

數學思維與解題-9

倒推數理邏輯

Top row equations:
 $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, $\Phi(x) = \int \partial x \cos \omega x dx$, $f = \frac{\omega}{L}$, $V_0 = \frac{kT_0}{2}$, $C = \frac{i\epsilon^2 R}{2}$, $I = \frac{U}{R}$, $\langle D \rangle = \frac{p_1 - p_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$, $\Delta S = S_2 - S_1$, $\Delta V = \cos kx$,
 $\vec{E} = \sum_{i=1}^n E_i$, $R = z^2 \left(\frac{1}{m_z} - \frac{1}{n^2} \right)$, $R = \frac{1}{\lambda \sin \theta}$, $M = 12$, $I = \frac{U}{R}$, $\langle D \rangle = \frac{p_1 - p_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$,
 $y = \frac{r}{t}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\phi = \theta + \alpha$, $\sigma = \frac{1}{T}$, $C = \frac{\sigma \cdot e \cdot S}{Q \cdot \rho \cdot A \cdot V}$, $L = \mu_0 \mu_B V$, $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$, $\nu_k = \frac{A}{h}$, $\bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2$, $C = c \cdot \mu$,
 $R = \sigma T^4$, $\infty = f \cos(\omega t + \alpha)$, $\omega = 2\pi\nu$, $\phi = \theta + \alpha$, $E = mc^2$, $C = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{B_T}{m^2} K^4$, $W = |\Psi|^2$, $\sigma = f_0 \sin^2(\omega t + \alpha)$,
 $R = \alpha \sigma T^4$, $\lambda_m = \frac{b}{T}$, $b = 2.9 \cdot 10^{-3} m \cdot K$, $\varphi = \arctan \frac{A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t}{A_1 \cos \omega t - A_2 \sin \omega t}$, $\lambda = \sqrt{t}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\Delta = m \lambda_m$, $m = 0.1 \cdot 10^{-2}$,
 $A_p = \frac{f_0}{2p \sqrt{\omega_s^2 - \omega^2}}$, $\omega = \frac{1}{2} m \Omega^2 \omega_s^2$, $\Omega = \sqrt{\omega_s^2 + \frac{4k^2}{m}}$, $\rho = \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = \frac{1}{2} \hbar k$, $\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \omega$, $P = n k T$, $\rho = \frac{1}{2} \sin \Delta \varphi$, $\rho = \frac{1}{2} \sin \Delta \varphi$, $\sigma = \epsilon n (U_n + U_p)$,
 $\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \times \vec{B} \rangle$, $U = \frac{1}{2} \frac{m}{N} \epsilon^2$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} R = \frac{1}{m} \epsilon^2$, $\sigma = e \hbar n (U_n + U_p)$, $E_n = \frac{\hbar^2}{8mL^2} \frac{1}{n^2}$, $\epsilon_{\text{orb}} = \Delta mc^2$, $\omega = \sqrt{\omega_s^2 - \frac{P^2}{m}}$,
 $A = i \Delta \Phi$, $q = \frac{4\Omega}{R}$, $C_s = \frac{g}{2} \hbar \omega (n-1)$, $\sigma_1 = \frac{1}{2} \hbar \omega (n-1)$, $\sigma_2 = \frac{1}{2} \hbar \omega (n-1)^2$, $P_x = \frac{3\pi}{8} \frac{r}{ne}$, $\lambda_K = \frac{h}{A}$, $f(v) = 4\pi \left[\frac{(2\pi k T)^{1/2}}{v} \right]^{1/2} \frac{e^{-\frac{mv^2}{2kT}}}{v}$,
 $D = \frac{1}{2} \langle v \times \vec{B} \rangle$, $\dot{c} = \frac{q}{4\pi G \rho c^2 r^3}$, $\chi = \eta \frac{R}{2} \frac{R}{\mu}$, $P = P_0 e^{-\eta v}$, $\psi = N \rho$, $\epsilon_s = L \frac{d\eta}{dr}$, $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_o}}$, $\lambda = \sqrt{\frac{8kT}{\rho \mu}}$, $A = \hbar \nu \sin \theta$.

411131123 施語柔

410831227 張清昇

410831231 王冠翔

410931251 王俊淵

411031245 廖登峰

410731212 潘彥澄

BASIC LOGIC OF INFERENCE

基礎推理邏輯

DEDUCTIVE REASONING 演繹推理

$$A \rightarrow B$$

以原有規則與案例推出結果

E.G.

