數學思維與解題
第六組

林子妘 詹喬予 洪苡甄 洪杏玟 許瑜芹

- 數學歸納法的要點是：

- 1.證明 $n=1$ 時原式成立。
- 2.若 k 是任意正整數，證明「若 $n=k$ 時原式成立，則 $n=k+1$ 時原式亦成立」。

例 1 （07 江西理 22）设正整数数列$\{a_n\}$满足：$a_2=4$，且对于任何$n\in\mathbf{N}^*$，有

$$2+\frac{1}{a_{n+1}}<\frac{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}<2+\frac{1}{a_n}.$$

（1）求a_1，a_3； （2）求数列$\{a_n\}$的通项a_n．

解：（1）据条件得$2+\frac{1}{a_{n+1}}<n(n+1)\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)<2+\frac{1}{a_n}$ ① 当$n=1$时，

由$2+\frac{1}{a_2}<2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)<2+\frac{1}{a_1}$，即有$2+\frac{1}{4}<\frac{2}{a_1}+\frac{2}{4}<2+\frac{1}{a_1}$，解得$\frac{2}{3}<a_1<\frac{8}{7}$．因为$a_1$为正整数，故

$a_1=1$．当$n=2$时，由$2+\frac{1}{a_3}<6\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{a_3}\right)<2+\frac{1}{4}$，解得$8<a_3<10$，所以$a_3=9$．

（2）由$a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=9$，猜想：$a_n=n^2$．下面用数学归纳法证明：

1° 当$n=1$，2 时，由（1）知$a_n=n^2$均成立；

2° 假设$n=k(k\geqslant 2)$成立，$a_k=k^2$，则$n=k+1$时由①得$2+\frac{1}{a_{k+1}}<k(k+1)\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)<2+\frac{1}{k^2}$，

$\Rightarrow\frac{k^2(k+1)}{k^2-k+1}<a_{k+1}<\frac{k(k^2+k-1)}{k-1}\Rightarrow(k+1)^2-\frac{(k+1)^2}{k^2+1}<a_{k+1}<(k+1)^2+\frac{1}{k-1}$，因为$k\geqslant 2$时，

$(k^2+1)-(k+1)^2=k(k+1)(k-2)\geqslant 0$，所以$\frac{(k+1)^2}{k^2+1}\in(0,1]$．$k-1\geqslant 1$，所以$\frac{1}{k-1}\in(0,1]$．

又$a_{k+1}\in\mathbf{N}^*$，所以$(k+1)^2\leqslant a_{k+1}\leqslant(k+1)^2$，故$a_{k+1}=(k+1)^2$，即$n=k+1$时，$a_n=n^2$成立.

由 1°，2° 知，对任意$n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=n^2$．

此题在证明时应注意，归纳奠基需验证的初始值又两个，即$n=1$和$n=2$。

例 4 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正数，证明：$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

证：（1）先证明有无限多个正整数 n，使命题成立. 当 $n=2^m$（对任意的 $m \in N^*, m \geq 1$ 时），不等式成立，对 m 用数学归纳法.

① 当 $m=1$ 时，即 $n=2$，因为 $(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geq 0$，所以 $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ 即不等式成立.

② 假设 $m=k$ 时成立，即 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}}$；

则当 $m=k+1$ 时 $\sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k} \cdot a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}}} = \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}} \cdot \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}}}}$

$$\leq \frac{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}}}}{2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)$$

$$= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}+a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}.$$

因此 $m=k+1$ 时，不等式成立，故对于 $n=2^m$（对任意的 $m \in N^*, m \geq 1$ 时）命题成立.

（2）假定 $n=k$ 时成立，即 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\ge\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}$ ，于是当 $n=k-1$ 时，

有 $\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_{k-1}\cdot\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}}\le\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}}{k}=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}$ 对此式两边同时 k 次方得 $a_1a_2\cdots a_{k-1}\le(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1})^{k-1}$ ，即 $\sqrt[k-1]{a_1a_2\cdots a_{k-1}}\le\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}$ 成立，此为 $n=k-1$ 时不等式成立.

