

2001

第八組

第一題 數論主題

1. Randy: 嗨 Rachel, 給我一個有趣的一元二次方程式，讓我算出它的根。

Rachel: 有個方程式的兩根屬於正整數，其中一個是我的年齡，另一個是我弟弟Jimmy的年齡。

Randy: 太棒了! 讓我想想看你跟Jimmy的年紀，這裡的係數都是整數應該不會太難吧。哦對了，我還發現三個係數加起來是質數。

Rachel: 有意思，那現在算出我幾歲吧。

Randy: 我會先猜你的年齡，代入你二次方程式的X... 欸，怎麼算出來是-55而不是0。

Rachel: 哦我的天...

(a) 證明Jimmy的年齡是兩歲。

(b) 算出Rachel的年齡。

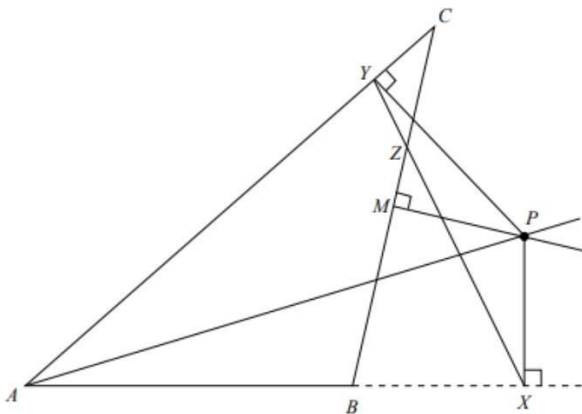
第二題 組合問題

下面的表格被編號從-10到10。每個格子都被填上紅色或白色，被塗上紅色的格子的號碼總和是 n 。Maureen 從0的格子開始。然後她擲一個公正的硬幣10次，當擲到正面，就將她選的格子往右一格，而擲到反面，則往左一格。在第十次擲完，停在紅色格子的機率是有理數可表示成 a/b 。如果 $a+b=2001$ ，算出 n 的最大值。

-10 ◦ -9 ◦ -8 ◦ -7 ◦ -6 ◦ -5 ◦ -4 ◦ -3 ◦ -2 ◦ -1 ◦ 0 ◦ 1 ◦ 2 ◦ 3 ◦ 4 ◦ 5 ◦ 6 ◦ 7 ◦ 8 ◦ 9 ◦ 10

第三題 幾何主題

下圖三角形 ABC 中， $AC > AB$ ，且 BC 的垂直平分線和角 A 的角平分線的交點為 P 。在 AB 延伸線上畫點 X 和 AC 線上畫點 Y ，使得 PX 垂直於 AB 且 PY 垂直於 AC 。 Z 為 XY 和 BC 的交點。計算 BZ/ZC 。



第四題 數論主題

n 為正整數，Nancy 畫了一個表格且每格都是正整數，她只能做下列兩個動作：

- (a) 選擇其中一行並將該行中的每格數字乘以 n 。
- (b) 選擇其中一列並將該行中的每格數字減去 n 。

找出滿足以下條件 n 的所有可能值：

給定任意表格，在有限的操作下能使每格的數字都變 0。

第五題 幾何主題

給定 P_0 、 P_1 、 P_2 在一個半徑為1的圓周上三點，且線段 $P_1P_2=t<2$ 。定義 P_i 為三角形

$P_{i-1}P_{i-2}P_{i-3}$ 外接圓的中心。

(a) 證明 P_1 、 P_5 、 P_9 、 P_{13} 、.....共線。

(b) 設 X 和 Y 分別為 P_1 到 P_{1001} 和 P_{1001} 到 P_{2001} 的距離。證明所有 $500 \sqrt{x/y}$ 的值 t 都是整數。