

# 數學思維與解題期末報告

## 第九組

主題:泰森多邊形

報告組員:410931120 涂心睿  
410931136 蔡份哲  
410631114 朱鈺暉  
410631116 劉家宇

## 目錄

1.前言&起源

2.特徵與架構

3.應用

## 前言

一開始我們是因為在其他課程中，別的同學報告了其他幾何相關的內容給了我們一點靈感，他們的報告是關於一種幾何形狀，叫做盾柱體(Scutoid)，這是一個科學家新發現的幾何形狀，當時聽完他們的報告之後，覺得很新奇有趣，所以數學思維與解題的期末報告，也想從幾何的層面去探討與呈現。最後我們選了泰森多邊形當作我們的報告主題，我們不僅僅只是介紹這個多邊形的由來、定義，我們也會看一下生活中泰森多邊形的相關應用與例子，並且我們也使用了 GeoGebra 這套數學繪圖軟體實際去操作了一下，讓大家可以更直觀更易懂的方式去了解泰森多邊形。

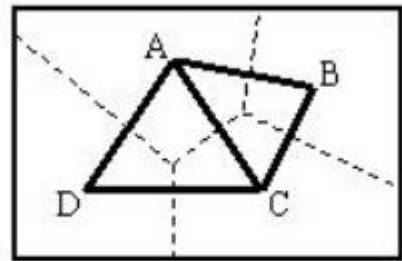
## 起源

美國氣候學家 A·H·Thiessen 提出了一種根據離散分布的氣象站的降雨量來計算平均降雨量的方法，即將所有相鄰氣象站連成三角形，作這些三角形各邊的垂直平分線，於是每個氣象站周圍的若干垂直平分線便圍成一個多邊形。

用這個多邊形內所包含的一個唯一氣象站的降雨強度來表示這個多邊形區域內的降雨強度，並稱這個多邊形為泰森多邊形。

## 泰森多邊形法

如圖，其中虛線構成的多邊形就是泰森多邊形。泰森多邊形每個頂點是每個三角形的外接圓圓心。泰森多邊形也稱沃羅諾伊圖，或 Dirichlet 圖。



泰森多邊形

## 簡介

從幾何角度來看，兩基站的分界線是兩點之間連線的鉛直等分線，將全平面分為兩個半平面，各半平面中任何一點與本半平面內基站的間隔都要比到另一基站間隔小。當基站數量在二個以上時，全平面會劃分為多個包羅一個基站的區域，區域中任何一點都與本區域內基站間隔最近，是以這些個區域可以看作是基站的覆蓋區域，我們將這種由多個點將平面劃分成的圖稱為泰森多邊形。

※基站:泰森多邊形中的離散點

# 中地理論

以系統性的科學概念，配以數學計算，旨在解釋人類聚落的數量、大小和位置的分布規律。

假設

## 1.均質平面 ( Homogeneous surface )

同一塊平地上，各中地間距離相等，不同中地販賣不同等級的商品。

土地上的肥沃度、資源、等條件相同，且人口分佈均勻，所以相對應的收入分布、貨物需求，消費方式均一致。

交通的運輸方式一致，包含運輸工具及運費等等。

## 2.理性人

消費者與生產者皆是理性經濟人。消費

者會以最低交通費用，到最近的城市購買商品或享受服務；生產者會力求擴大市場，以謀取較高利潤。

消費者會選擇最近的地方購物，低等級商品絕大多數中地都會出售。像是日常生活用品，如麵包、牙刷、牙膏、肥皂等。而一些高等級商品，如名貴貨品和名牌商品，人們通常願意花費較高交通費用購物，因此出售高等級商品的中地必然比銷售低等級商品的中地少。

