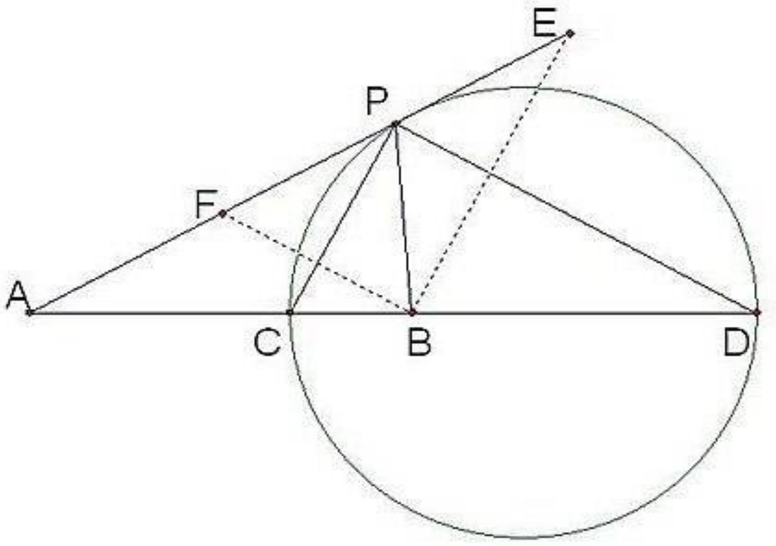
數學解題期末報告 第二組
任意三角形最小內接正三角形之尺規作圖

410631105 王嘉顥
410631106 王士齊
410631116 劉家宇
410631125 李宥德
410631127 張茗洋

一、介紹阿波羅尼斯圓

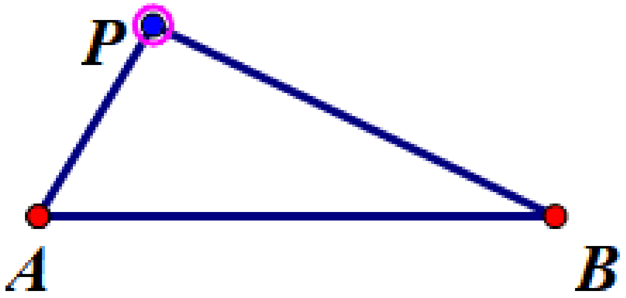
- 給定平面上兩定點A、B，並且令平面上一動點P滿足$\overline{\mathrm{PA}}：\overline{\mathrm{PB}} = k：1$
- 並且$k \neq 1$，$k \geq 0$，則P集合為圓形



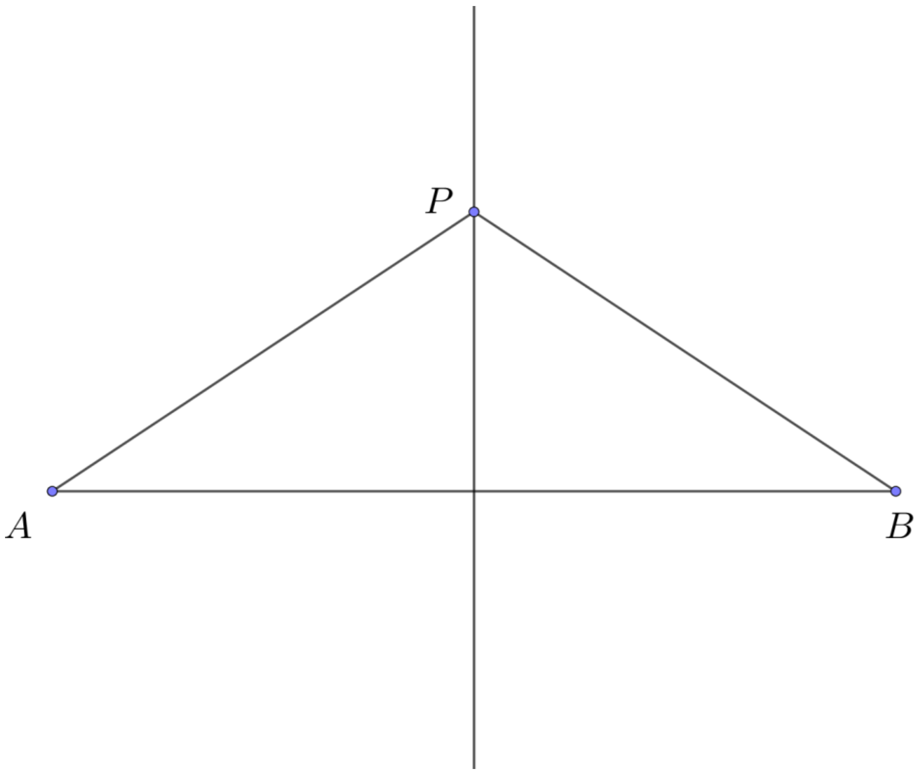
$\overline{PB} = 4.18$厘米

$\overline{PA} = 2.09$厘米

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = 2.00$$



- $\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}} = k:1$
- 若$k = 1$，則P集合為$\overline{\mathrm{PA}}$中垂線



代數證明：

在不失一般性假設下，假設$A(0,0)$、$B(d,0)$

令$P(x,y)$滿足$\overline{\mathrm{PA}}$：$\overline{\mathrm{PB}}$ ＝ k：1，k ≠ 1，k ≥ 0

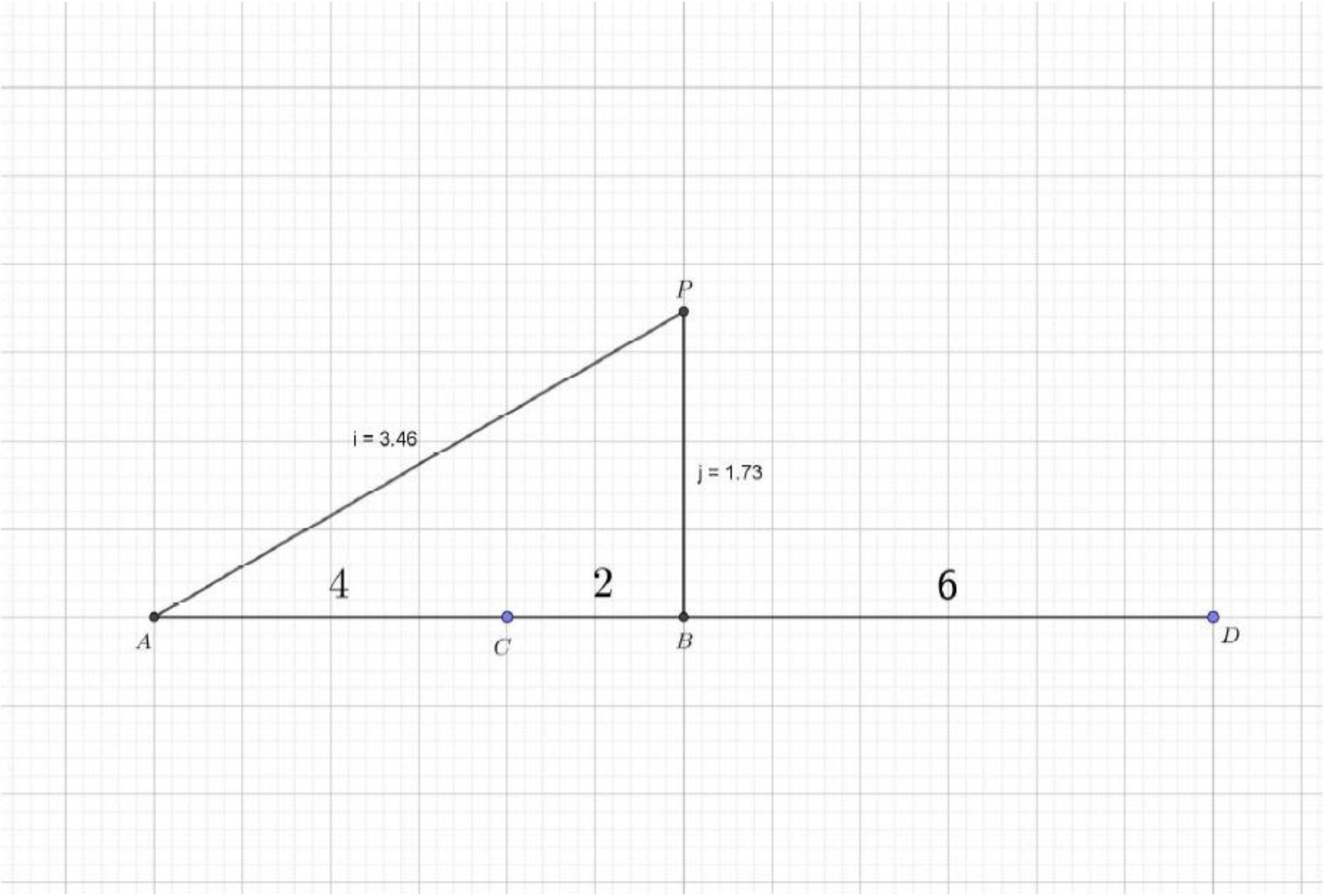
$$\sqrt{x^2+y^2} : \sqrt{(x-d)^2+y^2} = k : 1$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = k\sqrt{(x-d)^2+y^2}$$

