

希臘的哥白尼

—薩摩斯島的阿里斯塔克斯

第 8 組 410831149 楊弘暉

410731137 朱珮綸

410731145 張劭恩

410831135 陳威廷

410731231 童震易

目次

壹、研究動機.....	2
貳、阿里斯塔克斯 Aristarchus of Samos.....	2
參、日心說 Heliocentrism.....	2
肆、太陽與月亮的距離及大小.....	3
一、觀測數值.....	3
二、符號.....	3
三、半月.....	4
四、月食.....	5
五、結果.....	6
伍、補充.....	7
一、修正推論.....	7
二、數學模型.....	7
三、推翻地心說.....	9
陸、參考資料.....	16

壹、研究動機

曾經聽教授提到過阿里斯塔克斯在望遠鏡和相機都還沒發明出來的時候，計算了太陽與月亮的大小及太陽和月亮與地球的距離。我們便開始去了解他的故事及他是如何計算出來的。

貳、阿里斯塔克斯 Aristarchus of Samos

阿里斯塔克斯(Aristarchus of Samos, 公元前 310 年-前 230 年)，他是古希臘天文學家及數學家，出生於古希臘薩摩斯島。他是歷史上有記載首位創立日心說的天文學者，他將太陽而不是地球放置在整個已知宇宙的中心，他也因此被稱為「希臘的哥白尼」。

他的觀點並未被當時的人們理解，並被掩蓋在亞里斯多德和托勒密的光芒之下，直到大約 1800 年以後，哥白尼才很好地發展和完善了他的理論。

參、日心說 Heliocentrism

阿里斯塔克斯流傳至今的唯一著作，就是關於**太陽和月球的體積以及到地球的距離的論著**(後面第四點會提到)，是基於地心說的宇宙觀的。

但是，通過其他人的引證，可以知道他還寫了另一本書，在書中他發展了一個變通的日心說模型。

肆、太陽與月亮的距離及大小

在當時，他利用了肉眼可觀測到的數據及一些天文現象，利用數學分析、推論出以下結果：以地球半徑為比例，計算出太陽和月亮的大小及太陽和月亮與地球的距離。

我們在之後會詳細介紹阿里斯塔克斯的方法以及重建的結果。

一、觀測數值

這個方法首先需要以下的觀測數值：

1. 太陽和月亮在天空中的視尺寸
2. 在月食期間，地球陰影與月亮直徑的比例
3. 在半月時，太陽與月亮的夾角接近 90°

這些數據都不需望遠鏡即可觀測到。

二、符號

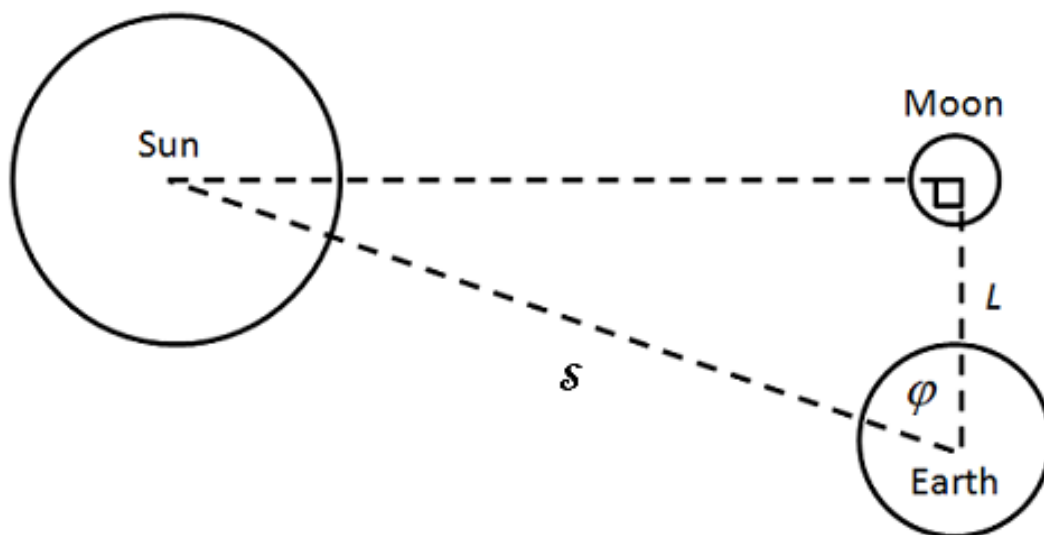
在之後的方法中會使用到以下的符號：

符號	定義
φ	在半月時，月球和太陽對於地球之間的角度(直接測量)
L	地球與月亮的距離
S	地球與太陽的距離
ℓ	月球半徑
s	太陽半徑
t	地球半徑
D	地球中心到地球陰影之錐體頂點的距離
d	地球陰影在月球位置時的錐體半徑
n	d/ℓ 的比值(月食期間可以直接觀測到的值)
x	$S/L = s/\ell$ 的比值(由 φ 計算得知)

