



期末報告 - 數學魔術

第五組

411231203	應數二	王琬儀
411231210	應數二	黃柏歲
411231217	應數二	李彥槿
411231234	應數二	呂逕穠
411131230	應數三	鍾佳恩



目錄

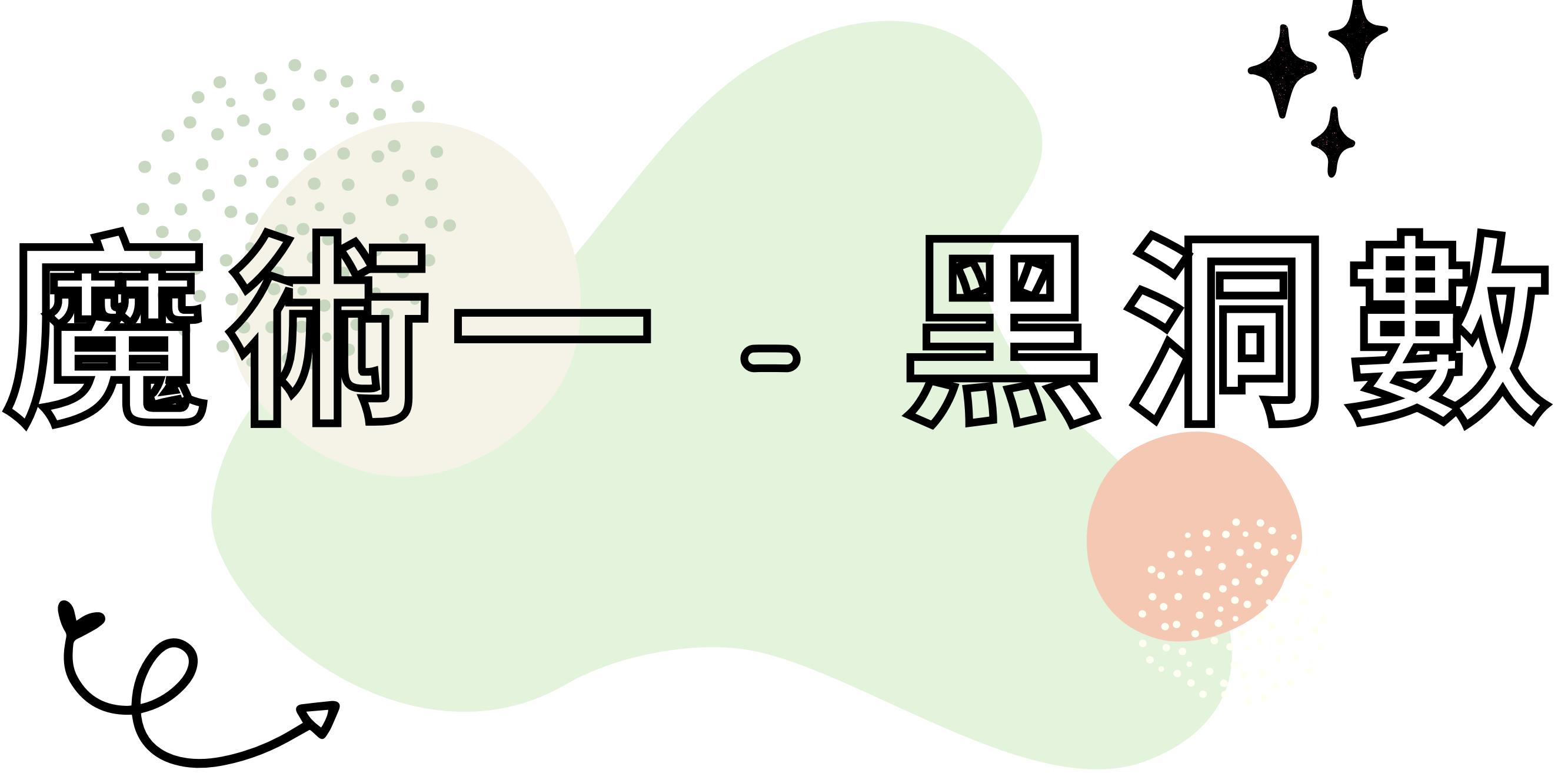
1. 介紹 - 關於數學魔術
2. 魔術一 - 黑洞數
3. 魔術二 - 讀心術
4. 魔術三 - 魔方&群論
5. 結論
6. Q & A

介紹 - 關於數學魔術

A decorative graphic at the bottom of the slide features three overlapping circles: a small orange circle on the right containing white dots, a large light green circle in the center, and a medium green circle on the left containing smaller green dots. Three black star-like sparkles are positioned above the light green circle.

介紹-關於數學魔術

在數學的世界裡，有些數字不僅僅是符號或運算的工具，它們本身就蘊含著令人驚奇的規律與特性。有些數字在加減乘除後會出現驚人的對稱性，有些則在重複運算中形成循環或魔幻般的結果。本報告將介紹幾個具有特殊性質的數字，並透過簡單的數學運算，探索它們背後的奇妙邏輯與數學之美。

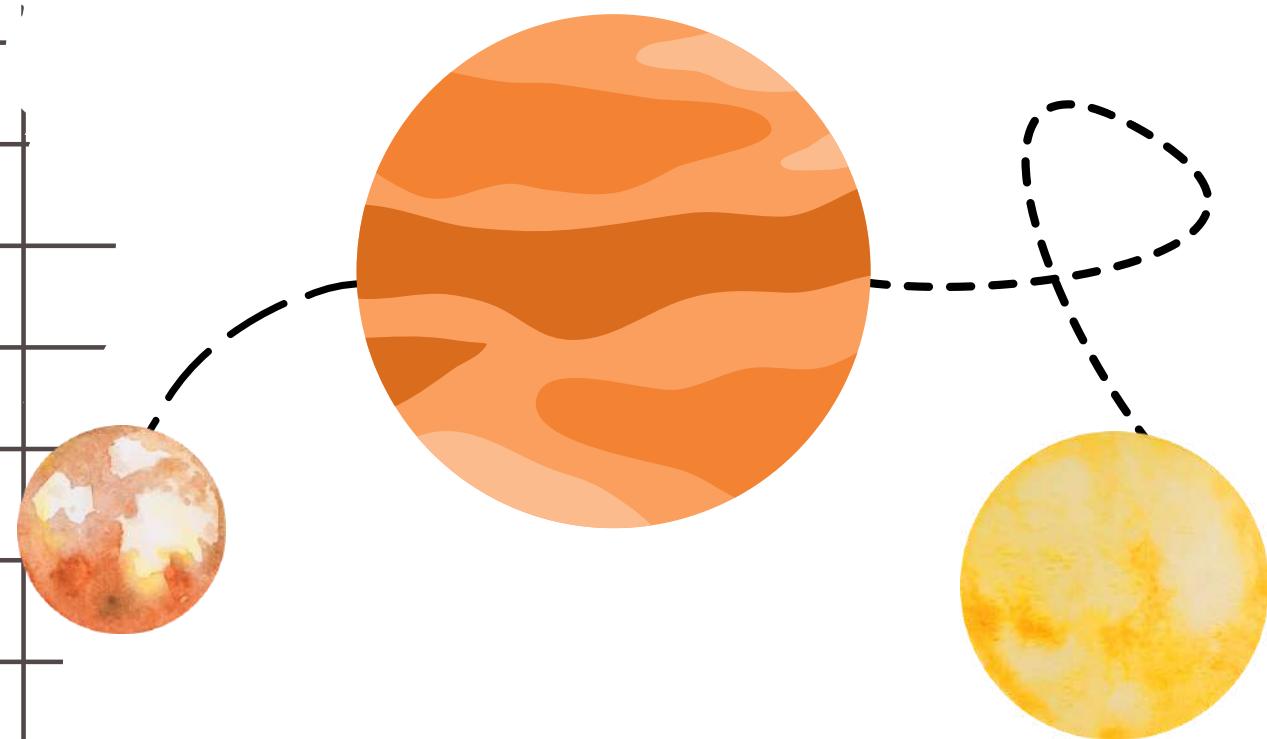


魔術一 - 黑洞數



前情提要：

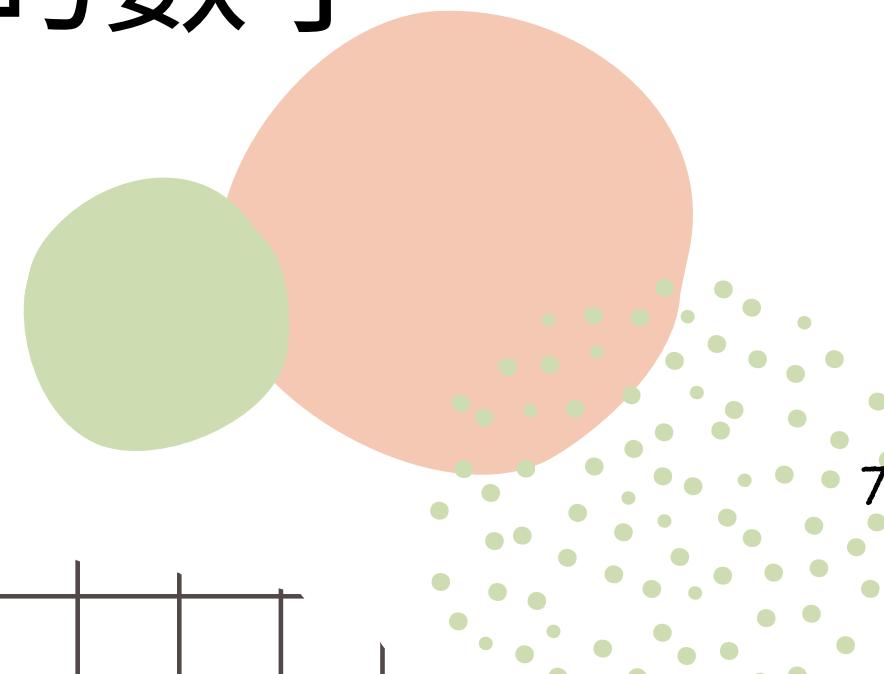
我們要駕駛著太空船探索宇宙中不同的行星，
行星的編號是從 0001~9998 且四位數字不能相同，
而我們需要按照接下來的步驟來決定要前往哪一顆行星？