各城市的易達性一樣，交通費用與距離成正比。



## 生成的特徵

- 1、每個泰森多邊形內僅含有一個基站;
- 2、泰森多邊形區域內的點到相應基站的距離 最近;
- 3、位於泰森多邊形邊上的點到其兩邊的基站的距離相等。



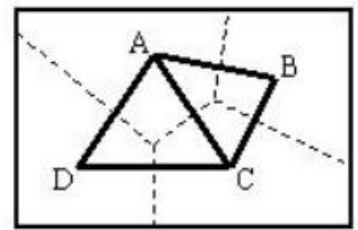
## 建立步驟

- 1、離散點自動建構三角網，即建構 Delaunay 三角網。對離散點和形成的三角形編號，記錄每個三角形是由哪三個離散點構成的。
- 2、找出與每個離散點相鄰的所有三角形的編號，並記錄下來。這隻要在已構建的三角網中找出具有一個相同頂點的所有三角形即可。
- 3、對與每個離散點相鄰的三角形按順時針或逆時針方向排序，以便下一步連線生成泰森多邊形。排序的方法可如圖所示。設離散點為  $o$ 。找出以  $o$  為頂點的一個三角形，設為  $A$ ；取三角形  $A$  除  $o$  以外的另一頂點，設為  $a$ ，則另一個頂點也可找出，即為

f;則下一個三角形必然是以 of 為邊的，即為三角形 F;三角形 F 的另一頂點為 e，則下一三角形是以 oe 為邊的;如此重複進行，直到回到 oa 邊。

4、計算每個三角形的外接圓圓心，並記錄之。

5、根據每個離散點的相鄰三角形，連線這些相鄰三角形的外接圓圓心，即得到泰森多邊形。對於三角網邊緣的泰森多邊形，可作垂直平分線與圖廓相交，與圖廓一起構成泰森多邊形。



