

# 第五組

## 蒙提霍爾問題

組員：卓彥彤 王承禹 邱吉爾 顏錫達 黃川睿



# 大綱

N門

3門

4門

5門

.

.

.

N門

N門開M門

4門開2門

5門開2門

6門開3門

.

.

.

N門開M門

N門A車開M門

4門2車開1門

5門2車開2門

6門3車開2門

.

.

.

N門A車開M門

# 題目

- 假設你正在參加一個遊戲節目，你被要求在三扇門中選擇一扇：其中一扇後面有一輛車；其餘兩扇後面則是山羊。你選擇了一道門，假設是一號門，然後知道門後面有什麼的主持人，開啟了另一扇後面有山羊的門，假設是三號門。他然後問你：「你想選擇二號門嗎？」那麼你會怎麼選擇？

# 3門

車

羊

羊

換：羊

不換：車

換：車

不換：羊

換：車

不換：羊

換門的中獎機率： $\frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$

不換門中獎機率： $\frac{1}{3} \times (1 + 0 + 0) = \frac{1}{3}$



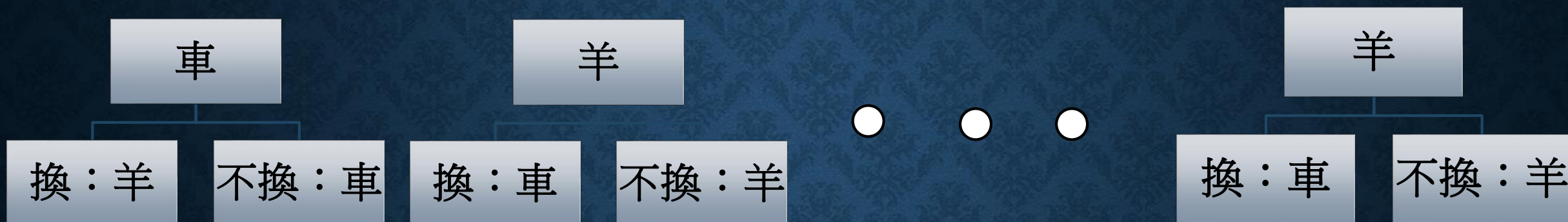
# 4門



換門的中獎機率： $\frac{1}{4} \times \left(0 + 3 \times \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$

不換門中獎機率： $\frac{1}{4} \times (1 + 0 + 0 + 0) = \frac{1}{4}$

# 5門 ~ N門



換門後中獎機率： $\frac{1}{N} \left[ 0 + (N - 1) \times \frac{1}{N-2} \right]$

不換門中獎機率： $\frac{1}{N} \times (1 + \dots + 0) = \frac{1}{N}$



# 4門開2門



$$\text{換門後中獎機率} : \frac{1}{4} (0 + 1 + 1 + 1) = \frac{3}{4}$$
$$\text{不換門中獎機率} : \frac{1}{4}$$

# 5門開2門



$$\text{換門後中獎機率} : \frac{1}{5} \left( 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{5}$$

$$\text{不換門中獎機率} : \frac{1}{5}$$



# 6門開2門



$$\text{換門後中獎機率} : \frac{1}{6} \left( 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{18}$$

$$\text{不換門中獎機率} : \frac{1}{6}$$

# N門開M門



$$\text{換門後中獎機率} : \frac{1}{N} \left[ 0 + (N - 1) \times \frac{1}{(N - M - 1)} \right] = \frac{1}{N} \frac{N - 1}{N - M - 1}$$

$$\text{不換門中獎機率} : \frac{1}{N}$$



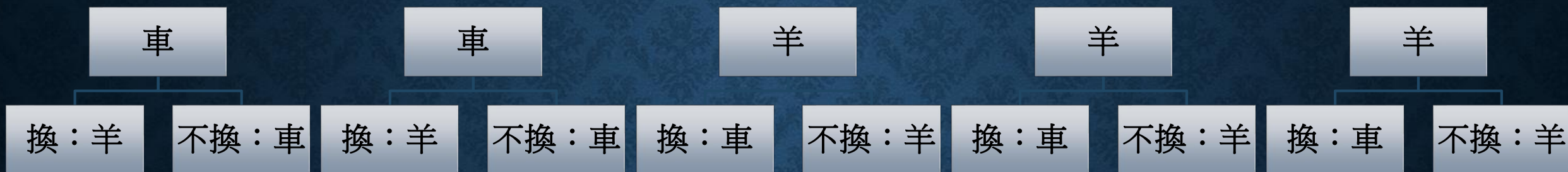
## 4門2車開1門



換門後中獎機率： $\frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 \right) = \frac{3}{4}$

不換門中獎機率： $\frac{1}{2}$

# 5門2車開2門

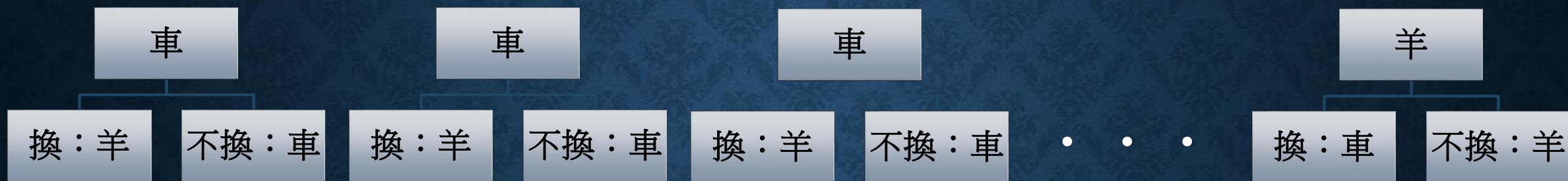


$$\text{換門後中獎機率} : \frac{1}{5} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + 1 \right) = \frac{4}{5}$$

$$\text{不換門中獎機率} : \frac{2}{5}$$



# 6門3車開2門



$$\text{換門後中獎機率} : \frac{1}{6} \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 1 + 1 + 1 \right) = \frac{5}{6}$$

$$\text{不換門中獎機率} : \frac{1}{2}$$

# N門A車開M門



$$\text{換門後中獎機率} : \frac{1}{N} \left[ \frac{A-1}{(N-M-1)} \times A + \frac{A}{(N-M-1)} \times (N-1) \right] = \frac{A}{N} \frac{N-1}{N-M-1}$$

$$\text{不換門中獎機率} : \frac{A}{N}$$



## 結論

由前兩式相減得： $\frac{1}{N} \frac{AM}{N-M-1}$ ，又可由條件 $N - A - 1 \geq M$ 得 $N - M - 1 \geq A$ ，所以 $\frac{1}{N} \left( \frac{A(N-1)}{N-M-1} \right)$ 恆正，因此可知換門中獎機率恆大於不換門中獎機率

## 參考資料

- 維基百科：  
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%92%99%E6%8F%90%E9%9C%8D%E7%88%BE%E5%95%8F%E9%A1%8C>
- 聰明反被聰明誤—絕妙又惱人的蒙提霍爾問題：  
<https://www.shs.edu.tw/works/essay/2017/11/2017111321370570.pdf>
- 換與不換的兩難—蒙提霍爾問題延伸探討：  
<https://www.shs.edu.tw/works/essay/2013/11/2013111418352920.pdf>