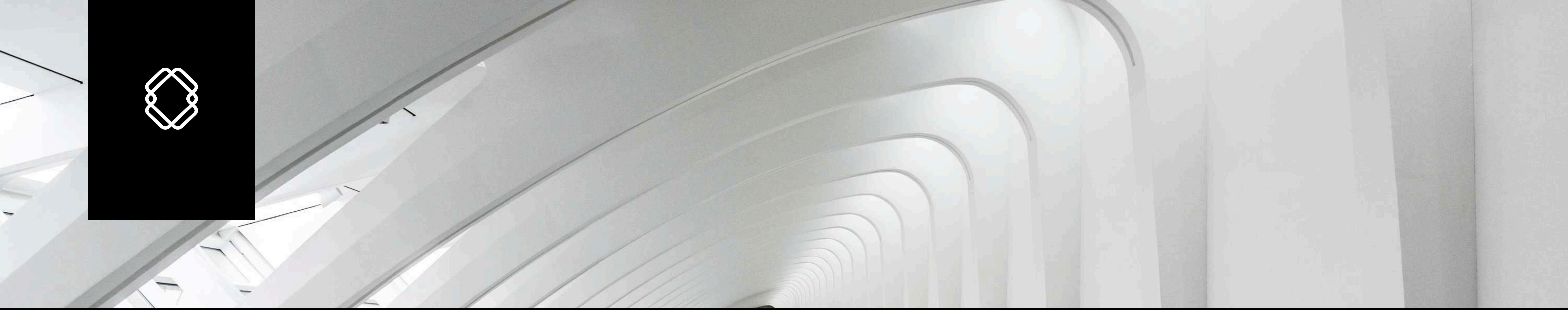


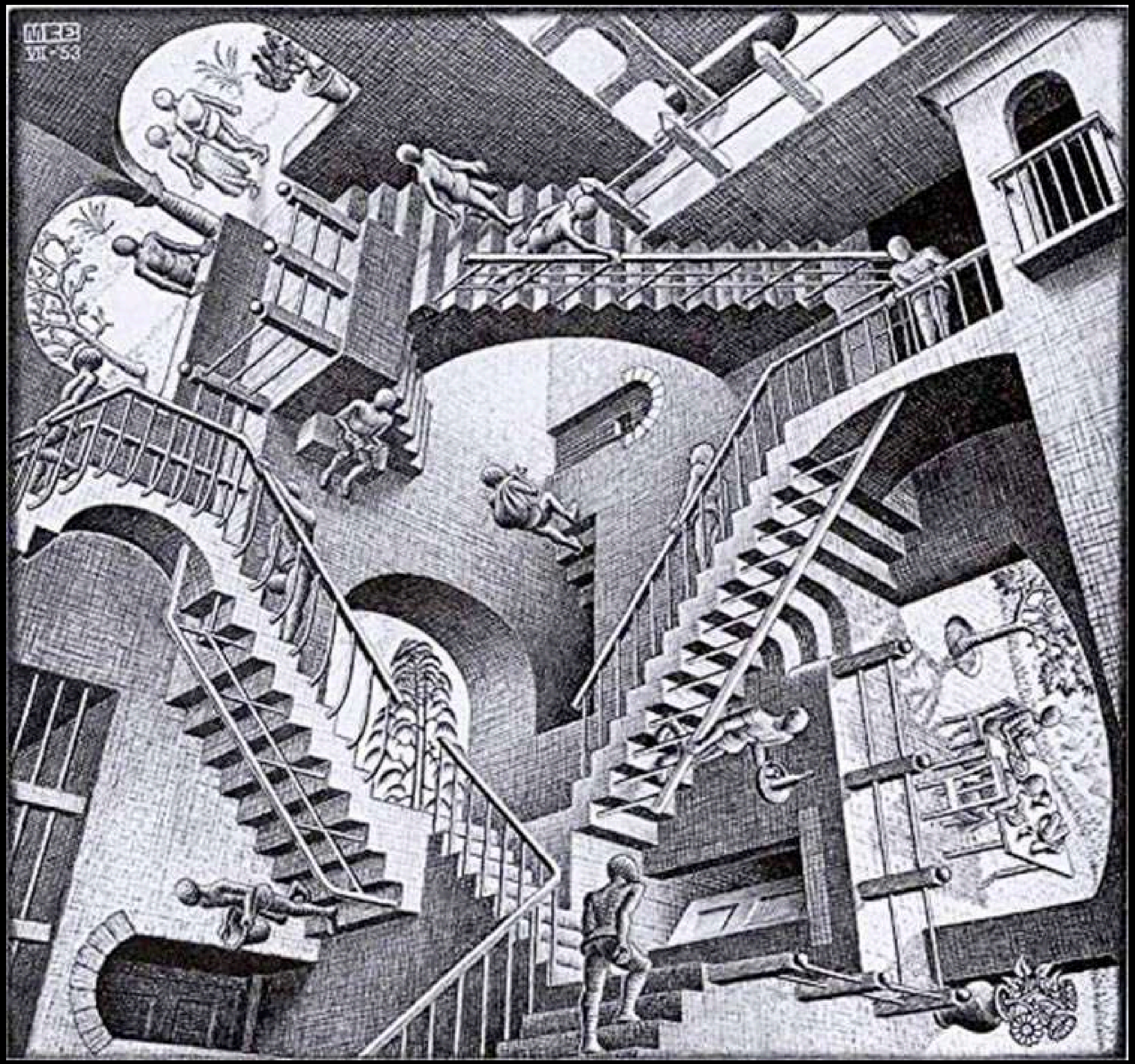
艾雪鑲嵌藝術

ESCHER-STYLE TESSELLATION

411031209 謝燿璘　　**411031210 馬國凱**

411031241 吳宗燁　　**411031245 廖登峰**

目錄



03 簡介

04 圖例

05 結構

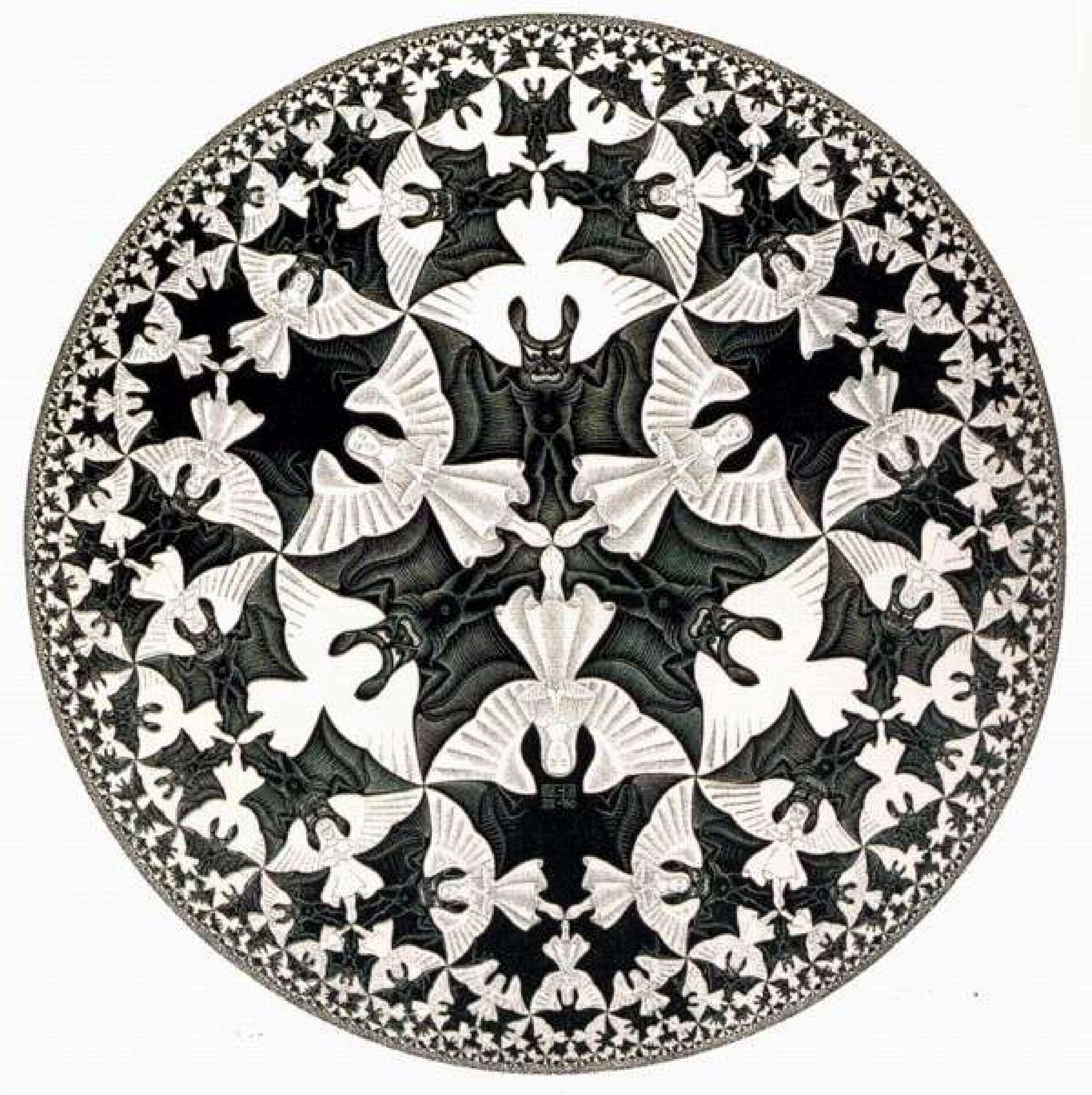
- 06 施萊夫利符號
- 07 半正則鑲嵌
- 13 正則鑲嵌
  - 17 正三角形鑲嵌
  - 21 正四方形鑲嵌

25 創造 by GeoGebra

26 應用

簡介

什麼是艾雪鑲嵌（Escher-style tessellation）?