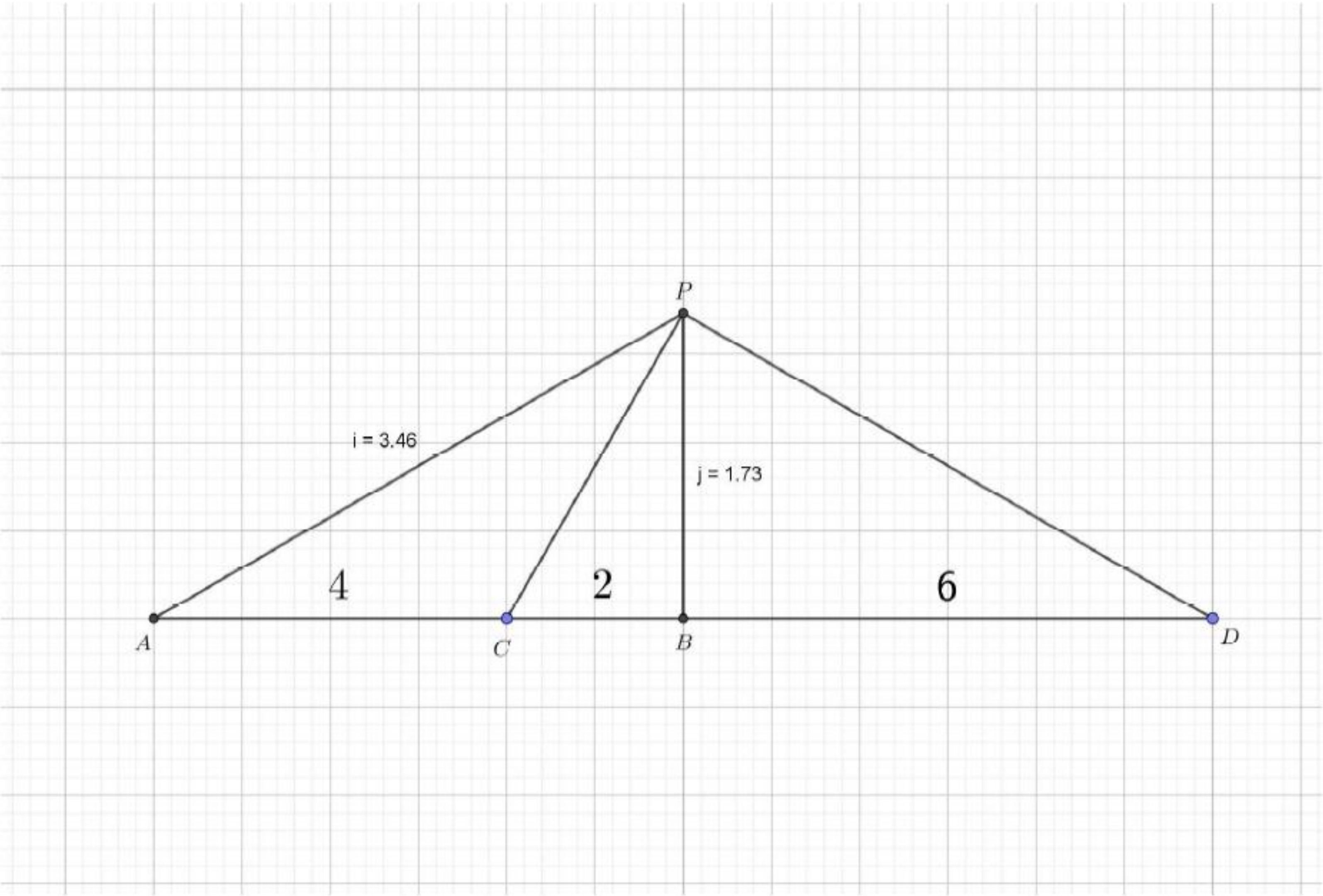
整理完可得$(x-\frac{dk^2}{k^2-1})^2+y^2=(\frac{dk}{k^2-1})^2$

所以P點軌跡為圓心為$(\frac{dk^2}{k^2-1},0)$半徑為$\frac{dk}{k^2-1}$的圓

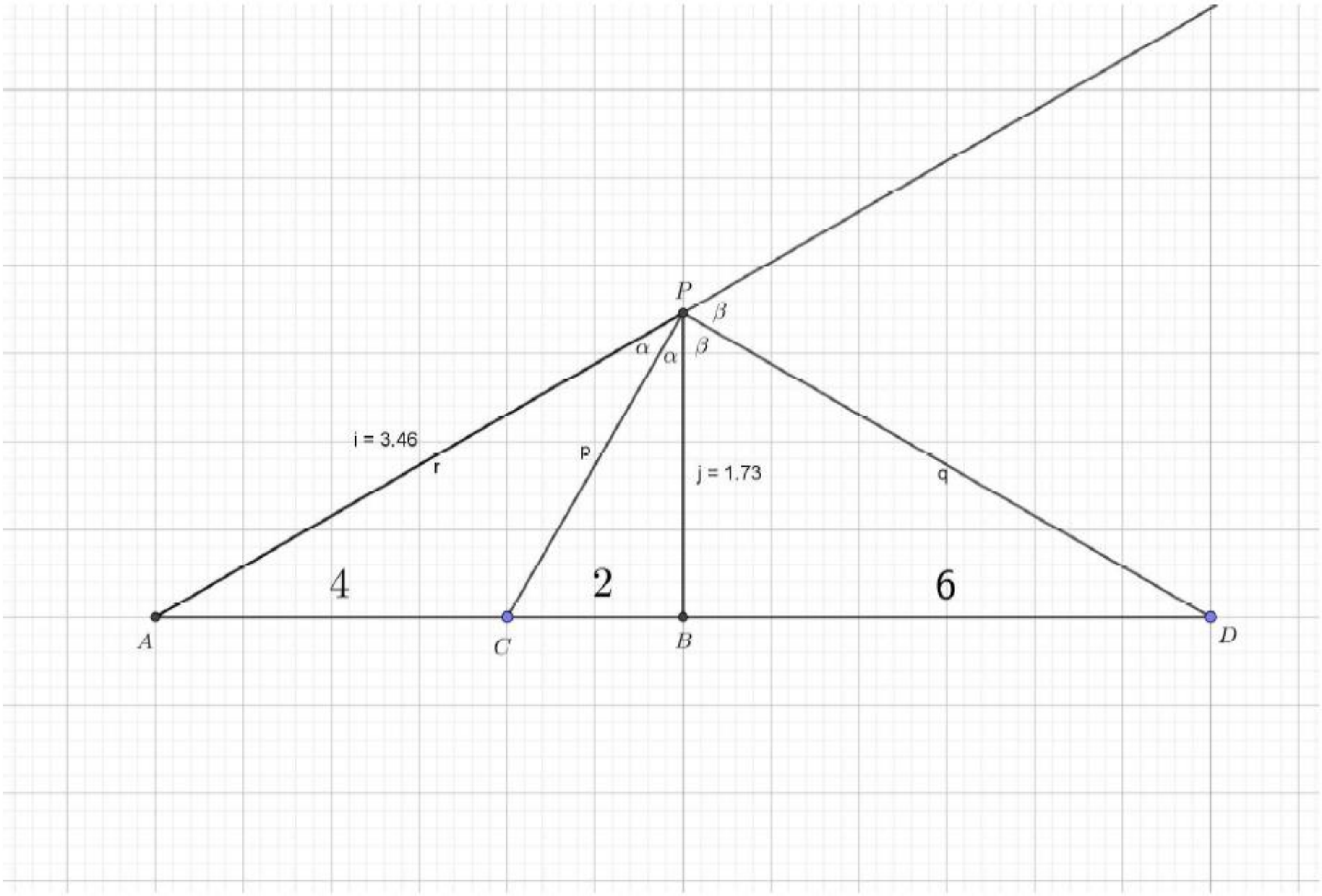
- 幾何 $\overline{PA}:\overline{PB} = 2:1$



