從三門問題出發
認識各種機率悖論

第二組

41123201 陳冠章　41103209 謝燿璘
41123113 洪苡宸　41103147 蕭煒磬
41123212 王信融　41123242 蕭應科

目錄

目錄

Part One

悖論是什麼

悖論是什麼

例子一：謊話者悖論

如果有今天有一個人跟我們説「我説謊了」，那這句話是謊話還是真話呢?

悖論是什麼

例子二：理髮師悖論

一個村莊的理髮師只為不剃自己鬍子的人剃鬍子，
那麼理髮師自己是否需要剃鬍子？

悖論是什麼

例子三：芝諾悖論

在運動中，阿基里斯無法追上烏龜，因為每當他到達烏龜的上一個位置，烏龜又向前移動了一小段距離

Part Two

三門問題

三門問題

「假如你是參賽者，你會看見三扇門，其中一扇門的裏面有一輛汽車，選中裏面是汽車的那扇門，就可以贏得該輛汽車，另外兩扇門裏面則都是一隻山羊。當參賽者選定了一扇門，主持人會開啟另一扇是山羊的門；並問：「要不要換一扇門？」

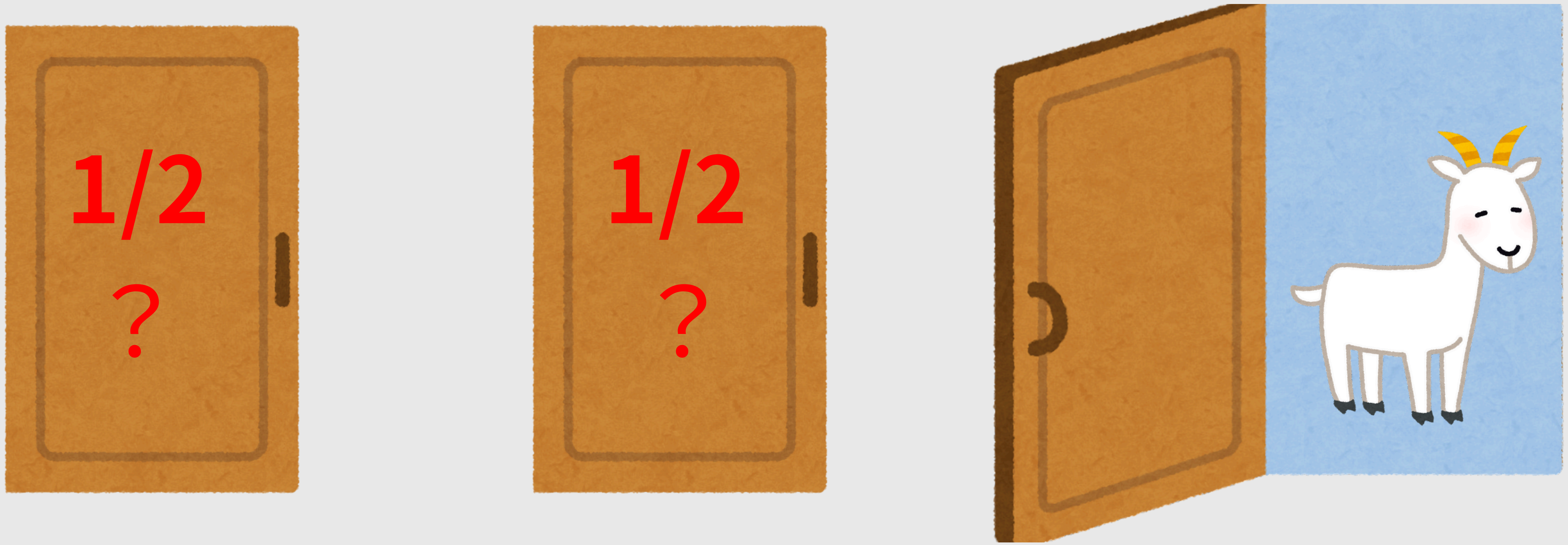
現在問題是–改變選擇(換另一扇門)是否對你有利?」

三門問題

三門問題，又稱山羊問題或蒙提霍爾問題（英文：Monty Hall problem），是一個源自賽局理論的數學遊戲問題

因為該問題的答案雖在邏輯上並無矛盾，但十分違反直覺。

錯誤的直覺思維



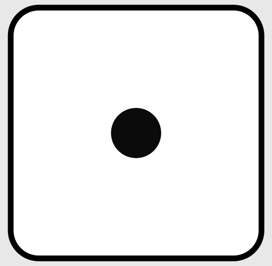
「兩扇門挑一個 這樣不對嗎」

破解一(條件機率)

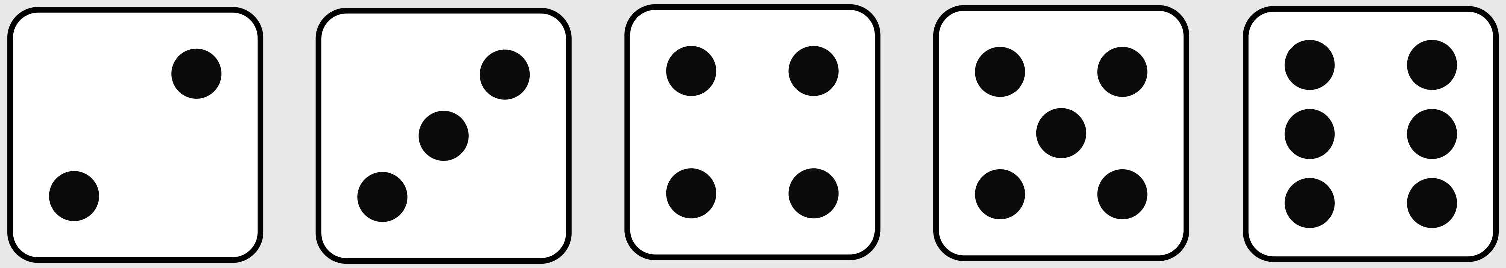
我們忽略了一件事情，這時候後看到2個門打開，就好比中途邀請局外人
這個局外人看到的情況與選中的機率的確是1/2，但這樣的思考前提是錯誤的
因為這位局外人並沒有參與一開始三門的選擇!
以條件機率來說，有一個重要的概念，也就是一個事件的機率會隨著情境的不同（提供訊息的改變）而可能會有所改變，這就是一個很明顯的例子

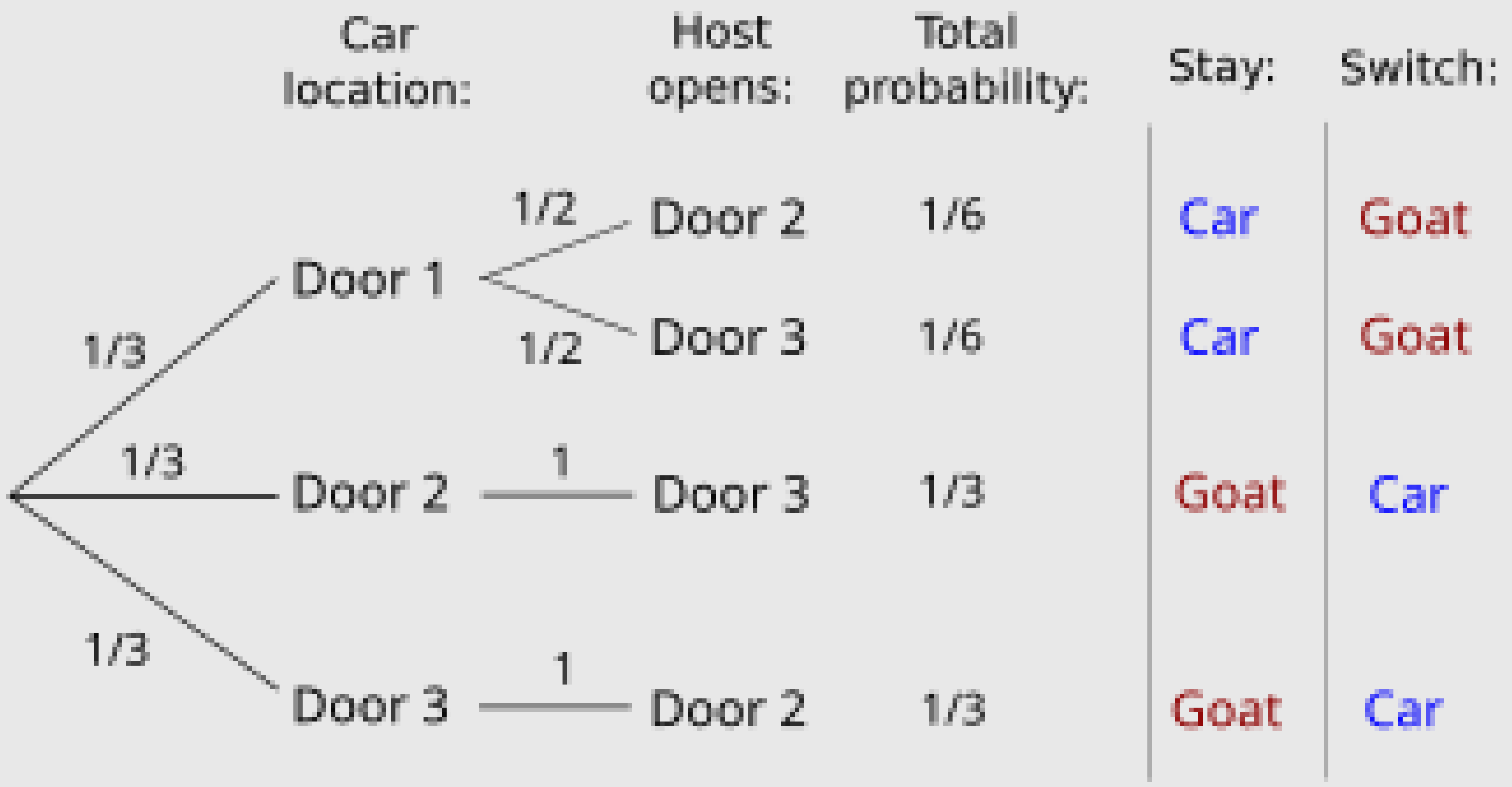
破解二(基本事件)