魔術一 - 黑洞數

魔術步驟：

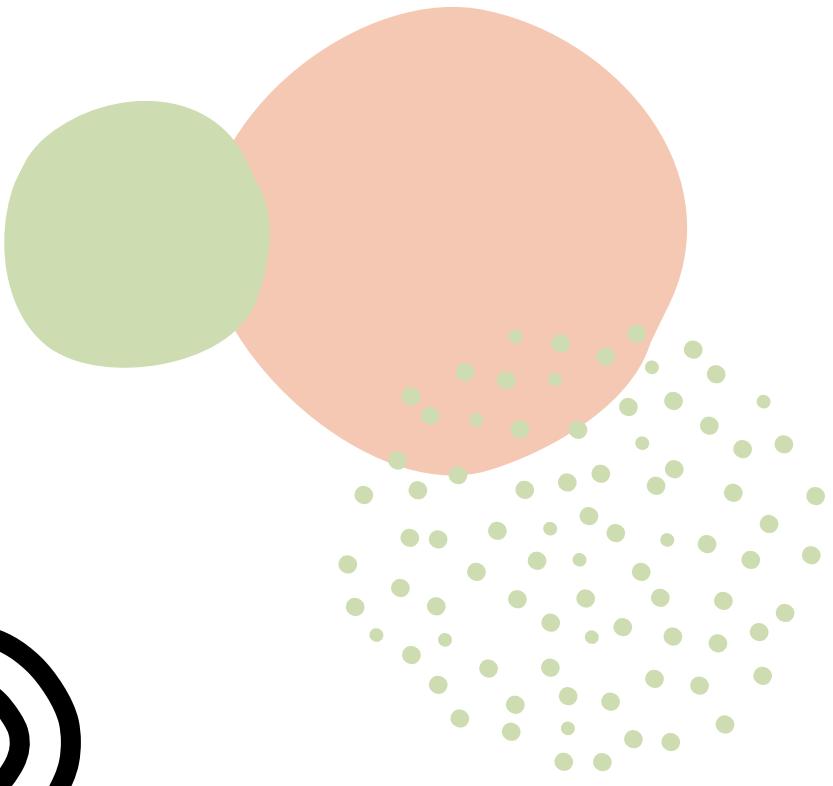
1. 將目前的星球號碼「位數」重新排列，分別排出最大的數(位數的數字由大到小)與最小的數 (位數的數字由小到大)。
2. 將最大數減去最小數，得到一個新的數字，就是我們要前往的星球編號。



魔術一 - 黑洞數

6147???

為什麼會是6147呢？

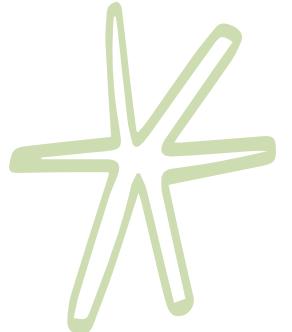


魔術 — 黑洞數

原理 — 卡普雷卡爾常數：

對於任意的四位數，只要數字不完全相同，將數字由大到小的排列減去由小到大的排列，用同樣的規則繼續算下去，在七步之內都會收斂到 6174。這種現象類似黑洞（進去後就出不來了），故稱為黑洞數。

魔術 — 。 黑洞數



歷史：

- 1949年卡普雷卡爾在印度的一場數學會議上分享了6174的奧妙，6174便以他命名，稱為卡普雷卡爾常數。
- 西山豊教授發現，根據卡普雷卡爾的算法，最多只需要7步運算就會得出6174。



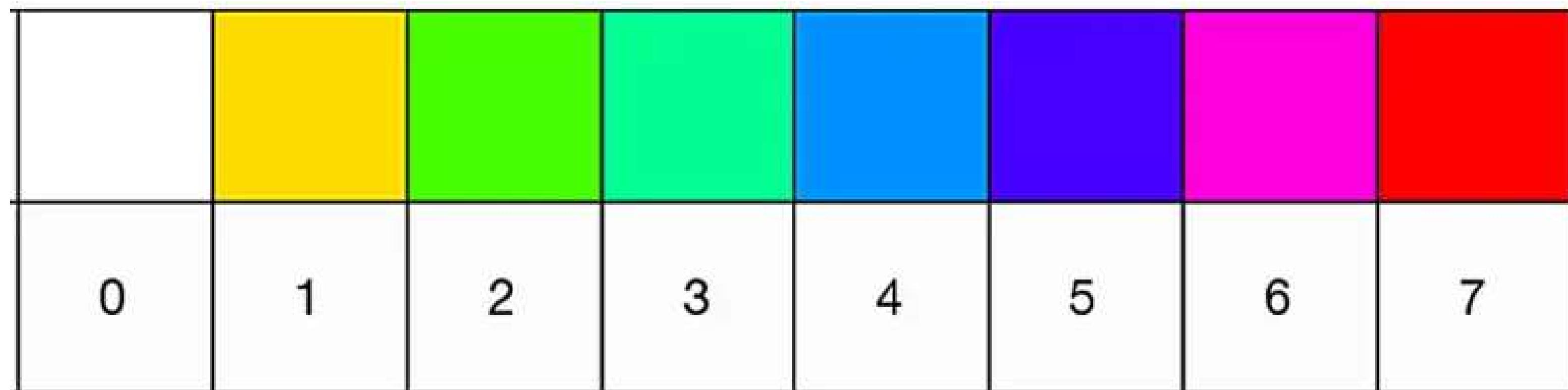
魔術一 - 黑洞數的其他位數

位數	黑洞數	數字循環
2位數	X	1個5成員的循環
3位數	495	X
4位數	6147	X
5位數	X	3個循環
6位數	631764、549945	1個7個成員的循環
7位數	X	1個8成員的循環

魔術 — 黑洞數應用

圖畫中的對稱性

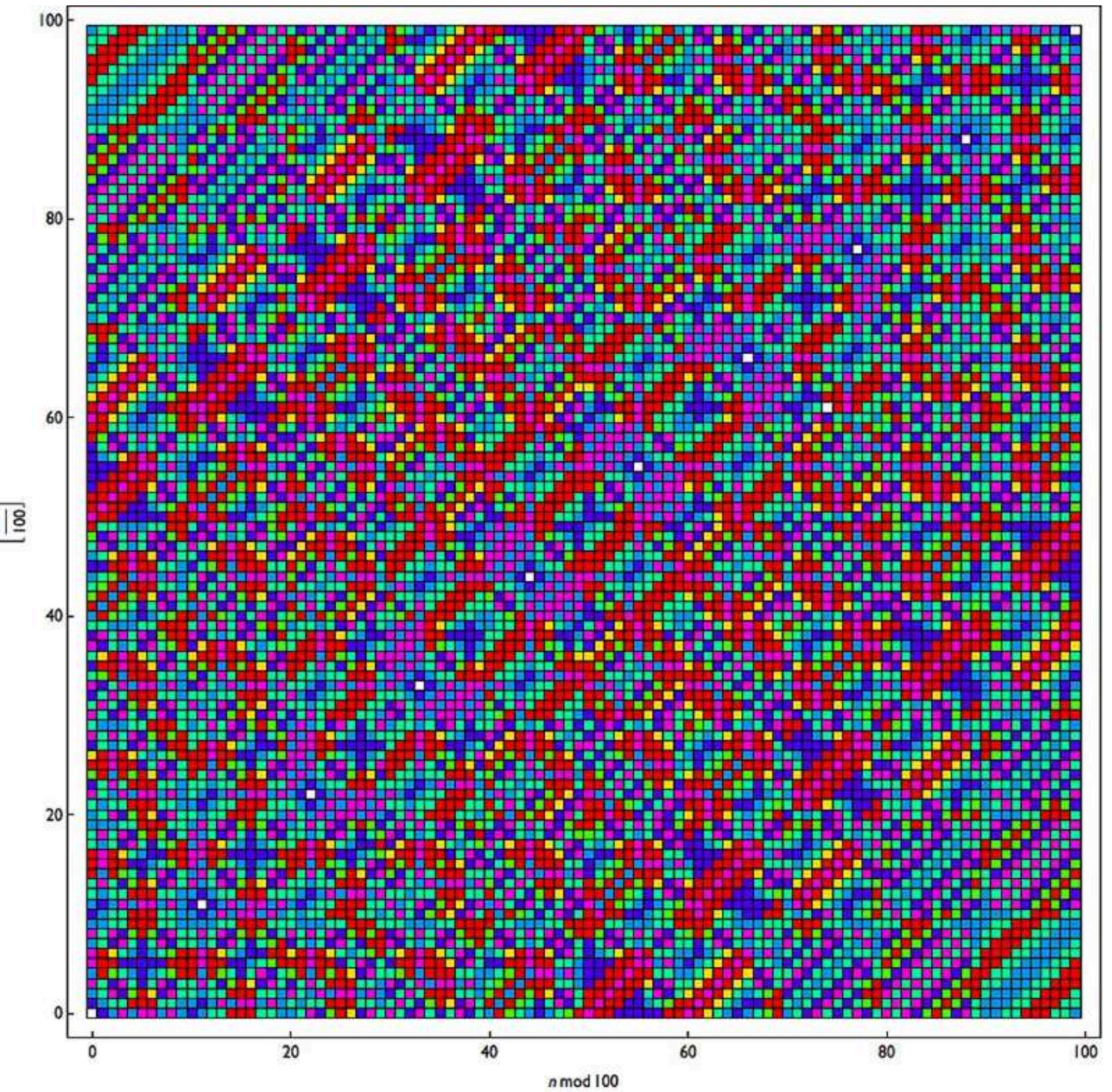
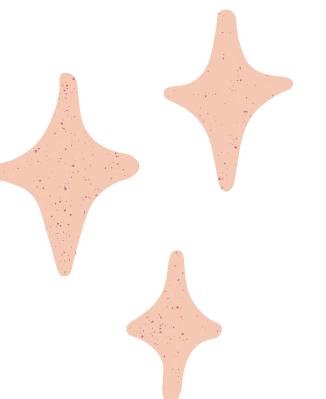
首先給得出6174這個常數的不同運算步驟編上顏色碼



