

數學思維與解題

賽局理論的介紹

1944 年，馮·諾伊曼 & 奧斯卡·摩根斯特恩《博奕論與經濟行為》

考慮經濟學相關遊戲中的個體可以預測的行為與其實際行為之間的關係，並研究遊戲的最優破解策略。

1950 年，美國經濟學家約翰·那什以“非合作博奕”為題的博士論文中，誕生—納什均衡。

納什均衡：在多人賽與非合作博奕中，不論對方選擇甚麼樣的策略，自己只要選擇能夠讓自己收益最大化的策略（支配性策略）

與此同時，其他所有的博奕者也遵循這樣的原則（選擇自己的支配性策略）

各種策略組合形成納什均衡，同時沒有任何一個博奕者可以通過“獨自行動”（單方面改變自身策略）而增加收益

1950 年，阿爾伯特·舒克：囚徒困境—用來解讀納什均衡

警察逮 2 嫌疑人(A 和 B)，無足夠證據，給嫌疑人 3 個選擇

- 1.二人保持沉默，每人判半年
- 2.二人互相背叛，每人判 5 年
- 3.一人沉默，一人背叛，沉默者判 10 年

對 A，因為不知 B 選擇，所以坦白最好。

因為不管 B 的選擇，要麼立即釋放，要麼判 5 年，不管怎麼說都比判 10 年還要好。

同理，對 B 也相同。

這時，坦白就是對於各自的最優解，稱納什均衡。

但是，以共同利益而言，雙方沉默最優，但須雙方保持絕對理性-）可是很難達成。

1981 年，阿蘭·勒杜在法與雜誌中設計以 “猜數字” 為規則的遊戲，獲勝者是猜出最接近平均猜測數值 $2/3$ 的人

1995 年，德國經濟學家內格爾·羅斯瑪麗首先在實驗經濟學領域，用 “美人投票” 的方法來分析人們的經濟決策過程，從而研究人們的推理深度。

1978 年，赫伯特·亞歷山大·西蒙：有限理性

意味著人們根據自己擁有的信息做出相對合理的決定

問題：

沒有完美的信息，像永遠無法預測別人是如何思考別人，或是無法預測別人是如何思考別人如何思考別人。畢竟，預測他人行為助於自己的決定，但每人皆可進行多層深度推理，自身都無法確定自己止步於哪一級推理，更何況推理別人的。

結論：無法做出最大程度優化個人利益的決策

美人投票：

在 19 世紀的歐洲國家曾經流行過一種選美投票活動。

餐與者須從多名候選女性中投票選出最美的藝人，結果揭曉後投票給勝出那位女性的投票者也可獲得獎品。

（是凱恩斯在其著作《就業，利息與貨幣通論》的第 12 章中所虛構的

目的：用於解釋股票市場的價格波動。）

美人投票結論：

最簡單的辦法是選擇你認為最吸引人的面孔（1 級推理）

思考甚麼樣的面孔比較大眾審美，然後基於你自己對大眾審美的了解來進行判斷（2 級推理）

進一步思考其他人對大眾審美的了解是怎樣的，在其他人的思考中，這種平均化的審美到底有哪些不同（3 級推理）

當然還有更多，更高級的推理

美人投票總結：

不是根據自己的判斷去選擇那些我們認為更漂亮的面孔，甚至也不是根據那些我們所認為的他人的平均意見去進行判斷的。換句話說，用智慧預測那些平均意見是如何預測其他人的平均意見的預測。

凱因斯認為這種想法可以解釋股票的價格，股票的價格並非基於其資產的價值，甚至不是基於其他投資者對資產價值的看法，而是基於投資者所認為的其他投資者所持有的關於資產價值的一般觀點，甚至以及更高層次的估計。