是1點

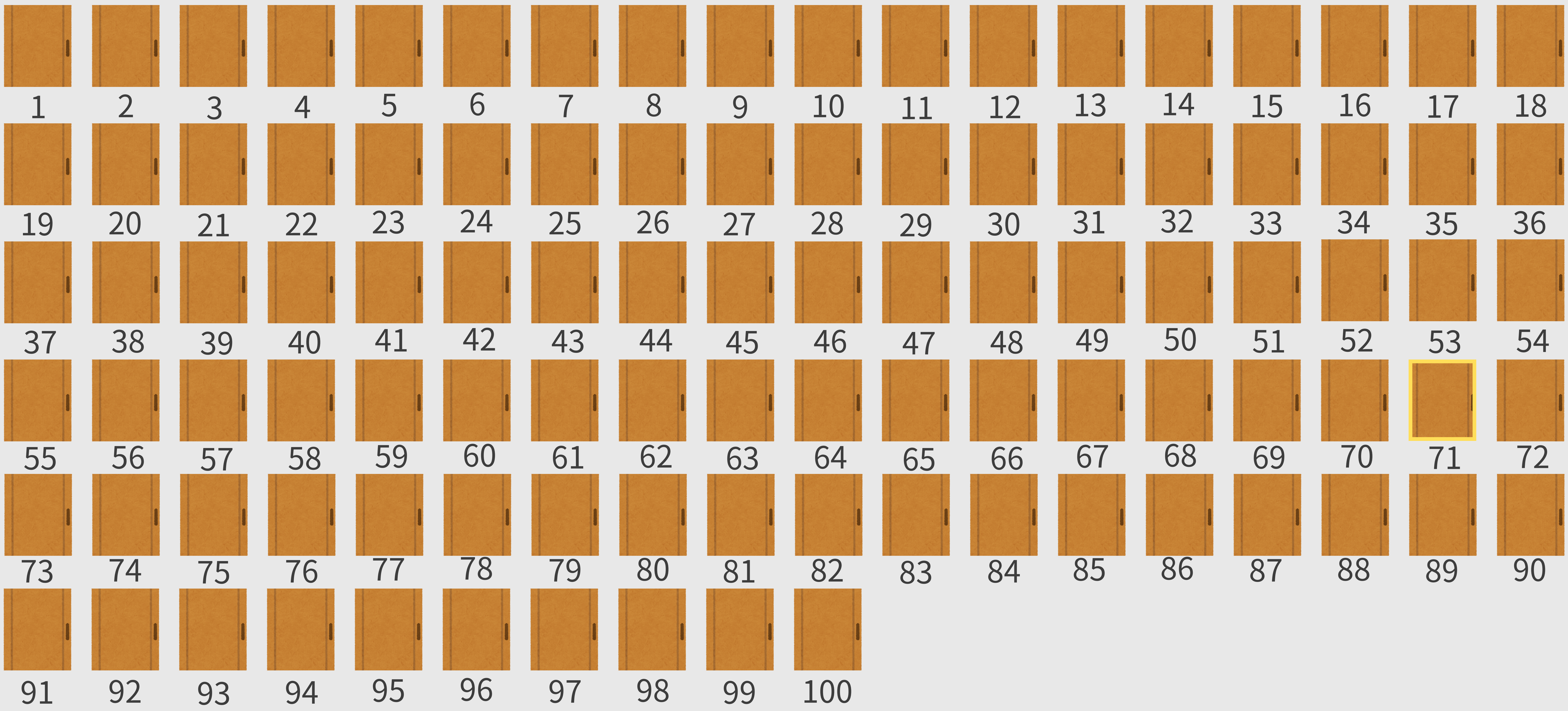


不是1點

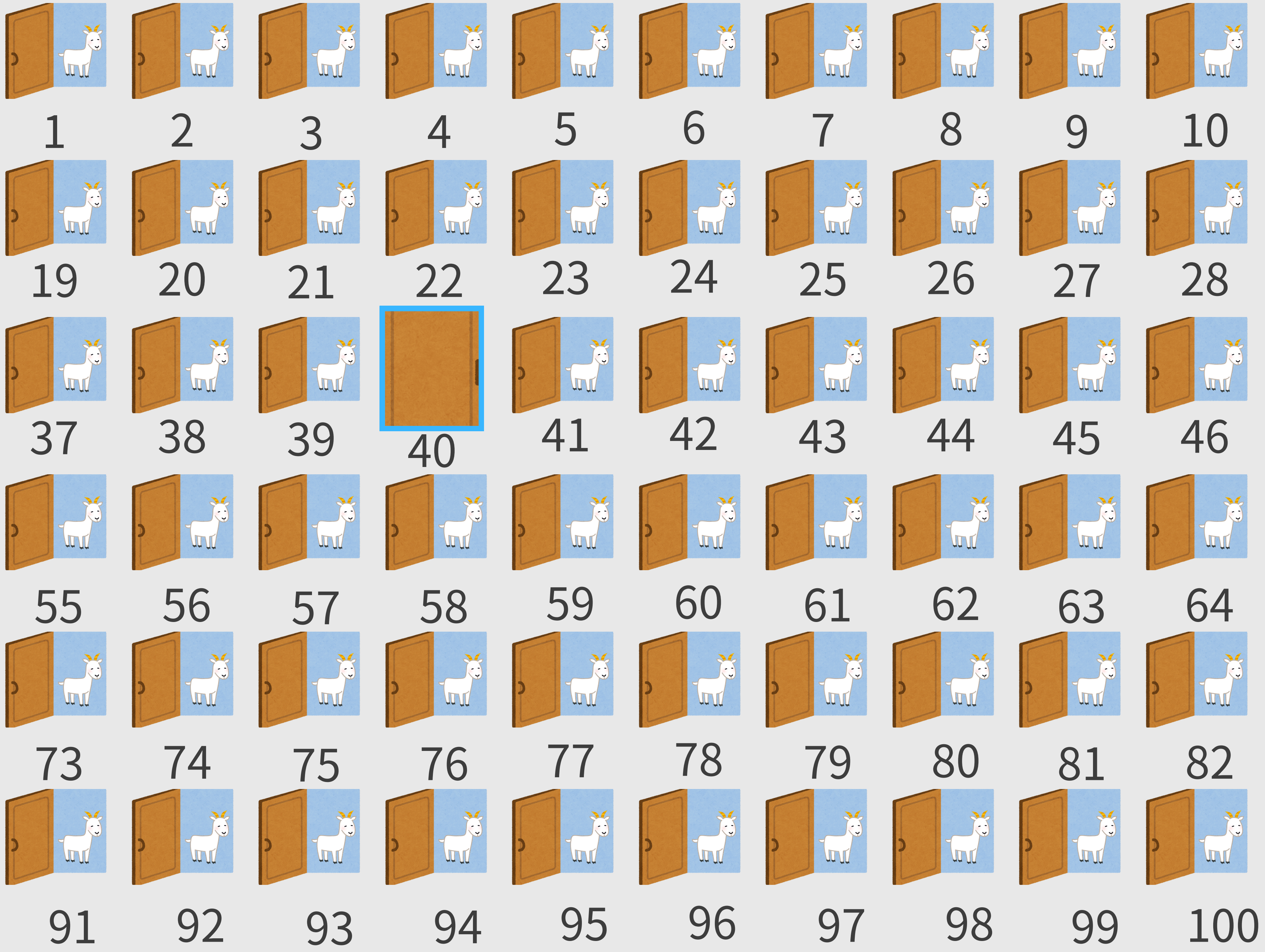




破解三(N門問題)


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36
37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54
55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72
73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90
91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

破解三(N門問題)



P=99/100 v.s. **P=1/100**

三門問題_總結

1. 直覺偏誤

人的直覺傾向於認為剩下兩扇門的機率是 50/50，而非 1/3 與 2/3。這種錯誤是因為我們忽略了主持人選門的資訊增益。

2. 確認偏誤

人們傾向堅持自己原本的選擇，因為更改選擇需要承認之前可能選錯。

3. 「損失厭惡」（Loss Aversion）。

即使改變選擇能提高成功率，大多數人仍選擇保留原來的選擇，因為「改變選擇後失敗」會讓人更後悔。

Part Three

生日問題

生日問題

「需要多少人聚在一起，才能讓其中至少有兩人同一天生日的機率超過一半？」

生日問題

「需要多少人聚在一起，才能讓其中至少有兩人同一天生日的機率超過一半？」

Ans. 23人

首先 設n人中 每人生日都不同的機率

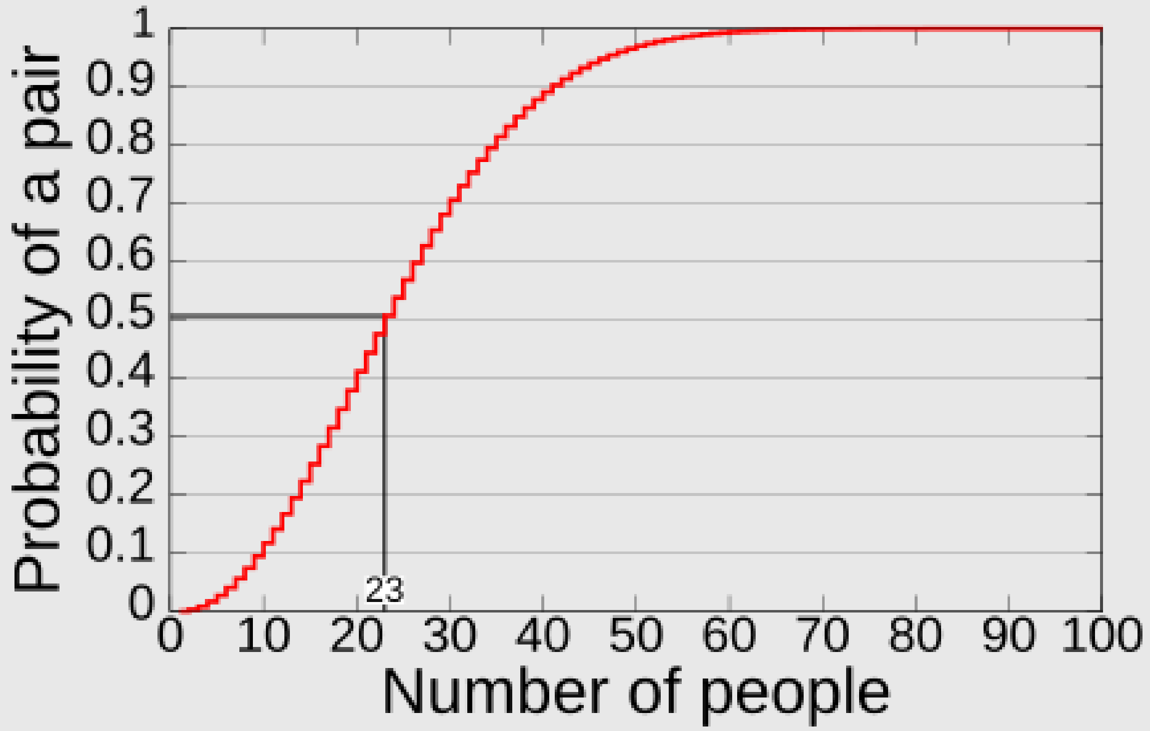
$$\bar{p}(n) = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdots \frac{365-n+1}{365}$$

所以至少兩人生日同一天的機率為

$$p(n) = 1 - \bar{p}(n) = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdots \frac{365-n+1}{365} = 1 - \frac{365!}{365^n (365-n)!}$$

$p(23) \approx 1 - 0.49 = 0.51$

= 0.492702765676



Part Four

檢查悖論

檢查悖論_平均人數

A科系有70人，B科系有30人。從這100個學生中隨機挑選10名學生，詢問「你們班有多少人」，得出的「平均」結果是50人嗎?