三、半月 Half Moon

首先阿里斯塔克斯在開始推論的前提是：在半月期間，月亮、太陽與地球會形成直角三角形。

透過觀測出月球和太陽對於地球之間的角度 φ ，可以利用三角學的形式推導出地球到太陽與到月亮的距離比。



（該圖沒有符合比例，實際上 $S = 390L$ ，且 $\varphi = 89.51^\circ$ ）

推導過程：

根據上圖所示且利用三角函數，我們可以得到

$$\frac{S}{L} = \frac{1}{\cos\varphi} = \sec\varphi$$

阿里斯塔克斯將 φ 確定為比直角小三十分之一象限(3°)，也就是 87° 。

當時三角函數尚未發明，但他利用歐幾里得風格的幾何分析，得到

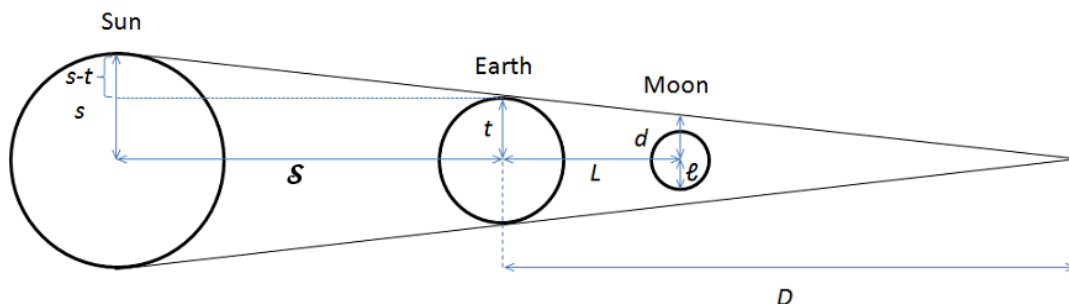
$$18 < \frac{S}{L} < 20$$

也就是說地球到太陽的距離比到月亮的距離大 18 到 20 倍。這個數值在接下來的兩千多年都被天文學家所接受，直到望遠鏡發明才能更精確的估計太陽視差，確定 $S = 390L$ 、 $\varphi = 89.51^\circ$ 。

又因為太陽與月亮的角直徑相同，但地球到太陽的距離比到月亮遠 18 到 20 倍，他因此推斷出太陽必比月亮大 18 到 20 倍。

四、月食 Lunar eclipse

接下來阿里斯塔克斯根據月食使用了另一種構造，如下圖所示。



推導過程：

由相似三角形的性質，得到

$$\frac{D}{L} = \frac{t}{t-d} \text{ 和 } \frac{D}{s} = \frac{t}{s-t}$$

將兩式相除，並利用太陽與月亮的視尺寸相同(也就是 $\frac{L}{s} = \frac{\ell}{s}$)，可知

$$\begin{cases} \frac{L}{s} = \frac{t-d}{s-t} \\ \frac{L}{s} = \frac{\ell}{s} \end{cases} \Rightarrow \frac{\ell}{s} = \frac{t-d}{s-t} \Rightarrow \frac{s-t}{s} = \frac{t-d}{\ell} \Rightarrow 1 - \frac{t}{s} = \frac{t}{\ell} - \frac{d}{\ell} \Rightarrow \frac{t}{\ell} + \frac{t}{s} = 1 + \frac{d}{\ell}$$

最後可以求解出 $\frac{\ell}{t}$

$$\frac{t}{\ell} \left(1 + \frac{\ell}{s} \right) = 1 + \frac{d}{\ell} \Rightarrow \frac{\ell}{t} = \frac{1 + \frac{\ell}{s}}{1 + \frac{d}{\ell}}$$

或 $\frac{s}{t}$

$$\frac{t}{s} \left(1 + \frac{s}{\ell} \right) = 1 + \frac{d}{\ell} \Rightarrow \frac{s}{t} = \frac{1 + \frac{s}{\ell}}{1 + \frac{d}{\ell}}$$

以 $n = \frac{d}{\ell}$ 和 $x = \frac{s}{\ell}$ 來表示

$$\begin{aligned} \frac{\ell}{t} &= \frac{1+x}{x(1+n)} \\ \frac{s}{t} &= \frac{1+x}{1+n} \end{aligned}$$

上述的方程式可以完全用觀測量計算出太陽和月球半徑。

下列公式則是以地球半徑為比例列出了到太陽和月亮的距離：

$$\frac{L}{t} = \left(\frac{\ell}{t}\right)\left(\frac{180}{\pi\theta}\right)$$

$$\frac{S}{t} = \left(\frac{s}{t}\right)\left(\frac{180}{\pi\theta}\right)$$

其中 θ 是太陽和月球的視半徑，單位是度。

五、結果

以上述公式可以重建阿里斯塔克斯的結果，且使用了 $n = 2$ 、 $x = 19.1$ (也就是 $\varphi = 87^\circ$)和 $\theta = 1^\circ$ ，下表呈現了長期(但可疑)重建的數值，並列出了現代公認的數值在一旁做為比對。

量	關係	重建的數值	現代的數值
$\frac{s}{t}$	以地球半徑為單位的太陽半徑	6.7	109
$\frac{t}{\ell}$	以月球半徑為單位的地球半徑	2.85	3.50
$\frac{L}{t}$	以地球半徑為單位的地球到月球之距離	20	60.32
$\frac{S}{t}$	以地球半徑為單位的地球到太陽之距離	380	23,500

