

## 數學思維與解題-期末報告(書面)

### 第六組

411231122 張晏慈

411231243 翁敬祐

411231146 林毅丞

411231147 王晨曦

### 【博弈的最佳策略-21 點】

21 點是一款結合運氣與策略的撲克牌遊戲，目標是在不超過 21 點的前提下，比莊家獲得更高的點數，並深入分析如何透過基本策略和進階技巧提升玩家的勝率。進階部分涵蓋高低算牌法，教導玩家如何透過記錄剩餘牌的點數值來評估優勢，並應用凱利公式進行資金管理，確保長期收益最大化。此外，報告提供一套實用的基本策略表，幫助玩家在不同牌局中做出最佳決策，從而提升遊戲中的勝率與樂趣。

## 一、21 點遊戲介紹

21 點又名黑傑克 ( Blackjack )，起源於法國，有著悠久的歷史。現在在世界各地的賭場中都可以看到二十一點，隨著網際網路的發展，二十一點開始走向網路時代。

### 遊戲目標

該遊戲由 2 到 6 個人玩，使用除鬼牌之外的 52 張撲克牌，遊戲者的目標是使手中的牌的點數之和  
不超過 21 點且儘量大。

### 牌點計算

- A ( Ace )：可計為 1 或 11 點，根據有利情況選擇。
- 2 到 10：按牌面數字計算。
- J、Q、K：每張計 10 點。

### 勝負判斷

#### 1. 玩家勝利：

- 玩家點數 > 莊家點數，且不超過 21 點。
- 莊家 爆牌 ( Bust )，即點數超過 21 點。

#### 2. 莊家勝利：

- 莊家點數 > 玩家點數，且不超過 21 點。

- 玩家爆牌，點數超過 21 點。

### 3. 平局 ( Push ) :

- 玩家與莊家點數相同，且都未爆牌。

## 特殊情況

### 1. Blackjack ( 天牌 ) :

玩家首兩張牌為 A 和一張 10 點牌 ( 10、J、Q 或 K )，稱為 Blackjack，通常賠率為 1.5 倍下注金額 ( 部分賭桌為 1:1 )。

### 2. 保險 ( Insurance ) :

如果莊家明牌是 A，玩家可選擇下注保險，金額為原注一半。如果莊家 Blackjack，玩家獲得保險金 2 倍賠率；如果莊家無 Blackjack，保險金歸莊家。

## 遊戲流程

### 1. 下注 ( Betting )

玩家在遊戲開始前下注，金額需在賭桌範圍內。

### 2. 發牌 ( Dealing )

每位玩家和莊家依序各獲 2 張牌：

- 玩家：兩張明牌 ( 正面朝上 )。
- 莊家：一張明牌、一張暗牌 ( 正面朝下 )

### 3. 玩家行動 ( Player Actions )

玩家根據手牌點數與莊家明牌依序進行行動：

- 要牌 ( Hit )：要求再抽一張牌。
- 停牌 ( Stand )：結束回合，不再抽牌。
- 加倍 ( Double Down )：加倍下注並再抽一張牌後自動停牌 ( 適用於首兩張牌 )。
- 分牌 ( Split )：若首兩張牌點數相同，可分為兩手，並分別下注；每手需再各抽一張牌。
- 投降 ( Surrender )：部分賭桌允許玩家在首輪投降，返還一半下注金額。

玩家在完成自己的行動後，其手牌固定，進入等待莊家的階段。

#### 4. 莊家行動 ( Dealer Actions )

玩家行動結束後，莊家翻開暗牌 ( 底牌 )，進行下列動作

- 點數 < 17 點：繼續抽牌。
- 點數  $\geq$  17 點：必須停牌 ( 某些賭桌對「軟 17 點」有不同規定 ) 。

#### 5. 勝負判定 ( Outcome Determination )

- 比較玩家與莊家的點數，依據規則判定勝負並結算籌碼。

## 二、算牌技巧-高低算牌法

- 高牌(High cards) : 10,11,12,13,A
- 低牌(Low cards) : 2,3,4,5,6
- 中立牌(Neutral cards) : 7,8,9

名稱：	高牌	低牌	中立牌
算牌值	-1	+1	0
玩家優劣勢	優	劣	無關
剩餘數量/玩家優劣勢	下降/下降	下降/上升	無關

- 流水數：桌面上的算牌值合
- 真數：流水數/剩下牌數 ( 以半副為一單位,計算以最接近的半副為主 )

