

第二組

CMO 2004

組員：410631105 王嘉顥
410631106 王士齊
410631116 劉家宇
410631125 李宥德
410631127 張茗洋

1. 代數問題

Find all ordered triples (x, y, z) of real numbers which satisfy the following system

of equations:
$$\begin{cases} xy = z - x - y \cdots \textcircled{1} \\ xz = y - x - z \cdots \textcircled{2} \\ yz = x - y - z \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

找到滿足以下方程組的所有實數有序數對 (x, y, z) :
$$\begin{cases} xy = z - x - y \cdots \textcircled{1} \\ xz = y - x - z \cdots \textcircled{2} \\ yz = x - y - z \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow xy - xz = 2z - 2y$$

提出 $y - z$ 並移項得 $(x + 2)(y - z) = 0$ ，可知 $x = -2$ 或 $z = y$

$x = -2$ 代入 $\textcircled{1}$ 可得 $-2y = z + 2 - y$ 或 $y + z = -2$

$x = -2, y + z = -2$ 代入 $\textcircled{3}$ 得 $yz = -2 - (-2) = 0$. 所以 y 或 z 為 0

若 $x = -2$, 可能的解為 $(-2, 0, -2)$ 和 $(-2, -2, 0)$

若 $z = y$, 則 $\textcircled{1} \Rightarrow xy = -x$ 或 $x(y + 1) = 0$

若 $x = 0$ 且 $z = y$, 則 $\textcircled{3} \Rightarrow y^2 = -2y$ 可得 $y = 0$ 或 $y = -2$.

若 $y = -1$ 且 $z = y = -1$, 則由 $\textcircled{3}$ 可得 $x = -1$

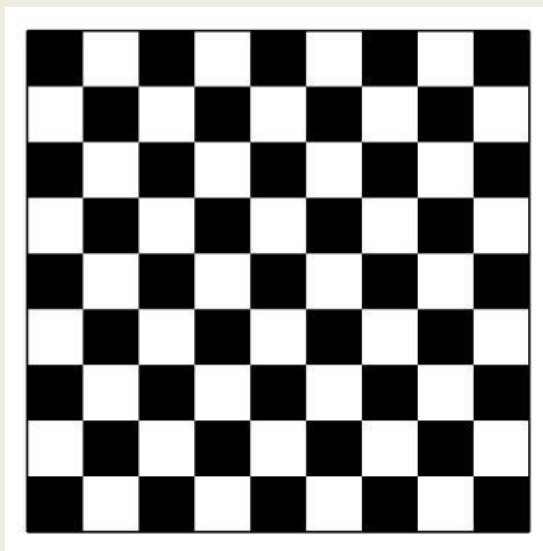
所以若 $y = z$, 可能的解為 $(0, 0, 0)$, $(0, -2, -2)$ 和 $(-1, -1, -1)$

所以可能的五個解為 $(-2, 0, -2)$, $(-2, -2, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(0, -2, -2)$, $(-1, -1, -1)$.

2. 幾何問題

How many ways can 8 mutually non-attacking rooks be placed on the 9×9 chessboard (shown here) so that all 8 rooks are on squares of the same colour?

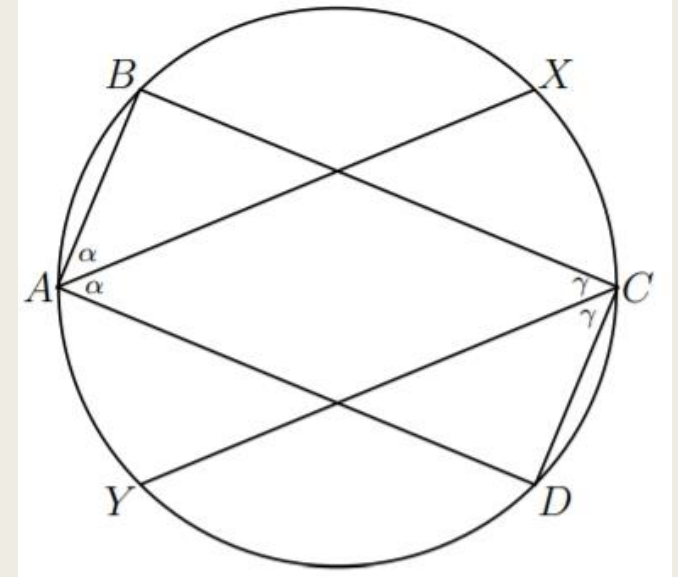
如下圖，要將八個棋子放進同樣顏色的方格且倆倆不同排也不同列，則會有幾種放法？



3. 幾何問題

Let A, B, C, D be four points on a circle (occurring in clockwise order), with $AB < AD$ and $BC > CD$. Let the bisector of angle BAD meet the circle at X and the bisector of angle BCD meet the circle at Y . Consider the hexagon formed by these six points on the circle. If four of the six sides of the hexagon have equal length, prove that BD must be a diameter of the circle.

設 A, B, C, D 為圓上的四個點(以順時鐘排列)，其中 $AB < AD$ 且 $BC > CD$ 。設角 BAD 的角平分線交圓於 X ，角 BCD 的角平分線交圓於 Y 。在圓上將這六個點連起來形成一個六邊形，若這六個邊中有四個邊等長，試證明 BD 是圓的直徑



4.代數問題

Let p be an odd prime. Prove that

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} \equiv \frac{p(p+1)}{2} \pmod{p^2}$$

p 是一個奇數質數，請證明

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} \equiv \frac{p(p+1)}{2} \pmod{p^2}$$

注意 $a \equiv b \pmod{m}$ 意旨 $a - b$ 可被 m 整除

5. 數論問題

Let T be the set of all positive integer divisors of 2004^{100} .

What is the largest possible number of elements that a subset S of T can have if no element of S is an integer multiple of any other element of S ?

T 是一個包含 2004^{100} 的所有因數的集合。

S 為 T 的子集，如果 S 裡的元素不是 S 裡任何其他元素的倍數，則 S 的元素中最大的數可能是多少？