泰森多邊形

# 德勞內三角化

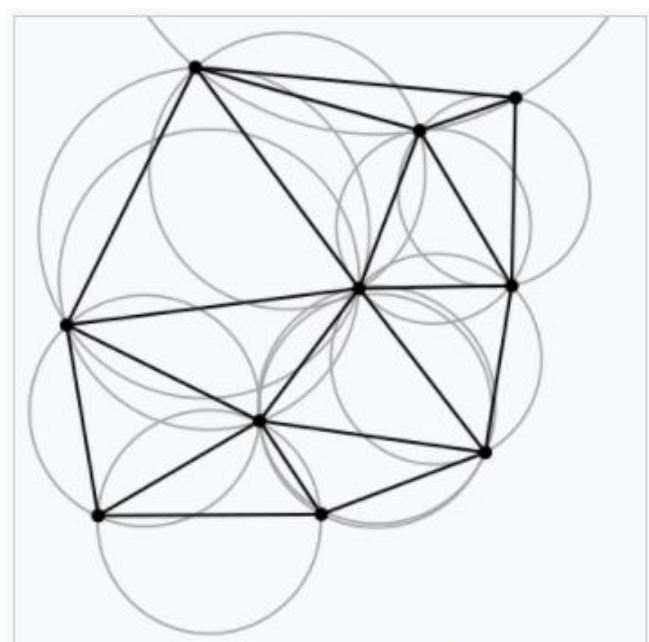
在數學和計算幾何領域，平面上的點集  $P$  的

德勞內三角化是一種三角剖分  $DT(P)$ ，使得在  $P$  中沒有點嚴格處於  $DT(P)$  中任意一個三角形外接圓的內部。

Delaunay 三角化最大化了此三角剖分中三角形的

最小角，換句話說，此算法儘量避免出現

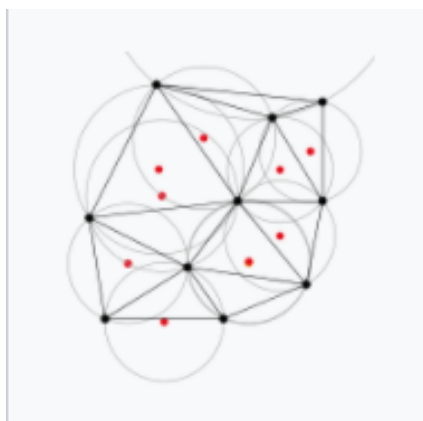
「極瘦」的三角形。



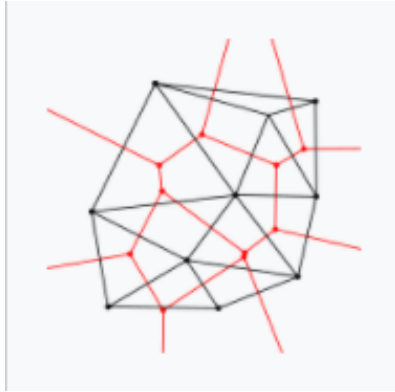
一個平面德勞內三角化的例子，所有三角形  
外接圓以灰色表示。

## 與泰森多邊形的關係

若一離散點集的點均處於一般位置，則德勞內三角化就對應泰森多邊形的對偶。特殊情形包括了三點共線及四點共圓。



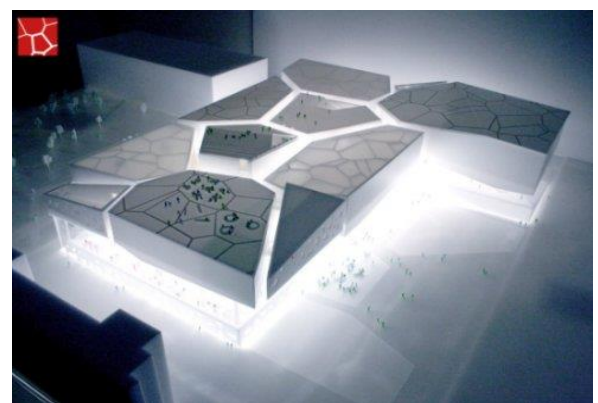
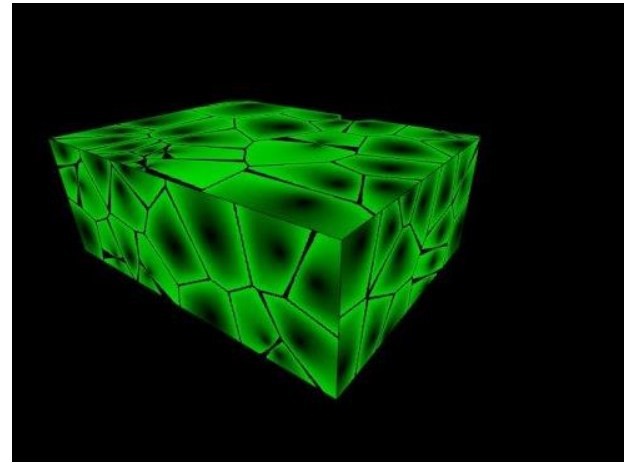
一個德勞內三角化的例子，  
所有三角形外接圓的圓心以紅點表示。



一個德勞內三角化的例子，  
所有三角形外接圓的圓心以紅點表示。

## 應用







## 韓國設計師建造世界上最漂亮遊艇

近日，韓國一名遊艇設計師金鉉錫建造了世界上最華麗的一艘遊艇。該遊艇利用泰森多邊形原理，船身包裹在格子狀鏤空外壁內，船內配有熱水浴缸、高爾夫球場、游泳池以及空中酒廊。

該遊艇長達 125 米，長度超過了切爾西足球俱樂部老闆阿布拉莫維奇的遊艇，內部空間寬敞，該船的名字“泰森多邊形”是根據俄羅斯數學家喬治·沃洛諾伊提出的隨意幾何圖形空間概念而來。