魔術 —

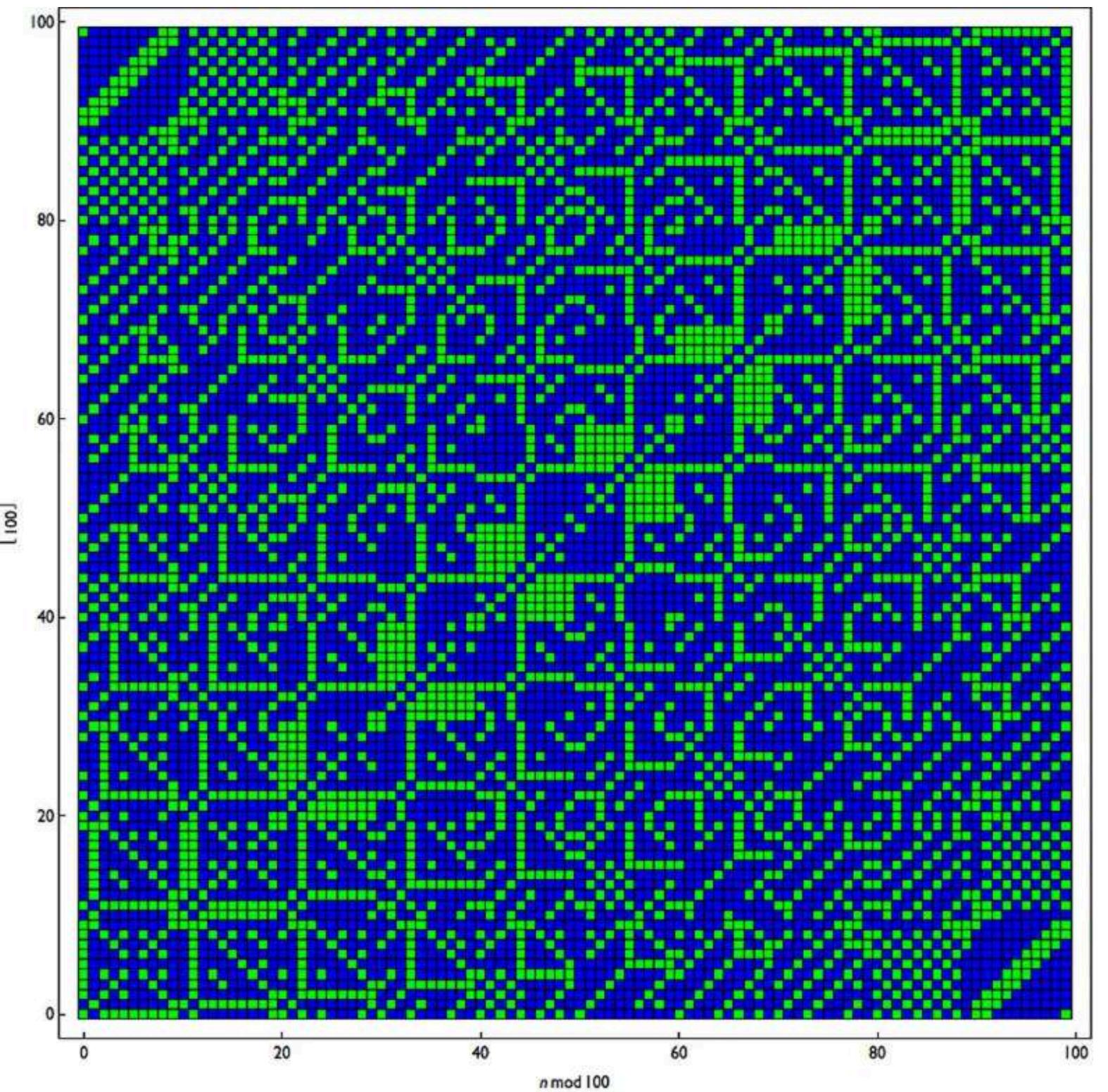
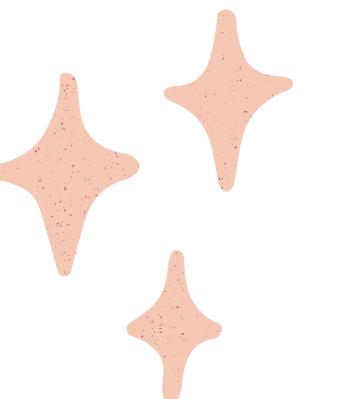
黑洞數應用

