

音數小子

第七組

411031108 魏碩廷 411031119 陳柏諺 411031137 游智宇
411031139 張天傑 411031216 許仲勛



目錄

CONTENTS

1. 動機

MOTIVATION

2. 音樂與數學

MUSIC and MATH

3. 關於音樂界中數學...

WHAT MATH WE CAN LEARN FROM MUSIC

4. 參考文獻

REFERENCES





動機

MOTIVATION

生活無處不是音樂，這可以顯示出本組的人究竟有多愛音樂，雖然對於樂理可能根本一竄不通，但對於聽歌或唱歌亦或是奏樂可能還是滿腔熱忱，不過我們還是可以透過我們對於數學的感覺去試著理解其內容，所以我們就藉由這次數思報告，來好好探究音樂中的數學，不管是理論上的符合還是應用上的巧合，我們都會去探尋，來發覺其中的奧妙。





音樂與數學

MUSIC and MATH

 $\Lambda^k V$

0

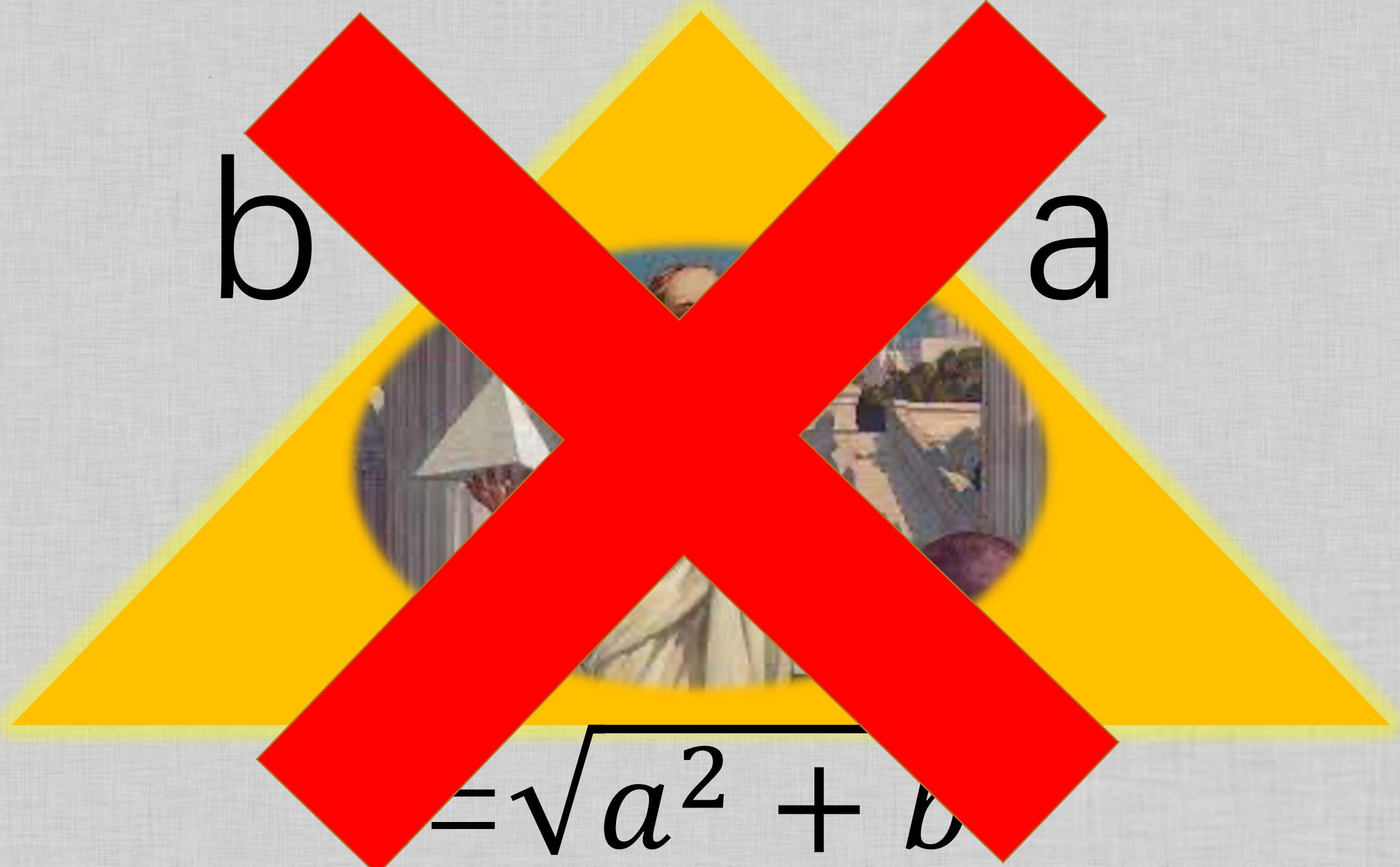
赫爾曼·京特·格拉斯曼
Hermann Günther Graßmann



奧古斯塔斯·德摩根

