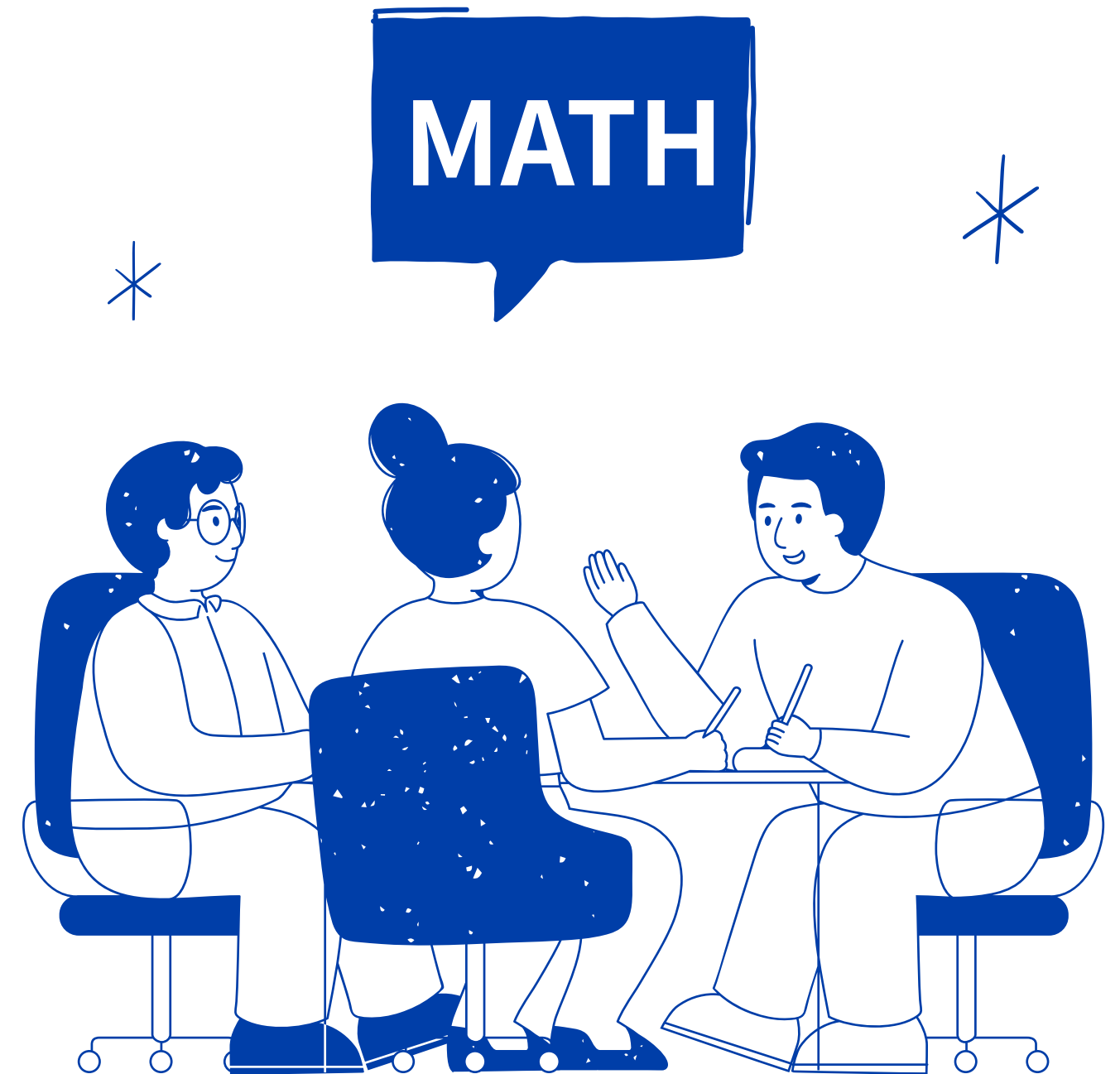


AoPS
Greece
JBMO
TST



 2019年

 第五組



第五組 組員

4 1 1 2 3 1 2 0 3

4 1 1 2 3 1 2 1 0

4 1 1 2 3 1 2 1 7

4 1 1 2 3 1 2 3 4

4 1 1 1 3 1 2 3 0

應數二

應數二

應數二

應數二

應數三

王琬儀

黃柏崴

李彥樞

呂逕穠

鍾佳恩



目錄

第一題

- 題目、翻譯、類型分析。

第二題

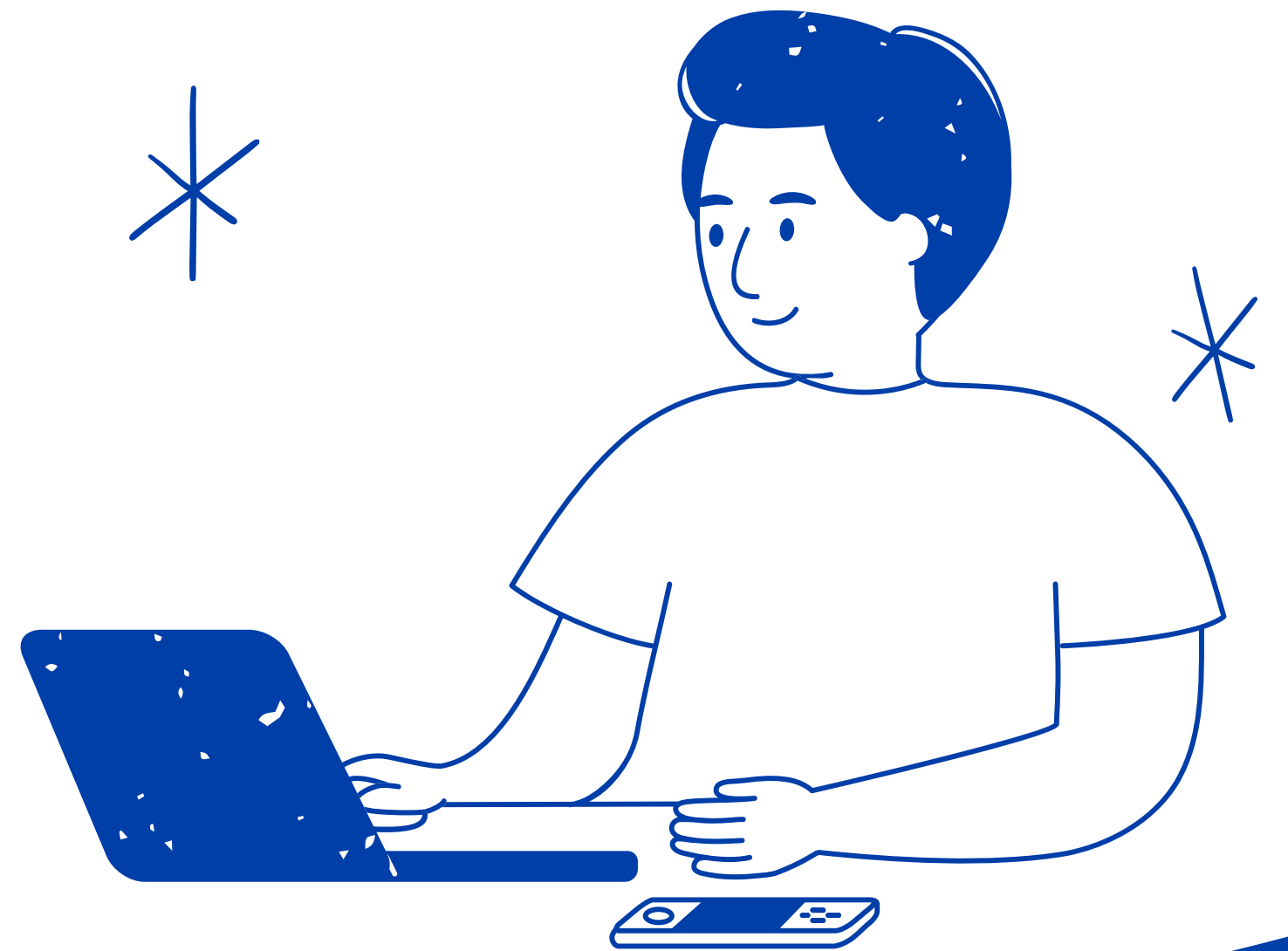
- 題目、翻譯、類型分析。

第三題

- 題目、翻譯、類型分析。

第四題

