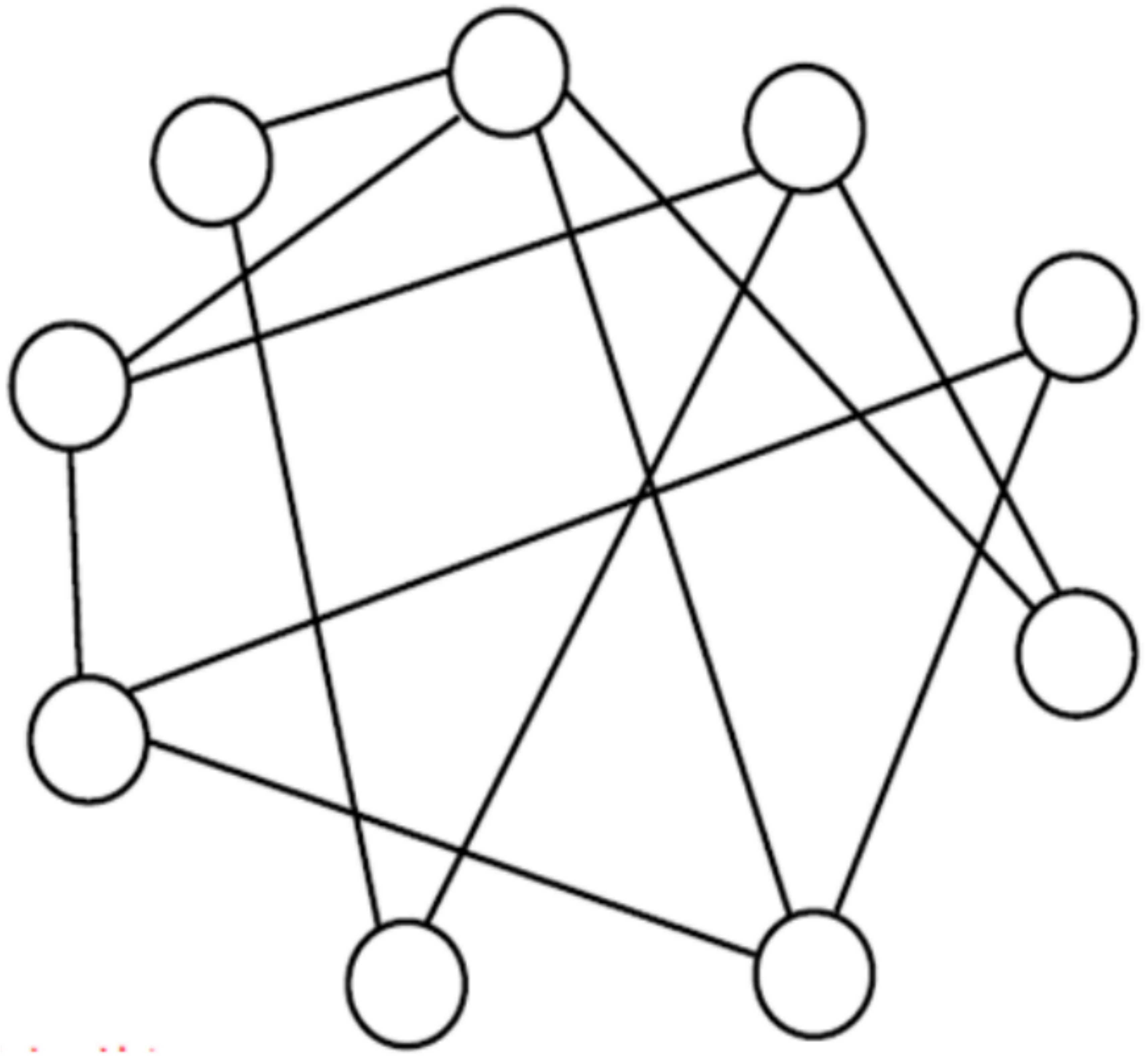
數學思維與解題

葉均承

Week 8

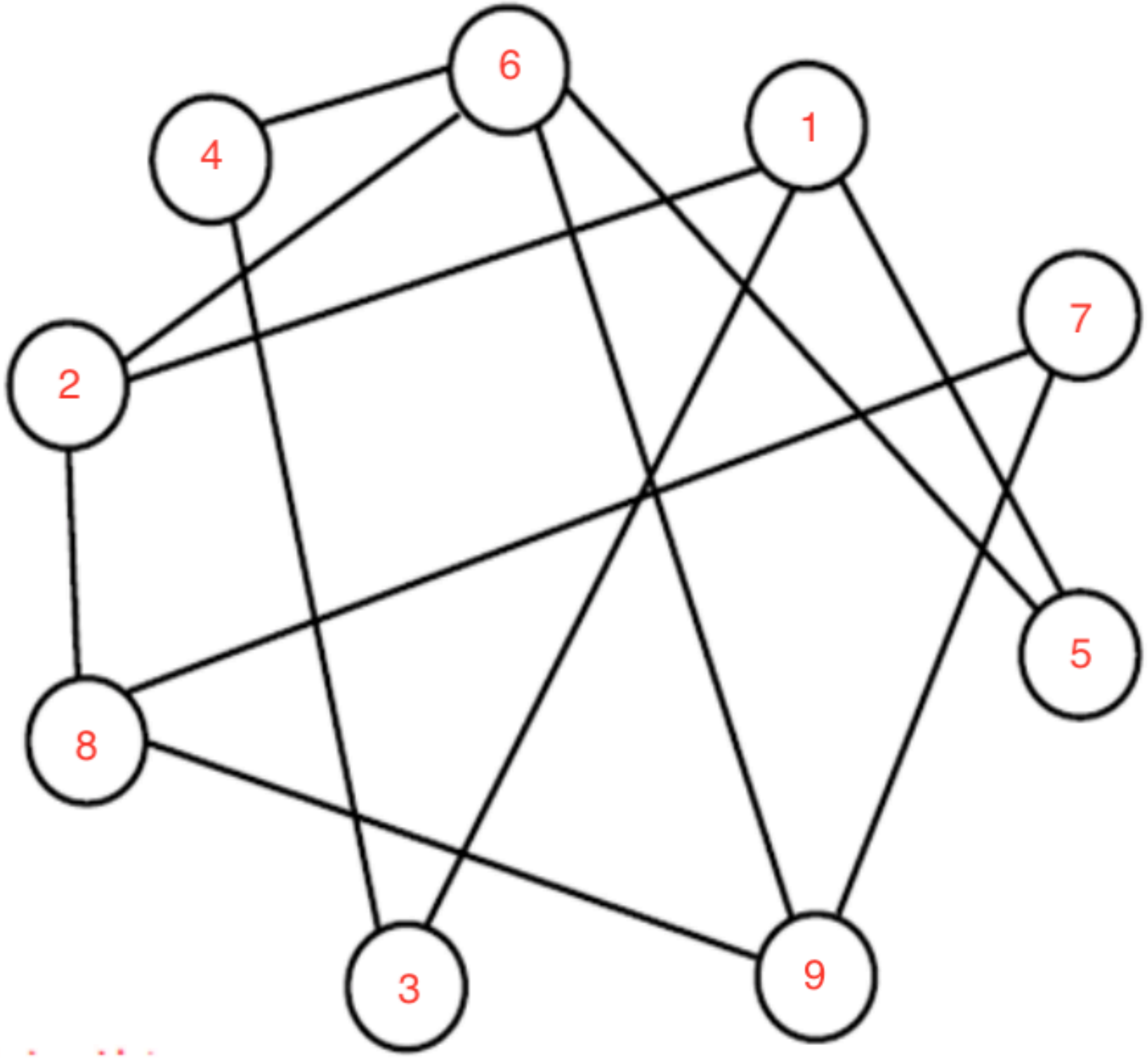
問題

將數字1~9不重複地填入右圖中的9個圓圈內，使得與填入1的圓圈相連接的圓圈內的數字和等於10；與填入2的圓圈相連接的圓圈內的數字和等於15； … ；與填入9的圓圈相連接的圓圈內的數字和等於21；其餘填法如右圖下所列。



1 -> 10;　2 -> 15;　3 -> 5
4 -> 9；　5 -> 7；　6 -> 20
7 -> 17;　8 -> 18;　9 -> 21

1 -> 10;   2 -> 15;   3 -> 5
4 -> 9 ;   5 -> 7 ;   6 -> 20
7 -> 17;   8 -> 18;   9 -> 21



問題

在右列方格表中，每個格子內放入一個貼有數字的硬幣，這些硬幣中有些是真的，有些是假的。但不全是假的。硬幣上的數字是指出在它所有的相鄰格子(包括斜對角的格子)上真幣的數量。真幣上貼的數字都是正確的，假幣上貼的數字都是錯的。請將假幣找出來並將它塗上顏色。

