

數思解-第三組

組員:吳尚恩411131201、吳建億411131205、呂侑宸411131215、
蔡宗翰411131225、邱証揚411131233

黃金比例:探索數學、自然與藝術中和諧之美

一、黃金比例的歷史足跡:

黃金比例並非現代人的發明,其蹤跡可以追溯到遠古文明:

古埃及時期:學者認為古埃及人已將黃金比例應用於金字塔的建造,以此創造更美觀的建築。

古希臘時期:畢達哥拉斯學派在研究正五邊形和正十邊形作圖時,推測已接觸甚至掌握黃金比例的規則,但由於數字崇拜的信仰而拒絕承認無理數的存在。

文藝復興時期:黃金比例被廣泛應用於藝術和建築,達文西、米開朗基羅等大師的作品,如《蒙娜麗莎》,都巧妙地運用黃金比例創造和諧美感。

二、什麼是黃金比例?

數學定義:黃金比例是一種特殊的數學比例,滿足 $(a+b)/a = a/b = \varphi$,其中 φ 稱為黃金比例。

數值: $\varphi \approx 1.618$,可由方程式 $x^2-x-1=0$ 計算得出。

三、黃金比例的特性

無理數: φ 無法用兩個整數的比值表示。

倒數性質: φ 的倒數等於 $\varphi-1$ 。

費氏數列:費氏數列中相鄰兩項的比值趨近於 φ 。

四、黃金比例的應用

黃金比例的應用遍及自然、藝術、建築乃至科技等各個領域:

自然界:

蜂巢結構:六邊形結構及尺寸比例接近黃金比例,體現蜂群智慧和自然奧妙,是美學與功能的完美結合。

樹葉生長:葉子在枝條上的螺旋排列接近黃金螺旋,有助於最大程度地接收陽光。

花瓣數目：許多花卉的花瓣數目為 3、5、8、13 等費氏數列數字，與黃金比例密切相關，既美觀又利於授粉。

人體比例：人體比例與黃金比例息息相關，例如肚臍位置、雙肩寬度、四肢比例等。

種子排列：向日葵種子頭部的螺旋排列，兩個方向的螺旋線數目通常是費氏數列中的相鄰兩項。

鸚鵡螺：螺旋形外殼以黃金比例不斷擴展，展現黃金比例在自然界中的奇妙應用。

建築之美：

古埃及金字塔：例如吉薩大金字塔的底座邊長與高度的比例接近黃金比例。

人面獅身像：頭部與身體的比例，以及整體結構的長寬比例都與黃金比例相吻合。

希臘帕德嫩神廟：整體比例、柱子高度與寬度、門廊尺寸等都融入了黃金比例的理念。

法國艾菲爾鐵塔：整體高度與底座比例，以及塔身各部分比例都符合黃金比例。

加拿大國家電視塔：高度和底座的比例也符合黃金比例的原則。

藝術傑作：

達文西《蒙娜麗莎》：頭部、身體和背景比例符合黃金分割，創造出和諧的視覺平衡。

達文西《聖母領報》：主要人物比例、背景元素位置都與黃金比例相呼應。

米開朗基羅《創造亞當》：上帝和亞當的手指幾乎觸碰，呈現黃金比例構圖。

達文西《最後的晚餐》：餐桌、人物比例、空間位置都依照黃金比例設計，呈現和諧的構圖。

生活應用：

UI/UX 設計：創造視覺平衡和易用性，提升使用體驗。

品牌 LOGO 設計：增加視覺吸引力和品牌辨識度。

攝影構圖：提升視覺美感和平衡性，使照片更具感染力。

螢幕比例：符合人眼視覺，提升使用者體驗。

Apple 設計:從 iPhone 螢幕比例到 MacBook 鍵盤布局,處處體現黃金分割的精髓,提升產品美感和人體工學。

Google 設計:從品牌標誌到產品介面,巧妙融入黃金比例,營造平衡與和諧的視覺效果。

Nissan 和 **Toyota** 的 **logo** 設計:圓形和橢圓形的比例接近黃金比例,提升視覺平衡和諧。

五、黃金比例的延伸

五芒星:每條線上的交叉點都是黃金分割點。

阿基米德螺旋線:極坐標方程為 $r = a + b * \theta$, 每條臂的間距永遠相等於 $2\pi b$ 。

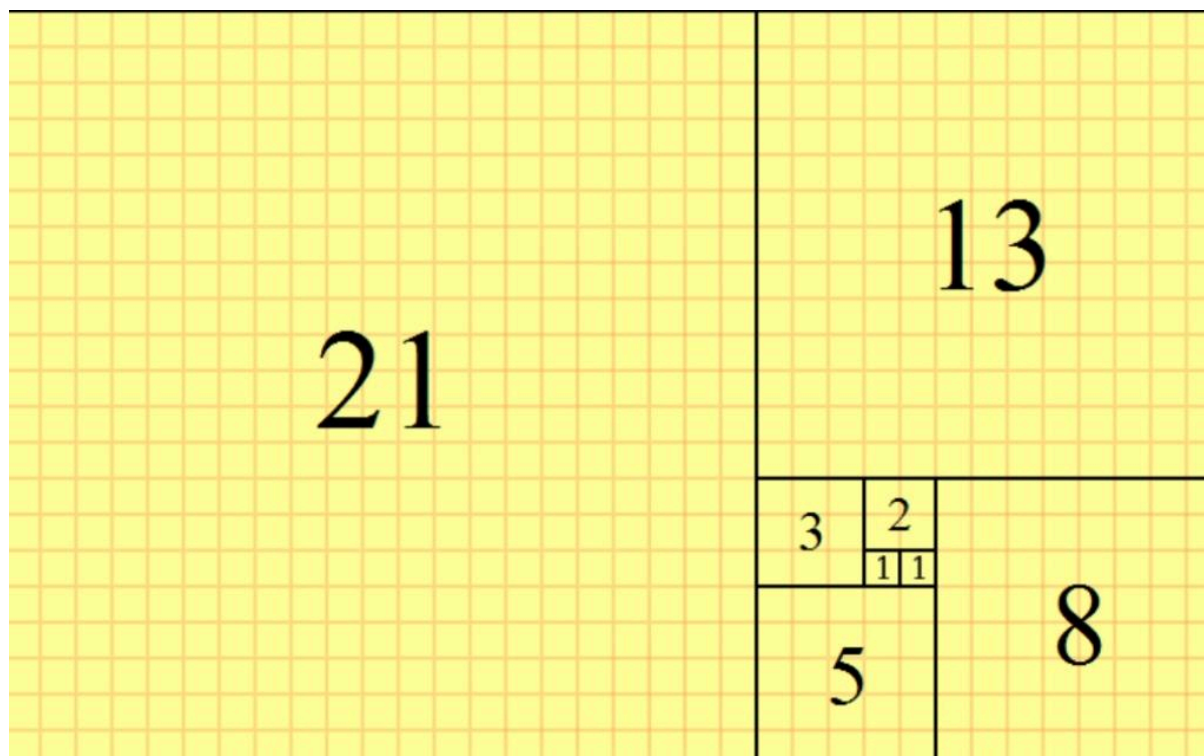
六、程式碼

```
#includes <iostream>
#include <stdio.h>

using namespace std;

int main() {
    long b, c, d = 0, e = 0, f = 100, i = 0, j, N;
    cout << "請輸入黃金分割數位數\n";
    cin >> N;
    N = N * 3 / 2 + 6;
    long* a = new long[N + 1];
    while (i <= N) a[i++] = 1;
    for (; --i > 0;
        i == N - 6 ? printf("\r0.61") : printf("%02ld", e
+= (d += b / f) / f),
        e = d % f, d = b % f, i -= 2)
        for (j = i, b = 0; j; b = b / c * (j-- * 2 - 1))
            a[j] = (b += a[j] * f) % (c = j * 10);
    delete[] a;
    cin.ignore();
    cin.ignore();
    return 0;
}
```