由（1）、（2）知对一切自然数 $n(n\ge1)$ 都有 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

3.n屬於N，$f(n)=9^{(n+1)}-8n-9$，試證f(n)必為64之倍數。

Sol

$n=1, f(1)= 81-8-9 =64$

當n=k時，$f(k)= 9^{(k+1)}-8k-9=64t$

當n=k+1時，

$f(k+1)= 9^{(k+2)}-8(k+1)-9$

$=9*9^{(k+1)}-8k-8-9$

$=[9^{(k+1)}-8k-9]+8*9^{(k+1)}-8$

$=64t+8[9^{(k+1)}-1]$

$=64t+8*(9-1)*[9^k+9^{(k-1)}+\cdots\cdots..+1]$

$=64t+64[9^k+9^{(k-1)}+\cdots\cdots..+1]$

故得證

4.n為正整數，$1/2[10^{(2n)} + 5 \times 12^n - 6]$定為正質數p之倍數。

Sol

(1)推測p之值?

n=1, $1/2\ (100+5\times 12 - 6)=11*7$

n=2, $1/2\ (10000+5\times 144 - 6)= 5357=11*487$

p=11

(2)請以數學歸納法，證明(1)之結果。

當n=k, $1/2[10^{(2k)} + 5 \times 12^k - 6] = 11\ t$

當n=k+1,

$1/2[10^{(2k+2)} + 5 \times 12^{(k+1)} - 6]$

$=1/2[100*10^{(2k)} + 12\times 5 \times 12^k - 6]$

$=1/2[12*10^{(2k)} + 12\times 5 \times 12^k - 6 +88*10^{(2k)}]$

$=12*(11t)+44*10^{(2k)}$

$=11[12*t+4*10^{(2k)}]$ 故得證

5.對於所有的n屬於N，2^(8n+1)-2^4n之個位數字為6。

Sol

n=1, 2^9-2^4=512-16=496

n=k, 2^(8k+1)-2^4k=10t+6(個位數字為6)

n=k, 2^(8k+1+8)-2^(4k+4)

=256*2^(8k+1)-16*2^(4k)

=[255*2^(8k+1)-15*2^(4k)]+[10t+6]

255*2^(8k+1)必為10的倍數

15*2^(4k)也必為10的倍數

故得證

6.對於所有的n屬於N，(n^5)/5+(n^4)/2+(n^3)/3-(n/30)必為自然數。

Sol

n=1,1/5 + 1/2 +1/3 – 1/30 =(6+15+10-1)/30=1

n=k, (k^5)/5+(k^4)/2+(k^3)/3-(k/30) = t (t為自然數)

n=k+1,

(k+1)^5 /5+(k+1)^4 /2+(k+1)^3 /3-(k+1) /30

=(k^5 + 5 k^4 + 10 k^3 + 10 K^2 + 5k +1)/5

+(k^4+4 k^3+6 k^2+4 k+1)/2 + (k^3+3k^2+3k+1)/3 -(k+1)/30

=t+(5 k^4 + 10 k^3 + 10 K^2 + 5k +1)/5

+(4 k^3+6 k^2+4 k+1)/2 + (3k^2+3k+1)/3 -1/30

=t+(k^4 + 2k^3 + 2K^2 + k)+(2k^3+3k^2+2k)/2 + (k^2+k)/3

+[1/5+1/2+1/3 -1/30]

=t+(k^4 + 2k^3 + 2K^2 + k)+(2k^3+3k^2+2k)/2 + (k^2+k)/3+1

故得證

7.比較2^n與n^2之大小，並將其結果，以數學歸納法證明之。

Sol

$2^1>1^2$

$2^2=2^2$　$2^3<3^2$　$2^4=4^2$　$2^5>5^2$　$2^6>6^2$

所以當$n>4$， $2^n>n^2$

$n=k$ ， $2^k > k^2$ $(k>4)$

$n=k+1$，

左式$2^{(k+1)}=2*2^k$　　右式$(k+1)^2=k^2+2k+1$

$2*2^k- (k^2+2k+1)=(2^k- k^2)+ [2^k- (2k+1)]$

因為$2^k> k^2$

所以$2^k- (2k+1)> k^2- (2k+1)= (k^2- 2k+1)-2=(k-1)^2-2$

$k>4$，$(k-1)^2-2>0$

所以$2*2^k- (k^2+2k+1)=(2^k- k^2)+ [2^k- (2k+1)]>0$

故得證

8.n為任意正整數，且a1，a2，a3，...，an均為正數 ，試證:(1+a1)(1+a2)(1+a3)...(1+an)>=1+a1+a2+a3+...+an。

Sol

n=1 ， 1+a1=1+a1 (合)

n=2 ， (1+a1) (1+a2)=1+a1+a2+a 1a 2 > 1+a1+a2(合)