再將已有的一萬個四位數得出6174常數所用步數，排列在彩色網格上可得出右圖。



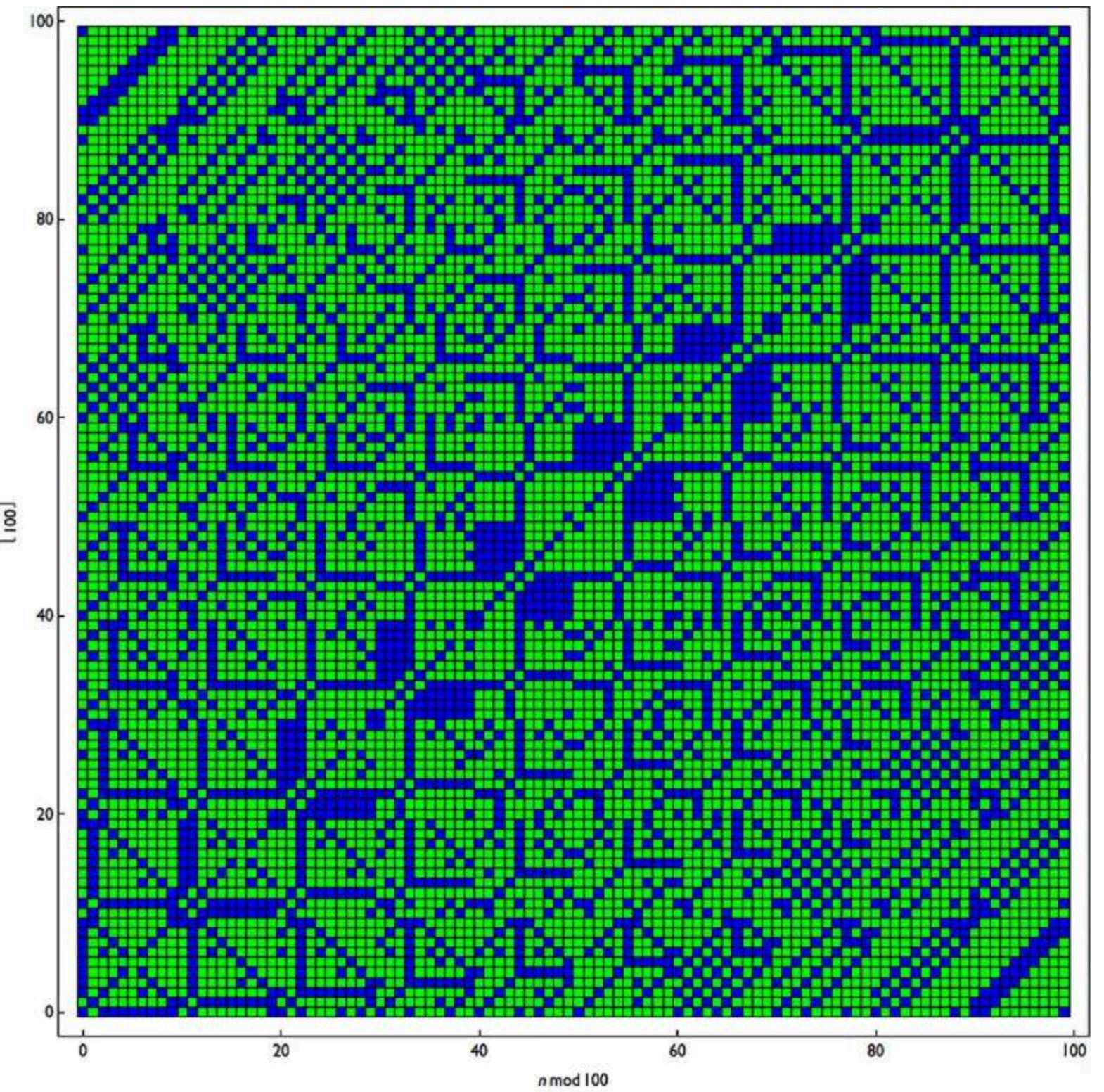
魔術 — 黑洞數應用

換成藍色代表奇數、綠色代表偶數再看看結果如何？



魔術 — 黑洞數應用

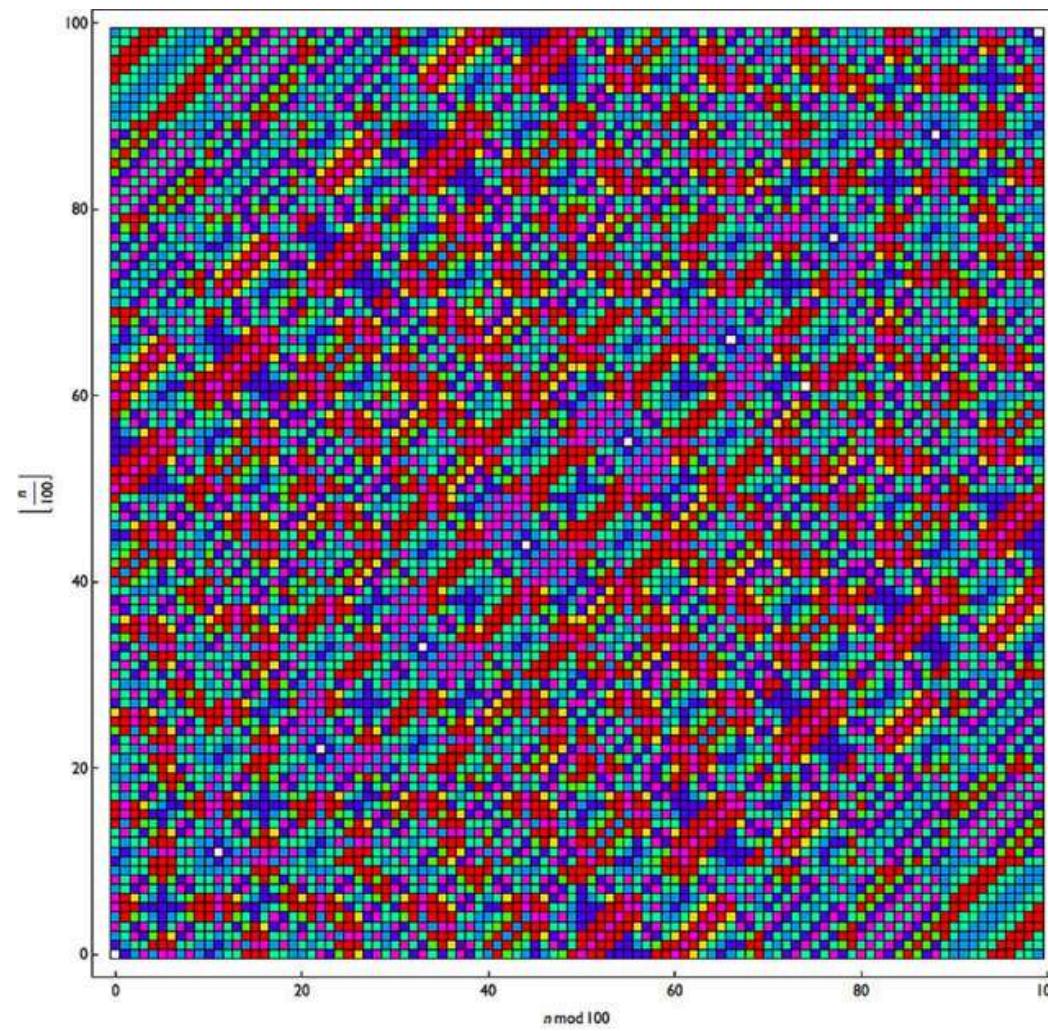
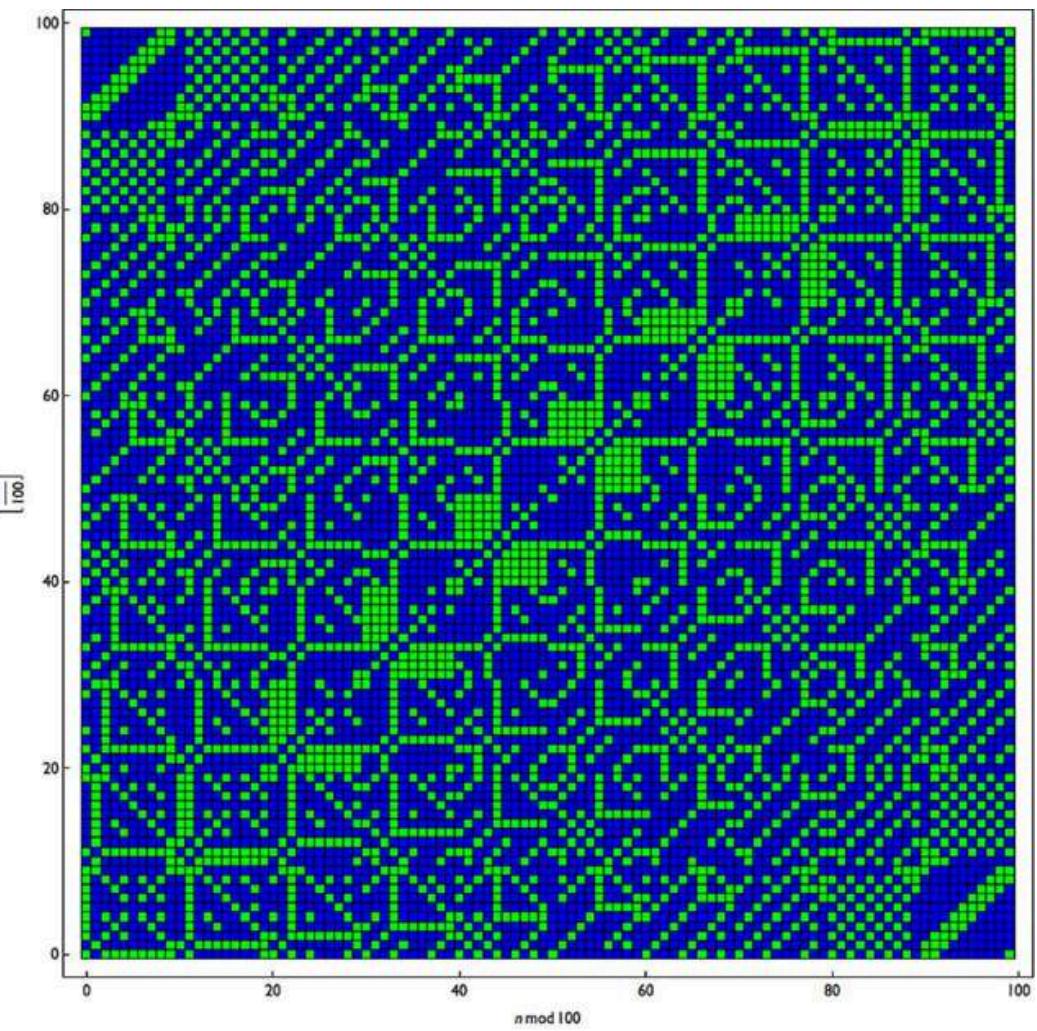
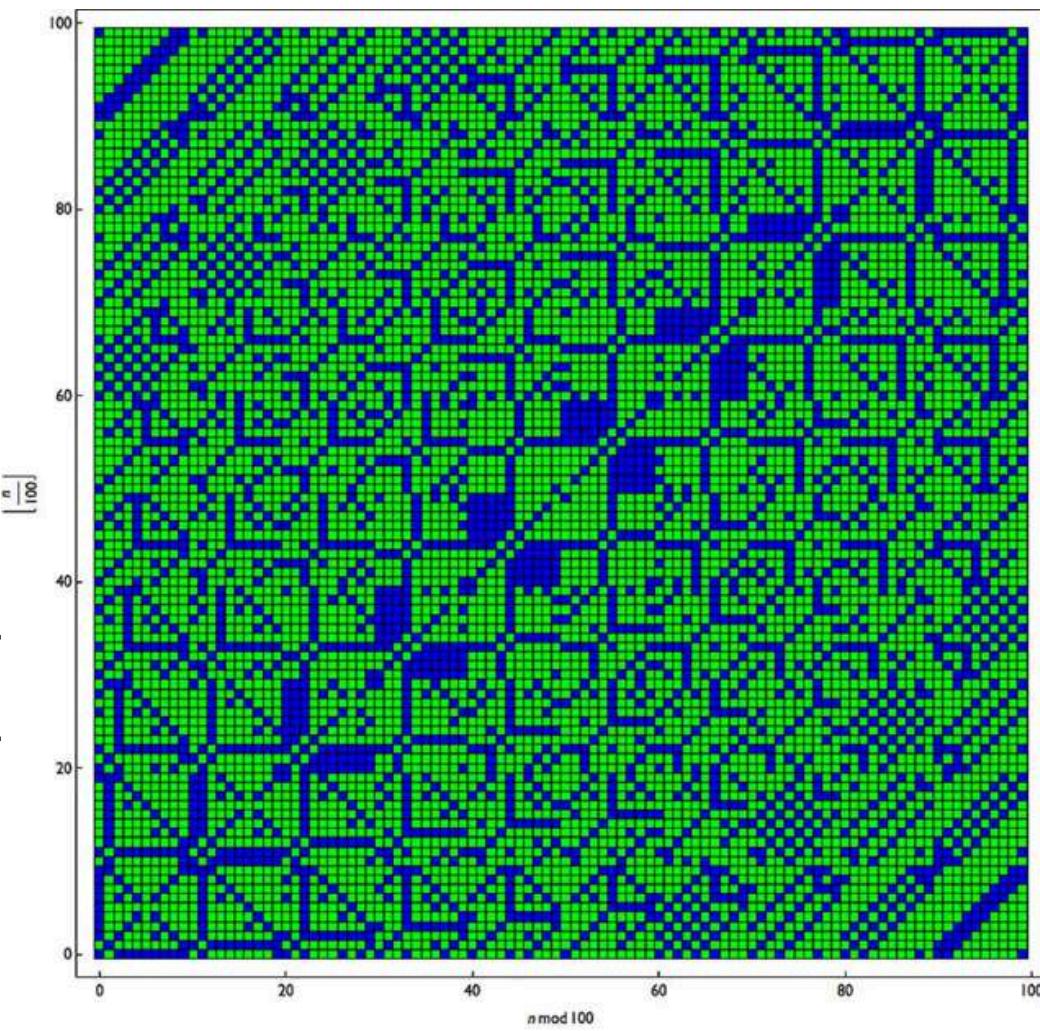
換成綠色代表質數，藍色代表合數再看看結果如何？

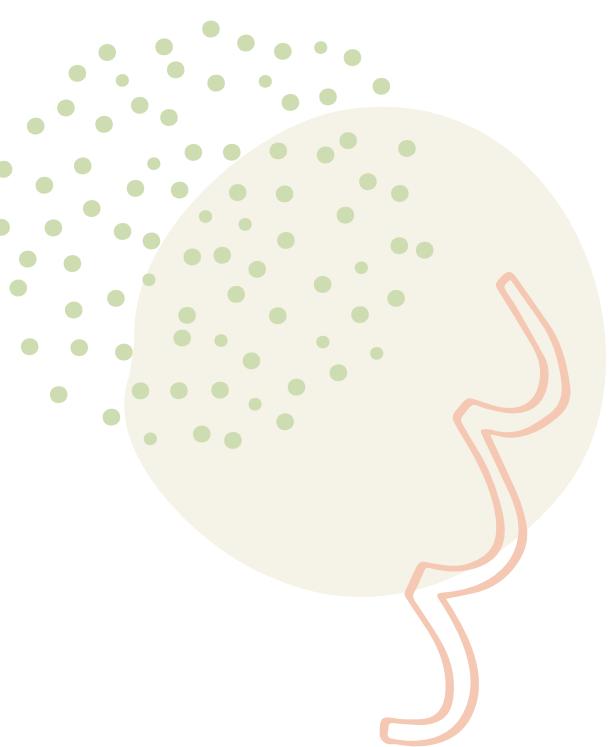


魔術

— ○ 黑洞數應用

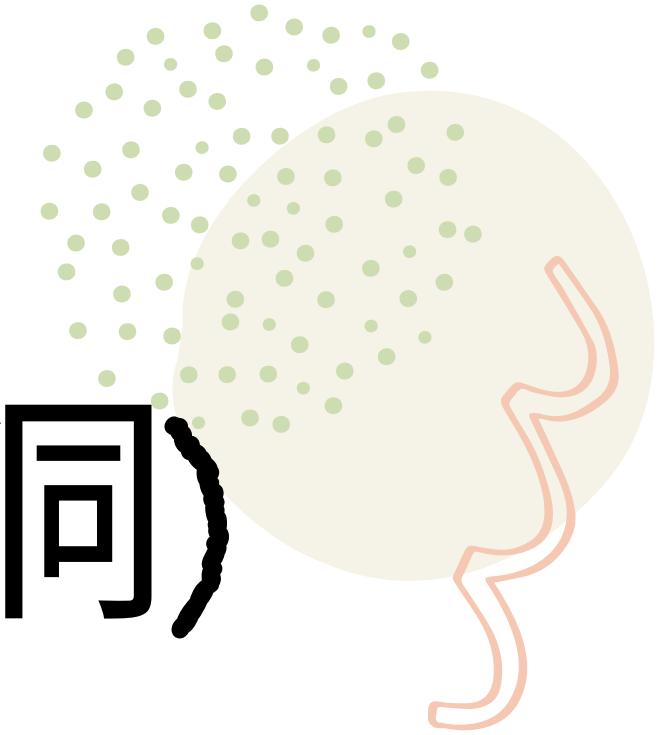
看出其中的對稱性了嗎？是不是很奇妙？





01 123黑洞(西西弗斯串)