計算中的錯誤主要來自 x 和 θ 的誤差。

令人驚訝的是 θ 的誤差，因為阿基米德提到：亞里士多德是第一個確定太陽和月亮的視直徑為半度的人，這表示 $\theta = 0.25^\circ$ 以及地球到月球的距離為80個地球半徑，這是一個更好的估計值。阿里斯塔克斯與阿基米德的研究不同的點在於阿基米德似乎採用了亞里士多德的說法：日與月的直徑是黃道上 $1/15$ 的“meros”，由於不確定希臘文的“meros”是「部分」還是「 7° 」，前者為一個星座(30°)的 $1/15$ ，也就是說視直徑是 2° ，視半徑 $\theta = 1^\circ$ ，與剛剛阿里斯塔克斯重建的結果相符；後者為 7° 的 $1/15$ ，也就是說視直徑約是 0.5° ，視半徑 $\theta = 0.25^\circ$ ，後者符合阿基米德的證明。

伍、補充

一、修正推論

喜帕恰斯(Hipparchus)在後來用了相似的過程計算出地球到月球的距離是**67**個地球半徑；而托勒密(Ptolemy)則計算出**59**個地球半徑。

詳細計算過程可以參考：

維基百科|On the Sizes and Distances(of the Sun and Moon)(Hipparchus)

[https://en.wikipedia.org/wiki/On_Sizes_and_Distances_\(Hipparchus\)](https://en.wikipedia.org/wiki/On_Sizes_and_Distances_(Hipparchus))

二、數學模型

(一)地心說模型

1. 概念

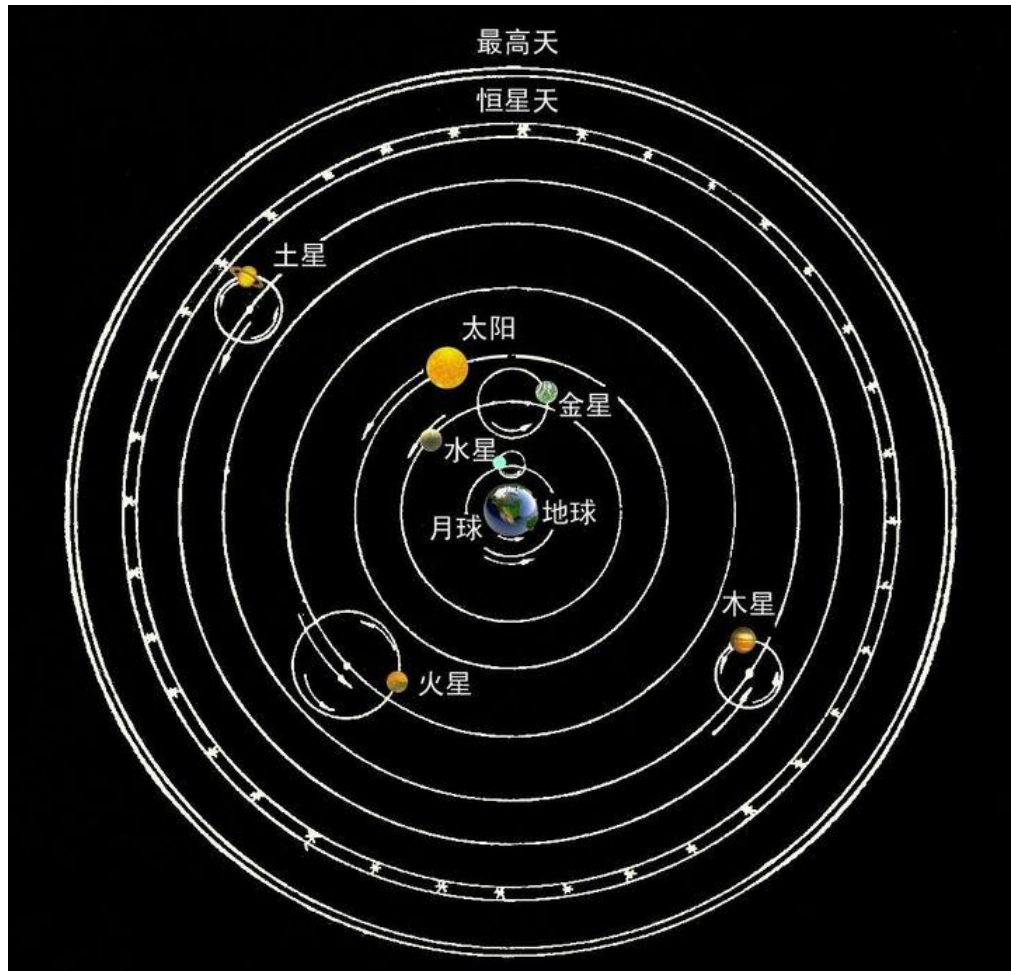
托勒密於公元二世紀，提出了自己的宇宙結構學說，即《地心說》，認為地球是宇宙的中心，是靜止不動的，太陽、月亮與其他的行星都繞地球運動，地心說直到 16 世紀才被哥白尼推翻。