上課缺席會被扣學期成績

冠翔翹課 → 被扣學期成績

BASIC LOGIC OF INFERENCE

基礎推理邏輯

INDUCTIVE REASONING 彙納推理

$$A \in B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$$

論證的前提支持結論但不確保結論的推理過程

E.G.

人總有一天會死

蘇格拉底是人

結論：蘇格拉底總有一天會死

BASIC LOGIC OF INFERENCE

基礎推理邏輯

ABDUCTIVE REASONING 逆向推理

$A \rightarrow B$, if B happen, possible be A

根據結果，嘗試尋找規則猜測可能性

E.G.

下雨後路會濕滑

今天路上濕滑，有可能下過雨

三人玩遊戲

3人玩遊戲

每場遊戲結果一個人輸兩個人贏

輸的人付給贏的人的錢，是贏的人當時擁有的錢

3人玩3次，每人恰好輸1場遊戲

最後每人皆為8元

請問三個人玩遊戲前分別有多少錢？

正常解法

	第一局輸家	第二局輸家	第三局輸家
原有的錢	x	y	$24 - x - y$
第1局後	$2x - 24$	$2y$	$48 - 2x - 2y$
第2局後	$4x - 48$	$4y - 24$	$96 - 4x - 4y$
第3局後	$8x - 96$	$8y - 48$	$168 - 8x - 8y$

$$\begin{aligned}
 8x - 96 &= 8, 8y - 48 = 8 \\
 \Rightarrow x = 13, y = 7, (24 - x - y) &= 4
 \end{aligned}$$

反向解法

	第一局輸家	第二局輸家	第三局輸家
最後	8	8	8
第3局前	$\frac{8}{2} = 4$	$\frac{8}{2} = 4$	$8 + 4 + 4 = 16$
第2局前	$\frac{4}{2} = 2$	$4 + 8 + 2 = 14$	$\frac{16}{2} = 8$
第1局前	$2 + 7 + 4 = 13$	$\frac{14}{2} = 7$	$\frac{8}{2} = 4$

海盜乞金問題

五海盜兮金幣

五個海盜航行到一小島



五海盜兮金幣

五個海盜航行到一小島



發現一寶藏，內含100枚金幣



五海盜分金幣

5個海盜發現寶藏後決定用以下方法分配：

抽籤決定順序1、2、3、4、5

首先由1號決定如何分配，接著全部的人進行表決，如果有一半以上的人不同意，則提案者丟入海裡餵鯊魚，再由下個順位繼續……以此類推

設定每一個海盜都很聰明，會理智的判斷
則第一個海盜最多可以分多少金幣？

五海盜分金幣

中場調查

第一個海盜可分到的金幣最接近以下哪個數值？

- (A) 100
- (B) 67
- (C) 50
- (D) 33
- (E) 20
- (F) 0



SOLUTION

由正面問不易思考
試著從反面做



IF.....

