

想一想

囚徒困境

第7組 黃柏歲 王琬儀 李彥槿 譚浚邦 楊書婷





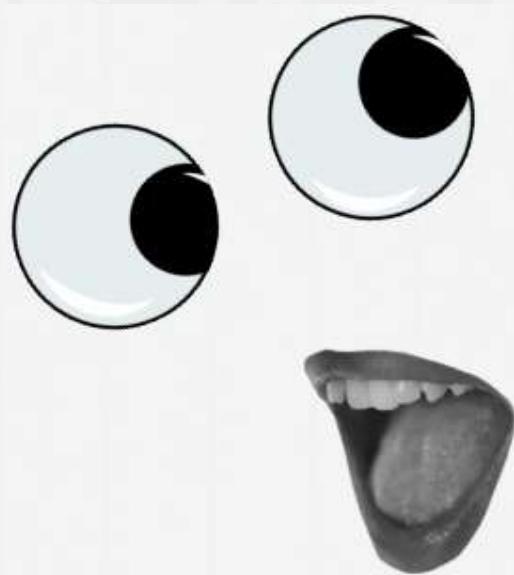
Video unavailable
[Watch on YouTube](#)





！免責聲明！

我們並未上過欣豪老師的課
只有堂基礎數學
但他並未提及關於囚徒困境的事
也不認識學長姐有上過的
(可能有但人緣差不知道也借不到筆記
如果在場有的話歡迎借一下我們可以參考



目錄

1

什麼是囚徒困境？

2

經典案例

3

博奕結構

4

納什均衡：
理性選擇的結果

5

帕雷托最適
(帕雷托最適解)

