

期末報告

課程名稱：數學思維與解題

報告題目：機率與統計

學生姓名：411231128戴傳恩

411031140林咏勳

411231107王怡文

411231143林俊宏

一、報告簡介

你有沒有想過，做選擇題或參加抽獎時，其實每個決定背後都藏著一點數學？本報告會用一些簡單的例子，像是大家常聽過的「蒙提霍爾問題」，來介紹機率和統計的基本概念。我們會聊聊像是「改變選擇會不會比較容易中獎？」這類問題，再進一步看看這些機率知識在生活或工

作中有哪些實際應用，像是廣告投放、行銷策略等。希望透過這份報告，讓大家了解其實機率和統計沒那麼難，也真的能幫助我們做出更聰明的決定。

二、內容摘要

1. 蒙提霍爾問題

這個猜謎的情節是美國電視益智節目「讓我們做個交易吧! (Let's Make a Deal)」，而主持人就是當時大名鼎鼎的蒙迪．霍爾 (Monty Hall)，而以上的三門選擇問題又被稱為「蒙迪．霍爾悖論 (Monty Hall problem)」。假設你正在參加一個遊戲節目，你被要求在三扇門中選擇一扇：其中一扇後面有一輛車；其餘兩扇後面則是山羊。你選擇了一道門，假設是一號門，然後知道所有門後面有什麼的主持人，開啟了另兩扇中 其中一扇後面有山羊的門，假設是三號門。他然後問你：「你想選擇二號門嗎？」轉換你的選擇對你來說是一種優勢嗎？想像有 100 扇門，你選一扇，主持人打開 98 扇空門，只剩你那扇和另一扇沒開。你會換嗎？從貝式定律可以得到，換門的機率比較高！ $P(\text{得獎} | \text{換}) = p(\text{換了得獎})/p(\text{換})$ ，換門得獎的機率為一開始選到羊後來換到汽車 $= (2/3) * (1/2) = 1/3$ ，不管有沒有中有換門的機會為 $(1/3) * (1/2) + (2/3) * (1/2) = 1/2$ ， $p(\text{換了得獎})/p(\text{換}) = (1/3)/(1/2) = 2/3$ ，給個變化題，主持人想說不要對觀眾那麼好，在未被觀眾選中的 $N-1$ 道門中開啟 K 道後面有羊的門，總共有 A 輛車。那還要換嗎？如果換門後中獎了代表先選到羊再換成車，所以一開始選到的門一定要是羊， $P(\text{選到羊}) = (N-1)/N$ 在初選是羊的情況下，獎品一定藏在其他未開啟的門之中。這時候未被開啟的門總共有 $N-1-K$ 扇門，車隨機分佈在這些門中， $P(\text{選到車}) = A/(N-1-K)$ 。 $P(\text{選到羊}) * P(\text{選到車}) = [(N-1)/N] * A/(N-1-K)$ ，參賽者一開始選中的門是車且不換門的機率是 $1/N$ ， $P(\text{換門得獎}) - P(\text{不換門得獎}) = (A/N) * K/(N-K-1)$ 其中 $N-K$ 大於等於 2， K 大於等於 0， A 大於 0。可以得出換門得獎的機率一定大於不換門得獎，可以將這個理論應用，三個行銷平台做投放 (如 Google Ads、Facebook Ads、TikTok)，初期你主力投在 Google Ads。後來數據顯示 Facebook 廣告表現明顯很差 (被主持人「打開」)。這時若你選擇從 Google Ads 轉向 TikTok (也就是「換門」)，可能比持續砸錢在 Google Ads 更有效，尤其是初選平台時沒有充足數據。

2. 心理學與p-hacking

- (1)在一項心理學實驗中,冥想訓練是否會影響人的10種不同認知能力(如記憶力,反應力,反應速度等等).研究者對同一組數據進行了10次獨立統計檢定.至少出現一次“型I誤差”的機率是多少?
- (2)當虛無假設(H_0)為真時, $p < 0.05$ 的機率是5%.若某心理學論文報告 $p = 0.03$,作者宣稱“結果有95%信心正確”.這個說法有問題嗎?
- (3)一項研究同時檢驗“憂鬱症”與五種生物標記的關聯性.若希望整體型一誤差控制在0.05內,使用Bonferroni校正後,每個檢驗的顯著水平應設為多少?