五海盜分金幣

如果場上只剩下一個海盜……



5號海盜

我可以獨得100枚金幣 ❤️



五海盜分金幣

如果場上剩下兩個海盜……



4號海盜



5號海盜



回憶規則：

如果有**一半以上**的人不同意，則提案者丟入海裡餵鯊魚，再由下個順位繼續
只要一個海盜不同意⇒**GAME OVER**

五海盜分金幣

如果場上剩下兩個海盜……



4號海盜



5號海盜

4號怎麼分我都不會同意 ❤️



4號必死，5號獨得全部 $\Rightarrow (0, 100)$

4號提案，5號反對

五海盜分金幣

如果場上剩下三個海盜……



3號海盜



4號海盜



5號海盜



剩兩個人我就贏了
3、4必須死

五海盜分金幣

如果場上剩下三個海盜……



3號海盜



4號海盜



5號海盜



3號提案

同意:3、4 反對:5

3號知道4號不想死，必定忍痛支持3號的決定
 $\Rightarrow (100, 0, 0)$

五海盜分金幣

如果場上剩下四個海盜……



2號海盜



3號海盜



4號海盜



5號海盜

剩三人時我連一個都拿不到😭

還要兩個人同意我的分配方法🤔

剩三人時我能拿100枚😍

剩三人時我連一個都拿不到😭

五海盜分金幣

如果場上剩下四個海盜……



2號海盜



3號海盜



4號海盜



5號海盜

2號知道還要兩人同意，3號必定不同意

4、5號知道剩三人時連一枚都拿不到 \Rightarrow 賄賂4、5號
 $\Rightarrow (98, 0, 1, 1)$

2號提案

同意:2、4、5

反對:3

五海盜分金幣

回到原題五個海盜……



1號海盜



2號海盜



3號海盜



4號海盜



5號海盜

剩四人時我連一個都拿不到 😭

還要兩個人同意
我的分配方法 🤔

剩四人時我能夠
拿98枚 ❤️

剩四人時我可以
拿到一枚金幣 😊

剩四人時我可以
拿到一枚金幣 😊

五海盜分金幣

回到原題五個海盜……



1號海盜



2號海盜



3號海盜



4號海盜



5號海盜

1號知道還要兩人同意

剩四人時，2號拿98枚；3號拿不到金幣；4、5號拿一枚金幣 1號提案

要使兩人同意，需要給比剩四人時某兩人的更多

同意:1、3、5 (1、3、4)

$\Rightarrow (97, 0, 1, 0, 2)$ 或 $(97, 0, 1, 2, 0)$

反對:2、4 (2、5)

ALERT!!!

改變題目!!!

五海盜兮金幣

五個海盜航行到一小島



五海盜兮金幣

五個海盜航行到一小島



發現一寶藏，內含100枚金幣



五海盜分金幣

5個海盜發現寶藏後決定用以下方法分配：

抽籤決定順序1、2、3、4、5

首先由1號決定如何分配，接著全部的人進行表決，如果有超過一半的人不同意，則提案者丟入海裡餵鯊魚，再由下個順位繼續……以此類推（一半同意即可過關）

設定每一個海盜都很聰明，會理智的判斷
則第一個海盜最多可以分多少金幣？

五海盜分金幣

如果場上只剩下一個海盜……



5號海盜

我可以獨得100枚金幣 ❤️



五海盜分金幣

如果場上剩下兩個海盜……



4號海盜



5號海盜



回憶規則：

如果有**超過一半**的人不同意，則提案者丟入海裡餵鲨魚，再由下個順位繼續
就算一個海盜不同意，提案仍然過關

五海盜分金幣

如果場上剩下兩個海盜……

誰管你同不同意 ❤



4號海盜



5號海盜



4號仍然獨得全部、5號 😭😭 $\Rightarrow (100, 0)$

4號提案，5號反對

五海盜分金幣

如果場上剩下三個海盜……

剩兩人時我能全拿 😊

3號海盜

4號海盜

5號海盜

只要再一個人同意我的
分配方法就好了 😈

剩兩人時拿不到 😣

五海盜分金幣

如果場上剩下三個海盜……



3號海盜



4號海盜



5號海盜



3號提案

同意:3、5 反對:4

3號知道4號不會同意，給5號好處即可獲支持
 $\Rightarrow (99, 0, 1)$

五海盜分金幣

如果場上剩下四個海盜……



2號海盜



3號海盜



4號海盜



5號海盜

剩三人時我連一個都拿不到😭

只要再一個人同意
我的分配方法 🤔

剩三人時我能拿99枚 😊

剩三人時我可以
拿到一枚金幣 🤔

五海盜分金幣

如果場上剩下四個海盜……



2號海盜



3號海盜



4號海盜



5號海盜

2號知道再一人同意即可過關
買通剩三人時拿最少的即可 \Rightarrow 賄賂4號
 $\Rightarrow (99, 0, 1, 0)$

2號提案
同意:2、4
反對:3、5

五海盜分金幣

回到原題五個海盜……



1號海盜



2號海盜



3號海盜



4號海盜



5號海盜

剩四人時我連一個都拿不到 😭

還要兩個人同意
我的分配方法 🤔

剩四人時我能夠
拿99枚 ❤️

剩四人時我可以
拿到一枚金幣 😊

剩四人時我連一
個都拿不到 😭

五海盜分金幣

回到原題五個海盜……



1號海盜



2號海盜



3號海盜



4號海盜



5號海盜

1號知道還要兩人同意

剩四人時，2號拿99枚；3、5號拿不到金幣；4號拿一枚金幣

要使兩人同意，需要給比剩四人時某兩人的更多

$\Rightarrow (98, 0, 1, 0, 1)$

1號提案

同意:1、3、5

反對:2、4

原則：

1. 從反面做回來
2. 用最少金幣買通下一場會拿最少的一半海盜

延伸：
用第二種分法
6個海盜分100金幣

六海盜分金幣

六個海盜分100枚……



1號海盜



2號海盜



3號海盜



4號海盜



5號海盜



6號海盜

1號知道還要兩人同意
五人時(2~6號)