6

節目效果

7

重複囚徒困境

8

現實應用

9

總結

什麼是囚徒困境？

囚徒困境是博弈論中的經典問題，描述了個體在追求自身利益時，可能會因缺乏合作而導致次優結果。



關鍵要素



雙方參與者



合作與背叛選擇與者



結果取決於雙方的選擇

經典案例



故事背景：兩個犯罪嫌疑人被警方偵訊。

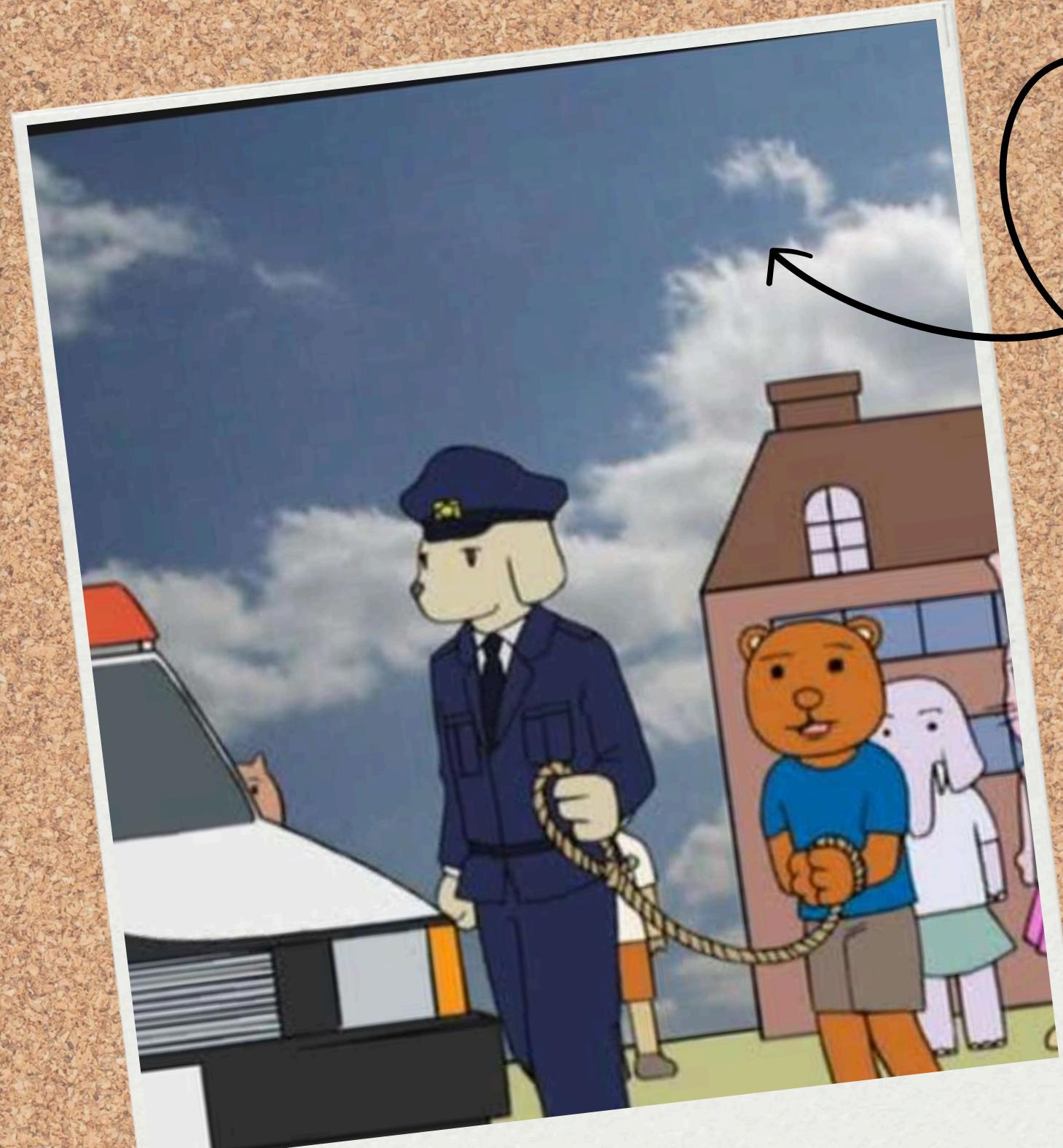
警方條件：

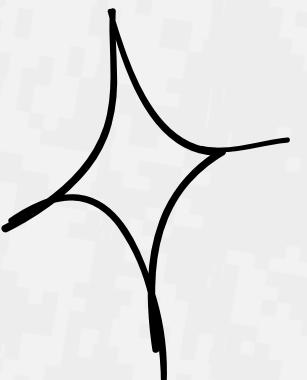
若兩人都保持沉默：各判1年

若一人供出對方：供者免罪，另一人判10年

若兩人都供出對方：各判5年

關鍵條件：兩個犯罪嫌疑人是"分開偵訊"，
兩個人無法溝通交換訊息。





博奕結構



以支付矩陣的形式顯示兩個人在不同選擇下的結果：
保持沉默表選擇與對方"合作"，供出對方表"背叛"

(甲,乙)	甲選擇合作	甲選擇背叛
乙選擇合作	(-1,-1)	(0,-10)
乙選擇背叛	(-10,0)	(-5,-5)



理性分析---經典案例 的結果



甲的心路歷程：

- 如果乙招供了，那麼我招供的話我就會判5年，不招供的話就判10年，所以我會選擇招供，收益是-5；
- 如果乙不招供，那麼我招供的話我就會被釋放，不招供的話就判1年，所以我會選擇招供，收益是0；

所以，不管乙招不招供，甲只要招供了，對甲而言是最優的策略。



乙的思考邏輯同上，即此時情況就會變為：甲和乙都招供。

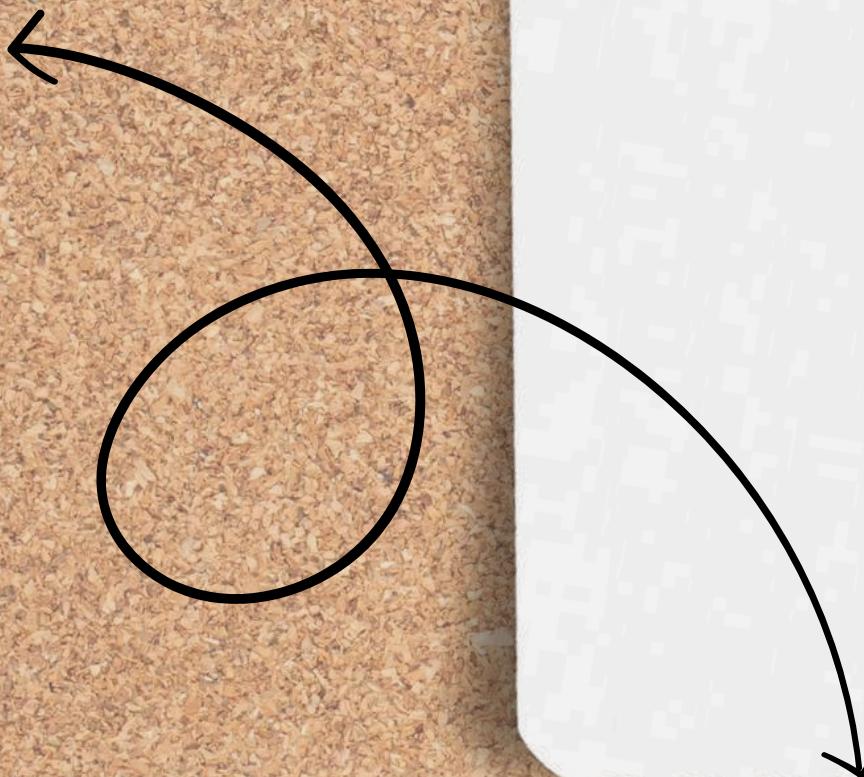


理性分析---經典案例 的結果

甲和乙都招供，也就是都背叛，都選了對自己有利的策略。
這就是「納什均衡」

倘若雙方選擇合作，則會達成「帕雷托最適」

下面會解釋一下兩個名詞





納什均衡（納許均衡）



- **情況條件**：只有兩位或以上參與者的非合作賽局中，假設每位參與者都知道其他參與者的策略情況下，沒有參與者可以透過改變自身策略使自身受益。
- **定義**：如果每個參與者都選擇了自己的策略，並且沒有玩家可以透過改變策略而其他參與者保持不變而獲益，那麼當前的所有策略及其相應結果(利益)構成平衡狀態(每個人的行動都會是自己的最大利益)。此時，這個狀態就叫 "納什均衡 Nash equilibrium" 。

納什均衡（納許均衡）

• 公式 1

假設現在有n為參與者，參與一場非合作的賽局，則第i位參與者得到的收益為：

$$P_i(s_i, s'_i) = \max_{\forall r_i} [P_i(r_i, s'_i)]$$

- * p_i 為參與者i的收穫 (payoff)
- * s_i 代表參與者i使用的策略， s'_i 代表其他參與者使用的策略
- * r_i 代表參與者i的一種替換策略

簡單來說，每個玩家在其他玩家策略固定的情況下，只有選擇自己使用中策略(s_i)應該能使收益最大，替換其他的策略(r_i)，並不會帶來更大的效益。所以沒有動機改變策略。

• 公式 2 [公式 1 別種寫法]