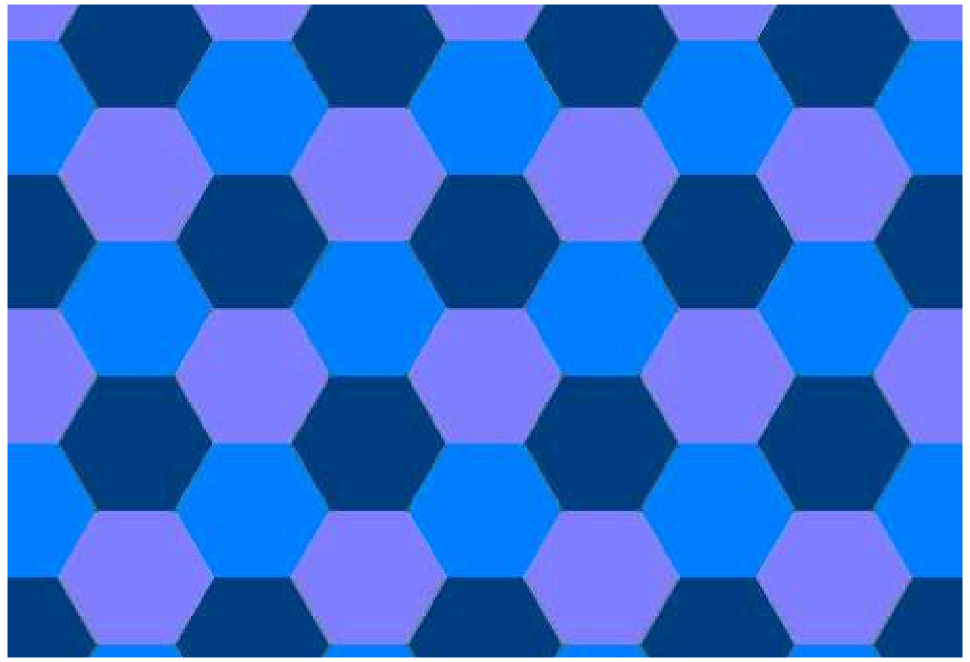
圖例

返回議程

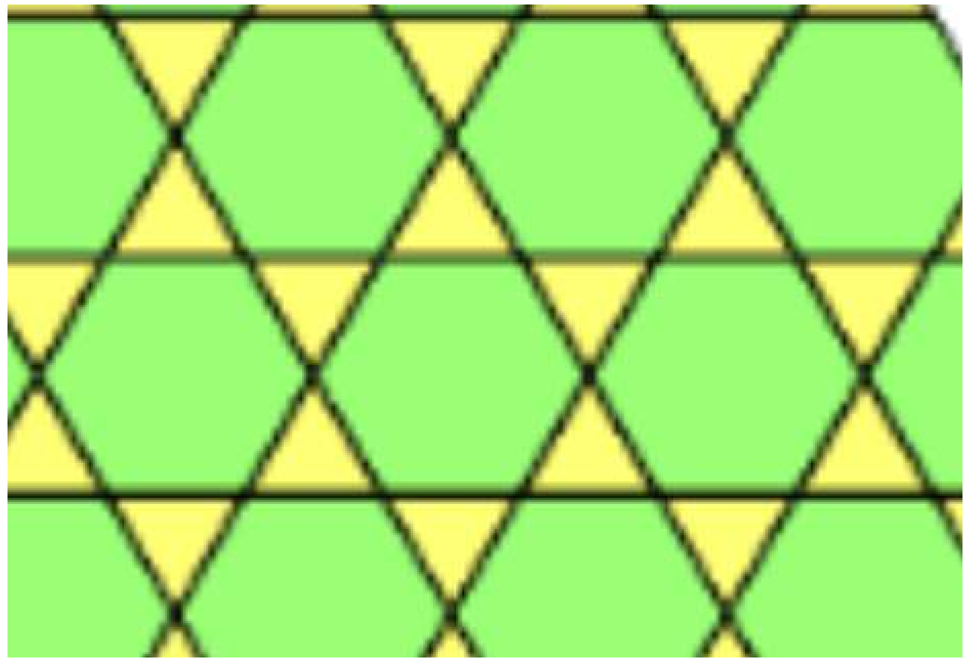
結構

艾雪鑲嵌圖形的結構主要分成「半正則鑲嵌」及「正則鑲嵌」, 以下將會找出所有可以鑲嵌組合的正多邊形。

舉例



正則鑲嵌—
柏拉圖鑲嵌
（Platonic tilings）



半正則鑲嵌—
阿基米德鑲嵌
（Archimedean tilings）

施萊夫利符號

一種可以表示特定正多邊形或密鋪圖案若干重要特性的符號, 一個有n個邊的正多邊形，其施萊夫利符號為 { n }。

施萊夫利符號可以用來表達四維及以上正多胞形，一個n維正多胞形的施萊夫利符號包含n-1個數字。而每個半正則鑲嵌及正則鑲嵌都有一個特定的施萊夫利符號。

半正則鑲嵌

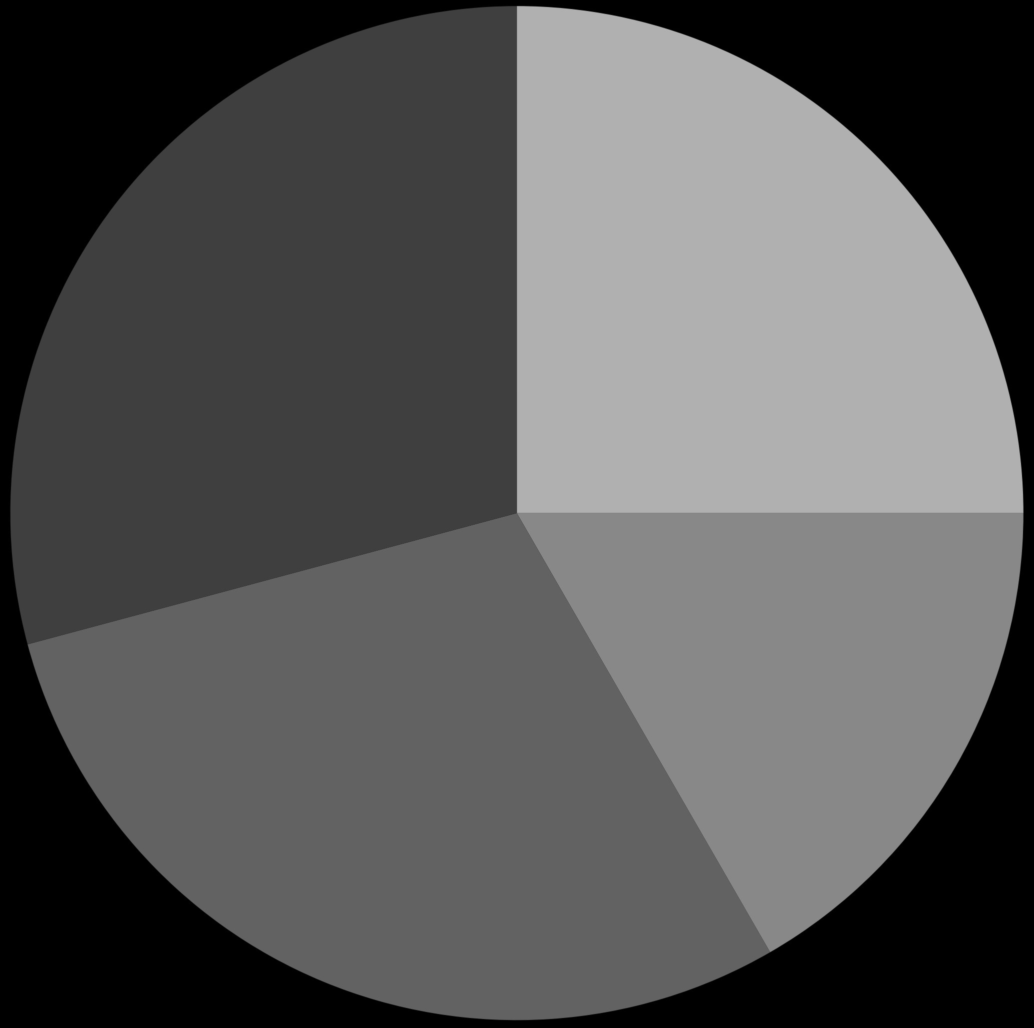
一種由2種或以上正多邊形，並讓圖形完全占滿整塊平面，且沒有空隙或重疊。

需符合:

- 頂點碰頂點
- 邊與邊密合
- 而且都可以往外繼續拼滿整個平面。

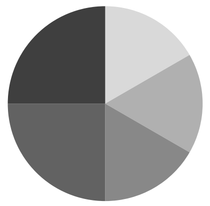
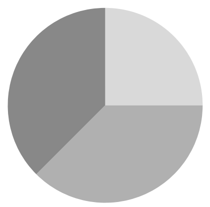
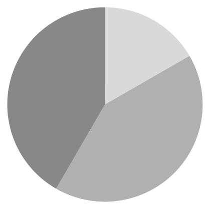
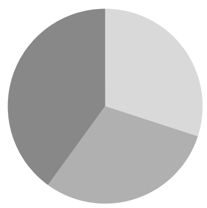
➔每個正多邊形不需全等