檢查悖論_平均人數

A科系有70人，B科系有30人。從這100個學生中隨機挑選10名學生，詢問「你們班有多少人」，得出的「平均」結果是50人嗎？

Ans. 會大於50人 (接近58人)

檢查悖論_平均人數

Ans. 會大於50人 (接近58人)

算法：70×70%+30×30%=58

檢查悖論_準確的試紙？

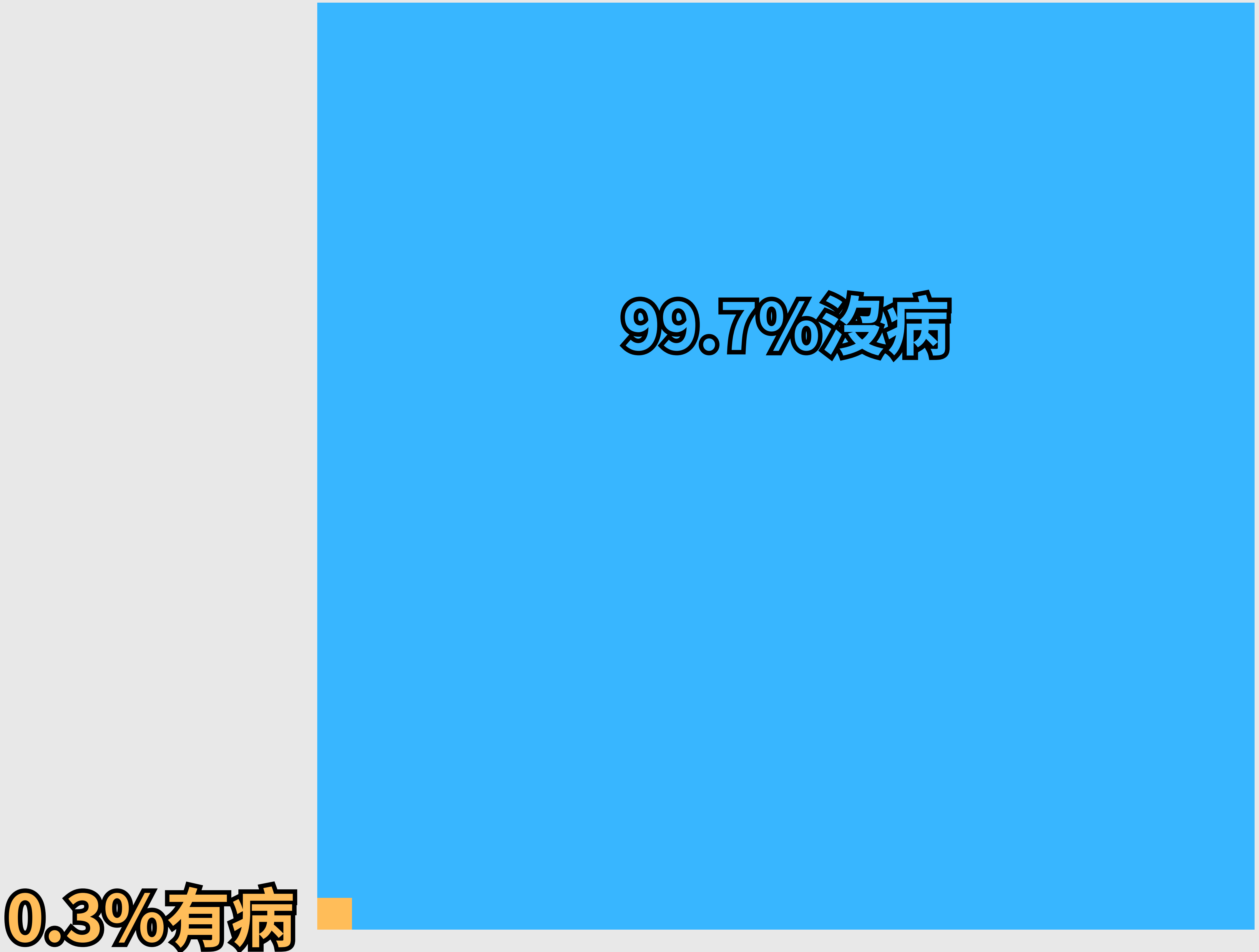
「某公司發明一種試紙，能檢測是否患有早期癌症，這試紙準確率為98%。今天你用了試紙，發現是陽性，難道你真的罹癌了嗎...？」

檢查悖論_準確的試紙？

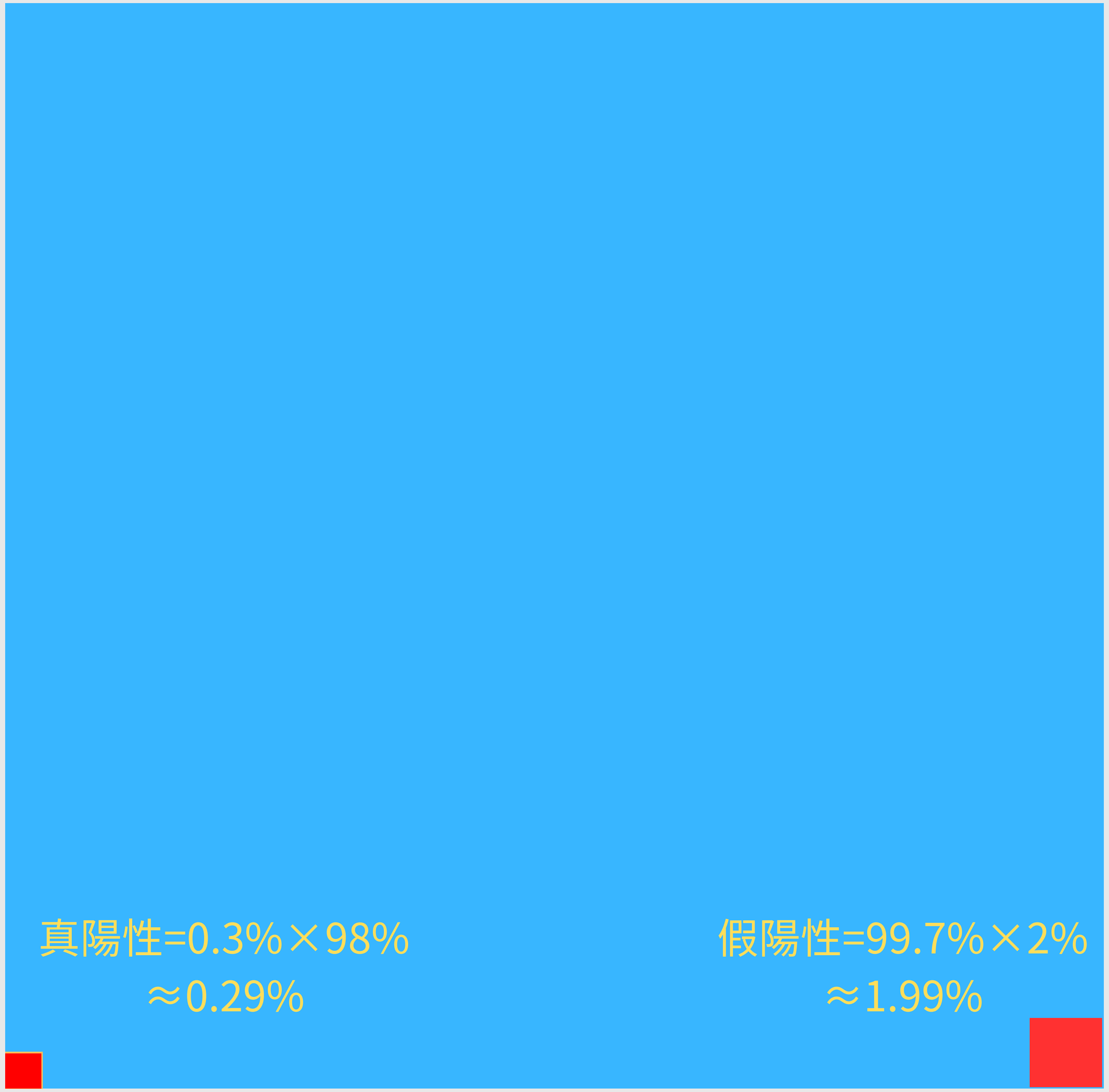
「某公司發明一種試紙，能檢測是否患有早期癌症，這試紙準確率為98%。今天你用了試紙，發現是陽性，難道你真的罹癌了嗎...？」

Ans. 其實實際罹癌機率僅≈15%

檢查悖論_準確的試紙？



檢查悖論_準確的試紙？



檢查悖論_準確的試紙？

真陽性≈0.29%

假陽性≈1.99%

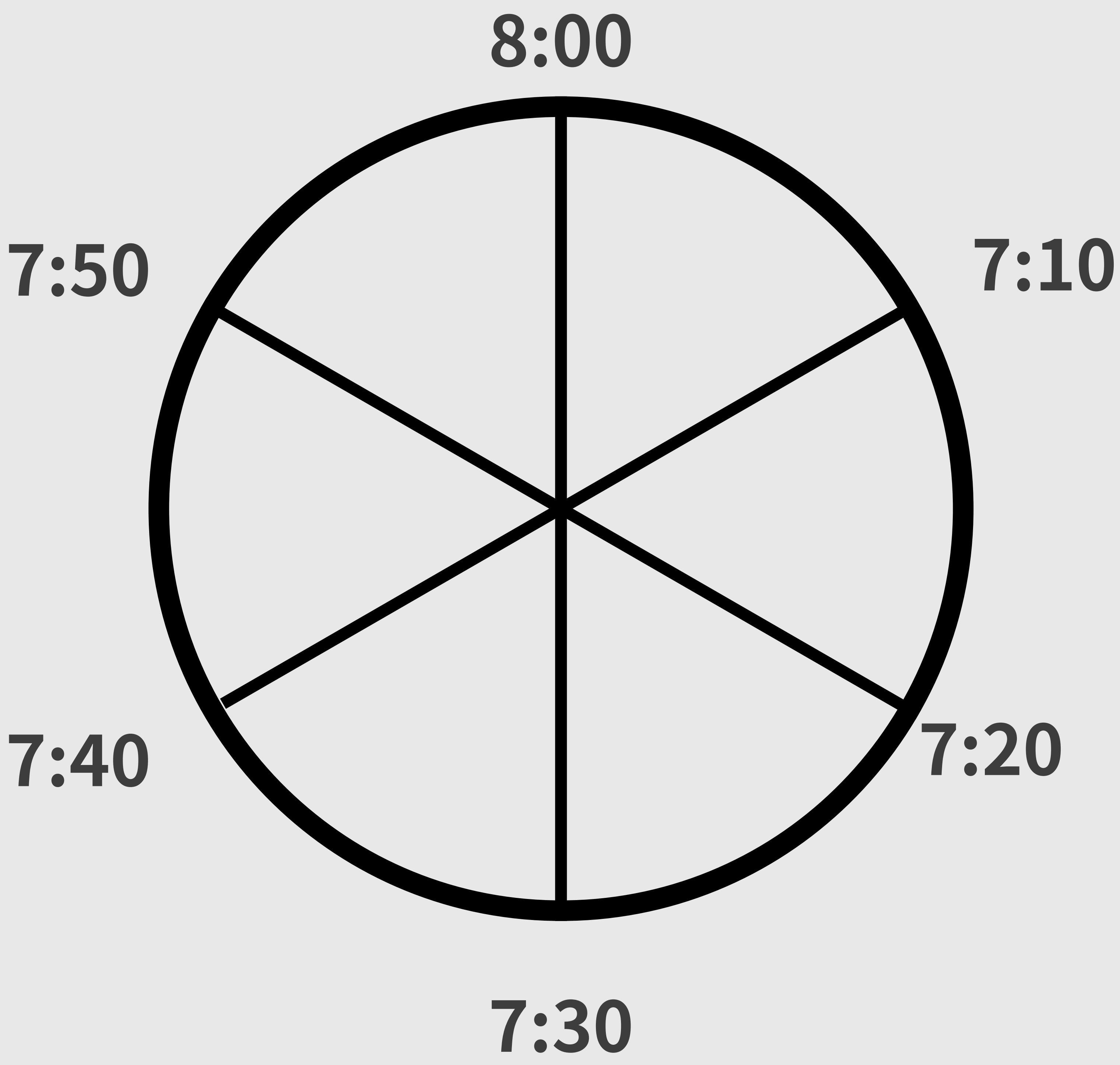
真陽性的比例= $\dfrac{0.29\%}{0.29\% + 1.99\%}$