Augustus De Morgan





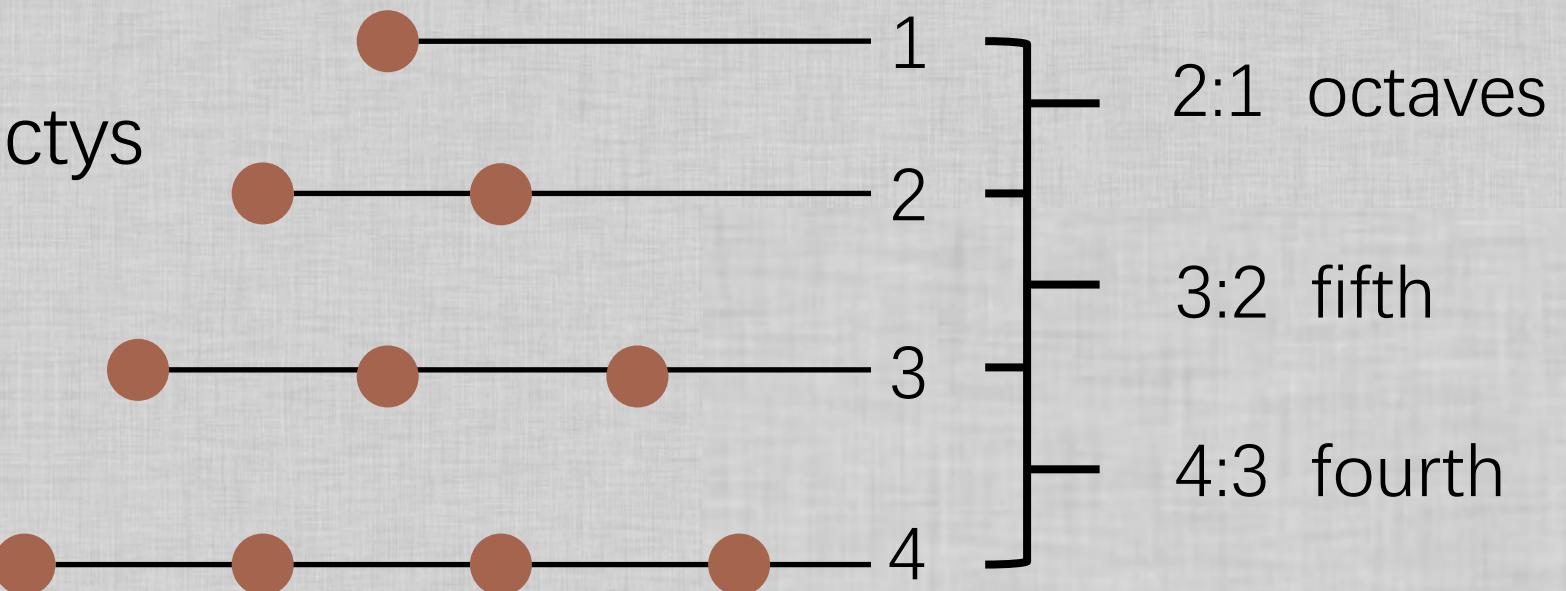
b

a

$$= \sqrt{a^2 + b}$$



tetractys



和漢洋十二音律對照表

風鍵 琴盤	白鍵										黑鍵 八鍵	
西音 洋名	C	♯C D	D	♯D E	E	F	♯F G	G	♯G A	A	♯A B	B
唱音 歌名	ハ	嬰ハ 變ニ	ニ	嬰ニ 變ホ	ホ	ヘ	嬰ヘ 變ト	ト	嬰ト 變イ	イ	嬰イ 變ロ	ロ
長階 音名	1		2		3	4		5		6		7
短階 音名	6 ・		7 ・	1		2		3	4		5	
雅律 樂名	神仙	上無	壹越	斷金	平調	勝絕	下無	双調	鳩鐘	黃鐘	鸞鐘	盤涉
俗律 樂名	四本	五本	六本	七本	八本	九本	十本	十一本	十二本	十三本 一本	二本	三本
古律 樂名	無射	應鐘	黃鐘	大呂	太簇	夾鐘	姑洗	仲呂	蕤賓	林鐘	夷則	南呂
明律 樂名	夾鐘	姑洗	仲呂	蕤賓	林鐘	夷則	南呂	無射	應鐘	黃鐘	大呂	太簇
明階 樂名	本書音符	乙七	上一		尺二		工三		凡四	合六	四五	六
新階 樂名	四五六		乙七	上一		尺二		工三		凡四	合六	五

