

# 第八組

2010

數四甲  
數四甲  
數四乙  
數四乙

410631122  
410631128  
410531226  
410631207

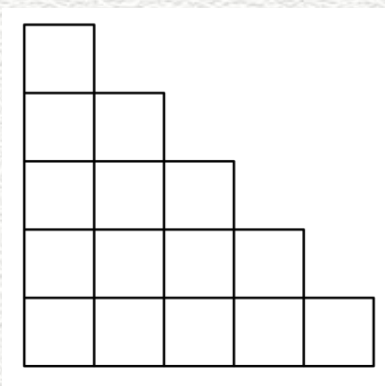
黃翊瑄  
葉宗愿  
王怡堯  
唐仲暄





## 1. 組合主題

對於正整數 $n$ ，「 $n$ -階梯」是一個由單位方塊組成的圖，第一階有一個方塊，第二階有兩個，以此類推，第 $n$ 皆有 $n$ 個方塊，且所有階的最左邊垂直對齊。例如，左圖為 5-階梯。

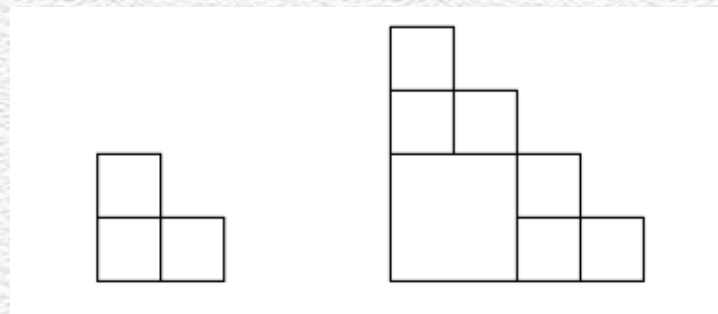


$f(n)$ 表示在 $n$ -階梯上要用方形磁磚蓋滿所需要的磁磚數量的最少值。磁磚邊長可已是任意正整數。例如：

$$f(2)=3, f(4)=7。$$

(a) 找出所有  $n$ ，滿足  $f(n)=n$ 。

(b) 找出所有  $n$ ，滿足  $f(n)=n+1$ 。

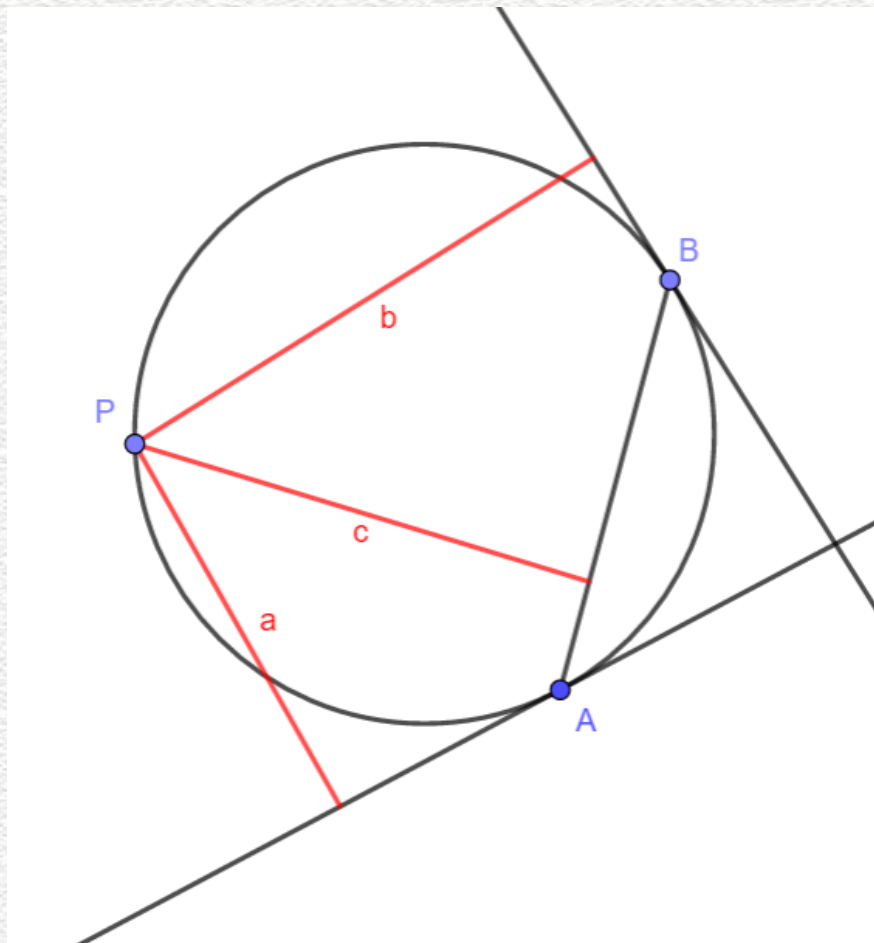






## 2. 幾何主題

$A, B, P$  為一圓上的三點，  
 $a, b$  為  $P$  到  $A, B$  點切線的距離，  
 $c$  為  $P$  到弦  $AB$  的距離，  
試證  $c^2 = ab$ 。