真數數值	玩家優劣勢
上升	上升

下降	下降
----	----

高低算牌法玩法原則：玩家優勢上升，下大；玩家優勢下降，下小 or 不下

[https://www.youtube.com/watch?v=KFBDI\\_QmJ7w](https://www.youtube.com/watch?v=KFBDI_QmJ7w)

## 基本策略

1. 基礎的 21 點策略是根據不同的手牌去進行要牌、停牌、分牌以及雙倍下注，盡量提升獲勝機率
2. 在 21 點中，莊家必須按照遊戲規則：莊家會在手牌點數低於 17 點的時候繼續要牌，當達到 17 點至 21 點任何點數時將不會繼續要牌。

## 如何使用基本策略？

### ● 如何玩硬牌 ( Hard Hand )

硬牌：兩張手牌中任何一張牌都不為 A：

Ex: 手牌有 8 點或者更少的點就要牌

手牌有 9 點，若莊家只有 3 至 6 點，那就雙倍下注，否則就要牌

手牌有 10 點，若莊家只有 2 至 9 點，那就雙倍下注，否則就要牌

手牌有 11 點，若莊家只有 2 至 10 點，那就雙倍下注；若莊家有一張 A，那就要一張牌

### ● 如何玩軟牌 ( Soft Hand )：

軟牌：兩張手牌中有一張 A

Ex: 手牌有 A 和 2 或者 A 和 3，若莊家只有 5 或 6，就雙倍下注，否則就要牌

手牌有 A 和 4 或者 A 和 5，若莊家只有 4 至 6，就雙倍下注，否則就要牌

手牌有 A 和 6，若莊家有 3 至 6 點，就雙倍下注，否則要牌

手牌有 A 和 7，若莊家有 2、7 或 8，那就停牌。如果莊家有 3 至 6 點，就雙倍下注，否則要牌

手牌有 A 和 8 或 A 和 9，就必須停牌

### ● 如何玩對子 ( Pairs )

對子: 兩張牌面數值一樣的牌

Ex: 手牌有對 A 或對 8，就要分牌

手牌有對 2 或對 3，若莊家有 2 至 7 點，就分牌，否則就要牌

手牌有對 4，若莊家有 5 或 6，那就分牌，否則就要牌

手牌有對 5，若莊家有 2 至 9 點，那就雙倍下注，否則就要牌

手牌有對 6，若莊家有 2 至 6 點，就分牌，否則就要牌

手牌有對 7，若莊家有 2 至 7 點，就分牌，否則就要牌

手牌有對 9，若莊家有 2、3、4、5、6、8 或 9，就分牌。如果莊家有 7、10 或 A，則停牌

手牌有對 10，就必須停牌

## ● 雙倍下注 ( Doubling Down )

在 21 點中，如果相信自己的手牌有很大機會擊倒莊家，可以雙倍下注。

雙倍下注，就是將自己的下注增加一倍。選擇雙倍下注以後，可以再要一張牌來決勝負，之後就不可以再要牌。

## ● 分牌

在 21 點中，如果玩家最初手牌為牌面數值相同的兩張牌，也就是對子，玩家可以選擇將他們分成兩手牌。

如果選擇分牌，就會新增一手牌，即是手上會有兩手牌，這時就要加注，讓新手牌有和原手牌一樣的注金。

# 莊家在軟牌17點時停牌

4或8副牌

莊家明牌點數										
2	3	4	5	6	7	8	9	10	A	玩家手牌

## 硬牌 (HARD HAND) 總點數

5 點 - 8 點	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
9 點	H	D	D	D	D	H	H	H	H	H
10 點	D	D	D	D	D	D	D	D	H	H
11 點	D	D	D	D	D	D	D	D	D	H
12 點	H	H	S	S	S	H	H	H	H	H
13 點	S	S	S	S	S	H	H	H	H	H
14 點	S	S	S	S	S	H	H	H	H	H
15 點	S	S	S	S	S	H	H	H	H	H
16 點	S	S	S	S	S	H	H	H	H	H
17+ 點	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S

## 軟牌 (SOFT HAND) 總點數

A 和 2	H	H	H	D	D	H	H	H	H	H
A 和 3	H	H	H	D	D	H	H	H	H	H
A 和 4	H	H	D	D	D	H	H	H	H	H
A 和 5	H	H	D	D	D	H	H	H	H	H
A 和 6	H	D	D	D	D	H	H	H	H	H
A 和 7	S	D	D	D	D	S	S	H	H	H
A 和 8+	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S

