

機率與統計

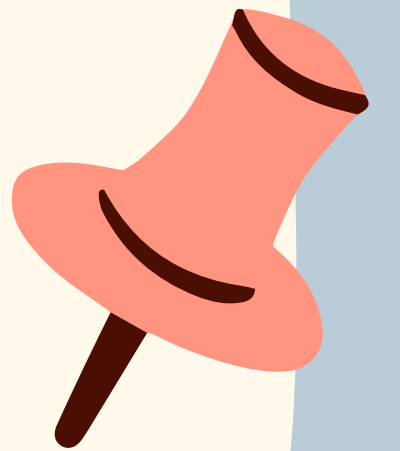
411231107王怡文

411231128戴傳恩

411231143林俊宏

411031140林咏勳

Start



假設你正在參加一個遊戲節目，你被要求在
三扇門中選擇一扇：其中一扇後面有一輛
車；其餘兩扇後面則是山羊。你選擇了一道
門，假設是一號門，然後知道所有門後面有
什麼的主持人，開啟了另兩扇中 其中一扇
後面有山羊的門，假設是三號門。他然後問
你：「你想選擇二號門嗎？」轉換你的選擇
對你來說是一種優勢嗎？

你會換門嗎？

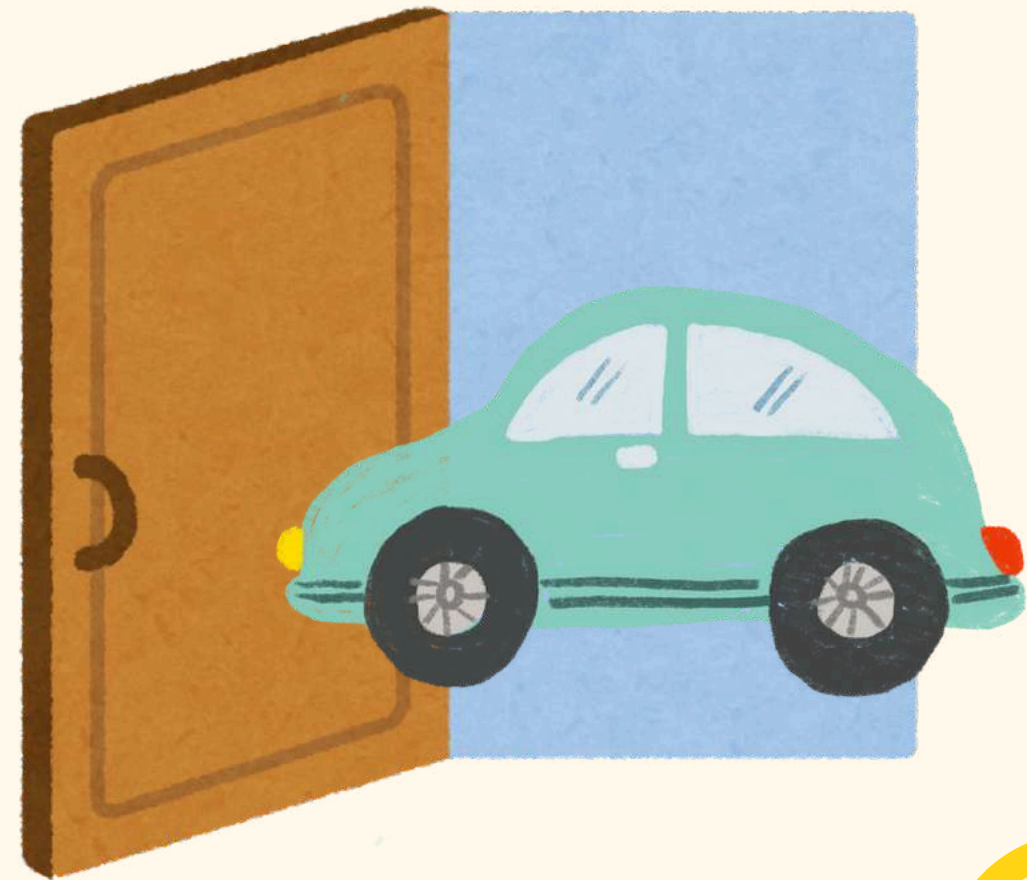
1



2



3



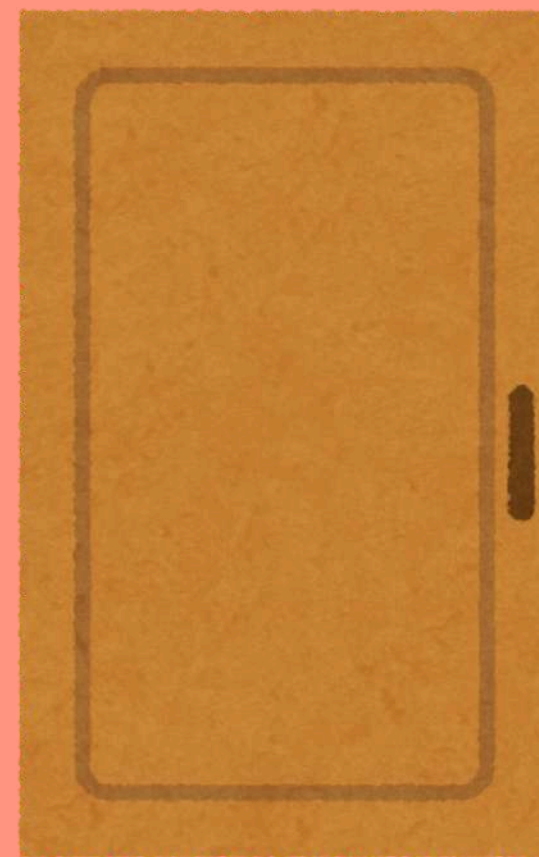
蒙迪·霍爾悖論

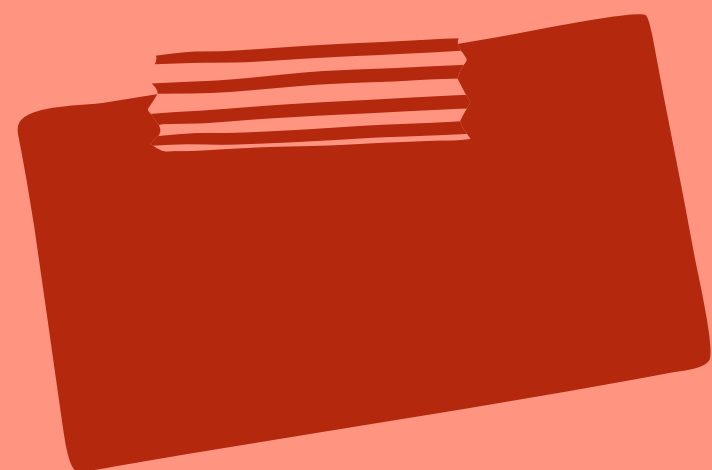
這個猜謎的情節是美國電視益智節目「讓我們做個交易吧! (Let's Make a Deal!)」，而主持人就是當時大名鼎鼎的蒙迪·霍爾 (Monty Hall)，而以上的三門選擇問題又被稱為「蒙迪·霍爾悖論 (Monty Hall problem)」。