所有內角總和為360°



返回議程

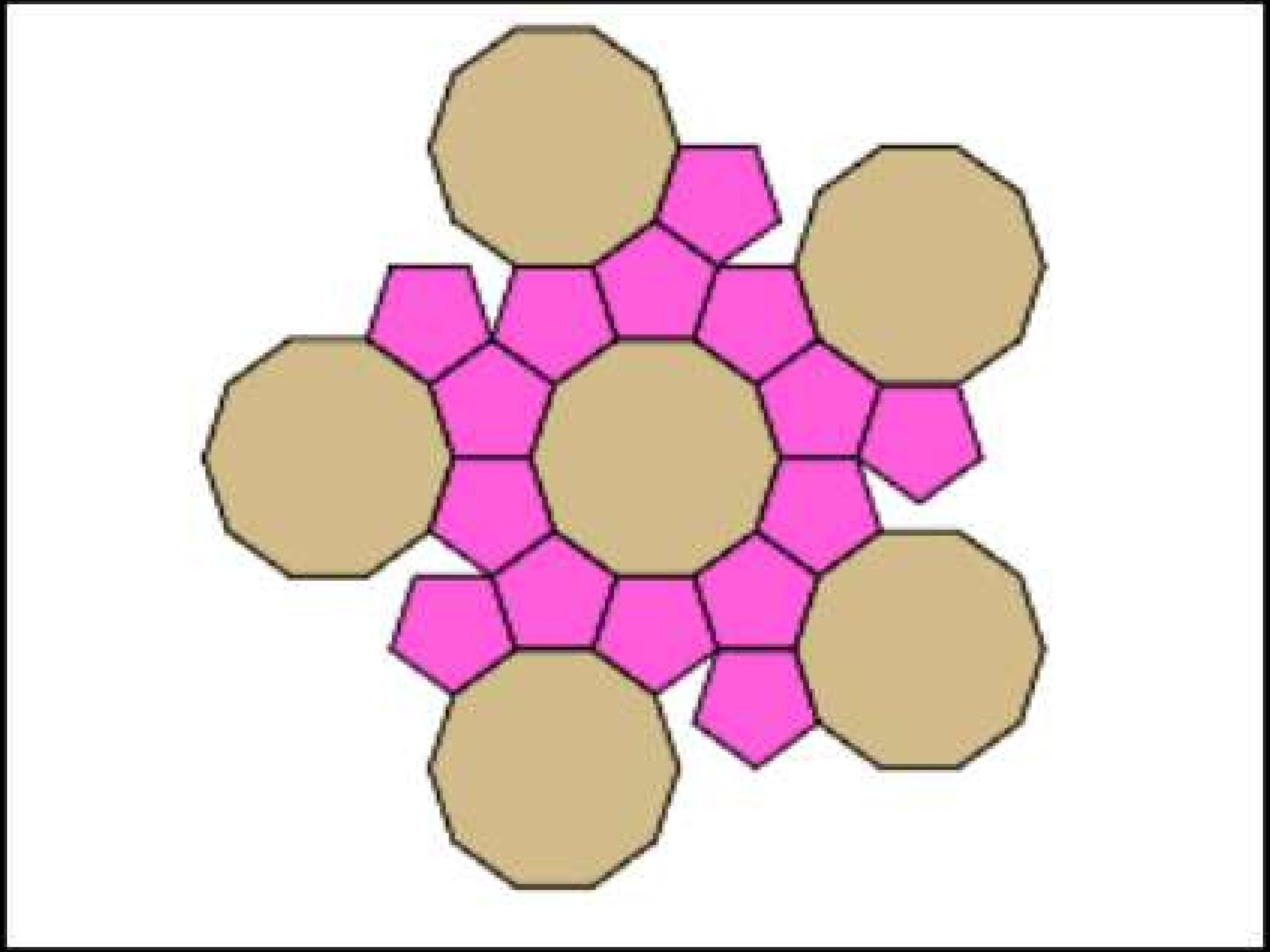
組合的可能性

組合	角度	總和
3 個正三角形 + 2 個正邊形	3×60°+2×90°=360°	
4 個正三角形 + 1 個正六邊形	4×60°+1×120°=360°	
2 個正三角形 + 2 個正六邊形	2×60°+2×120°=360°	
1 個正方形 + 2 個正八邊形	1×90°+2×135°=360°	
1 個正三角形 + 2 個正十二邊形	1×60°+2×150°=360°	
2 個正五邊形 + 1 個正十邊形	2×108°+1×144°=360°	

返回議程

密鋪多邊形需要在層層往外延伸擴張時，因此不管在哪一個頂點位置單位圖形組合的幾何特性都必須滿足密鋪 360° 的條件。

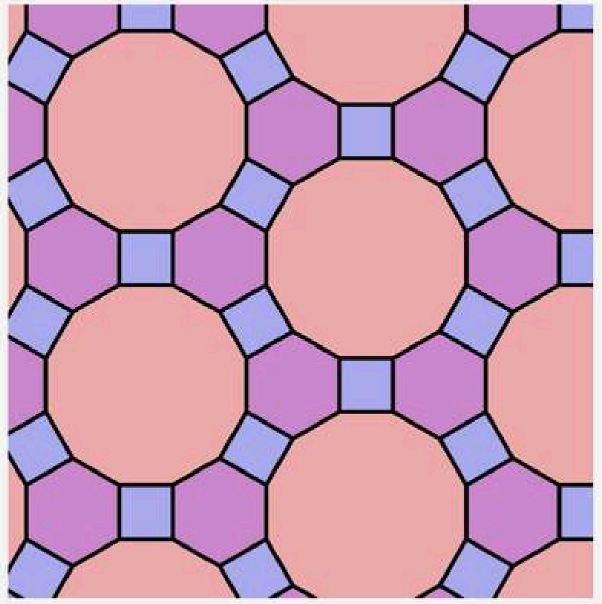
➔雖然 2 個正五邊形跟 1 個正十邊形頂點可密鋪成 360°，但卻無法滿足繼續規則地往外密鋪形成多邊形。



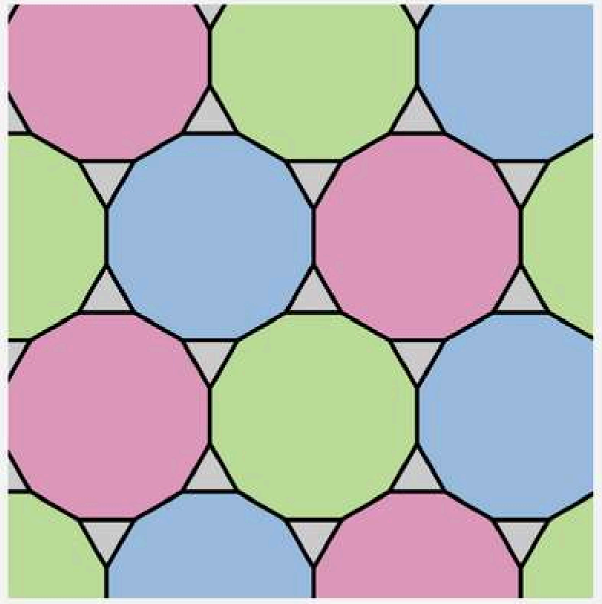
所有半正則鑲嵌可能

只有正三角形、正方形、正六邊形、正八邊形、正十二邊形等 5 種正多邊形可由 2 種不同正多邊形相互搭配形成密鋪多邊形。而這五種正多邊形可以組成以下半正則鑲嵌圖:

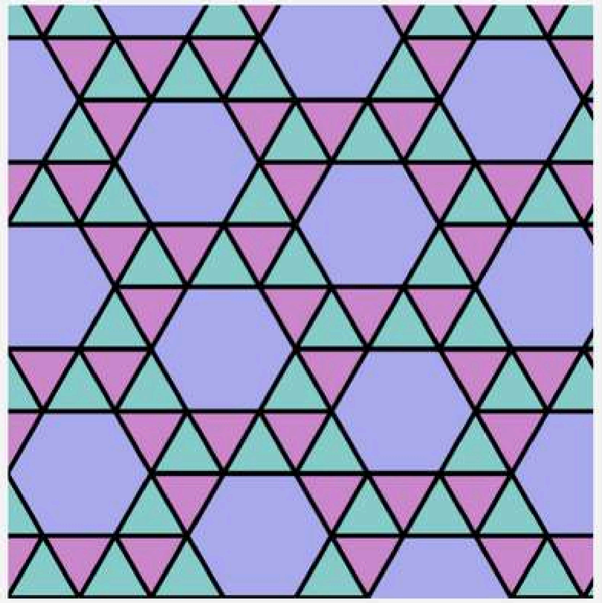
(4,6,12), $t_{0,1,2}\{6,3\}$
——大斜方截半六邊形鑲嵌



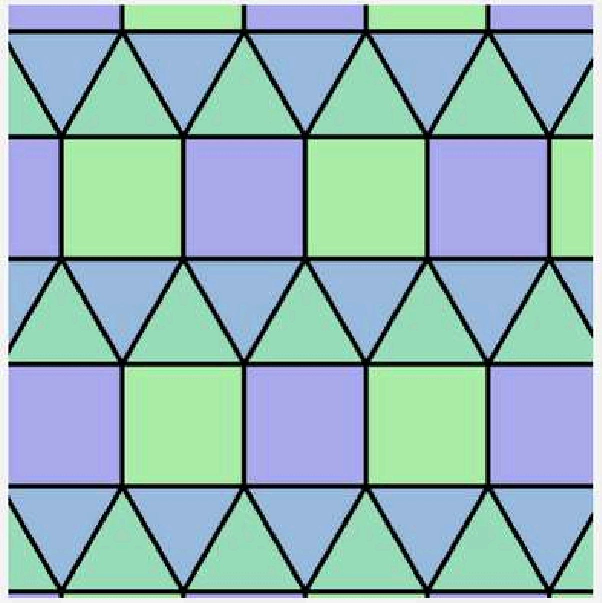
(3,12,12), $t_{0,1}\{6,3\}$
——截角六邊形鑲嵌



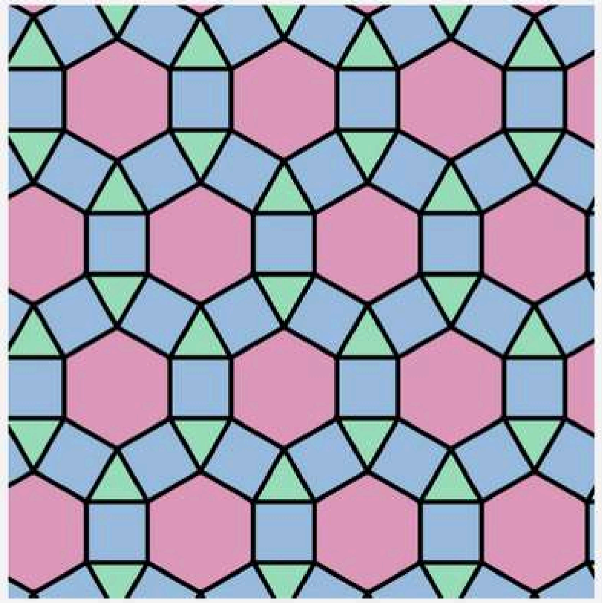
(3,3,3,3,6), $s\{6,3\}$
——扭稜六邊形鑲嵌



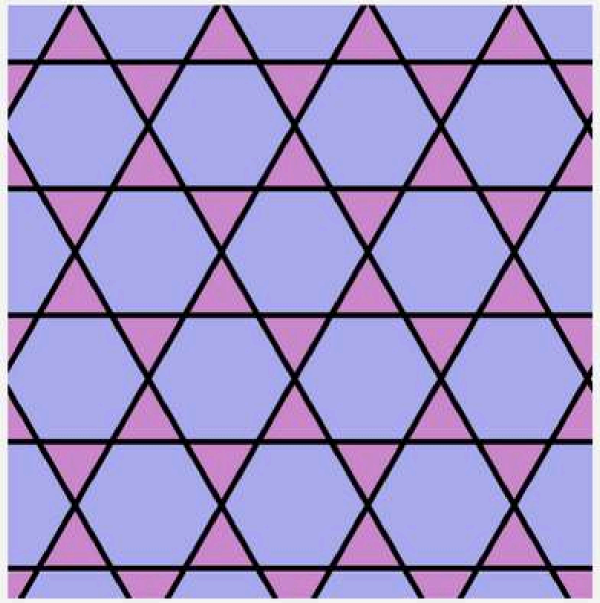
(3,3,3,4,4), $\{3,6\}$:e
——異扭稜正方形鑲嵌



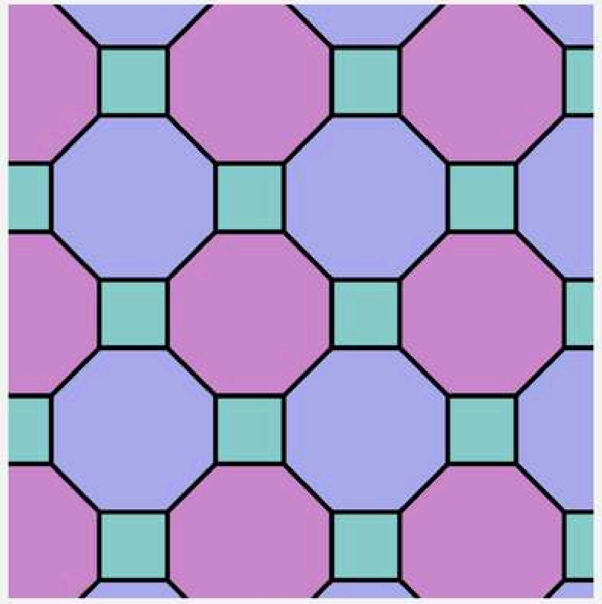
(3,4,6,4), $t_{0,2}\{6,3\}$
——小斜方截半六邊形鑲嵌



