



---

# 音數小子

---

數學解題方法期末報告



報告組別:第七組

411031108 魏碩廷 411031119 陳柏諺 411031137 游智宇

411031139 張天傑 411031216 許仲勳

# 目錄

壹、動機 .....	2
貳、音樂與數學 .....	3
參、關於音樂界中數學.....	8
(一)音階調音 .....	8
(二)譜曲製作 .....	15
(三)巴哈.....	22
肆、參考文獻 .....	25

## 壹、動機

生活無處不是音樂，音樂之中充斥著數學，這使音樂成為了有理性的感性。《音數小子》從明子中可以看出本組這次的報告是有關音樂和數學，也顯示出我們究竟有多愛音樂和數學，雖然對於樂理可能根本一翹不通，但對於聽歌或唱歌亦或是奏樂可能還是滿腔熱忱，不過我們還是可以透過我們對於數學的感覺去試著理解其內容。我們藉由這次數學解題方法期末報告，來好好探究音樂中的數學，不管是理論上的符合還是應用上的巧合，我們都會去探尋，來發覺其中的奧妙。

## 貳、音樂與數學

在中古世紀，能學習到知識的基本上只有貴族，所以有很多數學家都出生於貴族世家。而這些富二代除了學習之外樂器也是必須要會一點的，所以有很多數學家也會彈奏樂器，甚至還比賽得獎。以下內容是由 1924 年美國數學月刊 1 月份的內容中提取。

### 赫爾曼·京特·格拉斯曼 (Hermann Günther Graßmann)

出生於 1809 年的德國，1840 年，他採用了拉普拉斯的《天體力學》和拉格朗日的《解析力學》中的基本理論，但他從 1832 年就開始琢磨的向量方法表述。這篇文章最初發表於 1894-1911 年的《合集》中，它包含了已知的最早的關於現在稱為線性代數的理論以及向量空間的概念。外代數也稱為格拉斯曼代數，以紀念赫爾曼·格拉斯曼。數學上，給定向量空間  $V$  的外代數，是特定有單位的結合代數，其包含了  $V$  為其中一個子空間。它記為  $\wedge(V)$  或  $\wedge \bullet (V)$  而它的乘法，稱為楔積或外積，記為  $\wedge$ 。他除了在數學上有漂亮的成就外，他還是一名鋼琴家和指揮家。

## 奧古斯塔斯·德摩根(Augustus De Morgan)

出生於 1806 年的英國，是一名數學家也是一名邏輯學家，他明確陳述了德摩根定律，將數學歸納法的概念嚴格化。德摩根自己在解代數方程時會算出負數，但他認為當算出的答案為負數時，必需作特殊的說明，以迴避負數本身的數學實在性。德摩根使用負數和虛數，但他仍懷疑它們的數學意義。他認為如果一個問題的最終答案算出來是負數，那說明原問題的提法不對。當算出最終答案為負數後，把原問題反過來提就可以保證答案為正數，困難就解決了。因此，他不認為負數一無是處，計算結果出現負數可以告訴解題者其問題的陳述方式搞反了。他也是一位得獎無數的長笛演奏者。