$$= 12.7\%$$

檢查悖論_等公車的時間

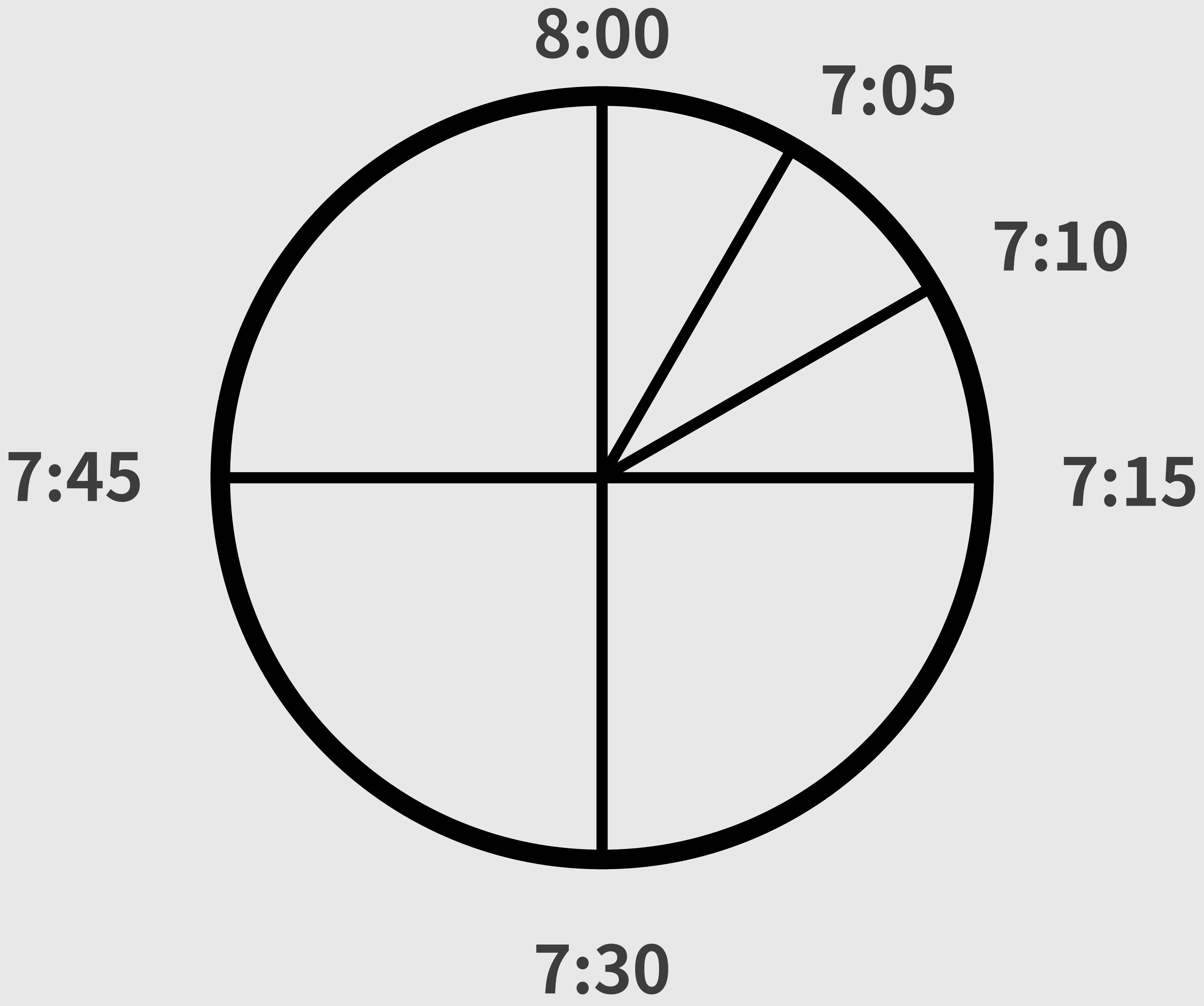
您是否曾經有過類似的經驗。搭公車時，公車往往久候不至，或是公車出現時，卻是一輛接著一輛。其實公車發車時間有其固定的間隔，而且尖峰的時候，間隔甚至還密集一點；離峰的時候，間隔寬鬆一點。但又是什麼樣的原因，最後造成了間隔不一的結果？

檢查悖論_等公車的時間



平均等車時間 ：5分鐘

檢查悖論_等公車的時間



7:00~7:15到車站

5÷2=2.5

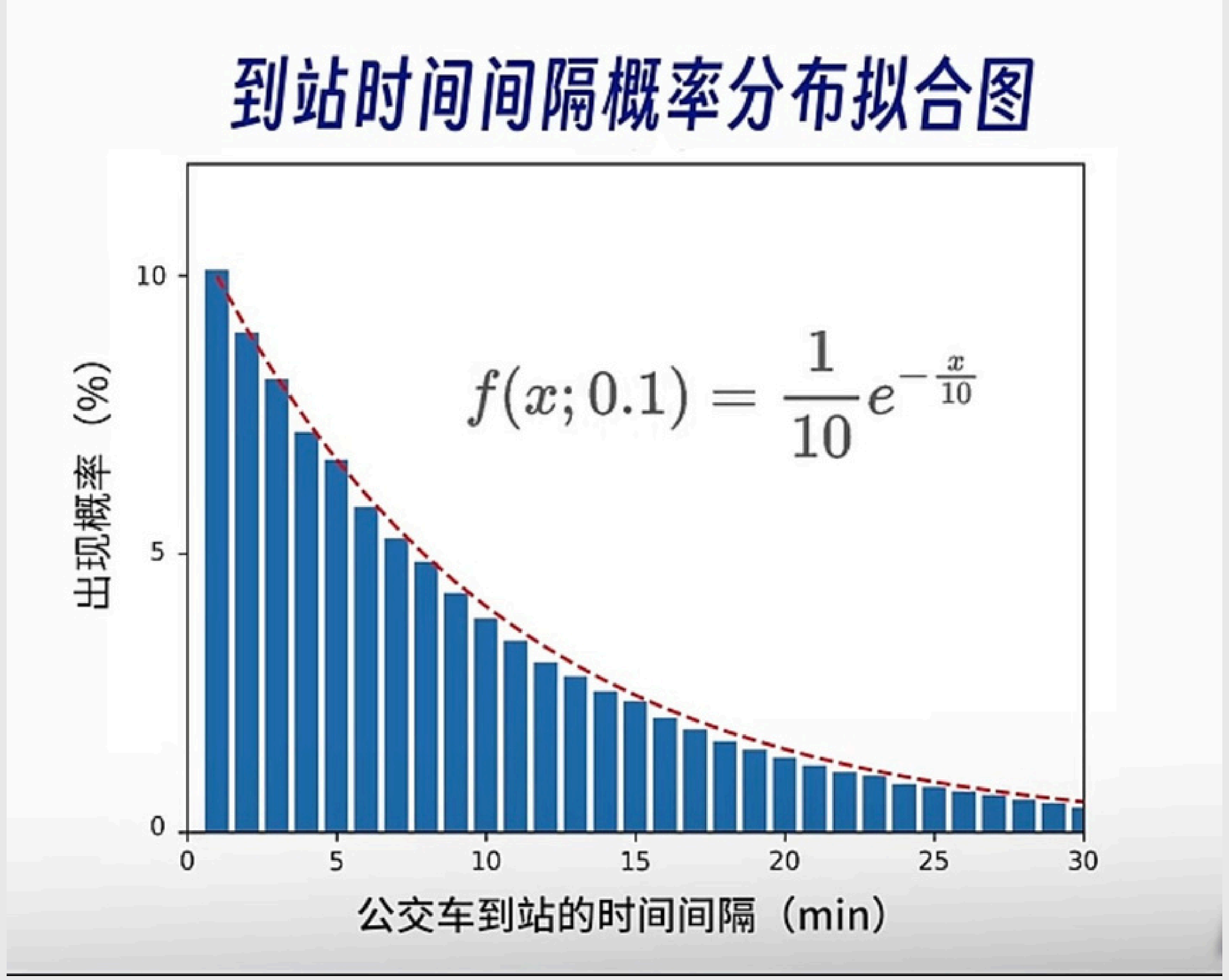
7:15~8:00到車站

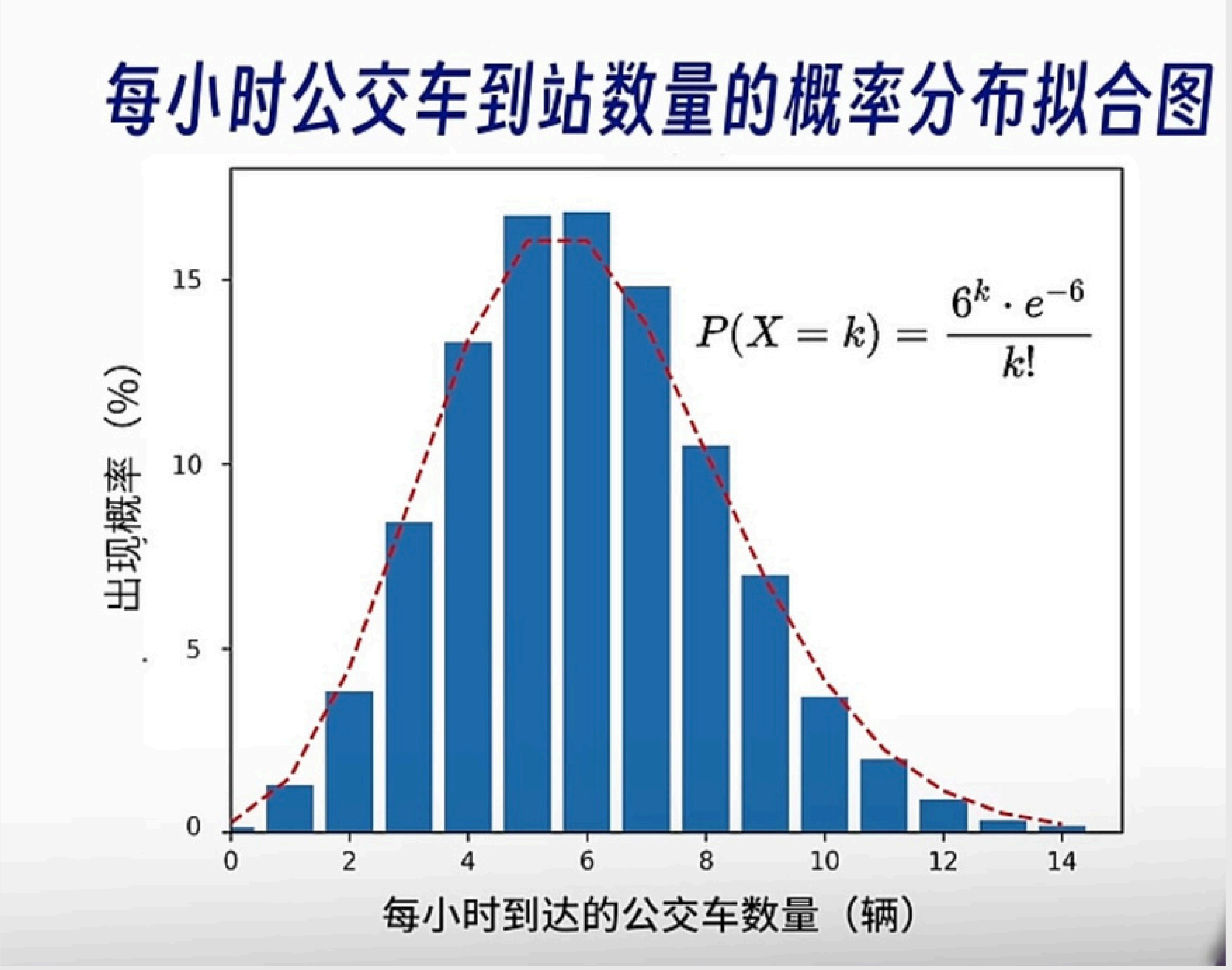
15÷2=7.5

2.5×25%+7.5×75%=6.25

平均等車時間 ：6.25分鐘

檢查悖論_等公車的時間





透過電腦計算，得出結果為平均等車時間=發車的時間間隔

檢查悖論_總結

在一些數據當中，進行隨機抽樣檢查會出現抽樣後的平均值與實際平均值不一樣。

→「檢查悖論」就像是你去找某些東西，結果撞到的通常是那些特別大、特別多，或是特別長的情況，因為它們更容易被你看到。

Part Five

辛普森悖論

辛普森悖論

辛普森悖論（英語：Simpson's paradox），是機率和統計中的一種現象，其中趨勢出現在幾組數據中，但當這些組被合併後趨勢消失或反轉。這個結果在社會科學和醫學科學統計中經常遇到，當頻率數據被不恰當地給出因果解釋時尤其成問題。當干擾變數和因果關係在統計建模中得到適當處理時，這個悖論就可以得到解決。辛普森悖論已被用來說明統計誤用可能產生的誤導性結果。

