

第二組

EGMO 2015考古題

411231201	陳冠章	411031209	謝耀璘
411231113	洪苡宸	411031147	蕭煒磐
411231212	王信融	411231242	蕭應科

Problem 1.

Let $\triangle ABC$ be an acute-angled triangle, and let D be the foot of the altitude from C.

The angle bisector of $\angle ABC$ intersects CD at E and meets the circumcircle ω of triangle $\triangle ADE$ again at F.

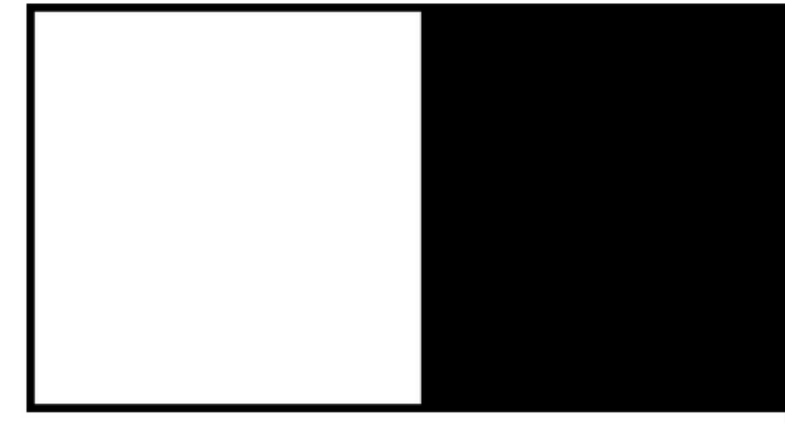
If $\angle ADF = 45^\circ$, show that CF is tangent to ω .

設 $\triangle ABC$ 為一銳角三角形，並且D為C的垂足。

$\angle ABC$ 的角平分線與CD相交於E，且又與三角形 $\triangle ADE$ 的外接圓 ω 相連於F。

如果 $\angle ADF = 45^\circ$ ，試證CF是 ω 的切線。

Problem 2.



A domino is a 2×1 or 1×2 tile.

Determine in how many ways exactly n^2 dominoes can be placed without overlapping on a $2n \times 2n$ chessboard so that every 2×2 square contains at least two uncovered unit squares which lie in the same row or column.

多米諾骨牌是 2×1 或 1×2 的片。

試證有多少種方法可以在不重疊地狀況下的把 n^2 個多米諾骨牌精確地放入一個 $2n \times 2n$ 的棋盤，

使得每個 2×2 的方格包含至少2個未覆蓋的單位方格，且這些方格落在同列或同行。

Problem 3.

Let n, m be integers greater than 1, and let a_1, a_2, \dots, a_m be positive integers not greater than n^m .

Prove that there exist positive integers b_1, b_2, \dots, b_m not greater than n , such that $\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n$, where $\gcd(x_1, x_2, \dots, x_m)$ denotes the greatest common divisor of x_1, x_2, \dots, x_m .

設 n, m 為比 1 大的整數，且設 a_1, a_2, \dots, a_m 為不大於 n^m 的正整數。

證明存在不大於 n 的正整數 b_1, b_2, \dots, b_m ，使得 $\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n$ ，

而 $\gcd(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 表示 x_1, x_2, \dots, x_m 的最大公因數。

Problem 4.

Determine whether there exists an infinite sequence a_1, a_2, a_3, \dots of positive integers which satisfies the equality :

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

for every positive integer n .

試證是否存在一正整數組成的無窮數列 a_1, a_2, a_3, \dots ，對於所有的正整數 n ，滿足此等式：
$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

Problem 5.

Let m, n be positive integers with $m > 1$. Anastasia partitions the integers $1, 2, \dots, 2m$ into m pairs.

Boris then chooses one integer from each pair and finds the sum of these chosen integers.

Prove that Anastasia can select the pairs so that Boris cannot make his sum equal to n .

設 m, n 為正整數且 $m > 1$ ，Anastasia 分割 $1, 2, \dots, 2m$ 至 m 對。

接著 Boris 從每對選了 1 個整數，且將這些選中的整數相加得到和。

證明 Anastasia 可以選擇這些配對，使得 Boris 不能讓他的和等於 n 值。

Problem 6.

Let H be the orthocentre and G be the centroid of acute-angled triangle $\triangle ABC$ with $AB = AC$.

The line AG intersects the circumcircle of $\triangle ABC$ at A and P .

Let P' be the reflection of P in the line BC . Prove that $\angle CAB = 60^\circ$, if and only if $HG = GP'$.

設銳角三角形 $\triangle ABC$ 中， H 為垂心且 G 為質心，其中 $AB = AC$ 。

直線 AG 交 $\triangle ABC$ 的外接圓於 A 點和 P 點。

設 P' 為 P 對直線 BC 的對稱點。證明 $\angle CAB = 60^\circ$ ，若且唯若 $HG = GP'$ 此狀況成立。

Problem 3.

Let n, m be integers greater than 1, and let a_1, a_2, \dots, a_m be positive integers not greater than n^m .

Prove that there exist positive integers b_1, b_2, \dots, b_m not greater than n , such that $\gcd(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_m+b_m) < n$, where $\gcd(x_1, x_2, \dots, x_m)$ denotes the greatest common divisor of x_1, x_2, \dots, x_m .

設 n, m 為比 1 大的整數，且設 a_1, a_2, \dots, a_m 為不大於 n^m 的正整數。

證明存在不大於 n 的正整數 b_1, b_2, \dots, b_m ，使得

$\gcd(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_m+b_m) < n$ ，

而 $\gcd(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 表示 x_1, x_2, \dots, x_m 的最大公因數。

Solution 3-1.

不失一般性地假設 a_1 是 a_i 中最小的一個。如果 $a_1 \geq n^m - 1$ ，那麼問題很簡單：要麼全部的 a_i 都相等，或 $a_1 = (n^m) - 1$ 和 $a_j = n^m$ 對於某些 j 。

在第一種情況下，我們可以取 $b_1 = 1, b_2 = 2$ ， b_i 的其餘部分可以是任意的，我們有 $\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) \leq \gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = 1$ 。

在第二種情況下，我們可以取 $b_1 = 1$ ， $b_j = 1$ ，以及 b_i 的其餘部分可以是任意正整數，並且 $\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) \leq \gcd(a_1 + b_1, a_j + b_j) = 1$ 。

從現在開始我們可以假設 $a_1 \leq n^{m-2}$ 。現在，假設所需的 b_1, \dots, b_m 不存在，並求矛盾。

然後，對於 $b_1, \dots, b_m \in \{1, \dots, n\}$ 的任何選擇，我們有 $\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) \geq n$ 。

另外，我們還有 $\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) \leq a_1 + b_1 \leq n^m + n - 2$ 。
(a_1 最大為 n^{m-2} ， b_1 最大為 n)

因此最大公因數最多有 $n^m - 1$ 個可能值。然而， m -tuple (b_1, \dots, b_m) 有 n^m 個選擇。然後，根據鴿籠原理，有兩個 m -tuple 的最大公因數之（定為 d ）產生相同的值。但由於 $d \geq n$ ，且對每個 i 最多可以有一個 $b_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 的選擇，使得 $(a_i + b_i)$ 可以被 d 整除，因此最多可以有一個 m -tuple (b_1, b_2, \dots, b_m) 產生 d 作為最大公因數。這就是我們想要的矛盾(矛盾 $\because \gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n \leq d$)。



多謝聆聽！