## 劉明輝、林正、楊影、周華健

這四位都是與數學系有關的音樂人歌手。

劉明輝畢業於長春師範大學數學系

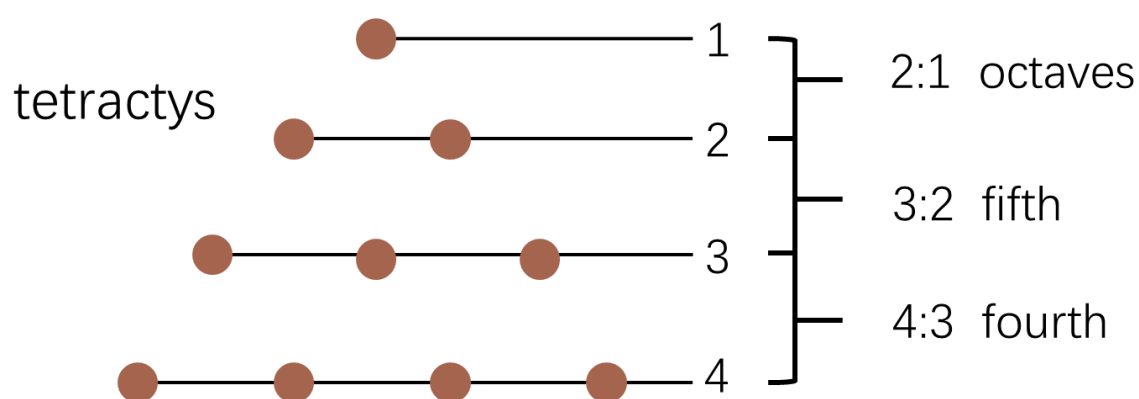
林正畢業於政治大學應用數學系

楊影畢業於台灣大學數學系

周華健肄業於台灣大學數學系

## 畢達哥拉斯(Πυθαγόρας)

是一名古希臘哲學家、數學家和音樂理論家。大家對他最熟悉的莫過於畢氏定理，但今天我們不是要講鼎鼎有名的直角三角形，我們今天要講的是另一種三角形。他認為數學可以解釋世界上的一切事物，對數字癡迷到幾近崇拜；同時認為一切真理都可以用比例、平方及直角三角形去反映和證實。他所說的音樂理論也跟三角形拖不了關係。「tetractys」(下圖一)中文又叫四分位數，畢達哥拉斯在其中發現了其與畢氏音階的關係。



圖一

## 古代中國

宮商角徵羽是大家都耳熟能詳的中國五音，分別對應現在的 Do、Re、Mi、Sol、La 古人是如何決定出來的呢？

古人拿了條繩子固定兩端彈了一下，發現可以彈出音高，決定將繩子縮短三分之一看看會有什麼效果，結果發現是一個更高的音而且還跟第一個音合奏起來非常和諧，於是繼續縮短三分之一；到了第五次，他們覺得這個音好難聽，第六次的音也難聽還跟前面的音搭不起來，於是他們將前五次的音定成宮商角徵羽，後續也有人做更嚴謹的定音。

## 約翰·塞巴斯蒂安·巴哈(Johann Sebastian Bach)

把數學用的淋漓盡致的音樂家非巴哈不可了。出生於 1685 年的德國，《十四首卡農》是他的作品中最充滿數學色彩的，在傳聞中，巴哈在作曲之前會先在小本本寫滿數學公式，才開始創作喔!!後面也會花多一點篇幅來講他的音樂作品。

## 皮耶·布萊茲(Pierre Louis Joseph Boulez)

出生於 1925 年的法國。在創作之初，布萊茲用了序列音樂標準的管弦樂配器法，在寫出《第二鋼琴奏鳴曲》和《無主之錘》後成了先鋒派音樂的頂尖人物之一。序列音樂也開始成為了潮流，不僅僅是在音符的組織上使用序列技法，還在時值、音色、強度、速度和力度各方面都序列化。序列化是指將音樂的一些參數；可能是一個或幾個高音、力度、時值按照一定的數學排列組合，然後這些編排序列或編排序列的變化形式在全曲中重複。後來常用在電子音樂之中。除了序列音樂的排序問題外，他還利用笛卡爾積創造了作曲公式，《第三鋼琴奏鳴曲》和《無主之錘》就是利用作曲公式譜出來的。

