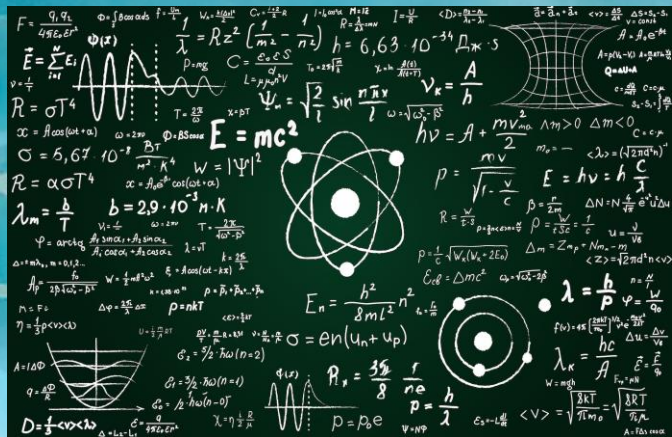


# 數學解題方法第3組



411131123 施語柔

410831227 張清昇

410831231 王冠翔

410931251 王俊淵

410831107 廖崑良

# 《黑暗騎士》的賽局

離散—競局理論 Game Theory

1

小丑搶銀行案【海盜賽局】

2

船隻實驗【囚徒困境】

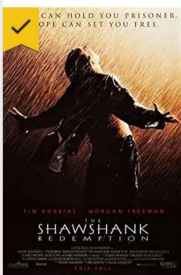
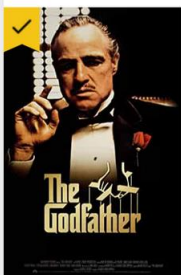


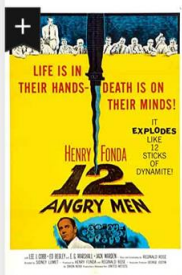
3

膽小鬼賽局

上午12:34 5月1日 週一



### Top 250 movies

<div>1</div> <div></div> <div>★ 9.3 ★ 10</div> <div>刺激1995</div> <div>1994 R-12 2h 22m</div> <div><a href="#">✓ Watchlisted</a></div>	<div>2</div> <div></div> <div>★ 9.2 ★ 10</div> <div>教父</div> <div>1972 R-15 2h 55m</div> <div><a href="#">Watch on Prime...</a></div>	<div>3</div> <div></div> <div>★ 9.0</div> <div>黑暗騎士</div> <div>2008 PG-12 2h 32m</div> <div><a href="#">+ Watchlist</a></div>	<div>4</div> <div></div> <div>★ 9.0 ★ 10</div> <div>教父2</div> <div>1974 R-12 3h 22m</div> <div><a href="#">✓ Watchlisted</a></div>	<div>5</div> <div></div> <div>★ 9.0</div> <div>十二怒漢</div> <div>1957 U 1h 36m</div> <div><a href="#">+ Watchlist</a></div>
--	--	---	---	--

## 在IMDb佳片250中排名第3

IMDb ( Internet Movie Database , 網路電影資料庫 ) 和爛番茄網站一樣，都是大家評估電影好不好看的參考依據之一。從1998年起，IMDb隸屬於亞馬遜公司旗下，網站上有豐富的電影資訊，只要是用戶都可以為電影評分，IMDb會以數據過濾機制及最小投票數量的限制，來計算出一個加權平均星數作為評分。





## 故事大綱

蝙蝠俠全力打擊犯罪活動，這次加上正義警官吉姆戈登和地方檢察官哈維丹特的鼎力相助，蝙蝠俠蓄勢待發剷除危害高譚市的犯罪組織。

蝙蝠俠與兩位官方人物的合作雖然更具優勢，不過他們很快就發現自己成為敵人鎖定的目標，此人便是高譚市居民聞之喪膽的「小丑」（**Joker**），正是勢力漸大的犯罪組織首領。他在高譚市掀起一片混亂，使得替天行道的除惡英雄蝙蝠俠再次出擊。

