

第四組數思報告

組員:411031115數一甲蘇勇齊

411031105數一甲梁順維

410931144數二甲藍立翔

410931217數二乙林宜加

410831108數三甲黃暉傑

410831222數三乙許光碩

第一題(幾何)

- ▶ Let ABC be a triangle, and let D be a point on side BC . A line through D intersects side AB at X and ray AC at Y . The circumcircle of triangle BXD intersects the circumcircle ω of triangle ABC again at point $Z \neq B$. The lines ZD and ZY intersect ω again at V and W , respectively. Prove that $AB = VW$.
- ▶ 設 ABC 為三角形，設 D 為 BC 邊上的一點。一條穿過 D 的線在 X 處與 AB 邊相交，且在 Y 處與射線 AC 相交。三角形 BXD 的外接圓與三角形 ABC 的外接圓 ω 在點 $Z \neq B$ 處再次相交。線 ZD 和 ZY 分別在 V 和 W 處再次與 ω 相交。證明 $AB=VW$

第二題(代數)

- ▶ Let $S = \{2, 3, 4, \dots\}$ denote the set of integers that are greater than or equal to 2. Does there exist a function $f : S \rightarrow S$ such that $f(a)f(b) = f(a^2b^2)$ for all $a, b \in S$ with $a \neq b$?
- ▶ 令 $S = \{2, 3, 4, \dots\}$ 表示大於或等於 2 的整數集。是否存在函數 $f : S \rightarrow S$ 使得 $f(a)f(b) = f(a^2b^2)$ 對於所有 $a, b \in S$ 且 $a \neq b$?

第二題(詳解)

- ▶ 我們證明不存在這樣的函數。對於 S 的任意元素 a 和 b ，選擇一個大於它們的整數 c 。由於 $bc > a$ 和 $c > b$ ，
- ▶ 我們有 $f(a^4 b^4 c^4) = f(a^2)f(b^2 c^2) = f(a^2)f(b)f(c)$ 。
- ▶ 此外，由於 $ac > b$ 和 $c > a$ ，我們有
- ▶ $f(a^4 b^4 c^4) = f(b^2)f(a^2 c^2) = f(b^2)f(a)f(c)$ 。
- ▶ 比較這兩個方程，我們發現對於 S 的所有元素 a 和 b ，
- ▶ $f(a^2)f(b) = f(b^2)f(a) \Rightarrow f(a^2)/f(a) = f(b^2)/f(b)$
- ▶ 因此存在一個正有理數 k 使得 $f(a^2) = kf(a)$ ----- (1)
- ▶ 對於所有 $a \in S$ 。將其代入函數方程產生 $f(ab) = (f(a)f(b))/k$ ，對於所有 $a, b \in S$ 且 $a \neq b$ 。----- (2)
- ▶ 現在將函數方程與方程 (1) 和 (2) 結合得到
- ▶ $f(a)f(a^2) = f(a^6) = (f(a)f(a^5))/k = (f(a)f(a)f(a^4))/k^2 = (f(a)f(a)f(a^2))/k$ ，對於所有 $a \in S$ 。
- ▶ 對於所有的 $a \in S$ ，有 $f(a) = k$ 。將 $a = 2$ 和 $b = 3$ 代入函數方程 產生 $k = 1$ ，但是 $1 \notin S$ 因此我們沒有解。

第二題(相似題)

- Let $S = \{2, 3, 4, \dots\}$ denote the set of integers that are greater than or equal to 2. Does there exist a function $f : S \rightarrow S$ such that $f(a)f(b) = f(a^4 b^4)$ for all $a, b \in S$ with $a \neq b$?

第三題(數論)

- ▶ A sequence of real numbers a_0, a_1, \dots is said to be good if the following three conditions hold. (i) The value of a_0 is a positive integer. (ii) For each non-negative integer i we have $a_{i+1} = 2a_i + 1$ or $a_{i+1} = a_i / a_i + 2$ (iii) There exists a positive integer k such that $a_k = 2014$. Find the smallest positive integer n such that there exists a good sequence a_0, a_1, \dots of real numbers with the property that $a_n = 2014$
- ▶ 實數序列 a_0, a_1, \dots 如果滿足以下三個條件，則稱其為好。(i) a_0 的值為正整數。(ii) 對於每個非負整數 i ，我們有 $a_{i+1} = 2a_i + 1$ 或 $a_{i+1} = a_i / a_i + 2$ (iii) 存在一個正整數 k ，使得 $a_k = 2014$ 。找到最小的正整數 n ，使得存在一個良好的實數序列 a_0, a_1, \dots ，其性質為 $a_n = 2014$

第四題(數論)

- ▶ Let n be a positive integer. Consider $2n$ distinct lines on the plane, no two of which are parallel. Of the $2n$ lines, n are colored blue, the other n are colored red. Let B be the set of all points on the plane that lie on at least one blue line, and R the set of all points on the plane that lie on at least one red line. Prove that there exists a circle that intersects B in exactly $2n - 1$ points, and also intersects R in exactly $2n - 1$ points.
- ▶ 令 n 為正整數。考慮平面上 $2n$ 條不同的線，其中沒有兩條平行。在 $2n$ 行中， n 為藍色，其他 n 為紅色。設 B 是平面上至少位於一條藍線上的所有點的集合， R 是平面上至少位於一條紅線上的所有點的集合。證明存在一個圓與 B 正好相交 $2n - 1$ 個點，也與 R 相交恰好 $2n - 1$ 個點。

第五題(數論)

- Determine all sequences a_0, a_1, a_2, \dots of positive integers with $a_0 \geq 2015$ such that for all integers $n \geq 1$: (i) a_{n+2} is divisible by a_n ; (ii) $|s_{n+1} - (n+1)a_n| = 1$, where $s_{n+1} = a_{n+1} - a_n + a_{n-1} - \dots + (-1)^{n+1} a_0$.
- 確定所有序列 a_0, a_1, a_2, \dots $a_0 \geq 2015$ 的正整數使得對於所有整數 $n \geq 1$: (i) a_{n+2} 可被 a_n 整除; (ii) $|s_{n+1} - (n+1)a_n| = 1$, 其中 $s_{n+1} = a_{n+1} - a_n + a_{n-1} - \dots + (-1)^{n+1} a_0$.

工作分配

- ▶ 411031115數一甲蘇勇齊 整理題目 討論
- ▶ 411031105數一甲梁順維 整理題目 討論
- ▶ 410931144數二甲藍立翔 製作PPT 討論
- ▶ 410931217數二乙林宜加 整理題目 討論
- ▶ 410831108數三甲黃暉傑 報告 討論
- ▶ 410831222數三乙許光碩 整理題目 討論