## 伊阿尼斯·澤納基斯(Ιάννης Ξενάκης)

出生於 1922 年的希臘，他的作品《轉移》實實在在地將轉移數學用盡了作曲。

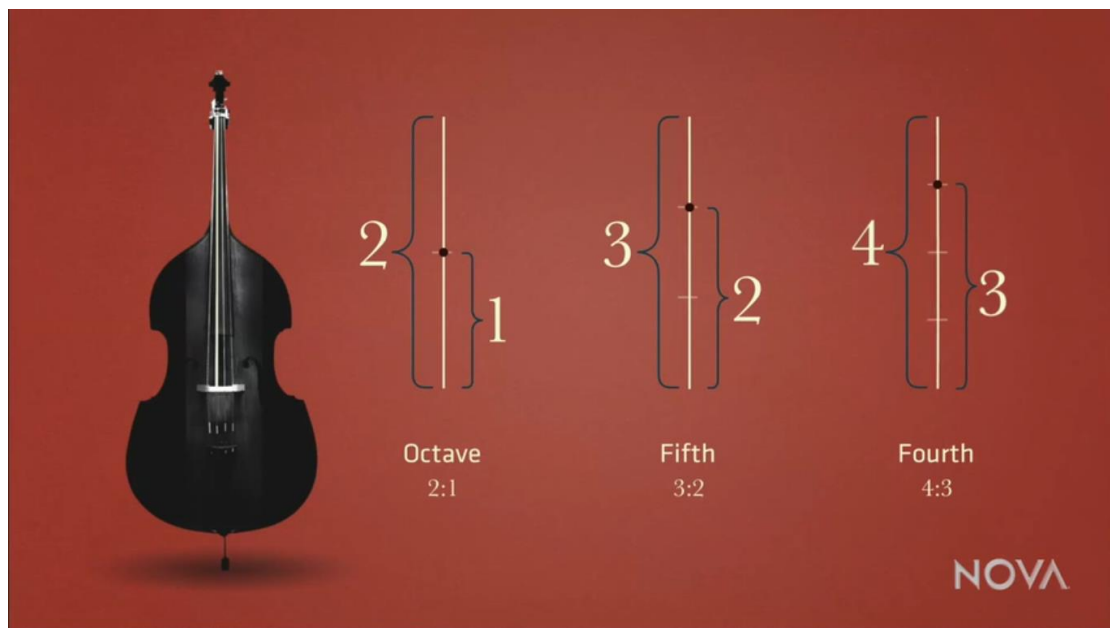


## 參、 關於音樂界中的數學...

### (一) 音階調音

首先我們要來講講世界上的第一個音階「畢氏音階」

兩個不同音高的音所構成的音程，它們的頻率關係必然是 3 的  $N$  次方除以 2 的  $M$  次方或是 2 的  $N$  次方除以 3 的  $M$  次方，當中  $m$  和  $n$  皆為正整數。



圖二

圖二可以看到三段弦

Octave 代表八度；Fifth 代表五度；Fourth 代表四度

其中比例也符合上述的畢氏音階定義。

既然有了 1:2、2:3、3:4 那會不會還有 5:4 跟 6:5 呢？

當然是有的啊!! 5:4 的弦長比叫作大三度 6:5 則叫作小三度，兩者只差了一個半音。

拉琴的人平時在演奏時靠著控制琴弦的長短產生不同的音高，那他們是一眼就能看出琴弦的長度比嗎？

其實並不然，他們是靠著平時練琴記住各個音的位置去做反應的。

講完了古希臘學者算出來的數字，那我們來核對看看現在鋼琴發出的頻率能不能對上。

音階	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		Do	Do <sup>#</sup>	Re	Re <sup>#</sup>	Mi	Fa	Fa <sup>#</sup>	So	So <sup>#</sup>	La	La <sup>#</sup>	Si
低音	頻率	262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	464	494
	簡譜	1̣		2̣		3̣	4̣		5̣		6̣		7̣
中音	頻率	523	554	587	622	659	698	740	784	831	880	932	988
	簡譜	1		2		3	4		5		6		7
高音	頻率	1046	1109	1175	1245	1318	1397	1480	1568	1661	1760	1865	1976
	簡譜	1̣̣		2̣̣		3̣̣	4̣̣		5̣̣		6̣̣		7̣̣

表 1 C 調音階-頻率對照表

相對於鋼琴的鍵盤，如圖 4 所示：



圖三

低音 Mi 跟 La 的頻率相除  $\frac{440}{330} = \frac{4}{3}$  符合前面的定義

中音 Re 跟 La 的頻率相除  $\frac{880}{587} = 1.4999... \doteq \frac{3}{2}$  符合前面的定義

低音 Do 跟中音 Do 的頻率相除  $\frac{523}{262} = 1.99... \doteq \frac{2}{1}$  符合前面的定義

再過測試後都符合畢氏階，也都符合八度、五度和四度的定義。

那畢達哥拉斯是怎麼發現的呢？

傳說畢氏某天經過一間打鐵舖，聽到打鐵聲竟然相當悅耳，便好奇心大發，當場做起研究。由於他聰明絕頂，很快發現了其中的奧秘。原來四名鐵匠所用的鎚子，重量分別是 6, 8, 9, 12(斤)——簡單整數比 於是他趕緊衝回家，改用琴弦來做實驗，很快就歸納出類似的規律：只要兩條琴弦的長度成簡單整數比，例如：4:3, 3:2, 2:1，發出的聲音就會和諧悅耳。用現代術語來說，這三組音程分別是完全四度(相差 5 個半音)、完全五度(相差 7 個半音)以及完全八度(相差 12 個半音)。

經過時代的變遷，現在定義音高跟音階不再適用當時鐵匠敲敲打打出來的音階了，現在用的是「十二平均律」

將一個八度平均分成十二等份，每等分稱為半音。八度音的頻率分為十二等分，即是分為十二項的等比數列，也就是每個音的頻率為前一個音的 2 的 12 次方根 $\sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}} = 1.059 \dots$