美人投票實例 1：

阿蘭·勒杜 (Alain Ledoux) 是「猜測」的創始人

1981 年，Ledoux 在他的法國雜誌 *Jeux et Stratégie* 中使用這個遊戲作為決勝局。最接近 $2/3$ 平均猜測值的人獲勝。

玩家同時選擇 0 到 100 之間的實數（含）。遊戲的獲勝者是選擇最接近所有玩家選擇號碼的平均值 $2/3$ 數字的玩家

。

Rosemarie Nagel (1995) 揭示了此類猜謎遊戲的潛力：

它們能夠揭示參與者的「推理深度」

理論結果：

任何高於你期望其他人平均猜測值 $2/3$ 的數字都不能成為納許均衡的一部分。

如果每個人都猜 100 那最高平均值為 $66 + 2/3$ ，任何高於最大平均值的數獲勝機率都不高。

但是如果大家也都是這樣想，那最高平均值為 $44 + 4/9$

如果一直地玩遊戲，每走一步，最高可能的邏輯答案就會不斷變小，平均值將接近 0，所有其他高於 0 的數字都已刪除。如果所有玩家都理解這個邏輯並選擇 0，則遊戲達到納許均衡。在這種狀態下，每位玩家都根據其他人的選擇 選擇了對自己來說最好的應對策略。

總結：

這個遊戲說明了一個行動者的完美理性與所有玩家理性的常識之間的差異。

為了達到 0 的納許均衡，這個博弈要求所有參與者都完全理性，理性成為常識，並且所有參與者都期望其他人做出相應的行為。

常識意味著每個玩家都擁有相同的訊息，他們也知道其他人都知道這一點，並且其他人也知道其他人都知道這一點，所有玩家的理性常識是獲勝猜測為 0 的原因。

猜謎遊戲取決於三個要素：

- (1) 受試者對 0 級遊戲的看法；
- (2) 受試者對其他玩家認知程度的期望；
- (3) 受試者能夠完成的遊戲推理步驟的數量。

因此，您只需提前一步思考，就有更高的機會贏得比賽。

這意味著玩這種遊戲的完全理性的玩家不應該猜測 0，除非他們知道其他玩家也是理性的，並且所有玩家的理性都是常識。如果一個理性的玩家合理地相信其他玩家不會遵循上述的淘汰鏈，那麼他猜測 0 以上的數字作為他們的最佳反應就是理性的。

事實上，我們可以假設大多數參與者都不是完全理性的，並且對彼此的理性沒有共同的認識。因此，他們也會期望其他人具有有限理性，從而猜測一個大於 0 的數字。

實際調查結果

不太可能有很多人會依照納許均衡理性地進行遊戲。這是因為遊戲沒有嚴格的優勢策略，因此需要玩家考慮其他人會做什麼。

但是為了實現納許均衡，參與者需要假設其他人都是理性的，並且存在理性的常識。

Grosskopf 和 Nagel 的調查也顯示，大多數玩家第一次玩這個遊戲時不會選擇 0。但是，經過一些重複之後，他們意識到 0 就是納許均衡。

Nagel 的一項研究報告了平均初始選擇約為 36。

科赫和薩特比較了個人和群體在玩這類遊戲時的行為。雖然兩組受試者應用的推理程度大致相同，但小組學習得更快。這表明，重複使一組人能夠觀察其他人在先前遊戲中的行為，並相應地選擇一個可以增加他們贏得遊戲機會的數字。

斯布里利亞的調查顯示，非獲勝者經常試圖模仿獲勝者對遊戲結構的理解。

因此，其他參與者採取的策略是對模仿者行為的最佳反應，而不是對平均理性水準的反應。這加速了博弈納許均衡的實現。

美人投票實例 2：

在 2011 年，美國公共廣播電台（National Public Radio）的 Planet Money 節目進行如下實驗：實驗者首先觀看分別有關貓，懶猴和北極熊的三個動物視頻，再被分成兩組。第一組需要回答：你認為最可愛的動物是哪一種；第二組需要回答：你認為其他實驗者認為最可愛的動物是哪一種。實驗結果表明，第一組回答貓的人數最多，佔 50%；而第二組回答貓的人數佔到了總數的 76%。