辛普森悖論_舉例

一所美國高校的兩個學院，分別是法學院和商學院。新學期招生，人們懷疑這兩個學院有性別歧視。現作如下統計：

法學院

性別	錄取	拒收	總數	錄取比例
男生	8	45	53	15.1%
女生	51	101	152	33.6%
合計	59	146	205	

商學院

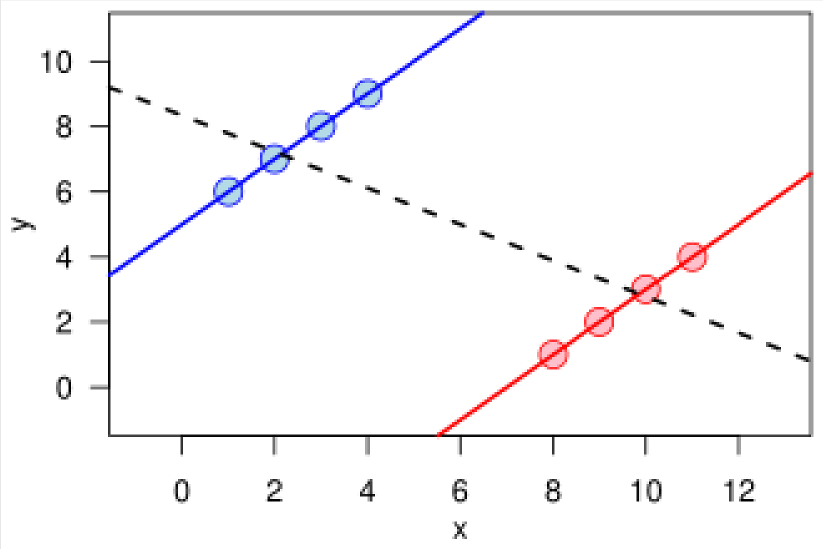
性別	錄取	拒收	總數	錄取比例
男生	201	50	251	80.1%
女生	92	9	101	91.1%
合計	293	59	352	

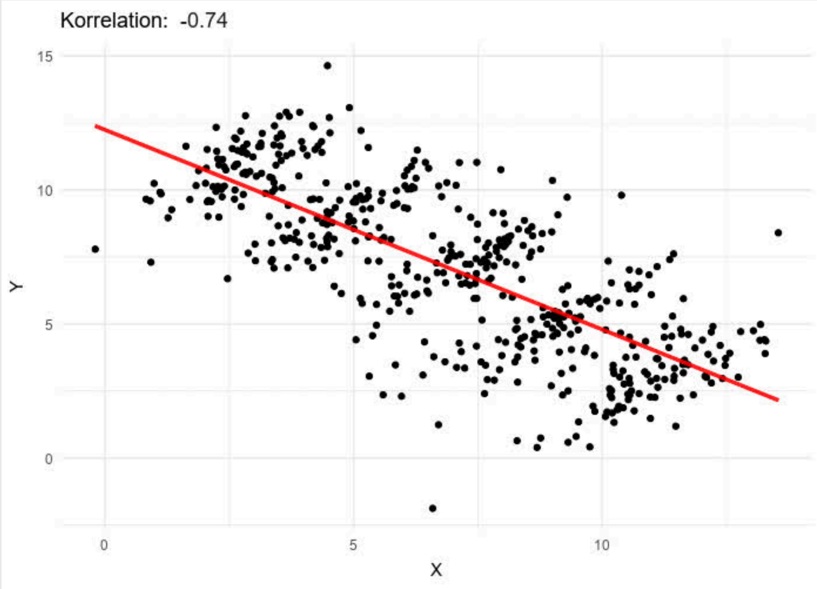
根據上面兩個表格來看，女生在兩個學院都被優先錄取
即女生的錄取比率較高。

辛普森悖論_舉例

現在將兩學院的數據匯總：

性別	錄取	拒收	總數	錄取比例
男生	**209**	95	304	**68.8%**
女生	143	110	253	**56.5%**
合計	352	205	557	





上圖顯示獨立小組出現正的趨勢，而當小組合併時出現負的趨勢

這個例子說明，簡單的將分組數據相加匯總，是不能反映真實情況的。

辛普森悖論_結論

將兩組數據放在一起，表面上是其一個分組出現一種趨勢，實際上將所有數據結合趨勢會顛倒

→辛普森悖論發生在生活中的許多地方，上述只是簡單的例子，比較大醫院及小診所的治癒率抑是辛普森悖論的實例，依角度上來看不是治癒的機率越高就能肯定不會出現意外，結合患者身體狀況以及不可預測的變數來分析就會發現事情不是我們表面所看到的那麼簡單，故在我們判定事情的同時要再蒐集更多的資料以及變因設定，才能更還原事件的全貌。

Part Six

伯特蘭悖論

伯特蘭悖論

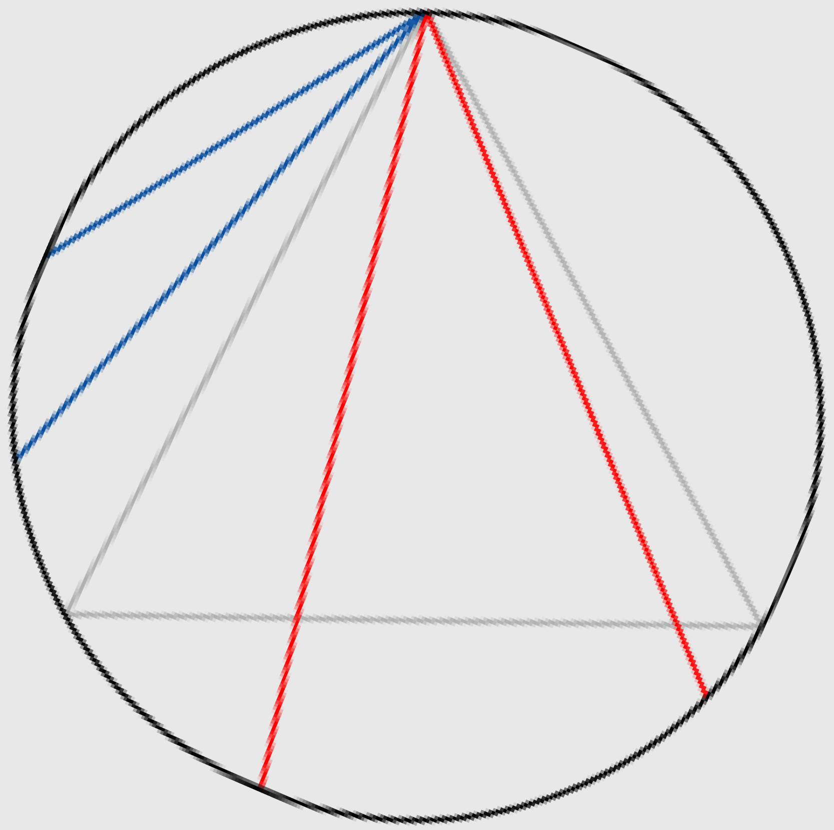
伯特蘭悖論是指機率論的傳統解釋所導致的悖論，由約瑟·伯特蘭在他的著作《Calcul des probabilités》(1889) 中提出。此悖論描述，當我們分析的機率課題牽涉到無限大的樣本空間時，且在使用「每個事件發生的機會皆相同」的原則時不夠謹慎，是未必能得到明確或肯定的結果的。