- 題目、翻譯、類型分析、解答、相似題。




第一題

數學領域：幾何



題目&翻譯

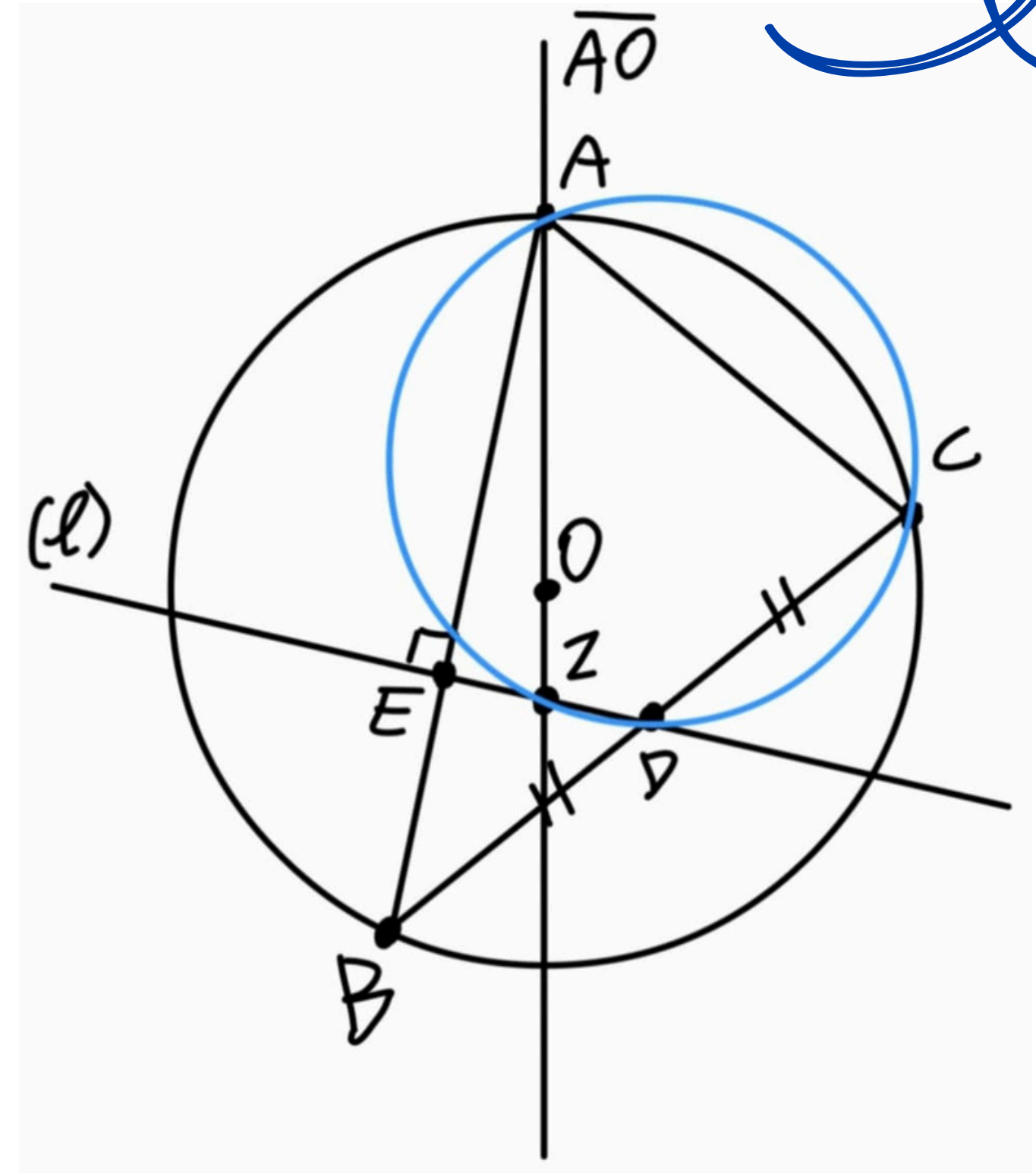
Consider an acute triangle ABC with $AB > AC$ inscribed in a circle of center O . From the midpoint D of side BC we draw line (ℓ) perpendicular to side AB that intersects it at point E . If line AO intersects line (ℓ) at point Z , prove that points A, Z, D, C are concyclic.