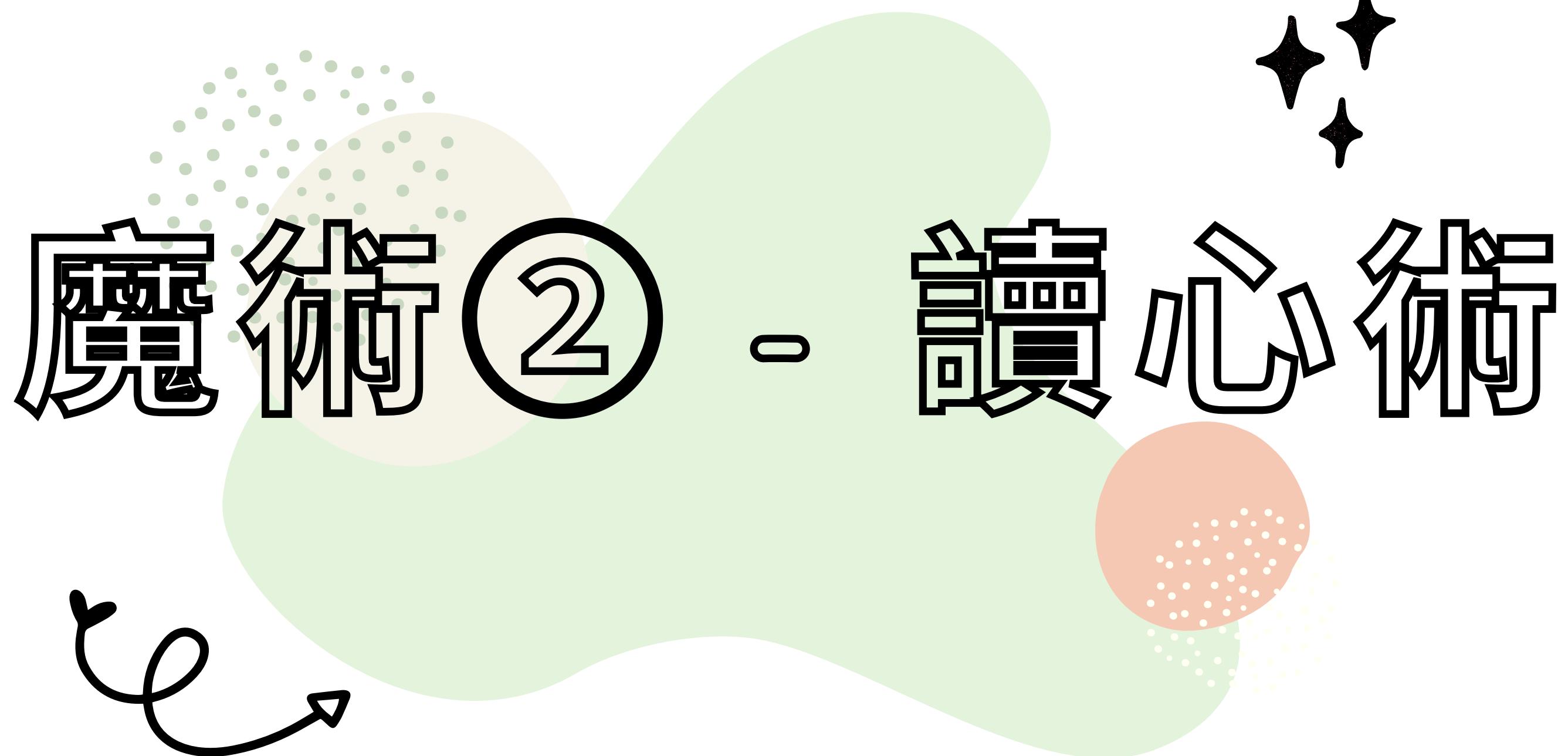
任取一個數字，數出它的偶數個數、奇數個數及總的位數。例如1234567890，其偶數個數總共5個，奇數個數也為5個，數字總數為10個。按「偶 - 奇 - 總」的位序排列，得到新數為：5510。重複上述步驟，得到134；再重複，得到123。任意一個數按上述算法經有限次重複後都會得到123。



02 153黑洞(水仙花數黑洞)

當一個 n 位數的所有數位上數字的 n 次方和等於這個數本身，這個數就叫自戀數。三位數中的自戀數有四個：153、370、371和407（這四個數被稱為「水仙花數」）。

自戀性數字也是黑洞的一種。例如，取任意一個3的倍數的正整數，分別將其各位數字的立方求出，將這些立方值相加組成一個新數，重複運算下去，最終結果一定為153。



魔術② - 讀心術

前情提要：

我是一名通靈師，專門剖析你的內心，只需要你提供一些資訊，就看出你隱藏在心中不為人知的秘密



魔術② - 讀心術

魔術步驟：

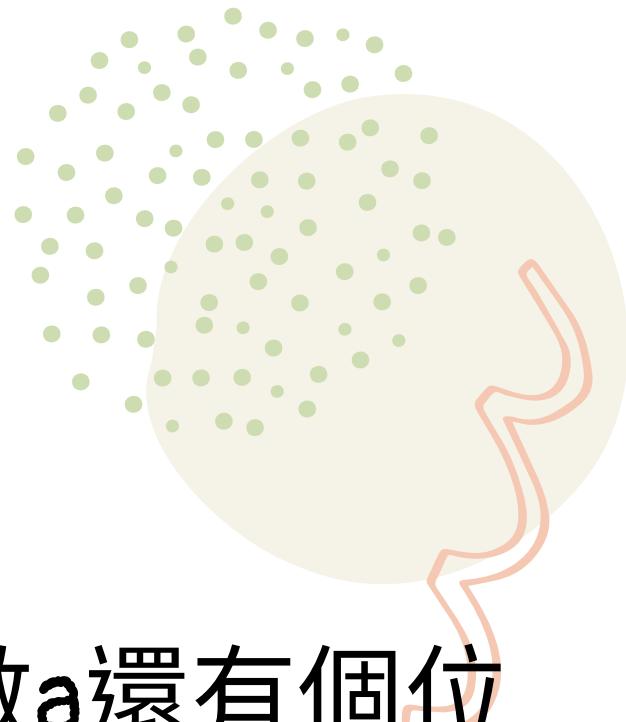
1. 你心中想一個10~99的整數
2. 將所想的數加上其個位數和十位數，
然後告訴我這個數字

例如心裡想的數字是15
你就告訴我 $15+1+5=21$



魔術②

○ 讀心術



通靈過程：

一開始的數字把它看成 $10a+b$ ，再加上他的十位數a還有個位數b，給到我們的數字就是 $11a+2b$ 。此時用這個數字除以11會有兩種可能：

1. 餘數是偶數=>滿足餘數 $2b$ ，則答案的十位數就是除出來的商，個位數是餘數除以二
2. 餘數是奇數=>無法滿足餘數是 $2b$ ，則我們需要將餘數加11後，再除以2即為個位數字，十位數字是除出來的商減掉1及即為答案

魔術②

- 讀心術(21張撲克牌)

前情提要：

從21張撲克牌中選擇一張牌記住，我會將它分成三堆，你告訴我你想的那張牌在哪一堆，三次之後我就知道你選的是哪張了



魔術② - 讀心術(21張撲克牌)

通靈過程：

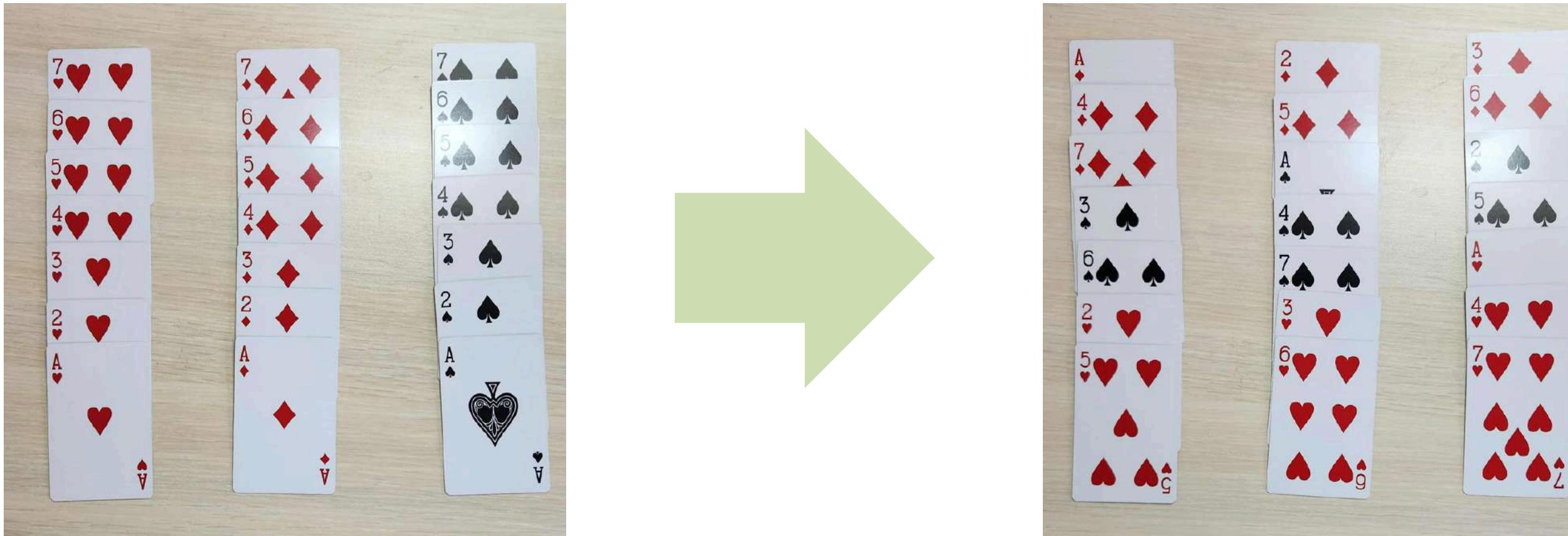
一開始我們把三堆牌分成ABC堆，在觀眾選出他的那堆牌後我們把那堆牌夾在另外兩堆沒被選的中間。

例如一開始選了C，則你讓牌堆形成ACB這樣子，目的是要讓觀眾所選的牌盡量靠近牌堆中心。

魔術② - 讀心術(21張撲克牌)