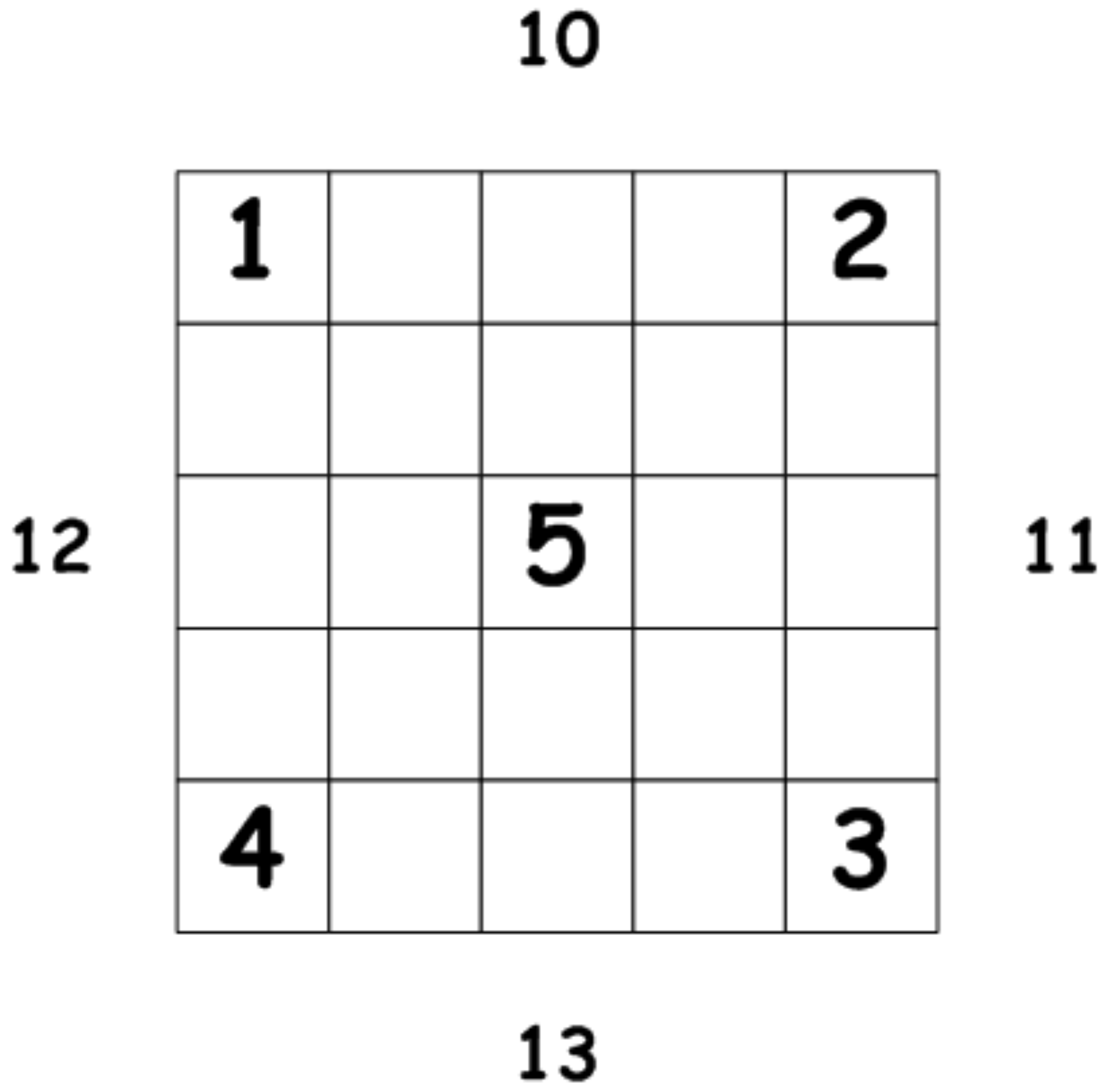
2	4	4	4	2
4	7	6	5	3
3	5	5	5	3
5	5	5	5	3
1	4	3	3	2

：假幣

	1	2	3	4	5
A	2	4	4	4	2
B	4	7	6	5	3
C	3	5	5	5	3
D	5	5	5	5	3
E	1	4	3	3	2

問題

建商欲在右圖每個方格內各蓋一棟不超過五層樓的房子，並以數字表示樓層數，而四面的數字則分別代表從該面望去的房子數(註：矮樓層的房子會被高樓層的房子擋住而看不到)。除此之外，還要使得數字1~5在每行每列都恰好各出現一次。請問建商該如何分配樓層數？



10

		3	2	2	1	2		
	3	**1**	**4**	**3**	**5**	**2**	2	
	3	**3**	**1**	**2**	**4**	**5**	1	
12	3	**2**	**3**	**5**	**1**	**4**	2	11
	1	**5**	**2**	**4**	**3**	**1**	4	
	2	**4**	**5**	**1**	**2**	**3**	2	
		2	1	3	4	3		

13

問題

有數項郊遊形成供全班２０位學生參加，每項行程至少有四位學生參加。證明存在有一項行程使得參加此項行程的每位學生參加郊遊的項數至少為此班所有學生參加郊遊項數的1/17。