2. 建立與發展

地心說最初是由古希臘學者歐多克索斯提出，後經亞里斯多德、托勒密進一步發展而逐漸建立和完善起來。

3. 基本觀點

- ①地球是球體。
- ②地球是靜止不動的且處於宇宙的中心，從地球向外依次有月球、水星、金星、太陽、火星、木星和土星；再外面是鑲嵌著所有恆星的天球——恆星天；最外面，是推動天體運動的最高天。
- ③所有日、月、星都圍繞地球等速轉動。



(二) 日心說模型

1. 概念

波蘭天文學家哥白尼在 16 世紀提出了《日心說》，認為太陽是靜止不動的，地球和其他行星都繞太陽運動。

2. 建立與發展

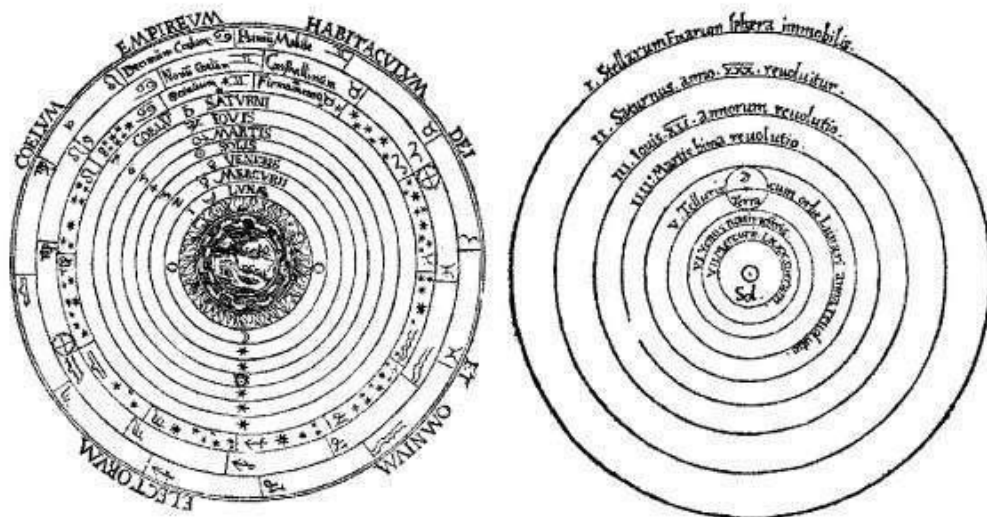
在公元前 300 多年的赫拉克里特和阿里斯塔克斯就已經提到過太陽是宇宙的中心，地球圍繞太陽運動。完整的日心說宇宙模型是由哥白尼在 1543 年發表的《天體運行論》中提出的。

3. 基本觀點

- ① 太陽是不動的且在宇宙中心，水星、金星、火星、木星、土星和地球一樣，都在圓形軌道上等速率地繞著太陽公轉。
- ② 月球是地球的衛星，它在以地球為中心的圓軌道上每月繞地球轉一

周，並隨地球繞太陽公轉。

- ③地球每天自轉一周，天穹實際上不轉動，只是由於地球的自轉才是我們看到了日、月、星每天東昇西落的現象。



三、推翻地心說

(一)起因

為什麼地心說直到哥白尼的時代才開始被懷疑？這是因為，在那之前，人類對這個世界的那種粗略的觀察是全都都能被地心說解釋。

Q：大地是如何形成的？

A：宇宙中重的物質會向宇宙中的中心墜落並聚集成球，也就是地球。

Q：它真的是球嗎？

A：毫無疑問，月食現象(後面證據 2. 會提到)證明了大地的形狀，上述提到墜落方向指向宇宙的中心，也就是地球。

Q：為什麼行星軌跡如此複雜？

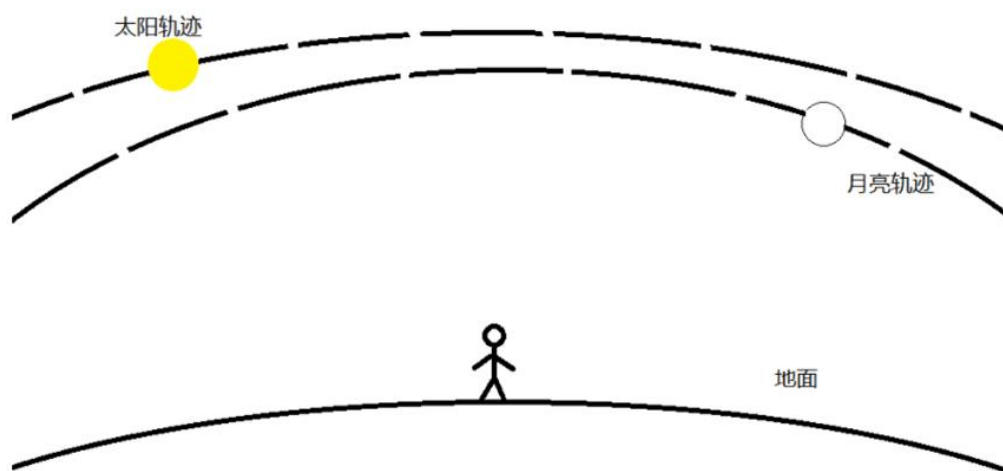
A：或許宇宙不如我們一廂情願認為的簡潔。

證據如下：

1. 越向北走，北極星的高度就越高；越向南走，就越低。
2. 月食是地球的影子遮住了月亮，落在月球上的地球影子，總是一段圓弧。
3. 海面上，當一艘船從遠方向岸邊駛來時，岸上的人總是先看見桅杆，