有一個銳角三角形 ABC 內接於一個圓心為 O 的圓，其中 $AB > AC$ 。設點 D 為邊 BC 的中點，從點 D 作一條垂直於邊 AB 的直線 (ℓ) ，交 AB 於點 E 。若線段 AO 與直線 (ℓ) 交於點 Z ，請證明點 A, Z, D, C 共圓（四點在同一個圓上）。

圖示

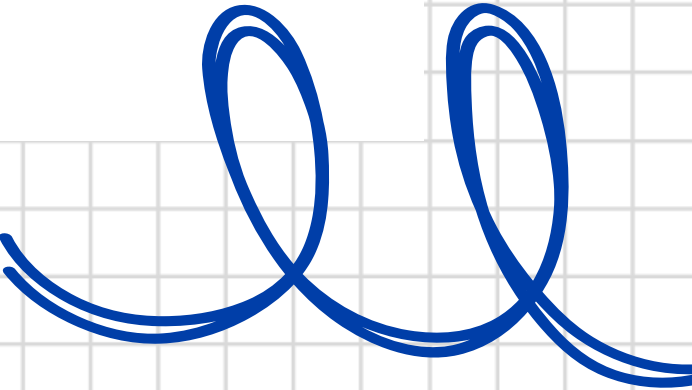
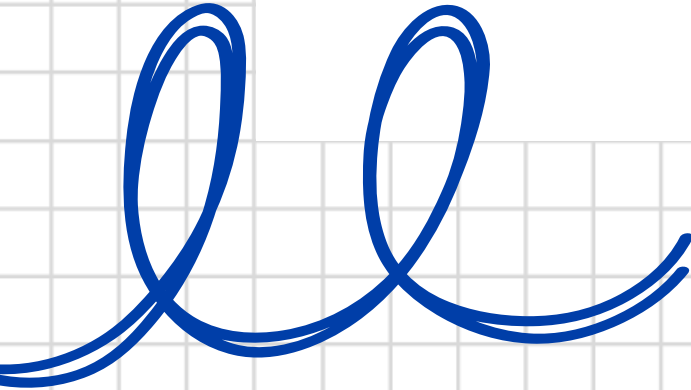
有一個銳角三角形 ABC 內接於一個圓心為 O 的圓，其中 $AB > AC$ 。設點 D 為邊 BC 的中點，從點 D 作一條垂直於邊 AB 的直線 (ℓ) ，交 AB 於點 E 。若線段 AO 與直線 (ℓ) 交於點 Z ，請證明點 A, Z, D, C 共圓（四點在同一個圓上）。

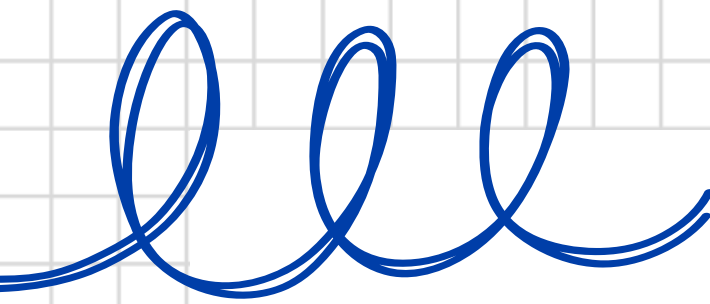




第二題

數學領域：數論





題目&翻譯

Find all pairs of positive integers (x,n) that are solutions of the equation .