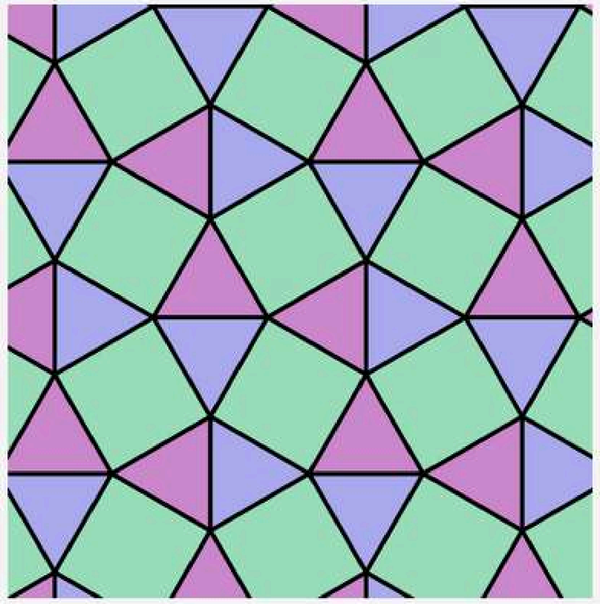
(3,6,3,6), $t_1\{6,3\}$
——截半六邊形鑲嵌



(4,8,8), $t_{0,1}\{4,4\}$
——截角正方形鑲嵌



(3,3,4,3,4), $s\{4,4\}$
——扭稜正方形鑲嵌



綜合討論(1)-正多邊形可搭配組合

正n邊形	組合	合計
正 3 邊形	(3,3,3,3,6) (3,3,3,4,4) (3,4,6,4) (3,6,3,6) (3,12,12) (3,3,4,3,4)	6
正 4 邊形	(3,3,3,4,4) (3,4,6,4) (4,6,12) (4,8,8) (3,3,4,3,4)	5
正 6 邊形	(3,3,3,3,6) (3,4,6,4) (3,6,3,6) (4,6,12)	4
正 8 邊形	(4,8,8)	1
正 12 邊形	(4,6,12) (3,12,12)	2

綜合討論(2)-3個三角形和2個正方形

	類似組合
(3,3,3,4,4)	(3,3,4,4,3)、(3,4,4,3,3)、(4,4,3,3,3)、(4,3,3,3,4)
(3,3,4,3,4)	(4,3,4,3,3)、(3,4,3,3,4)、 (4,3,3,4,3)、 (3,4,3,4,3)

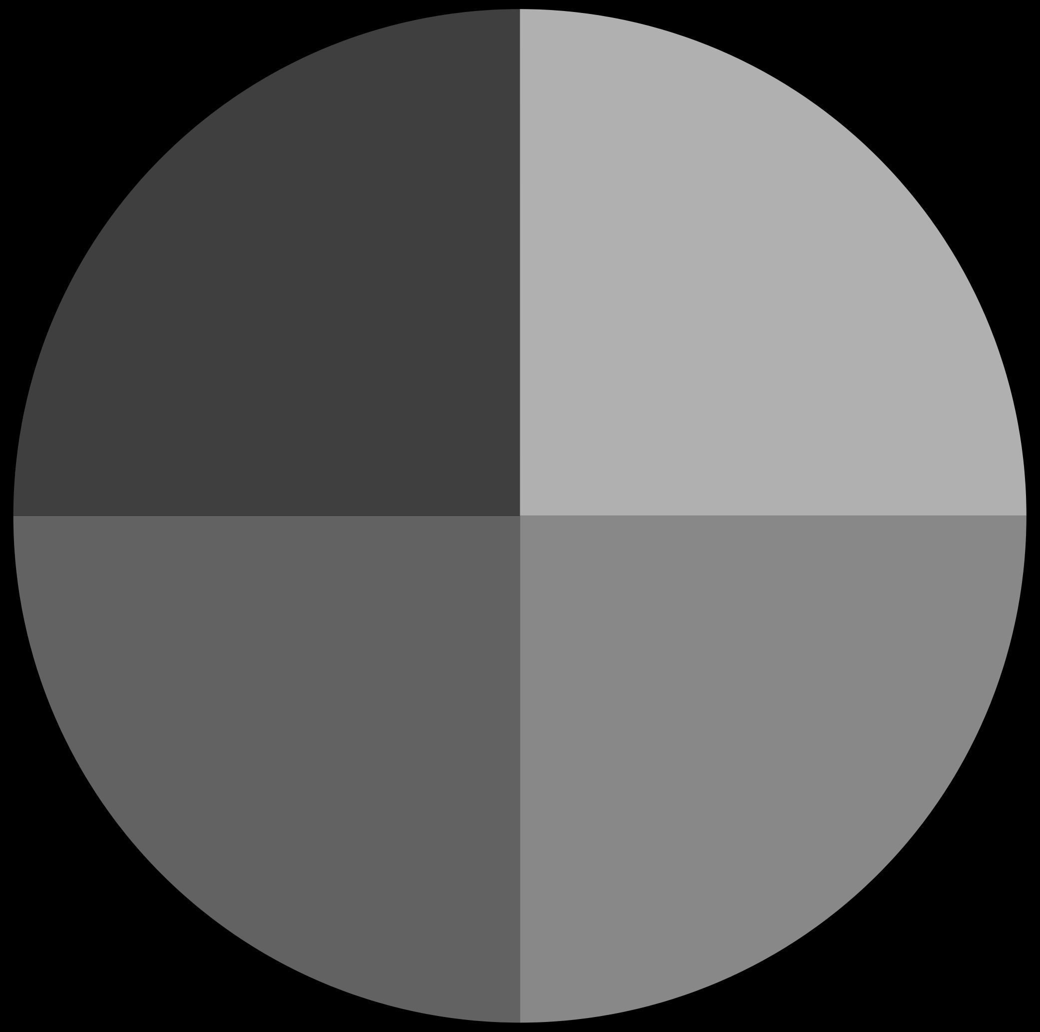
正則鑲嵌

一種由完全相等正多邊形組成，並讓圖形完全占滿整塊平面，且沒有空隙或重疊。

需符合:

- 頂點碰頂點
- 邊與邊密合
- 而且都可以往外繼續拼滿整個平面。

所有內角總和為360°



返回議程

找出組合

每個正n多邊形內角之總和為 360°

→正n多邊形內角為 π-2π/n = (n-2)π/n

→m個正n多邊形內角和為mπ(n-2)/n = 2π, m為整數

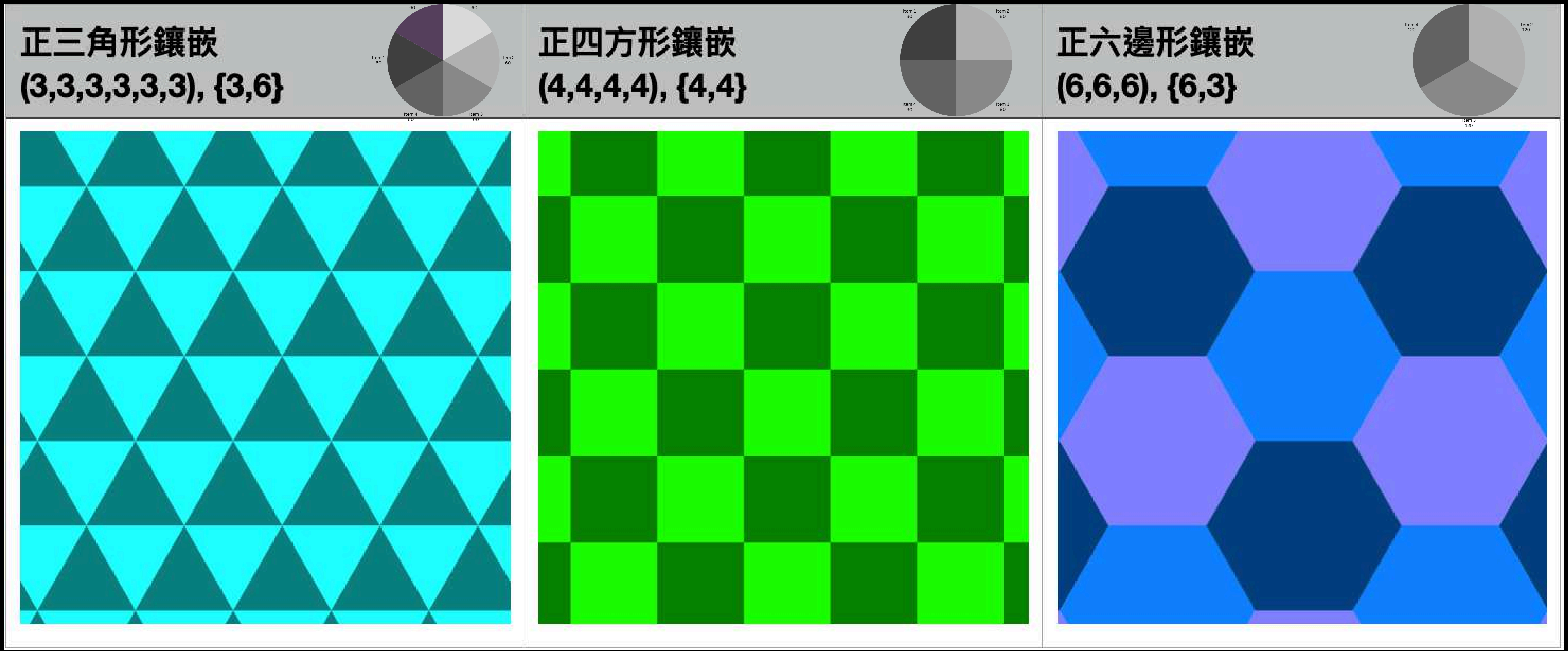
$$\frac{\pi(n-2)}{n}m=2\pi$$

正多邊形的邊數 n	內角	正多邊形的個數 m
3	60	6
4	90	4
5	108	3.33333
6	120	3
7	128 4/7	2.8
8	135	2.667
9	140	2.571
10	144	2.5
11	150	2.4
…	…	…
n	(n-2)π/n	2n/(n-2)

