

第四組

組員:410931130 李簡奕辰

410731151 謝少然

410831227 張滄昇

410831149 楊弘暉

410631244 沈致均

第一題

1. Let $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ be the set of positive integers. Find all functions f , defined on N and taking values in N , such that $(n - 1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n$ for every positive integer n .

翻譯：

令 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ 是正整數所組成的集合，求找到所有函數 $f: N \rightarrow N$ ，使得對於任意正整數 n 都有

$$(n - 1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n.$$

講解:

唯一的函數 $f(n) = n$ 這是我們的目標

假設 f 滿足給定的條件，並歸納 $f(n) = n$ 對所有 $n \in \mathbb{N}$

當 $n = 1$ 代入 得出

$$0 < f(1)f(f(1)) < 2$$

這意味著 $f(1) = 1$

現在，假設 $f(k) = k$ 對所有 $k < n$ 且假定與 $f(n) = n$ 矛盾

另一方面，如果 $f(n) \leq n - 1$ ，則 $f(n)f(f(n)) = f(n)^2 \leq (n - 1)^2$ 與之矛盾

另一方面，如果 $f(n) \geq n + 1$ ，則

假設 $f(n) = M \geq n + 1$ ，則 $(n + 1)f(M) \leq f(n)f(f(n)) < n^2 + n = n(n + 1)$

因此

$$f(M) < n$$

而且

$$f(M)f(f(M)) = f(M)^2 < n^2 \leq (M - 1)^2 \quad (\exists \epsilon)$$

這樣矛盾，這樣就完成了歸納

第二題

2. Let ABC be an acute-angled triangle with altitudes AD , BE , and CF . Let H be the orthocentre, that is, the point where the altitudes meet. Prove that $AB \cdot AC + BC \cdot BA + CA \cdot CB \geq AH \cdot AD + BH \cdot BE + CH \cdot CF$.

2.讓三角形 ABC 是一個銳角三角形，他的三個高分別為 AD 、 BE 、 CF 。讓 H 是三角形的垂心(三高的交點)，請證明

$$\frac{AB \cdot AC + BC \cdot BA + CA \cdot CB}{AH \cdot AD + BH \cdot BE + CH \cdot CF} \geq 2$$

第三題

3. On a $(4n + 2) \times (4n + 2)$ square grid, a turtle can move between squares sharing a side. The turtle begins in a corner square of the grid and enters each square exactly once, ending in the square where she started. In terms of n , what is the largest positive integer k such that there must be a row or column that the turtle has entered at least k distinct times?

在 $(4n + 2) \times (4n + 2)$ 的方形網格內，一隻烏龜可經由內部小方型的共用邊移到另一個方形，這隻烏龜從最角落開始，每個位置只能走一次，再走回起點，試問 n 裡面哪一個最大的正整數 k 可以使得每一列每一行的邊都經過至少 k 次？

第四題

4. Let ABC be an acute-angled triangle with circumcenter O . Let Γ be a circle with centre on the altitude from A in ABC , passing through vertex A and points P and Q on sides AB and AC . Assume that $BP \cdot CQ = AP \cdot AQ$. Prove that Γ is tangent to the circumcircle of triangle BOC .

假設三角形 ABC 是一個銳角三角形有一個外心 O ， Γ 是一個圓心與點 A 等高的圓，並通過頂點 A 還有 AB 上一點 P 及 AC 上一點 Q ，假設 $BP \cdot CQ = AP \cdot AQ$ ，證明 Γ 跟三角形 BOC 的外接圓相切

第五題

5. Let p be a prime number for which $(p-1)/2$ is also prime, and let a, b, c be integers not divisible by p . Prove that there are at most $1 + \sqrt{2p}$ positive integers n such that $n < p$ and p divides $a^n + b^n + c^n$.

5. 讓 p 屬於質數為了讓每個 $(p-1)/2$ 也屬於質數
讓 a, b, c 是整數且不能整除於 p
證明最多有一個 $1 + \sqrt{2p}$ 正整數 n 使得 $n < p$ 和 p 整除 $a^n + b^n + c^n$

相似題:

Let $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ be the set of positive integers. Find all functions f , defined on N and taking values in N , such that $(n - 1)^2 < f \cdots f(n) f(f(n)) < (n + 1)^2$ for every positive integer n