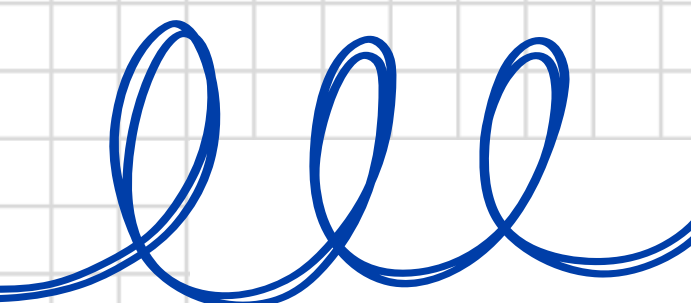
$$3 \cdot 2^x + 4 = n^2$$

找出所有滿足以下方程的正整數對 (x,n) 解：

$$3 \cdot 2^x + 4 = n^2$$

第三題

數學領域：代數



題目&翻譯

Let a, b, c be positive real numbers . Prove that

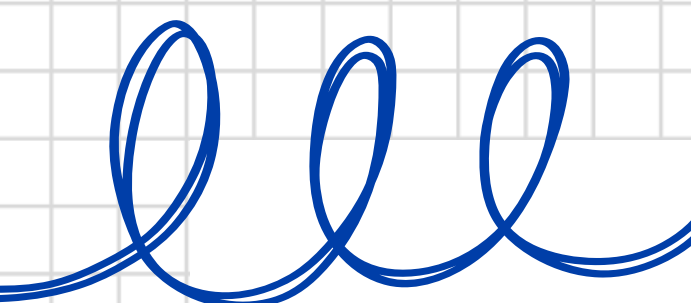
$$\frac{1}{ab(b+1)(c+1)} + \frac{1}{bc(a+1)(c+1)} + \frac{1}{ca(b+1)(a+1)} \geq \frac{3}{(1+abc)^2}$$

a, b, c 為正實數，請證明：

$$\frac{1}{ab(b+1)(c+1)} + \frac{1}{bc(a+1)(c+1)} + \frac{1}{ca(b+1)(a+1)} \geq \frac{3}{(1+abc)^2}$$

第四題

數學領域：組合



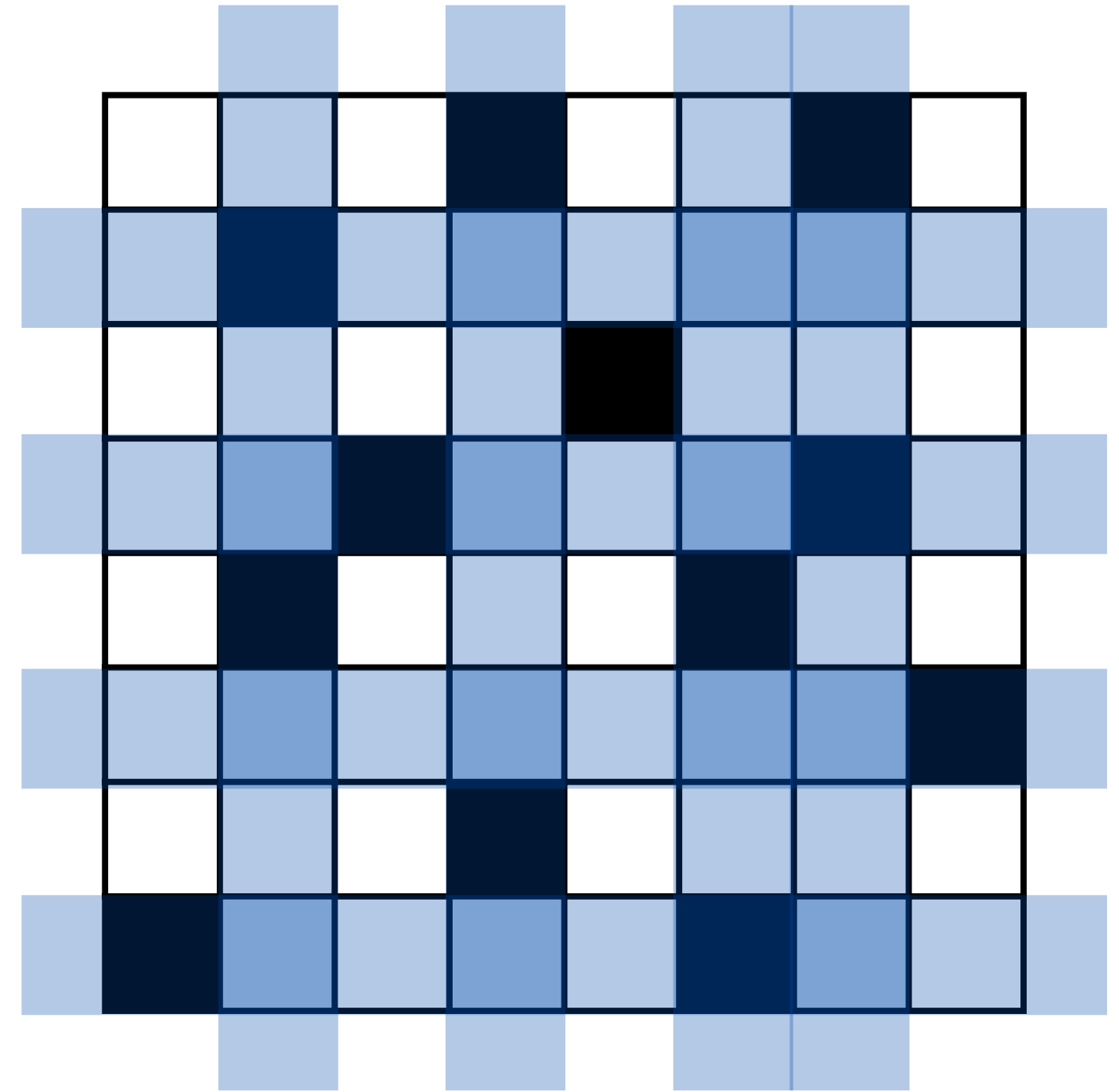
題目&翻譯

Consider a 8×8 chessboard where all 64 unit squares are at the start white. Prove that, if any 12 of the 64 unit square get painted black, then we can find 4 lines and 4 rows that have all these 12 unit squares.