### 3. 數論主題

三名選手在一個橢圓溜冰場上競速，他們從同一個起點出發且同方向，但不同速率，他們直到停下來前永遠維持等速率前進。最慢的1圈/分鐘，最快的  $3.14$  圈/分鐘，第三人  $L$  圈/分鐘， $1 < L < 3.14$ 。

這場競速會在三人再次交會時結束。找出  $L$  可能的數量，使得在整場競速中總共發生117次超前（一位選手超越另一位選手，稱作超前，不包括開始與結束。







### 3. 講 解

首先，假設三位選手為 $A, B, C$ （快到慢）

考慮 $A, B$ 相對於 $C$ 的位子， $A, B$ 對於 $C$ 來說都是跑整數圈（從 $C$ 的角度）

我們假設 $A$ 相對於 $C$ 跑了 $n$ 圈，假設 $B$ 相對於 $C$ 跑了 $m$ 圈

考慮 $A, B$ 相對於 $C$ 的相對速度， $3.14 - 1 = 2.14$  為 $A$ 的相對速度， $L - 1$ 為 $B$ 的相對速度

$$\text{他們所花的時間為 } \frac{n}{2.14} = \frac{m}{L-1} \Rightarrow L = 2.14 \left( \frac{m}{n} \right) + 1$$

我們可以發現我們要的 $m, n$ 必互質，否則假設 $\gcd(m, n) = k$ ，則在 $A$ 在走 $m/k$ ， $B$ 在走 $n/k$ 時， $A, B, C$ 已經交會一次了







### 3. 講 解

再來考慮超越的發生次數， $A$ 相對於 $B$ 跑了 $n-m$ 圈，而會發生 $n-m-1$ 次超越（ $A$ 超越 $B$ ）。

同理 $A, B$ 分別會超越 $C$   $n-1, m-1$ 次

$$117 = (n-1) + (m-1) + (n-m-1) = 2n-3 \Rightarrow n=60$$

所以我們要找的 $m$ 就是小於60，且與60互質的數。

尤拉 $\varphi$ 函數:  $\varphi(n)$  = 是小於或等於 $n$ 的正整數中與互質的數的數目。

$$\text{若 } n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$$

$$\text{則 } \varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)。$$

$$\varphi(60) = \varphi(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5) = (2-1) \cdot 2 \cdot (3-1) \cdot (5-1) = 16。$$

所以，共有16種可能的 $L$ 值







### 3. 類 題

三名賽車選手在一個橢圓的賽車場上競速，他們從同一個起點出發且同方向，但不同速率，他們直到停下來前永遠維持等速率前進。最慢的1圈/分鐘，最快的5圈/分鐘，第三人 $L$ 圈/分鐘， $1 < L < 5$ 。這場競速會在三人再次交會時結束。

找出  $L$  可能的數量，使得在整場競速中總共發生69次超前（一位選手超越另一位選手，稱作超前，不包括開始與結束。







## 4. 圖論主題

在一有限圖上，每個點可被塗成黑色或白色，一開始全部都為黑色。我們可以選擇一點  $P$  而將  $P$  與其鄰居改變顏色。試問，我們可以在所有圖上做一系列上述的操作讓所有點都變成白色嗎？







## 5. 代數主題

$P(x), Q(x)$  為兩整數係數多項式，而  $a_n = n! + n$ 。試證，  
若對於所有  $n, P(a_n)/Q(a_n)$  皆為整數，  
則對於所有  $n$  且  $Q(n) \neq 0, P(n)/Q(n)$  皆為整數。





The background is a light gray with a subtle texture of white specks. In the top-left corner, there is a watercolor illustration of a branch with green leaves and clusters of red berries. In the top-right corner, there is a small watercolor illustration of a pink flower in a purple pot. In the bottom-left corner, there is a watercolor illustration of a green vine with two pink buds. In the bottom-right corner, there is a watercolor illustration of a branch with green leaves and clusters of red berries.

謝謝大家