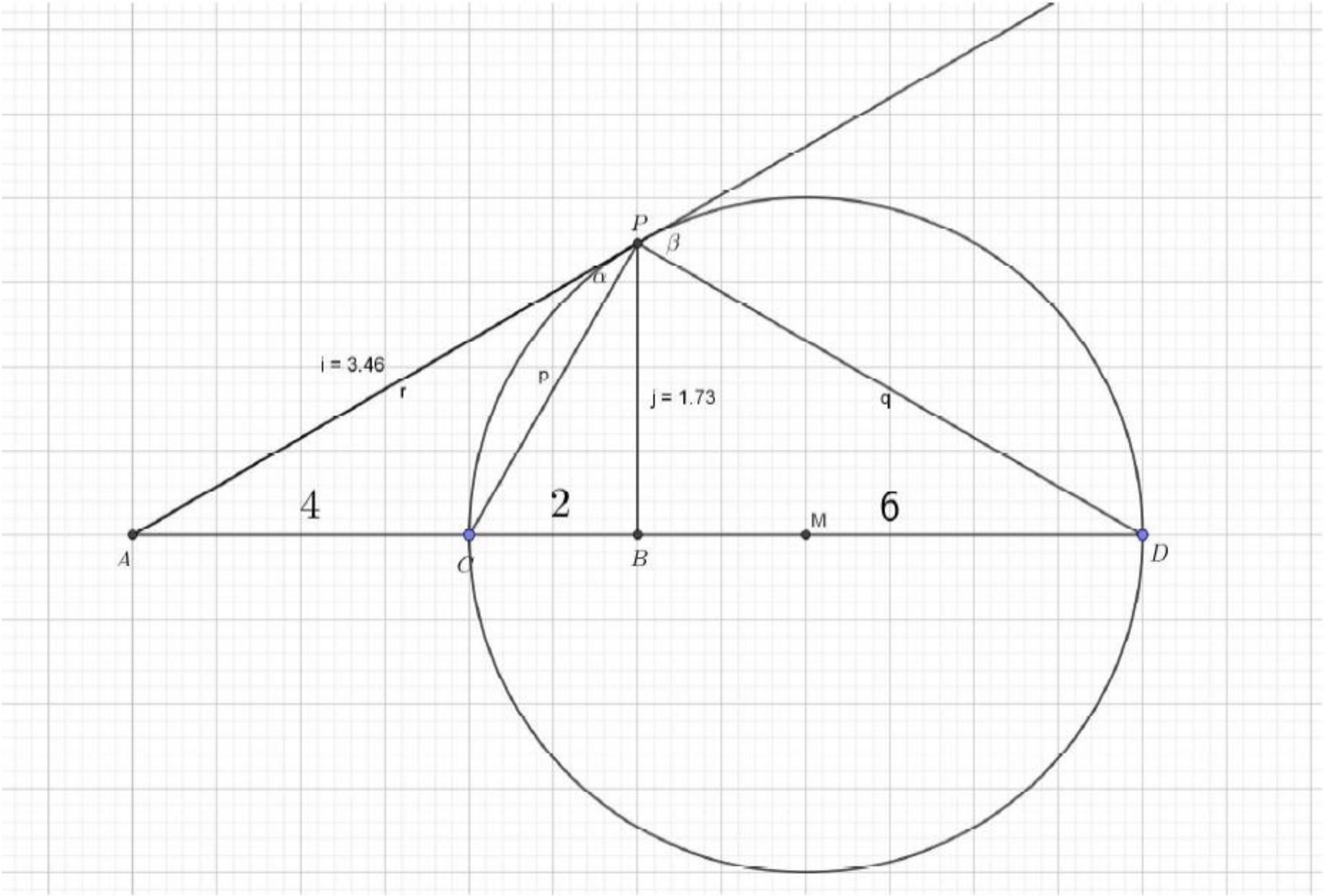
- 幾何 $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$



- 幾何 $\overline{PA}:\overline{PB} = 2:1$



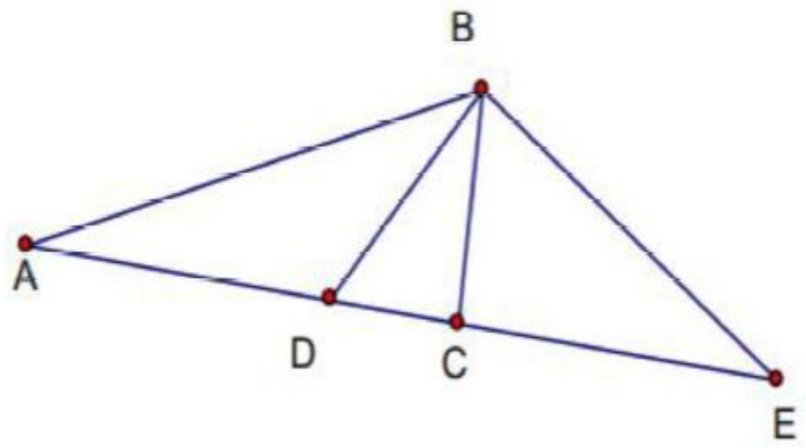
- 幾何 $\overline{PA}:\overline{PB} = 2:1$



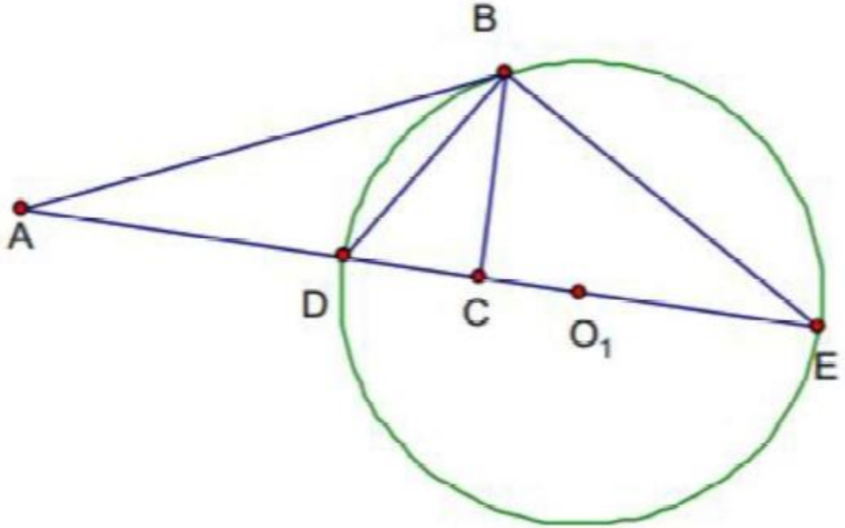
二、畫出最小正三角形

給任意三角形ABC，找出三角形ABC之最小內接正三角形

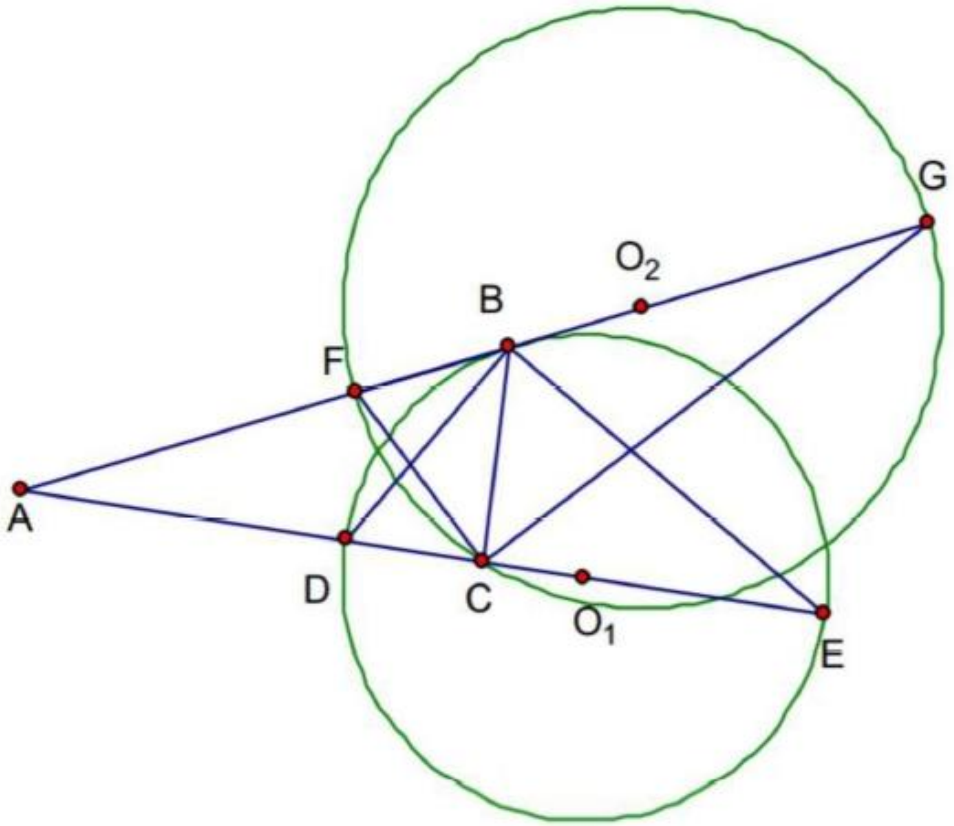
(1)先分別作三角形ABC中$\angle ABC$的內、外角平分線，分別交$\overleftrightarrow{AC}$於D、E(如下圖)