然後看見船身；當駛離時正好相反，船身先在海平面處消失，然後才是桅杆。

忘掉我們在書本上所學的所有的「真理」，那我們來想像一下，只記得地球是個球，我們是一個公元前幾世紀的古人，然後觀察這個世界。假設天空上只有三種物體：雲、太陽和月亮，我們能夠看到，太陽每天升起又落下，月亮每天升起又落下，雲隨著風隨意的運動，如果隨時記錄太陽和月亮的軌跡，會發現他們都在天空上的一個圓上做運動。



如果古人只看到這些，請問他們覺得的世界是什麼樣的？會覺得地球不動，太陽和月亮圍著地球轉，換句話說，如果這世界上只有太陽和地球兩個物體，那麼太陽繞著地球轉和地球繞著太陽轉這兩種說法是完全等價的。我們可以做一個簡單的實驗，我們繞著椅子走一圈，那麼椅子不動而我們繞著它轉，但是假設我們自己才是世界的中心，是不動的，而我們隨時記錄椅子的位置，會發現椅子相對我們的位置是圍繞我們畫了一個圓，這是一種坐標系變換，或者說相對運動。

人類很容易發現太陽和月亮以外的東西——星星，但是如果大家真的去走到陽台上看過幾個小時的星星，那麼很容易發現一個幾千年以前的人早就知道的事實：每個晚上星星的位置都在不斷的變換，但是幾乎所有的星星之間的相互位置都不會變化。也就是說它們互相都是不動的，只是相

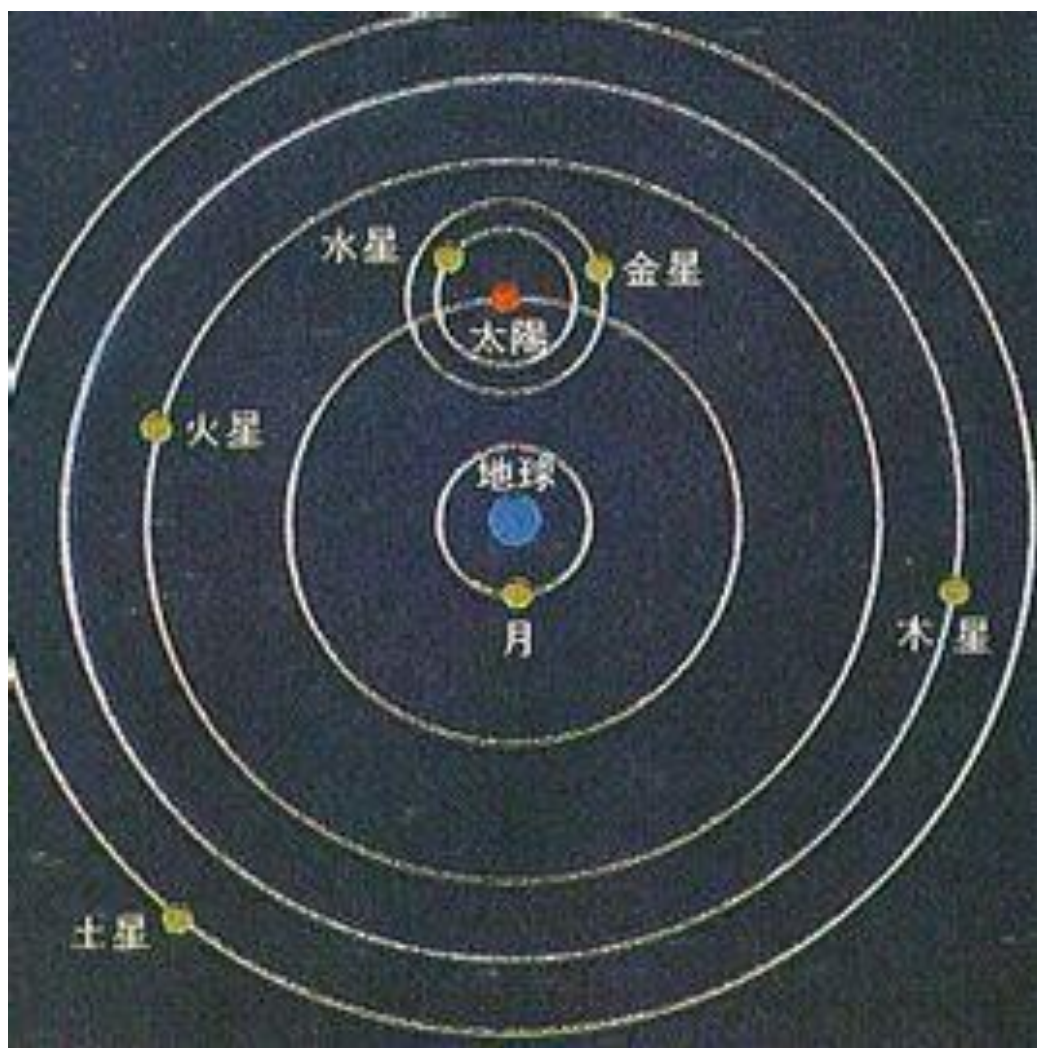
對地球、太陽和月亮之間在動，而且它們共同的這種移動在天空上畫出很多的圓（我們今天稱之為星軌），雖然大小不同，但是和太陽和月亮很類似，所以，如果我們非常「合情」的去猜測，我們會覺得所有的星星可能都是在同一個東西（古希臘人所說的水晶球）上面的，然後這個水晶球再繞著我們轉動。