如果有100扇門呢

想像有 100 扇門，你選一扇，主持人打開 98 扇空門，
只剩你那扇和另一扇沒開。

你會換嗎？





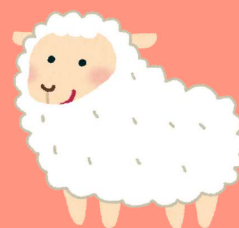
1/3 機率選到車

1/2 不換



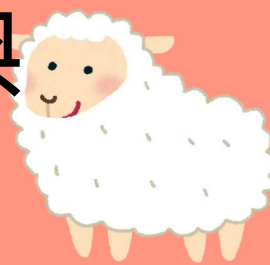
贏得車的機率是 $1/3 * 1/2 = 1/6$

1/2 換



贏得山羊的機率是 $1/3 * 1/2 = 1/6$

1/2 不換



贏得山羊的機率是 $2/3 * 1/2 = 1/3$

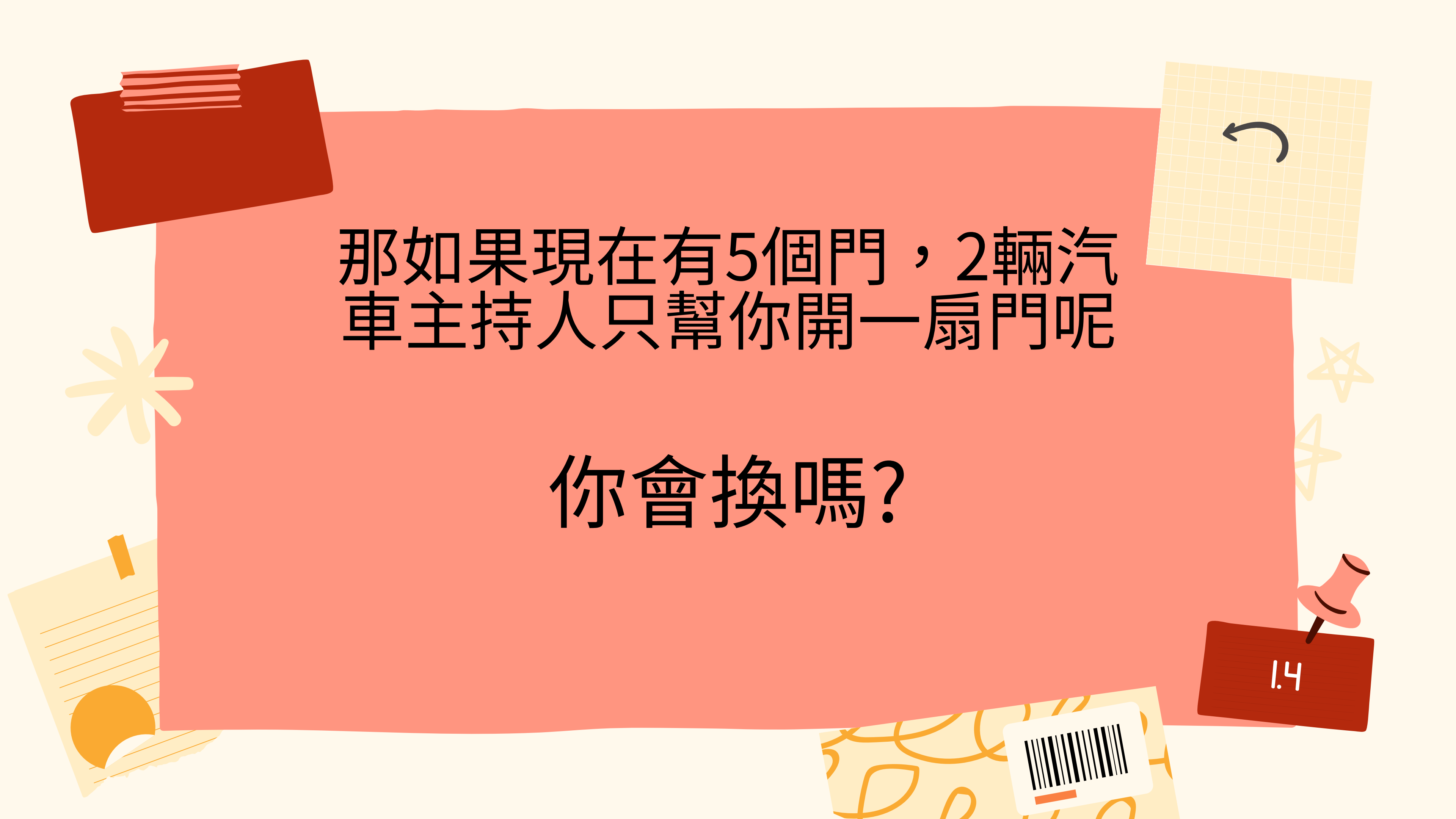
2/3 機率選到羊

1/2 換



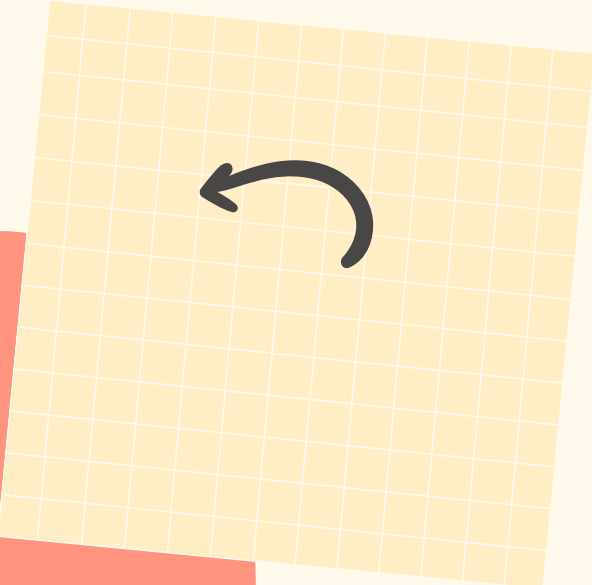

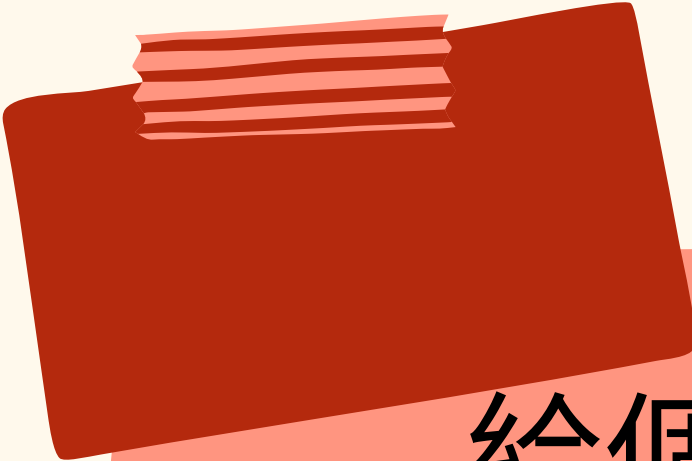
贏得車的機率是 $2/3 * 1/2 = 1/3$

$$P(\text{得獎} \mid \text{換}) = p(\text{換了得獎}) / p(\text{換}) = 1/3 / (1/6 + 1/3) = 2/3$$




那如果現在有5個門，2輛汽車
主持人只幫你開一扇門呢

你會換嗎？

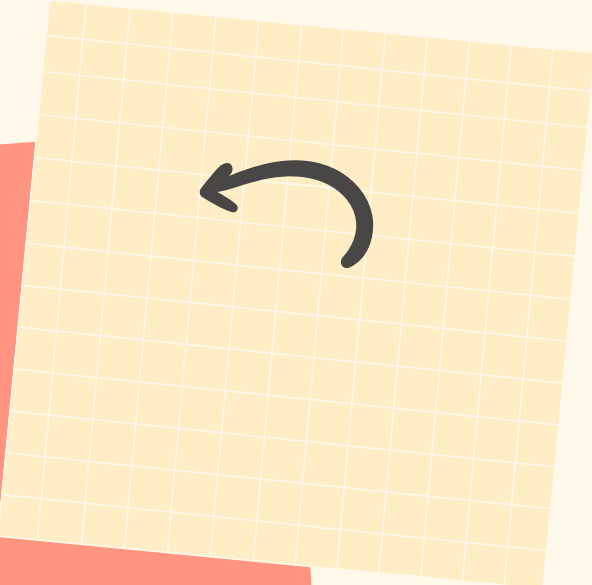



給個變化題，主持人想說不要對觀眾那麼好，在未被觀眾選中的 $N-1$ 道門中開啟 K 道後面有羊的門，總共有 A 輛車。
那還要換嗎？




1.5





如果換門後中獎了代表先選到羊再換成車，
所以一開始選到的門一定要是羊


$$P(\text{選到羊}) = (N-1)/N$$

在初選是羊的情況下，獎品一定藏在其他未
開啟的門之中。

這時候未被開啟的門總共有 $N-1-K$ 扇門，
車隨機分佈在這些門中。

$$P(\text{選到車}) = A/(N-1-K)$$

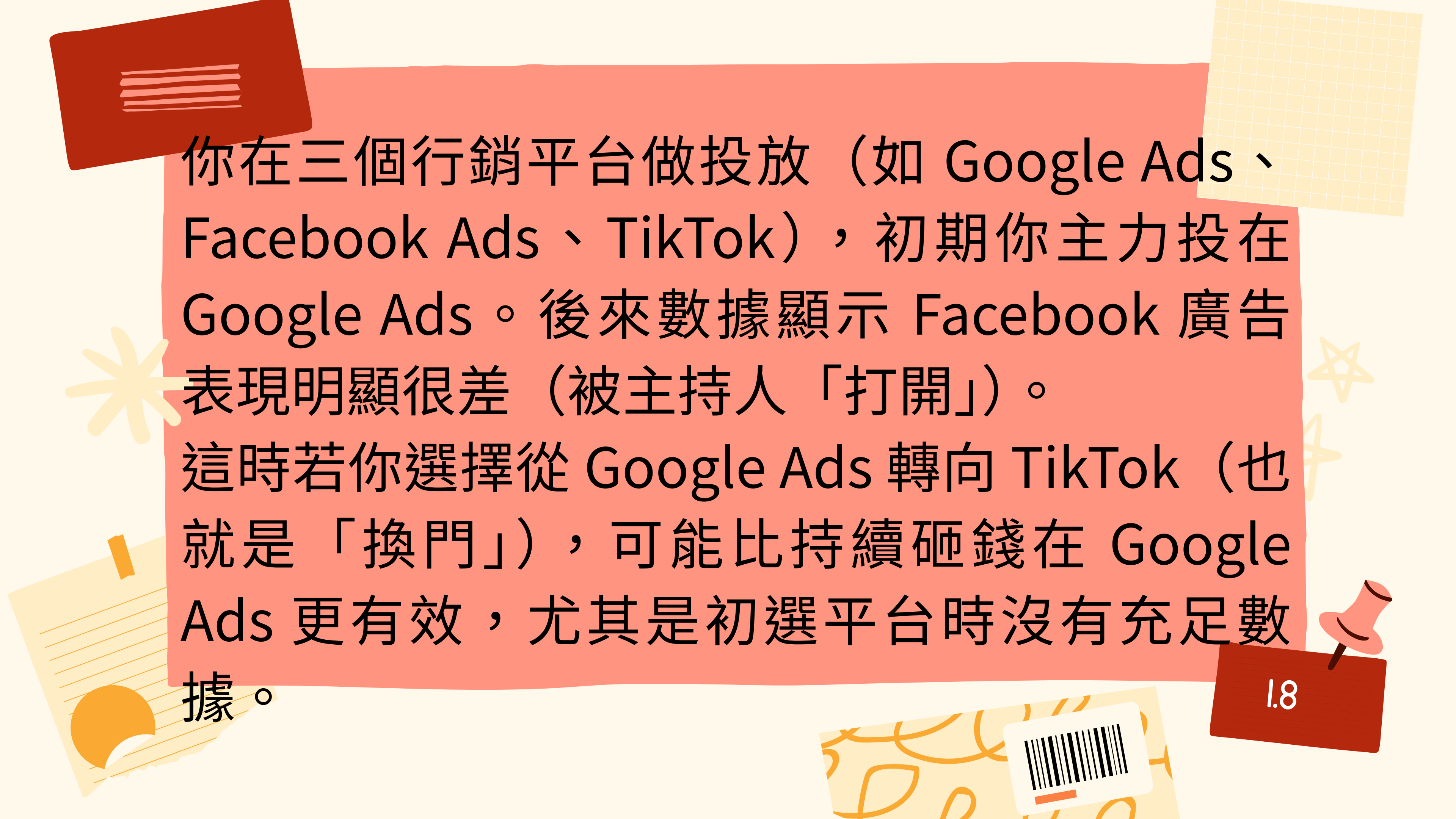
$$P(\text{選到羊}) * P(\text{選到車}) = [(N-1)/N] * A/(N-1-K)$$