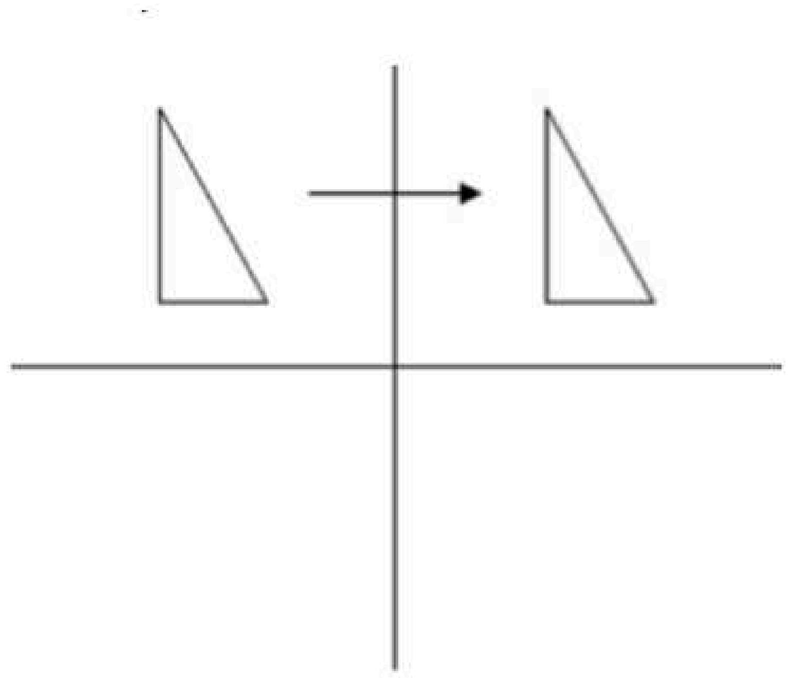
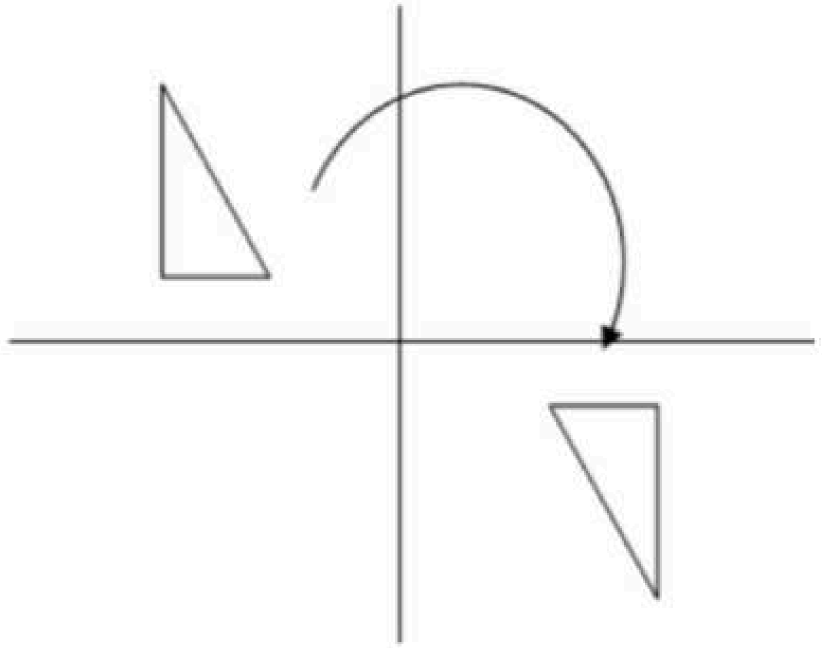
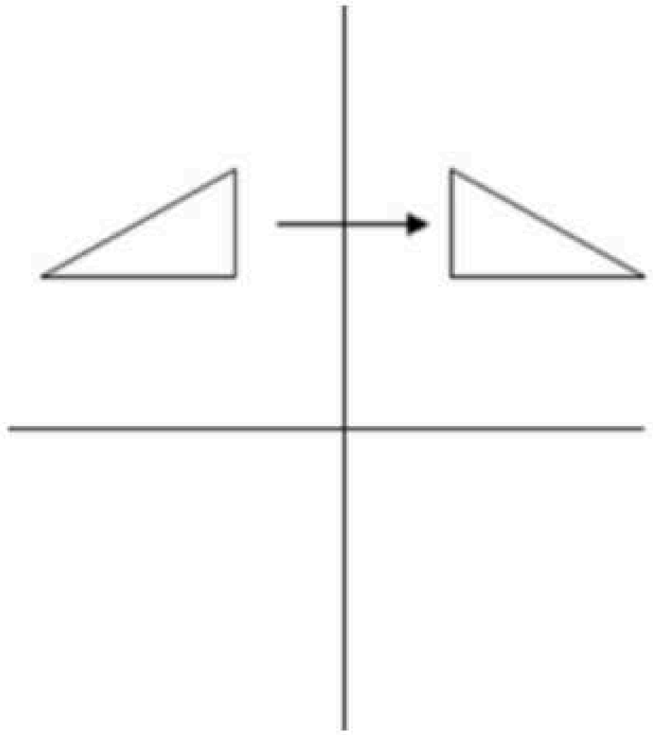
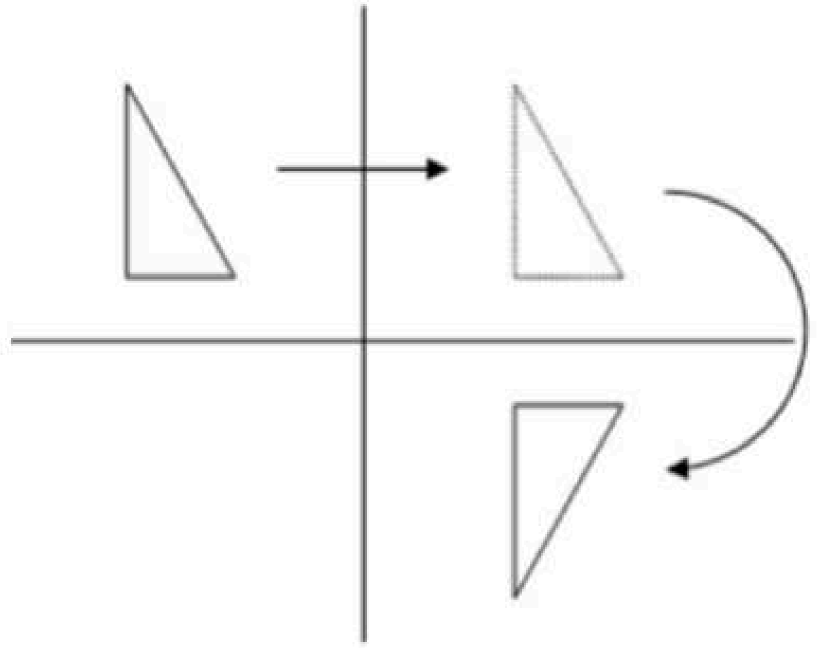
返回議程

所有正則鑲嵌可能

可以發現只有三組解，即六個正三角形或四個正四方形或三個正六邊形圍繞。

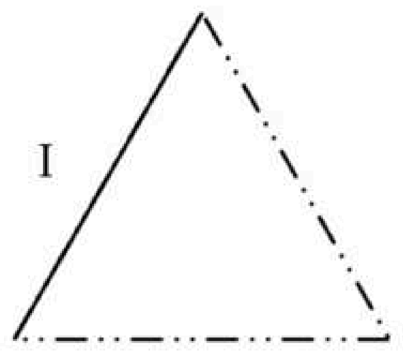
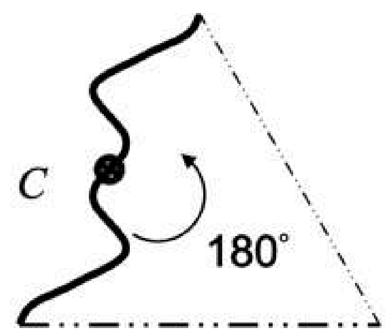
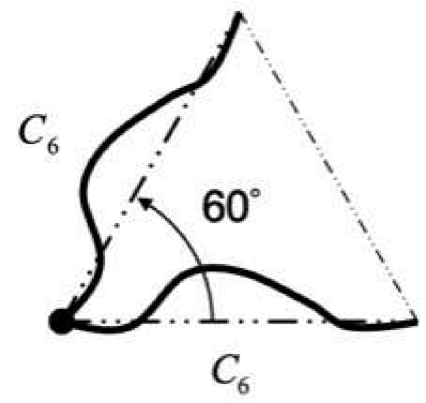
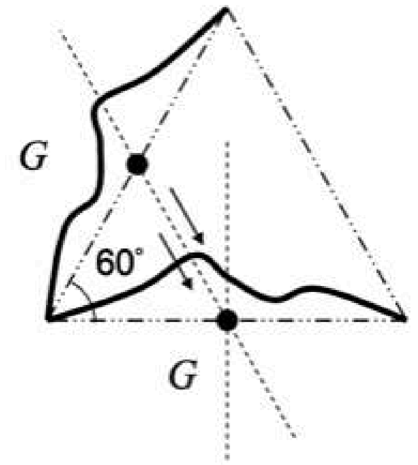
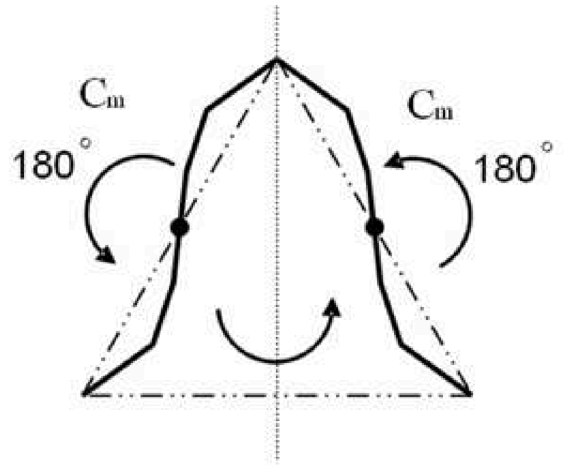


