

圓積木研究(A Study of Log Stacker) 葉均承 Chun-Chen Yeh

孫君儀 Chun-Yi Sun

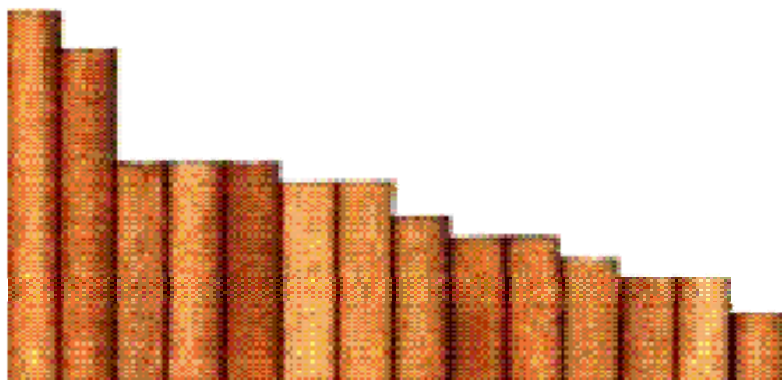
一、緣起

1998 年，中研院數學所葉永南教授在一次演講中，生動有趣地介紹了一些“益智遊戲”，其中有一樣圓積木遊戲(由 Bradley 教授發明)——只是個不起眼的小木盒，裡面平放了十三木條，木盒外另有一根小木條，遊戲要求把盒外的這一根木條也放進盒子內，並且能順利地將盒蓋蓋上。起初，我們並不以為意，認為盒子上所說的“The world's most difficult puzzle box”過於誇大，如此平凡的東西，一定很容易解決。但我們試了許久，怎麼放都放不進去，最後只有舉白旗投降了。葉教授鼓勵我們靜下心來好好想，而且盒子背面說此遊戲確有 2 個解，於是我們開始探討其中的奧秘。



二、測量配件

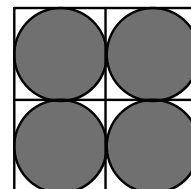
經驗告訴我們進行遊戲解法的研究首先要觀察配件，圓積木遊戲共有十四根長長短短的圓柱木條，其長度分別約為 12.9 公分、11.7 公分、7.7 公分(3 根)、7.1 公分、5.8 公分、5.2 公分(2 根)、4.8 公分、4.4 公分、3.8 公分(2 根)、2.6 公分。而圓柱直徑皆相等且約為 1.3 公分，木盒內緣長約 15.9 公分、寬約為 4.2 公分、高約為 2.7 公分。仔細觀察這些數字，它們之間的比率非常的複雜且不規律，突然靈機一動，原來美國使用的長度單位是英制，一英吋約等於 2.54 公分。由於製造及丈量上會造成些微的誤差，為了方便討論，可將圓柱的直徑設為 1 單位，則這十四根圓柱木條的長度、圓柱的直徑、木盒內緣長、寬、高的長度應如下表所列。如此一來，我們可以把看似雜亂無章的數據，經過轉換變成有規律的資料，這就像是數學上有很多的變換，可把複雜的問題變簡單。



圓 柱 木 條										木盒(長、寬、高)		
英吋	5	4.5	3	2.75	2.25	2	1.75	1.5	1	6	1.5	1
單位	10	9	6	5.5	4.5	4	3.5	3	2	12	3	2
木條數	1	1	3	2	1	2	1	2	1			

三、分析

原問題要求將這十四根圓柱木條全部放置入木盒內，由於圓木與圓木之間必須有些縫隙，如右圖中空白部份都會浪費掉。所以我們只能將圓木視為底是 1×1 單位的長方體。首先檢驗圓柱木條所佔的體積與木盒的體



積，以初步了解置入的可能性。

$$1 \times 1 \times (10 + 9 + 6 \times 3 + 5.5 \times 2 + 4.5 + 4 \times 2 + 3.5 + 3 \times 2 + 2) = 12 \times 3 \times 2 = 72$$