參賽者一開始選中的門是車且不換門的機率是
 $1/N$ ，

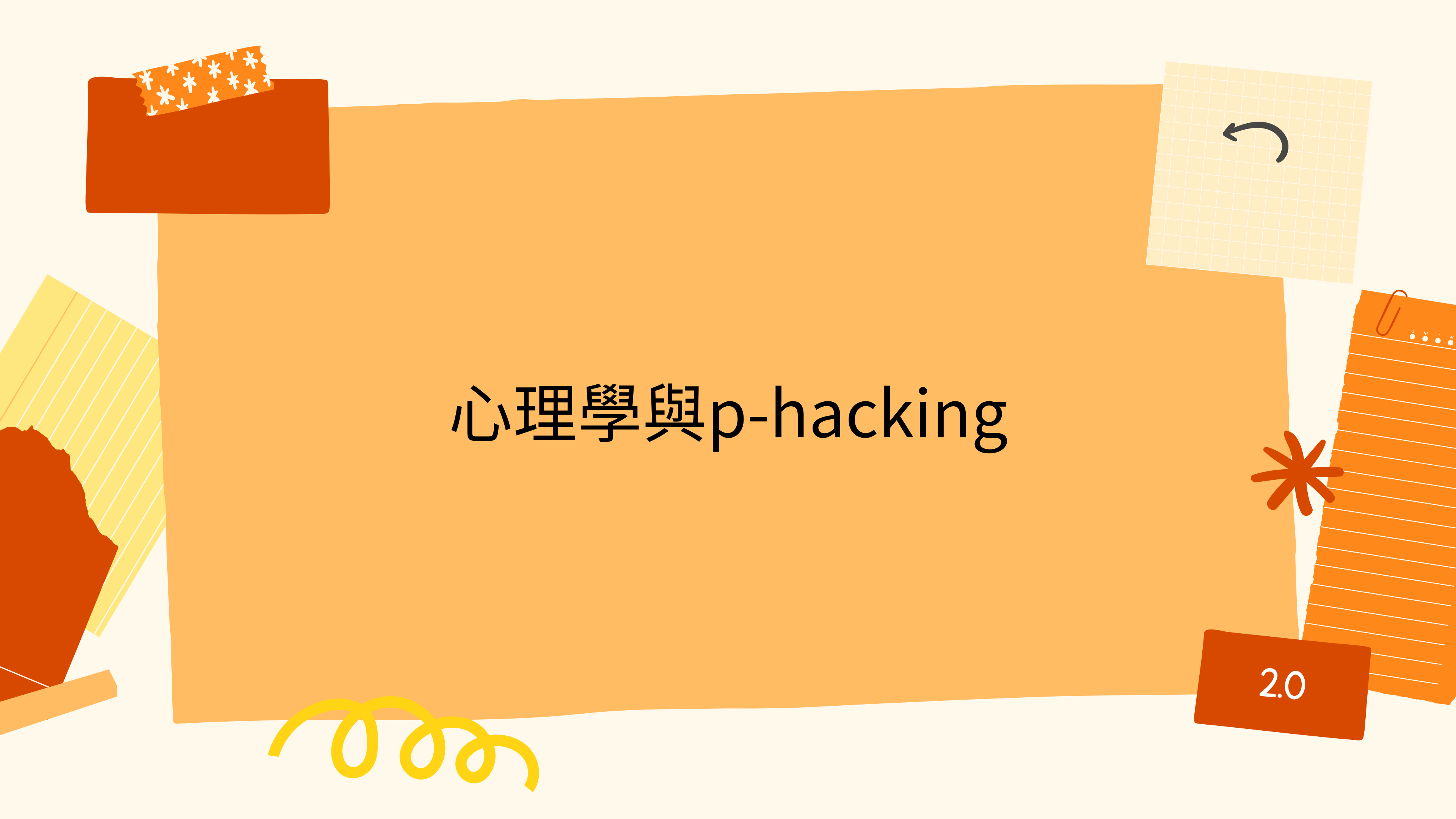
$P(\text{換門得獎}) - P(\text{不換門得獎}) =$

$$(A/N) * K / (N - K - 1)$$

其中 $N - K$ 大於等於 2， K 大於等於 0， A 大於 0
所以換門的機率一定比不換門的機率高！

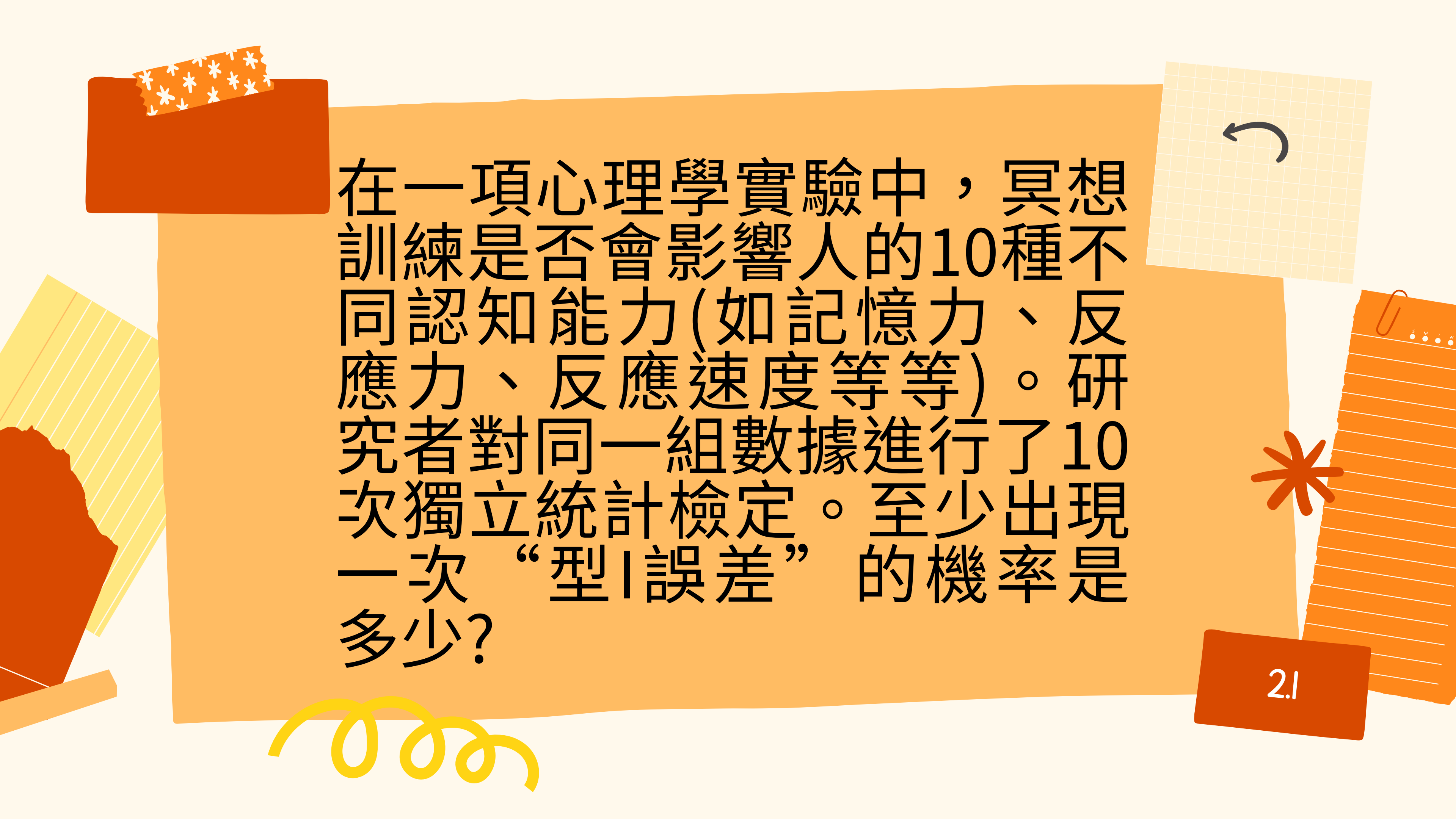


你在三個行銷平台做投放（如 Google Ads、Facebook Ads、TikTok），初期你主力投在 Google Ads。後來數據顯示 Facebook 廣告表現明顯很差（被主持人「打開」）。這時若你選擇從 Google Ads 轉向 TikTok（也就是「換門」），可能比持續砸錢在 Google Ads 更有效，尤其是初選平台時沒有充足數據。

