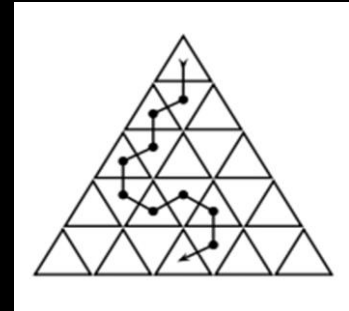


# 第三組

葉哲均  
林孟勳  
翁昌平  
周郁儒  
朱鈺暉

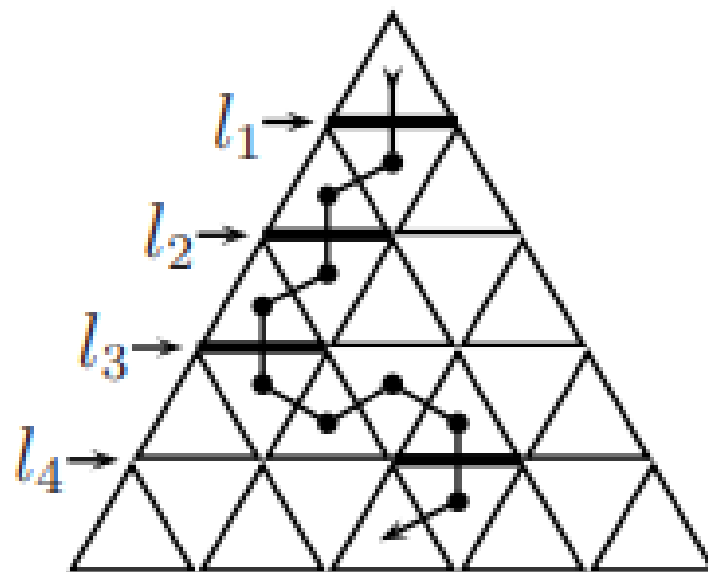
# 第一題410631124葉哲均

- 組合問題
- 考慮邊長為 $n$ 的等邊三角形，該三角形可分為單位三角形。設 $f(n)$ 是從上排三角形到底部中間三角形的路徑數，使路徑中的相鄰三角形共享一條公共邊，並且路徑永不向上移動（從較低的行到較高的行）或走到重覆的三角形。上面的圖是 $n=5$ 其中一個路徑。求出 $f(2005)$ 的值。



# 解答

- 我們將證明  $f(n) = (n - 1)!$ 。在三角形  $l_1, l_2, \dots$  中標記水平線段。由於路徑是從頂部三角形到底部的三角形，並且永遠不會向上傳播，因此該路徑必須與  $l_1, l_2, \dots, l_{n-1}$  中的每一個恰好相交一次。三角形中的對角線將  $l_k$  分為  $k$  個單位線段，並且路徑必須與每  $k$  段中的一個正好相交。因此，當路徑從第  $k$  行移動到第  $(k + 1)$  行時，路徑可能會跨越  $l_k$  的  $k$  個可能的線段。所以有  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) = (n - 1)!$  因此答案是  $f(2005) = (2005 - 1)! = 2004!$



# 第一題延伸題

- 可以把 $f(n)$ 改成是從上排三角形到底部中間三角形的路徑所經過最多的邊數，使路徑中的相鄰三角形共享一條公共邊，並且路徑永不向上移動（從較低的行到較高的行）或走到重覆的三角形。

## 第二題 410631129 林孟勳

- 代數問題

2. 令  $(a, b, c)$  為畢氏三元數，也就是說一個滿足  $a^2 + b^2 = c^2$  的正整數三元數。

a) 證明  $(c/a + c/b)^2 > 8$ 。

b) 證明不存在任何正整數  $n$  使得我們能夠找到畢氏三元數  $(a, b, c)$  滿足  $(c/a + c/b)^2 = n$ 。

# 第三題410631107翁昌平

有至少3個不同的點在一個圓的內部

(a)圓內隨便三個不同的點 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，你都可以找到圓上三個點 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 對應， $a$ 與 $A$ 的距離是最近的比起其他點， $b$ 與 $B$ 的距離是最近的比起其他點， $c$ 與 $C$ 的距離是最近的比起其他點。

(b)如果圓內的點是四個你就不能保證可以找出四個不同的點了。

幾何問題

## 第四題 周郁儒

### 幾何問題

4. Let ABC be a triangle with circumradius  $R$ , perimeter  $P$  and area  $K$ . Determine the maximum value of  $\frac{KP}{R^3}$ .

4. 一個三角形ABC，它的外接圓半徑 $R$ ，周長 $P$ ，面積 $K$   
請找出 $\frac{KP}{R^3}$ 之最大值



# 第五題410631114朱鈺暉

- 數論主題
- $(a, b, c)$  為三個正整數形成的有序數對，若  $(a, b, c)$  滿足  $a \leq b \leq c$ ,  $\gcd(a, b, c) = 1$ , 且  $a^n + b^n + c^n$  能被  $a + b + c$  整除，那這樣的有序數對  $(a, b, c)$  稱作  $n$ -powerful。舉例來說， $(1, 2, 2)$  就是 5-powerful。

- (a)若 $n \geq 1$ ，找出所有滿足 $n$ -powerful這樣條件的有序數對 $(a, b, c)$
- (b)找出同時是2004-powerful 也是 2005-powerful，但不是2007- powerful的有序數對 $(a, b, c)$