(2)以$\overline{DE}$為直徑做圓O_1



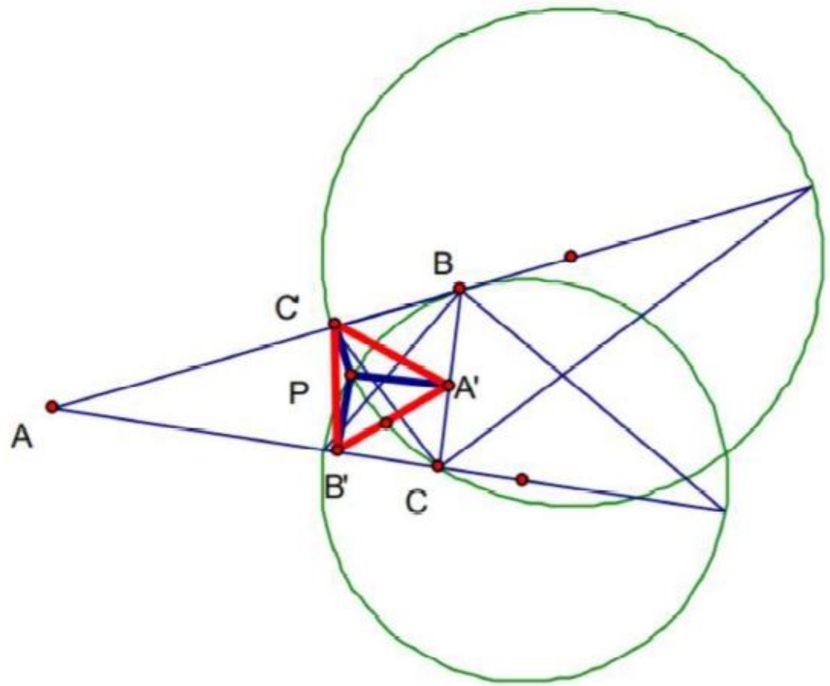
(3)再對三角形ABC中∠ABC做上述兩動作，得圓O_2



(4)發現O_1、O_2在三角形內交點為P

(5)由P做三角形三邊的垂足A'、B'、C '