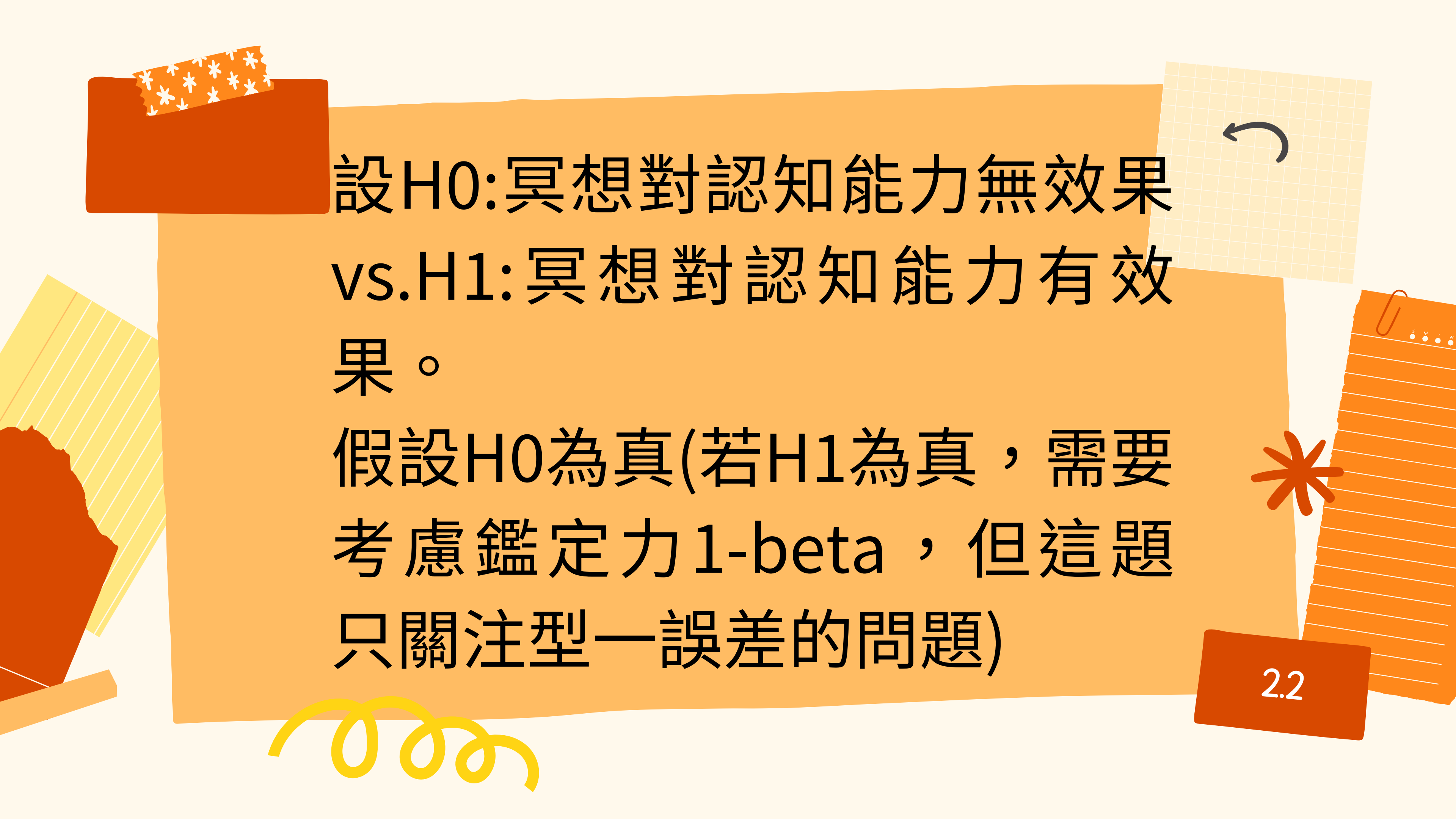


心理學與p-hacking

2.0



在一項心理學實驗中，冥想訓練是否會影響人的10種不同認知能力(如記憶力、反應力、反應速度等等)。研究者對同一組數據進行了10次獨立統計檢定。至少出現一次“型I誤差”的機率是多少？



設 H_0 :冥想對認知能力無效果
vs. H_1 :冥想對認知能力有效果。

假設 H_0 為真(若 H_1 為真，需要考慮鑑定力 $1-\beta$ ，但這題只關注型一誤差的問題)

在顯著水平=0.05的情況下

顯著水平:

$P(\text{拒絕}H_0|H_0\text{為真})=0.05$

沒有型一誤差的機率就是

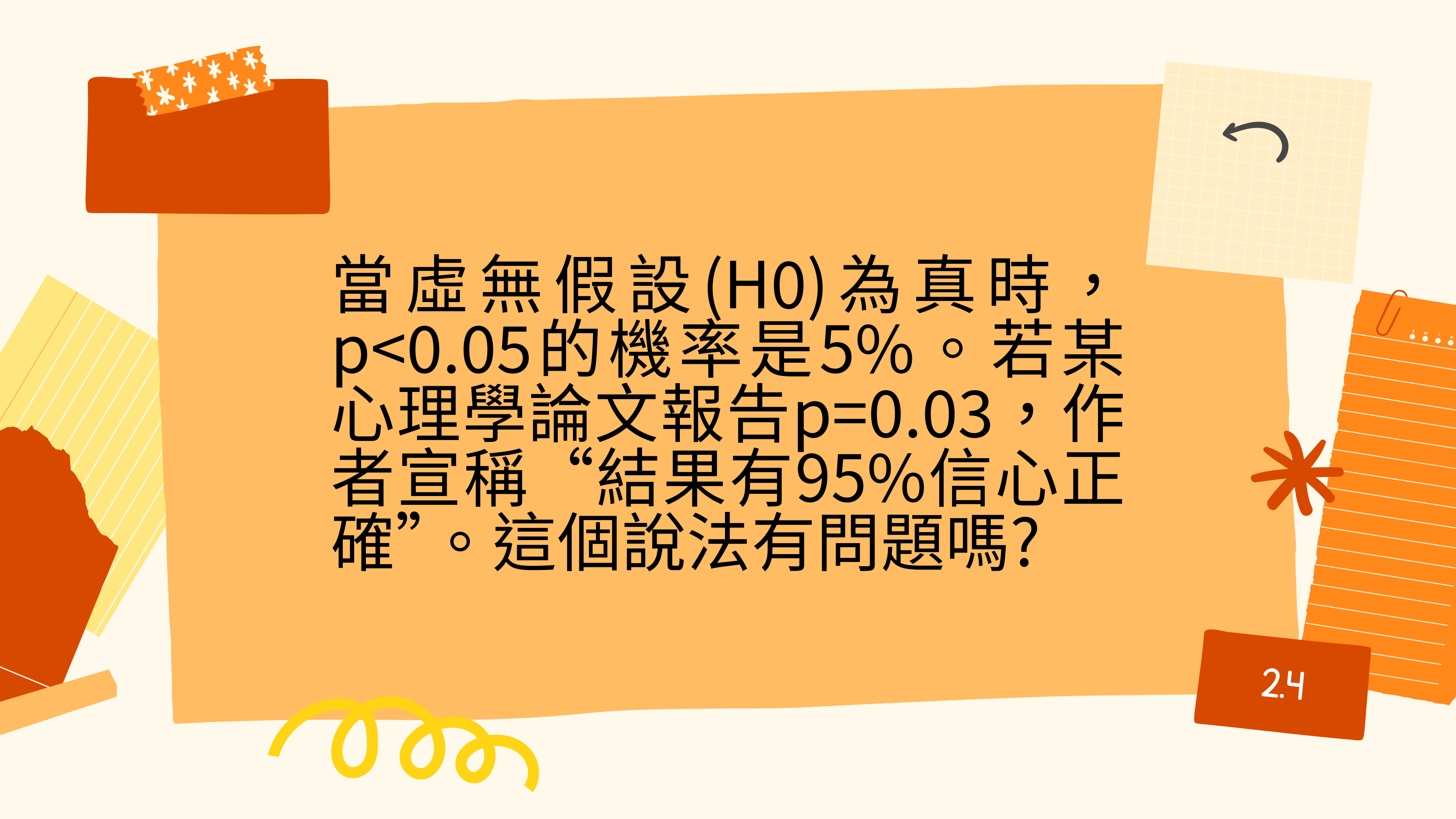
$1-0.05=0.95$

做了十次鑑定= 0.95^{10}

至少一次型一誤差:

$1-(0.95)^{10}=0.4013$

沒有




當虛無假設 (H_0) 為真時， $p < 0.05$ 的機率是 5%。若某心理學論文報告 $p = 0.03$ ，作者宣稱“結果有 95% 信心正確”。這個說法有問題嗎？



不行✖

p值的精確定義:在 H_0 為真的假設下,觀察到的當前數據的機率。

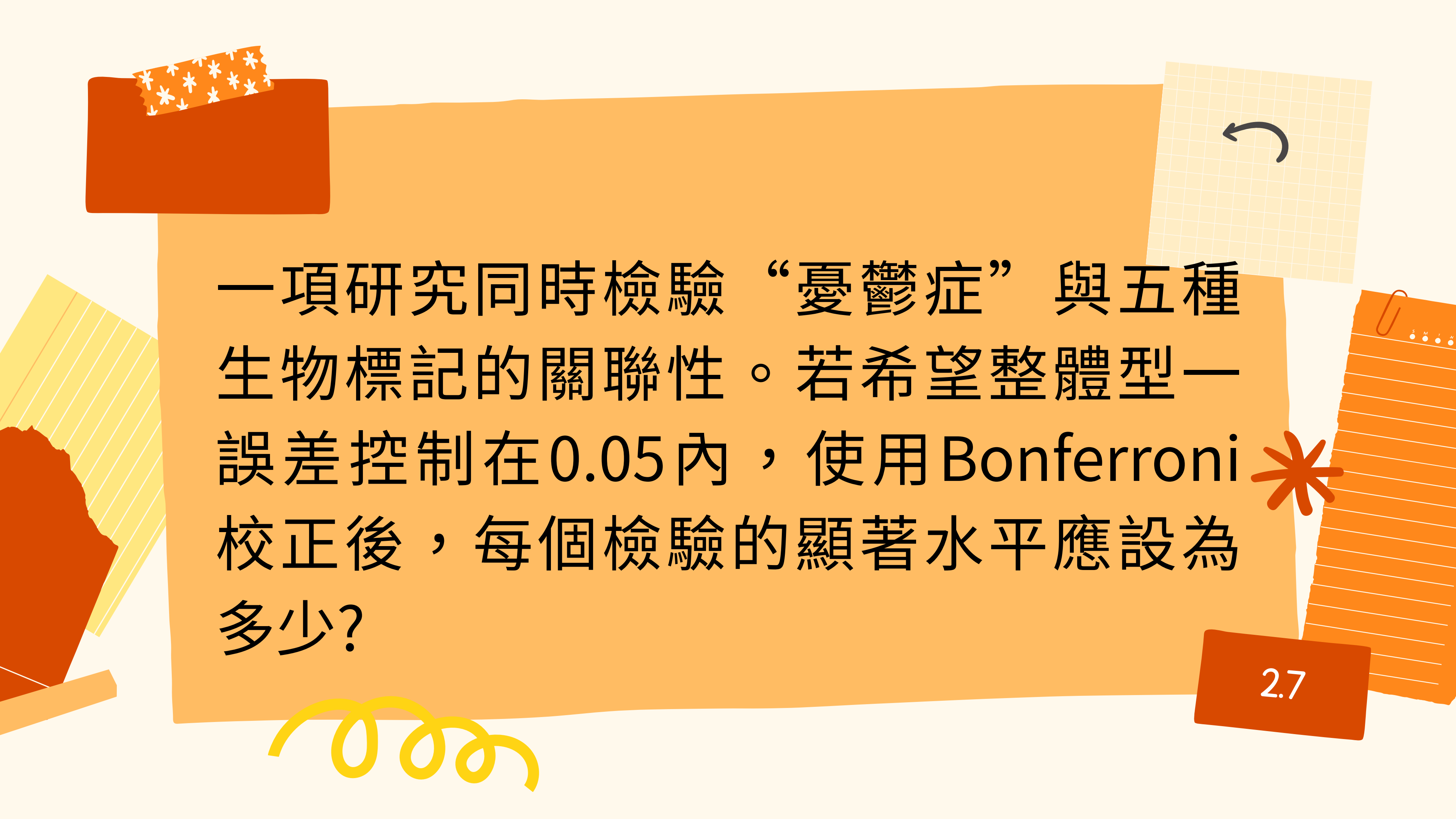
p值無法直接回答“假設為真的機率”。因為我們缺乏 H_0 本身為真的基礎機率。



如果天氣預報說今天會下雨,但是實際沒下的錯誤警報率。

假設 $p=0.03$ =若 H_0 為真，會有3%的機率看到這個錯誤。

但是假如今天下雨了，不能反推出天氣預報的準確率有97%。



一項研究同時檢驗“憂鬱症”與五種生物標記的關聯性。若希望整體型一誤差控制在0.05內，使用Bonferroni校正後，每個檢驗的顯著水平應設為多少？*



為什麼需要Bonferroni?