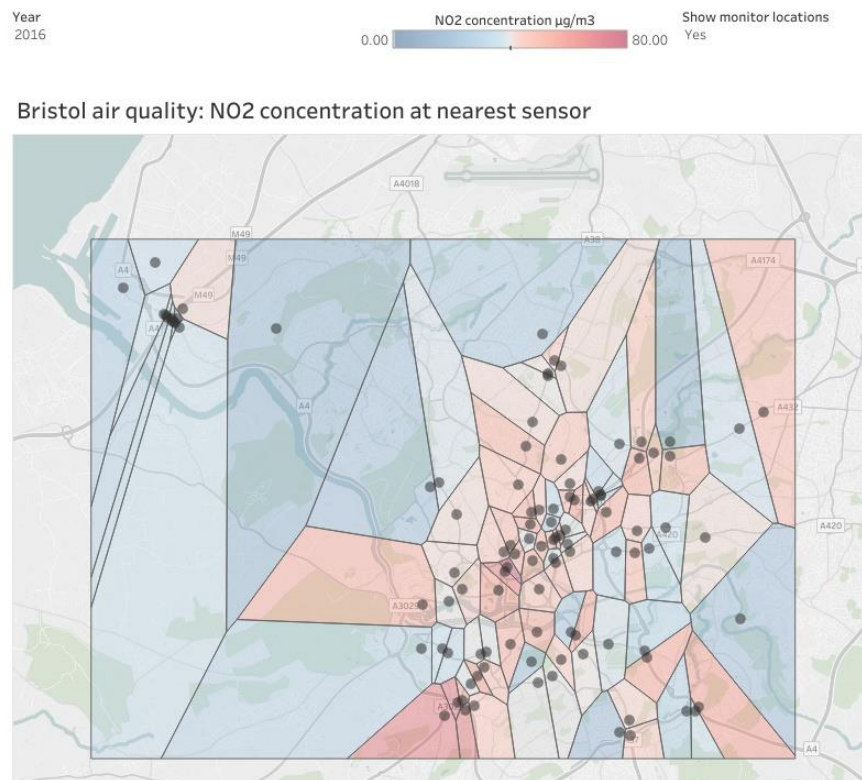
金鉉錫介紹道，泰森多邊形隨處可見，該模式是一種在固體表面刨除多餘部位的特殊方法，這樣就能夠利用最少