(6)連接三點得三角形A'B'C '，即為所求

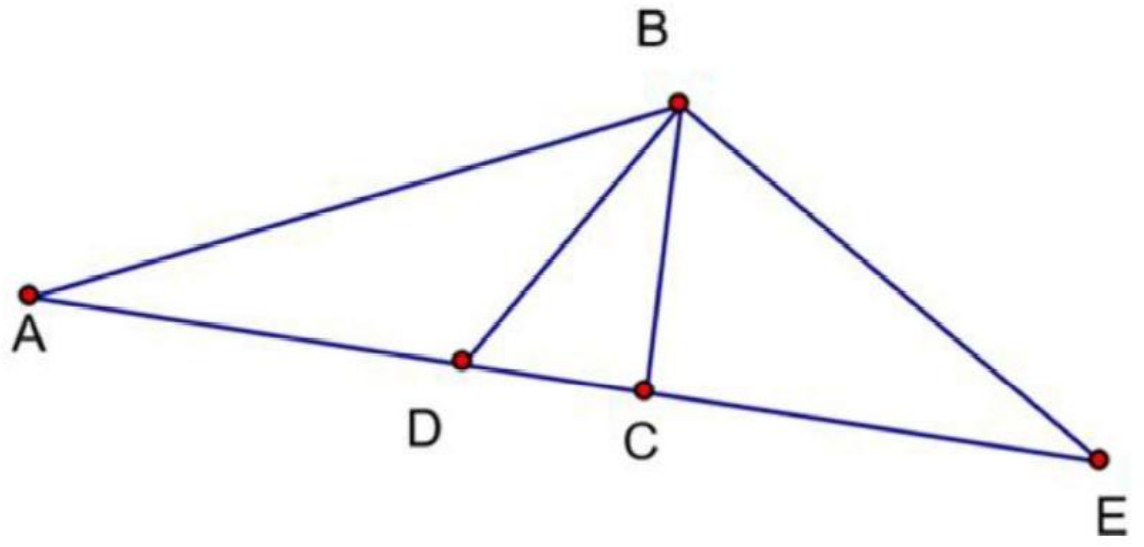


三、說明

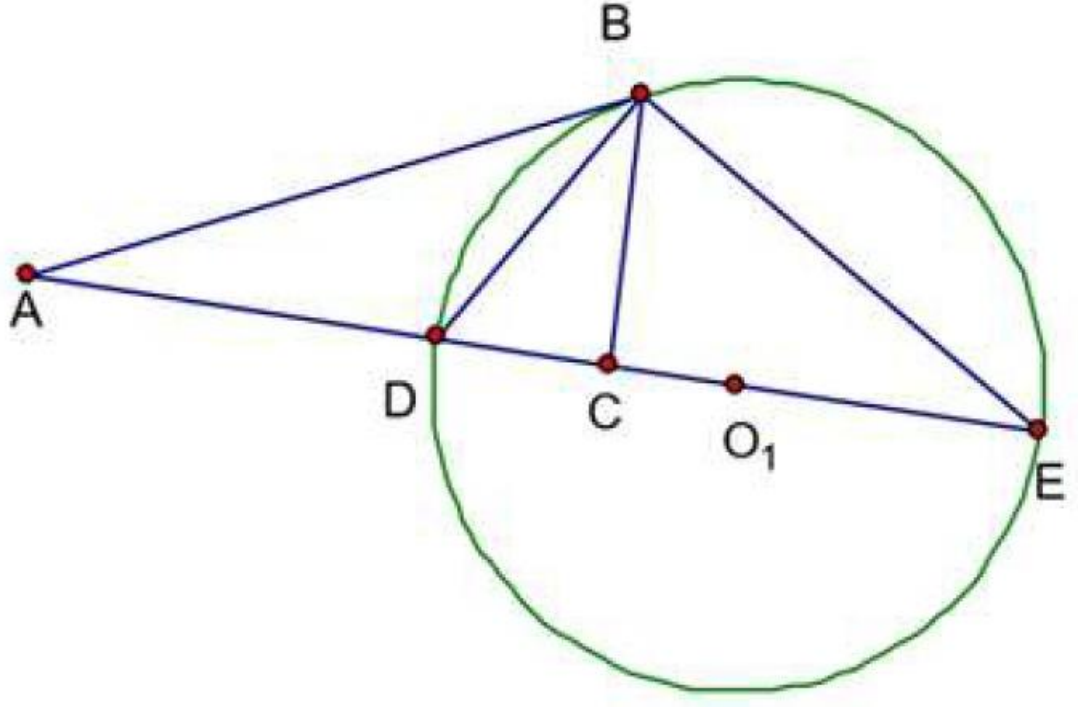
(一)首先要先說明如此接出來的三角形是正三角形

首先要先說明如此接出來的三角形是正三角形。

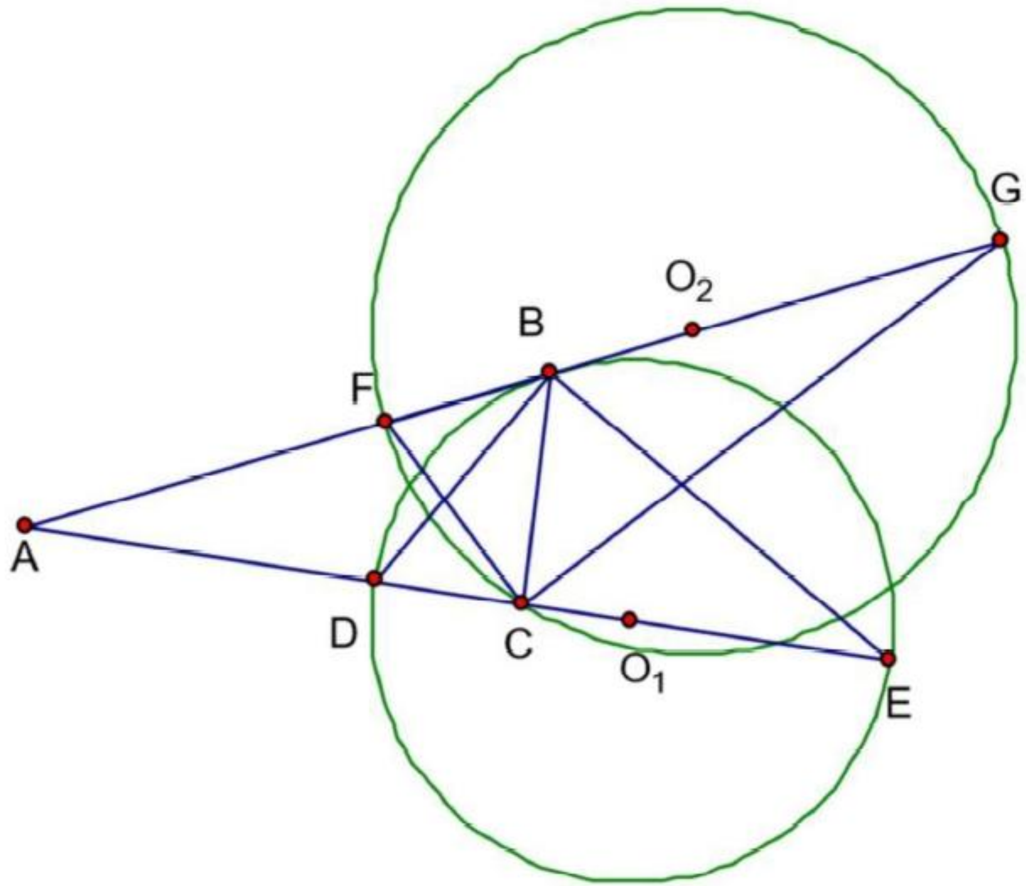
第一步因為做三角形ABC中∠ABC的內、外角平分線，由內分比定理$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}$，由外分比定理$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$，由以上兩式可得$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$



我們發現B、D、E三點分別和A、C的距離比相等，由阿波羅尼斯圓的定義，B、D、E三點一定共圓，但因為是內、外角平分線，所以∠DBE=90°，因此可以用$\overline{DE}$為直徑畫圓，且B、D、E三點必定在圓上。



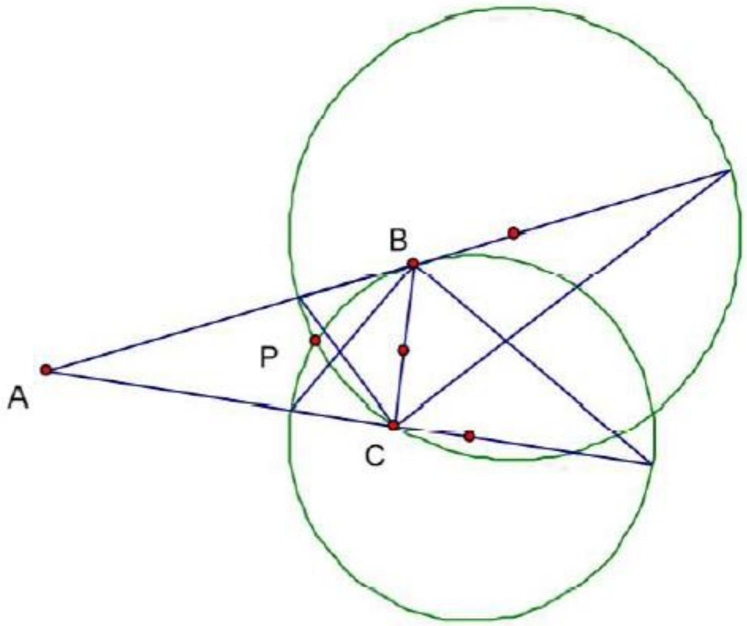
同理，圓O_2是以A、B為定點的阿波羅尼斯圓，並且以$\overline{FG}$為直徑。



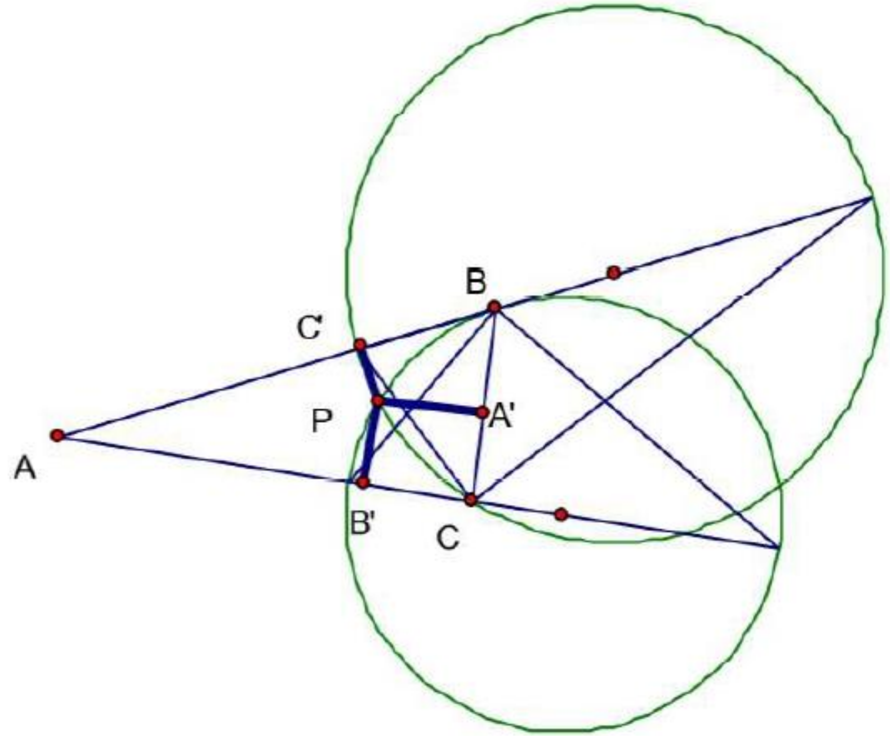
因此，O_1、O_2的交點P，因為同時符合兩個阿波羅尼斯圓，所以：

①$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$　②$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$　①÷②$\Longrightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

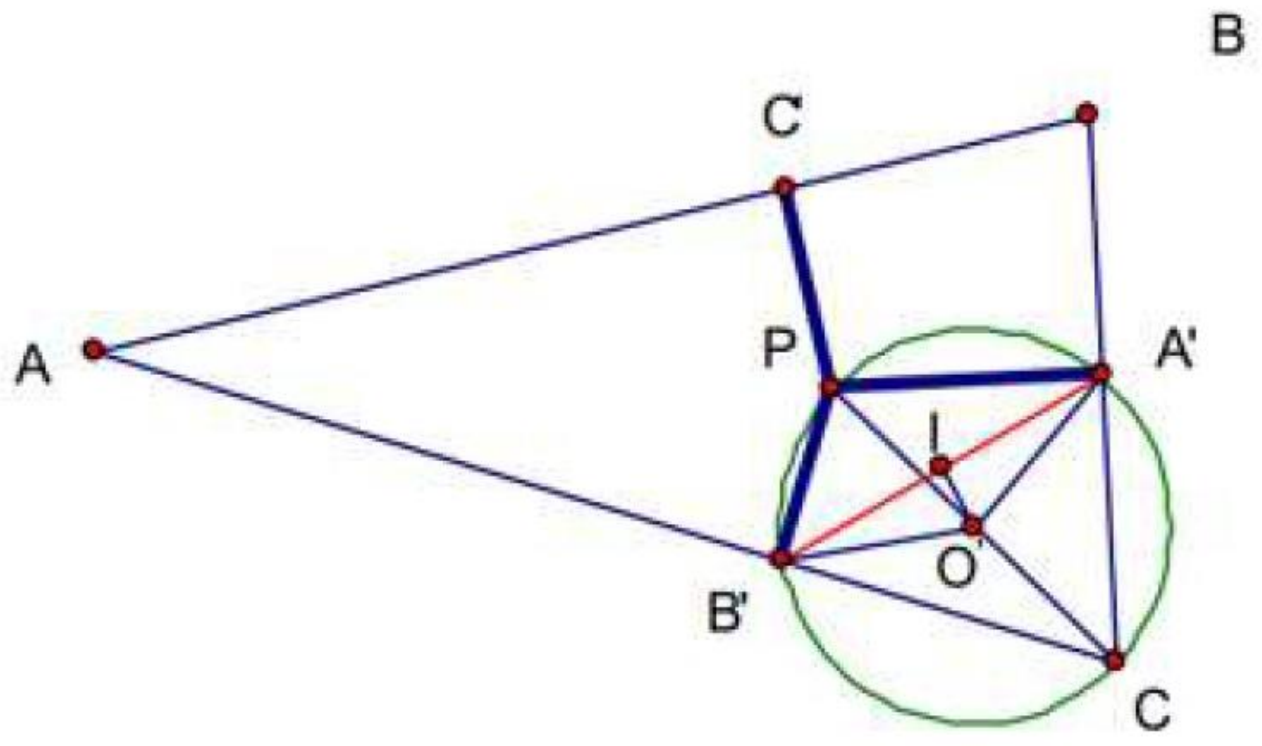
因此，我們得到一個重要關係：$\overline{PA} \times \overline{BC} = \overline{PB} \times \overline{AC} = \overline{PC} \times \overline{AB}$