做越多次鑑定後出現型一誤差的機率會越大。這題的誤差機率是

$1-(0.95)^5=0.226$ (遠大於0.05)

原理:將顯著水平平均分給所有檢驗，確保“整體”錯誤率小於等於顯著水平



公式:顯著水準(單次)=顯著水準(整體)/

檢驗次數 $0.05/5=0.01$

優點:簡單嚴格，控制整體錯誤率

缺點:過於保守(可能漏掉真實效應)

校正後只有 $p<0.01$ 的結果才算顯著，
降低型一誤差風險。

統計圖表的誤導

3.0



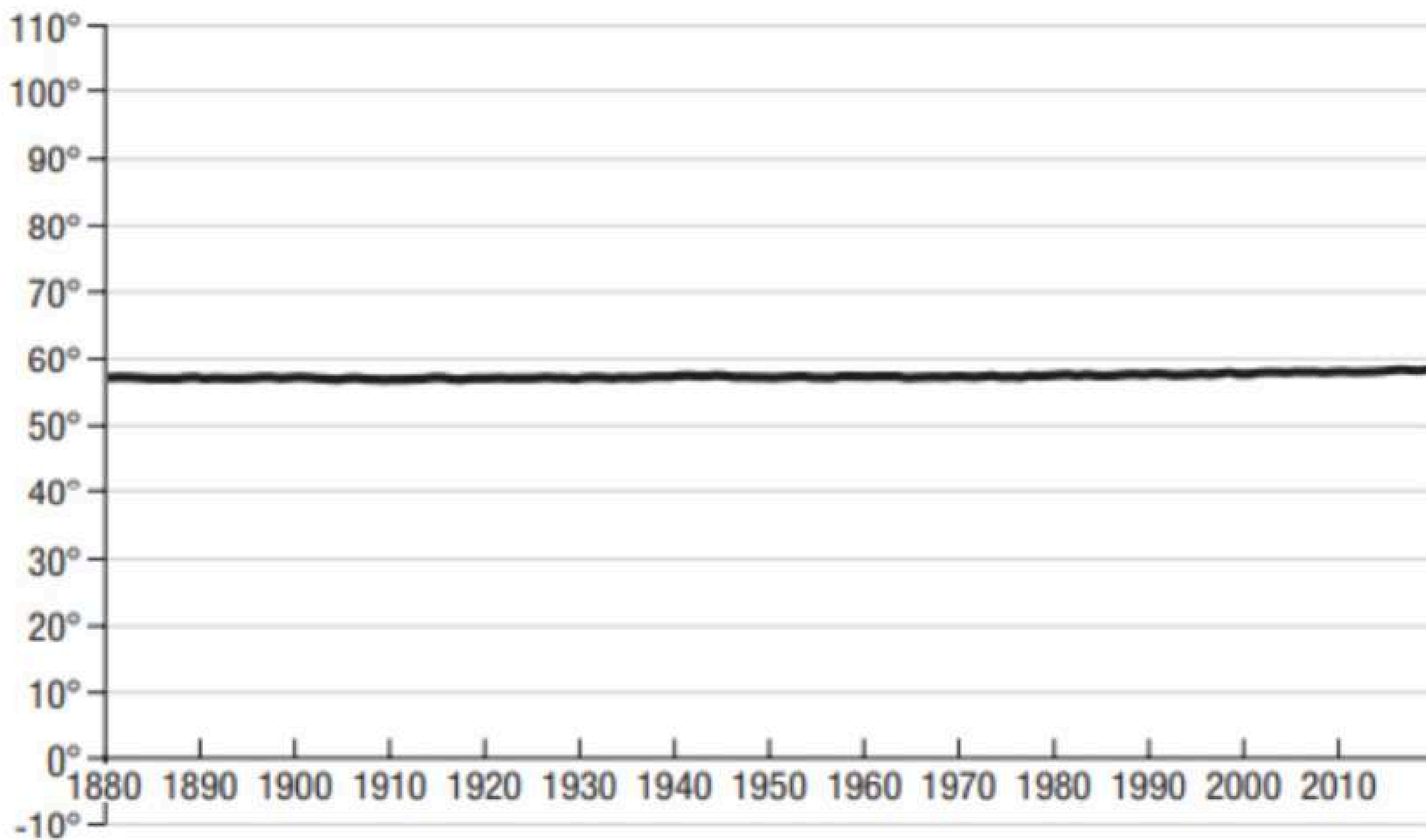
當我們在日常生活中接觸到數據時，統計圖表常被視為一種簡潔而有力的溝通工具。無論是新聞報導、企業簡報還是社群媒體貼文，圖表往往能迅速傳達趨勢、比例與差異。然而，這些圖表若經設計不當，或刻意操作視覺元素，極易產生誤導效果，使觀者對實際情況產生錯誤理解。透過分析常見的誤導手法，我們能培養辨識圖表陷阱的能力，進而成為更具判斷力的數據解讀者。