給定一個n人博弈，設：

$N=\{1,2,\cdots,n\}$ 是玩家集合。

每個玩家 i 的策略集合為 S_i ，

$s_i \in S_i$ 表示玩家 i 選擇的策略。

玩家 i 的收益函數為 $u_i(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ ，

其中 $s=(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 表示所有玩家的策略組合。

納什均衡是一組策略 $s^*=(s^*_1, s^*_2, \cdots, s^*_n)$ ，滿足對任意玩家 i 和任意其他策略 $s_i \in S_i$ ：

$$u_i(s^*_1, s^*_2, \cdots, s^*_i, \cdots, s^*_n) \geq u_i(s^*_1, s^*_2, \cdots, s_i, \cdots, s^*_n).$$

換句話說：在 s^* 下，給定其他玩家的策略固定為 s^*_{-i} ，玩家 i 選擇 s^*_i 所獲得的收益至少與採用其他策略 s_i 相同或更高。



我們以 經典案例 為例

(甲, 乙)	乙 合作	乙 背叛
甲 合作	(-1, -1)	(-10, 0)
甲 背叛	(0, -10)	(-5, -5)

① 站在甲角度，乙選擇 合作

$$(a) r_1 = \text{甲合作} : P_{\text{甲}}(r_1, S_{\text{乙}}) = -1$$

$$(b) r_2 = \text{甲背叛} : P_{\text{甲}}(r_2, S_{\text{乙}}) = 0 \quad \therefore (b) > (a)$$

② 站在甲角度，乙選擇 背叛

$$(a) r_1 = \text{甲合作} : P_{\text{甲}}(r_1, S_{\text{乙}}) = -10$$

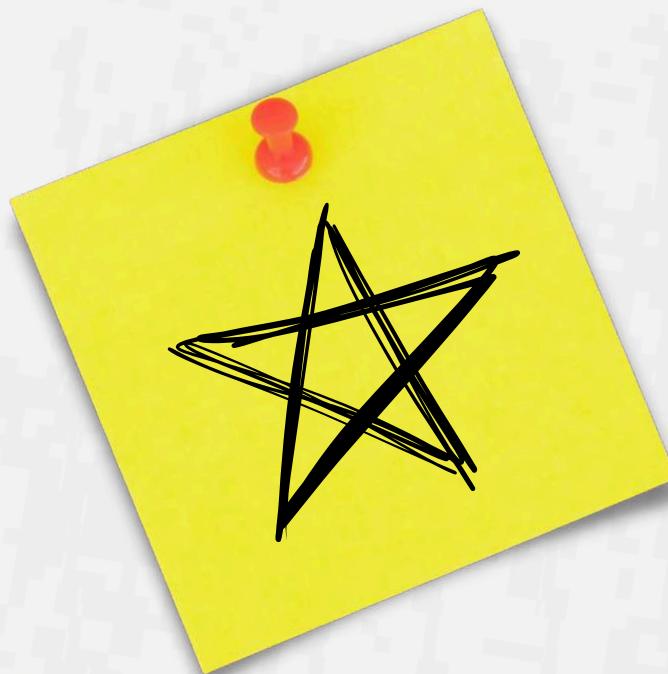
$$(b) r_2 = \text{甲背叛} : P_{\text{甲}}(r_2, S_{\text{乙}}) = -5 \quad \therefore (b) > (a)$$

$\therefore P_{\text{甲}}(S_{\text{甲}}, S_{\text{乙}}), S_{\text{甲}}: \text{背叛}$

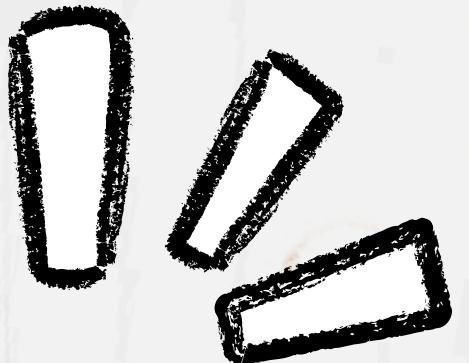


帕雷托最適 (帕雷托最適解)

- 簡介：資源分配的一種理想狀態。給定固有的一群人 s 和可分配的資源，我們從一種分配資源的方式中，分配資源給 s ， s 從原本沒有資源的狀態到獲得資源的狀態後，在 s 沒有任何的影響下，至少一人狀態變好，就叫"帕雷托改善"。
帕雷托最適的狀態就是不可能再有更多的帕雷托改善的狀態 (帕雷托改善的出現次數: 0)。
- * 簡單來說，每個人都分到資源，然後分到資源的人中，不會出現任何一個拿到資源的人比其他有拿到資源的人還要好。就是帕雷托最適的狀態。



帕雷托最適 (帕雷托最適解)



- 定義：帕雷托最適只是各種理想態標準中的「最低標準」。也就是說，一種狀態如果尚未達到帕雷托最適，那麼它一定是不理想的，因為還存在改進的餘地，可以在不損害任何人的前提下使某一些人的福利得到提高。





帕雷托最適 (帕雷托最適解)

- 舉例：

假設一個社會裡只有一個百萬富翁和一個快餓死的乞丐，如果這個百萬富翁拿出自己財富的萬分之一，就可以使後者免於死亡。但是因為這樣無償的財富轉移損害了富翁的福利（假設這個乞丐沒有什麼可以用於報酬富翁的資源或服務），所以進行這種財富轉移並不是帕雷托改善，而這個只有一個百萬富翁和一個餓死乞丐的社會可以被認為是帕雷托最適的。

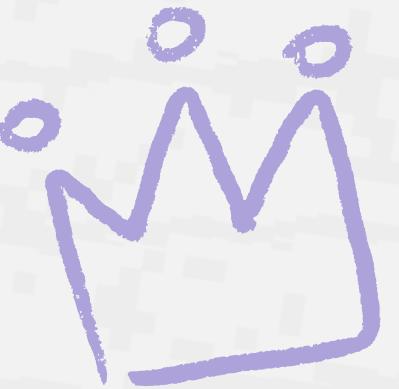
並不是兩人都處於帕雷托最適，因為富翁的資源受損了...。但如果兩人都得到資源，那就是！