來自科羅拉多州的《星球金錢》聽眾瑪拉伍德 (Marla Wood) 被分配到第二組。她認為懶猴最可愛。但她選擇了貓，因為她認為其他人都會選擇那隻貓。

如果股民都跟瑪拉想的一樣，你可能會出現一個巨大的小貓泡沫，即使沒有人認為小貓很可愛。

就像房地產泡沫。人們不斷購買房屋，不一定是因為他們認為房價合理，而是因為他們認為其他人會繼續以任何價格購買房屋。

這個實驗結果與凱因斯的理論一致：第二組的人通常能夠忽略自己的偏好，並根據他人的預期偏好準確地做出決定。

方塊 K

這是賽局理論的例子

如果：1.所有人都是理性

2.所有人都相信其他人都是理性

3.所有人都相信其他人都相信其他人都是理性

當所有人都選到最佳解，稱為納許均衡。

獲勝方法：看穿對手的「合理」

最基本的推理

First:

一級推理：全員都是從 0~100 的數字中隨機取數，平均數即為 50，再乘以 0.8
最終值就變成 40

二級推理：預測他人接想到亦即推理，所以 $40 \times 0.8 = 32$ ，平均數為
 $(40 \times 4 + 32) / 5 \times 0.8 = 30.72$

Second:

藉由第一輪，以“所有玩家都會選擇 26”為推導起點

一級推理：平均數為 26 乘以 0.8 最終值為 20.8

二級推理：取值 $21 \times 0.8 = 16.8$ ，平均數為 $(21 \times 4 + 17) / 5 \times 0.8 = 16.16$

.....

經過幾輪的比賽後，平均數收斂到 0

性格分析

苜屋駿太郎：醫學生；頭腦冷靜、冷酷無情的青年，選擇成醫是因為想要感覺自己對生命有否關心。無論是對於別人還是自己的生命也毫不在意，對利用別人沒有罪惡感，但是為了活下去會冷靜的分析並進行賭注。

九頭龍慧一：律師；曾經抱著「生命的價值是平等」的高尚理想、作為一個維護著被害者的律師而努力著。但是在加入成為一家美國大企業的顧問律師後，於大

公司與受害的訴訟者之間，感到貧富差距所帶來的不公平，從而被自身的無力感與罪惡感所苛責。

大門妃納子：從事高利貸、依靠直覺的女性。

彌重勉三：年老數學者。對於數學計算手到拿來，自稱只要以自己的頭腦便能把「遊戲」CLEAR。

飛鳥馬尚：證券業務員。精通經濟學。

個別思考過程

(基本推導：從平均數 50 出發，正向推導目標值慢慢變小直至跌落納什均衡的 0)

第一輪

高：五人選任藝術的平均值為 $50 \times 0.8 = 40$ 選 40

醫：如果大家有想到 40，那目標值為 $40 \times 0.8 = 32$ 選 32

數： $0.8 \times (40 \times 4 + X) / 5 = X$ $X = 30.47$ 選 31

金：可能是猜有人會選 40 以上的數字，所以 32 向上修 1 選 33

律：認為有人選 32 又有人選 30 的情況下，要選比 30 低但又接近 30 所以選 29

第二輪

高： $32 \times 0.8 = 25.6 \rightarrow 26 \times 0.8 = 20.8$ 選 21

醫：如果大家有想到 21，那目標值為 $21 \times 0.8 = 16.8$ ，選 17

數： $0.8 \times (21 \times 4 + X) / 5 = X$ $X = 16$ 選 16

金：認為有人選 21 又有人選 17 的情況下， $0.8 \times (21 \times 2 + 17 \times 2 + X) / 5 = X$

$X=14.4762$ 選 15

律：認為有人選 21 又有人選 17 的情況下，再根據上一輪的結果猜測數學家和金融家可能會選 16 與 18 去調，所以 $0.8 \cdot (21+17+16+18+X)/5=X$ $X=13.71$

選 14

第三輪

高： $17 \cdot 0.8=13.6$ \rightarrow $14 \cdot 0.8=11.2$ 選 11

醫：如果大家有想到 $11 \cdot 0.8=8.8$ ，那目標值為 $9 \cdot 0.8=7.2$ ，選 7

數： $7 \cdot 0.8=5.6$ \rightarrow $5 \cdot 0.8=4.0$ ，那目標值為 $0.8 \cdot (4+4+X)/5=X$ $X=3.0476$ 選 3