二維中的等量變化(ISOMETRY)

平移(Transformation)	旋轉(Rotation)	鏡射(Reflection)	滑動鏡射(Glide-reflection)
			

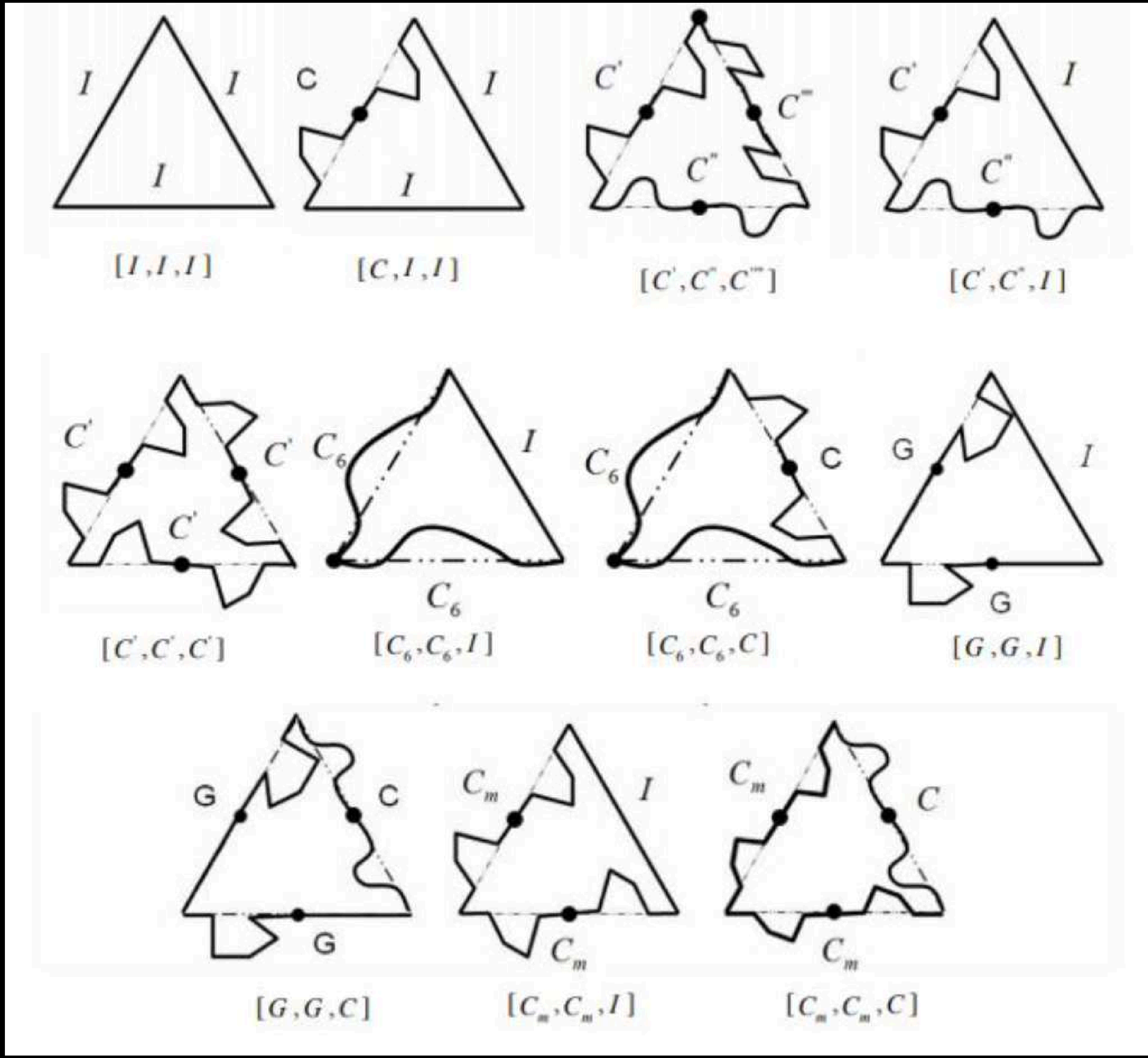
正三角形鑲嵌

邊的變化-

I: (Identity) 不做任何變化	C: (Center point rotation) 以邊中點為旋轉中心旋180°	C6: (Corner rotation 60°) 以一端為旋轉中心旋轉 60°	G: (Glide reflection, adjacent sides) 以一端為旋轉中心旋轉後再鏡射	Cm:(Center point rotation, mirror) 作 C 作用後 以第二邊中垂線當鏡射軸鏡射到第三邊
				

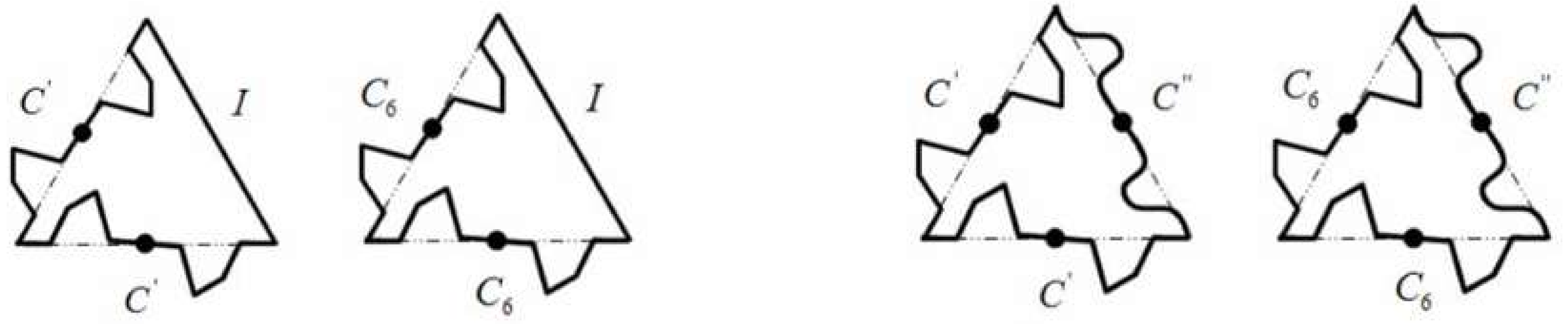
正三角形鑲嵌

邊變化的組合-



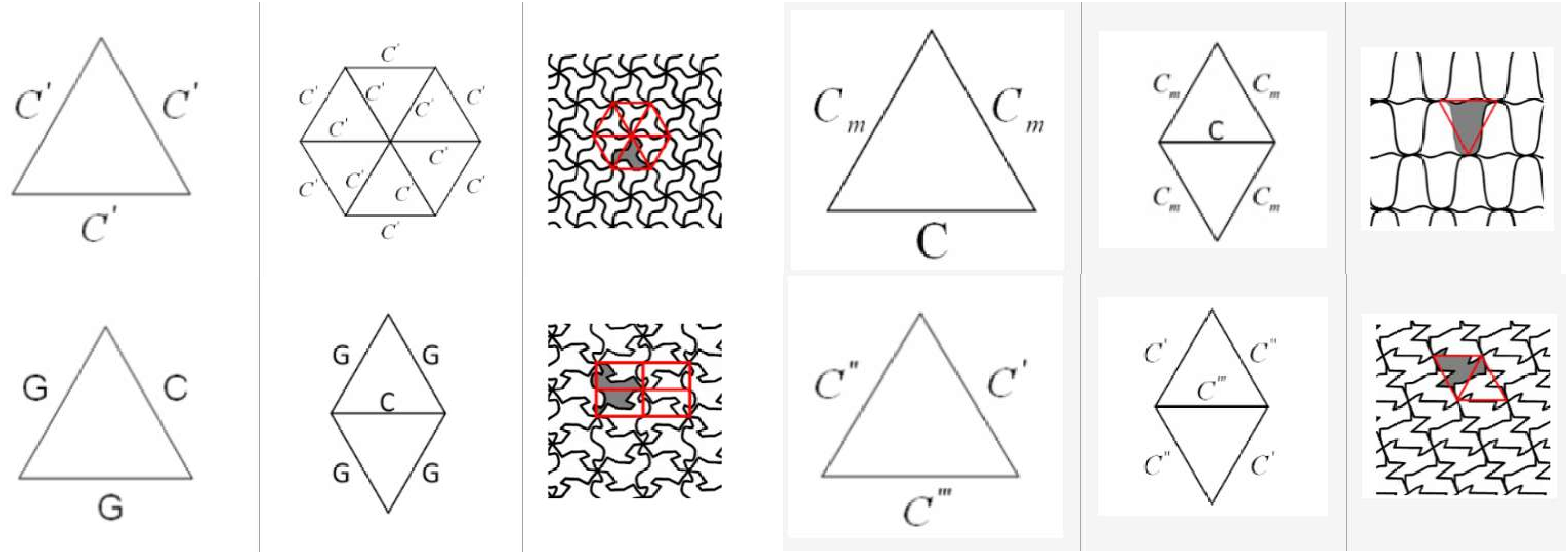
變化組合

兩組重複:



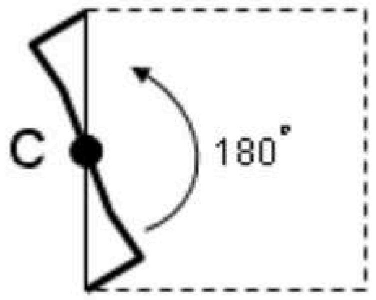
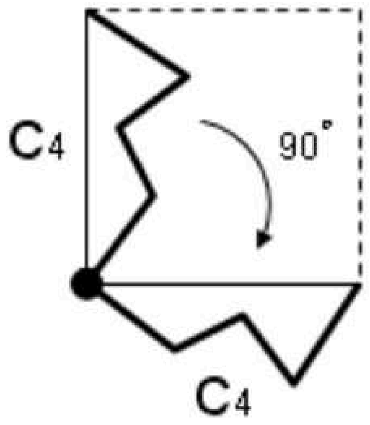
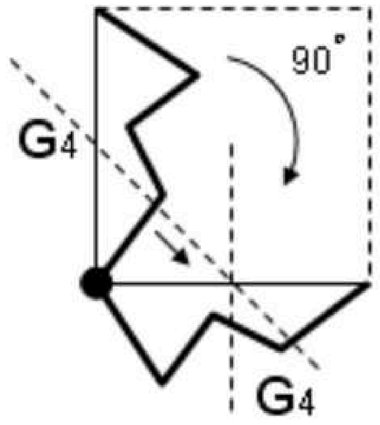
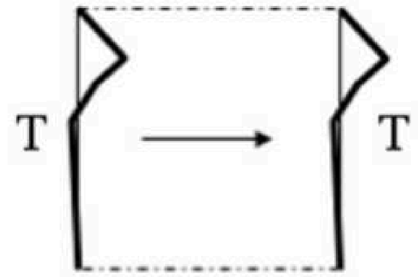
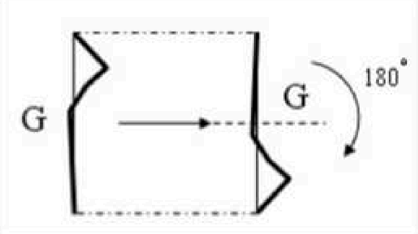
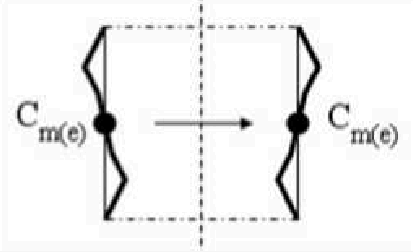
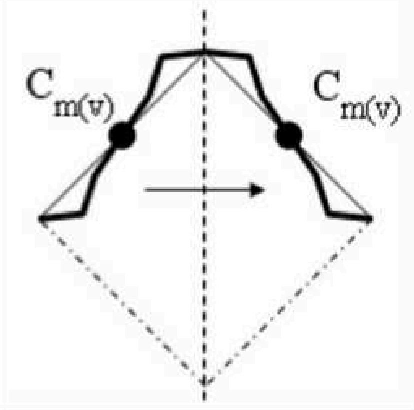
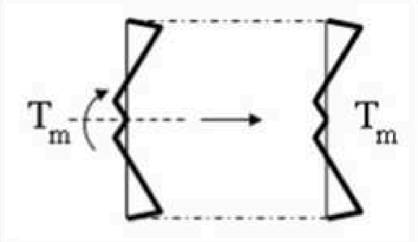
[C′ ,C′,I]和[C_6 , C_6 , I] , [C′ , C′,C″]和[C_6 , C_6 ,C]

圖例



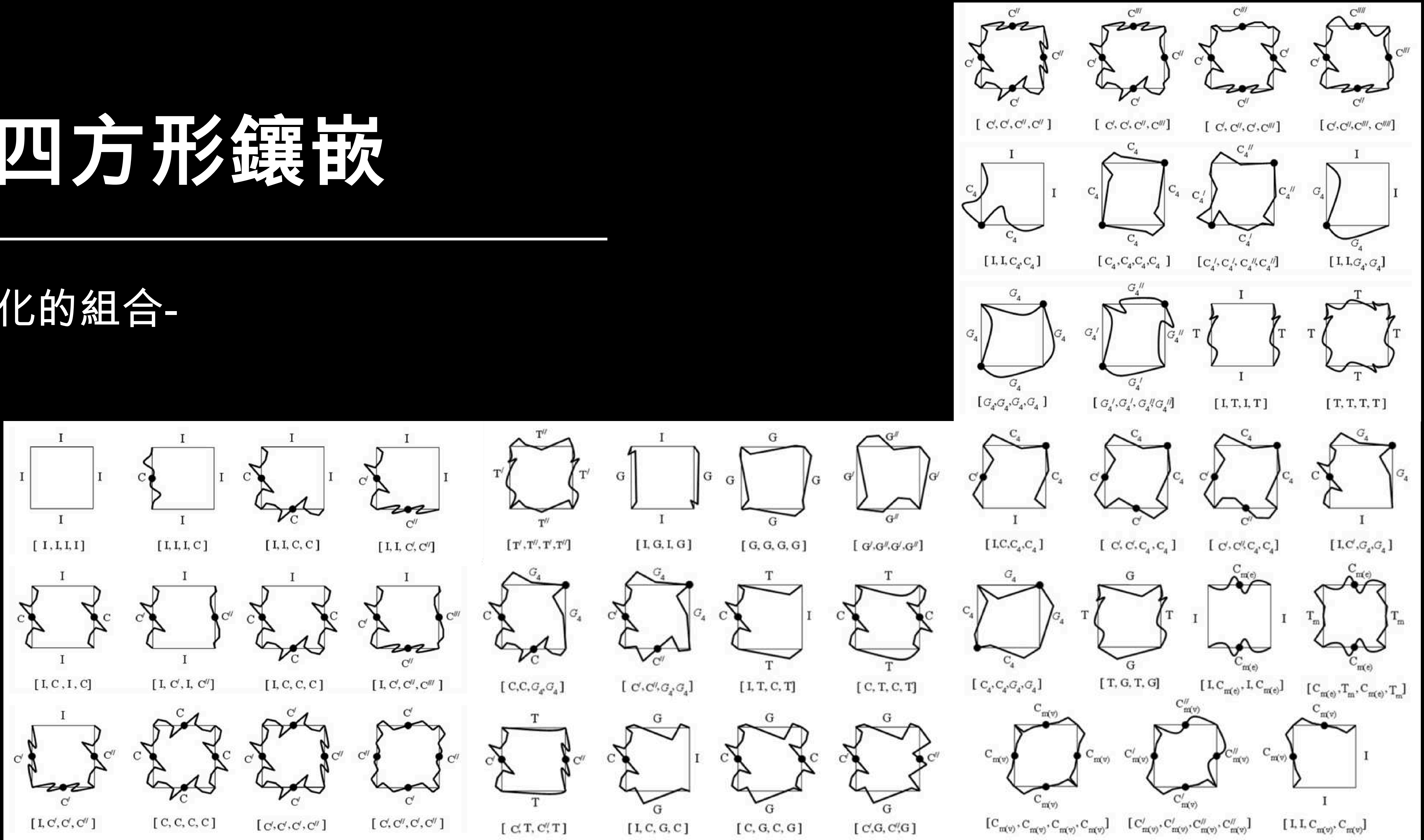
正四方形鑲嵌

邊的變化-

I: (Identity) 不做任何變化	C: (Center point rotation) 以邊中點為旋轉中心旋180°	C_4: (Corner rotation 90°) 以一端為旋轉中心旋轉 90°	G_4: (Glide reflection, adjacent sides) 以一端為旋轉中心旋轉後再鏡射	T: (Translation) 平移
				
G: (Glide reflection) 平移後鏡射	$C_{m(e)}$: (Center point rotation, mirror by edge) 經 C 作用後，以一組對邊中 垂線為鏡射軸做鏡射	$C_{m(v)}$: (Center point rotation, mirror by vertex) 經 C 作用後，以一組對角線為鏡射軸做鏡射	T_m: (Translation, mirror) 以邊的中垂線為對稱軸做鏡射後再做平移	
				