從前者最一開始的例子，我們提到：

1. 當甲和乙都選擇**背叛**的時候，結果會是**納什均衡**狀態
2. 當甲和乙都選擇**合作**的時候，結果會是**帕雷托最適**狀態

(甲,乙)	甲選擇合作	甲選擇背叛
乙選擇合作	(-1,-1)	(0,-10)
乙選擇背叛	(-10,0)	(-5,-5)



納什均衡 與 帕雷托最適 與 囚徒困境 關係

* 前面我們提到，甲做出 "背叛" (策略) 的選擇，會對他自身來說是最好的結果，乙做出 "背叛" (策略) 的選擇，也會對他自身來說是最好的結果。所以兩者都做出 "背叛" 的結果是 "納什平衡"。

納什平衡的觸發條件 即 考慮到他人的策略下，自己會選出對自身來說最大利益的策略。

所以 甲和乙皆被判刑5年的結果，是在 甲 和 乙 只有考慮到 **自身情況** 下，做出的最優選擇，這個結果即是 甲 和 乙 的 納什平衡。即使兩個合作能達到更好的結果。

納什均衡狀態下的結果

在不同場景下，選擇的策略並不一定是全局的最優解，但卻是相對於其他人的策略而做出的最優解，即每個人的決策都是對自己最有利的解決方案，我們稱之為納許均衡，又稱為非合作博弈均衡。

納什均衡 與 帕雷托最適 與 囚徒困境 關係

這也是建立在 "個人利益最大化" 和 "組織利益最大化" 互相衝突的情形，也就是只能在 "個人利益" 與 "組織利益" 中做出一種選擇。這樣的情況，我們稱為 "零和 博弈 zero-sum game" 。

* 零和 博弈：結果是一個人全贏或一個人全輸

除此之外，甲 和 乙 之所以只會考慮到 自身利益最大化，也是因為他們兩者缺乏 "溝通 communicate" 與 "信任 trust"，所以只能理性的考慮到 優先選擇 自身利益最大化。



納什均衡 與 帕雷托最適 與 囚徒困境 關係

* 前面我們還提到，甲做出"合作"(策略)的選擇，和乙做出"合作"(策略)的選擇，也會對他們來說是最好的結果。所以兩者都做出"合作"的結果是"帕雷托最適"。

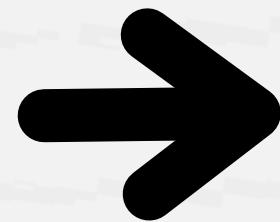
帕雷托最適 即 純給一群人分配資源，每個分到資源後不會有人因此而獲得利益，也就是大家一起等量成長的概念。

所以當雙方都做出"合作"(策略)，是建立在他們已經熟悉彼此，知道雙方會做出什麼樣的行動(策略)前提下，才會發生的結果。此時他們思考的利益已經從自己轉變到群體

納什均衡 與 帕雷托最適 與 囚徒困境 關係

這是建立在 甲 和 乙 行動的方式會從原本"自主利益優先"逐漸走向"團體利益優先"，其結果的變化會是：

兩人皆被判刑5年



兩人皆被判刑1年

"納什均衡" 狀態

走向

"帕雷托最適" 狀態

是因為此時 兩人會從 "只考慮到自身利益的狀態" 轉為先去比較所有的情況，就會發現 " 兩人合作後對各自的獲利 " > " 兩人只考慮自身的獲利 "

納什均衡 與 帕雷托最適 與 囚徒困境 關係

我們把經典案例的結果，轉換成一個表個去看：

甲, 乙 都背叛	甲背叛, 乙合作	甲合作, 乙背叛	甲,乙都合作
甲判刑 5 年	甲不判刑	甲判刑10年	甲判刑1年
乙判刑 5 年	乙判刑10年	乙不判刑	乙判刑1年



納什均衡 與 囚徒困境 關係

甲, 乙 都背叛	甲背叛, 乙合作	甲合作, 乙背叛	甲, 乙都合作
甲判刑 5 年	甲不判刑	甲判刑10年	甲判刑1年
乙判刑 5 年	乙判刑10年	乙不判刑	乙判刑1年

零合 博弈 → 非零合 博弈

雖然說其中一人背叛，另一人合作的情況下，都會有一方是不判刑的，但是這對雙方整體而言並不是最佳的選擇，而且根據納什平衡，結果最後都會是甲乙都背叛的結果



帕雷托最適 與 囚徒困境 關係

甲,乙都背叛	甲背叛,乙合作	甲合作,乙背叛	甲,乙都合作
甲判刑 5 年	甲不判刑	甲判刑10年	甲判刑1年
乙判刑 5 年	乙判刑10年	乙不判刑	乙判刑1年

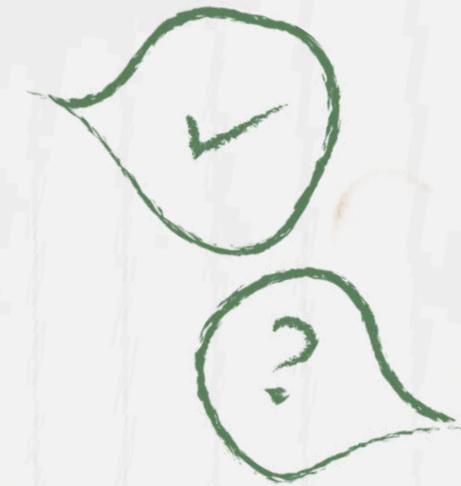
但如果當兩人互相熟悉，多次合作的情況下，對於兩人來說都要被判刑1年，但是結果對於兩人來說是對等的不會有人會因此獲利或有所損失，滿足帕雷托最適解。