# 人物性格介紹

## 蝙蝠俠

- ▶ 嫉惡如仇，想把正義帶回高譚市
- ▶ 堅決不殺人



## 小丑

- ▶ 善用人的心理，想把高譚市打造成犯罪都市
- ▶ 認為一個善人也可以被黑化

你要不就像個英雄般犧牲，  
或是看著自己變成壞人。

*"You either die a hero or you live long enough to see yourself become the villain."*

*"As you know, madness is like gravity...all it takes is a little push."*

## 小丑搶銀行案【海盜賽局】

幾個搶匪戴小丑面具，要分搶來的錢，為了分得更多錢，各搶匪去殺其他搶匪。

而真正的小丑等他們自相殘殺完剩他一人時，開走學校巴士揚長而去.....





# 海盜分金

5個海盜發現100金幣的寶藏，抽籤決定順序1、2、3、4、5

首先由1號決定如何分配，接著全部的人進行表決，如果有超過一半的人不同意，則提案者丟入海裡餵鯊魚，再由下個順位繼續，以此類推，一半同意即可過關，請問1號最多可以獲得多少枚金幣？



## 船隻實驗【囚徒困境】

有兩艘渡輪，一艘載滿著一般民眾，一艘是警備押解的囚犯船，兩艘船都被小丑裝著炸彈，但引爆自己船上炸彈的控制器都在另一艘船上。

小丑透過廣播跟大家說，先把對方的船炸了，自己就安全了。或者時間到兩艘船都會被小丑炸掉。





# 船隻實驗【囚徒困境】

## 囚犯

- ▶ 若按下引爆鍵，則平民船爆炸，囚犯安全
- ▶ 若不引爆平民船，自己有可能被平民引爆，或是被小丑引爆



## 平民

- ▶ 若按下引爆鍵，則囚犯船爆炸，平民安全
- ▶ 若不引爆囚犯船，自己有可能被囚犯引爆，或是被小丑引爆



# 囚犯困境-經典問題

囚徒困境		prisoner B	
		招供 (背叛)	沉默 (合作)
prisoner A	招供	 10年   10年	 0年   15年
	沉默	 15年   0年	 1年   1年

警方逮捕A、B兩名嫌疑犯，但沒有足夠證據指控二人有罪。於是警方分開囚禁嫌疑犯，分別和二人見面，並向雙方提供以下相同的選擇：

- 若一人認罪並作證招供對方（背叛對方），而對方保持沉默，此人即刻獲釋，沉默者將判監15年。
- 若二人都保持沉默（合作），則二人同樣判監1年。
- 若二人都互相檢舉（互相「背叛」），則二人同樣判監10年。

# 囚犯困境-經典問題

囚徒困境		prisoner B	
		招供 (背叛)	沉默 (合作)
prisoner A	招供	 10年 10年	 0年 15年
	沉默	 15年 0年	 1年 1年

若對方沉默(合作)：

- 若我沉默(合作)會有1年刑期
- 若我招供(背叛)會讓我獲釋

**招供(背叛)較符合自身利益**

若對方招供(背叛)：

- 若我沉默(合作)會有15年刑期
- 若我招供(背叛)會有10年刑期

**招供(背叛)較符合自身利益**

若兩位皆理性做決定，皆會選擇背叛，但卻不符合團體利益



## 膽小鬼賽局

騎著摩托車的蝙蝠俠衝向小丑，小丑嘴巴唸著"Come on!" "Hit me!" 然後就看蝙蝠俠自己避開、摔車，然後暈過去。

遊戲中兩名車手相向而行。如果兩人都不轉彎，任由兩車相撞，最終兩人都會死於車禍；但如果有一方轉彎，而另一方沒有，那麼轉彎的一方會被恥笑為「膽小鬼」（chicken），另一方勝出。