解答

- (1)設 H_0 :冥想對認知能力無效果vs. H_1 :冥想對認知能力有效果.假設 H_0 為真(若 H_1 為真,需要考慮鑑定力 $1 - \beta$,單這題只關注型一誤差的問題.)在顯著水平 $= 0.05$ 的情況下.顯著水平: $P(\text{拒絕 } H_0 | H_0 \text{ 為真}) = 0.05$ 沒有型一誤差的機率就是 $1 - 0.05 = 0.95$ 做了十次鑑定 $= 0.95^{10}$ 至少一次型一誤差: $1 - (0.95)^{10} = 0.4013$ 明顯發生第一型誤差的機率非常高.
- (2)不行✗ p 值的精確定義:在 H_0 為真的假設下,觀察到的當前數據的機率. p 值無法直接回答“假設為真的機率”.因為我們缺乏 H_0 本身為真的基礎機率.如果天氣預報說今天會下雨,但是實際沒下的錯誤警報率.假設 $p = 0.03$ =若 H_0 為真,會有3%的機率看到這個錯誤.但是假如今天下雨了,不能反推出天氣預報的準確率有97%.
- (3)為什麼需要Bonferroni?做越多次鑑定後出現型一誤差的機率會越大.這題的誤差機率是 $1 - (0.95)^5 = 0.226$ (遠大於0.05)原理:將顯著水平平均分給所有檢驗,確保“整體”錯誤率小於等於顯著水平.公式:顯著水準(單次)=顯著水準(整體)/檢驗次數. $0.05/5 = 0.01$ 優點:簡單嚴格,控制整體錯誤率缺點:過於保守(可能漏掉真是效應)校正後只有 $p < 0.01$ 的結果才算顯著,降低型一誤差風險.

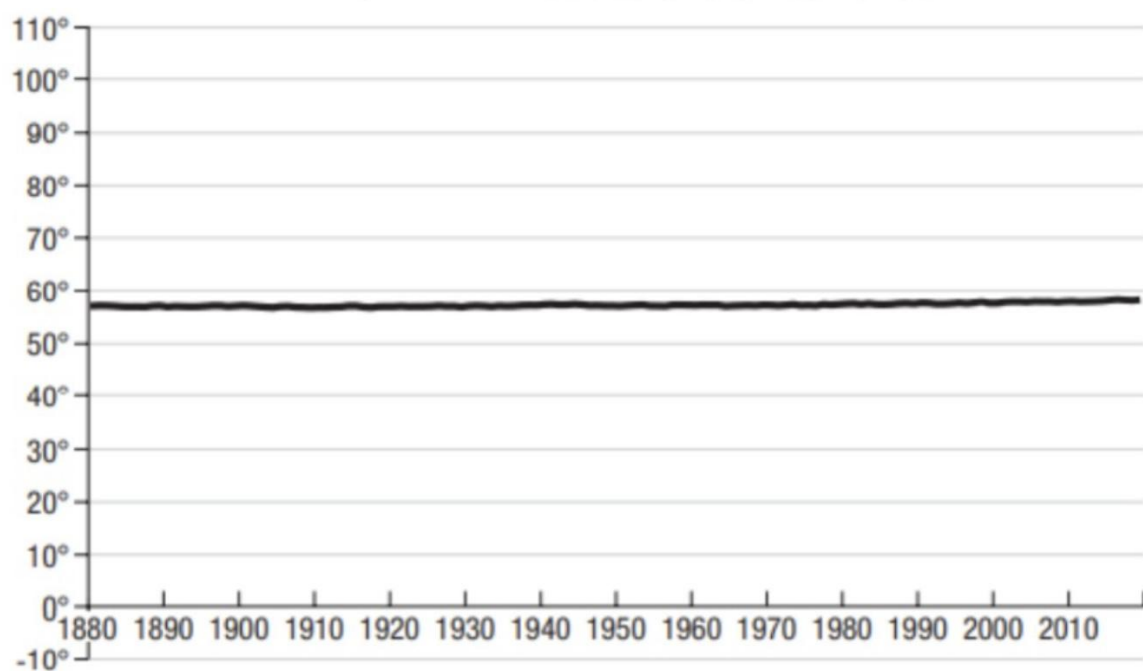
3. 統計圖表的誤導

(1)引言:當我們在日常生活中接觸到數據時,統計圖表常被視為一種簡潔而有力的溝通工具。無論是新聞報導、企業簡報還是社群媒體貼文,圖表往往能迅速傳達趨勢、比例與差異。然而,這些圖表若經過不當設計,或刻意操作視覺元素,極容易產生誤導效果,使觀者對實際情況產生錯誤理解。透過分析常見的誤導手法,我們能培養辨識圖表陷阱的能力,進而成為更具判斷力的數據解讀者。

