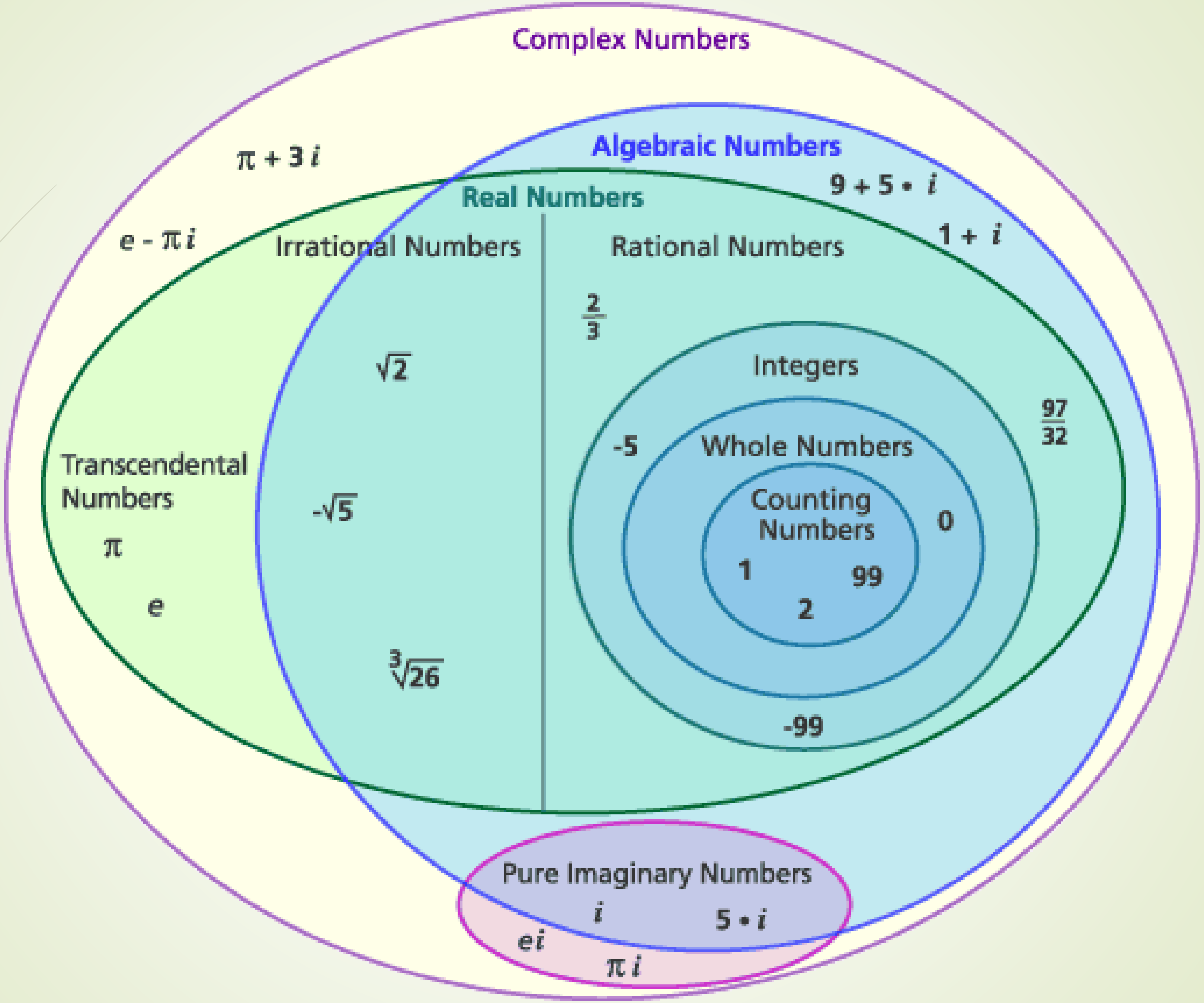
第四組報告
Transcendental Number
超越數

組員:410931130 李簡奕辰
410731151 謝少然
410831227 張淯昇
410831149 楊弘暐
410631244 沈致均

目錄

前言

- 某次意外參加某校單車節，並參加該校數學系介紹，當初學習內容是數學歸納法與超越數，也介紹很表面的內容，讓高三生要填寫志願時，對數學系有進一步認識，知道這科系都在做些什麼事情。也因為介紹了很表面，令我對它 產生了好奇，想一探究竟，剛好藉這次機會多了解超越數，於是將這次小組小論文主題定為超越數。
- 從古希臘幾何三大問題，方圓問題、倍立方問題、三等分角問題經過時間推進，說明數學家如何將幾何問題轉化為代數問題並引入超越數，這想法去證明，接著會說明關於著名 Liouville‘s theorem以及 Liouville's number。
- 為什麼n次方程有n個根，什麼是代數數什麼是超越數?並講述為何π和 e 都是超越數，以及代數基本定理證明