來吧，衝過來，來撞我呀



# 英國下午茶聚會

—改變現代統計的事件

統計—實驗設計  
*Design of Experiments*



1

女士品茶 Lady Tasting Tea

2

實驗設計

3

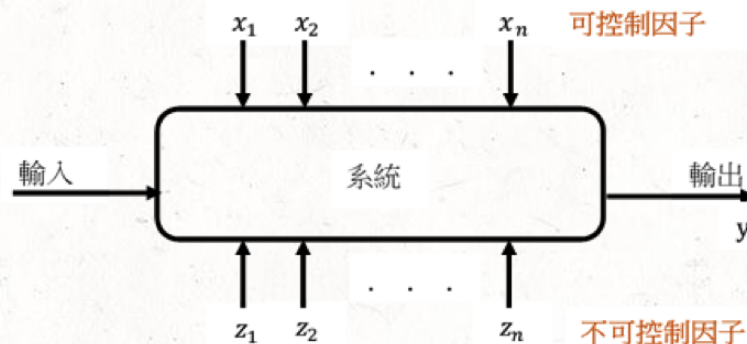
假說檢定

4

隨機化檢定

# Introduction

實驗設計(Design of Experiment; DOE)是一種安排實驗和分析實驗數據的數理統計方法，主要是對想要進行的實驗進行合理配置，透過較小的試驗次數、較短的試驗週期和較低的試驗成本，獲得理想的試驗結果並提出科學的結論。





**LADY TASTING TEA**

女士品茶

# 如何泡正統的英式紅茶

- ① 在茶壺及茶杯中倒入滾燙熱水，先溫壺、溫杯後再將水倒掉。
- ② 將茶葉放進茶壺中，從距離壺蓋開口約5～7公分的位置注入95～100°C 的熱水，之後浸泡4～5分鐘。
- ③ 以濾網過濾泡好的茶葉或茶包，將紅茶倒入杯中飲用。

1



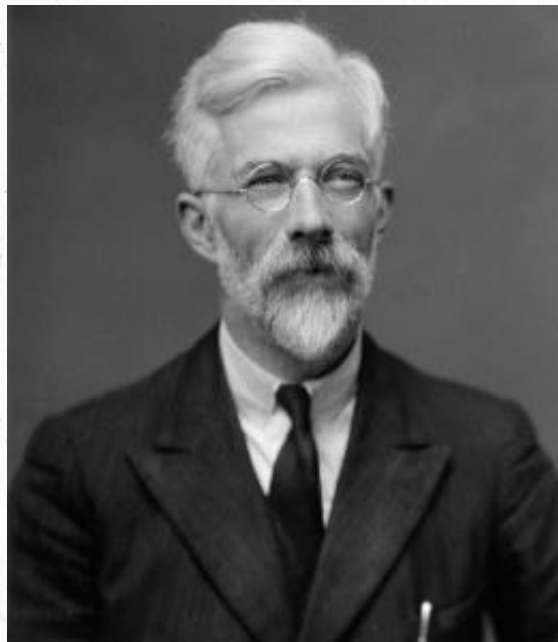
2



3



# Sir Ronald Aylmer Fisher (1890~1962)



費雪爵士，英國著名統計學家、演化生物學家  
知名於：

費雪真實檢定(*Fisher's Exact Test*)、變異數分析  
(ANOVA)、 $p - value$  ... 等

《研究者的統計方法》(1925)、《實驗設計》  
(1935)、《統計方法與科學推斷》(1956) 等書

被尊稱為現代統計之父



**BACK TO 1920's  
IN ENGLAND...**

**回到1920年代的英國...**

# LADY TASTING TEA 女士品茶

在一個上流社會的下午茶聚會裡，一位服務生遞了一杯先倒紅茶再倒入牛奶的奶茶給一位女博士

*Muriel Bristol*，她拒絕了並說她覺得先倒牛奶再倒紅茶的茶比較好喝。



# LADY TASTING TEA 女士品茶



統計學家  
Ronald Fisher

倒入的牛奶的先後順序不會改變一杯茶的風味啦 🙅

味道明明就不一樣 😡

而且，我分得出來哪杯先倒紅茶，哪杯先倒牛奶 😡



來實驗吧!