(2)例子:

全球暖化圖表

1880 年～ 2019 年的全球（華氏）年均溫



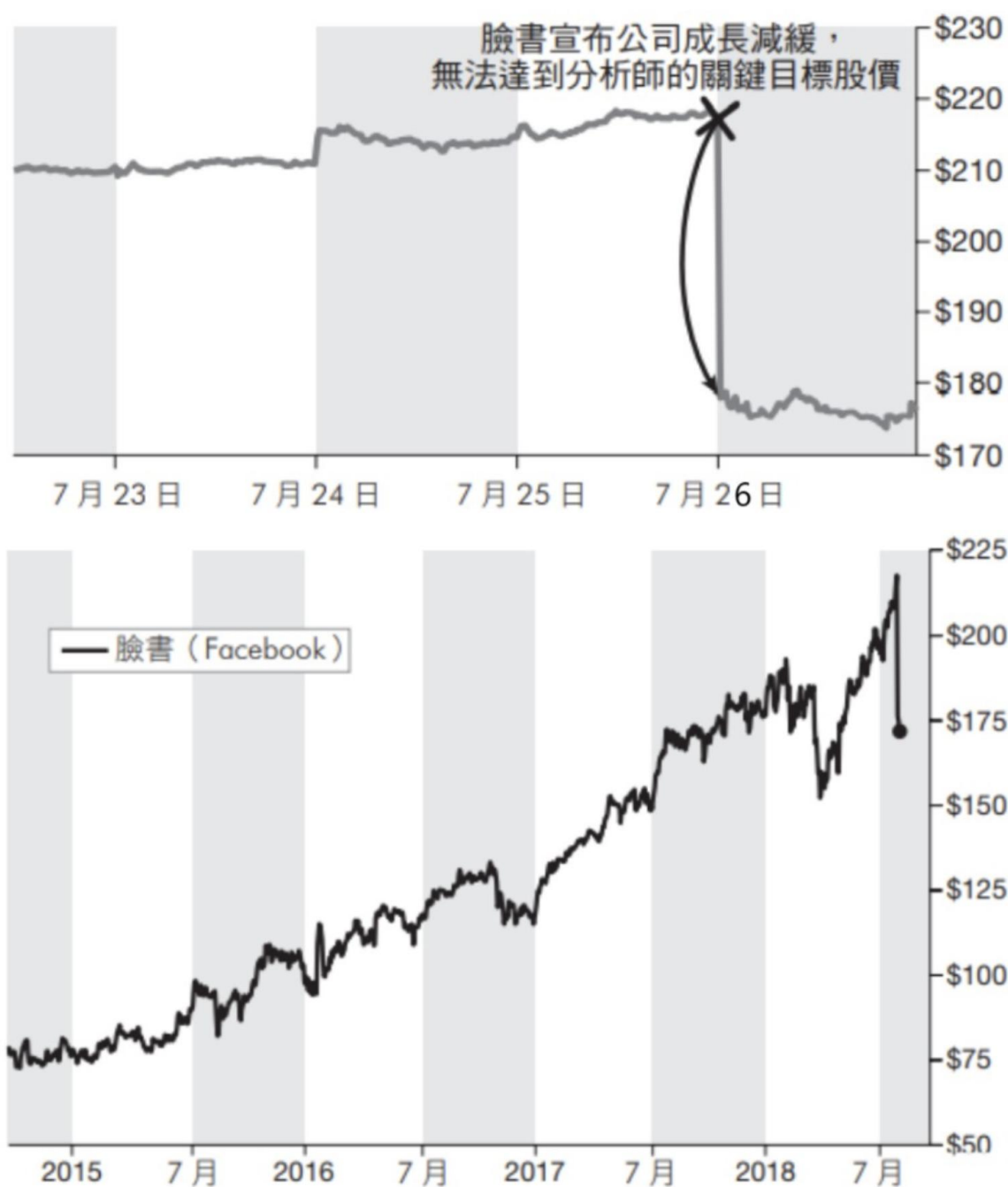
平均全球年均溫



資料來源：美國太空總署（NASA）／哥達德太空研究院（GISS）

以上兩張圖表顯示的皆為西元1880~2019年之間，全球溫度的變化，由第一張圖表，我們可能會覺得在這100多年以來，全球的溫度變化並不大，進而誤導我們感覺全球暖化的現象其實並不嚴重。但事實上由第二張圖表，我們就可以看到，其實在這段時間以來全球的年均溫已經上升了將近 2° ，所以全球暖化的現象是存在的。而造成這樣的誤解是因為Y軸的溫度間距，第一張圖以每 10° 為一個間距，而第二章圖表則是 1° ，所以才會造成我們對於事實的誤解。

