



數學思維與解題

組員:陳品宏、陳冠霖、陶柏頤、李冠言

題目

2. 平面上一個長為 m 、寬為 n 的長方形，若 m 、 n 互質，則它的一條對角線會穿過幾個單位正方形？

解答

2. 平面上一個長為 m 、寬為 n 的長方形，若 m 、 n 互質，則它的一條對角線會穿過幾個單位正方形？

【參考解答】：以長方形左下角的頂點為原點，建立坐標系。由假設條件 m 、 n 互質，若對角線會通過長方形內部的格子點 (u, v) ，其中 $1 \leq u < m$ ， $1 \leq v < n$ ，則 $\frac{u}{v} = \frac{m}{n}$ ，此與 m 、 n 互質矛盾，因而對角線不會通過任何格子點。此時，對

角線在水平方向會通過 m 個單位正方形，在鉛直方向會通過 n 個單位正方形；不過左下角的那一個單位正方形被重複計算。因此在 $(m, n) = 1$ 的情形下，對角線總共穿過了 $m + n - 1$ 個單位正方形。

延伸題

- 空間中有一個長為 M 、寬為 N 、高為 K 的長方體，他的一條對角線會穿過幾個單位小正方體？

解答

- 他的對角線會穿過
單位小正方體

個