生物博士  
Muriel Bristol



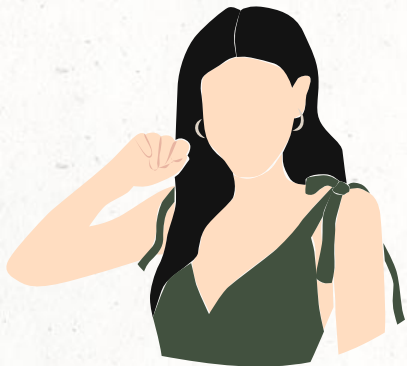
# DESIGN OF EXPERIMENTS

## 實驗設計

# 實驗設計



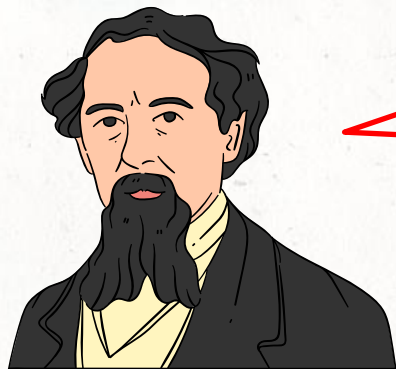
實驗應該不難吧，在這位女士看不到的地方準備兩種方法泡出的奶茶，讓她鑑定不就行了嗎？



假設這位女士根本辨別不出來，完全靠猜的，有**50%**的機率猜對。兩杯的話，也有**25%**的機率猜對。

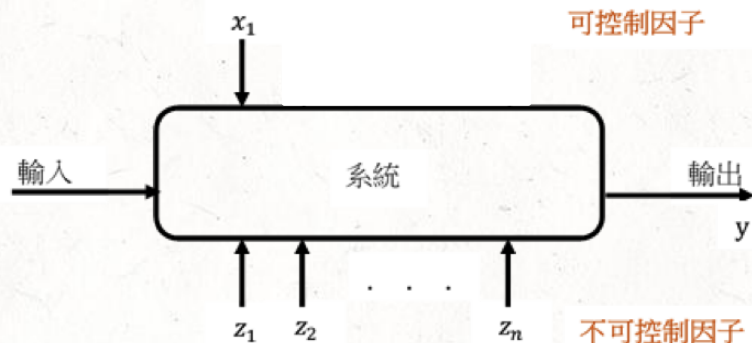
那麼到底要給她多少杯茶，才能證明她全部判斷對了，不是靠猜的，而是她真的知道這兩種泡法確實味道不同呢？

# 實驗設計



理論上，做越多次，完全猜對的機率會趨近於0，  
但總不可能做無限次吧？

機率在多少以下的時候我可以視為女士可以正  
確判斷呢？





# 實驗設計



費雪泡了8杯奶茶

4杯先倒紅茶，4杯先倒牛奶



統計學家  
Ronald Fisher

# 實驗設計



為了不讓實驗受到其他影響，費雪隨機化排列了這8杯奶茶



統計學家  
Ronald Fisher

例：先倒牛奶為①③⑤⑧

# 實驗設計

之後，費雪請女士挑出那 4 杯先倒牛奶的奶茶

即為①③⑤⑧



試問：Dr. Bristol 可以正確挑出那 4 杯先倒牛奶的奶茶機率為何？

$$\frac{1}{\binom{8}{4}} = \frac{1}{70}$$



# 實驗設計

正確挑出的杯數	可能性(幾種組合方式)	機率
4	$\binom{4}{4} \times \binom{4}{0} = 1$	$\frac{1}{70} \approx 1.43\%$
3	$\binom{4}{3} \times \binom{4}{1} = 16$	$\frac{16}{70} \approx 22.85\%$
2	$\binom{4}{2} \times \binom{4}{2} = 36$	$\frac{36}{70} \approx 51.43\%$
1	$\binom{4}{1} \times \binom{4}{3} = 16$	$\frac{16}{70} \approx 22.85\%$
0	$\binom{4}{0} \times \binom{4}{4} = 1$	$\frac{1}{70} \approx 1.43\%$