一開始選了C，則C1~C7都有可能是目標的牌，在第二次分牌中，C1~C7會被分在A'B'C'三堆的中間

下面是以黑桃A做為目標牌的第二次分牌

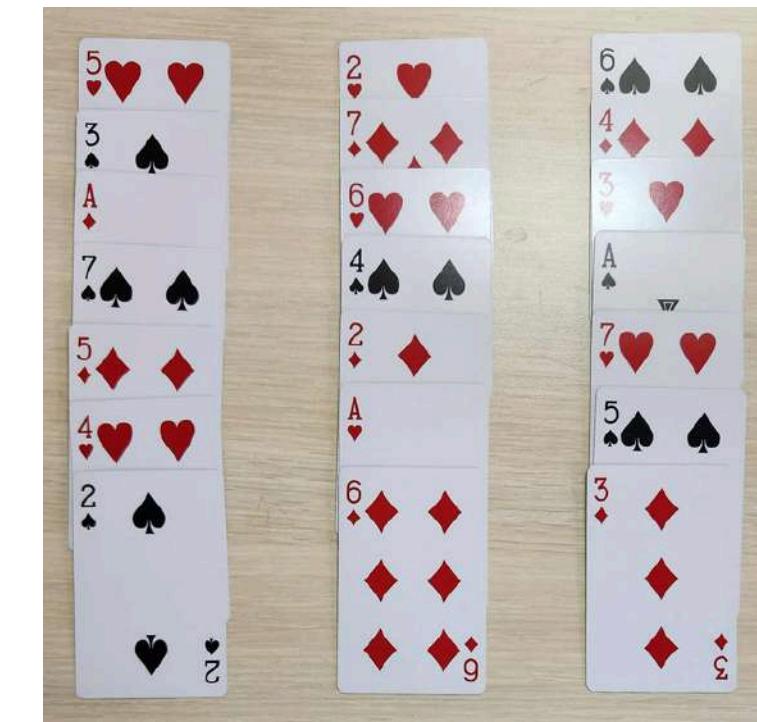
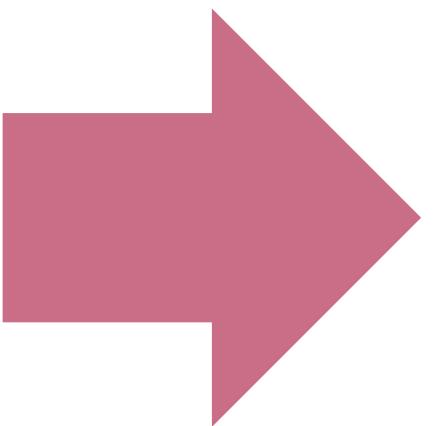
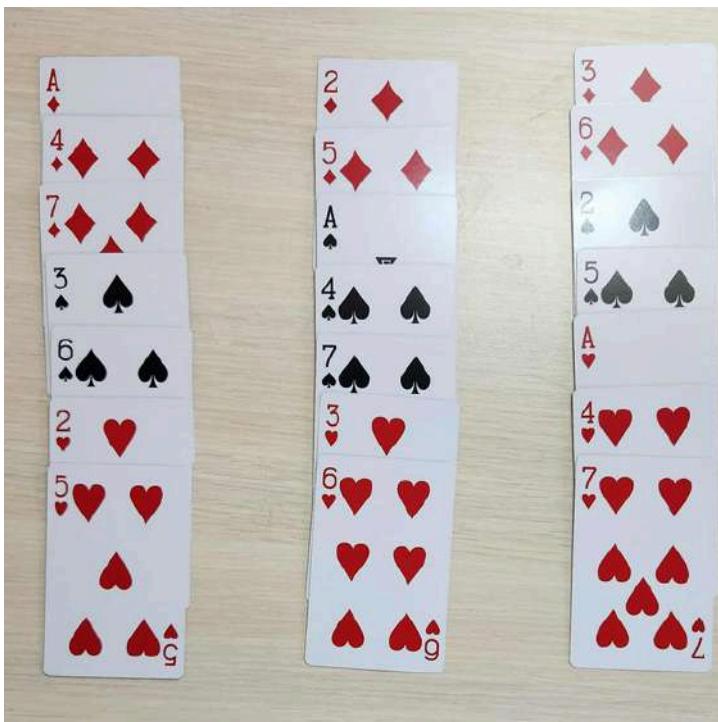


魔術②

○ 讀心術(21張撲克牌)

第二次選完牌後，我們就可以把目標牌的數量減少到最多三張，而第三次分堆會將剩下可能的目標牌分在不同的三堆中並且目標牌皆處於三堆的中央

下面是以黑桃A做為目標牌的第3次分牌

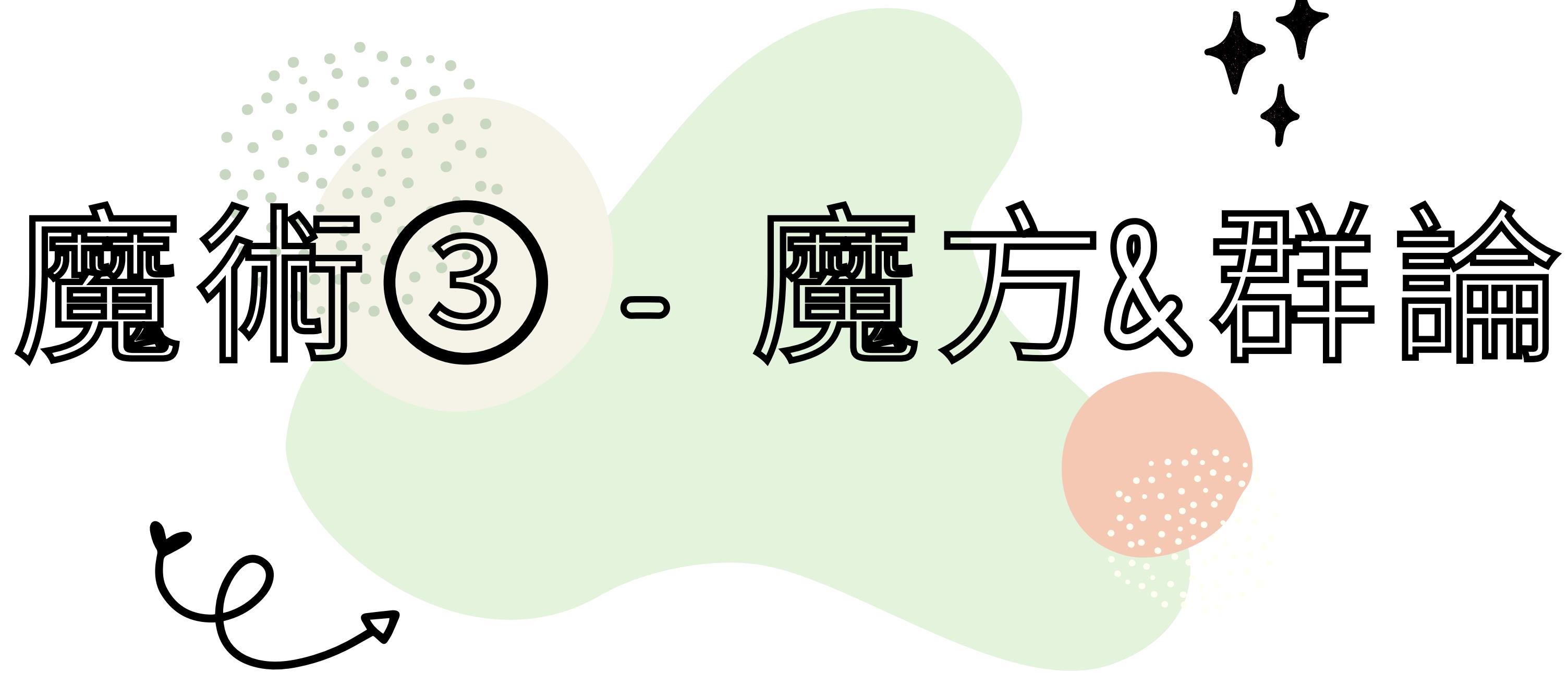


魔術②

- 讀心術延伸

除了21張牌，還可以用其他張數的牌或其他種堆數透過這種方式找到觀眾心想的牌嗎？





魔術③ - 魔方&群論

魔方與數學有什麼關係?
群論又是什麼？



魔術③ - 魔方&群論

群:設有一個集合G和G上的「二元運算」(Binary Operation)「 \cdot 」。如果G的元素和「 \cdot 」滿足以下「公理」(Axiom)，我們便說 (G, \cdot) 構成一個「群」

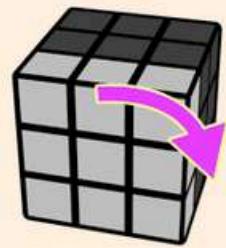
- 封閉性： a 和 b 在集合G中， $a \cdot b$ 仍在集合G中
- 結合性：對G中任何三個元素abc而言 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- 單位元：存在G中一個元素e，使得對於G中任何元素a而言， $e \cdot a = a \cdot e = a$
- 反元素：對於G中任何元素a而言，都有G中的元素 a^{-1}

魔術 3

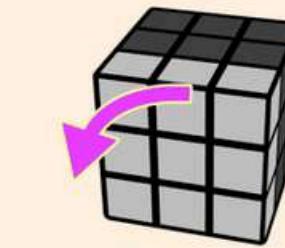
- 魔方 & 群論

轉淺灰色面一步 (90度)

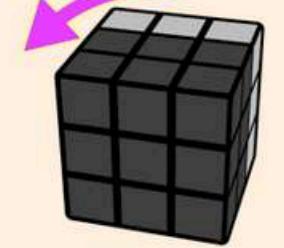
F



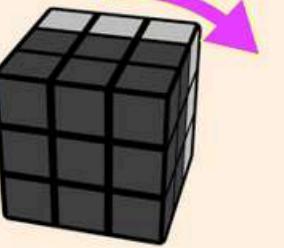
F'



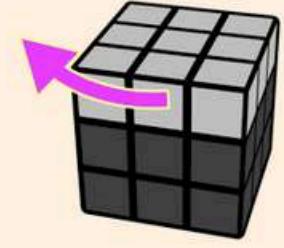
B



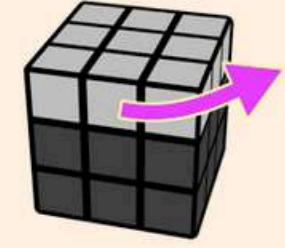
B'



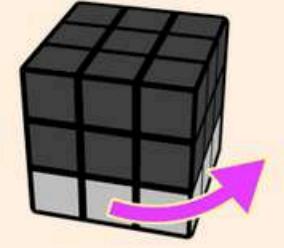
U



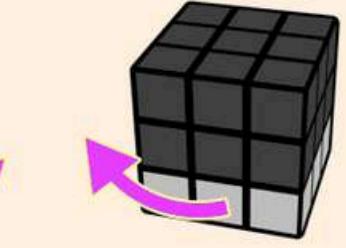
U'



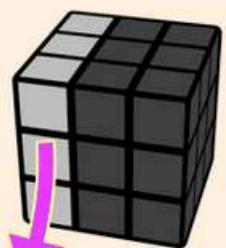
D



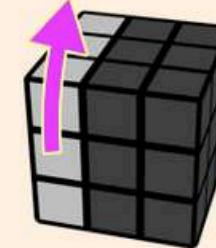
D'