體積正好相等，表示問題可能有解。要讓這些圓柱木條全部放置入木盒內即是設法用這些木柱的長度拼組 6 個 12 單位的長度，於是我們做以下的分析。注意到圓木中有幾根長度是比較特殊的——有兩根長為 5.5 單位；有一根長為 4.5 單位；另有一根長為 3.5 單位。為了湊出 6 條 12 單位，這些非整數單位的圓木必須兩兩合併在一起。它們只有以下幾種可能的合併方式：

$$5.5 + 5.5 = 11 ; 5.5 + 4.5 = 10 ; 5.5 + 3.5 = 9 ; 4.5 + 3.5 = 8 \quad \circ$$

A. 第一種情況： $5.5 + 5.5 = 11 ; 4.5 + 3.5 = 8 \quad \circ$

由於沒有圓木長為 1 單位，無法使 11 單位長湊成 12 單位，因此這種情況不可能有解。

B. 第二種情況： $5.5 + 4.5 = 10 ; 5.5 + 3.5 = 9 \quad \circ$

只能加一根 2 單位的圓木使 10 單位長湊成 12 單位；加一根 3 單位的圓木使 9 單位長湊成 12 單位。剩下的八根圓木長度分別為 10 單位、9 單位、6 單位(3 根)、4 單位(2 根)、3 單位。由於剩下的圓木已經沒有長為 2 單位，無法使 10 單位長的圓木湊成 12 單位，因此這種情況也不可能有解。

以上兩種情況都不可能有解，這個玩具根本沒有解答！但是為什麼木盒背面說明此遊戲確有 2 組解呢？是不是騙人的呢？如果不是騙人的，那是我們那裡弄錯了呢？再仔細看看木盒上的遊戲目標：“Can you get all 14 logs into the box and close the lid?”（您能將這 14 根圓木全部置入木盒中並合上蓋子嗎？）



它只要求我們將這 14 根圓木全部置入木盒中並合上蓋子，並沒有……

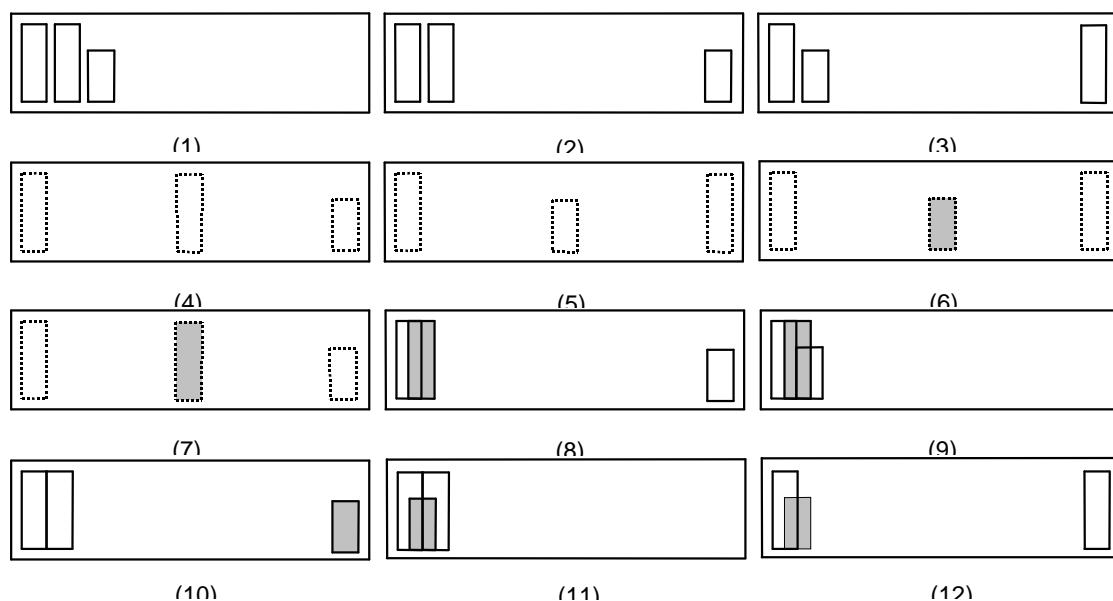
四、問題解決

忽然靈光一閃，誰說圓木一定要全部以橫的方向放入木盒中呢(假設木盒較長的部份以左右方向擺在面前)？何不試著讓 2 單位、3 單位長的圓木直放，甚至將 2 單位的圓木立放呢？