約翰·塞巴斯蒂安·巴哈

Johann Sebastian Bach



B a c h

$$2+1+3+9=14$$

皮耶·布萊茲

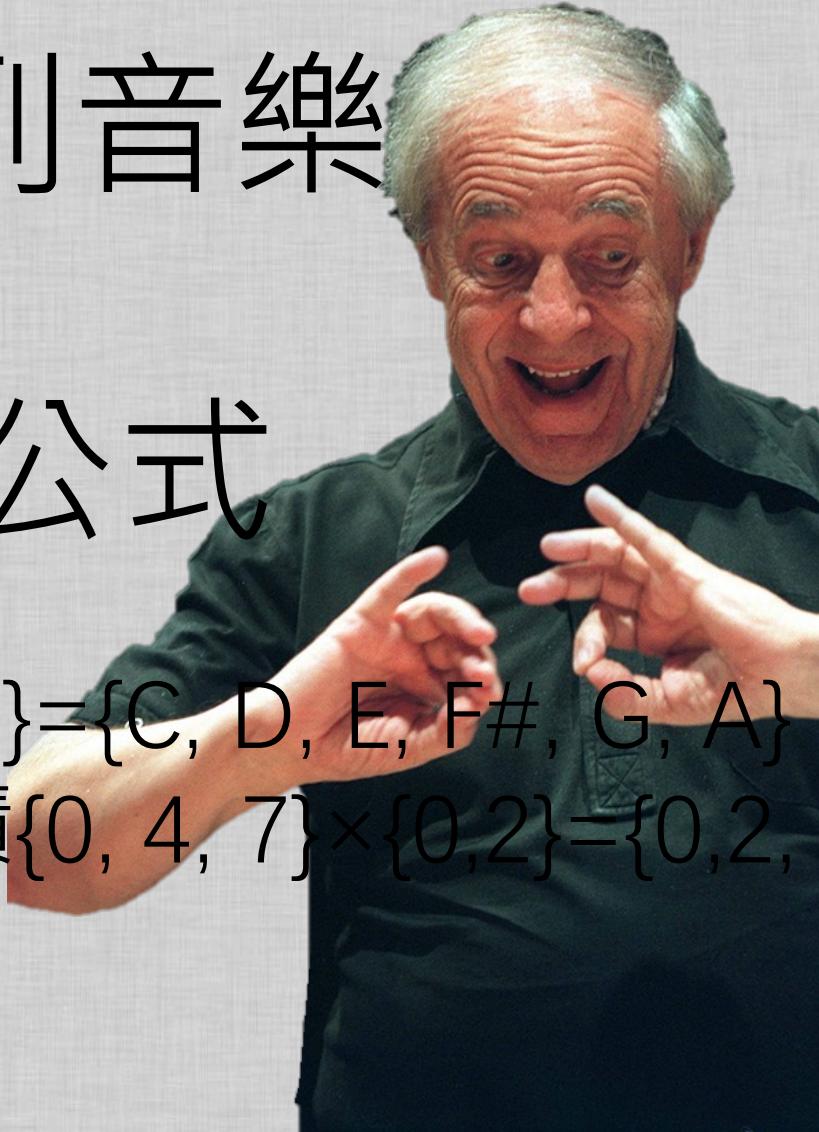
Pierre Louis Joseph Boulez

序列音樂

作曲公式

$$\{C, E, G\} \times \{C, D\} = \{C, D, E, F\#, G, A\}$$

$$\text{對應笛卡爾積 } \{0, 4, 7\} \times \{0, 2\} = \{0, 2, 4, 6, 7, 9\}$$



伊阿尼斯·澤納基斯

Ιάννης Ξενάκης





關於音樂界中數學...