# 實驗設計



統計學家  
Ronald Fisher

為了讓所有的參試處理在設計中都能公平地被分析並檢驗到

實驗設計需掌握三原則：

## 1. 隨機化 *Randomization*

試驗中的所有試驗單位必須隨機分配到每個位置，以避免因系統不均質以及個人主觀而產生誤差



上排的順序經隨機配置  
但下排的順序未施行隨機化

# 實驗設計



統計學家  
Ronald Fisher

為了讓所有的參試處理在設計中都能公平地被分析並檢驗到

實驗設計需掌握三原則：

## 2. 重複性 *Replication*

一個實驗可以在相同的條件下，被重複操作獲得相同的結果，即使不是完全的相同，所存在的差異（實驗的誤差），也必須在一定合理的範圍內



# 實驗設計



統計學家  
Ronald Fisher

為了讓所有的參試處理在設計中都能公平地被分析並檢驗到

實驗設計需掌握三原則：

## 3. 區組性 *Blocking*

將試驗單位依照時間、地理環境、性質等不同條件劃分為若干個較為同質的小群，可以幫助實驗者排除或降低某些已知但不重要的因子對觀測值造成影響，提升試驗的準確程度。

# 實驗設計



統計學家  
Ronald Fisher

為了讓所有的參試處理在設計中都能公平地被分析並檢驗到

實驗設計需掌握三原則：

1.隨機化

2.重複性

3.區組性

# HYPOTHESIS TEST

## 假說檢定



# 假說檢定

$$\begin{array}{l} \text{檢定} \\ \text{(Hypothesis)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{虛無假設} \\ \text{(Null Hypothesis)} : H_0 \\ \text{對立假設} \\ \text{(Alternative Hypothesis)} : H_1 \end{array} \right.$$

$$H_0 \cap H_1 = \emptyset, H_0 \cup H_1 = \Omega$$

$H_0$  通常設為原有的情況(現狀)

$H_1$  則設為想要的結果

# 假說檢定

條件 採取措施	$H_0$ 為真	$H_1$ 為真
拒絕 $H_0$	型一誤差 ( <i>Type I error</i> )	正確決定(無誤差)
拒絕 $H_1$	正確決定(無誤差)	型二誤差 ( <i>Type II error</i> )

**拒絕域**(*Critical Region*)：拒絕原假設的統計量的取值範圍

$$P(\text{type I error}) = P(x \in CR | H_0) = \alpha$$

$$P(\text{type II error}) = P(x \in CR | H_1) = \beta$$

# 假說檢定



那我們要如何建立假說檢定呢？

則根據定義， $H_0$ ：  
女士沒辦法分辨倒茶的先後順序。

再設 $H_1$ ：  
女士可以分辨倒茶的先後順序



統計學家  
Ronald Fisher



# 假說檢定



犯錯機率又應該要訂在多少以下？  
那怎麼樣才能算是一個有效的檢定呢？

犯錯機率先訂在**5%以下**好了。  
這時候我們可以使用**假說檢定**來測試。

犯錯機率5%以下( $p - value \leq 0.05$ ) = 95%信心水準



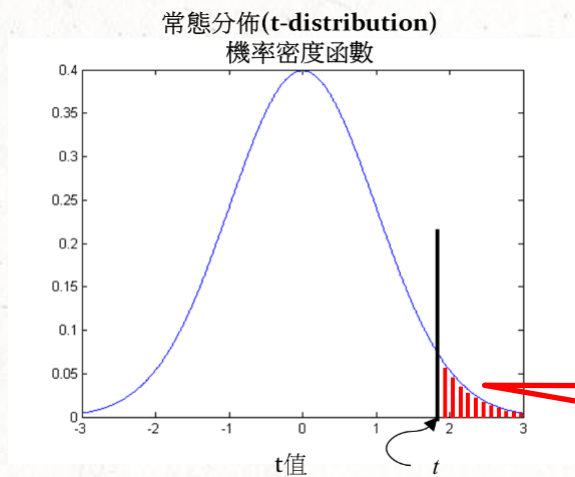
統計學家  
Ronald Fisher

# 假說檢定

$p$  - value :