2號拿98枚；4、6號拿一枚金幣；3、5號拿不到金幣
要使兩人同意，需要給比五人時某兩人的更多
 $\Rightarrow (98, 0, 1, 0, 1, 0)$

1號提案

同意:1、3、5

反對:2、4、6

七海盜分金幣

7個海盜分100枚……



1號海盜



3號海盜



5號海盜



7號海盜



2號海盜



4號海盜



6號海盜

1號知道還要三人同意
六人時(2~7號)
2號拿98枚
4、6號拿一枚金幣
3、5號拿不到金幣
要使三人同意，需要給比
六人時某兩人的更多
 $\Rightarrow (98, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$

1號提案

同意:1、3、5、7

反對:2、4、6

海盜分金幣

以上整理可得：

一人時 $\Rightarrow (100)$

兩人時 $\Rightarrow (100, 0)$

三人時 $\Rightarrow (99, 0, 1)$

四人時 $\Rightarrow (99, 0, 1, 0)$

五人時 $\Rightarrow (98, 0, 1, 0, 1)$

六人時 $\Rightarrow (98, 0, 1, 0, 1, 0)$

七人時 $\Rightarrow (97, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$

歸納可得出

每個海盜能獲得的金幣與
奇偶性相關

$\forall n$ 枚金幣分給 $\leq 2n$ 個海盜

海盜分金幣——特例

當 100 枚金幣 分 紿 超 過 200 人 時……

E.G.

201 海盜 分 100 金幣

⇒ 1 號 自 己 不 拿， 分 紿 2~201 奇 數 位 的 海 盜 各 一 枚， 剛 好
101 同 意 票 過 關

海盜分金幣——特例

當100枚金幣分給超過200人時……

E.G.

202海盜分100金幣

⇒1號自己不拿，分給2~202奇數位的海盜各一枚，剛好
101同意票過關

海盜兮金幣——特例

203海盜兮100金幣

⇒除了1號外，還需要101個海盜支持，金幣不夠無法收買

⇒必死



海盜分金幣——特例

204海盜分100金幣(特別!!!)

⇒還需要101個海盜支持，但2號怕會剩下203海盜，因為自己會死

⇒1號0金幣，2~202奇數位的海盜各一枚，2號拿不到但會同意分配

海盜分金幣——特例

Possible Recipients of One Gold Piece

202 PIRATES

P1	P2	P3	P4.....	P197	P198	P199	P200	P201	P202
NO	YES	NO	YES.....	NO	YES	NO	YES	YES	NO

204 PIRATES

P1	P2	P3	P4.....	P197	P198	P199	P200	P201	P202	P203	P204
YES	NO	YES	NO.....	YES	NO	YES	NO	NO	YES	NO	NO

*IN LARGER GROUPS,
the fiercest pirate must bribe 100 of his fellows with one gold piece each.*

P.S. 參考資料的分配決定權在數字較大的海盜，但為講解方便，本段
影片決定順序在數字較小的海盜

CITATIONS

P.2 DEDUCTIVE REASONING

<https://www.scribbr.com/methodology/deductive-reasoning/>

P.3 INDUCTIVE REASONING

<https://www.scribbr.com/methodology/inductive-reasoning/>

P.4 ABDUCTIVE REASONING

<http://www.butte.edu/departments/cas/tipsheets/thinking/reasoning.html>

P.11~P.24 PIRATE'S GAME WITH PROPOSER CAN'T VOTE

<https://math.stackexchange.com/questions/2855171/pirates-game-what-if-proposer-can-t-vote>

CITATIONS

P.28~P.38 PIRATE PUZZLE (5 PIRATES 100 GOLD)

<https://www.geeksforgeeks.org/puzzle-20-5-pirates-and-100-gold-coins/>

P.38~P.47 EXTENSION OF PUZZLE FOR PIRATES

https://omohundro.files.wordpress.com/2009/03/stewart99_a_puzzle_for_pirates.pdf

THANK YOU FOR
PARTICIPATING!!!