設n=k亦合，則

(1+a1)(1+a2)(1+a3)...(1+ak)>=1+a1+a2+a3+...+ak

n=k+1

(1+a1)(1+a2)(1+a3)...(1+ak) (1+a(k+1))

=[(1+a1)(1+a2)(1+a3)...(1+ak)]+ [(1+a1)(1+a2)(1+a3)...(1+ak)] a(k+1)

(1+a1)(1+a2)(1+a3)...(1+ak)>=1+a1+a2+a3+...+ak

又[(1+a1)(1+a2)(1+a3)...(1+ak)]>=1

所以[(1+a1)(1+a2)(1+a3)...(1+ak)] a(k+1)> a(k+1)

(1+a1)(1+a2)(1+a3)...(1+ak) (1+a(k+1)) >=1+a1+a2+a3+...+ak+a(k+1)

故得證

9.證明：對所有正整數 以下不等式皆成立。

Sol $$\log_{10} 2 \le \log_{10}(n+1) - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \log_{10} k\right) \le \log_{10} 3.$$

原式與 $\log_{10} 2 \le \log_{10} \dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \le \log_{10} 3$ 相同

或與 $\left(\dfrac{n+1}{3}\right)^n \le n! \le \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$ 相同

(a)利用算n不等式

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n} \ge \sqrt[n]{n!}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \ge n! \text{ 成立}$$

(b)用歸納法證：

$$n! \geq \left(\frac{n+1}{3}\right)^n$$

(i) $n=1 \quad 1 \geq \frac{2}{3}$

(ii)設 $n=k$ 時： $k! \geq \left(\frac{k+1}{3}\right)^k$

則 $n=k+1$ 時

$$(k+1)! = (k+1)\cdot k! \geq (k+1)\cdot\left(\frac{k+1}{3}\right)^k = \frac{(k+1)^{k+1}}{3^k}$$

只需說明 $\frac{(k+1)^{k+1}}{3^k} \geq \frac{(k+2)^{k+1}}{3^{k+1}}$ 即可

但此式與 $3 \geq \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}$ 相同

再由 $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m\cdot\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \cdots + \frac{m!}{m!}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^m$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{m(m-1)} < 3$$

可知 $\frac{(k+1)^{k+1}}{3^k} \geq \left(\frac{k+2}{3}\right)^{k+1}$ $\quad\therefore n=k+1$時也成立

$$\therefore n! > \left(\frac{n+1}{3}\right)^n$$

不適合用數學歸納法的情況

Claim：任何兩匹馬顏色都是相同的

Fact：兩匹馬顏色是相同的

By Induction

Basic Step：$n=2$ 的時候成立

Inductive Step：假設 $n>=2$，並且對於 $n=x$ 是成立的，那麼對於 $n=x+1$ 因為此時 x 匹馬的顏色是相同的，因此 $x1$ 到 xn 的顏色是相同的，$x2$ 到 $x(n+1)$ 的顏色是相同的。並且由於 $n>=2$，兩個集合之間肯定有交集。根據等價關係的性質，x 和 $x(n+1)$ 的顏色也是相同的，因此 $n+1$ 匹馬的顏色是相同的。

對於任意的 n，n 匹馬的顏色是相同的。

Fact：世界上的馬的個數是某個自然數 m。

m 匹馬的顏色是相同的。

因此所有馬的顏色是相同的。

1. n=1時這個證明過程不成立，n>=2才可成立。
2. 從x=1的情況無法推出x=2的情況
3. 他只假設了n匹馬是同一種顏色，僅僅是從1開始算的時候，不代表n大於等於2的時候假設也能成立
4. 設x=n時有n匹馬為同一種顏色，當x=n+1時

   (1)只能得到:在n＋1匹馬中存在n匹馬為同一種顏色。

   (2)不能得到:在n＋1匹馬中任取n匹馬為同一種顏色。

   所以當你以某一種方式取其中n匹馬時，不能保證顏色相同。

THE END

參考資料

出處:

https://m.xuite.net/blog/wang620628/twblog/126094843

https://drive.google.com/file/d/0BziZx_DOVjhoaDNFdGNXay1PTGM/view?usp=sharing

https://www.getit01.com/p2017120343242/

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_06_4_01/page2.html

https://wenku.baidu.com/view/7f35b7a1aff8941ea76e58fafab069dc502247da