Complex Numbers
π + 3 i
e - π i
Algebraic Numbers
9 + 5 • i
1 + i
Real Numbers
Irrational Numbers
Rational Numbers
2/3
√2
-√5
∛26
Transcendental Numbers
π
e
Integers
-5
Whole Numbers
Counting Numbers
0
1
99
2
-99
97/32
Pure Imaginary Numbers
i
5 • i
ei
π i

無理數Irrational Numbers

假設$\sqrt{2}$是有理數並令$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$且(p,q)=1

兩邊平方，得到$2=\frac{p^2}{q^2}$

將此式改寫成$2q^2 = p^2$，意味p^2為偶數

$\because$ *平方能保持奇偶性*

$\therefore$ p只能為偶數

$\therefore p^2$為偶數

設p=$2p_1$其中p_1為整數

代入$q^2 = 2{p_1}^2$

同理得知q也是偶數

這與(p,q)=1(∋∈)

$\therefore$ $\sqrt{2}$是有理數的假設不成立，即無理數

代數數 Algebraic Numbers

代數數是代數與數論中的重要概念，指任何整係數多項式的複根。

代數數可以定義為「有理係數多項式的複根」或「整係數多項式的複根」

設 z 為複數。

如果存在正整數n，以及n+1個有理數$q_0, q_1 \ldots q_n$，並且$q_n \neq 0$，
使得：

$$q_n z^n + \cdots + q_1 z + q_0 = 0$$

則稱 z 是一個代數數。

代數數不一定是實數，實數也不一定是代數數。
代數數的集合是可數的。

$$\text{實數} = \text{有理數} \bigcup \text{無理數}$$

$$\text{複數} = \text{代數數} \bigcup \text{超越數}$$

$$\text{無理數} = \text{無理數中的代數數} \bigcup \text{實數中的超越數}$$

$$\text{實數的代數數} = \text{有理數} \bigcup \text{無理數中的代數數}$$

思路:要證明代數數是可數的，就是要證明整係數多項式是可數的
1.證明整係數多項式可數
2.證明代數數可數
因為是集合對應集合 所以是映射(mapping)

代數數可數

- 假設P_n為n次多項式($\deg(p)=n$) 集合，從P_n到正整數N的映射($f: P_n \to N$)

$$f(\, a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = 2^{f(a_0)}3^{f(a_1)}5^{f(a_2)} \dots p(n-1)^{f(a_n)}$$

其中p_n為正整數到質數的任一bijection(e.g. p(n)為第n個質數)

f_n是整數到非負整數的任一bijection (e.g.當$n \geq 0$，$f(\mathrm{n}) = 2n$，當$n < 0$，$f(n) = -2n-1$

∵質因數分解有唯一性，這個映射是bijection

∴ P_n可數

而所有整係數多項式集合

$$\because P = \bigcup_{n \in N} P_n \text{ 是可數個可數集的聯集}$$

∴ 依然可數

- 證明代數數可數

$\because$ n次多項式最多有n個根，假設R_p為多項式p的根(代數基本定理，後面會補充)

$\therefore R_p$有限

$$\text{代數數A} = \bigcup_{p \in P} R_p \text{為可數個有限集的聯集}$$

因此，依然可數

利用若p則q，非q則非p。我們知道非代數數(超越數)為不可數

超越數Transcendental Number

- **超越數**（transcendental number）是指任何一個不是代數數的無理數。只要它不是任何一個有理係數代數方程的根，它即是超越數。最著名的超越數是e以及π
- 幾乎所有的實數和複數都是超越數，這是因為代數數的集合是可數集，而實數和複數的集合是不可數集。
- 超越數是代數數的相反，即說若x是一個超越數，那對任何整數$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$都滿足 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \neq 0$，where $a_n \neq 0$
- 第一個確認為超越數的數，是於1844年劉維爾發現
- 劉維爾數:$\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$ = 0.110001000000000000000001000⋯

基本性質-超越數一定是無理數

如果$x=\frac{c}{d}(c,d\in\mathbb{Z},d>0)$

取夠大的n使得$2^{n-1}>d$

當$\frac{c}{d}\neq\frac{p}{q}$

則$\left|x-\frac{p}{q}\right|=|\frac{c}{d}-\frac{p}{q}|=|\frac{cq-dp}{dq}|\geq\frac{1}{dq}>\frac{1}{2^{n-1}q}\geq\frac{1}{q^n}(\ni\in)$

- 接著先證明劉維爾定理再證明代數基本定理

劉維爾數為複數的檢定法
Liouville's theorem complex analysis

- Every bounded , entire function $f(z)$ is constant

Suppose a and b are two points on the complex plane.