若我們把圓木擺置方式全部左右對調或全部上下層對調的情形視為相同。因此，我們依這三根圓木可放置的位置，分成幾種情況來討論：

A. 三根圓木全部直放

我們沒有長為 1 單位的圓木，因此這三根圓木全部直放排列時不可以有留下 1×1 單位空隙的情形，於是它們有下列圖示幾種放置方式：



※註：塗有陰影的圓木表示放置在上層，虛線的圓木表示其位置可以在此層左右移動。

圖(1)的情形，剩下的十一根圓木長度分別為 10 單位、9 單位、6 單位(3 根)、5.5 單位(2 根)、4.5 單位、4 單位(2 根)、3.5 單位。我們要用這些圓木拼湊成 10 單位、9 單位(二個)、12 單位(三個)。10 單位、9 單位可各用一根圓木置入，剩下的圓木要拼湊成 9 單位、12 單位(三個)。爲了要拼湊 9 單位只能用 5.5 單位 + 3.5 單位這兩根，於是 5.5 單位、4.5 單位這兩根必須合併在一起。但是剩下的圓木已經沒有長為 2 單位，無法使 10 單位長湊成 12 單位，因此這種情況不可能有解。

圖(2)、圖(3)的情形與圖(1)的情形相同，要用剩下的十一根圓木拼湊成 10 單位、9 單位(二個)、12 單位(三個)，也是不可能有解。

如圖(4)、圖(5)、圖(6)、圖(7)的情形，如果任意有一根 3 單位或 2 單位長的圓木直放且不接觸木盒的左右兩壁，則此根圓木可能將木盒此層的空間分割為 $10 + 1$; $9 + 2$; $8 + 3$; $7 + 4$; $6 + 5$ 單位等情形。每一種長度至少有兩組，但是剩下的十一根圓木沒有 1 單位的圓木，無法填滿 $10 + 1$ 單位的空間。剩下的十一根圓木沒有二根 2 單位的圓木，無法填滿 $9 + 2$ 單位的空間。對於 $8 + 3$ 單位、 $7 + 4$ 單位、 $6 + 5$ 單位的情形，剩下的十一根圓木已經沒有多餘長為 3 單位的圓木，使 9 單位長的圓木湊成 12 單位。因此這些情況都不可能有解。

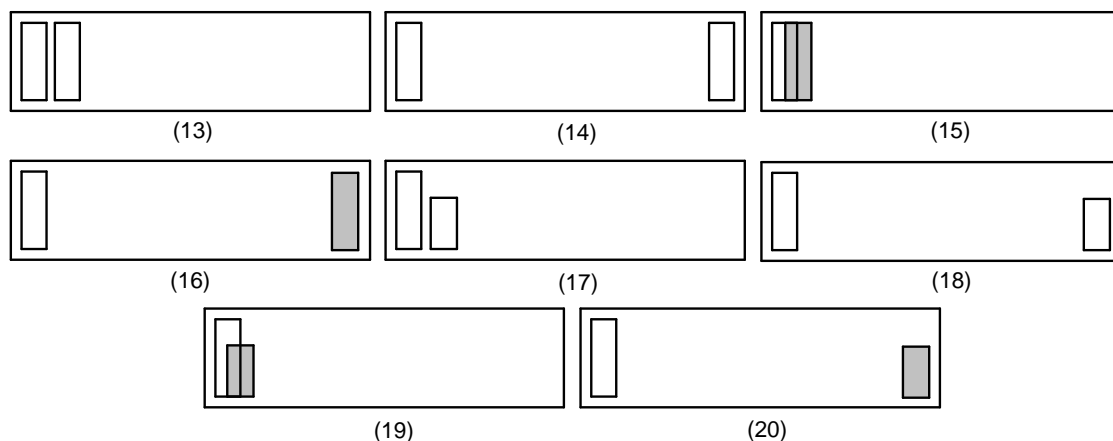
如果任意有一根 3 單位或 2 單位長的圓木直放且不接觸木盒的左右兩壁，無論其他的十三根圓木如何放置，也是都不可能有解。理由與上述相同。所以我們以後都可不必再討論圓木直放且不接觸木盒的左右兩壁的情況。

圖(8)、圖(9)的情形，我們都要用剩下的十一根圓木拼湊成 10 單位(二個)、11 單位(四個)。圖(10)、圖(11)、圖(12)的情形，我們都要用剩下的十一根圓木拼湊成 10 單位(三個)、11 單位

(二個)、12 單位。都是因為我們沒有長為 3 單位、2 單位、1 單位的圓木，使 9 單位長的圓木湊成 12 單位、11 單位或 10 單位，因此這些情況都不可能解。