圖四

現代的鋼琴也是以十二平均律來調律定音的。巴赫的《平均律鍵盤曲集》更是完美地詮釋了平均律的優越性和轉調的完美，被譽為鋼琴文獻的舊約聖經。其實十二平均律的確立最早是來自中國，很可能是通過東西文化的交流傳到了西方，被西方稱之為中國的第五大發明。

在歷史文獻中，最早詳細記錄求律方法的是春秋時期的《管子》，管仲（管子）為齊桓公「九合諸侯，一匡天下」，而且精通音樂。他所記載的求律方法稱為「三分損益法」，根據「三分損益法」得來的十二律就是「三分損益法十二律」。而西方最早使用類似方法求律的是希臘的數學家畢達哥拉斯，比管仲晚了一百四十多年。

中國音名	三分損益	西方音名	十二平均律	三分損益與十二平均律之偏差（%）
黃鐘	81	C	81	-
林鐘	54	G	54.0610	0.11
太簇	72	D	72.1628	0.23
南呂	48	A	48.1629	0.34
姑洗	64	E	64.2898	0.45
應鐘	42.6667	B	42.9083	0.56
蕤賓	56.8889	F#	57.2757	0.68
大呂	75.8519	C#	76.4538	0.79
夷則	50.5679	G#	51.0268	0.90
夾鐘	67.4239	D#	68.1126	1.01
無射	44.9492	A#	45.4597	1.12
仲呂	59.9323	F	60.6814	1.23

圖五

圖五是西方「參考音名」與「十二平均律的誤差」計算。

古人拿了一根八寸十分一的竹管當作宮音也就是黃鐘，而後的幾個音是藉由三分損益法得出

黃鐘 ( C ) : 81

林鐘 ( G , 由黃鐘三分損而來 ) :  $81 \times \frac{2}{3} = 54$

太簇 ( D , 由林鐘三分益而來 ) :  $54 \times \frac{4}{3} = 72$

南呂 ( A , 由太簇三分損而來 ) :  $72 \times \frac{2}{3} = 48$

姑洗 ( E , 由南呂三分益而來 ) :  $48 \times \frac{4}{3} = 64$

應鐘 ( B , 由姑洗三分損而來 ) :  $64 \times \frac{2}{3} = 42\frac{2}{3}$

蕤賓 ( F# , 由應鐘三分益而來 ) :  $42\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = 56\frac{8}{9}$

大呂 ( C# , 由蕤賓三分益而來 ) :  $56\frac{8}{9} \times \frac{4}{3} = 75\frac{23}{27}$

夷則 ( G#/Ab , 由大呂三分損而來 ) :  $75\frac{23}{27} \times \frac{2}{3} = 50\frac{46}{81}$

夾鐘 ( D#/Eb , 由夷則三分益而來 ) :  $50\frac{46}{81} \times \frac{4}{3} = 67\frac{103}{243}$

無射 ( A#/Bb , 由夾鐘三分損而來 ) :  $67\frac{103}{243} \times \frac{2}{3} = 44\frac{692}{729}$

仲呂 ( F , 由無射三分益而來 ) :  $44\frac{692}{729} \times \frac{4}{3} = 59\frac{2039}{2187}$

清黃鐘 ( 黃鐘的高八度音 , 由仲呂三分損而來 ) :  $59\frac{2039}{2187} \times \frac{2}{3}$

$= 59\frac{6265}{6561}$

最後一個「清黃鐘」的長度 39.9548849，與直接取「黃鐘」長度的一半 40.5 仍有一段小小的差距，這就是「黃鐘不能還原」的問題。因為在連乘十二次  $2/3$  或  $4/3$  後，最後的值不可能達到原始的  $1/2$ 。

$$\frac{2^6 \times 4^6}{3^{12}} = 0.49327018427257211995310862353488$$

另外，若在定律時不斷地使用三分損益的操作，最後一定會出現除不盡的小數，使得在實際製作時容易產生誤差。然而在現實上，準確度與精密度絕對有其極限，所以經過十二次的三分損益之後，已經可以構成一個（不甚完美）的音階循環。這也是為何中西音樂理論中，都不約而同地發展出以「12 音階」為主流的原因。之後才會出現如純律、十二平均律等不同的改進或修正方法。