的材料建造最堅實的結構。



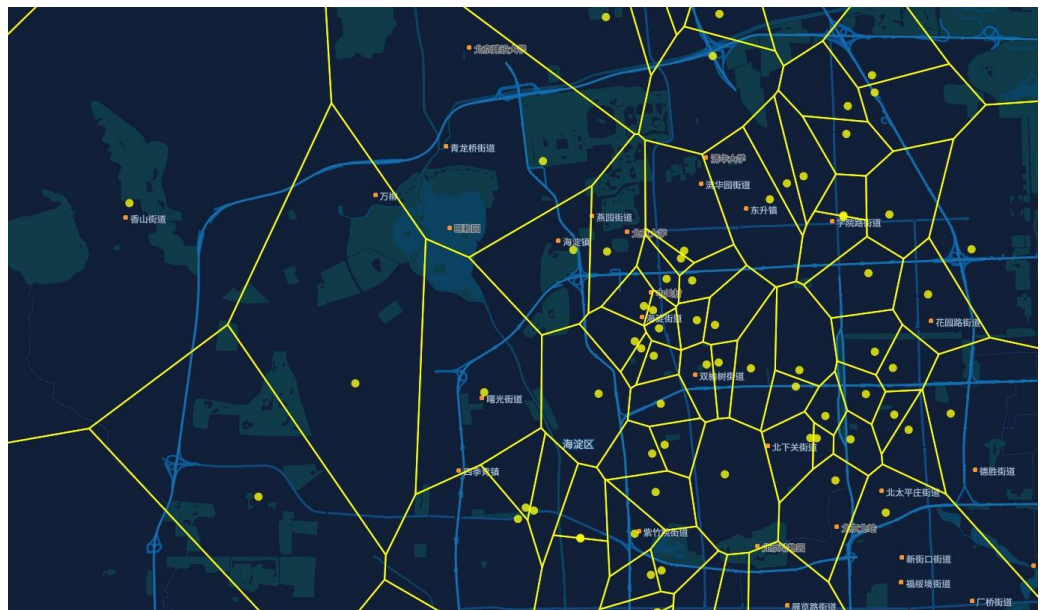
# 空間應用與可視化 1

下圖為英國布里斯托爾的空氣質量  
Voronoi 圖可視化，顯示了不同區域的  
最近的傳感器位置的 NO2 濃度值。



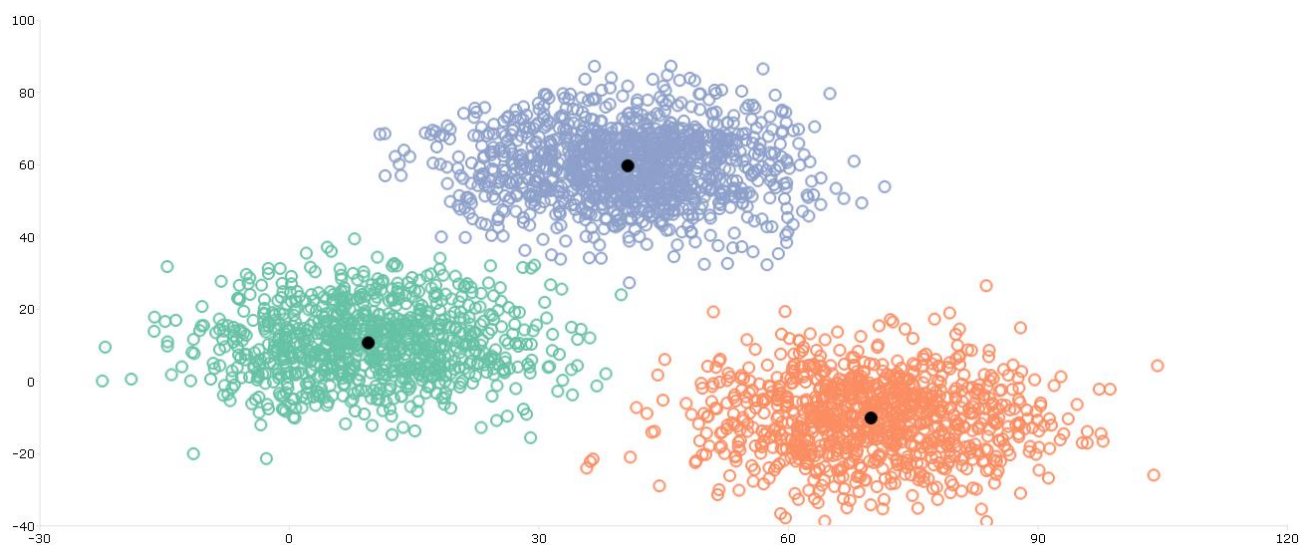
## 空間應用與可視化 2

Voronoi 圖支持空間地圖的可視化和圖表的可視化，地圖的可視化方式較為簡單，將生成的 Voronoi 的空間數據坐標繪製成線對像或者面對象即可，下圖為基於 Mapbox GL 繪製的北京海淀區停車場分佈和 Voronoi 圖：



# 統計學

K-means Clustering Algorithm，是統計學和數據挖掘領域中常用的一種算法。將  $n$  個觀察值分成  $k$  個類，使得每一類中的觀察值與該類的均值最接近，與其他的類的均值較遠。



## 結語

藉由這一次數學思維與解題的期末報告，讓我們對於幾何方面的認識又更近一步了，而且從找資料的過程中，也會學到很多其他延伸的概念與理論。而且自己實際去操作 GeoGebra 之後，也讓我們對於泰森多邊形有更具體的理解，更讓我們發覺幾何的有趣，畢竟生活中的許多東西，都蘊含了幾何的概念在裡面。所以我們從這次的報告中獲得了不少，不單單只是知識的方面，還包括資料的尋找、整理、呈現，口語的表達等，這些經驗與體驗對我們而言都相當

的有幫助，並讓我們獲益良多。

## 參考資料

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/48252861>

<http://www.yunfengnet.com/2532.html>

<https://phobia91.pixnet.net/blog/post/94251036>

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BE%B7%E5%8B%9E%E5%85%A7%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%8C%96>

<https://www.easyatm.com.tw/wiki/%E6%B3%B0%E6%A3%AE%E5%A4%9A%E9%82%8A%E5%BD%A2>

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%AD%E5%BF%83%E5%9C%B0%E7%90%86%E8%AB%96>

<https://www.itsfun.com.tw/%E6%B3%B0%E6%A3%AE%E5%A4%9A%E9%82%8A%E5%BD%A2%E6%B3%95/wiki-800703-810092>

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B2%83%E7%BD%97%E8%AF%BA%E4%BC%8A%E5%9B%BE>

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/48252861>

<https://read01.com/0z0yjsx.html#.X-EmgtgzbIV>