全球暖化圖表

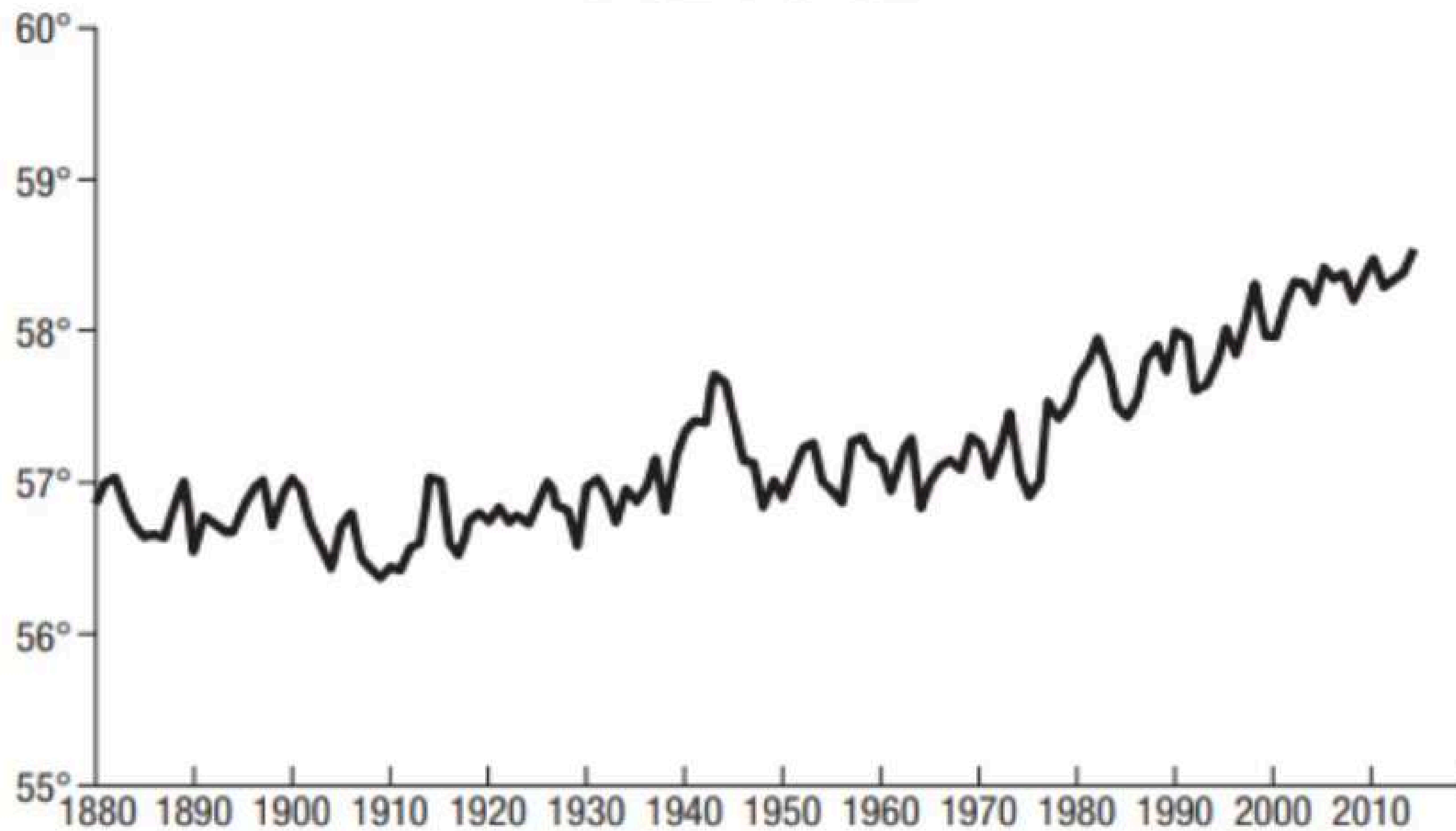
3.2

1880 年～ 2019 年的全球（華氏）年均溫



3.3

平均全球年均溫

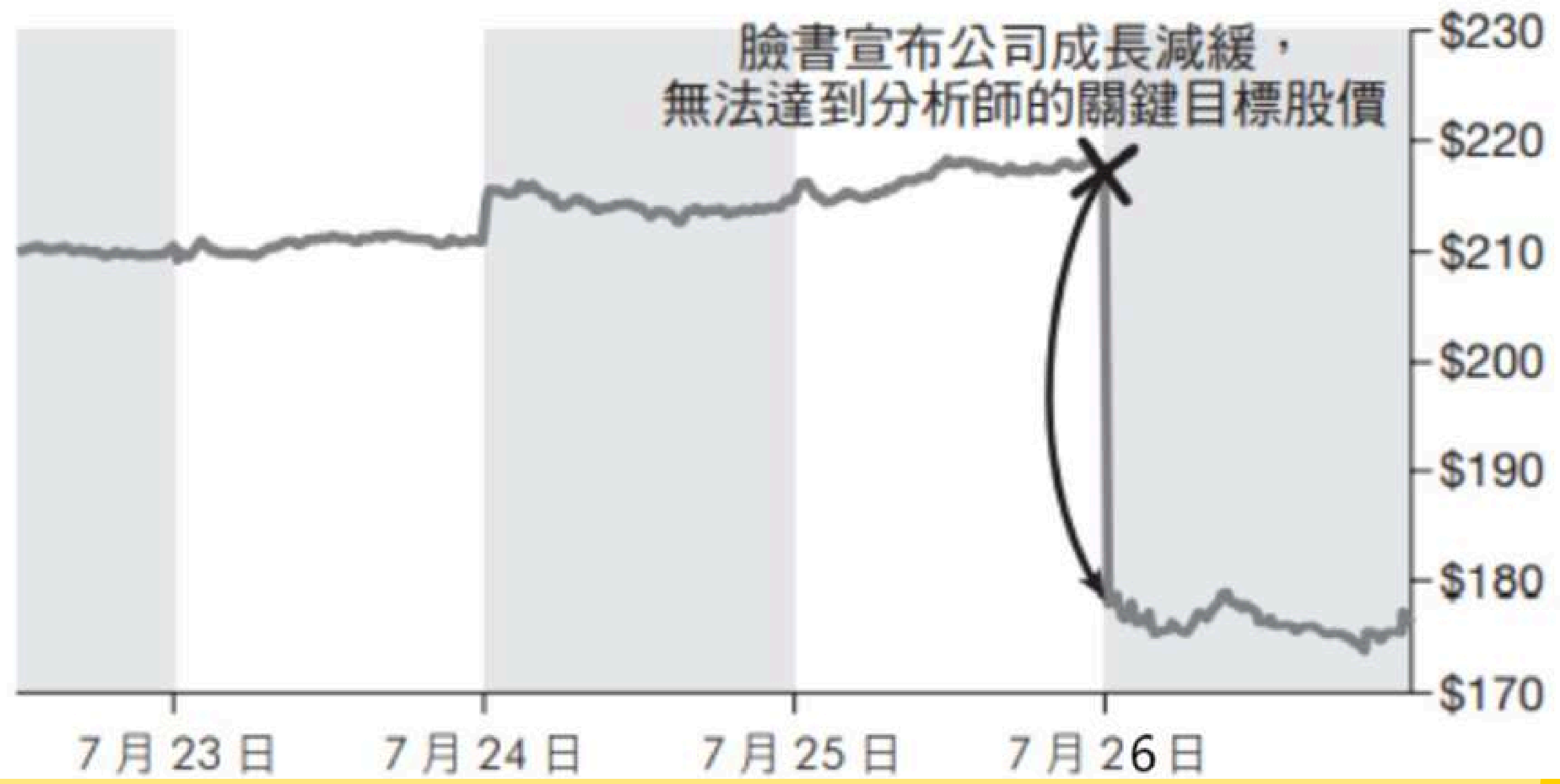


資料來源：美國太空總署（NASA）／哥達德太空研究院（GISS）

FBB股價變化圖

3.5

臉書宣布公司成長減緩，
無法達到分析師的關鍵目標股價





3.7

民調圖表

3.8

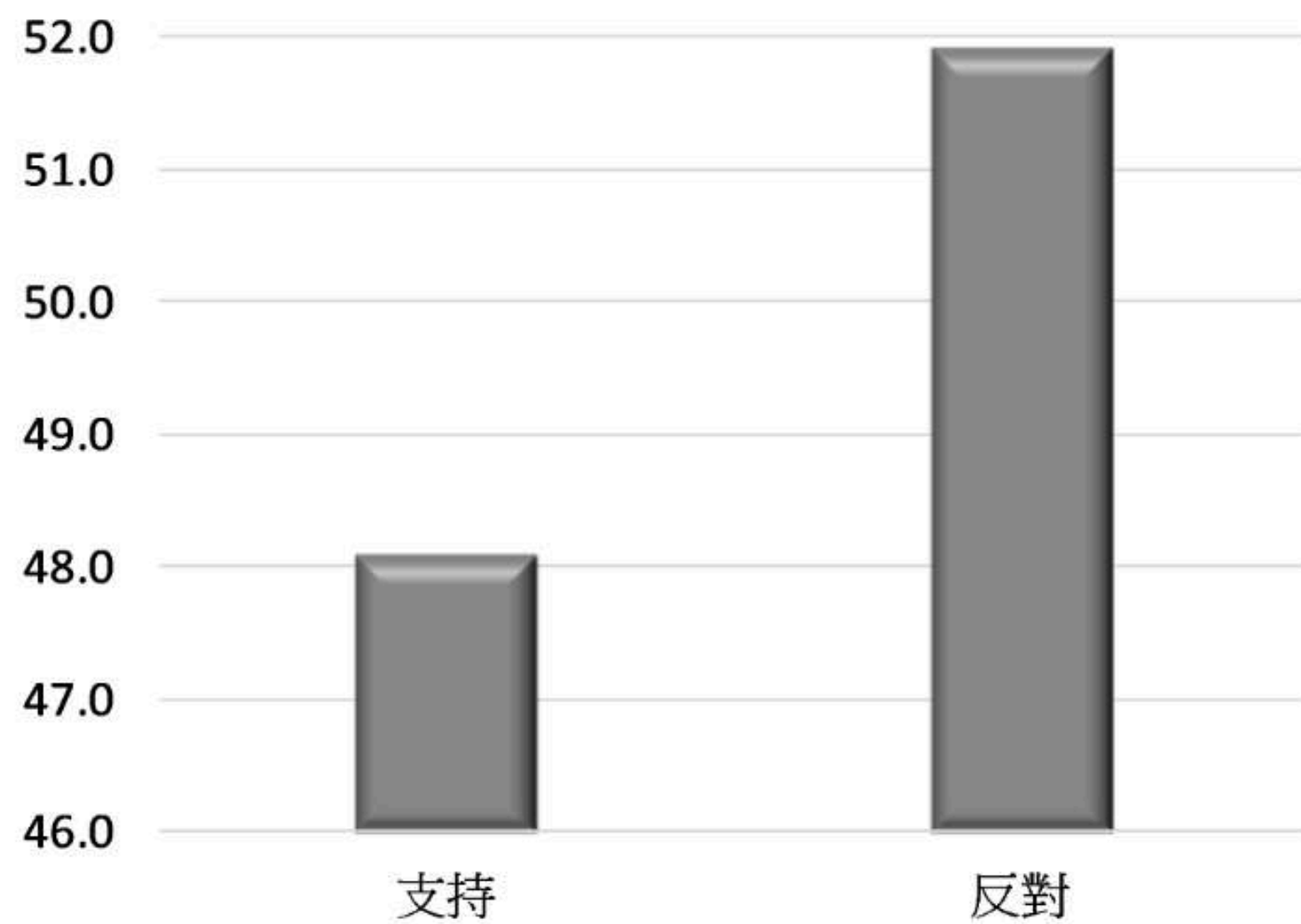