在已知的抽樣樣本下，能拒絕 $H_0$  (虛無假設) 的最小顯著水準

⇒ 以現有的抽樣所進行的推論，可能犯 *type I error* 的機率  
(犯錯機率)



此為  $p$  - value

# RANDOMIZATION TEST

## 隨機化試驗



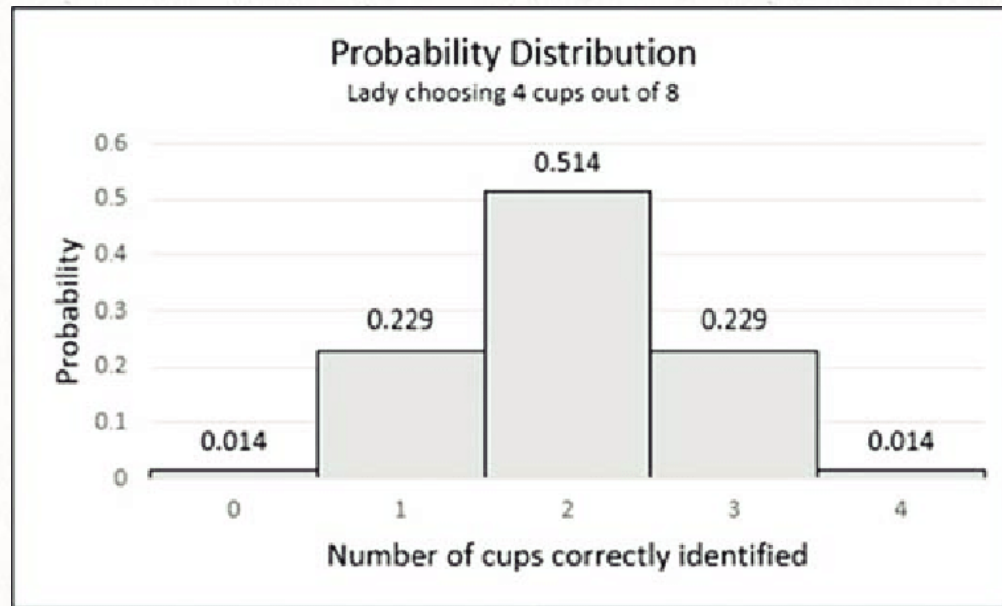
# 隨機化檢定—有條件限制

—事先告知選出4杯特定種類

# 顯著性檢定-條件限制

正確挑出的杯數	可能性(幾種組合方式)	機率
4	$\binom{4}{4} \times \binom{4}{0} = 1$	$\frac{1}{70} \approx 1.43\%$
3	$\binom{4}{3} \times \binom{4}{1} = 16$	$\frac{16}{70} \approx 22.85\%$
2	$\binom{4}{2} \times \binom{4}{2} = 36$	$\frac{36}{70} \approx 51.43\%$
1	$\binom{4}{1} \times \binom{4}{3} = 16$	$\frac{16}{70} \approx 22.85\%$
0	$\binom{4}{0} \times \binom{4}{4} = 1$	$\frac{1}{70} \approx 1.43\%$

# 隨機化檢定-條件限制





# 隨機化檢定

## ① 找出試驗的分配

【 $X_n$  代表第 $n$ 次試驗，每次結果只有正確(1)或錯誤(0)】

則  $X_n \sim \text{Ber}(0.5)$  【0.5為猜對機率】

$$\Rightarrow X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 \sim b(8, 0.5)$$

## ② 設立假說檢定

$H_0$  : 女士沒辦法分辨倒茶的先後順序

$H_1$  : 女士可以分辨倒茶的先後順序

# 隨機化檢定-條件限制

## ③拒絕域

$$CR_1: \left\{ X: \left( \sum_{i=1}^8 x_i \right) \geq 8 \right\}, CR_2: \left\{ X: \left( \sum_{i=1}^8 x_i \right) \geq 6 \right\}$$