## 對子 (PAIRS)

2,2	SP	SP	SP	SP	SP	SP	H	H	H	H
3,3	SP	SP	SP	SP	SP	SP	H	H	H	H
4,4	H	H	H	SP	SP	H	H	H	H	H
5,5	D	D	D	D	D	D	D	D	H	H
6,6	SP	SP	SP	SP	SP	H	H	H	H	H
7,7	SP	SP	SP	SP	SP	SP	H	H	H	H
8,8	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP
9,9	SP	SP	SP	SP	SP	S	SP	SP	S	S
10,10	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A,A	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP

S 停牌 (STAND)   H 要牌 (HIT)   D 雙倍下注 (DOUBLE DOWN)   SP 分牌 (SPLIT)

莊家在軟牌17點時要牌										
4或8副牌										
玩家手牌	莊家明牌點數									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	A
硬牌 (HARD HAND) 總點數										
5 點 - 8 點	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
9 點	H	D	D	D	D	H	H	H	H	H
10 點	D	D	D	D	D	D	D	D	H	H
11 點	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
12 點	H	H	S	S	S	H	H	H	H	H
13 點	S	S	S	S	S	H	H	H	H	H
14 點	S	S	S	S	S	H	H	H	H	H
15 點	S	S	S	S	S	H	H	H	H	H
16 點	S	S	S	S	S	H	H	H	H	H
17+ 點	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
軟牌 (SOFT HAND) 總點數										
A 和 2	H	H	H	D	D	H	H	H	H	H
A 和 3	H	H	H	D	D	H	H	H	H	H
A 和 4	H	H	D	D	D	H	H	H	H	H
A 和 5	H	H	D	D	D	H	H	H	H	H
A 和 6	H	D	D	D	D	H	H	H	H	H
A 和 7	D	D	D	D	D	S	S	H	H	H
A 和 8	S	S	S	S	D	S	S	S	S	S
A 和 9	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
對子 (PAIRS)										
2,2	SP	SP	SP	SP	SP	SP	H	H	H	H
3,3	SP	SP	SP	SP	SP	SP	H	H	H	H
4,4	H	H	H	SP	SP	H	H	H	H	H
5,5	D	D	D	D	D	D	D	D	H	H
6,6	SP	SP	SP	SP	SP	H	H	H	H	H
7,7	SP	SP	SP	SP	SP	SP	H	H	H	H
8,8	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP
9,9	SP	SP	SP	SP	SP	S	SP	SP	S	S
10,10	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A,A	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP
<span>S</span> 停牌 (STAND) <span>H</span> 要牌 (HIT) <span>D</span> 雙倍下注 (DOUBLE DOWN) <span>SP</span> 分牌 (SPLIT)										

<https://www.playsmart.ca/table-games/blackjack/strategies/?lang>

這是最普遍的賭規，6 副牌，任意 2 張牌可賭倍(DA2)，分牌後可以賭倍(DAS)，莊軟 17(A-6)不加牌(S17)，不可投降(No Surrender)。

這張表格你必須背得滾瓜爛熟!!!!



### 基本測略表(6-Deck,DA2,DAS,S17,No Su

5-8	永遠加牌
9	3-6賭倍，其他加
10	2-9賭倍，其他加
11	2-10賭倍，其他加
12	4-6停牌，其他加
13-16	2-6停牌，其他加
17以上	永遠停牌
A,2	5,6賭倍，其他加
A,3	5,6賭倍，其他加
A,4	4-6賭倍，其他加
A,5	4-6賭倍，其他加
A,6	3-6賭倍，其他加
A,7	3-6賭倍，2,7,8停牌，9-A加牌
A,8-A,9	永遠停牌
2,2	2-7分牌，其他加
3,3	2-7分牌，其他加
4,4	5,6分牌，其他加
5,5	永遠不分牌，當作10來打
6,6	2-6分牌，其他加
7,7	2-7分牌，其他加
8,8	永遠分牌
9,9	2-9都分只有對7不分牌，10-A停牌
10,10	永遠不分牌(已經20點了)
A,A	永遠分牌

<https://teddygotmail.pixnet.net/blog/post/23263546>

## 三、凱利公式

根據賭博贏或輸的機率，計算出每次下注的資金占所有賭本的最佳比例的公式。除可將長期增長率最大化外，此方程式不允許在任何賭局中，有失去全部現有資金的可能，因此有不存在破產疑慮的優點。方程式假設貨幣與賭局可無窮分割，而只要資金足夠多，在實際應用上不成問題