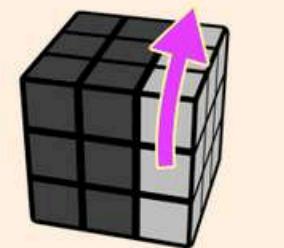
L



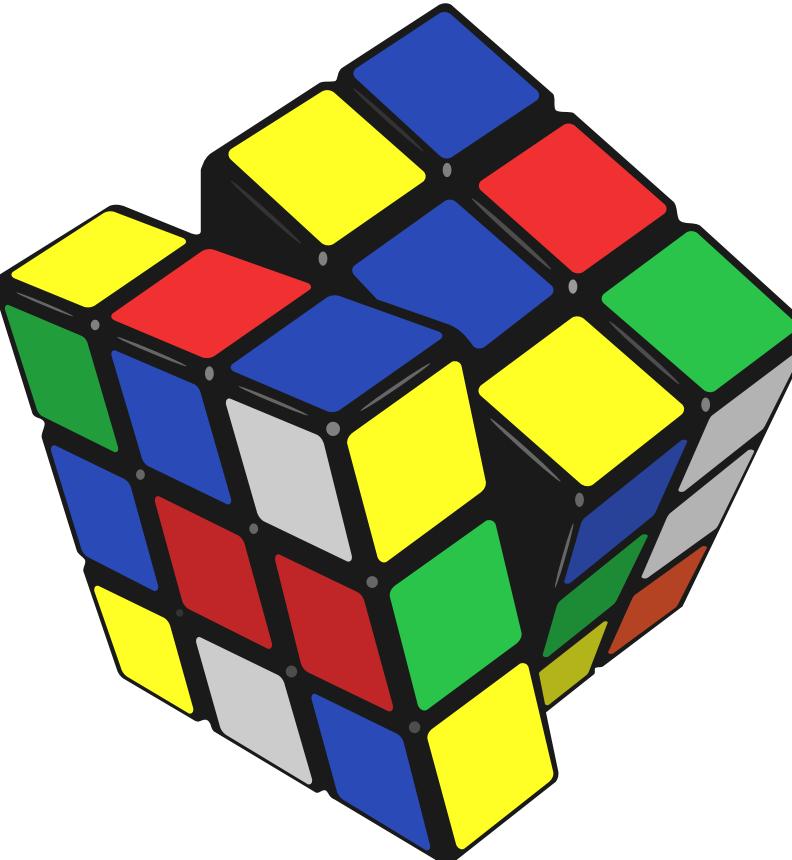
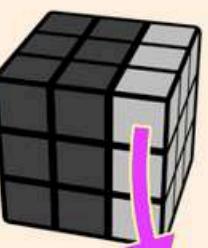
L'



R



R'



魔術③ - 魔方&群論

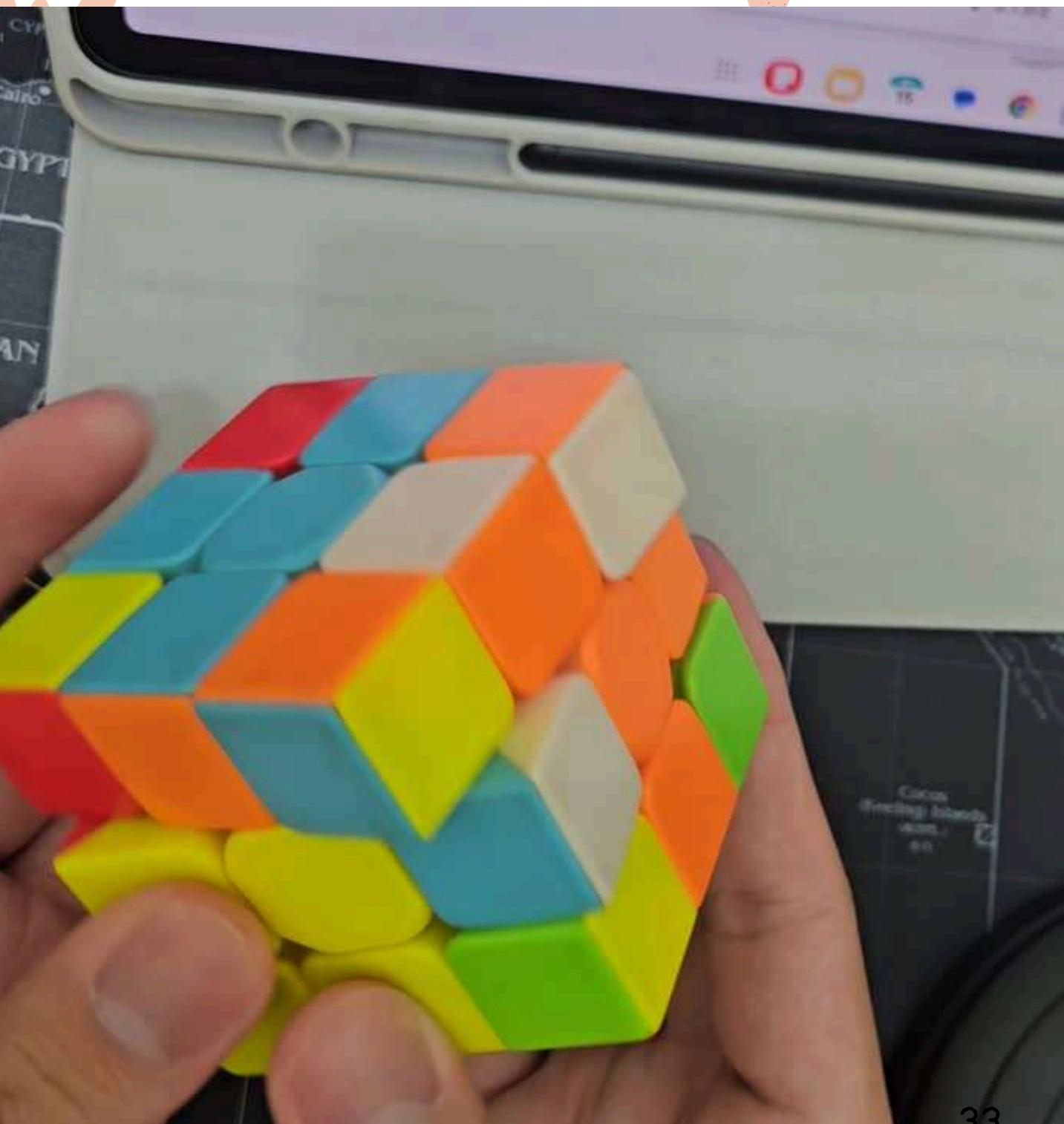
「魔方群」(Rubik Group)

將魔方的所有可還原狀態集合中當作元素，我們操作的轉換當作二元運算，這樣看來，魔方的運作完全符合群的定義：

- 封閉性：在正常轉動下，魔方一直都是可還原狀態
- 結合性： $(RF)F' = R(FF') = R$ 操作間的複合滿足結合性
- 單位元：什麼都不轉
- 反元素：R有對應的逆操作R'

魔術③ - 魔方&群論

魔方群的元素數量總共為 $12! * 8! * 3^7 * 2^{10}$
大約為4300京種，為一個有限群
執行重複且規律的操作
最後必定可以還原魔方



魔術③ - 魔方&群論

魔方還原的群論應用

一般普遍的解法為CFOP，將魔術方塊分為三層來還原。

大致流程如下：

1. Cross(十字)：拼出底層的四顆稜塊
2. F2L(前兩層)：處理四組角塊與稜塊，為不打亂上一步的十字，會採用一些特定轉法
3. OLL(頂層朝上)：只改變頂層的朝向
4. PLL(排列位置)：只調整最後頂層塊的位置，不改朝向

魔術③ - 魔方&群論

魔方還原的群論應用

上述的還原步驟常為了不破壞前面的層數而做出限制在特定邊角塊的轉動，這種限制轉動就是一種子群。

「子群」(Subgroup)的概念。給定群 (G, \cdot) 和 G 的子集 H ，如果 (H, \cdot) 本身也是群，那麼我們說 (H, \cdot) 是 (G, \cdot) 的「子群」。

魔術③

◦ 魔方&群論(交換子)

交換子(commutator) : $ABA^{-1}B^{-1}$



意思是先做A做B，然後倒回來操作A再倒回B。
可以使某些區塊變動，但其他部分不受影響。

魔術③

- 魔方&群論(共軛技巧)

共軛(conjugate) : ABA^{-1}



用 A 將魔方換個角度做 B ，之後再 A^{-1} 倒回角度。
為很多魔方公式推導的手段。



結論

01 黑洞數的數學意涵

- 數字操作後會收斂到固定值
- 運用了數字重組與不變點概念
- 與數列收斂行為相關

02 讀心術的數學意涵

- 設計精密的數字運算步驟
- 運用模數運算與數列規律
- 利用隱藏規則達成預測效果

03

讀心術的數學意涵

- 每次轉動 = 一次群運算
- 魔方變化 → 對應數學中的置換群
- 結構分析讓解法更有效率

結論

做報告過程中的挑戰

黑洞數：

- 一開始只能手動列例，觀察是否收斂
- 用歸納法與查資料確認規律
- 整理成表格方便報告展示

讀心術：

- 原本算式太長，觀眾容易看穿
- 調整運算方式、設計不同版本
- 加入符號對應表，分散注意力

魔方與群論：

- 群論概念抽象，難以想像變化
- 拆魔方、畫轉動圖、標記基本動作
- 對照群運算規則，慢慢釐清邏輯

結論

學數學魔術的意義：

- 01** 把抽象概念轉成直觀遊戲
- 02** 訓練邏輯推理與規則拆解
- 03** 背後的「設計」與「數學控制」
- 04** 本身就是一種思考訓練
- 05** 讓數學更有趣、更生活化

