

# 第一組

410631135	孔儀馨	
410631111	林佳儀	
410631226	白元亦	TW
410731238	呂若慈	
410731239	江晏淳	

## 第一題-代數主題

已知 $x, y, z$ 為正實數。

證明：

$$x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq 4xyz - 4$$

## 第二題-數論主題

兩正整數 $n$ 、 $k$ ，且 $L(n, k)$ 為連續整數 $n, n+1, \dots, n+k-1$ 的最小公倍數。

證明：給定任何整數 $b$ ，會存在整數 $n$ 和 $k$ 滿足 $L(n, k) > bL(n+1, k)$

### 第三題-幾何主題

已知A,B,C,D為一四邊形的四個頂點，且點P為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 之交點。

若 $\overline{AC} + \overline{AD} = \overline{BC} + \overline{BD}$ ，試證明 $\angle ACB$ ,  $\angle ADB$ 與 $\angle APB$ 之內角角平分線相交於一點。

## 第四題-組合主題

在有限的矩形正方形網格的正方形上放置了許多機器人。一個正方形可以容納任何數量的機器人。網格的每個邊緣都被分類為可通過或不可通過。網格邊界上的所有邊緣都是不可通過的。

您可以上下左右任意命令，所有機器人同時沿指定方向移動。如果在該方向上與機器人相鄰的邊緣是可通過的，則機器人將越過該邊緣並進入下一個正方形。否則，機器人將保持在其當前方塊上。然後，您可以根據需要持續向上，向下，向左或向右發出另一個命令，然後再發出另一個命令。

假設對於任何單個機器人以及網格上的任何正方形，都有一個有限的命令序列將其移動到某個正方形。證明可以給出有限的命令序列，使所有機器人都同時出現在相同的正方形上。

## 第五題-數論主題

一個書架包含 $n$ 卷書，按順序標記為1到 $n$ 。圖書館員希望按照下面的方式安排每本書的順序：

首先圖書館員選一卷離右邊最遠的書，並將這本書命名為 $k$ ，將它取出後再放入第 $k$ 個位置。例如，如果書架按順序包含第1、3、2、4卷，則圖書管理員可以取出編號第2卷並將其放置在第二個位置。書籍將以正確的順序排列1 2 3 4。

(a) 證明：如果一直重複動作，不論如何圖書館員如何選擇書籍，所有書最後會以正確的順序排列。

(b) 至少需要多少步驟才能完成排列？

# 題目講解

## 第一題-□ 主題

已知 $x, y, z$ 為正實數。

證明：

$$x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq 4xyz - 4$$



$$x^2 \geq 4x - 4, \quad y^2 \geq 4y - 4, \quad \text{and} \quad z^2 \geq 4z - 4,$$

$$x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq (4x - 4) + x(4y - 4) + xy(4z - 4) = 4xyz - 4.$$

# 相似題

已知 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 、 $W$ 為正實數，

試證：

$$x^2 + xy^2 + xyz^2 + xyzw^2 \geq 5xyzw - 5$$

換下一組謝謝