B. 二根圓木直放

這又可以分成兩種情況——二根 3 單位圓木直放與一根 3 單位、一根 2 單位直放。它們放置的方式有下列圖示幾種情形：



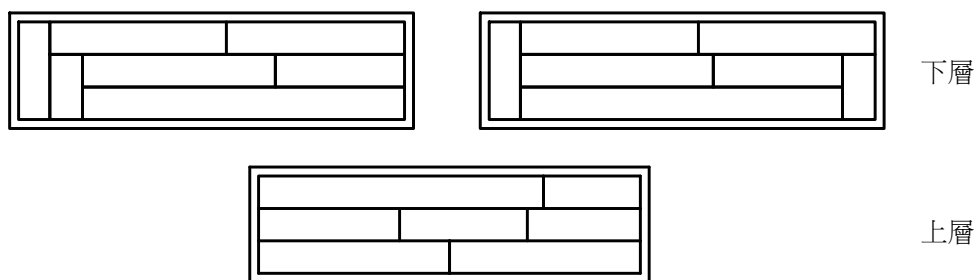
圖(13)的情形、圖(14)的情形，9 單位的圓木因已經沒有長為 3 單位的圓木，無法湊成 12 單位，也沒有長為 1 單位的圓木湊成 10 單位，因此這二種情況都不可能解。

圖(15)的情形、圖(16)的情形，10 單位的圓木沒有長為 1 單位的圓木湊成 11 單位，因此這二種情況也不可能解。

圖(17)的情形、圖(18)的情形，我們要用剩下的十二根圓木拼湊成 12 單位(三個)、11 單位、10 單位(二個)。我們可以這樣拼湊：

$$10 = 10 ; 6 + 4 = 10 ; 5.5 + 5.5 = 11 ; 9 + 3 = 12 ; 6 + 6 = 12 ; 4.5 + 4 + 3.5 = 12 .$$

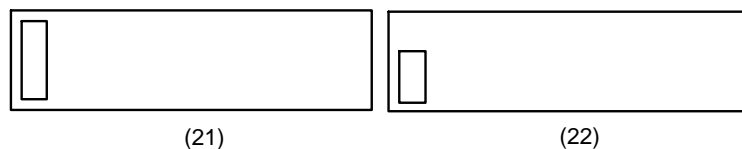
這二種情況都有解，因其拼湊結構基本相同，可視為同一組解。



圖(19)的情形、圖(20)的情形，10 單位的圓木因已經沒有長為 2 單位的圓木，無法湊成 12 單位，也沒有長為 1 單位的圓木湊成 11 單位，因此這二種情況不可能解。

C. 一根圓木直放

這又可以分成兩種情況——一根 3 單位或一根 2 單位直放。根據 A 項中對圖(4)~(7)的分析，我們可以排除圓木直放且不接觸木盒的左右兩壁的情形，因此它們放置的方式只有下列圖示情形：



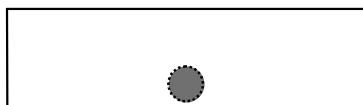
(21)

(22)

圖(21)的情形，要用剩下的十三根圓木拼湊成 12 單位(三個)、 11 單位(三個)。11 單位的長度只能這樣拼湊： $9 + 2 = 11$ ； $5.5 + 5.5 = 11$ ； $4.5 + 3.5 + 3 = 11$ 或 $4 + 4 + 3 = 11$ 。剩下的 10 單位圓木再也無法拼湊成 12 單位，因此這種情況不可能有解。

圖(22)的情形，要用剩下的十三根圓木拼湊成 12 單位(四個)、 11 單位(二個)。此時 10 單位圓木無法拼湊成 11 單位或 12 單位，因此這種情況也不可能有不解。

D. 一根 2 單位長圓木垂直豎放且不接觸木盒的左右兩壁

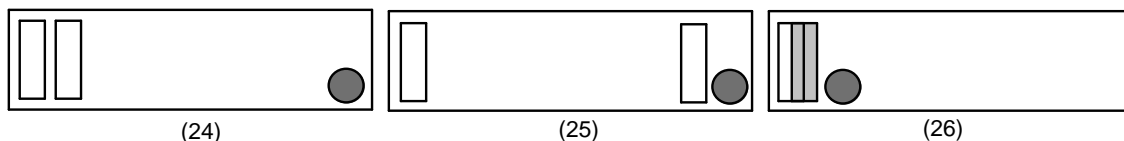


(23)