金： $11 \cdot 0.8=8.8$ ，那目標值為 $9 \cdot 0.8=7.2$ ，選 7

律：認為有人選 7 又有人選 6 的情況下，所以 $0.8 \cdot (7+7+6+6+X)/5=X$
 $X=4.9523$ 選 5

第四輪

高： $7 \cdot 0.8=5.6$ \rightarrow $6 \cdot 0.8=4.8$ \rightarrow $5 \cdot 0.8=4$ 選 4

醫：猜測有人選納許均衡的 0，但也有人會延續之前方式

$0.8 \cdot (4+4+0+0+X)/5=X$ $X=1.5238$ 選 2

數：納許均衡 選 0

金：納許均衡 選 0

律：跟醫生想得差不多，但又猜測友人也會想到，所以 $0.8 \cdot (4+2+0+0+X)/5=X$
 $X=1.1428$ 選 1

第五輪

高： $4*0.8=3.2 \rightarrow 3*0.8=2.4 \rightarrow 2*0.8=1.6$ (或許想著有其他人選 0 以外的數字，於是在基數 0 往上修 1) 選 1

醫：故意打破平衡（畢竟選 80 以上的數字絕對不可能贏，或許還有機會拉到同盟） 選 100

數：納許均衡 選 0

金：納許均衡 選 0

律：納許均衡 選 0

第六輪

高：與醫學生結盟，還有還人情（個性使然） 選 100

醫：賭高利貸會選擇互救 $0.8*(100+X)/5=X$ $X=19.0476$ ，同時，如果有人猜到會結盟時，

$0.8*(100+20+X)/5=X$ $X=22.85$ ； $0.8*(100+20+20+X)/5=X$ $X=26.6$
 $(22.85+26.6)/2=24.725$ 選 25

數：納許均衡 選 0

金：預測可能又會有人亂來，所以不能選 0，但大部分人會選 0 所以往上隨便選（聽說在日文中因為發音簡單時常被提到的 3/5/8） 選 5

律：有想過可能有結盟，但很難確定，所以隨便抓個數字 選 17

第七輪

高：預測會交互亂場 $0.8*[100+(20*3)+X]/5=X$ $X=30.47619$ 選 30

醫：做球讓人以為有規律性，順便再讓他人扣分 選 100

數：納許均衡 選 0

金：同上輪，但上修仍不夠 選 10

律：預測多數人會重新往 0 修正（高&醫不一定會繼續結盟，但是可能高&醫其中一個會以為繼續結盟） $0.8*(20+X)/5=X$ $X=3.80952$ 選 4

第八輪

高：故意不選 100（先殺覺得有規律）選 10

醫： $0.8*(100+X)/5=X$ $X=19.0476$ 選 20

數：（覺得仍會有規律）基於上輪 30, $0.8*(100+30*3+X)/5=X$ $X=36.19047$ 選 36

金：（覺得仍會有規律）基於上輪 30，同時互救時的 20， $0.8*(100+30*2+20+X)/5=X$ $X=34.2857$ 選 35

律： $0.8*(100+X)/5=X$ $X=19.0476$ 選 20

第九輪（因為沒有規律，所以回歸賽局理論）

高：第八輪的結果作為基數， $20*0.8=16$ -> $16*0.8=12.8$ -> $13*0.8=10.4$ -> $10*0.8=8$ 選 8

醫：第七輪的結果作為基數， $0.8*(30+X)/5=X$ $X=5.714$ 選 6

數、金：腦袋已經混亂的無法分析 亂猜

律：考慮第七輪的結果+第八輪的結果， $0.8*(20+30+X)/5=X$ $X=9.5238$ 選 10

第十輪

高：上一局結果作為基數但又覺得有人可能選 0，所以基數向下修 1 選 7

醫：有人會選納什均衡 0，但或許高利貸會繼續他的方法 $8*0.8=6.4$ ，取 6 作為基數，再以 $0.8*(6+X)/5=X$ $X=1.142857$ 選 1

數：納許均衡 選 0

金：納許均衡 選 0

律：跟醫學生想法一樣，但同時有考慮到會有人跟自己想法一樣，所以

$0.8 \cdot (6 + 1 + 1 + X) / 5 = X$ $X = 1.5238$ 選 2

這時，數學家跟金融家死亡；高利貸(-7)，醫學生(-8)，律師(-4)