學會解題，
不如學會設計題目

- 01** 數學魔術是邏輯與創意的結合
- 02** 鼓勵大家觀察生活裡的數學現象
- 03** 試著自己設計數學遊戲或魔術

結論

01 破除迷思：數學魔術是...？

- 誤解1：這只是小孩的遊戲？（事實：許多研究涉及）
- 誤解2：這不是真數學？（事實：本質是邏輯與模型）
- 誤解3：數學應該嚴肅？（事實：嚴謹不等於枯燥）

02 數學魔術的學術深度

- 對應到的數學領域：群論、數位動態系統、模運算、組合設計
- 展現數學的普遍性與可視化特性

結論

03 魔術可不是偶然，而是一場精心編排的預測遊戲！

- 「收斂性」、「模運算」、「解構-重構邏輯」
- 魔術是邏輯預測的極致

04 讓數學被「感覺」到：用數學創作，而不只是使用它

- 數學魔術的價值，不在於「騙過觀眾」，而在於「喚醒對秩序的驚訝」。
- 數學不只是解題工具，它也是一種語言—能夠講故事、設計驚奇、傳遞感動。

結論-發展潛力

01 數學教育（啟發邏輯與創意）

- 透過魔術引發學生興趣，建立問題意識與邏輯思考能力

02 資訊安全與密碼設計

- 模運算、餘數設計正是 RSA 加密系統的基礎

03 表演藝術與互動設計

- 創造融合數學的沉浸式體驗

04 AI 自動驗證與推理系統

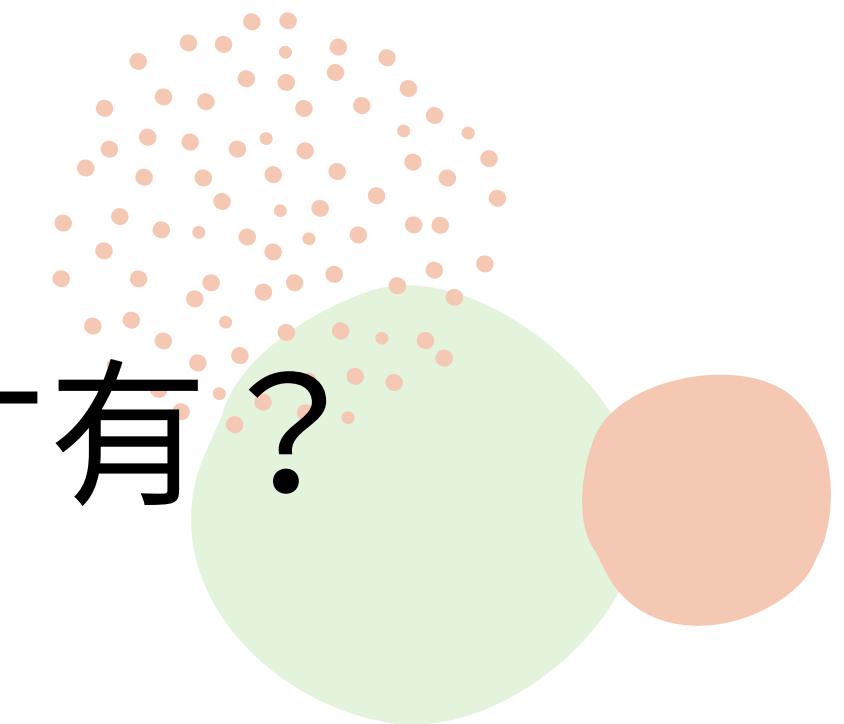
- 檢測碼、遞迴驗證演算法其實和這些原理緊密相關



Q & A

Q1：請問黑洞數是不是只有4位數才有？

其他位數也可以嗎？



A1：其實其他位數也會有類似的收斂現象，但不一定會收斂到同樣的數字。像3位數或5位數會有自己固定的「黑洞數」或週期，我們也可以用相同方式觀察與分析。

Q & A

Q2：如果讀心術的數字或規則被觀眾發現，怎麼辦？

A2：這正是數學魔術的有趣之處！我們可以透過調整題目或變換運算步驟，讓規則更加隱蔽，或加入額外條件分散觀眾注意力，讓他們難以一眼看穿。

Q & A

Q3：群論除了用在魔方，還有哪些生活應用？

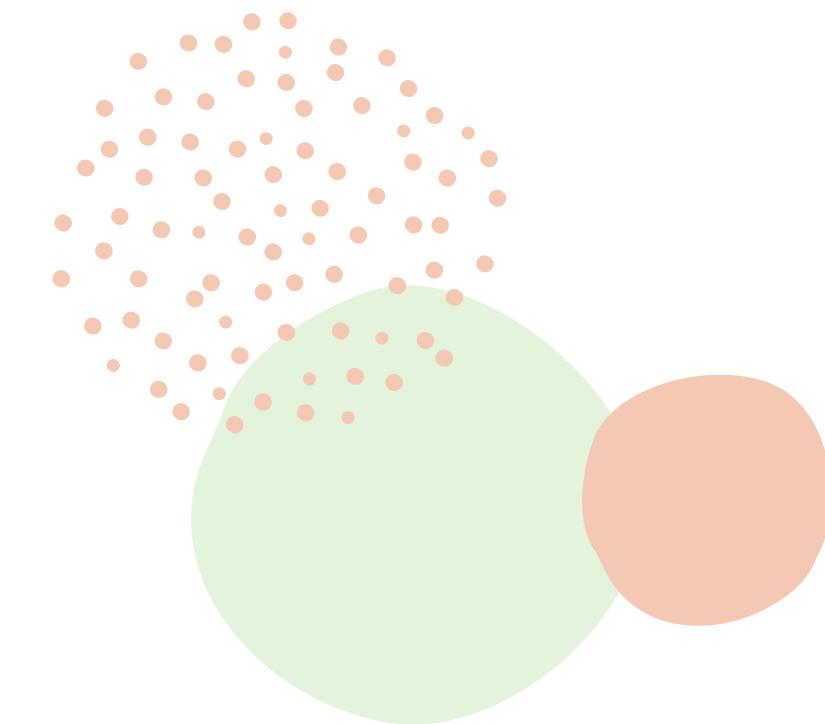
A3：群論在密碼學、機器人運動控制、3D建模、化學分子對稱性分析、甚至遊戲開發中的角色動作排列都能派上用場。它能幫助我們系統化地分析和管理變化與對稱性問題。

Q & A

Q4：你們做過的這三個魔術裡，哪一個最難設計或破解？

A4：魔方與群論的部分最具挑戰，因為群論概念抽象，且魔方轉動對應到置換群的方式需要拆解與標記，理解過程中相對複雜，但也因此最有成就感。

參考資料



1. 數學黑洞計算－卡普雷卡爾常數

<https://numeracylab.com/archives/1171>

2. WIKI－卡布列克常數

<https://zh.wikipedia.org/zh->

<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%8D%A1%E5%B8%83%E5%88%97%E5%85%8B%E5%B8%B8%E6%95%B8>

3. 數學黑洞的魅力：6174到底憑什麼讓你癡迷

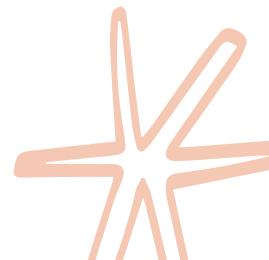
<https://www.bbc.com/zhongwen/trad/science-50601155>

4. 黑洞數字指什麼意思 目前已經發現的數學黑洞類型大全

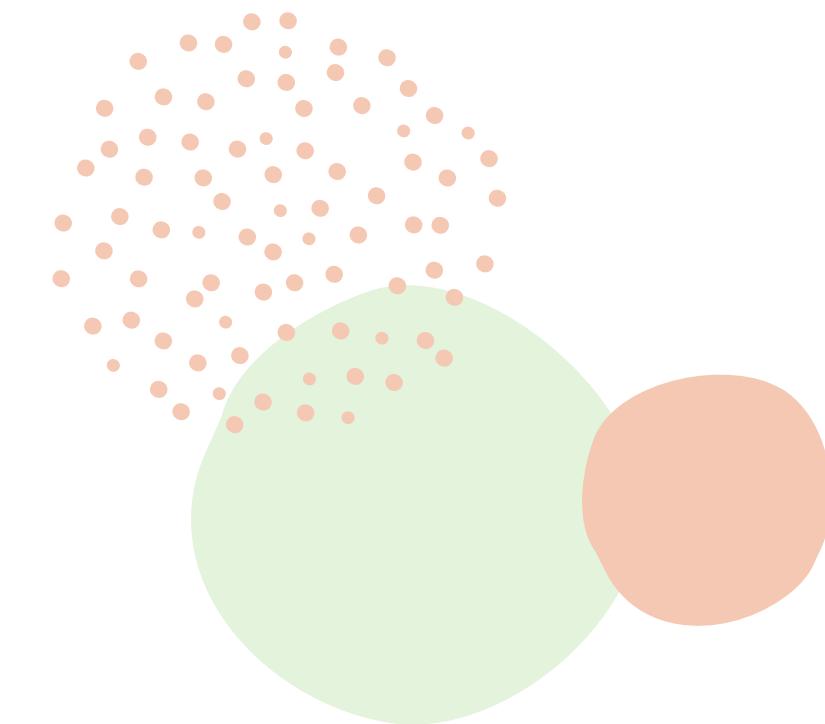
<https://kknews.cc/science/ap5v3y6.html>

5. 數學黑洞究竟有多「黑」？看了嚇死你！

<https://kknews.cc/science/r9qgpev.html>



參考資料



6. 群論與魔方，群論的基礎知識

<https://chowkafat.net/Rubik2.html>

7. 通過魔方上群結構了解魔方的性質

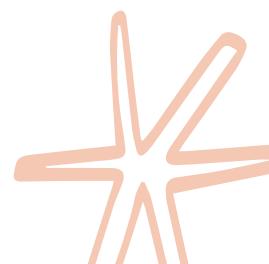
https://www.bilibili.com/video/BV1oD4y1s7R7/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click

8. 當魔方與群論結合，還是玩具嗎

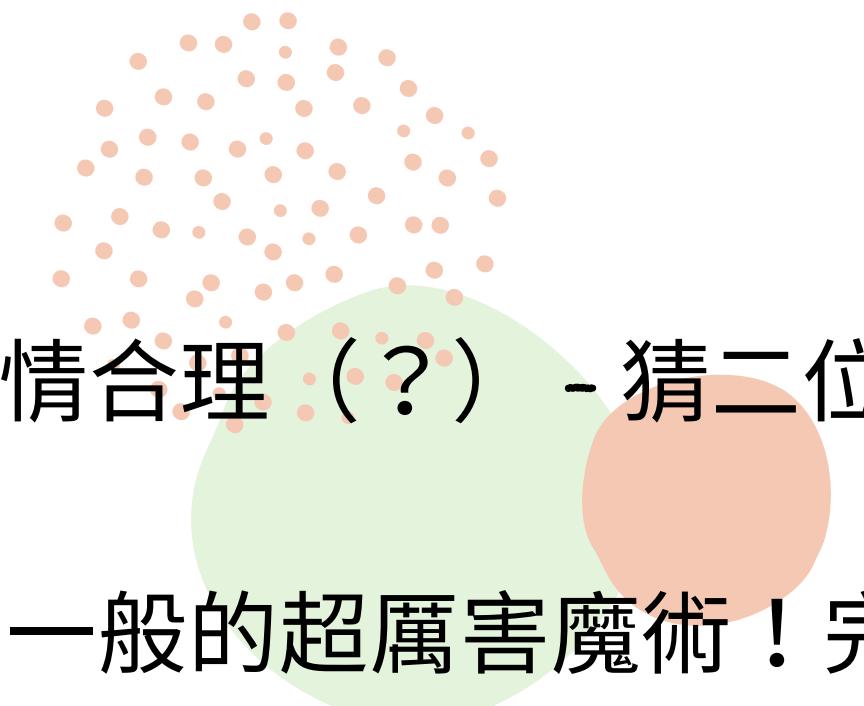
https://www.bilibili.com/video/BV1xZ421T7sB/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click

9. 魔方深層原理，人類不是推不出攻式!

https://www.bilibili.com/video/BV16S411c7ap/?spm_id_from=333.788.recommend_more_video.0



參考資料

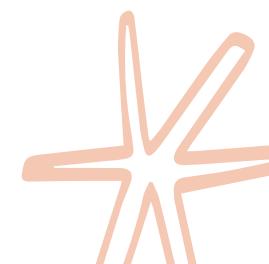


10. 【數學魔術】身為一位數學老師，會讀心術猜數字也是合情合理 (?) - 猜二位數

<https://vocus.cc/article/63df246efd897800013f8c0b>

11. 撲克牌魔術 教學 | 用數學邏輯搭配21張牌，即可變出如神一般的超厲害魔術！完全不用練習（21張牌） | 11本書「懶人魔術企劃#5」

https://youtu.be/E-k5IxTsT7w?si=BOaeyn3_RKh4iOK1



工作分配

組員	工作內容
王琬儀	魔術一(簡報、書面報告)
黃柏崴	介紹(簡報、書面報告)
李彥槿	魔術二(簡報、書面報告)
呂逕穠	魔術三(簡報、書面報告)
鍾佳恩	結論、Q&A(簡報、書面報告)、排版修稿

以上是我們的報告



謝謝大家