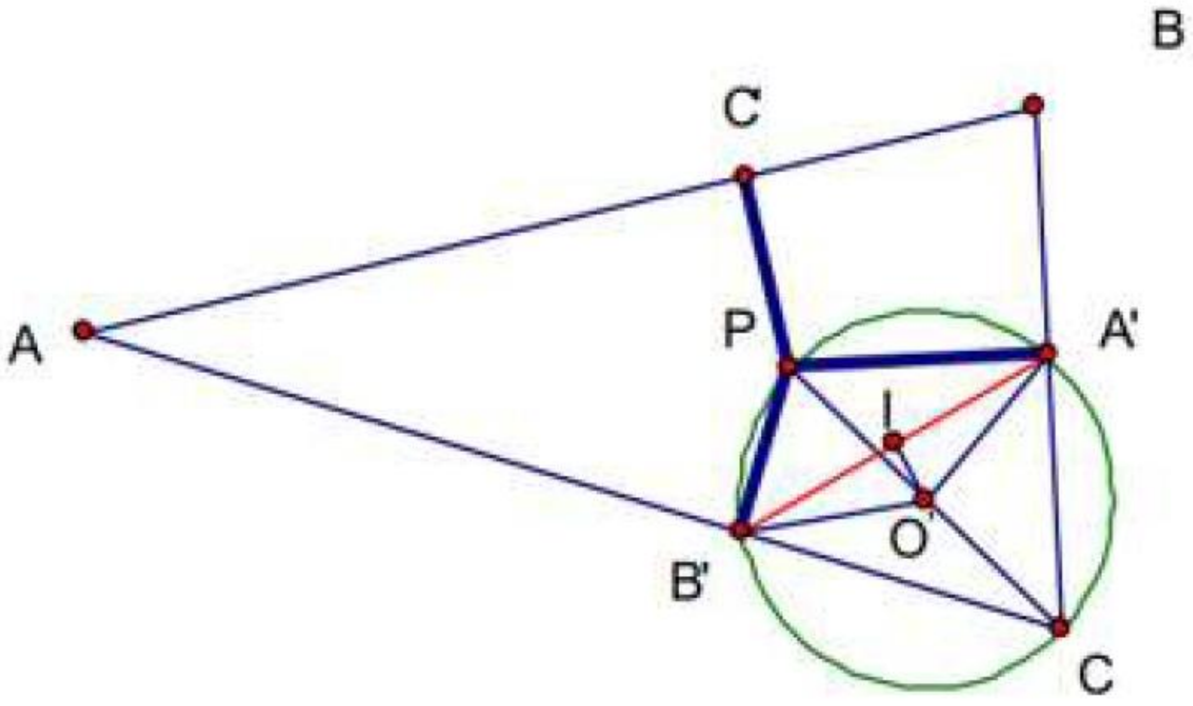
接下來是由P點向三角形ABC三邊做垂線，分別交於A'、B'、C'，接下來再看回三角形ABC，將其特別拿出來討論。



(1)因為做的是垂線，所以四邊形$PA'CB'$因為對角互補，必定四點共圓，找出圓心O'，做圓心到$\overline{\mathrm{A'B'}}$的垂線，垂足I



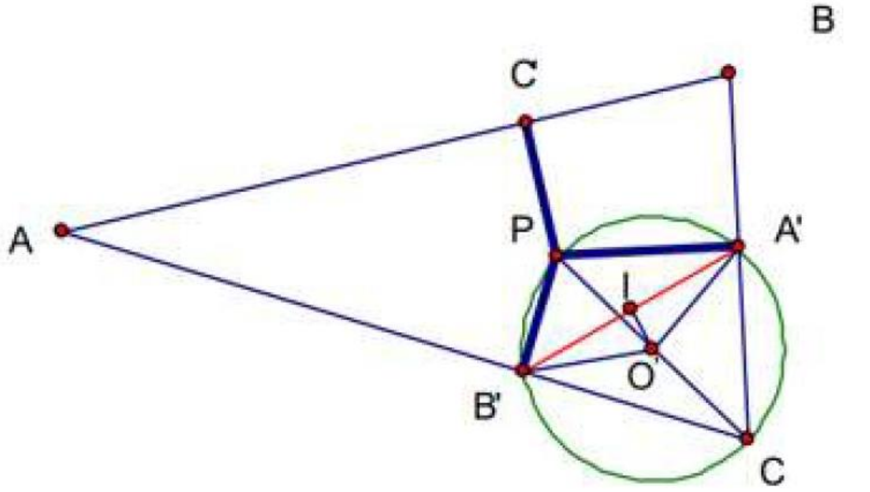
(2)因為$OA'B'$是等腰三角形，因此$\angle B'OI=\angle A'OI$，又因為圓周角與圓心角的關係，因此 $\angle B'OI=\angle A'OI=\angle A'CB'$



(3) 由正弦定理可知$\dfrac{\overline{A'B'}}{sinC} = \overline{PC} \Longrightarrow \overline{A'B'} = \overline{PC} \times sinC$

(4) 同理，我們可推得以下式子：

$$\overline{A'C'} = \overline{PB} \times sinB \text{、} \overline{B'C'} = \overline{PA} \times sinA$$



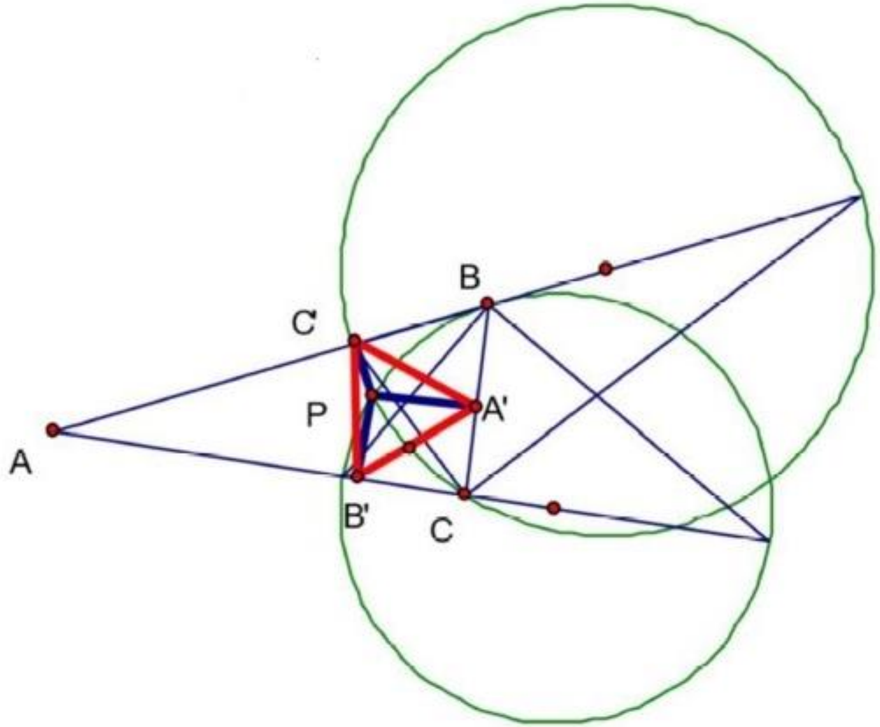
在ABC中，由正弦定理$\frac{\overline{BC}}{sinA}=\frac{\overline{AC}}{sinB}=\frac{\overline{AB}}{sinC}=2R$，$R$為外接圓半徑，因此，之前的三個式子可調整為

$$\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{PC}}\times sinC\ \Rightarrow \overline{\mathrm{A'B'}}=\frac{\overline{PC}\times\overline{AB}}{2R}$$

$$\overline{\mathrm{A'C'}}=\overline{\mathrm{PB}}\times sinB\ \Rightarrow \overline{\mathrm{A'C'}}=\frac{\overline{PB}\times\overline{AC}}{2R}$$

