數思解-第三組

組員:吳尚恩411131201、吳建億411131205、呂侑宸411131215、
蔡宗翰411131225、邱証揚411131233

黃金比例:探索數學、自然與藝術中和諧之美

一、黃金比例的歷史足跡:

黃金比例並非現代人的發明，其蹤跡可以追溯到遠古文明:

古埃及時期:學者認為古埃及人已將黃金比例應用於金字塔的建造，以此創造更美觀的建築。

古希臘時期:畢達哥拉斯學派在研究正五邊形和正十邊形作圖時，推測已接觸甚至掌握黃金比例的規則，但由於數字崇拜的信仰而拒絕承認無理數的存在。

文藝復興時期:黃金比例被廣泛應用於藝術和建築，達文西、米開朗基羅等大師的作品，如《蒙娜麗莎》，都巧妙地運用黃金比例創造和諧美感。

二、什麼是黃金比例？

數學定義:黃金比例是一種特殊的數學比例，滿足$(a+b)/a = a/b = \varphi$，其中φ稱為黃金比例。

數值: $\varphi \approx 1.618$，可由方程式 $x^2-x-1=0$ 計算得出。

三、黃金比例的特性

無理數:φ無法用兩個整數的比值表示。

倒數性質:φ的倒數等於$\varphi-1$。

費氏數列:費氏數列中相鄰兩項的比值趨近於φ。

四、黃金比例的應用

黃金比例的應用遍及自然、藝術、建築乃至科技等各個領域:

自然界:

蜂巢結構:六邊形結構及尺寸比例接近黃金比例，體現蜂群智慧和自然奧妙，是美學與功能的完美結合。

樹葉生長:葉子在枝條上的螺旋排列接近黃金螺旋，有助於最大程度地接收陽光。

花瓣數目：許多花卉的花瓣數目為 3、5、8、13 等費氏數列數字，與黃金比例密切相關，既美觀又利於授粉。
人體比例：人體比例與黃金比例息息相關，例如肚臍位置、雙肩寬度、四肢比例等。
種子排列：向日葵種子頭部的螺旋排列，兩個方向的螺旋線數目通常是費氏數列中的相鄰兩項。
鸚鵡螺：螺旋形外殼以黃金比例不斷擴展，展現黃金比例在自然界中的奇妙應用。
建築之美：
古埃及金字塔：例如吉薩大金字塔的底座邊長與高度的比例接近黃金比例。
人面獅身像：頭部與身體的比例，以及整體結構的長寬比例都與黃金比例相吻合。
希臘帕德嫩神廟：整體比例、柱子高度與寬度、門廊尺寸等都融入了黃金比例的理念。
法國艾菲爾鐵塔：整體高度與底座比例，以及塔身各部分比例都符合黃金比例。
加拿大國家電視塔：高度和底座的比例也符合黃金比例的原則。
藝術傑作：
達文西《蒙娜麗莎》：頭部、身體和背景比例符合黃金分割，創造出和諧的視覺平衡。
達文西《聖母領報》：主要人物比例、背景元素位置都與黃金比例相呼應。
米開朗基羅《創造亞當》：上帝和亞當的手指幾乎觸碰，呈現黃金比例構圖。
達文西《最後的晚餐》：餐桌、人物比例、空間位置都依照黃金比例設計，呈現和諧的構圖。
生活應用：
UI/UX 設計：創造視覺平衡和易用性，提升使用體驗。
品牌 **LOGO** 設計：增加視覺吸引力和品牌辨識度。
攝影構圖：提升視覺美感和平衡性，使照片更具感染力。
螢幕比例：符合人眼視覺，提升使用者體驗。

