



# 數學思維與解題(第九組)

組員: 411231107王怡文

411231128戴傳恩

411231143林俊宏



2015-1

Q: IF  $X, Y, Z > 0$ , PROVE THAT  $(3X+Y)(3Y+Z)(3Z+X) \geq 64XYZ$ . WHEN WE HAVE EQUALITY;

問:如果 $X, Y, Z > 0$ , 證明  $(3X+Y)(3Y+Z)(3Z+X) \geq 64XYZ$ 。 當我們平等的時候;

2015-2

Q: LET  $ABC$  BE AN ACUTE TRIANGLE INSCRIBED IN A CIRCLE OF CENTER  $O$ . IF THE ALTITUDES  $BD, CE$  INTERSECT AT  $H$  AND THE CIRCUMCENTER OF  $\triangle BHC$  IS  $O_1$ , PROVE THAT  $AH, O_1O$  IS A PARALLELOGRAM.

問: 讓  $ABC$  是一個內接在中心  $O$  的圓上的銳三角形。如果高  $BD, CE$  在  $H$  處相交, 並且  $\triangle BHC$  的外圍中心是  $O_1$ , 證明  $AH, O_1O$  是一個平行四邊形。

2015-3

Q: PROVE THAT THERE IS NOT A POSITIVE INTEGER  $N$  SUCH THAT NUMBERS  $(N + 1)2^N$ ,  $(N + 3)2^{N+2}$  ARE BOTH PERFECT SQUARES.

問: 證明不存在一個正整數  $N$  使得  $(N + 1)2^N$ ,  $(N + 3)2^{N+2}$  兩個數都是完全平方數。

2015-4

Q:PUPILS OF A SCHOOL ARE DIVIDED INTO 112 GROUPS, OF 11 NUMBERS EACH. ANY TWO GROUPS HAVE EXACTLY ONE COMMON PUPILS. PROVE THAT:

THERE IS A PUPIL THAT BELONGS TO AT LEAST 12 GROUPS.

THERE IS A PUPIL THAT BELONGS TO ALL THE GROUPS.

問:學校的學生被分成112個小組, 每個小組有11個成員。且任意兩個小組有且只有一個共同的學生。證明:

A) 有一名學生屬於至少12小組。

B) 有一位學生屬於所有小組。

學校的學生被分成112個小組，每個小組有11個成員。且任意兩個小組有且只有一個共同的學生。

證明：

A) 有一名學生屬於至少12小組。

B) 有一位學生屬於所有小組。

設學生總數為 $V$ ,每個學生屬於若干個小組.

小組數為 $B=112$ ,每組人數為 $K=11$ .

任意小組有且只有一個共同學生:每個小組交集為1.

設學生 $P$ 參加了 $r_p$ 個小組,他參加的小組對之間有 $\binom{r_p}{2}$ 對,每對都會因為學生而有交集.

一共會有 $\binom{112}{2}=6216$ 對小組.每對小組有一個共同的學生,「小組對交集人數」為6216.

(A) 每個小組有11人,共112個小組,總共人-組關係為: $112 \times 11 = 1232$ .

假設有 $V$ 名學生,每人參加的次數為 $r_1, r_2, r_3, \dots, r_v$ ,且 $r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_v = 1232$ .

在 $\sum \binom{r_i}{2} = 6216$ 的條件下,若所有的 $r_i$ 都不超過11,則 $\binom{11}{2} = 55$ .即便所有學生都參加11組,最大交集數為: $112 \times \binom{11}{2} = 6160 < 6216$ . 矛盾!

所以不可能所有學生只參加11組,必須有一個學生參加12組或以上.

學校的學生被分成112個小組，每個小組有11個成員。且任意兩個小組有且只有一個共同的學生。

證明：

A) 有一名學生屬於至少12小組。

B) 有一位學生屬於所有小組。

設學生總數為 $V$ ,每個學生屬於若干個小組.

小組數為 $B=112$ ,每組人數為 $K=11$ .

任意小組有且只有一個共同學生:每個小組交集為1.

設學生 $P$ 參加了 $r_p$ 個小組,他參加的小組對之間有 $\binom{r_p}{2}$ 對,每對都會因為學生而有交集.

一共會有 $\binom{112}{2}=6216$ 對小組.每對小組有一個共同的學生,「小組對交集人數」為6216.

(B) 若學生 $P$ 參加了112個小組,那他與每個小組都有聯繫.每對小組交集只有一人,表示他能夠保證每一小組都有交集.反過來說,若每一對小組的唯一交集都是 $P$ ,則條件成立.

設只有學生 $P$ 參加了112個小組,其餘學生每人最多出現在一次小組中.那麼他貢獻了 $\binom{112}{2}=6216$ 對小組的交集.而其他學生若是參加多於一組,會額外增加交集數,導致交集數超過6216,與條件矛盾.

所以只有一個學生參加所有小組,其他學生每人只能參加一組.以使得總交集為6216.

## 延伸題:

學校的學生被分成66個小組，每個小組有6個成員。  
且任意兩個小組有且只有一個共同的學生。證明：

A) 學生總數至少為33.

B) 如果學生總數為34,則有一位學生參加了至少12個小組。



學校的學生被分成66個小組，每個小組有6個成員。且任意兩個小組有且只有一個共同的學生。證明：

A) 學生總數至少為33。

小組數為 $B=66$ ,每組人數為 $K=6$ .所有學生參加小組的總人次為 $66*6=396$ .

一共會有 $\binom{66}{2}=2145$ 對小組.

設學生總數為 $V$ ,每個學生屬於 $R$ 個小組.

總人次為 $V*R=396.\Rightarrow R=396\div V$

每個學生貢獻的交集數為 $V * \binom{R}{2} = V * \frac{R*(R-1)}{2}$

$$\text{代入 } R=396\div V \Rightarrow V * \frac{\frac{396}{V} * (\frac{396}{V} - 1)}{2} \Rightarrow \frac{198(396-V)}{V} \geq 2145$$

$$\Rightarrow \frac{(396-V)}{V} \geq 10.83$$

$$\Rightarrow \frac{396}{V} \geq 11.83 \Rightarrow V \leq 33.47 \text{ (因為是整數所以取33.)}$$

學校的學生被分成66個小組，每個小組有6個成員。且任意兩個小組有且只有一個共同的學生。證明：

B) 如果學生總數為34,則有一位學生參加了至少12個小組。

小組數為 $B=66$ ,每組人數為 $K=6$ .所有學生參加小組的總人次為  
 $66 \times 6 = 396$ .

若有34位學生,則平均每位學生參加的小組數為:

$$396 \div 34 \approx 11.65$$

假設每位學生只參加11個小組,則最多人次為 $34 \times 11 = 374$ ,無法達到總人次396,矛盾!

所以至少有一位學生參加了12或更多的小組.