納什均衡 與 帕雷托最適 與 囚徒困境 關係

	納什均衡	帕雷托最適
考慮對象	自己本人	群體
前提	共同經歷次偏少， 群體彼此缺乏信任	共同經歷次數偏多， 群體彼此信任
預期結果	都背叛	都合作

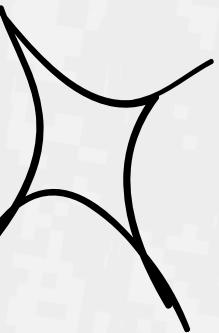


節目效果



英國BBC電視中心製作的Golden Balls：
節目中，二名參賽者爭取一筆獎金，例如1000英鎊。
二人隔桌對坐，面前各有兩顆金球。
其中一個金球裡面寫著Split（平分）
，另一個金球寫著Steal（竊佔）
如果二人均選擇Split，則獎金平分。
如果二人均Steal，則獎金槓龜。
而如果一人Steal而另一人Split，則Steal者獨佔全額獎金，而
Split者只能抱蛋含恨而歸。

節目效果



節目的變數在於它允許了參賽者在選擇前進行溝通，多了個訊號傳遞的過程，下圖是以支付矩陣的形式表示的結果：

(甲,乙)	甲選擇合作	甲選擇背叛
乙選擇合作	(500,500)	(1000,0)
乙選擇背叛	(0,1000)	(0,0)

節目效果

Golden Balls賽局容許參賽者在決定Split或Steal之前互相溝通，這是賽局理論所謂的「訊號傳送」（signaling）機制，讓參賽者向對方暗示甚或明示自己是何種類型的玩家。

Jason Li



Jesus



重複囚徒困境

面對不斷重複發生的問題，我們可以用未來的決策當作當前討論的重要籌碼，雙方可以達成協議選擇犧牲自己來達成長遠的最佳利益。

我們將未來的價值係數用 δ 來表示，若是 $\delta = 0$ 的話，表示他們根本不在意未來的刑期的價值，導致他們選擇互相出賣對方，並持續下去，若 δ 趨近於 1 的話，則代表他們會顧慮未來的刑期而選擇犧牲自己來保全對方；若是 δ 介於 0-1 時，任何情況都可能發生。

重複囚徒困境



有限的重複囚徒困境：

若輪迴有終點，情況會完全不一樣，雙方在最後一次選擇時因沒有後續作用所以會選擇背叛來獲得最高利益；既然知道最後一天都會背叛，則倒數第二天的選擇也不會影響最後一天的背叛，以此類推，在有終點的博弈導致兩人會一直背叛到底，合作不會在任意一天達成。