令總共有 n 個行程。可稱那些參加少於 n/17 項行程的學生為紅學生，題目便是 要證明存在一項行程，使得參加這項行程的學生都不是紅學生。但注意到每 位紅學生僅能參加少於 n/17 項行程，如果紅學生個數不超過 17 個，所有紅學 生能參加的行程便會小於 17*(n/17)=n，因此必定有一項行程中沒有紅學生。 但是，如果紅學生個數大於 17 ，令其為 k，因為每項行程至少四位學生參加，因此所有學生總共應當參加 4 × n 次旅遊，而每一位紅學生頂多參加 n/17 次， 且每一位非紅學生頂多參加 n 次，全部合計一共至多

$$k\times\frac{n}{17}+(20-k)\times n=(4-\frac{16}{17}(k-17))\times n<4\times n\text{次}$$

，矛盾。

綜合以上，紅學生個數一定必超過 17 個，從而必定有一項行程中沒有紅學生。

問題

請問是否存在一個十位數的十個數碼都不相同，且任意移除六個數碼後，剩 下的四個數碼在不變動其順序下所構成的四位數恆是個合數？

Hint:
把 5 及偶數碼以任意順序安排在末六位。此時可知移除六個數碼之後，若末六位數中有任何一個數碼沒有被移除，則所構成的四位數的末位數必為偶數或 5，即恆為合數；

問題

若干位賓客圍坐在一圓桌前，桌上有一個裝有 2011 顆藍莓的盤子。依照順 時針方向，每位賓客吃掉藍莓的總顆數正好都為下一位賓客的兩倍或比他少 六顆。請證明這盤藍莓最後沒有被吃光。

顯然不可能全部的賓客吃掉藍莓的總顆數都比下一位賓客少六顆，否則順時 針方向轉一圈後，最後一位賓客不可能比第一位賓客吃的少。因此至少有一 位賓客所吃的總顆數為下一位賓客的兩倍，即他吃了偶數顆藍莓。此時依逆 時針方向逆推，因每位賓客吃掉藍莓的總顆數正好都為前一位賓客的兩倍或 比他多六顆，故每位賓客都吃了偶數顆，但因 2011 為奇數，故不可能吃光。

問題

老王購買一張彩券，彩券上他可以任意填入一個 n 位數，但此 n 位數不可以 有數碼 0。開獎時，彩券公司會揭示一張 n×n 的方格表，每個小方格內包含 有一個從 1 到 9 的數碼，從方格表上的每行或每列，由左到右、由右到左、 由上往下、由下往上共可讀出 4n 個 n 位數。如果彩券上的 n 位數與這些 n 位數全都不吻合，則可獲得獎金。老王想要賄賂彩券公司的職員，請他們洩 漏一些老王挑選的小方格內的數碼。請問老王至少要知道幾個小方格內的數 碼，才能保證可以獲得獎金？

最小值為 n。若老王最多只得知 n-1 個數，則將會至少有一列上所有的數碼 是老王無法得知的，而他的彩券上的 n 位數有可能恰與這一列上的 n 位數相 吻合因而無法獲得獎金。另一方面，若老王知道主對角線上所有的數碼，則 能保證他的彩券可以獲獎。可令 $d_1, d_2, \ldots, d_n$為主對角線上的數碼， 而老王選 $t_1, t_2, \ldots, t_n$為他買彩券上的 n 位數之數碼，其中對於任意的 k 滿足1≤ k n來說，無論是 t_k 或 t_{n+1-k} 都不會與 d_k 或 d_{n+1-k} 吻合，則他的彩券 上的 n 位數不會與第 k 行或第 k 列上的 4n 個 n 位數相吻合。

問題

在一個10 × 10 方格表的踩地雷遊戲中，每個小方格內都可能藏有一枚地雷或 沒有地雷。在每個沒有地雷的小方格內寫上與此小方格有公共邊或公共頂點 的所有小方格內藏有地雷的總數。現若將所有的地雷移除，而在原沒有地雷的小方格內都放一枚地雷，然後在現在沒有地雷的小方格內寫上與此小方格 有公共邊或公共頂點的所有小方格內藏有地雷的總數。請問有沒有可能使最 後所有方格內所填的數之總和大於原來所有方格內所填的數之總和？

轉換前後的數之總和必定相同。如果兩個格子相鄰 (有公共邊或公共頂點)， 並且其中一個有地雷，另一個卻無，我們就稱這一對格子為好格子對。容易 發現方格內所填的數之總和就是好格子對的對數 (因為每一對好格子對都會在有地雷的那格被算到一次)；而好格子對在轉換過後仍然會是好格子對 (仍 然相鄰，並且恰有一格有地雷)，反之亦然，因此轉換前後的好格子對數相同。 綜合以上，便可得到轉換前後方格內所填的的數之總和皆等於好格子對數，是故必定相同。

問題

是否任何正整數乘以 1、2、3、4、5 中的一個數都可以使得所得之乘積為以 1 開頭的數？