圖 1

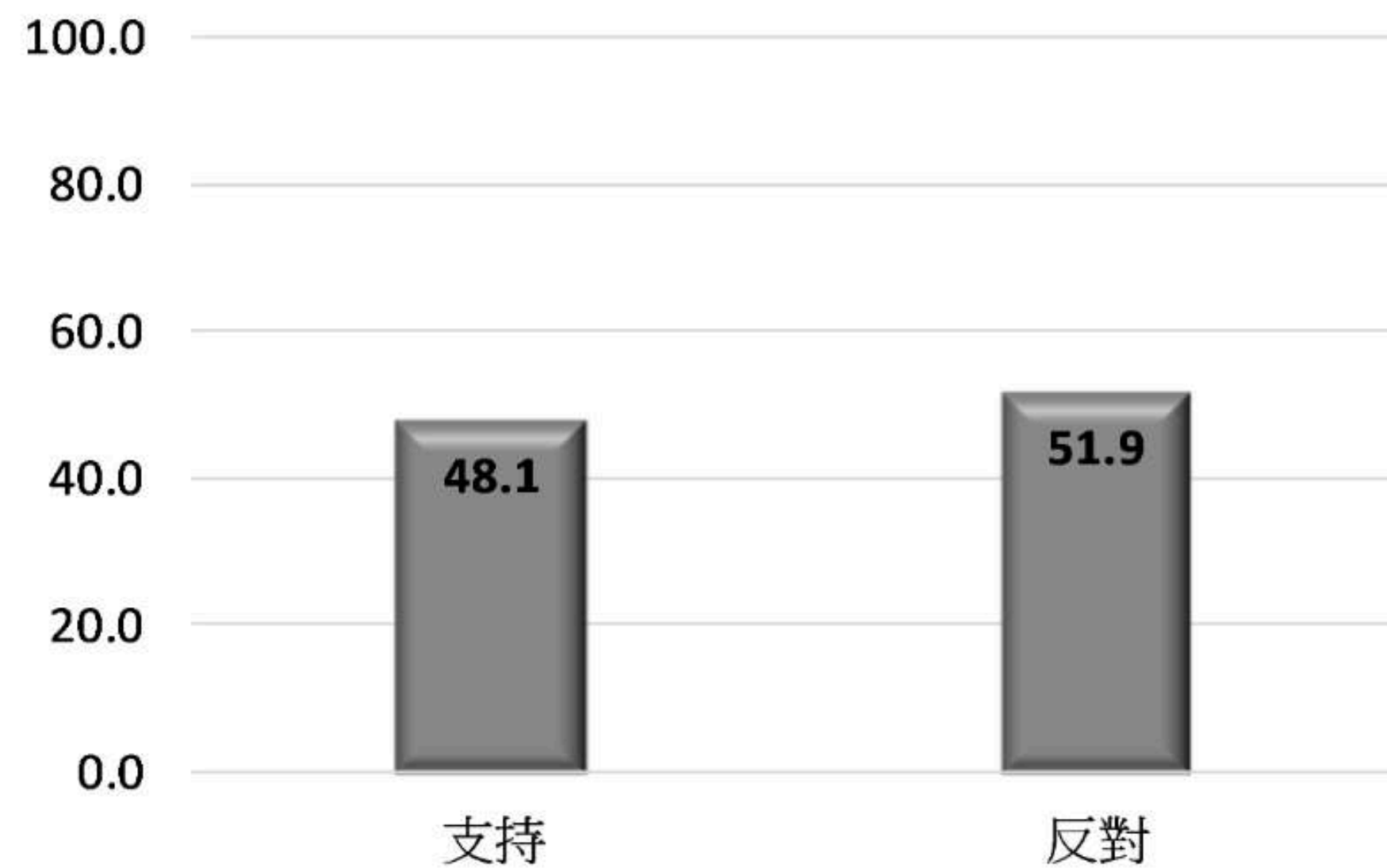


圖 2

3.9

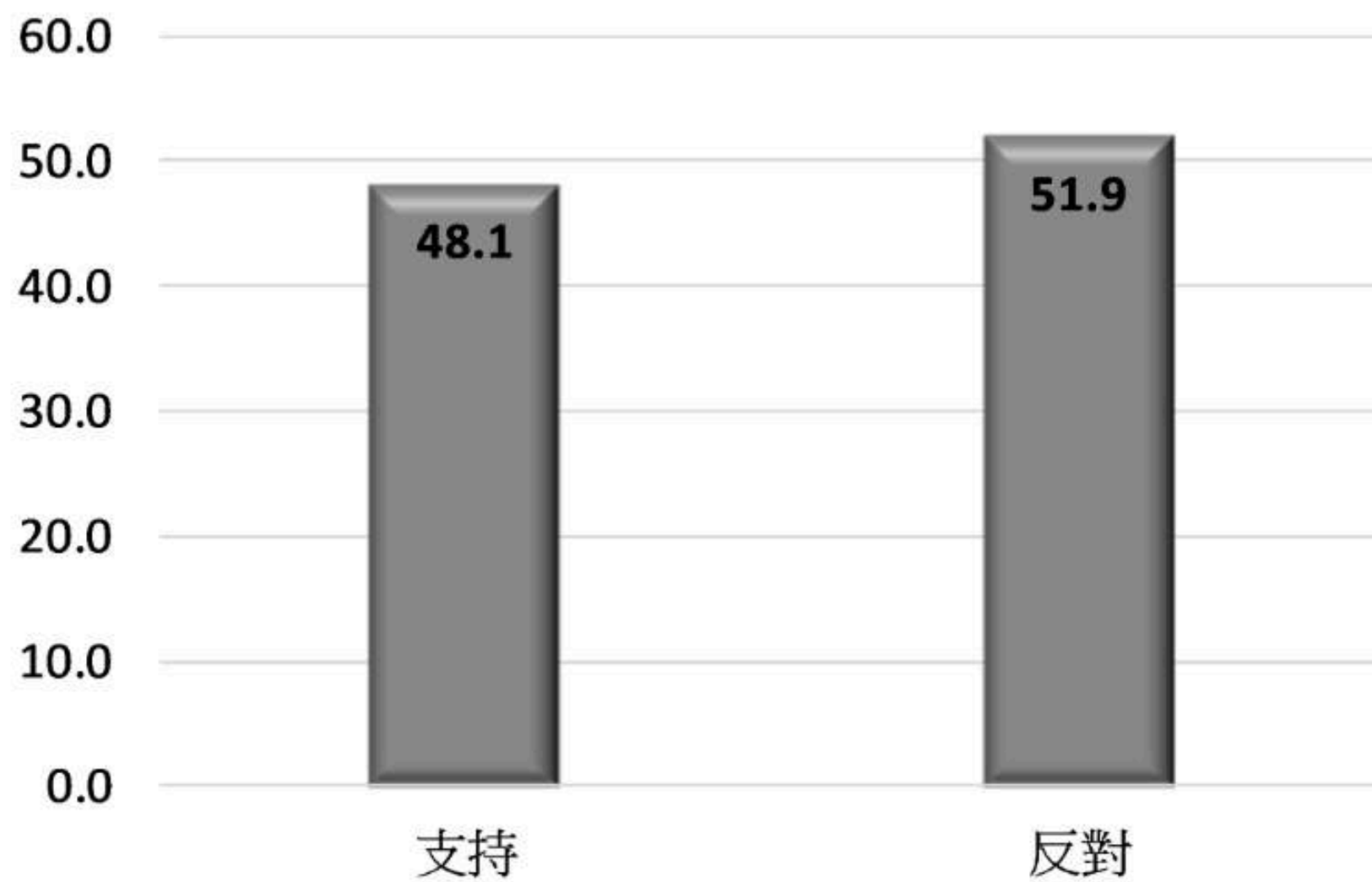


圖 3

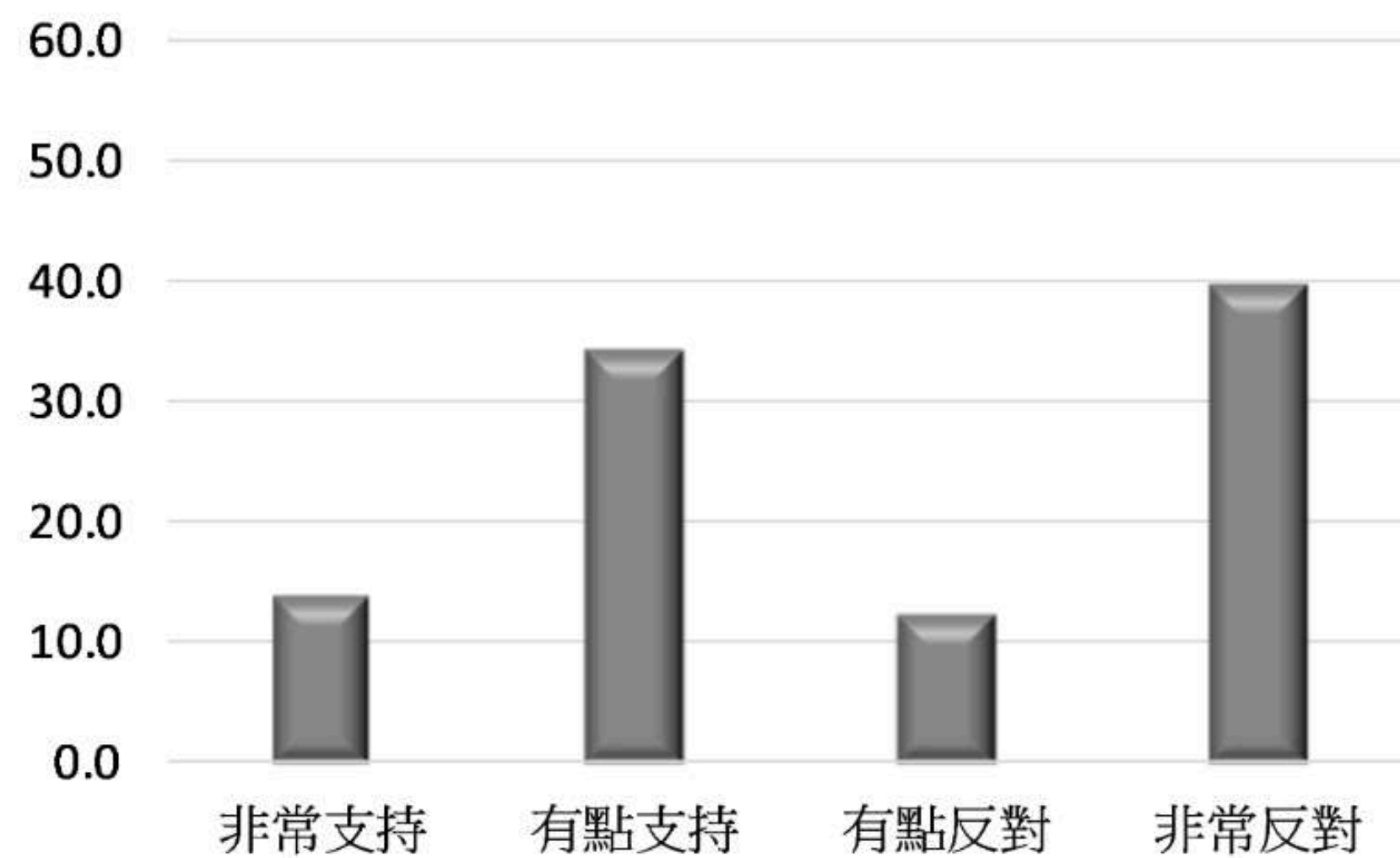
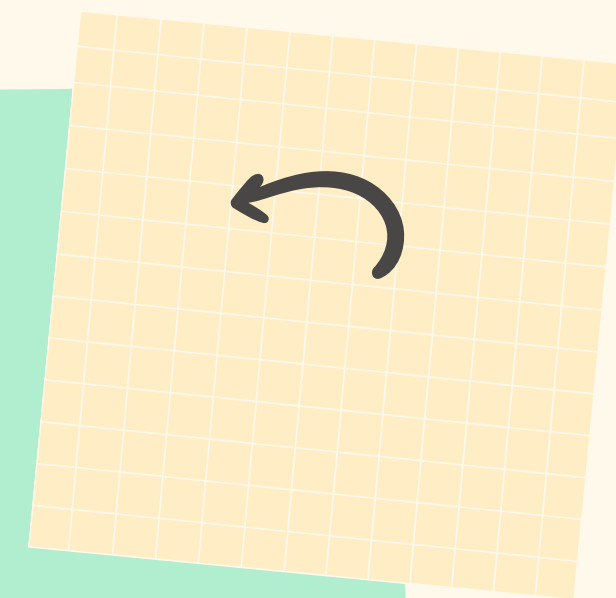
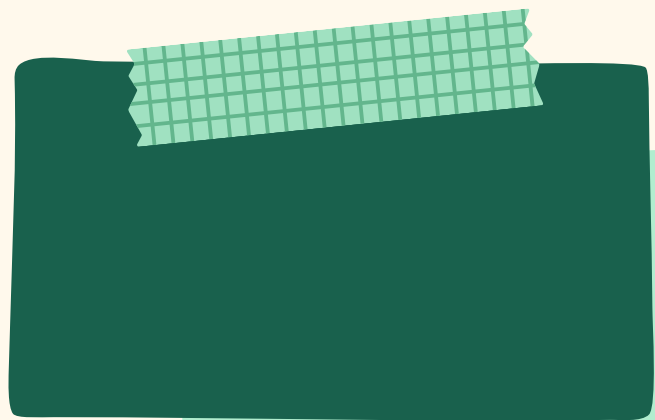
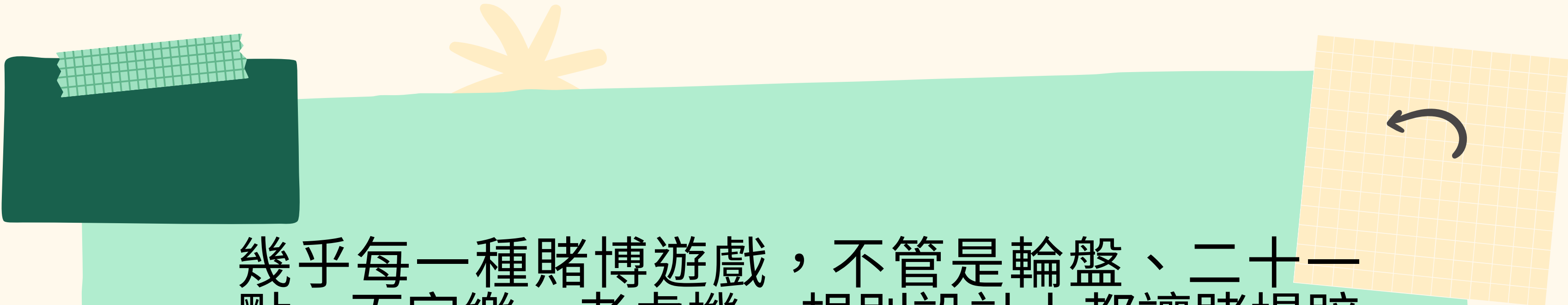