七、費波那契數列



以費波那契數為邊的正方形拼成的圖形近似黃金矩形

線性代數解法

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1}$$

構建一個矩陣方程式

設 J_n 為第 n 個月有生育能力的兔子數量， A_n 為這一月份的兔子數量。

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix},$$

上式表達了兩個月之間，兔子數目之間的關係。而要求的是， A_{n+1} 的表達式。

求矩陣的特徵值： λ

根據特徵值的計算公式，我們需要算出來 $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ 所對應的解。

展開行列式有： $-\lambda(1-\lambda) - 1 \times 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$ 。

故當行列式的值為 0，解得 $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ 或 $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ 。

特徵向量

將兩個特徵值代入

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot E \right) \cdot \vec{x} = 0$$

求特徵向量 \vec{x} 得

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{pmatrix}$$

分解首向量

第一個月的情況是兔子一對，新生 0 對。

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

將它分解為用特徵向量表示。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{pmatrix} \quad (4)$$

用數學歸納法證明

從

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix}$$

可得到

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} J_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \lambda^n \cdot \begin{pmatrix} J_1 \\ A_1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

化簡矩陣方程式

將 (4) 代入 (5)

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \lambda^n \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{pmatrix} \right]$$

根據3

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \lambda_1^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \lambda_2^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{pmatrix}$$

求A的表達式

現在在6的基礎上，可以很快求出 A_{n+1} 的表達式，將兩個特徵值代入6中

$$A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \lambda_1^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \lambda_2^{n+1}$$

$$A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1})$$

$$A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left\{ \left[\frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) \right]^{n+1} - \left[\frac{1}{2} (1 - \sqrt{5}) \right]^{n+1} \right\} \quad (7)$$

(7) 即為 A_{n+1} 的表達式

八、資料來源

1. 維基百科-黃金比例

<https://zh.wikipedia.org/zhtw/%E9%BB%84%E9%87%91%E5%88%86%E5%89%B2%E7%8E%87>

2. 維基百科-阿基米德螺線

<https://zh.wikipedia.org/zhtw/%E9%98%BF%E5%9F%BA%E7%B1%B3%E5%BE%B7%E8%9E%BA%E7%BA%BF>

3. 泛科學-黃金比例如何啟發世界的「美」！ <https://pansci.asia/archives/325366>
4. 建築師沒說的祕密 古典建築黃金比例
<https://www.epochtimes-com-tw.webpkgcache.com/doc/-/s/www.epochtimes.com.tw/n332431/%E5%BB%BA%E7%AF%89%E5%B8%AB%E6%B2%92%E8%AA%AA%E7%9A%84%E7%A5%95%E5%AF%86-%E5%8F%A4%E5%85%B8%E5%BB%BA%E7%AF%89%E9%BB%83%E9%87%91%E6%AF%94%E4%BE%8B-.html>
5. 古文明建築、文藝復興藝術作品中暗藏的秘密！「黃金比例」到底出現在多少地方？ | 志祺七七
<https://youtu.be/680BZM637kk?feature=shared>
6. 痞客邦-黃金比例
https://www.google.com/urlsa=t&source=web&rct=j&opi=89978449&url=https://derjensun.pixnet.net/blog/post/234749237&ved=2ahUKEwjL1KDQ4luKAxWUkK8BHa_mGWgQFnoECDUQAQ&usg=AOvVaw1djwhXd_dLe95y0xmaWGSL
7. Geogebra黃金矩形
<https://www.geogebra.org/m/fehnnfpg#material/ma6awqes>
8. 網路科教館-值得再三玩味的黃金比例
<https://www.ntsec.edu.tw/liveSupply/detail.aspx?a=6829&cat=6842&p=1&lid=20395>
9. 黃金比例:1.61803.....的祕密 閱讀心得
<http://210.60.110.11/reading/wp-content/uploads/2012/10/09933001.pdf>