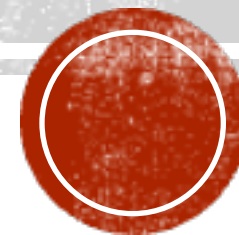


數學思維與解題

CMO2002

410631214 吳承遠

410631210 高浚洋



第五題

- Let $N = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- Determine all functions
- $f : N \rightarrow N$ such that $xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x^2 + y^2)$ for all x and y in N .
- 翻譯：對於所有正整數 x, y ，我們可以找到所有的 N 到 N 都滿足
- $xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x^2 + y^2)$ 。



解法

- 先假設 f 為常數函數且存在 x, y 使得 $f(x) < f(y)$ 使得 $f(y) - f(x) > 0$ 且極小。
- 可以得到
- $f(x) = [xf(x) + yf(x)] / (x+y) <$
- $[xf(y) + yf(x)] / (x+y) < [xf(y) + yf(y)] / (x+y) = f(y)$
- 因此可以推導出
- $f(x) < f(x^2 + y^2) < f(y)$
- 且 $0 < f(x^2 + y^2) - f(x) < f(y) - f(x)$
- 到這裡我們可以證明 f 的確是常數函數
- 而既然 $f(0)$ 在 N 裡面，我們可以確定函數值屬於 N



- 呈上，對於所有 \mathbf{N} 裡面的 \mathbf{c} ，
- 那麼對於所有 \mathbf{x}, \mathbf{y} 屬於 \mathbf{N} , $\mathbf{x}\mathbf{c} + \mathbf{y}\mathbf{c} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{c}$
- 因此我們可以得到 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$
- \mathbf{c} 屬於 \mathbf{N} 即為該等式的所有解



第二題

- 假設今有一正整數我們假設所有小於等於此數之正整數可以被寫成此正整數之因子之和
- 解法：設此正整數為 k 且有二正整數 p, q 小於 k 使得
- $K=ap+b$. 設 a 小於 p . b 則小於 q
- 由於 p, q 皆為實數 我們可以根據題目寫成
- $a=c_1+c_2+c_3+\dots$
- $b=d_1+d_2+d_3+\dots$ 題目定理已說 C 跟 D 是 p 與 q 之因子
- 原式可寫成
- $(c_1+c_2+c_3+\dots)p+(d_1+d_2+d_3+\dots)$ 已知 Cp 與 D 之所有數可以整除 pq
- D 所有數皆小於 q 又小於 ac 之所有數根據定理又之 Cp 與 D 之所有數皆是唯一可得 pq 為實數