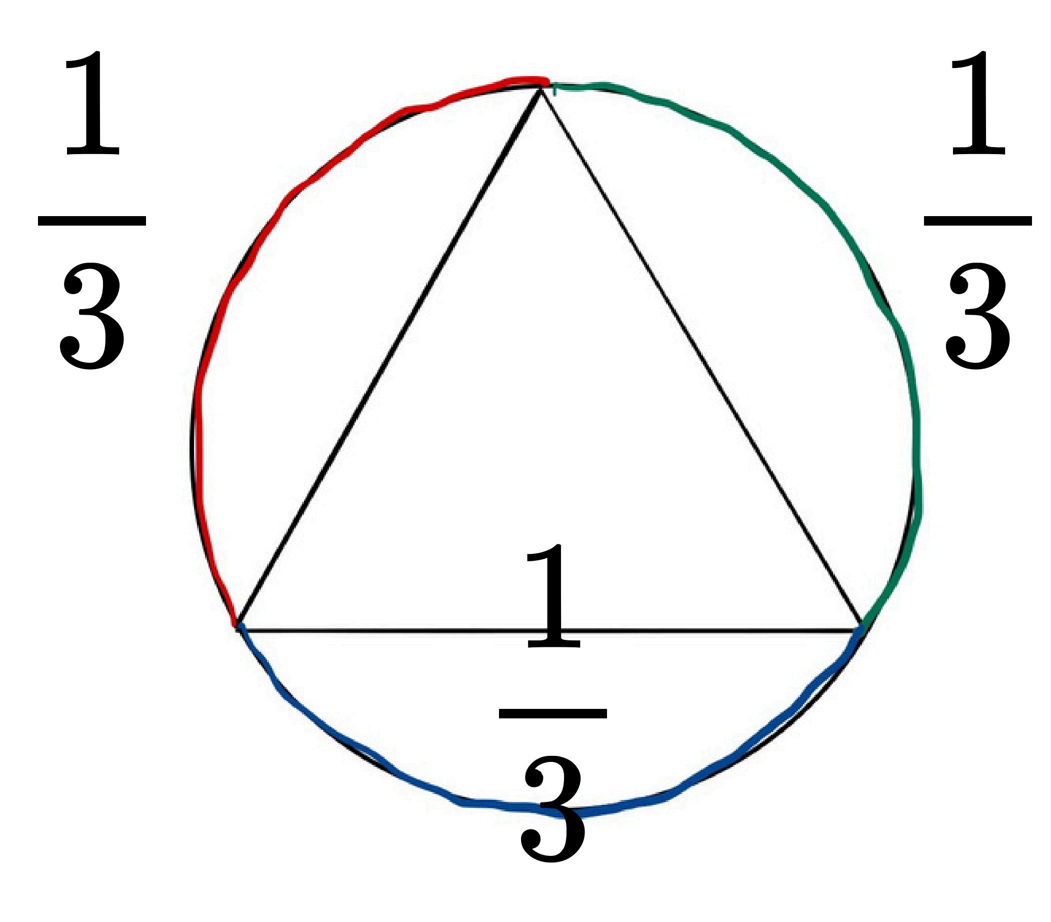
伯特蘭悖論

伯特蘭悖論的內容如下：考慮一個內接於圓的等邊三角形。若隨機選圓上的弦，則此弦的長度比三角形的邊較長的機率為何？

伯特蘭悖論

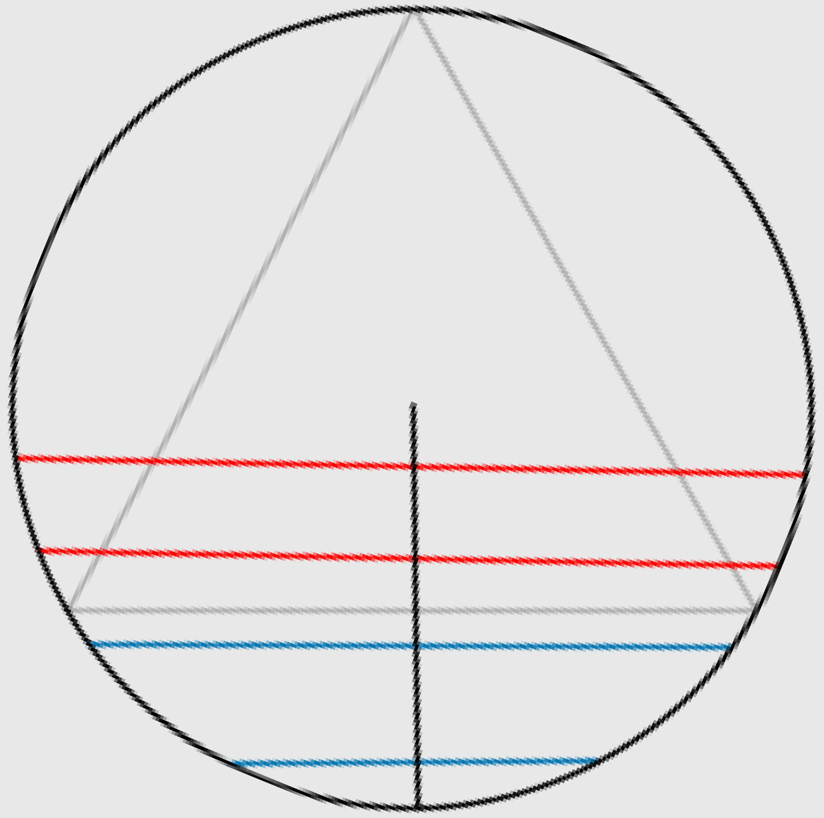
「隨機端點」方法：在圓周上隨機選給兩點，並畫出連接兩點的弦。為了計算問題中的機率，可以想像三角形會旋轉，使得其頂點會碰到弦端點中的一點。可觀察到，若另一個弦端點在弦會穿過三角形的一邊的弧上，則弦的長度會比三角形的邊較長。而弧的長度是圓周的三分之一，因此隨機的弦會比三角形的邊較長的機率亦為三分之一。

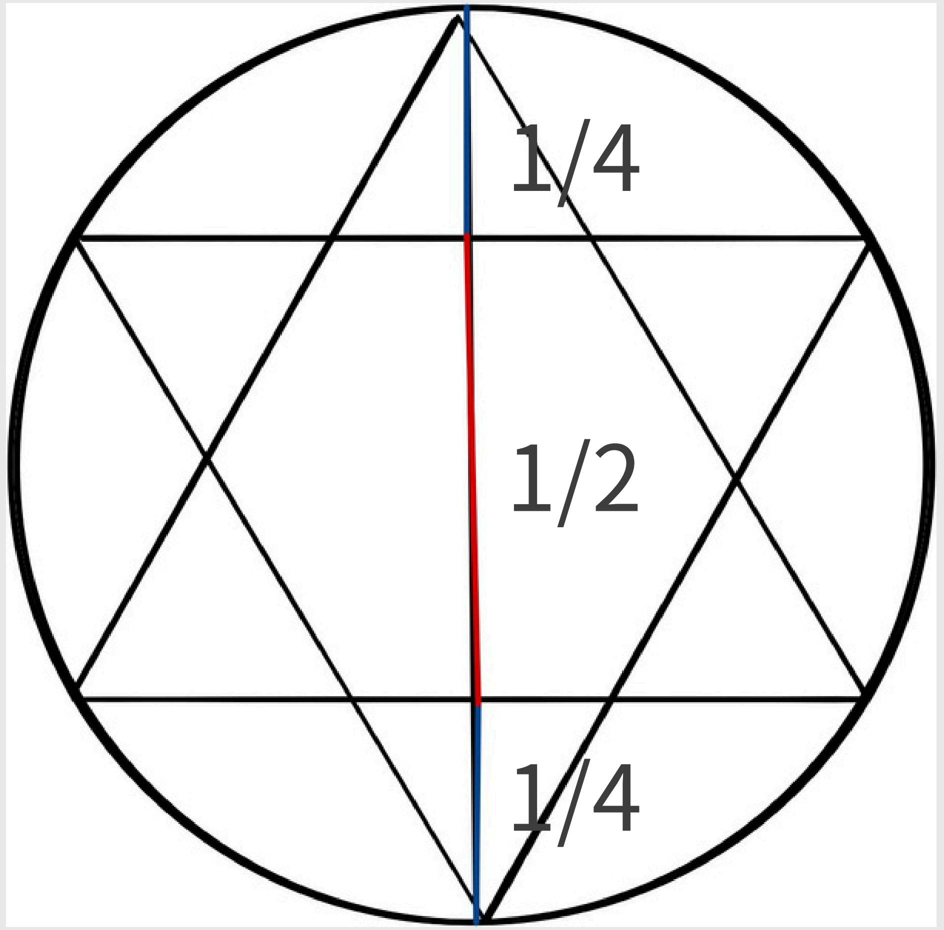




伯特蘭悖論

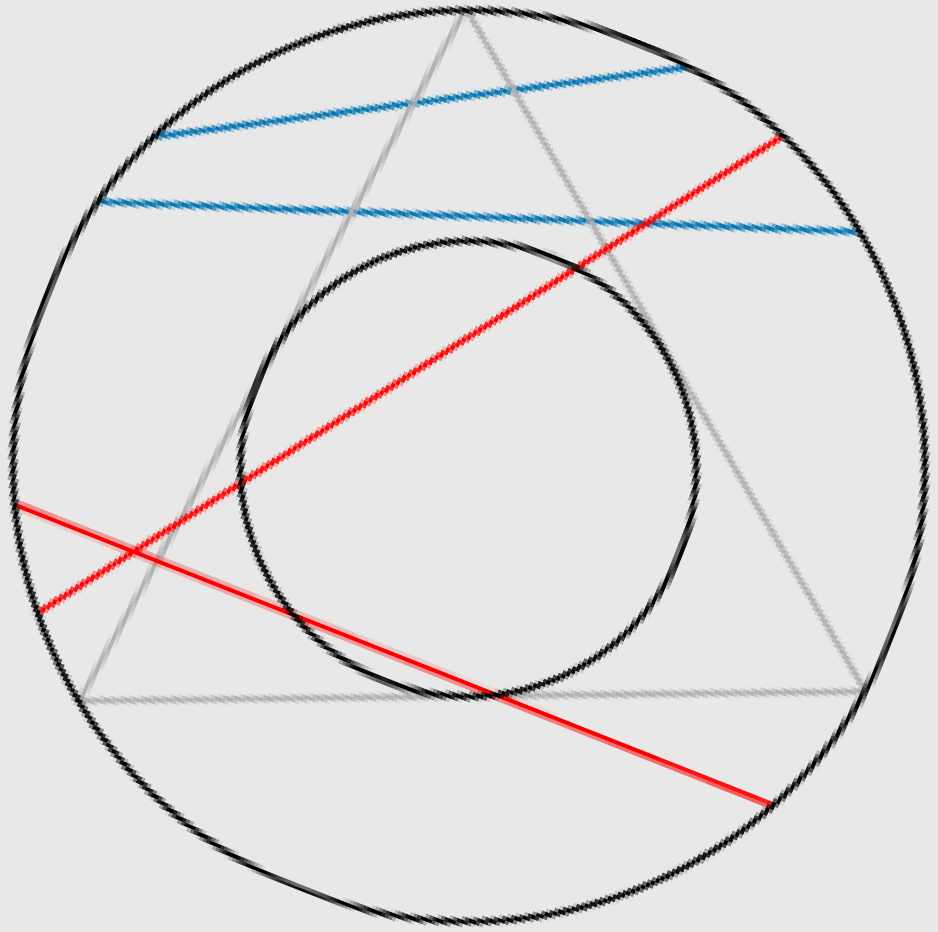
「隨機半徑」方法：選擇一個圓的半徑和半徑上的一點，再畫出通過此點並垂直半徑的弦。為了計算問題的機率，可以想像三角形會旋轉，使得其一邊會垂直於半徑。可觀察到，若選擇的點比三角形和半徑相交的點要接近圓的中心，則弦的長度會比三角形的邊較長。三角形的邊會平分半徑，因此隨機的弦會比三角形的邊較長的機率亦為二分之一。