FB股價變化圖



2018年7月，臉書公布一份叫人失望的季財報造成股價大跌。《Business Insider》的頭條如此大聲發難：「臉書財損，1200億（美元）市值蒸發：美國股市有史以來的最大股災」。以上附上(第一張圖表) 臉書4天內的股價變化圖。但其實臉書的營運表現向來非常優秀，當我們將2018年7月的股價跌幅納入

如此之背景脈絡，改採橫跨5年而不是4天的圖之後(第二章圖表)，我們會看到與臉書股價大跌的說法非常不一樣的事情，同時也會看到先前股價大跌後便快速反升的狀況。這就是操弄X軸，所造成的誤導。

民調圖表-統計圖表的刻度秘密

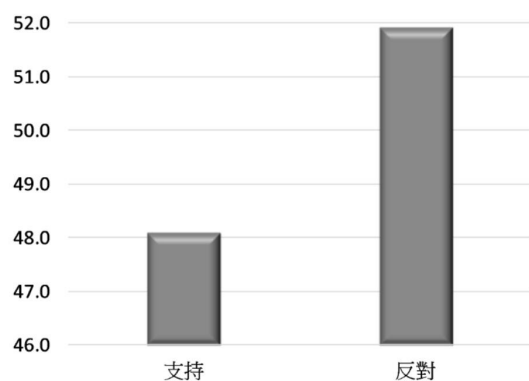


圖 1

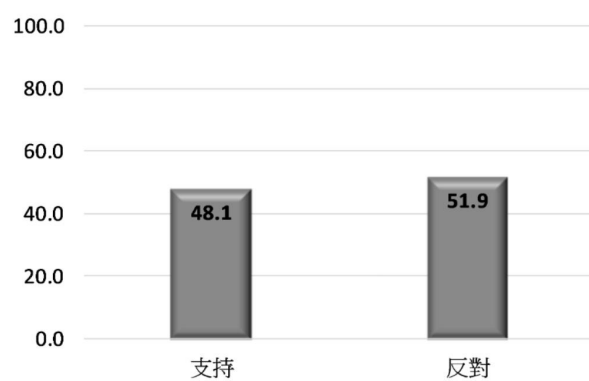


圖 2

相同的統計數據，在相同的圖表類型上，只要利用不同的刻度呈現，就容易讓讀者產生很不同的視覺感受。圖1及圖2是民意調查中，民眾對某一項重要議題持支持或反對的結果呈現，兩圖呈現的數據完全相同，但從長條圖差距的呈現結果來看，會令人有相當巨大的視覺差異，感覺圖1差異很大，圖2則是相差無幾。但之所以如此，主要是兩圖在Y軸上的刻度單位的呈現方式不一樣所致，如果讀者沒有仔細觀察，僅憑視覺上的直覺，很容易得到錯誤的認知。