凱利公式的最一般性陳述為，藉由尋找能最大化結果對數期望值的資本比例  $f^*$ ，即可獲得長期增長率的最大化。對於只有兩種結果的簡單賭局：要麼輸掉所有注金，要麼贏得注金乘以特定賠率，公式的一般性陳述為

$$f^* = \frac{bp - q}{b} = \frac{p(b + 1) - 1}{b},$$

其中

- $f^*$  為現有資金應進行下次投注的比例；
- $b$  為投注可得的賠率（不含本金）；
- $p$  為獲勝率；
- $q$  為落敗率，即  $1 - p$ ；

这是唐·施莱辛格（Don Schlesinger）根据高低算牌法的真数而进行最佳下注及修正的基本策略得出的研究结果

6副牌，每100手，最小下注\$8，最大下注\$100，玩家的利润				
切牌点	庄家软17点 必须停牌	庄家软17点必须停牌 并允许投降	庄家软17点 必须拿牌	庄家软17点必须拿牌 并允许投降
剩2副牌	\$9.67	\$11.33	\$8.75	\$10.58
剩1.5副牌	\$14.17	\$16.50	\$13.17	\$15.58
剩1副牌	\$20.58	\$23.58	\$19.42	\$22.58
剩半副牌	\$31.08	\$35.25	\$29.67	\$34.00

## 證明

凱利公式的目標是最大化資產的增長率，也即最大化對數資產的期望值。不失一般性，設開始時的資產是1，每次下注的比例為  $f^*$ ，有  $p$  的機率會以  $b$  的賠率贏錢，這時資產變為  $1 + f^*b$ 。如果輸了，資產就是  $1 - f^*$ 。因此資產的對數的期望值為

$$E = p \log(1 + f^*b) + (1 - p) \log(1 - f^*)$$

要找到最大化這個期望值的  $f^*$ ，只需令  $E$  對  $f^*$  的導數值為零：

$$\frac{dE}{df^*} = \frac{pb}{1 + f^*b} - \frac{1 - p}{1 - f^*} = 0$$

求解上述方程式即得凱利公式

$$f^* = \frac{pb + p - 1}{b}$$

<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%87%B1%E5%88%A9%E5%85%AC%E5%BC%8F>

- example ( 如何下注 )

在21点游戏中，除了Blackjack的赔率是1.5，其他你投注可得的赔率（不含本金）是1。  
如果忽略Blackjack的影响， $b = 1$

$$f^* = p - q = p - (1 - p) = 2p - 1$$

当获胜率 $p \leq 50\%$ 时， $f^* \leq 0$ ，不赌为赢！

真数	玩家优势 (%)	玩家胜率 (%)	投注比例 (%)
<=1	<=0	<=50	0
1.5	0.25	50.25	0.5
2	0.5	50.5	1
2.5	0.75	50.75	1.5
3	1	51	2
3.5	1.25	51.25	2.5
4	1.5	51.5	3
4.5	1.75	51.75	3.5
5	2	52	4
5.5	2.25	52.25	4.5
6	2.5	52.5	5
6.5	2.75	52.75	5.5
7	3	53	6
7.5	3.25	53.25	6.5
8	3.5	53.5	7
8.5	3.75	53.75	7.5
9	4	54	8

注：投注比例根据凯利公式  $f^* = 2p - 1$  计算得到。

真数	玩家优势 (%)	投注比例 (%)	根据凯利公式计算出的最佳下注额 (\$)				
			赌资\$1000	赌资\$2000	赌资\$3000	赌资\$5000	赌资\$10000
<=1	<=0	<=0	<=5	<=5	<=10	<=15	<=25
1.5	0.25	0.5	5	10	15	25	50
2	0.5	1	10	20	30	50	100
2.5	0.75	1.5	15	30	45	75	150
3	1	2	20	40	60	100	200
3.5	1.25	2.5	25	50	75	125	250
4	1.5	3	30	60	90	150	300
4.5	1.75	3.5	35	70	105	175	350
5	2	4	40	80	120	200	400
5.5	2.25	4.5	45	90	135	225	450
>=6	>=2.5	>=5	50	100	140	250	500

当真数小于-3时，建议上厕所或出去透透气或换张桌子。

## 完胜21点三步曲

第一步：玩转基本策略并坚决执行基本策略。

第二步：熟练掌握算牌技术及利用算牌结果来调整基本策略。

第三步：为了让盈利最大化并且把风险降到最低，一定要运用凯利公式来优化你的下注。

<https://www.youtube.com/watch?v=CvuVTkliOjQ>