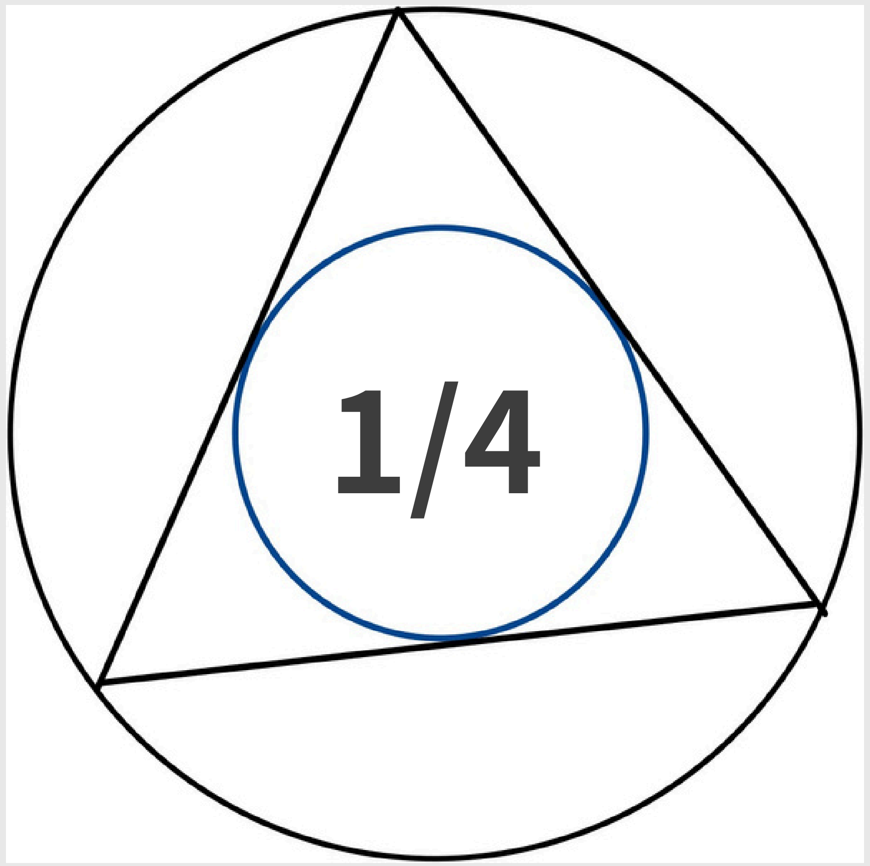




伯特蘭悖論

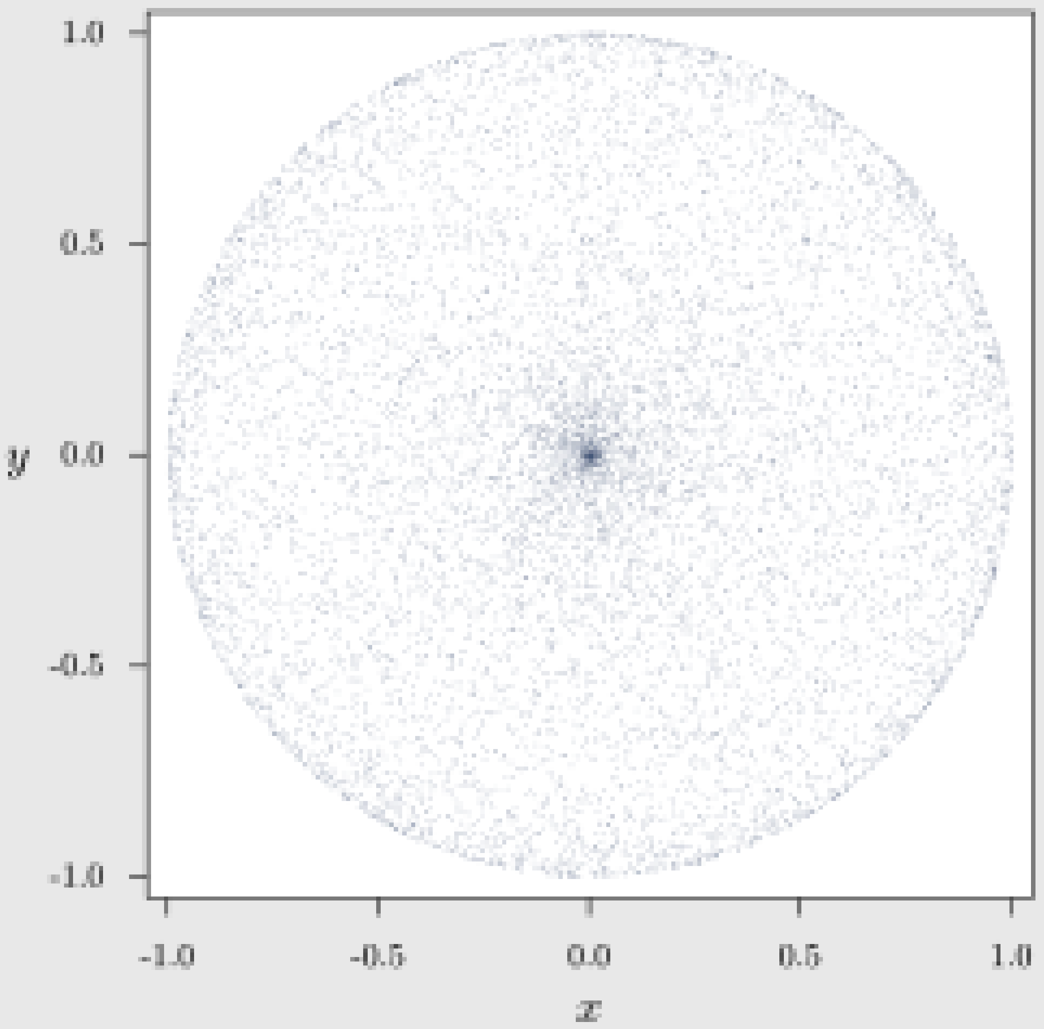
「隨機中點」方法：選擇圓內的任意一點，並畫出以此點為中點的弦。可觀察到，若選擇的點落在半徑只有大圓的半徑的二分之一的同心圓之內，則弦的長度會比三角形的邊較長。小圓的面積是大圓的四分之一，因此隨機的弦會比三角形的邊較長的機率亦為四分之一。



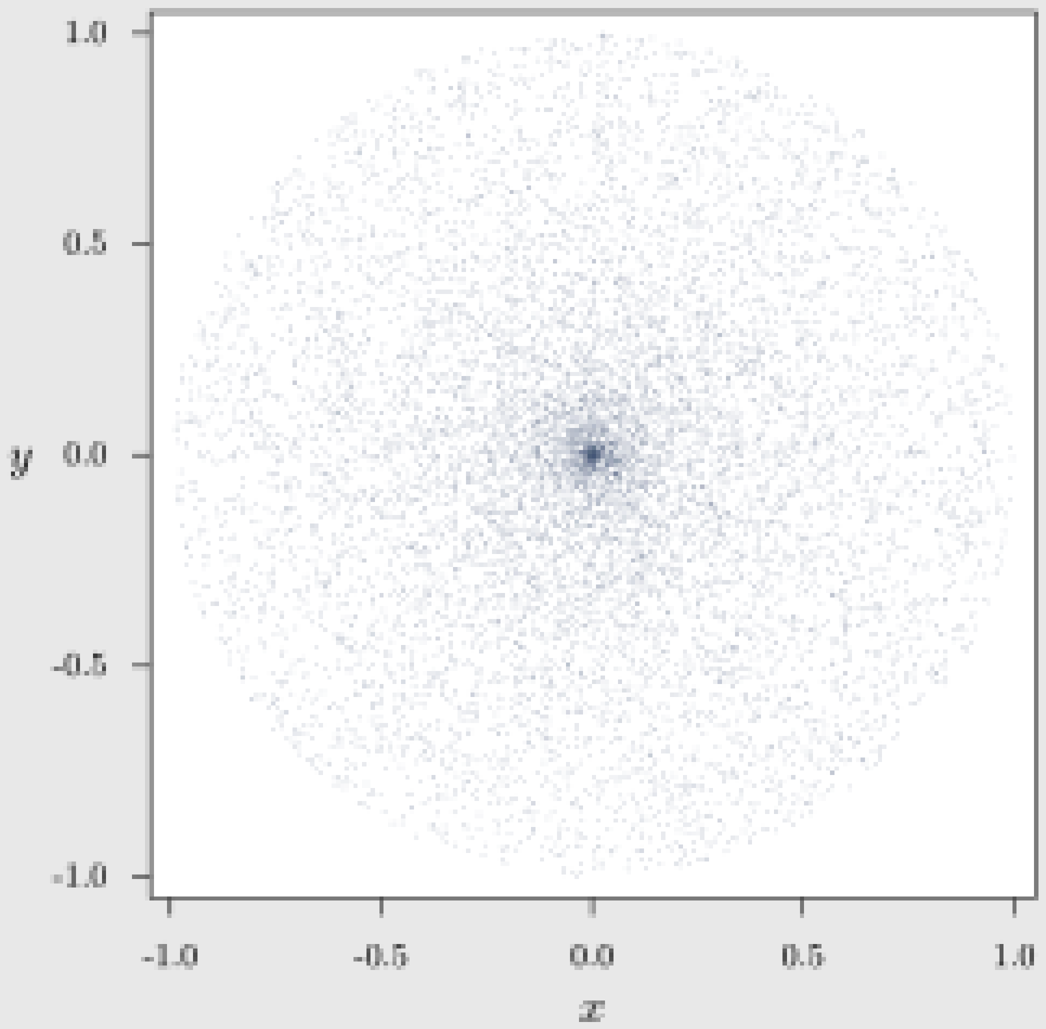


伯特蘭悖論

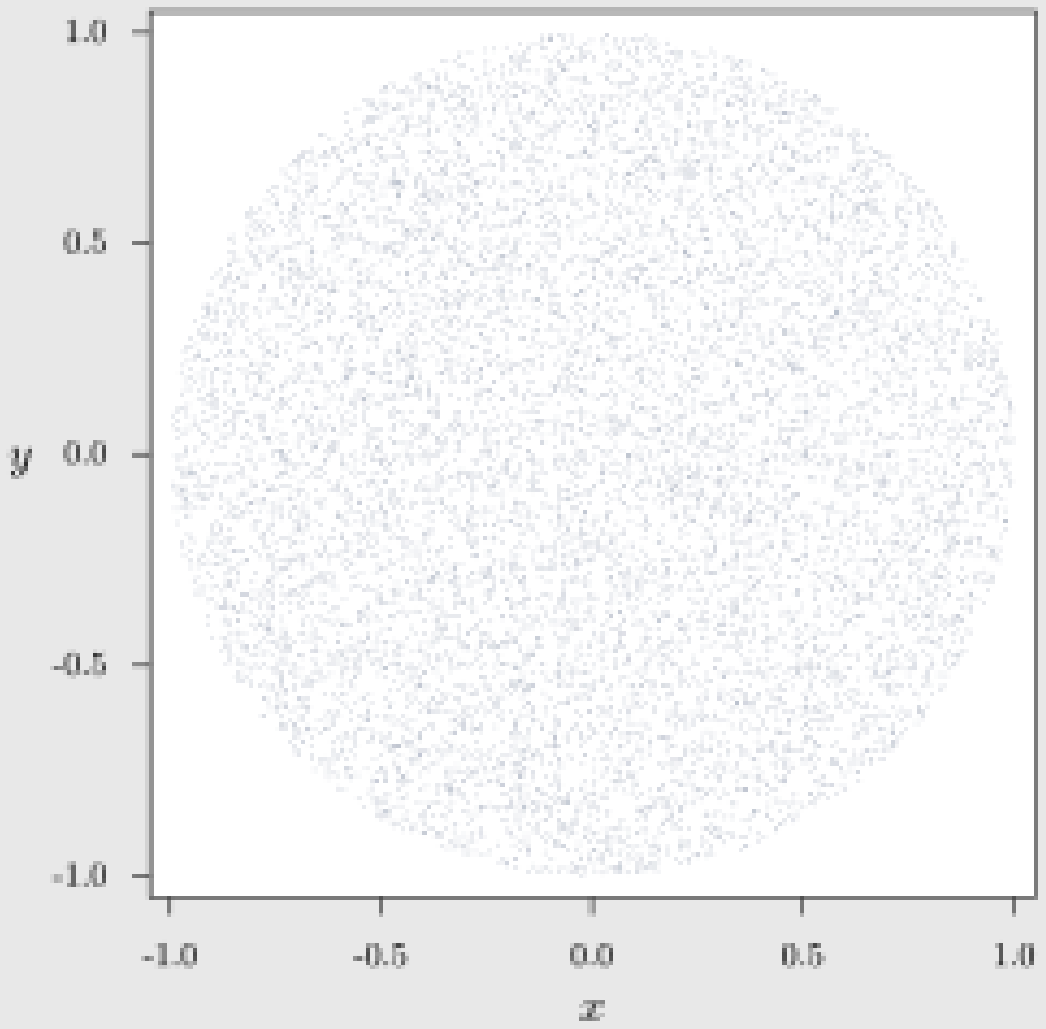
上述方法可以如下圖示。每一個弦都可以被其中點唯一決定。上述三種方法會給出不同中點的分佈。方法1和方法2會給出兩種不同不均勻的分佈，而方法3則會給出一個均勻的方法。