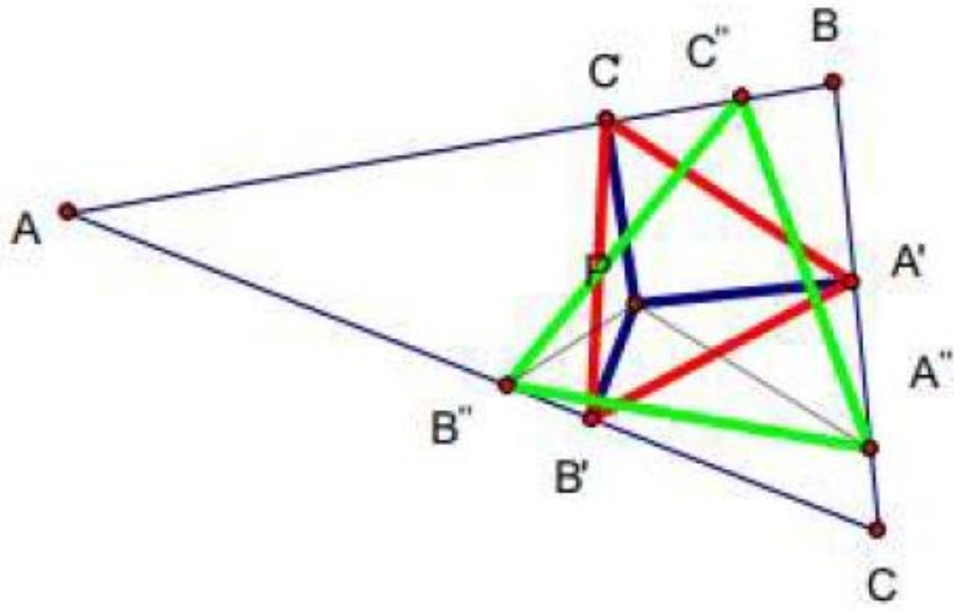
$$\overline{\mathrm{B'C'}}=\overline{\mathrm{PA}}\times sinA\ \Rightarrow \overline{\mathrm{B'C'}}=\frac{\overline{PA}\times\overline{BC}}{2R}$$

但是我們在說明的第4步驟時又得到$\overline{PA} \times \overline{BC} = \overline{PB} \times \overline{AC} = \overline{PC} \times \overline{AB}$，因此，我們就證明了$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{A'C'}} = \overline{\mathrm{B'C'}}$，也就是我們用這樣的方法做出來的三角形是一個正三角形。

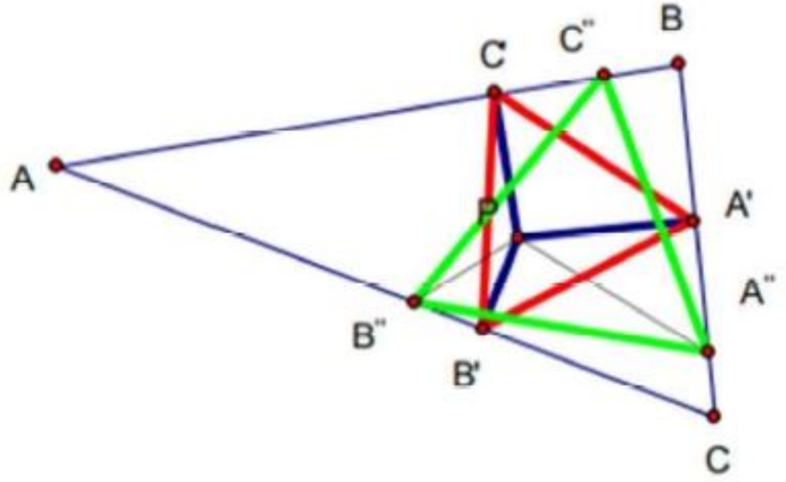


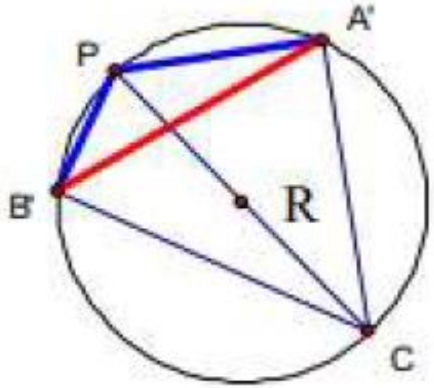
四、要說明這個三角形為最小

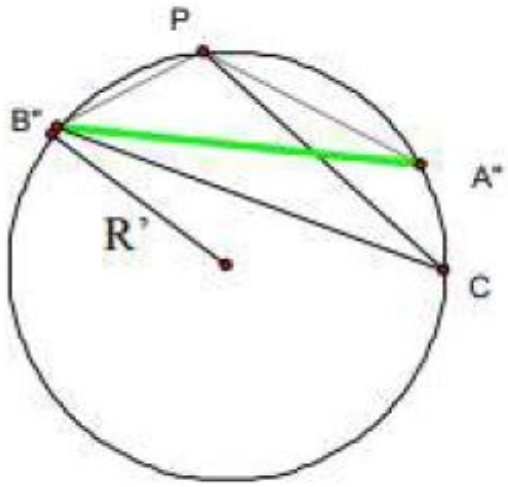
如果我們在$\overline{BC}$上另取一點A''，並且以A''作內接正三角形$A''B''C''$，而$A''B''C''$可以視為$A'B'C'$以P為中心旋轉而得。



我們注意四邊形$PA''CB''$ ，在前面提到，因為四邊形$PA'CB'$是圓內接四邊形，$\angle B'PA'$和$\angle C$互補，所以不管A''在哪裡，只要能做出正三角形，則一定$\angle B''PA''=\angle B'PA$(因為旋轉)，所以一定都有四點共圓的性質，而這些四點共圓之中，又以$\overline{PC}$為直徑的圓半徑最小。







$$\frac{\overline{A'B'}}{sinC} = 2R \qquad \frac{\overline{A''B''}}{sinC} = 2R'$$

$$\overline{A'B'} = 2RsinC \qquad \overline{A''B''} = 2R'sinC$$

$$R' > R \therefore \overline{A'B'} < \overline{A''B''}$$

因此，只要不是在垂直的所做出來的正三角形，所對應到的外接圓半徑必定都比之前的大，所以邊長也都比之前的大，所以$\Delta A'B'C'$為最小正三角形。

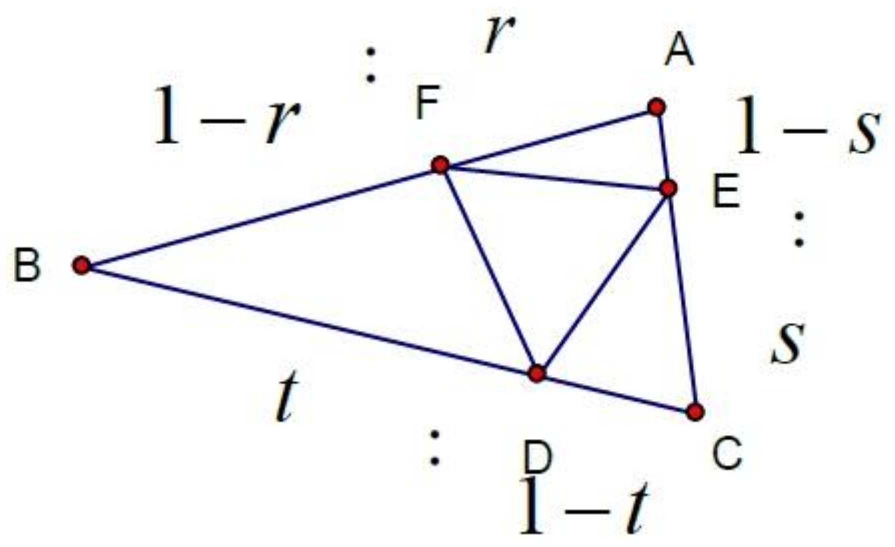
五、代數證明三角形為最小

若三角形ABC中的內接正三角形DEF，

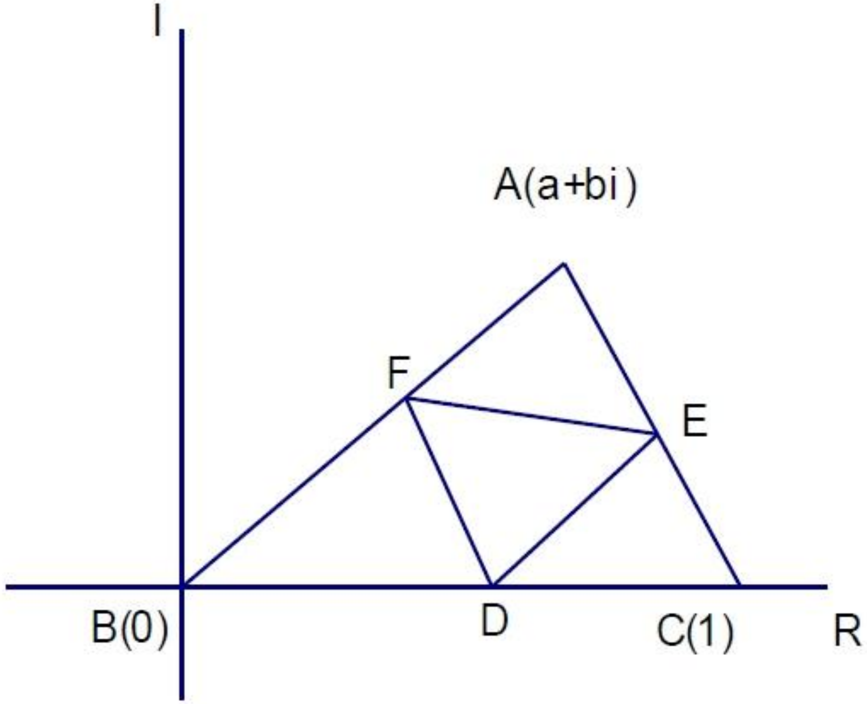
D在$\overline{\mathrm{BC}}$上、E在$\overline{\mathrm{AC}}$上、F在$\overline{\mathrm{AB}}$上、且設