考慮一個 8×8 的棋盤，一開始所有 64 個小格子都是白色的。
試證明：若任意 12 個格子被塗黑，則一定可以找到 4 行與 4 列，使得這 12 個黑格子都位於這 4 行與 4 列中。

解答

以直行來看，有8直行和12個黑格，根據鴿籠原理可以發現，至少有4個直行會有2個或2個以上的黑格，根據題目所說要4行4列涵蓋所有黑格，那我4行所選取的行數，即為有2個或2個以上黑格所在行數，由此可知，我選取的行數所涵蓋的範圍至少是 $4 \times 2 = 8$ 格黑格，剩下最多4格黑格，用未使用的4列去涵蓋即可。



鴿籠原理

鴿子

- 12 個黑格。

籠子

- 8 行。

結論

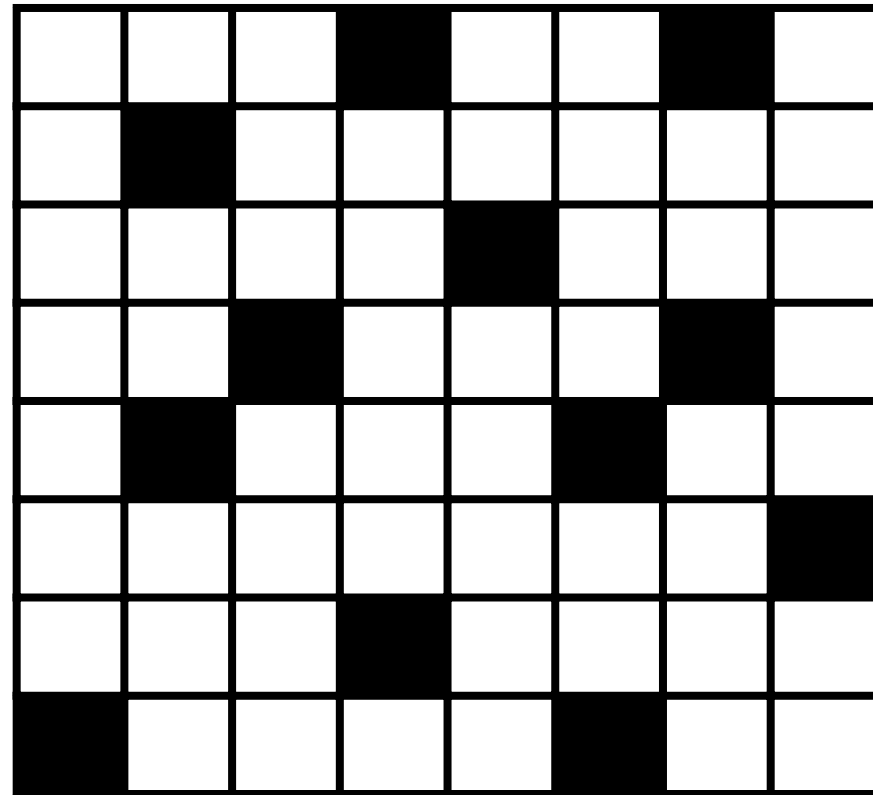