正確拿出4杯  
(8杯全答對)

正確拿出3杯  
(6杯答對)

$$\alpha_1 = P(CR_1|H_0) = \frac{1}{70} = 0.0143 \leq \mathbf{0.05}$$

$$\alpha_2 = P(CR_2|H_0) = \frac{1}{70} + \frac{16}{70} = 0.2428 \geq \mathbf{0.05}$$

# 隨機化檢定-條件限制

## ④結論

$Y = (\sum_1^8 x_i)$  【 $Y =$  女士正確挑出的杯數】

$Y \geq 8 \Rightarrow$  拒絕 $H_0$  (女士可以分辨倒茶的先後順序)

$Y \leq 4 \Rightarrow$  不拒絕 $H_0$  (女士沒辦法分辨倒茶的先後順序)

$$Y = 6 \Rightarrow \text{做輔助性實驗使得成功機率} = \frac{0.05 - 0.0143}{0.2428 - 0.0143}$$

$\alpha$

$\alpha_2$

$\alpha_1$



# 隨機化檢定-條件限制

## ④結論

$$Y = 6 \Rightarrow \text{做輔助性實驗使得成功機率} = \frac{0.05 - 0.0143}{0.2428 - 0.0143}$$

$$\alpha = P(x \in CR | H_0) = P(Y \geq 8) + P(Y = 6, \text{success} | H_0)$$

$$= 0.0143 + P(Y = 6 | H_0) \times P(\text{success} | H_0) = 0.05$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$0.2428 - 0.0143$$

$$\frac{0.05 - 0.0143}{0.2428 - 0.0143}$$

# 隨機化檢定-條件限制

## ④結論

如果女士正確拿出4杯先倒牛奶的奶茶(8杯全答對)，則在95%信心水準之下，女士可以分辨倒茶的先後順序。

如果女士正確拿出3杯先倒牛奶的奶茶(錯誤取出2杯，答對6杯)，在95%信心水準之下，需要做輔助性實驗使得成功機率

$\leq \frac{0.05 - 0.0143}{0.2428 - 0.0143}$  代表女士仍可以分辨倒茶的先後順序。

# 隨機化檢定—無條件限制

直接判別8杯的種類



# 伯努利試驗 Bernoulli Trial

- ▶ 做一次試驗，只有成功和失敗兩種結果
- ▶ 成功( $X = 1$ )機率為  $p$ ，失敗( $X = 0$ )機率為  $1 - p$
- ▶ 若試驗  $Y$  為成功機率為  $p$  的伯努利試驗，簡記為  $Y \sim Ber(p)$
- ▶ 例如：
  - 擲一枚硬幣，正面表示成功，反面表示失敗 ( $p = \frac{1}{2}$ )
  - 擲骰子，擲出 6 表示成功，其他表示失敗 ( $p = \frac{1}{6}$ )

# 二項式分配

- ▶ 重複進行機率為  $p$  的伯努利試驗  $n$  次
- ▶ 若試驗  $Y$  為重複進行  $n$  次，成功機率 =  $p$  的伯努利試驗，則  $Y$  為二項式分配，簡記為  $Y \sim b(n, p)$

- ▶ 機率密度函數 ( $n$  次試驗中，成功  $k$  次的機率)

$$f(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{1-k}$$

例如：擲骰子6次，擲出4次5點的機率

$$f(x = 4) = \binom{6}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

# 隨機化檢定

## ① 找出試驗的分配

【 $X_n$  代表第 $n$ 次試驗，每次結果只有正確(1)或錯誤(0)】

則  $X_n \sim \text{Ber}(0.5)$  【0.5為猜對機率】

$$\Rightarrow X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 \sim b(8, 0.5)$$