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=t:1-t$、$\overline{\mathrm{CE}}:\overline{\mathrm{EA}}=s:1-s$、$\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{FB}}=r:1-r$

則當$t+s+r=\frac{3}{2}$時，這時的內接正三角形邊長最小，所以面積也會最小。



因為ABC為任意給的三角形，為了說明的完整性，我們將ABC放在複數平面上，而且令為$B(0)$、$C(1)$、A為$a+bi$



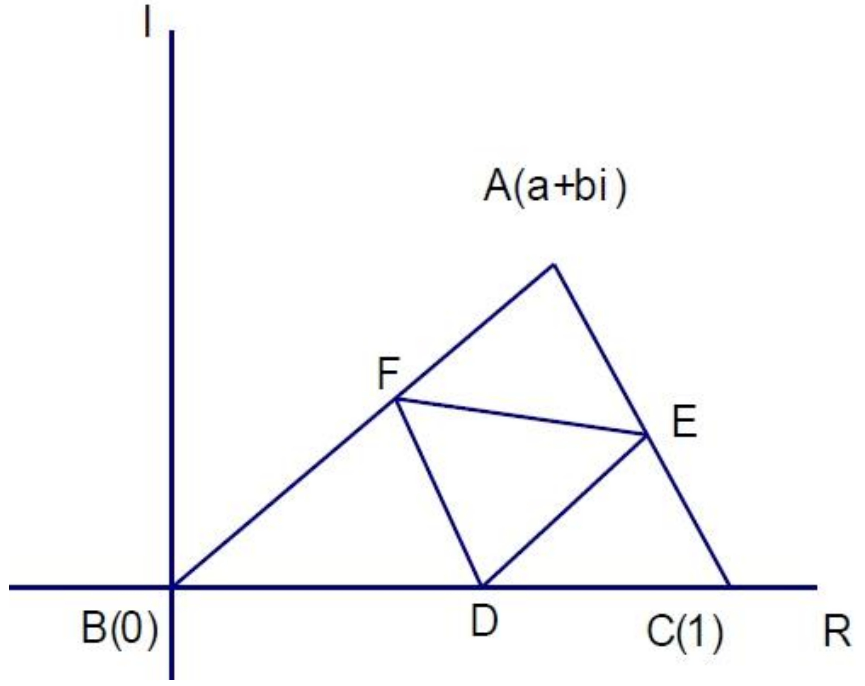
$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=t:1-t\ \Longrightarrow$ D點座標為 t

$\overline{\mathrm{CE}}:\overline{\mathrm{EA}}=s:1-s\ \Longrightarrow$ E點座標為 $(as-s+1)+(bs)i$

$\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{FB}}=\mathrm{r}:1-\mathrm{r}\ \Longrightarrow$ F點座標為 $(a-ar)+(b-br)i$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DE}}=(as-s+1-t)+(bs)i$

$\overline{\mathrm{DF}}=(a-ar-t)+(b-br)i$



又由複數的棣美弗定理：

$\therefore \overline{\mathrm{DE}}\,(cos60° + \ isin\ 60°) = \overline{\mathrm{DF}}\ (\because \angle FDE = 60^{\circ})$

$$\therefore [(as - s + 1 - t) + (bs)i] \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= (a - ar - t) + (b - br)i$$

乘開之後實部=實部、虛部=虛部，會得到以下的等式：

$$(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}b}{2} - \frac{1}{2})s - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} = a - ar - t \ \ ......①$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)s - \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2} = b - br \ \ ......②$$

接下來要逐步的把t、s、r 等未知數的關係用a、b表示，

先把上兩式改寫成：

$$-ar=\left(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}b}{2}-\frac{1}{2}\right)s+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}-a \quad ......③$$

$$-br=\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)s-\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}-b \quad ......④$$

兩式相除，消去r，同時分子分母同乘2，會得到：

$$\frac{a}{b}=\frac{\left(a-\sqrt{3}b-1\right)s+t+1-2a}{\left(\sqrt{3}a+b-\sqrt{3}\right)s-\sqrt{3}t+\sqrt{3}-2b}$$

交叉相乘：

$$\left(\sqrt{3}a^2+ab-\sqrt{3}a\right)s-\sqrt{3a}t+\sqrt{3}a-2ab$$
$$=\left(ab-\sqrt{3}b^2-b\right)s+bt+b-2ab$$

移項整理，左邊把有s的整理起來，右邊把t和沒有t分開，得以下式子：

$$\left(\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b\right)s=\left(\sqrt{3a}+b\right)t+(b-\sqrt{3}a)$$

把s前係數移項：

$$s=\frac{\sqrt{3}a+b}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}t+\frac{b-\sqrt{3}a}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}\ \ldots\ldots ⑤$$

就可得到s和t的關係。

同理，如果我們如果我們在一開始的①、②改寫成：

$$\left(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}b}{2}-\frac{1}{2}\right)s=a-ar-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)s=b-br+\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

兩式相除，這次就會消去s，再經由和上面一模一樣的相乘整理，最後

得到r和t的關係：$r=\frac{\sqrt{3}+b-\sqrt{3}a}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}t+\frac{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a-b}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}$ ……⑥

我們再次回到原先假設的那個三角形，之前說到E點座標為 $(as-s+1)+(bs)i$，F點座標為 $(a-ar)+(b-br)i$，把⑤、⑥代入，則 E、F 點在直角座標可變成：

$$E:\left(\frac{(\sqrt{3}a^2+ab-\sqrt{3}a-b)t+(ab+\sqrt{3}b^2)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b},\frac{(\sqrt{3}ab+b^2)t+(-\sqrt{3}ab+b^2)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}\right)$$

$$F:\left(\frac{(\sqrt{3}a^2-ab-\sqrt{3}a)t+2ab}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b},\frac{(\sqrt{3}ab-b^2-\sqrt{3}b)t+2b^2}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}\right)$$

利用兩點距離公式，則 $\overline{EF}$ 就可寫成：

$$\sqrt{\left[\frac{(2ab-b)t+(-ab+\sqrt{3}b^2)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}\right]^2+\left[\frac{(2b^2+\sqrt{3}b)t+(-\sqrt{3}ab-b^2)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}\right]^2}$$

我們可以發現，根號裡面是t的二次式，所以擁有最小值，所以我們對根號裡進行配方，又因為分母是一樣的，所以對以下的式子配方即可：

$$[(2ab-b)t+\left(-ab+\sqrt{3}b^2\right)]^2+[\left(2b^2+\sqrt{3}b\right)t+(-\sqrt{3}ab-b^2)]^2$$

發現當$t=\frac{1}{2}+\frac{2a-1}{2a^2+2b^2-2a+2\sqrt{3}b+2}$時$\overline{EF}$會最小，再把這時候的$t$代回⑤、⑥兩式，就得到$t+s+r=\frac{3}{2}$，由此可驗證一開始的假設。

最後再將剛剛畫出的圖代入，可得$t+s+r=\frac{3}{2}$，因此可證明尺規作圖的方法是正確的

$\overline{\mathrm{CD}}=2.70cm$　　$\overline{\mathrm{EF}}=1.07cm$

$\overline{\mathrm{CE}}=4.00cm$　　$\overline{\mathrm{EG}}=2.16cm$

$$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{CE}}}+\frac{\overline{\mathrm{EF}}}{\overline{\mathrm{EG}}}+\frac{\overline{\mathrm{GH}}}{\overline{\mathrm{GC}}}=1.50$$