除了可以從弦長頻率之中發現數學之外，音階中也存在著畢氏定理。

- 八個是白鍵，五個是黑鍵。
- 第三和第五音符創建了基本和弦的基礎
- 主音是第五個音符，它也是組成八度音階的所有 13 個音符的第八個音符。
- 八個音 13 個音符  $\rightarrow 8/13 = 0.61538...$  近似黃金比例
- 3、5、8、13 接氏費是數列

- 音樂是以八度音階為基礎。在鋼琴中，是由八個白鍵及五個黑鍵，總共 13 個鍵來代表。像大六度的 E 音與 C 音，震動頻率比為 0.25 倍，偏離真正的黃金比率僅 0.006966。
- 斯特拉迪瓦里小提琴
- 薩克斯管吹嘴
- 揚聲器的線

























## (二) 譜曲製作

在製作曲子之前要先看得懂個個音符代表幾拍

長度	音符	休止符
1	全音符 	全休止符 
1/2	2 分音符 	2 分休止符 
1/4	4 分音符 	4 分休止符 
1/8	8 分音符 	8 分休止符 
1/16	16 分音符 	16 分休止符 
1/32	32 分音符 	32 分休止符 

圖六

這些很像之前學過的符號，當然符號之間也能進行加減

	=		+	
	=		+	
	=		+	
	=		+	
	=		+	
	=		+	
	=		+	
	=		+	

圖七



在譜曲製作中我們將介紹一位音樂界的天才，他也在作曲的過程中用到了數學。首先我們要知道，貝多芬的音樂生涯中大部分都是聾的，他說他在作曲時，會感覺到不同的線條，他將這些線條了下來，變成一首首曲子。

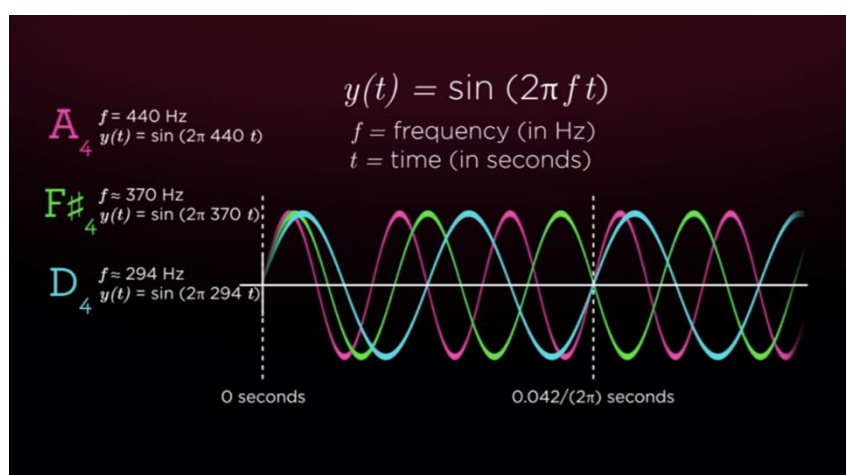
首先要講的是《月光鳴奏曲》

曲子的開頭由一連串的三个音也是 D 大調三和弦(D、F<sub>#</sub>、A)