現實應用

1

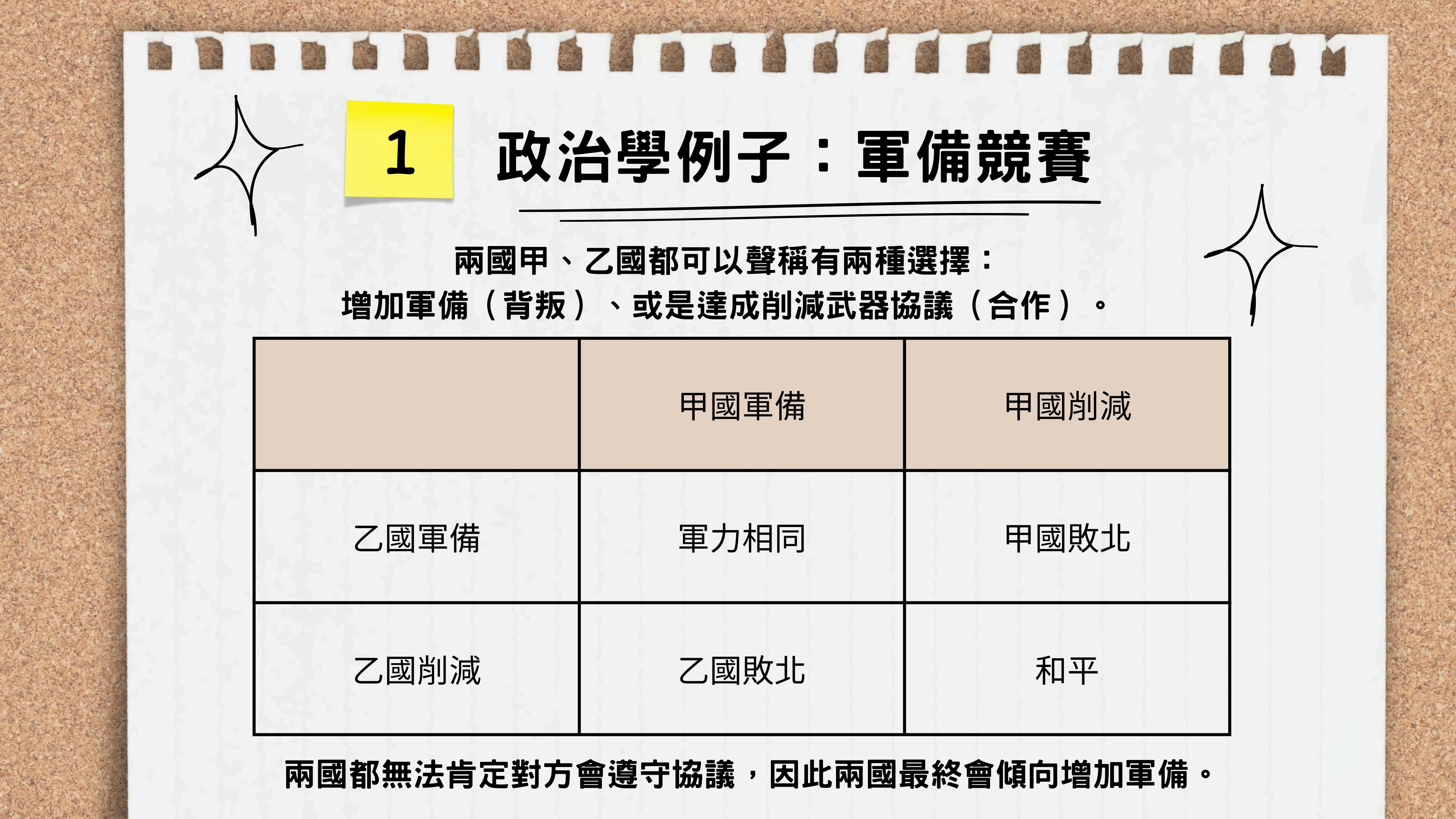
商業與國際案例：

- 商業競爭：公司之間的價格戰，兩家公司都可能選擇降價來爭奪市場份額，最終雙方都可能受損。
- 環境問題：國家面對全球氣候變遷協議時的合作與背叛，單個國家減排會遭受經濟損失，而不減排會造成全球問題。

2

下面說明

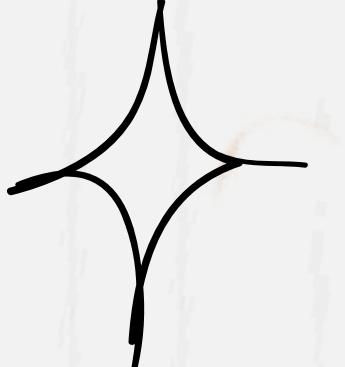
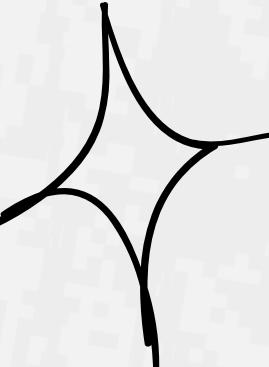
- 政治學例子：軍備競賽
- 經濟學例子：關稅戰