此時增加新規則：1.二人及以上人數選同數字時，選擇無效，扣一分

2.四捨五入為選擇數，雙倍扣分

新增的規則 1. 二人及以上人數選同數字時，選擇無效是用來遏止納許均衡發生

(不能無腦選 0 但是選 1 也很容易與其他人撞數)

(基本推導：從納許均衡 0 出發，反向推導，因為玩家會為了迴避撞數而把取數慢慢放大)

第十一輪：

高：因為 1 容易撞數，所以猜測其他人會因為容易撞數而選別的數(分析越接近 0 的數字越有希望勝出，所以 0,1 越有可能重複，但是 2~100 在未出現重複的情況下，勝出機率又幾乎為 0) 選 1

醫：可能跟高利貸想的一樣吧 選 1

律：只要在 0,1 之間選擇，如果重複也沒有影響而就算沒有重複勝出機率也比其他數大 選 1

這時高利貸發現只要在 3 輪，律師只要故意與別人重複就可以贏

第十二輪：

高：隨機選號 選 62

醫：猜到高利貸的邏輯思考 選 23

因為在第六輪高利貸有說他不喜歡欠人人情，由此判定他是老實人，而老實人會傾向於選擇安全的數值，所以會選擇大於 1 的數字，再藉由以往數字是從平均數 50 開始推導，所以 50 以內皆是危險範圍，在 5,6,7 輪中選過 100，所以 90~100 不選，再排除整數 60,70,80,90 及質數 53,59,61,67,71,73，還有因為在日文中發音簡單而時常被提到的 3/5/8，在加上 Windows 系統的 64 bit，69 在日常生活中常被提到，72 小時，日本加油站 76 的標誌，就剩下 62,74 兩個數字 (如果高利貸這局選擇 74 那也就只是再多一回合而已)

律：只要在 0,1 之間選擇，如果重複也沒有影響而就算沒有重複勝出機率也比其他數大 **選 1**

這時，高利貸死亡；醫學生(-9)，律師(-7)

此時增加新規則：有一方選擇 0 的情況下，選擇 100 的一方勝出

新增的規則：使能夠有獲勝機率的數字限制在 0,1,100，0 可以贏過 1，1 可以贏過 100，100 可以贏過 0，就像剪刀，石頭，布一樣

之後的場次由於律師自己的信念“人人平等”，所以故意認輸

資料來源

只看劇版可能无法理解方块 K 的败因！还原《弥留之国的爱丽丝》第二季漫画
原版解读——美人投票

<https://youtu.be/-upsuj8CWRI?si=kAJ4SSCguV63VLMc>

Fw: [閒聊] 彌留之國的愛莉絲方塊 K - 看板 AliceinImawa

<https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fwww.ptt.cc%2Fbbs%2FAliceinImawa%2FM.1414959586.A.79F.html&psig=AOvVaw1vR1x35sXbxsZSVFz-rp5a&ust=1735074604264000&source=images&cd=vfe&opi=89978449&ved=0CAQQn5wMahcKEwj4w8Xm5r6KAxUAAAAAHQAAAAAQBA>

美人投票与经济学理论- 今際の国のアリス 1

<https://book.douban.com/review/13050866/>

納許均衡- 維基百科，自由的百科全書

<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%BA%B3%E4%BB%80%E5%9D%87%E8%A1%A1>

賽局理論- 維基百科，自由的百科全書

<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%8D%9A%E5%BC%88%E8%AE%BA>

【欢哥解说】《弥留之国的爱丽丝》P6 第二阶段，苜屋勇闯智斗型终极关卡方块 K，烧脑游戏美人投票

https://youtu.be/9ZiMel_yf60?si=n4hLb-Hv28Pcfdhu

「對可愛的動物進行排名：股票市場實驗」

<https://www.npr.org/sections/money/2011/01/14/132906135/ranking-cute-animals-a-stock-market-experiment>

猜均值的 2/3 - 維基百科，自由的百科全書

https://en.wikipedia.org/wiki/Guess_2/3_of_the_average

Keynesian beauty contest

https://en.wikipedia.org/wiki/Keynesian_beauty_contest

选美博弈

<https://baike.baidu.com/item/%E9%80%89%E7%BE%8E%E5%8D%9A%E5%BC%88/59324667#reference-2>