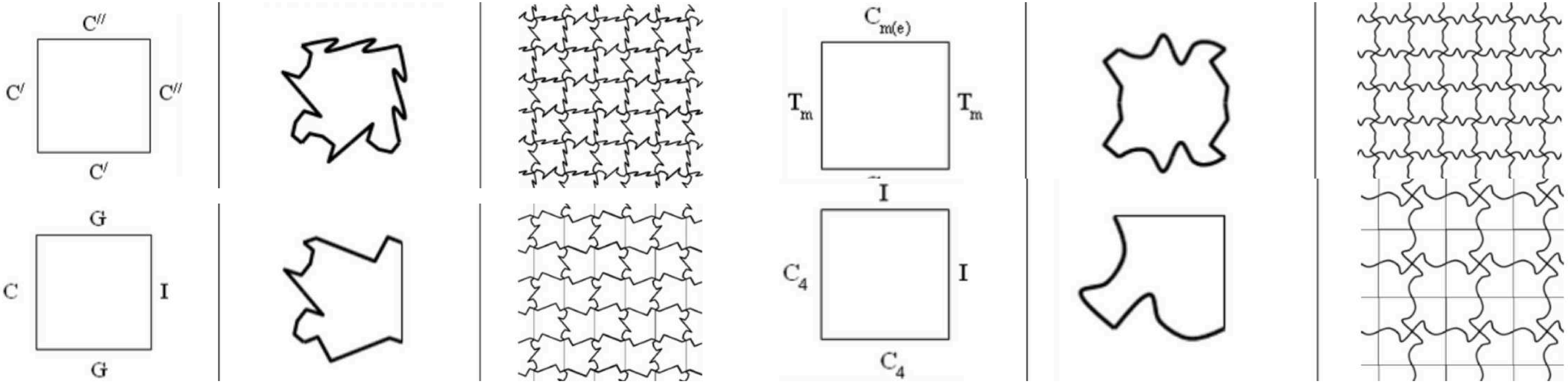
正四方形鑲嵌

邊變化的組合-



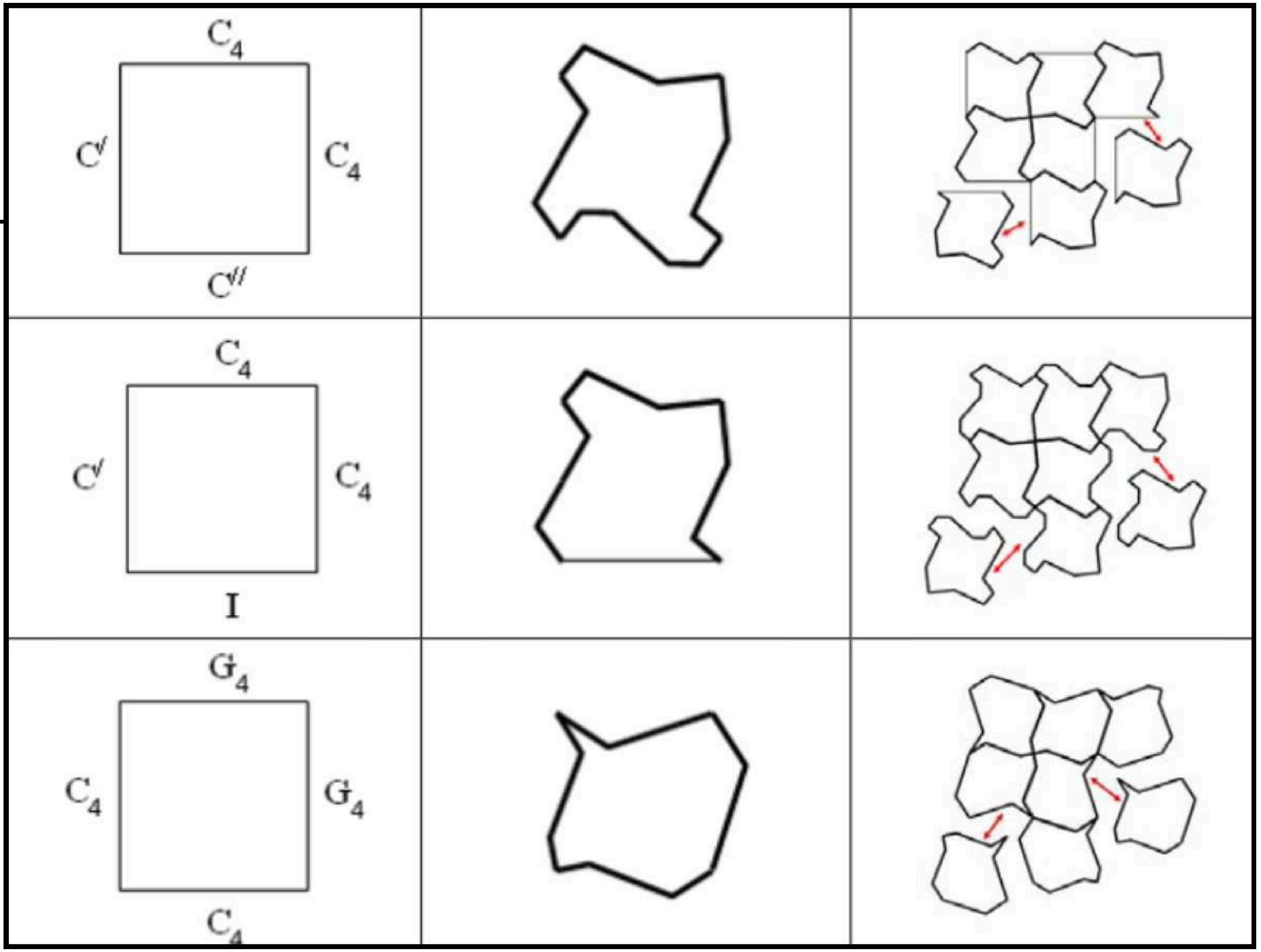
返回議程

圖例



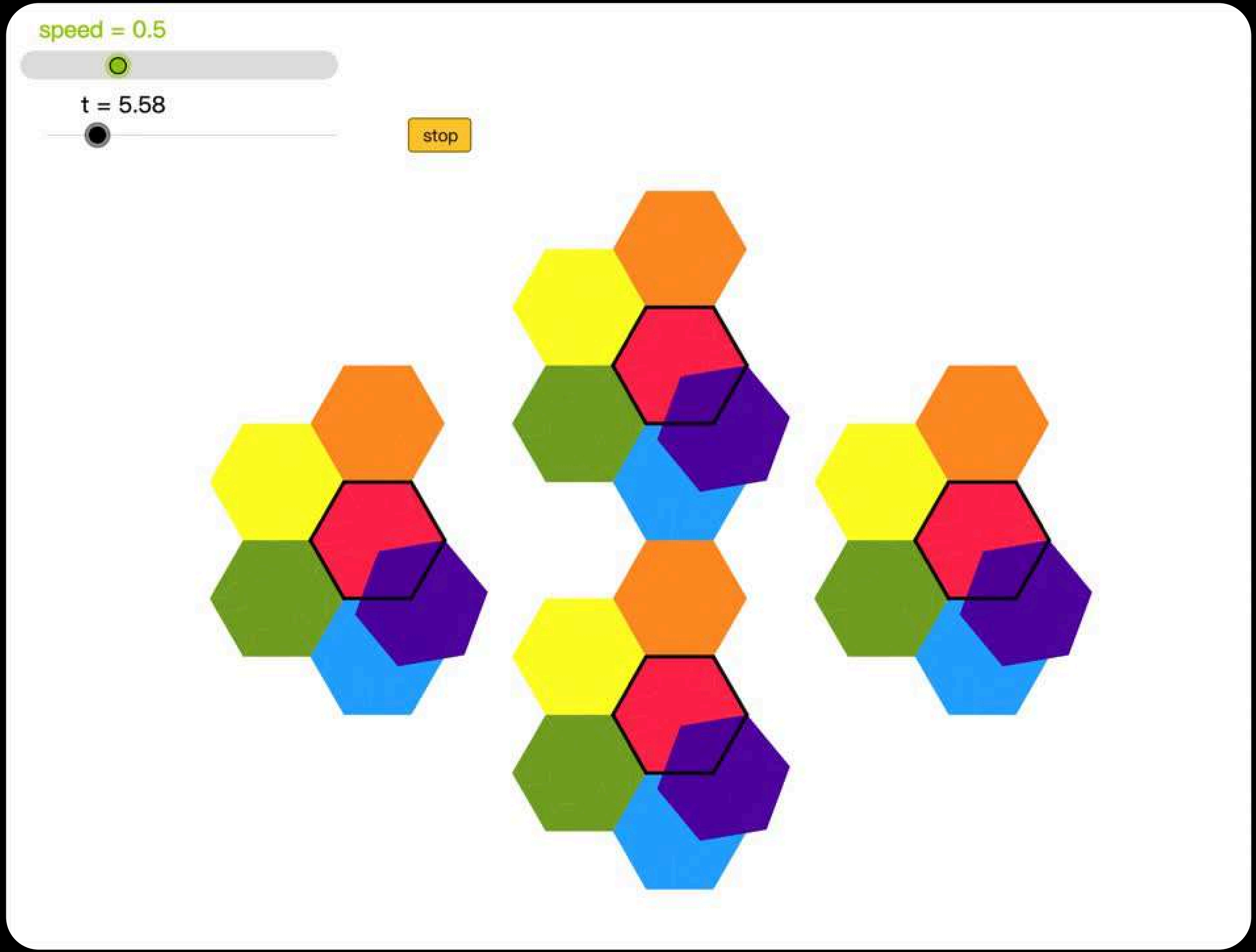
變化組合

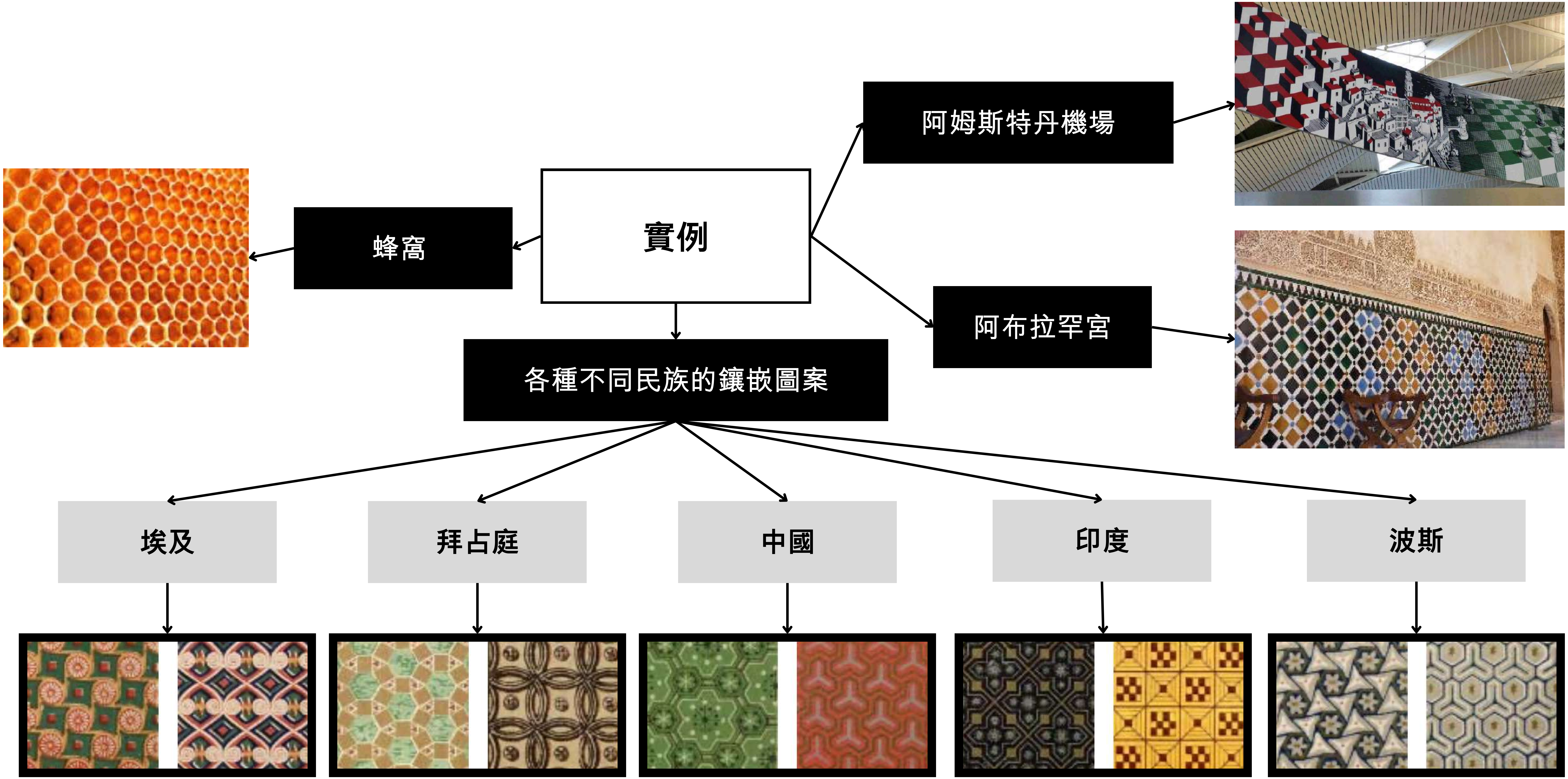
三組無法無限密鋪:



結論二：在 47 種設計方法中，共 44 種設計方法可以無限密鋪，而剩餘的三種則無法密鋪，分別為[C/, C//, C4, C4]、[I, C, C4, C4]及[C4, C4, G4, G4]。

創造 BY GEOGEBRA




實例
蜂窩
阿姆斯特丹機場
阿布拉罕宮
各種不同民族的鑲嵌圖案
埃及
拜占庭
中國
印度
波斯

END.