- 有4個直行會包含 8 個或 8 個以上的黑格。



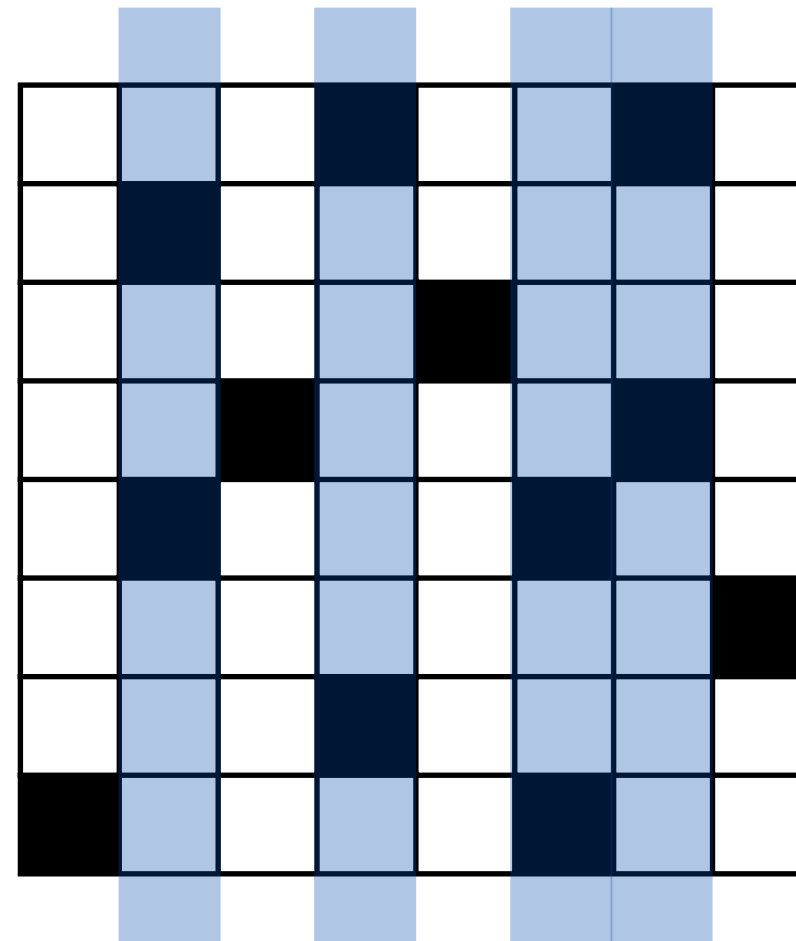


解答

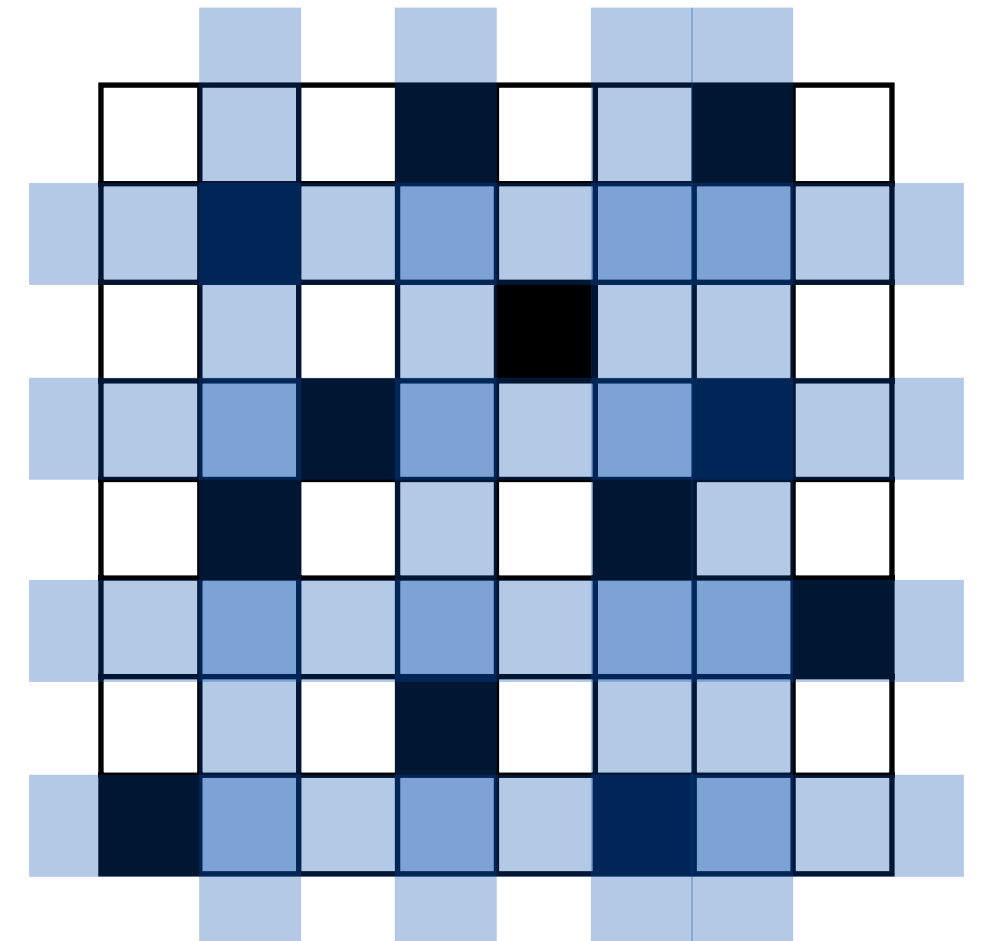
任選12個黑色的格子。



先選有2個或2個以上的
黑格所在的行。

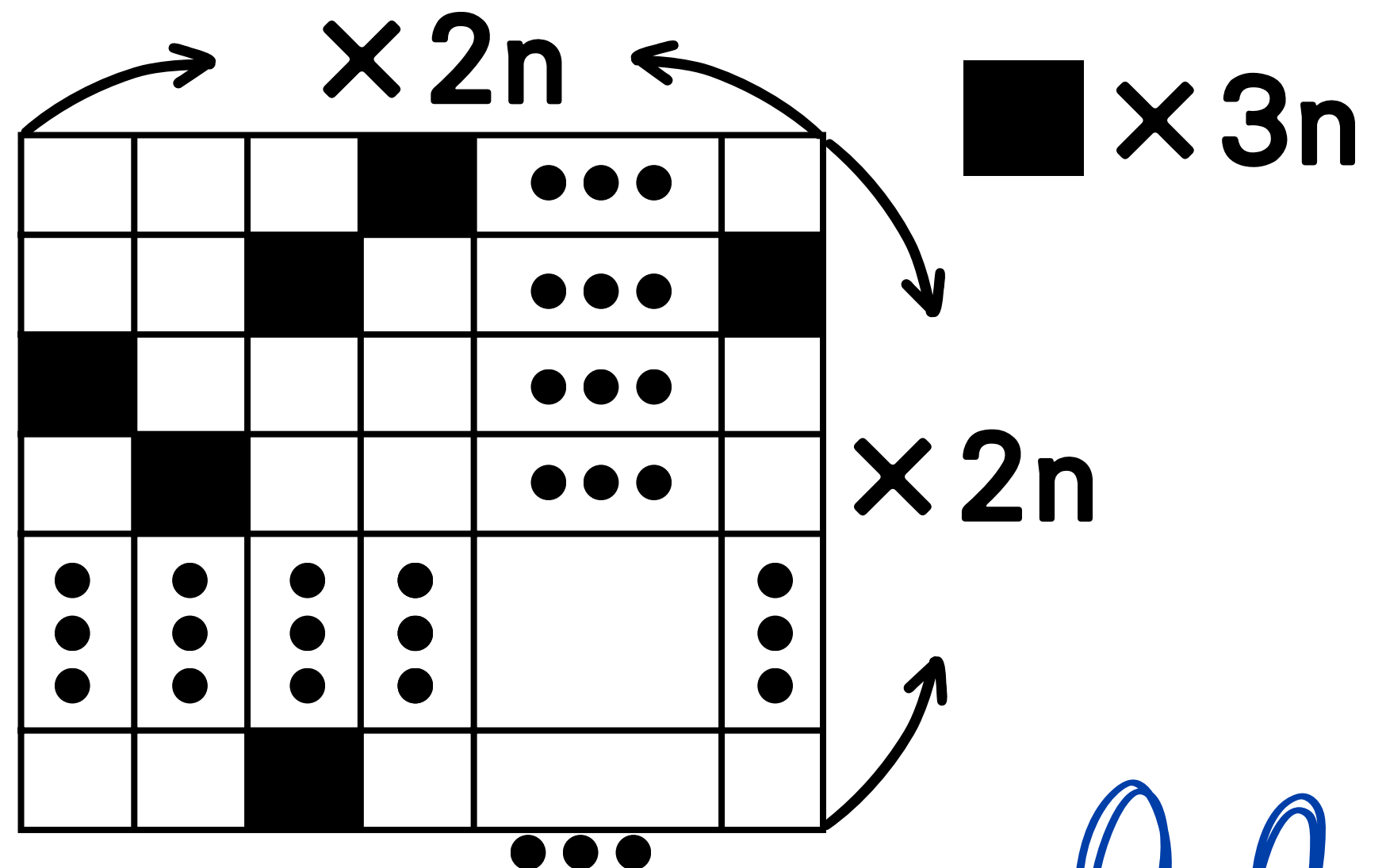


剩下最多4格黑格，用未
使用的4列去覆蓋。



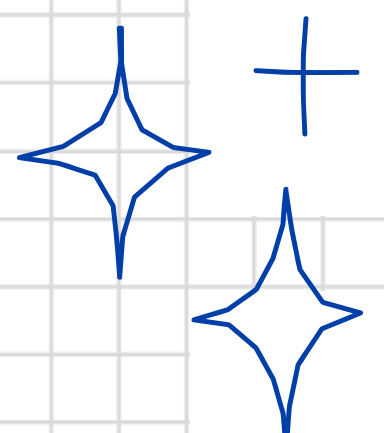
相似題1 (推廣至 n 次)