方法1
隨機弦中點



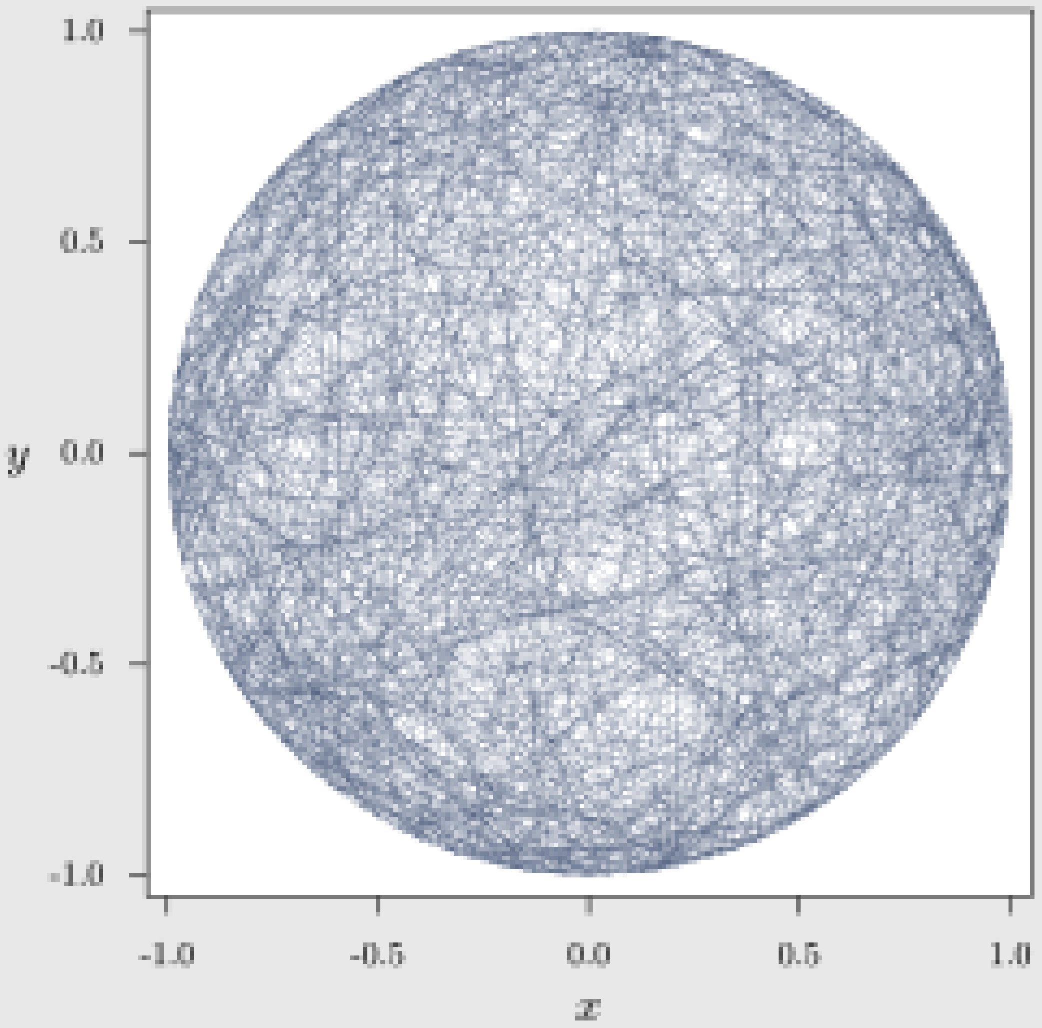
方法2
隨機弦中點



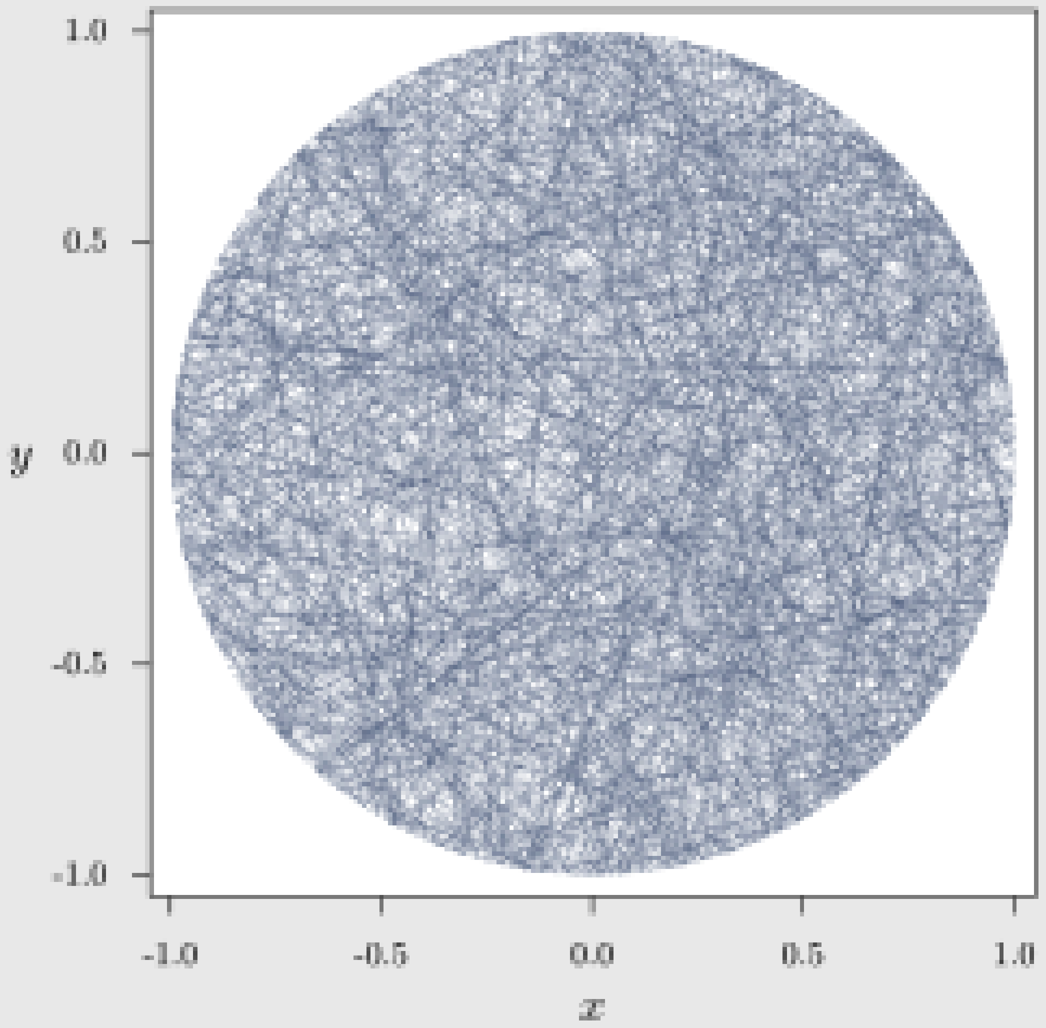
方法3
隨機弦中點

伯特蘭悖論

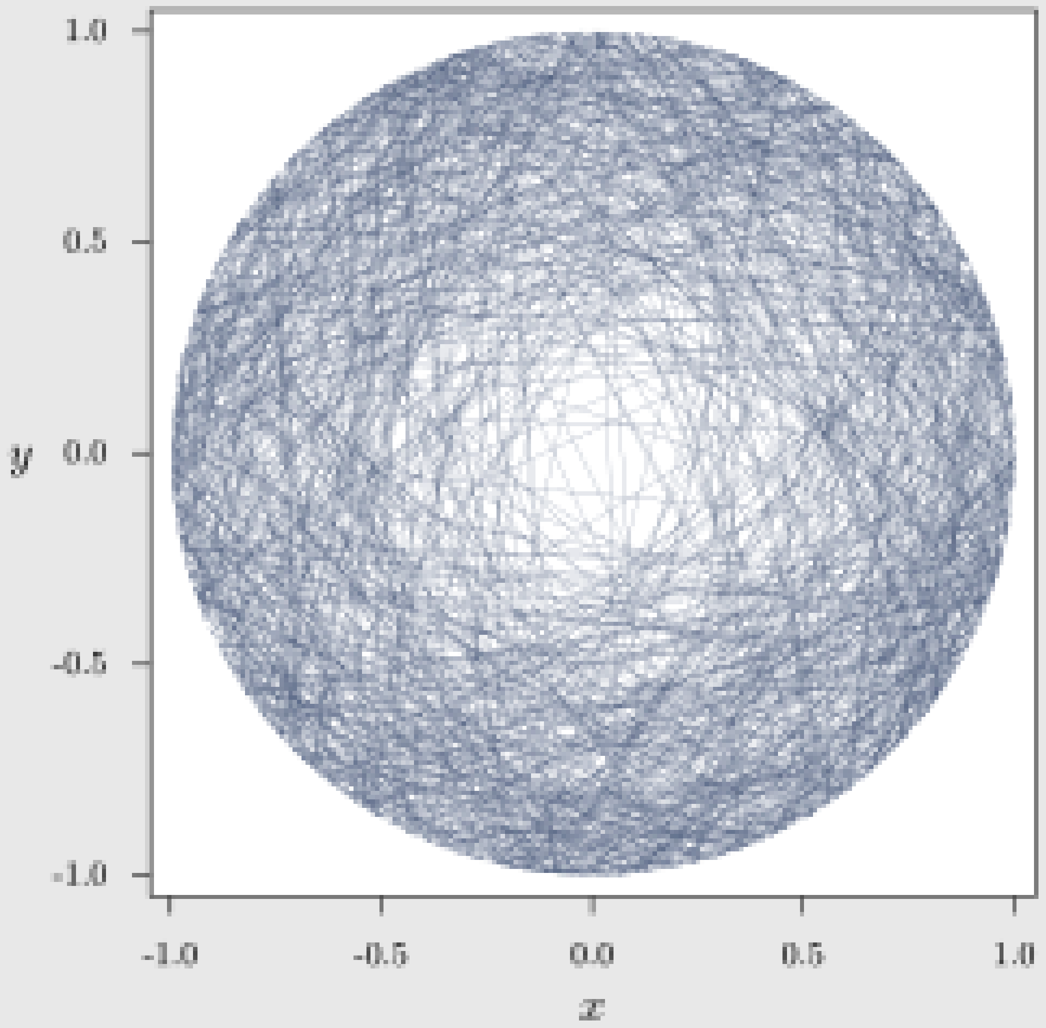
但另一方面，若直接看弦的分佈，方法2的弦會看起來
比較均勻，而方法1和方法3的弦則較不均勻。



方法1
隨機弦



方法2
隨機弦



方法3
隨機弦

參考資料

1.【漫士】99%的人都会答错！为什么概率这么反直觉？
https://www.youtube.com/watch?v=WUHQLhr-Tzo

2.【畢導】看了這個視頻，你會釋懷你倒霉的一生 #檢查悖論 #科普 #冷知識
https://www.youtube.com/watch?v=wS54Gsq_4sE

3.【漫士】数学不存在了！同一个事件居然有三个概率？
https://www.youtube.com/watch?v=fuwkxji1C8Q

4.三門問題（Monty Hall Problem）— Peienwu’s Blog
https://peienwu.com/monty-hall/

5.生日問題- 維基百科，自由的百科全書
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%94%9F%E6%97%A5%E5%95%8F%E9%A1%8C

6.為什麼等公車的時間通常會比預期的還久？——關於「檢查悖論」
https://vocus.cc/article/66b78669fd89780001bc3cc4

參考資料

7.公車為何老是誤點? — 檢查悖論（Inspection paradox）
https://medium.com/marketingdatascience/%E5%85%AC%E8%BB%8A%E7%82%BA%E4%BD%95%E8%80%81%E6%98%AF%E8%AA%A4%E9%BB%9E-%E6%AA%A2%E6%9F%A5%E6%82%96%E8%AB%96-inspection-paradox-3fe4c2e00224

8.辛普森悖論- 維基百科，自由的百科全書
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E8%BE%9B%E6%99%AE%E6%A3%AE%E6%82%96%E8%AE%BA

9.伯特蘭悖論- 維基百科，自由的百科全書
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BC%AF%E7%89%B9%E8%98%AD%E6%82%96%E8%AB%96

10.悖論-維基百科，自由的百科全書
https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/%E6%82%96%E8%AE%BA