Take a as the center of the circle, r is the radius

Pack b inside the circle

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{z-b}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{z-a}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right) f(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{b-a}{(z-b)(z-a)} f(z)\,dz$$

$$f(b)-f(a)=\frac{b-a}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-b)(z-a)}dz$$

$$|z-a|=r$$

$$|z-b|=|z-a+a-b|\geq|z-a|-|a-b|=r-|a-b|\geq\frac{r}{2}$$

$$|f(b)-f(a)|=\frac{|b-a|}{|2\pi i|}|\oint\frac{f(z)}{(z-b)(z-a)}dz$$

$$\leq\frac{|b-a|}{2\pi}|\oint\frac{M}{(z-b)(z-a)}dz|, f\ is\ bounded$$

$$=\frac{|b-a|}{2\pi}\frac{M}{(\frac{r}{2})r}2\pi r\cdots(*)$$

- $f(b) - f(a) \leq (*) = \frac{2|b-a|M}{r}$
- Let $r \to \infty$ we get $f(b) - f(a) = 0$
- $=> f(z)\ is\ constant$

代數基本定理(Fundamental Theorem of Algebra)

- $A\ poly.equ'n\ \mathbb{P}(z) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0\ where\ a_k \in \mathbb{C}\ and\ k = 0,1,\ldots,n\ ,\ a_0 \neq 0, n \geq 1\ has\ a\ sol'n\ in\ \mathbb{C}$
- In other words , $\mathbb{C}$ is algebraically closed.

<Proof by contradiction>

Suppose that $\mathbb{P}(z)$ has not sol’n.

i.e. $f(z) = \frac{1}{\mathbb{P}(z)}$ $is\ entire\ function\ and\ bounded.$

According to Liouville's theorem ,$f(z) is\ constant.$

So $\mathbb{P}(z)$ is also constant. (∋∈)

p is poly.isn’t constant

$\therefore \mathbb{P}(z)$ has sol’n

證明

設$f'(T)$是$f(\mathrm{T})$的導函數，其中

$f(T) = a_0T^n + a_1T^{n-1} + \cdots + a_{n-1}T + a_n$

找一個正數M，使得只要$x-1<u<x+1$，就會有$|f'(u)| < \frac{1}{M}$

如果 $\frac{p}{q}$ 足夠靠近x，使得

$$x-1<\frac{p}{q}<x+1 \text{ 且} f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$$

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{|a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n|}{q^n} \geq \frac{1}{p^n}$$

$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) - f(x) = \left(\frac{p}{q} - x\right) \times f'(x)$其中$x-1<x_1<x+1$(中間值定理)

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| = \frac{|f(\frac{p}{q})|}{f'(x_1)} > \frac{M}{q^n}$$

- Q.E.D.

課程反思

- 對entire function的描述
- 可導出代數基本定理
- 代數基本定理也間接說明一個n次多項式在複數系會有n個根

問教授

- 若實數x滿足

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的代數數a_i是整數，$a_0\neq 0$，則存在一個正數c，使得$\left|x-\frac{p}{q}\right|>\frac{c}{q^n}$，其中$\frac{p}{q}$是足夠靠近$x$的有理數，且$\frac{p}{q}\neq x$

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_08_2_01/page4.html

Liouville's Theorem on approximation

For any algebraic number a wth degree n>1，there exists c=c(α)>0 such that
| α - $\frac{p}{q}$| > $\frac{C}{q^n}$ for all rationals $\frac{p}{q}(q > 0)$

如果 α 為一n次代數無理數，則必存在正數C，使得| α - $\frac{p}{q}$| < $\frac{p}{q^n}$ 在$\mathrm{n} \leq k$時無解p、q。
因此，對固定的C，上述不等式對每一正整數N均有解 $\frac{p}{q}$，則 α 是超越數

Liouville's theorem($\sqrt{2}$)

- For any p,q∈ N,we have
- $\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{3p^2}\cdots(1)$
- $\sqrt{2}=1+\frac{a_1}{2^1}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}+\cdots,\text{where } a_1,a_2,\cdots,\ a_n\ ,\cdots\in\{0,1\}\cdots(2)$

First prove for any n∈ $N, a_n, a_{n+1},\cdots,\ a_{2n}$ is not all zero

(a)if $\frac{p}{q}$ is a positive integer,then we let p=1, $\frac{p}{q}$=q

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|\geq 0.4>\frac{1}{3\times 1^2}$$

(b)

If $0 < \frac{p}{q} \leq \frac{3}{2}, then\ \sqrt{2} + \frac{p}{q} < \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$

$|\,2 - \frac{q^2}{p^2}\,| = |\,\sqrt{2} - \frac{p}{q}\,| \times |\,\sqrt{2} + \frac{p}{q}\,| < 3|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\,|$

$|\,\sqrt{2} - \frac{p}{q}\,| > \frac{|2p^2 - q^2|}{3p^2} \geq \frac{1}{3p^2}$

(c)

If $\frac{p}{q} > \frac{3}{2} and\ p \geq 2$，then

$|\,\sqrt{2} - \frac{p}{q}\,| > \frac{3}{2} - \sqrt{2} \geq \frac{1}{3 \times 2^2} \geq \frac{1}{3 \times p^2}$

Combining (a), (b), (c) to prove the result of (1).