圖八

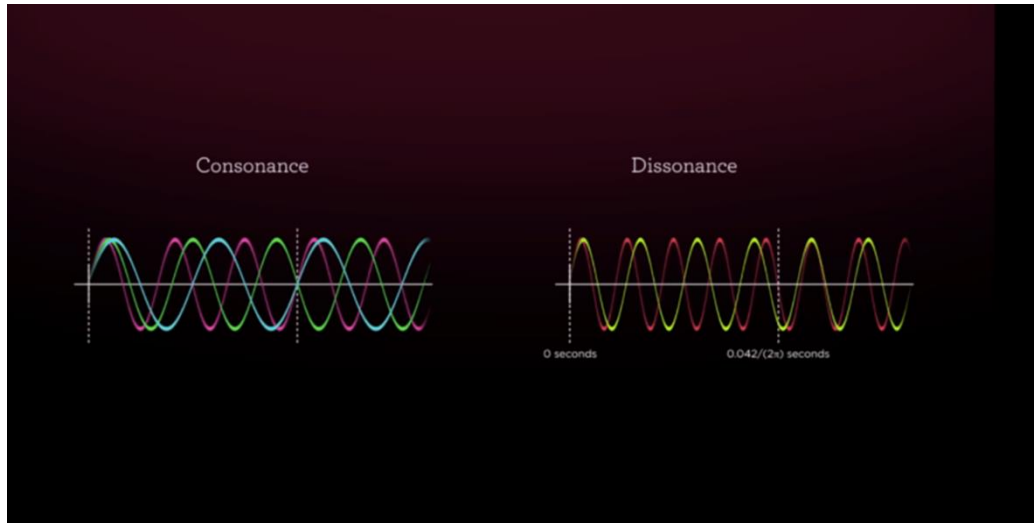
將這三個音拉出來，可以得到正弦波，如下圖



圖九

可以看到三個波在 $\frac{0.042}{2\pi}$  秒時都回到了 X 軸

反觀在 52~54 小節，波是不同步的，使音樂不和諧，也透露出悲傷的情感



圖十

儘管我們能研究音樂作品中潛在的數學模式，但尚未發現某些模式的序列能觸動觀眾的心。

英國數學家希爾維斯說:「難道我們能形容音樂式數學的感性，數學是音樂的理性；音樂家感受數學，數學家思考著音樂。」

在查找資料的過程中，我們看到了第 53 屆科展有人做了主富哥的比例，結果如下：

## 2008音樂風雲榜榜單前10名

編號	歌名	歌手	至副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合 黃金分割
1	沒有如果	梁靜茹	01:35	02:34	0.617	0
2	王妃	蕭敬騰	01:01	01:40	0.610	0
3	心牆	郭靜	01:00	01:36	0.625	0
4	壞人	方炯鑌	01:26	02:22	0.606	0
5	情歌	梁靜茹	01:11	01:45	0.617	0
6	妥協	蔡依林	01:06	01:47	0.617	0
7	如果我變成回憶	Tank	01:36	02:36	0.613	0
8	搞笑	羅志祥	01:11	01:58	0.602	0
9	別再為他流淚	梁靜茹	00:52	01:24	0.619	0
10	我愛他	叮噓	01:20	02:09	0.620	0

## 2010、11音樂風雲榜榜單前10名

編號	歌名	歌手	至副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合 黃金分割
1	洋葱	丁噐	00:59	01:33	0.634	0
2	沒關係	吳克羣	00:41	01:12	0.569	0
3	我們沒有在一起	劉若英	00:54	01:30	0.600	0
4	我是一隻小小鳥	丁噐	00:57	01:51	0.514	X
5	沒那麼簡單	黃小琥	01:26	02:09	0.666	0
6	天后	陳勢安	00:53	01:21	0.654	0
7	指望	郁可唯	00:30	00:58	0.517	X
8	好的事情	顏爵	00:52	01:21	0.642	0
9	那些年	胡夏	00:44	01:08	0.647	0
10	末班車	蕭煌奇	00:41	01:07	0.612	0

## 2009音樂風雲榜榜單前10名

編號	歌名	歌手	至副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合 黃金分割
1	說好的幸福呢	周杰倫	01:12	01:56	0.621	0
2	下一個天亮	郭靜	01:08	01:51	0.613	0
3	下雨天	南拳媽媽	01:00	01:37	0.619	0
4	終於說出口	小宇	01:01	01:39	0.614	0
5	擦肩而過	李聖傑	01:08	01:54	0.618	0
6	為你寫詩	吳克群	01:11	01:50	0.623	0
7	稻香	周杰倫	00:49	01:21	0.605	0
8	原諒我	蕭敬騰	00:54	01:30	0.600	0
9	會呼吸的痛	梁靜茹	01:06	01:46	0.623	0
10	我不配	周杰倫	01:24	02:17	0.613	0

## 校園名歌

編號	歌名	歌手	至副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合 黃金分割
1	外婆的澎湖灣	潘安邦	00:43	01:10	0.614	0
2	拜訪春天	施孝榮	00:16	00:31	0.516	X
3	秋蟬	楊芳儀/徐曉菁	00:48	01:19	0.608	0
4	捉泥鰱	包美聖	00:19	00:30	0.633	0
5	龍的傳人	李建復	01:21	01:37	0.835	X
6	讓我們看雲去	陳明韶	00:24	00:39	0.615	0
7	如果	合唱	00:24	00:41	0.585	0
8	浮雲遊子	陳明韶	00:28	00:45	0.622	0

## 西洋經典

編號	歌名	到副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合 黃金分割
1	I Will Always Love You	00:43	01:10	0.614	O
2	Somewhere In Time	00:56	01:20	0.700	X
3	The Rose	02:08	02:49	0.757	X
4	Unchained Melody	01:03	01:46	0.594	O
5	My Heart Will Go On	00:58	01:35	0.611	O
6	Somewhere Out There	01:51	02:43	0.681	X
7	Edelweiss	00:43	01:10	0.614	O
8	Today	00:55	01:24	0.655	O
9	Take me home country road	00:33	00:54	0.611	O
10	All I ask of you(歌劇魅影)	00:37	01:00	0.617	O