考慮一個 $2n \times 2n$ 的棋盤，最初所有 $(2n)^2$ 個小格子都是白色。試證明：若任意 $3n$ 個格子被塗黑，則一定可以找到 n 行與 n 列，使得所有這 $3n$ 個黑格子都位於這些行與列中。





解答



以直行來看，有 $2n$ 直行和 $3n$ 個黑格，根據鴿籠原理可以發現，至 n 少有個直行會有2個或2個以上的黑格，根據題目所說要 n 行 n 列涵蓋所有黑格，那我 n 行所選取的行數，即為有2個或2個以上黑格所在行數，由此可知，我所涵蓋範圍至少是 $n \times 2 = 2n$ 格黑格，剩下最多 n 格黑格，用未使用的 n 列去涵蓋即可。

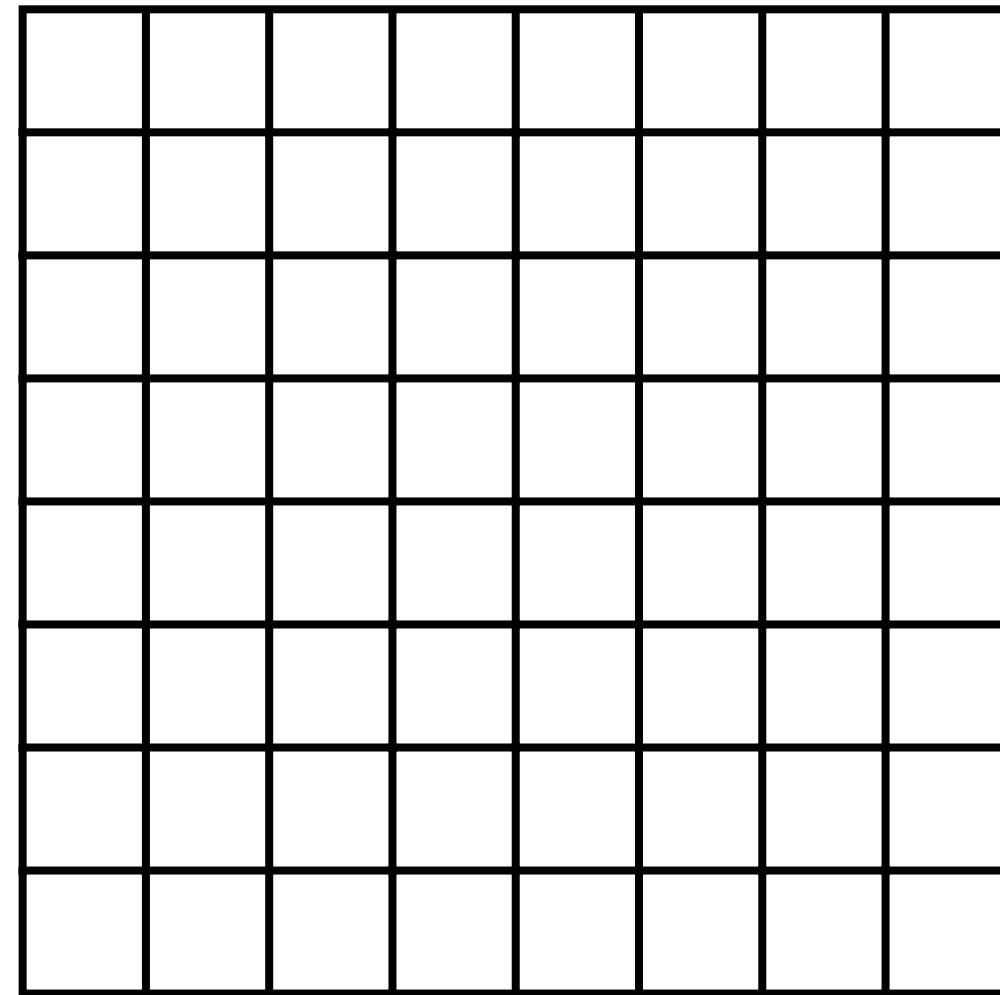


[相似題](#)