民調圖表-資料歸類方式的影響

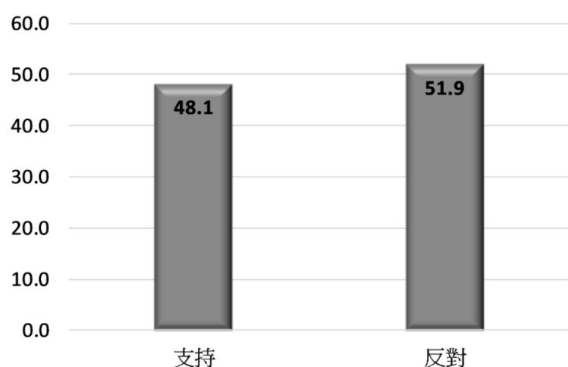


圖 3

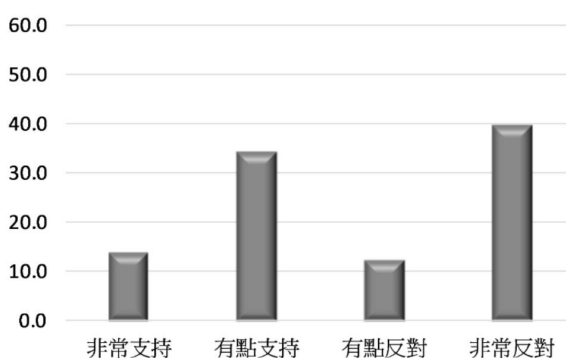


圖 4

民意調查完成後，對於變數的資料處理方式將會直接影響後續資料的呈現結果。其中，最常見的資料處理即是將變數的若干選項進行合併，以簡化圖表呈現的態樣，但如此一來即可能減損對該變數所能提供的相關資訊，致使讀者誤解整體民意的走向。以圖3及圖4為例，從量而言，雖然民眾支持與反對該議題的比例相當，反對方(51.9%)僅略高於支持方(48.1%)不到4%，但如果將支持與反對雙邊的強弱態度呈現出來，從質的角度來看，很明顯，反對方的態度比支持方強硬許多。非常反對的比例約占40%，遠高於有點反對的12%；相反的，非常支持的比例約15%，遠不及有點支持的34%。在這種看似雙方勢均力

敵的比例分布下，若面對實際動員或政策執行時，所遭遇到的阻力或助力則會有相當大的差異性。因此，如果只看圖3而缺漏圖4的資訊，我們的認知就完全不一樣了。

4. 賭場與期望值 (Expected Value in Gambling)

為什麼賭場永遠贏？**答案就在於「期望值 (Expected Value, EV)」的概念。

幾乎每一種賭博遊戲，不管是輪盤、二十一點、百家樂、老虎機，規則設計上都讓賭場有一個小小的數學優勢。例如：

- 在美式輪盤中，有「0」和「00」，這讓莊家的勝率略高於玩家。
- 在百家樂中，莊家雖然勝率高，但若下注莊家贏會被抽5%佣金。
- 老虎機則透過機率控制，讓回報率低於100%，例如玩家每投100元，期望只能拿回90元。

這種設計讓即使短期內玩家贏錢，長期下來賭場總是穩賺。

三、結論與建議

透過本次報告所探討的模型與應用案例，可以得出以下初步結論：

- 透過這次報告中介紹的機率模型和案例，我們可以發現，很多看起來是「運氣」的事情，其實背後都有數學的邏輯。像是「蒙提霍爾問題」就告訴我們，有時候直覺不一定可靠，反而是用數學計算更能幫我們做出好選擇。

- 在日常生活或工作中，不論是抽獎、中獎機率，還是行銷上的受眾分析，其實都離不開機率和統計這兩個工具。只要掌握基本的概念，就能做出更聰明、更有依據的決策。
 - 建議大家平常可以多留意生活中的小機率問題，試著用統計的角度去分析，這不但能幫助我們更了解事物的背後邏輯，也能提升解決問題的能力。
 - 當我們解讀統計圖表時，一定要保持批判思維。圖表雖然是視覺化資料的有效工具，但也可能透過不當的比例、範圍設定、樣本選擇或省略關鍵資訊，誤導我們對於事實的判斷。誤導性的圖表不僅扭曲事實，也可能影響公眾決策與輿論走向。因此，理解圖表背後的資料來源與設計目的，是防止被數據操弄的關鍵。
-

四、參考資料

1. 三門問題 (Monty Hall Problem) <https://peienwu.com/monty-hall>
2. 換？還是不換https://w3.khvs.tc.edu.tw/ischool/widget/main_menu/show.php?id=1802
3. 維基百科(蒙提霍尔问题)<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E8%92%99%E6%8F%90%E9%9C%8D%E7%88%BE%E5%95%8F%E9%A1%8C>

4. 資料正確無誤，卻很混淆視聽！2個「圖表誤導」經典案例[https://www.businessweekly.co](https://www.businessweekly.com.tw/careers/blog/3009877)

[m.tw/careers/blog/3009877](https://www.businessweekly.com.tw/careers/blog/3009877)

5. 民意調查的圖表解讀及可能的陷阱<https://mlearn.moe.gov.tw/TopicArticle/PartData?key=1110>

8

6. 贏不了的賭場公式“凱利公式”

<https://www.iqvalue.com/tips/article?id=449&tipsCategoryId=8>

7. Deepseek AI <https://www.deepseek.com/>

8.維基百科(p-hack)<https://zh-yue.wikipedia.org/wiki/P-hack>