排名	歌曲	歌手	主歌結束	第一次結束	比值	符合分割
1	愛情你比我想的闊較偉大	茄子蛋	01:42	02:05	0.816	X
2	在這座城市遺失了你	告五人	01:41	02:29	0.677852	X
3	我很好騙	動力火車	01:03	01:58	0.533898	X
4	四季予你	程響	01:13	01:41	0.722772	X
5	阿拉斯加海灣	蔡恩雨	00:53	01:26	0.616279	O
6	因為你 所以我	五月天	01:20	01:47	0.747664	X
7	白月光與朱砂痣	大籽	01:06	01:28	0.75	X
8	失重前幸福	艾薇	00:59	01:28	0.670455	X
9	如果能幸福	周興哲	01:29	02:22	0.626761	O
10	星辰大海	黃霄雲	00:46	01:11	0.647887	O

圖十一~十六

最後一張圖是組內自行製作的主副歌比例，經過觀察後，我們覺得只是巧合。



### (三) 巴哈

巴哈的許多曲子都用到了數學邏輯，我們挑了其中幾首來介紹。

- 螃蟹卡農



圖十七

這是巴赫的 BWV1079 ( 螃蟹卡農 )，特徵是採用一條旋律逆行 ( 左右翻轉，即從最後一個音反向演奏，直到最開始的一個音 )，再與原旋律對位，因為兩條旋律互相倒行，形似螃蟹，因而得名。

- Canon Trias Harmonica a 8 BWV 1072

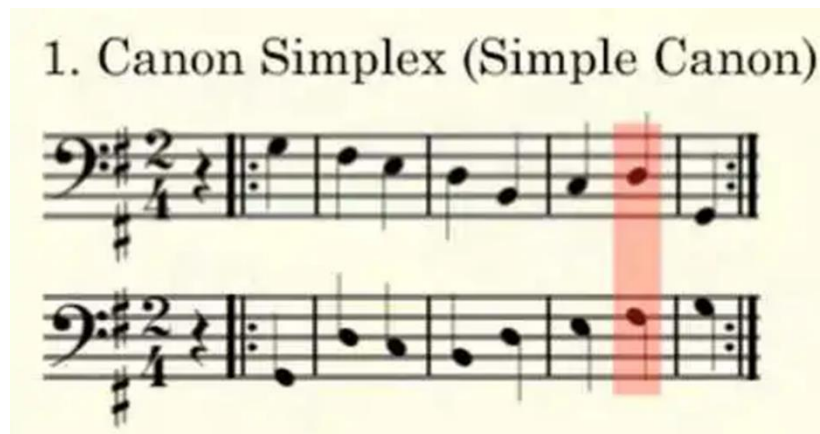


圖十八

很混亂對不對？聽上去想一片漿糊對不對？這個是巴赫的 BWV1072，由八把大提琴演奏，這個曲子很有極簡音樂的味道。它用了一個很短的旋律，然後將其倒影（上下翻轉），然後複製四次，這樣我們就有八條旋律了。再然後下一條旋律都比前一條慢一拍進入

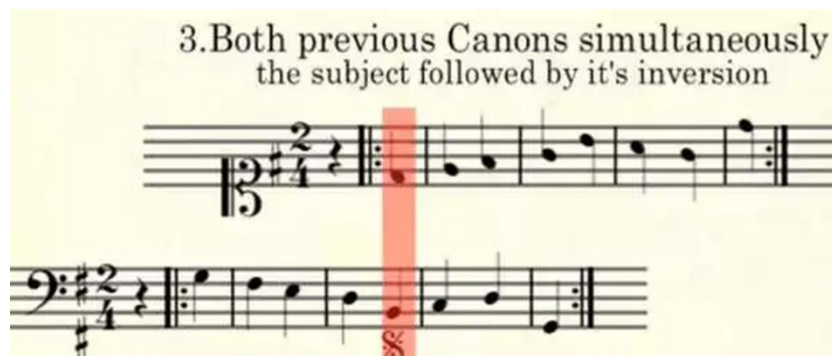


- Goldberg Canons



圖十九

這是巴赫的 BWV1087 哥德堡卡農，在裡面巴赫用了很多神奇的技法，這裡重點挑幾個來說明：第一個很簡單，就是單純的同一條旋律順行與逆行重疊。



圖二十

一條旋律倒影，然後比原旋律慢四拍進入並對位

## 肆、參考文獻

Mathematicians and Music:

[https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Archibald\\_music\\_1/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Archibald_music_1/)

赫爾曼·京特·格拉斯曼:

<https://zh.wikipedia.org/zhtw/%E8%B5%AB%E7%88%BE%E6%9B%BC%C2%B7%E6%A0%BC%E6%8B%89%E6%96%AF%E6%9B%BC>

外代數:

<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%A4%96%E4%BB%A3%E6%95%B0>

奧古斯塔斯·德摩根:

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%A5%A7%E5%8F%A4%E6%96%AF%E5%A1%94%E6%96%AF%C2%B7%E5%BE%B7%E6%91%A9%E6%A0%B9>

Short History of the Relation Between Mathematics and Music:

[https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-42937-3\\_2?noAccess=true](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-42937-3_2?noAccess=true)

Mathematics and Music:

<https://www.simplifyingtheory.com/math-in-music/>

音樂中的中國古代數學之美:

<https://ppfocus.com/0/cua436cdb.html>

十二律:

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%81%E4%BA%8C%E5%BE%8B>

巴赫作曲的秘密竟與數學有關？

<https://kknews.cc/zh-tw/news/v2l3zn2.html>

約翰·塞巴斯蒂安·巴哈:

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%BA%A6%E7%BF%B0%C2%B7%E5%A1%9E%E5%B7%B4%E6%96%AF%E8%92%82%E5%AE%89%C2%B7%E5%B7%B4%E8%B5%AB>

皮耶·布列茲:

<https://zh.wikipedia.org/zhtw/%E7%9A%AE%E5%9F%83%E5%B0%94%C2%B7%E5%B8%83%E8%8E%B1%E5%85%B9>

法國作曲家布列茲去世：他改變了整個音樂界的生態環境:

[https://m.thepaper.cn/newsDetail\\_forward\\_1417793](https://m.thepaper.cn/newsDetail_forward_1417793)

序列主義:

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BA%8F%E5%88%97%E4%B8%BB%E4%B9%89>

古典音樂與數學:

<https://read.muzikair.com/us/articles/8e212f14-de1c-424c-82dd-61527e4533d2>

伊阿尼斯·澤納基斯:

<https://zh.wikipedia.org/zhtw/%E4%BC%8A%E9%98%BF%E5%B0%BC%E6%96%AF%C2%B7%E6%B3%BD%E7%BA%B3%E5%9F%BA%E6%96%AF>

畢氏音程:

<https://zh.wikipedia.org/zhtw/%E7%95%A2%E6%B0%8F%E9%9F%B3%E7%A8%8B>

Ancient Math & Music:

<https://www.pbslearningmedia.org/resource/nvmm-math-mathmusic/ancient-math-music/>

畢氏音階:

<https://elarinet900.pixnet.net/blog/post/39214465>

弦樂泛音到底怎麼回事兒

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/59274917>

原來莫扎特的音樂秘訣在這裡——神奇的斐波那契數列

<https://kknews.cc/news/q6pmoy8.html>

貝多芬其實是數學天才？音樂與數學的巧妙關係

<https://dq.yam.com/post/8854>

Music and Math. The Genius of Beethoven.

<https://www.youtube.com/watch?v=M51Bm9sNazM>

ResearchGate-What relation exists between mathematics and music?

[https://www.researchgate.net/post/What\\_relation\\_exists\\_between\\_maths\\_and\\_music](https://www.researchgate.net/post/What_relation_exists_between_maths_and_music)

圓周率之歌：用音樂呈現數學之美

<https://www.youtube.com/watch?v=kV1t9b0D4To>

巴赫音樂中的數學性是怎麼體現的？

<https://www.getit01.com/p20180131839791973/>

Bach Crab Canon on the Harpsichord

<https://www.youtube.com/watch?v=-D9HD2eetiQ>

J. S. Bach - Canon Trias Harmonica a 8 BWV 1072

<https://www.youtube.com/watch?v=v62-kA6OXeE>

Goldberg Canons - J.S. Bach BWV 1087

<https://www.youtube.com/watch?v=G3KahDxFPuc>

This composer turns portraits of beloved pets into music

<https://scoop.upworthy.com/this-composer-turns-portraits-of-beloved-pets-into-music>

gerubach

<https://www.youtube.com/user/gerubach>