我們可以得出一個結論，如果培養一個孩子，從小教他除了天文學以外所有的知識，每次他問關於太陽和月亮的事情的時候就假裝不知道，並封鎖所有的消息，那麼這個孩子一定會自己通過對這個世界的觀察得出地心說的觀點的。如果不非常仔細的觀察並記錄這個世界，不會發現地心說有任何問題，而要精確的記錄星星在天空中的位置，在歷史上這是一件困難的事情，再加上對於古人來說，他們認為地心說沒什麼問題，並不會特地去仔細記錄那些星星的位置，以檢查地心說有沒有問題，對他們來說沒有意義，更重要的是工作賺錢。

（二）星星軌跡

其實古人還是有很多人非常細心的，如果你仔細的觀測夜空，你會發現有幾個星星和其他的不一樣，它們和其他的星星的相對位置是會改變的，它們夏天的時候可能在室女座周圍而冬天就跑到了雙子座周圍，這幾個星星包括在夜空中非常亮的木星、土星和火星。但是如果你不是幾個月甚至幾年都每天認真的去記錄他們在天空上的位置，或者是記錄的時候的誤差太大的話，仍然會覺得他們在天空上其實也是按照完美的圓形軌跡走的，只不過就是和其他的星星的速度不太一樣，所以冬天到夏天，這一點速度差距逐漸積累使得其位置變化了，所以即使仔細觀察，還是會覺得地心說正確。

有些細心的古人發現了金星和水星，實際上金星雖然很亮（夜空中最亮的星），但是由於和太陽在天空上的距離很接近，所以夜裡經常看不到（因此被叫做啟明星）。這兩個小亮點和其他的所有的亮點不同，他們只出現在太陽的周圍，繞著太陽來回的移動。