- Second prove(2)

let$\frac{p}{q}=1+\frac{a_1}{2^1}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}$,

Then we get p$\leq 2^{n-1}$ ，$\text{sub.}(1)$

$$\left|\frac{a_n}{2^n}+\cdots+\frac{a_{2n}}{2^{2n}}\right|+\left(\frac{a_{2n+1}}{2^{2n+1}}+\cdots\right)|=|\sqrt{2}-\frac{p}{q}|>\frac{1}{3p^2}\geq\frac{1}{2^{2n}}$$

$\because \frac{a_{2n+1}}{2^{2n+1}}+\cdots\leq\frac{1}{2^{2n+1}}+\cdots\leq\frac{1}{2^{2n}}$

$\therefore\left|\frac{a_n}{2^n}+\cdots+\frac{a_{2n}}{2^{2n}}\right|\neq 0.$

Hence $a_n, a_{n+1}, \cdots,\ a_{2n}\ is\ not\ all$ 0

Remark: if $\frac{p}{q}$ approaching $\sqrt{2}$，then p is extremly big.

隨堂練習

Prove

$$\left|\sqrt[3]{2}-\frac{q}{p}\right| > \frac{1}{10p^3}, \forall p \in N \ and \ \exists q \in Z$$

Answer

- Obiviously when $\left|\sqrt[3]{2}-\frac{p}{q}\right| \geq 1$
- Therefore , we assume that $\left|\sqrt[3]{2}-\frac{p}{q}\right| < 1$
- $|\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-\left(\frac{p}{q}\right)^3| = |\left(\sqrt[3]{2}-\frac{p}{q}\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}\left(\frac{p}{q}\right)+\left(\frac{p}{q}\right)^2\right)|$

$$= |\left(\sqrt[3]{2}-\frac{p}{q}\right)\left(\left(\sqrt[3]{2}-\frac{p}{q}\right)^2-3\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}-\frac{p}{q}\right)+3\sqrt[3]{4}\right)|$$

$$< \left|\left(\sqrt[3]{2}-\frac{p}{q}\right)\right|(1+4+56)\ \left(use\ \sqrt[3]{2}<1.26\right)$$

$$\leq 10\left|\sqrt[3]{2}-\frac{p}{q}\right|$$

$$\frac{1}{p^3} \leq \left|\frac{2p^3-q^3}{p^3}\right| = |\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-\left(\frac{p}{q}\right)^3|$$

Liouville's theorem就是在考慮像 $\sqrt{2}$這種無理數與有理數$\frac{p}{q}$差的範圍。

劉維爾數Liouville‘s Number

- $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$

<pf>

By Comparing test

$$\because \frac{1}{10^{k!}} \leq \frac{1}{10^{k}} \quad k = 1,2,\ldots$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k}} = \frac{1}{9}$$

hence$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ is convergent series

$$s_n = \frac{p_n}{q_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k}}$$

- $q_n = 10^{n!}$
- on the other hand
- $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} < \frac{1}{10^{(n+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots\right)$
- $= \frac{10}{9} \times \frac{1}{10^{(n+1)!}} = \frac{10}{9\times 10^{n!}} \times \frac{1}{(10^{n!})^n} < \frac{1}{(10^{n!})^n} < \frac{1}{(q_n)^n}$
- choose $s_n = n, x$ is transcendental number

引注資料(References)

- https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%84%A1%E7%90%86%E6%95%B8(根號2)
- https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BB%A3%E6%95%B8%E6%95%B8(代數數)
- https://www.zhihu.com/question/367665734 代數數可數
- http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_08_2_01/page4.html(第8頁)
- https://www.youtube.com/watch?v=ZZjte9HDsbM (Liouville與代數基本定理)
- http://pisa.math.ntnu.edu.tw/attachments/article/825/22%20mathdata.pdf
- http://files.chiuchang.org.tw:8080/MyWeb/download/Biography/D03.pdf
- https://zhuanlan.zhihu.com/p/138847089 劉維爾數
- https://baike.baidu.com/item/%E5%88%98%E7%BB%B4%E5%B0%94%E6%95%B0 劉維爾數及證明
- https://zhuanlan.zhihu.com/p/138847089
- http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_02_1_03/page4.html
- Transcendental Number Theory Editors:Alan Baker
- Number Theory IV Editors: **Parshin** A.N. **Shafarevich** I.R. (Eds.)