1

政治學例子：軍備競賽

兩國甲、乙國都可以聲稱有兩種選擇：
增加軍備（背叛）、或是達成削減武器協議（合作）。



	甲國軍備	甲國削減
乙國軍備	軍力相同	甲國敗北
乙國削減	乙國敗北	和平

兩國都無法肯定對方會遵守協議，因此兩國最終會傾向增加軍備。

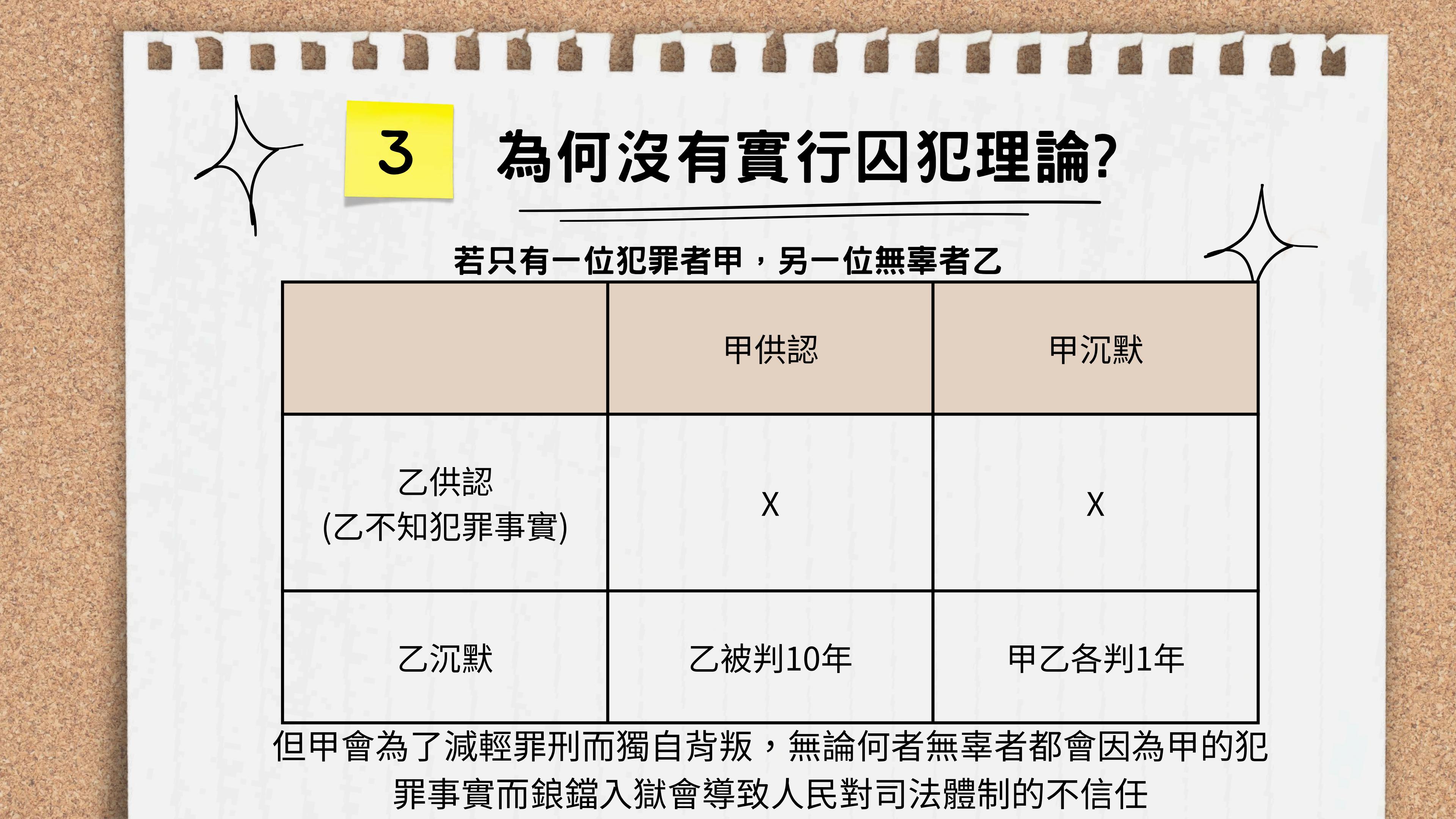
2

經濟學例子：關稅戰

兩國甲、乙國都可以有兩種選擇：
提高關稅保護商品（背叛）、與對方達成協定降低關稅（合作）。

	甲國提高關稅	甲國達成協議
乙國提高關稅	雙方經濟驟減	甲國敗北
乙國達成協議	乙國敗北	共同獲利

雙方在意識到經濟驟減時，又會回到共同協議，持續重複。



3

為何沒有實行囚犯理論？

若只有一位犯罪者甲，另一位無辜者乙

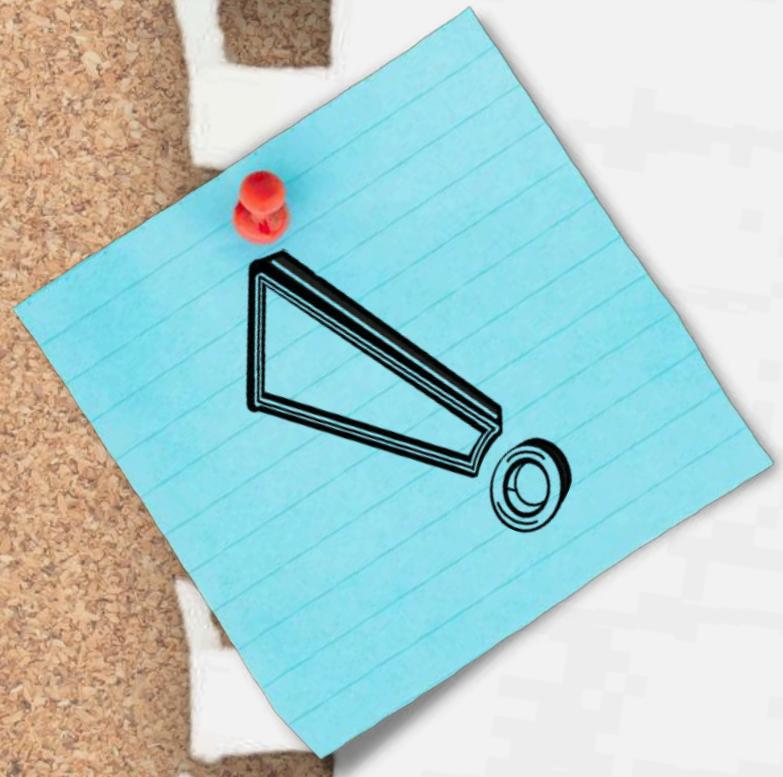
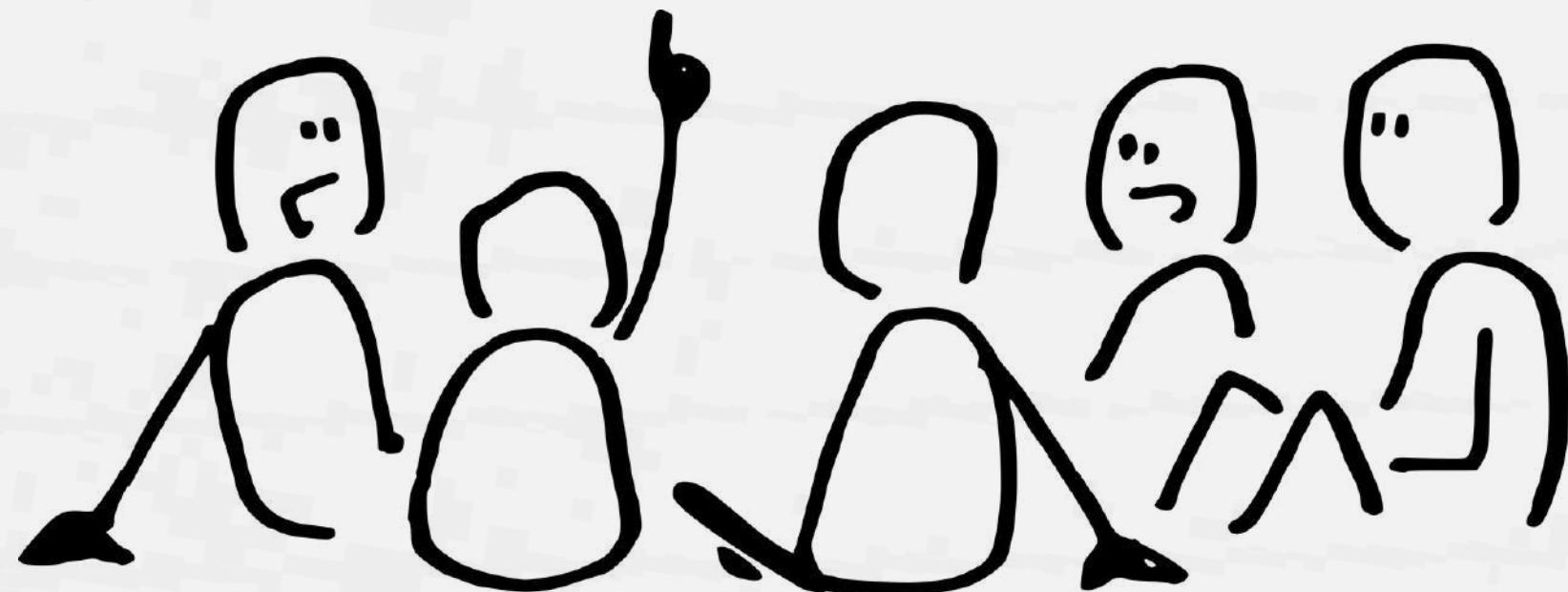
	甲供認	甲沉默
乙供認 (乙不知犯罪事實)	X	X
乙沉默	乙被判10年	甲乙各判1年