從古希臘到文藝復興以前，就算每天都觀察星星，也不會對上面這個圖有任何的懷疑，因為所有的一切看上去都非常合理。

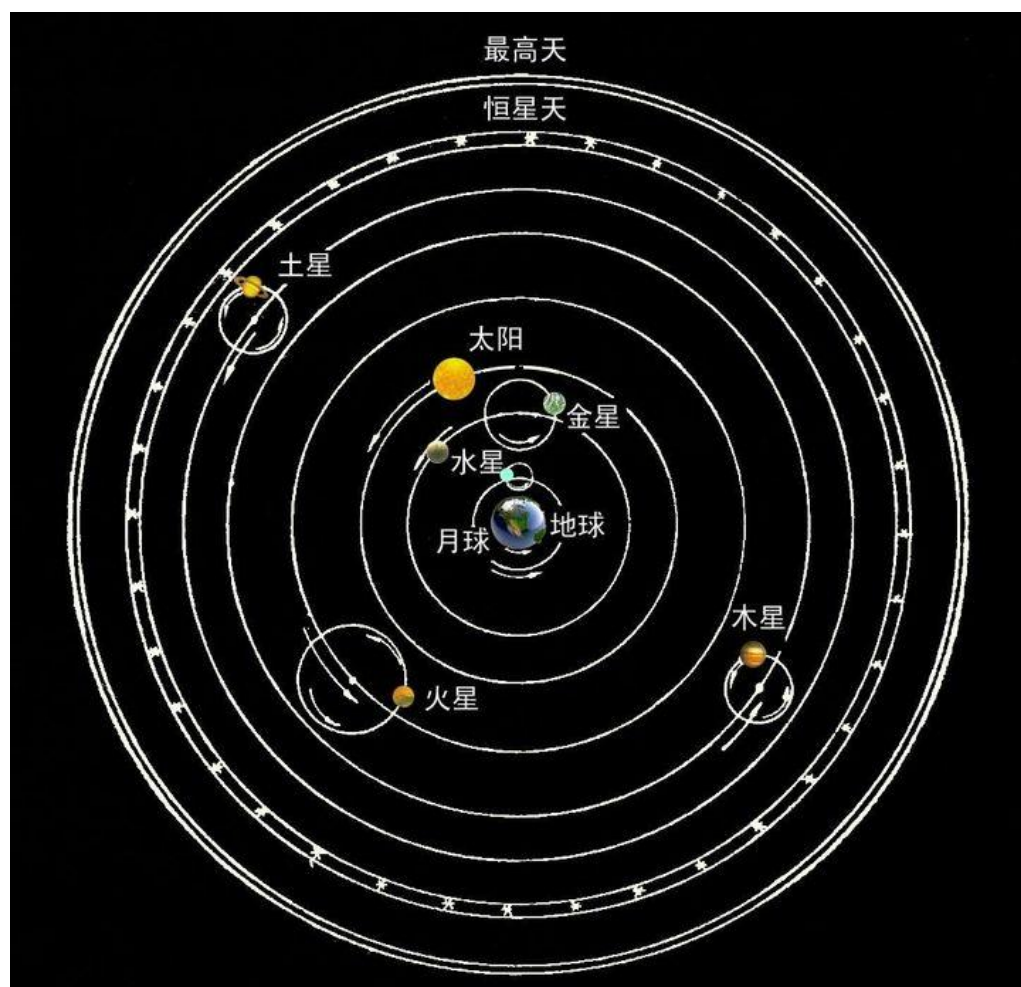
(三)托勒密—地心說

在公元前，有人日復一日年復一年的記錄著火星的位置，他用到一些測量的工具(非望遠鏡)，可是目視位置的精度誤差太大了，他發現火星雖然做圓周運動，但是有的時候會倒退，火星並不是單向在這個圓上前進的。實際上，火星的軌跡也不是完美的圓，雖然很接近，但是還是稍微有一些差別的。

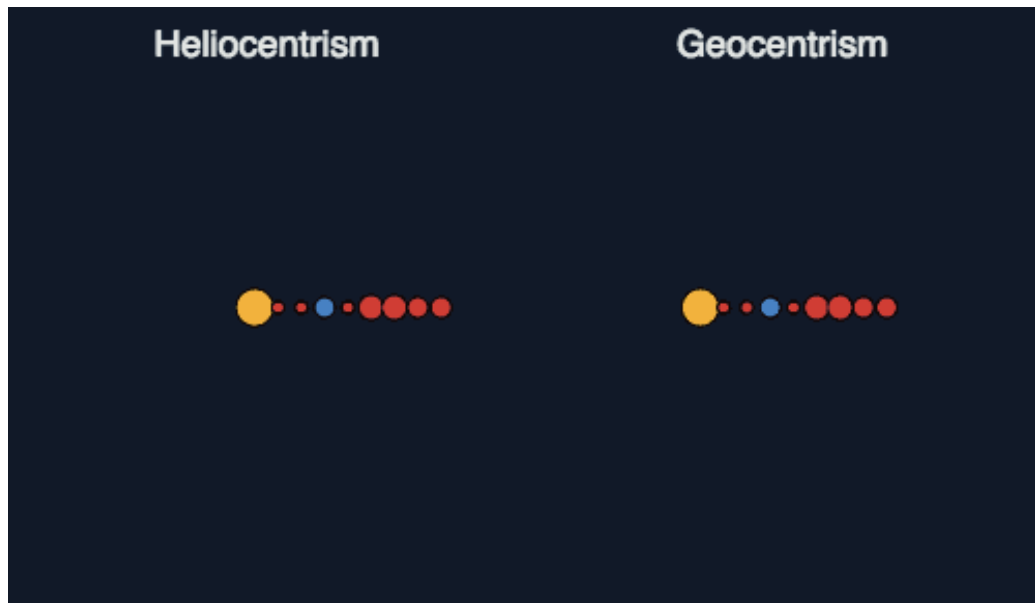
雖然有了第一個發現火星逆行的人，但是如果我們是一個古人，在我們第一次聽說，天上的這麼多星星裡面有一個會倒著走的時候，會有什麼想法？「正常人」應該覺得：可能測錯了或者是這個星星很特殊。如果聽

說有一個星星是倒著走的就準備推翻那麼多星星都繞著我們轉的這麼一個簡單的直觀的「真理」，那一定是個很特別的人，大部分人真的不會那麼想。

於是一個偉大的人——托勒密出現了，他運用強大的想像力和數學提出了一種可能，如下圖。



即本輪和均輪：



(點擊圖片播放 GIF)

首先，如果火星、木星和土星他們是在一個大圓上做一個小圓運動，那麼就可以解釋這種偶然會出現的逆行現象。而且這樣的話，甚至不需要假設金星和水星是特例，他們也被設定在以地球為中心的軌道上，只要本輪和均輪差不多大，那麼金星和水星實際上繞著地球。