圖 4

3.10

為什麼賭場永遠贏？





幾乎每一種賭博遊戲，不管是輪盤、二十一點、百家樂、老虎機，規則設計上都讓賭場賠率高，但若下注莊家贏會被抽5%佣金。

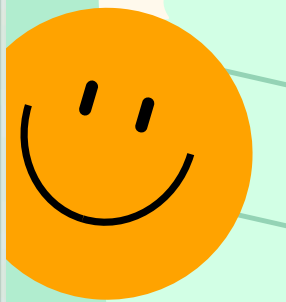
老虎機則透過機率控制，讓回報率低於100%，例如玩家每投100元，期望只能拿回90元。

這種設計讓即使短期內玩家贏錢，長期下來賭場總是穩賺。



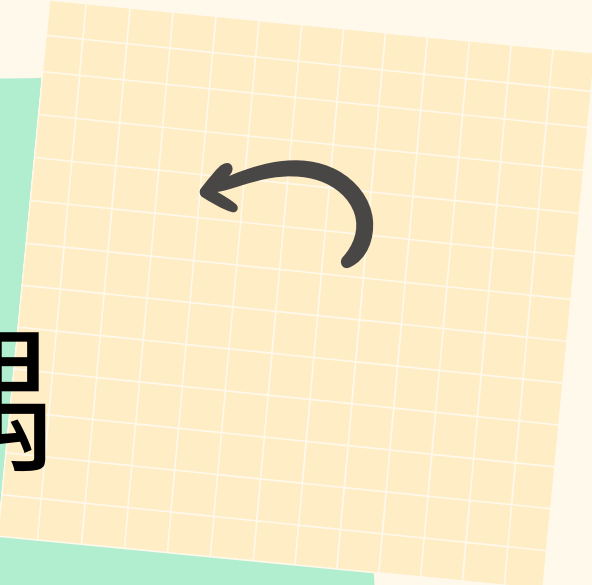

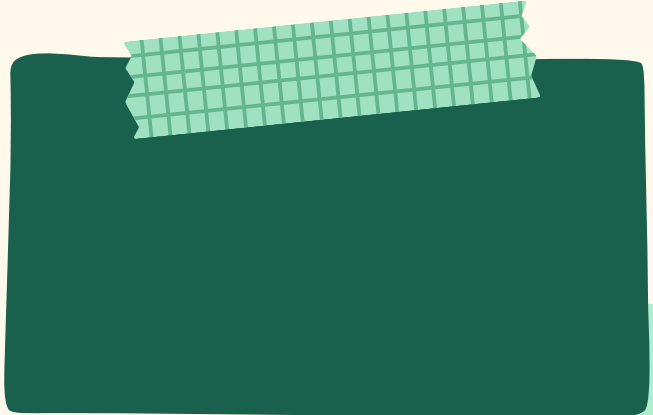
美式輪盤

例子：美式輪盤 (Roulette)



1,200 × 506

4.2




玩法：猜數字/猜顏色/猜大小/猜奇偶

顏色：可投注開出紅或黑色號碼，賠率1:1。

奇偶：可投注開出奇或偶數號碼，賠率1:1。

大小： 1-18、19-36：可投注開出號碼屬上半
(小) 或下半段 (大)，賠率1:1。



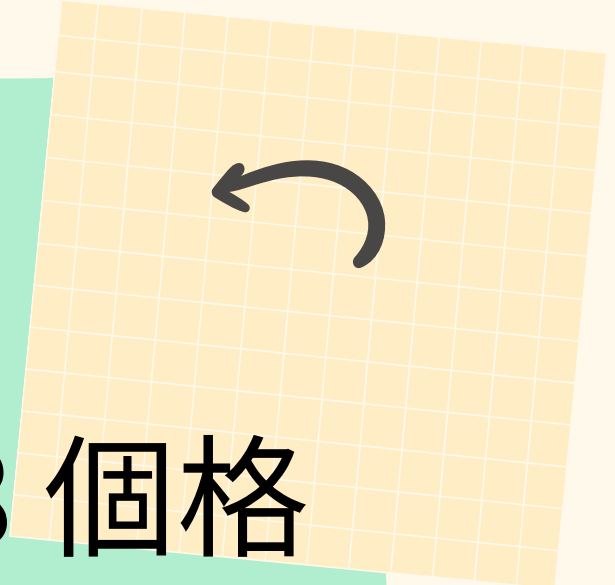

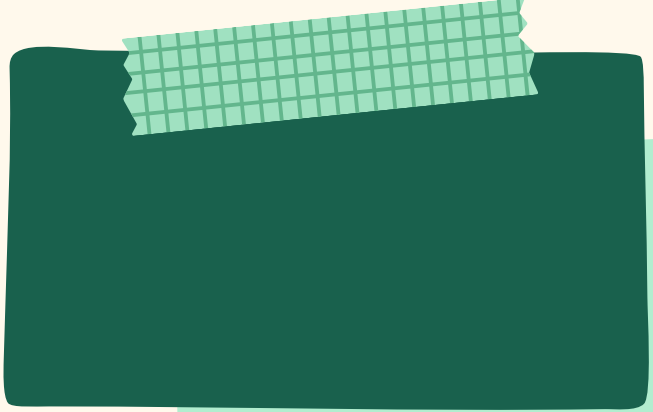


12個數字組合 (Dozen Bet)：可投注開出號碼屬於前(1-12)、中(13-24)或後(25-36)12個號碼，賠率1:2。

直行 (Column Bet)：可投注開出號碼屬於第一
(1,4,7,10...)

、二(2,5,8,11...)或三(3,6,9,12...)直行，賠率1:2。

trytry輪盤吧：<https://www.roulottesimulator.net/zh/>



輪盤有數字 1-36，加上 0 和 00（總共 38 個格子）。

你下注紅色（有 18 個紅色號碼）：

贏的機率 = $18 / 38$

輸的機率 = $20 / 38$

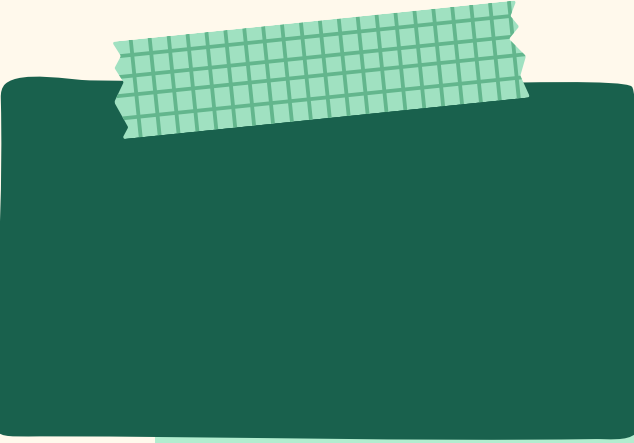
贏了拿回下注金額 + 同額獎金

假設你下注 \$1：



4.5

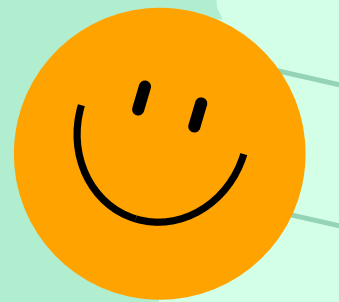




紅白： $EV = (18/38) \times 1 + (20/38) \times (-1) = 3818 - 20 = -382$
 ≈ -0.0526

區域： $EV = (1/3)^*! + 2/3^* - 1 = -1/3$

期望值皆為負



4.6






結論

總結來說，不管是三門問題、心理學實驗、統計圖表還是賭場機率，這些看似不同的情境背後其實都有一個共通點：機率和統計的思維，這會大大的影響我們的判斷與決策。有時候，我們以為在做理性選擇，結果只是被錯誤的直覺或圖表誤導了。

所以不管是在看研究、玩遊戲、還是投廣告，能夠具備一點統計素養，真的能讓我們多一分冷靜、少一分被騙！



參考資料

1. 三門問題 (Monty Hall Problem) <https://peienwu.com/monty-hall>
2. 換？還是不換https://w3.khvs.tc.edu.tw/ischool/widget/main_menu/show.php?id=1802
3. 維基百科(蒙提霍尔问题)<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E8%92%99%E6%8F%90%E9%9C%8D%E7%88%BE%E5%95%8F%E9%A1%8C>
4. 資料正確無誤，卻很混淆視聽！2個「圖表誤導」經典案例
<https://www.businessweekly.com.tw/careers/blog/3009877>
5. 民意調查的圖表解讀及可能的陷阱<https://mlearn.moe.gov.tw/TopicArticle/PartData?key=11108>
6. 贏不了的賭場公式“凱利公式” <https://www.iqvalue.com/tips/article?id=449&tipsCategoryId=8>
7. Deepseek AI<https://www.deepseek.com/>
8. 維基百科(p-hack)<https://zh-yue.wikipedia.org/wiki/P-hack>



Thank you