但甲會為了減輕罪刑而獨自背叛，無論何者無辜者都會因為甲的犯罪事實而锒铛入狱會導致人民對司法體制的不信任

反思與討論

如何解釋現實世界中為何人們有時能夠合作？

你認為「信任」如何影響囚徒困境的結果？



總結

1

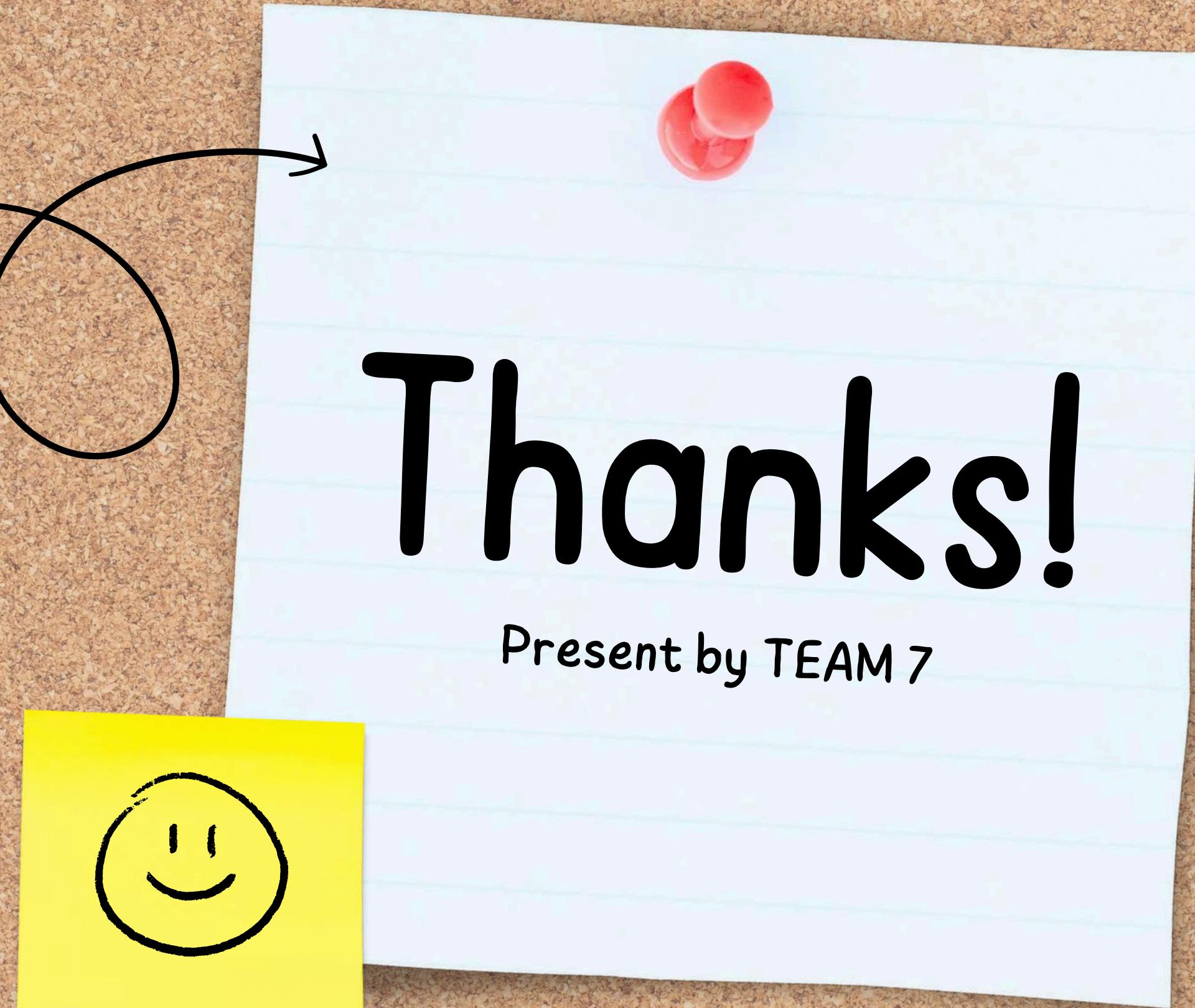
囚徒困境反映了自私行為與合作之間的緊張關係，提醒我們在很多情境中，選擇合作能夠達到更好的集體結果。

2

合作的重要性：即便個人短期利益可能衝突，長期合作更能帶來最大收益。

3

囚徒困境展示了個體理性導致集體不理性的情境。納什均衡通常與帕累托最優不一致，但這一矛盾揭示了設計激勵機制、促進合作的重要性，是經濟學和社會科學中的關鍵課題之一。



Thanks!

Present by TEAM 7