第二，這個假設雖然引入了複雜的本輪和均輪，但是卻把所有的東西統一了起來，看上去非常完美。

第三，如果你不借助望遠鏡進行非常精細的位置觀測，那麼托勒密的模型對所有星星的位置進行的預測，幾乎可以和實際的觀測數據完美的契合。

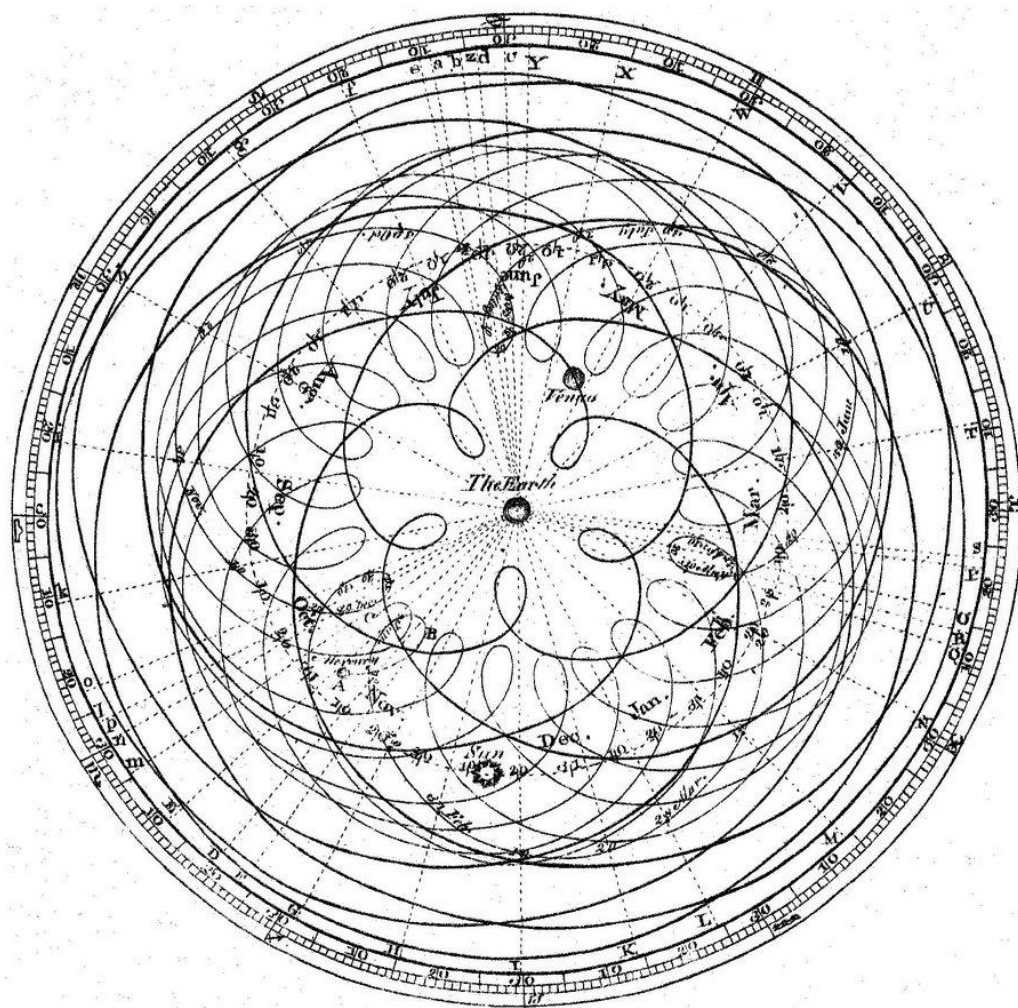
所以可以這麼說：地心說無懈可擊。

(四)地心說的完結

在文藝復興以後，人類的觀測技術終於有了進展，終於有了望遠鏡，可以讓天空被放大一些了。人們發現，本輪和均輪的理論和實際上的位置是稍微有一些偏差的，但是如果我們是那個時代的科學家，大部分的人都不會為了這微小的偏差就要修改我們的理論裡面最基本的假設。

所以在那個時代，所有的科學家做的事情就是發展一千多年前托勒密的工作，既然加了一個輪就精確了很多，那我們只要再加幾個輪就可以

了，便發展成了下圖。



雖然本質上其實就是多加幾個輪而已，可是整個模型變得很亂，但是輪多了確實精確了不少，而要算出每個輪的大小和相對的速度，觀測條件不斷的提高，數據需要不斷的修改，直到古人已經覺得麻煩、無法計算，認為世界不可能是這樣的，大家便開始決定要試著把所有的東西都重新檢查一遍。

很久以後，終於有一個人——哥白尼發現了，如果我們把太陽放到中心，那麼對所有的東西重新進行計算以後，事情可以變得非常的簡單，去掉很多很多的繁雜的理論，而且仍然可以很好的預測星星的位置，因此地心說的時代就邁向結束了。

陸、參考資料

維基百科|阿里斯塔克斯

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%98%BF%E9%87%8C%E6%96%AF%E5%A1%94%E5%85%8B%E6%96%AF>

維基百科|On the Sizes and Distances(of the Sun and Moon)(Aristarchus)

[https://en.wikipedia.org/wiki/On_the_Sizes_and_Distances_\(Aristarchus\)](https://en.wikipedia.org/wiki/On_the_Sizes_and_Distances_(Aristarchus))

HPM 通訊第十八卷第十一期第一版(2015 年 11 月)|天文學中的數學模型(I)—

古希臘時期與托勒密的天文模型 蘇惠玉 台北市立西松高中

<https://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpm1811.pdf>

知乎回答(2017/12/26)|地心說為什麼能夠統治那東西方人民思想一千多年？

<https://www.zhihu.com/question/43425624>