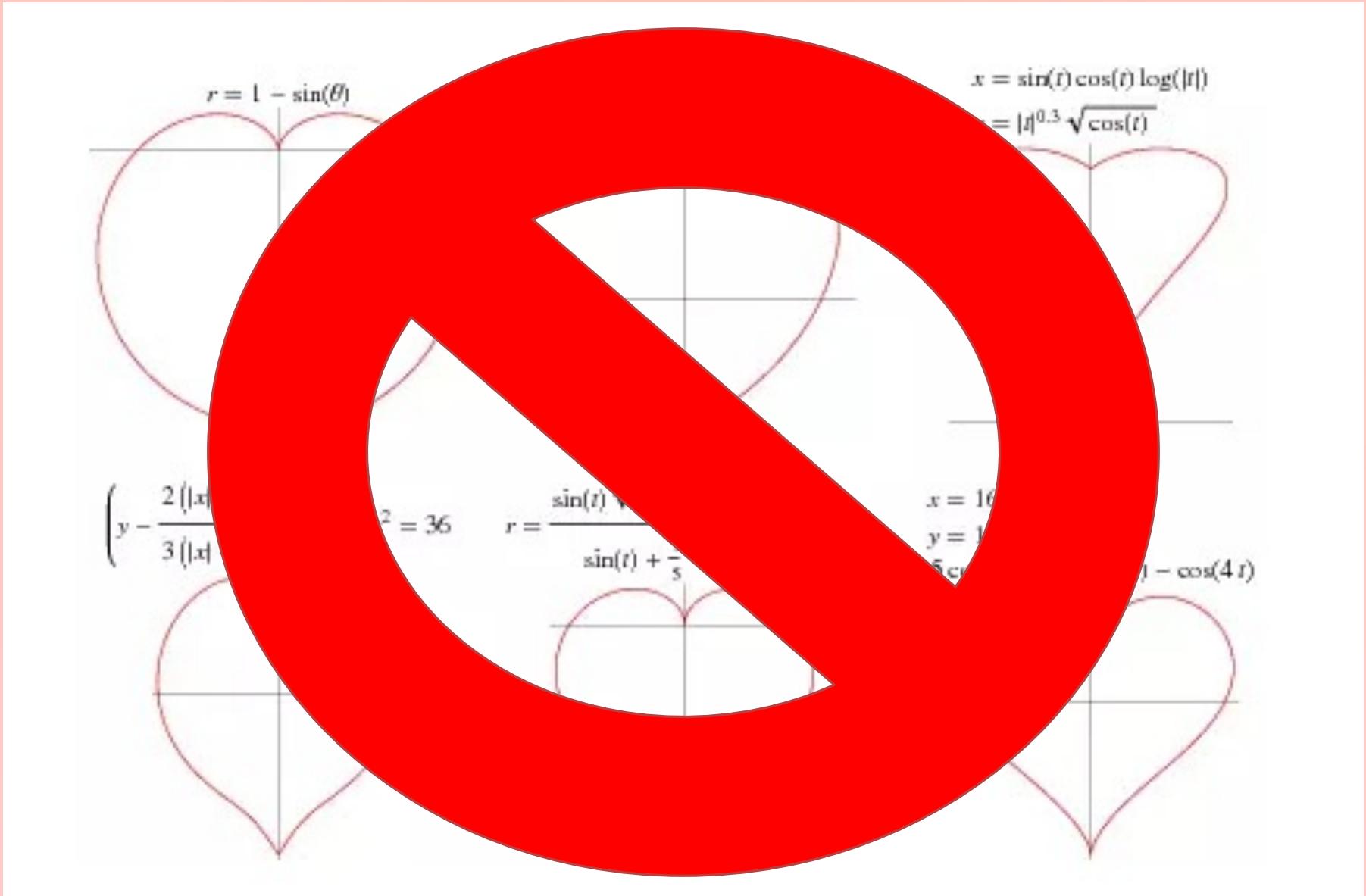
# 秘書問題

- 求和符號內概率的計算是基於：如果應聘者  $i$  是（所有應聘者中的）最佳人選，他被選中若且唯若頭  $i - 1$  個應聘者中的最佳人選處在頭  $r - 1$  個被拒絕的應聘者中。令  $n$  趨近無窮大，把  $x$  表示為  $r/n$  的極限，令  $t$  為  $i/n$ ， $dt$  為  $1/n$ ，總和可以近似為如下積分：
- $$P(x) = x \int_x^1 (1/t) dt = -x \ln(x)$$
- 令  $P(x)$  對  $x$  的導數為 0，解出  $x$ ，我們得到最優的  $x$  等於  $1/e$ 。從而，當  $n$  增大時，最優截斷值趨近於  $n/e$  最佳人選被選中的概率為  $1/e$ 。
- 對於較小的  $n$  值，最優的  $r$  也可以通過動態歸化方法得到。

PART 04

4 愛情數學







國立中央大學

# 男友名字不要挑一聲四聲二聲的

梗圖 · 12月



若你的約會對象有 $N$ 個選擇  
當你審視過 $r$ 個約會對象後

$$\begin{aligned} P(r) &= \sum_{i=1}^n P(\text{applicant } i \text{ is selected} \cap \text{applicant } i \text{ is the best}) \\ &= \sum_{i=1}^n P(\text{applicant } i \text{ is selected} | \text{applicant } i \text{ is the best}) \times P(\text{applicant } i \text{ is the best}) \\ &= \left[ \sum_{i=1}^{r-1} 0 + \sum_{i=r}^n P\left( \begin{array}{l|l} \text{the best of the first } i-1 \text{ applicants} \\ \text{is in the first } r-1 \text{ applicants} \end{array} \middle| \text{applicant } i \text{ is the best} \right) \right] \times \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=r}^n \frac{r-1}{i-1} \times \frac{1}{n} = \frac{r-1}{n} \sum_{i=r}^n \frac{1}{i-1}. \end{aligned}$$

$$P(x) = x \int_x^1 \frac{1}{t} dt = -x \ln(x)$$

$\Rightarrow P$ 的最佳值在  $x = \frac{1}{e}$  的時候出現

$$\frac{1}{e} \doteq 0.3679$$

## PART 05

5 3

7

法

則



## 37法則

- 1. 經過數學家歐拉的實驗，以37%作為分界點，前面的時間用來觀察，後面的時間用來做決策的一種方法。
- 2. 舉例：假設這片玉米地有N根玉米，拒掉前面k支玉米，無論那些多大，從 $k+1$ 開始，只要看到比前面大的就要毫不猶豫選擇。因此k的值非常重要，若太小達不到測試的效果，太大則導致真正可以選擇的不多。

- 3.  $P(k) = \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{n} = \frac{k}{n} * \frac{1}{i-1} \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i-1}$

用x表示 $k/n$ 的值，並假設n夠大，則公式可以寫成

$$P(k) = x \int_{-x}^1 \frac{1}{t} dt = -x * \ln x, \quad x \text{的最優值為 } \frac{1}{e} \approx 0.37, \text{ 因此稱為37法則}$$