Apple 設計：從 iPhone 螢幕比例到 MacBook 鍵盤布局，處處體現黃金分割的精髓，提升產品美感和人體工學。

Google 設計：從品牌標誌到產品介面，巧妙融入黃金比例，營造平衡與和諧的視覺效果。

Nissan 和 **Toyota** 的 **logo** 設計**:**圓形和橢圓形的比例接近黃金比例，提升視覺平衡和諧。

五、黃金比例的延伸

五芒星：每條線上的交叉點都是黃金分割點。

阿基米德螺旋線：極坐標方程為 $r = a + b * \theta$，每條臂的間距永遠相等於 $2\pi b$。

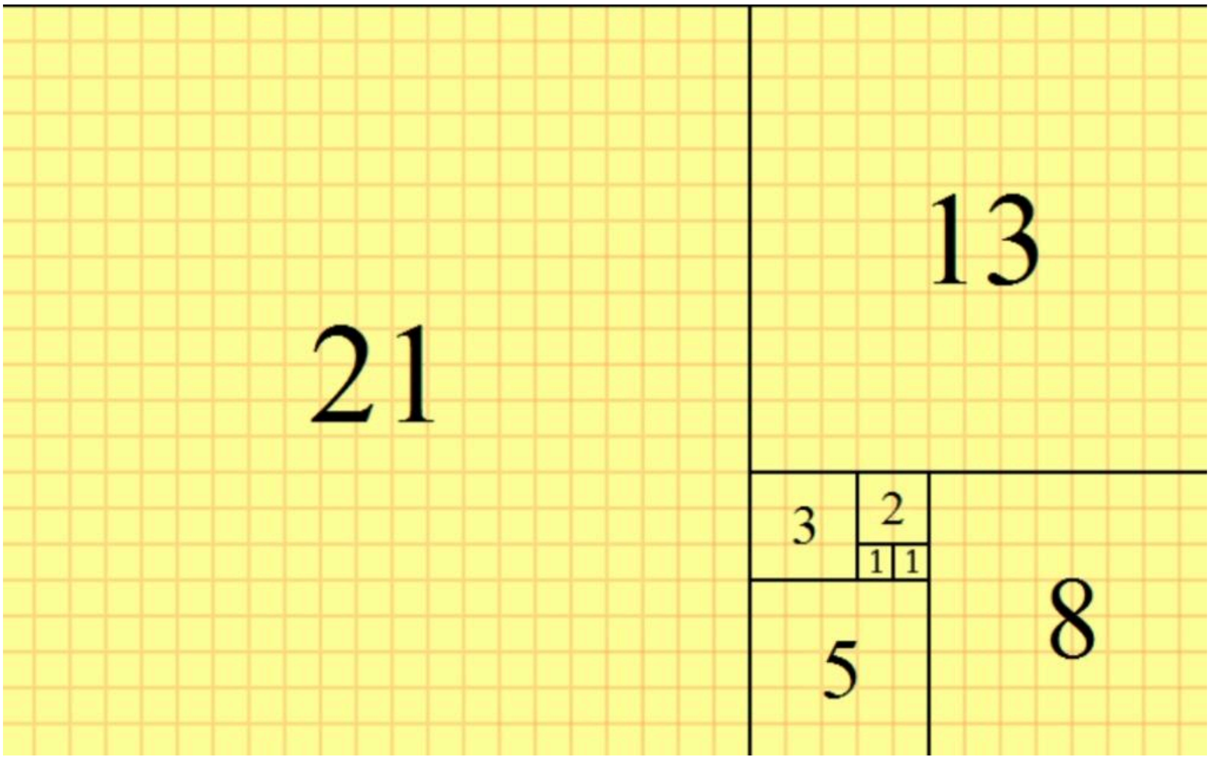
六、程式碼

```
#includes <iostream>
#includes <stdio.h>

using namespace std;

int main() {
  long b, c, d = 0, e = 0, f = 100, i = 0, j, N;
  cout << "請輸入黃金分割數位數\n";
  cin >> N;
  N = N * 3 / 2 + 6;
  long* a = new long[N + 1];
  while (i <= N) a[i++] = 1;
  for (; --i > 0;
       i == N - 6 ? printf("\r0.61") : printf("%02ld", e
+= (d += b / f) / f),
       e = d % f, d = b % f, i -= 2)
    for (j = i, b = 0; j; b = b / c * (j-- * 2 - 1))
      a[j] = (b += a[j] * f) % (c = j * 10);
  delete[] a;
  cin.ignore();
  cin.ignore();
  return 0;
}
```

七、費波那契數列



以費波那契數為邊的正方形拼成的圖形近似黃金矩形

線性代數解法

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1}$$

構建一個矩陣方程式

設J_n為第n個月有生育能力的兔子數量，A_n為這一月份的兔子數量。

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix},$$

上式表達了兩個月之間，兔子數目之間的關係。而要求的是，A_{n+1}的表達式。

求矩陣的特徵值：λ

根據特徵值的計算公式，我們需要算出來 $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ 所對應的解。

展開行列式有：$-\lambda(1-\lambda) - 1 \times 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$。

故當行列式的值為 0，解得 $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ 或 $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$。

特徵向量

將兩個特徵值代入

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot E \right) \cdot \vec{x} = 0$$

求特徵向量$\vec{x}$得

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix}$$

分解首向量

第一個月的情況是兔子一對，新生0對。

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

將它分解為用特徵向量表示。

可得到

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} J_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \lambda^n \cdot \begin{pmatrix} J_1 \\ A_1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

化簡矩陣方程式

將（4）代入（5）

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \lambda^n \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix} \right]$$

根據3

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \lambda_1^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \lambda_2^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix}$$

求A的表達式

現在在6的基礎上，可以很快求出A_{n+1}的表達式，將兩個特徵值代入6中

$$A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \lambda_1^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \lambda_2^{n+1}$$

$$A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1})$$

$$A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left\{ \left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \right]^{n+1} - \left[\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \right]^{n+1} \right\} \quad (7)$$

（7）即為A_{n+1}的表達式

八、資料來源

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E9%BB%84%E9%87%91%E5%88%86%E5%89%B2%E7%8E%87

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E9%98%BF%E5%9F%BA%E7%B1%B3%E5%BE%B7%E8%9E%BA%E7%BA%BF

https://yrgnthu.medium.com/%E9%9A%B1%E8%97%8F%E5%9C%A8%E7%94%9F%E6%B4%BB%E4%B8%AD%E7%9A%84%E6%95%B8%E5%AD%B8-%E9%98%BF%E5%9F%BA%E7%B1%B3%E5%BE%B7%E8%9E%BA%E6%97%8B-411c7a15335e

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%BB%B4%E7%89%B9%E9%B2%81%E5%A8%81%E4%BA%BA

https://youtu.be/680BZM637kk?feature=shared

https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&opi=89978449&url=https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%25E9%25BB%2584%25E9%2587%2591%25E5%2588%2586%25E5%2589%25B2%25E7%258E%2587&ved=2ahUKEwjNwsPw3ouKAxXCdPUHHRWbN98QFnoECF8QAQ&usg=AOvVaw0F7zRIHgt3NJgC5dE_3Nte

https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&opi=89978449&url=https://derjensun.pixnet.net/blog/post/234749237&ved=2ahUKEwjL1KDQ4IuKAxWUkK8BHa_mGWgQFnoECDUQAQ&usg=AOvVaw1djwhXd_dLe95y0xmaWGsL

https://www.geogebra.org/m/fehnnfpg#material/ma6awqes

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%96%90%E6%B3%A2%E9%82%A3%E5%A5%91%E6%95%B0

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E9%BB%84%E9%87%91%E5%88%86%E5%89%B2%E7%8E%87