相似題2（多一格）

在一個 8×8 的棋盤，一開始所有 64 個小格子都是白色的。
能否選出 13 個黑色的格子，使得無論選哪 4 行與 4 列，都無法完全覆蓋這 17 個黑格。
若可以，請建構一個這樣的 17 個黑格；若不行，請證明為什麼。



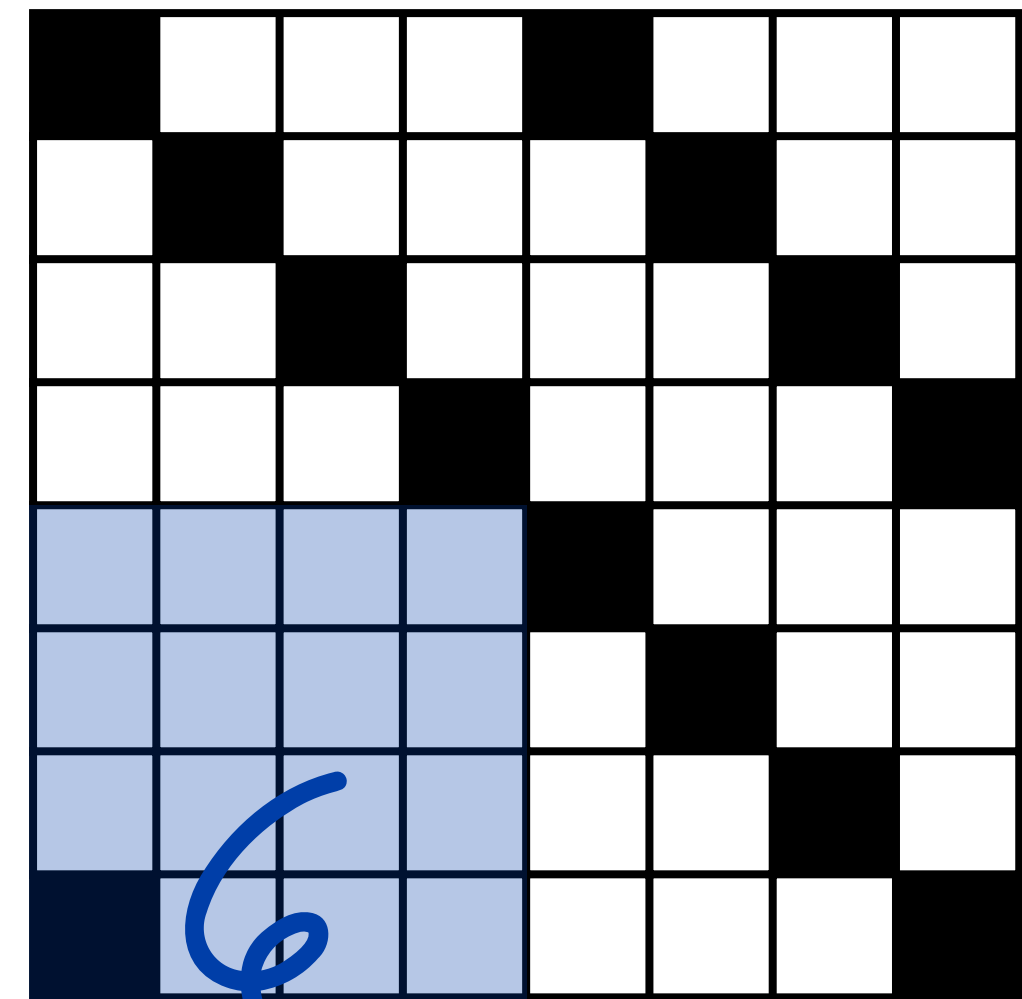
解答：可以

選黑格的策略

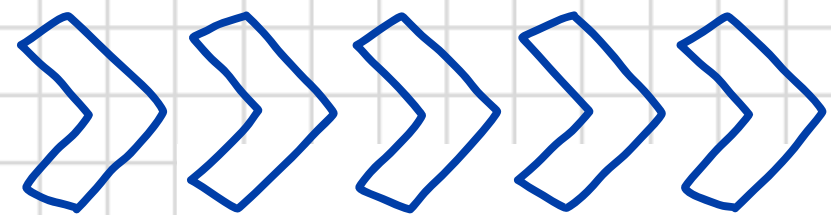
使每一行與每一列的黑格都不超過 2 個，這樣先選 4 行，最多會選到 8 格，還有剩下不同列的 5 格，無法用剩餘的四列覆蓋。

相似題

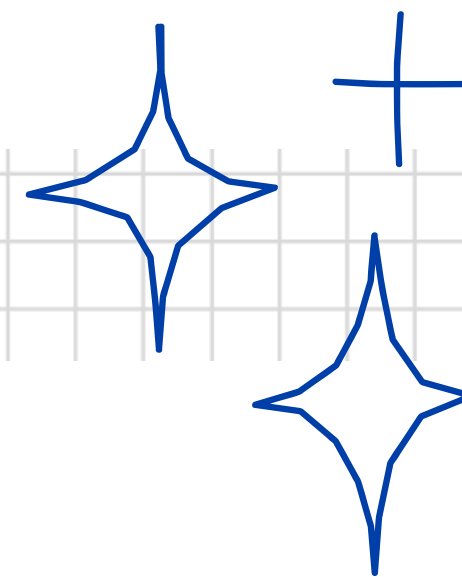
(有很多種解)



(可以選的範圍)



以上是我们报告



谢谢大家 😊