## ② 設立假說檢定

$H_0$  : 女士沒辦法分辨倒茶的先後順序

$H_1$  : 女士可以分辨倒茶的先後順序



# 隨機化檢定

## ③拒絕域

$$CR_1: \left\{ X: \left( \sum_{i=1}^8 x_i \right) \geq 6 \right\}, CR_2: \left\{ X: \left( \sum_{i=1}^8 x_i \right) \geq 5 \right\}$$

正確判別6杯

正確判別5杯

$$\alpha_1 = P(CR_1 | H_0: p = 0.5) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^8 x_i \leq 6\right) = 0.0352 \leq \mathbf{0.05}$$

$$\alpha_2 = P(CR_2 | H_0: p = 0.5) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^8 x_i \leq 5\right) = 0.1445 \geq \mathbf{0.05}$$

# 隨機化檢定

④結論 【 $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 \sim b(8, 0.5)$ 】

$Y = (\sum_1^8 x_i)$  【 $Y =$  女士正確挑出的杯數】

$Y \geq 6 \Rightarrow$  拒絕 $H_0$  (女士可以分辨倒茶的先後順序)

$Y \leq 4 \Rightarrow$  不拒絕 $H_0$  (女士沒辦法分辨倒茶的先後順序)

$Y = 5 \Rightarrow$  做輔助性實驗使得成功機率 =  $\frac{0.05 - 0.0352}{0.1445 - 0.0352}$

$\alpha$

$\alpha_2$

$\alpha_1$

# 隨機化檢定

④結論 【 $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 \sim b(8, 0.5)$ 】

$$Y = 5 \Rightarrow \text{做輔助性實驗使得成功機率} = \frac{0.05 - 0.0352}{0.1445 - 0.0352}$$

$$\alpha = P(x \in CR | H_0) = P(Y \geq 6) + P(Y = 5, \text{success} | H_0)$$

$$= 0.0352 + P(Y = 5 | H_0) \times P(\text{success} | H_0) = 0.05$$

$$0.1445 - 0.0352$$

$$\frac{0.05 - 0.0352}{0.1445 - 0.0352}$$



# 隨機化檢定

## ④結論 (未告知幾杯先倒紅茶，幾杯先倒牛奶)

如果女士正確判別6杯奶茶的泡茶順序，則在95%信心水準之下，  
女士可以分辨倒茶的先後順序。

如果女士正確判別5杯奶茶先倒牛奶的奶茶在95%信心水準之下，  
需要做輔助性實驗使得 **成功機率**  $\leq \frac{0.05 - 0.0352}{0.1445 - 0.0352}$ ，

代表女士仍可以分辨倒茶的先後順序。

# 女士品茶——後續故事

根據當時在現場的人回憶，這位女士居然準確地判別了8杯茶！



統計學家  
Ronald Fisher

我就說我分得出來吧！

真是太神奇了，你到底怎麼做到的？



生物博士  
Muriel Bristol

# 如何泡一杯英式奶茶

之後，英國皇家化學協會研究指出，泡奶茶最佳的方法是先倒牛奶，因為牛奶中的蛋白質會在攝氏75度的茶中發生變化



牛奶被高溫的紅茶包圍起來



紅茶會被冷牛奶降低溫度



# CITATIONS

## Part I – The Dark Knight (Game Theory)

### The Dark Knight-Game Theory

<https://leftymovie.com/%E9%BB%91%E6%9A%97%E9%A8%8E%E5%A3%AB-%E8%B3%BD%E5%B1%80%E7%90%86%E8%AB%96/>

### IMDb Top 250 Movies

<https://www.imdb.com/chart/top/>

# CITATIONS

## Part II – Lady Tasting Tea (Statistics - Design of Experiments)

Sir Ronald Aylmer Fisher

<https://www.42evolution.org/ronald-a-fisher/>

Design of Experiments

<https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=74141>

How to Make British Milk Tea (Scientific) (RSC, Royal Society of Science)

<https://cdn.zmescience.com/wp-content/uploads/2017/11/RSC-tea-guidelines.pdf>

**THANK YOU FOR  
PARTICIPATING!!!**