圖(23)的情形，則此根圓木左右側的空間可能為 $10 + 1$ ； $9 + 2$ ； $8 + 3$ ； $7 + 4$ ； $6 + 5$ 單位等情形。每一種長度至少要兩組，但是剩下的十一根圓木沒有 1 單位的圓木，無法填滿 $10 + 1$ 單位的空間。剩下的十一根圓木沒有二根 2 單位的圓木，也無法填滿 $9 + 2$ 單位的空間。雖然剩下的十一根圓木可能有二根 3 單位的圓木，可以填滿 $8 + 3$ 單位的空間，但是已經沒有多餘長為 3 單位的圓木，使 9 單位長的圓木湊成 12 單位。雖然剩下的十一根圓木可能有二根 4 單位的圓木，但是接著無法湊成兩組 7 單位的長度來填滿 $7 + 4$ 單位的空間。剩下的十一根圓木無法湊成一個 5 單位，無法填滿 $6 + 5$ 單位的空間。因此對於有一根 2 單位長圓木垂直豎放且不接觸木盒的左右兩壁的情況，無論放在什麼位置，它們都不可能有解。

E. 二根 3 單位長圓木直放、一根 2 單位長圓木垂直豎放

排除 2 單位長圓木垂直豎放且不接觸木盒的左右兩壁的情形，它們放置的方式有下列圖示幾種情形：



(24)

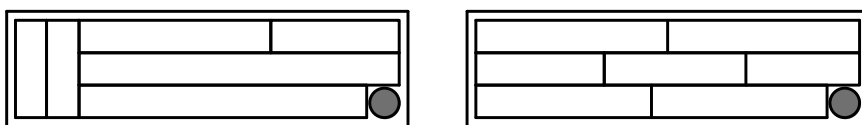
(25)

(26)

圖(24)的情形，要用剩下的十一根圓木拼湊成 12 單位(二個)、 11 單位、10 單位(二個)、 9 單位。我們可以這樣拼湊：

$$9 = 9 ; 10 = 10 ; 6 + 4 = 10 ; 5.5 + 5.5 = 11 ; 6 + 6 = 12 ; 4.5 + 4 + 3.5 = 12 .$$

這種情況又是一組解。



下層

上層

圖(25)的情形，會造成一個 1×2 的空隙沒有圓木來填滿它，因此不可能有解。

圖(26)的情形， 9 單位的圓木因已經沒有長為 3 單位的圓木，無法湊成 12 單位，沒有長

為 2 單位的圓木湊成 11 單位，也沒有長為 1 單位的圓木湊成 10 單位，因此這種情況也不可能有解。

F. 一根 3 單位長圓木直放、一根 2 單位長圓木垂直豎放

排除 2 單位長圓木垂直豎放且不接觸木盒的左右兩壁的情形，它們放置的方式只有下列圖示一種情形：



(27)

圖(27)的情形，要用剩下的十二根圓木拼湊成 12 單位(二個)、11 單位(三個)、10 單位(二個)。11 單位的長度只能這樣拼湊： $5.5 + 5.5 = 11$ ； $4.5 + 3.5 + 3 = 11$ 或 $4 + 4 + 3 = 11$ 。剩下的七根圓木再也無法拼湊成一個 11 單位，因此這種情況也不可能有解。

G. 只有一根 2 單位長圓木垂直豎放



(28)

圖(28)的情形，要用剩下的十三根圓木拼湊成 12 單位(四個)、11 單位(二個)。此時 10 單位圓木無法拼湊成 11 單位或 12 單位，因此這種情況也不可能有解。

因為我們已經把圓木所有可能擺置的情況都窮盡地討論完全，因此圓積木遊戲確實恰有二組解。

五、研究心得與感想

這個圓積木遊戲讓我們想起出國旅行時，在途中若從放的整整齊齊、裝的滿滿的行李中抽出物品，我們幾乎很難再把它順利地放回行李中。

這個圓積木遊戲設計的太巧妙了！它故意把木柱設計成圓的，使我們的思維在不知不覺中受到牽制，主觀地認為圓木必須橫放，而經我們分析圓木橫放不可能有解的；這也是為什麼我們當初屢試不解的主因。

我們經常在解題時作繭自縛，把題目沒有要求的條件想為當然爾，如此對解題造成莫大的障礙。這個圓積木遊戲給我們一個非常深刻的教訓與啟示。

六、參考文獻

- 1、孫君儀、葉均承、陳天任（民 88）：土撥鼠遊戲研究，中央研究院數學傳播，第 23 卷第四期，p.32-38。
- 2、葉均承（民 89）：Apex 遊戲的推廣，中央研究院數學傳播，第 24 卷第三期，p.66-83。
- 3、葉洹君（民 91）：遊戲的秘密，將發表於中央研究院數學傳播。
- 4、葉洹君、顏德琮、連信欽（民 90）：所羅門寶藏，科學教育月刊(本期)