WHAT MATH WE CAN LEARN FROM MUSIC



音階譜昔

♪ 畢氏音階

Definition

- 兩個不同音高的音所構成的音程，它們的頻率關係必然是3的N次方除以2的M次方或是2的N次方除以3的M次方，當中M和N皆為正整數。

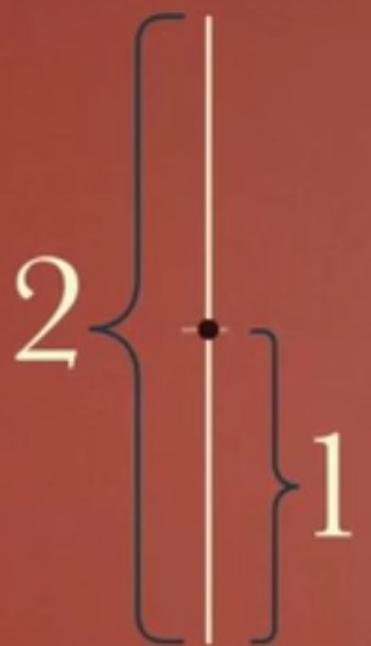


音階	n	1 Do	2 Do [#]	3 Re	4 Re [#]	5 Mi	6 Fa	7 Fa [#]	8 So	9 So [#]	10 La	11 La [#]	12 Si
低音	頻率	262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	464	494
低音	簡譜	1		2		3	4		5		6		7
中音	頻率	523	554	587	622	659	698	740	784	831	880	932	988
中音	簡譜	1		2		3	4		5		6		7
高音	頻率	1046	1109	1175	1245	1318	1397	1480	1568	1661	1760	1865	1976
高音	簡譜	i		2		3	4		5		6		7

表 1 C 調音階·頻率對照表

相對於鋼琴的鍵盤，如圖 4 所示：





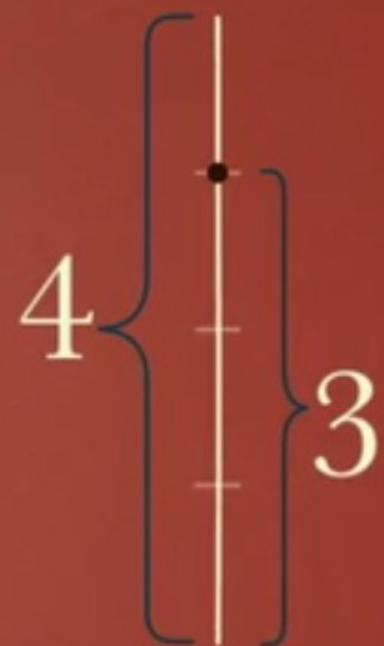
Octave

2:1



Fifth

3:2



Fourth

4:3

NOVA

音階	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		Do	Do [#]	Re	Re [#]	Mi	Fa	Fa [#]	So	So [#]	La	La [#]	Si
低音	頻率	262	277	294	31	330	49	370	392	41	440	64	494
低音	簡譜	1		2		3	4		5		6		7
中音	頻率	523	554	587	622	659	698	740	784	831	880	932	988
中音	簡譜	1		2		3	4		5		6		7
高音	頻率	1046	1109	1175	125	1397	1480	1568	1661	1760	1865	1976	
高音	簡譜	i		2		3	4		5		6		7

440 4 22
330 3 31

表 1 C 調 - 頻率對照表

相對於鋼琴的鍵盤，如圖 4 所示：



音階	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		Do	Do [#]	Re	Re [#]	Mi	Fa	Fa [#]	So	So [#]	La	La [#]	Si
低音	頻率	262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	464	494
	簡譜	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
中音	頻率	523	554	587	622	659	698	740	784	830	880	932	988
	簡譜	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
高音	頻率	1046	1109	1174	1245	1318	1397	1480	1568	1651	1760	1865	1976
	簡譜	i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

表 1 C 調音階·頻率對照表

相對於鋼琴的音高
如圖 4 所示：



音階	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		Do	Do [#]	Re	Re [#]	Mi	Fa	Fa [#]	So	So [#]	La	La [#]	Si
低音 頻率	262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	464	494	
	簡譜	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
中音 頻率	523	554	587	622	659	698	730	761	800	880	932	988	
	簡譜	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
高音 頻率	1046	1109	1175	1250	1318	1397	1480	1568	1661	1760	1865	1976	
	簡譜	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

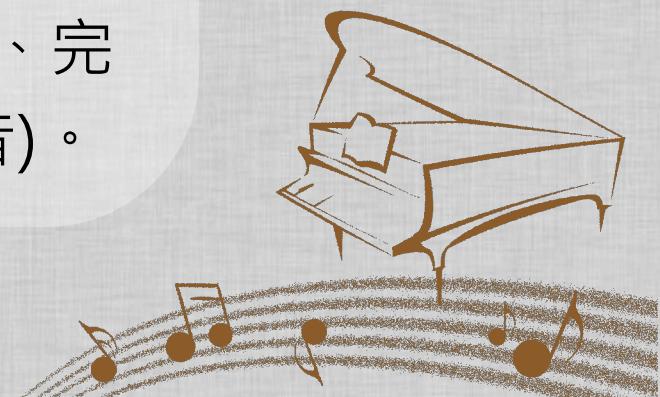
表 1 C 調音階·頻率對照表

相對於鋼琴的鍵盤，如圖 4 所示：



♪ 畢氏音階歷史

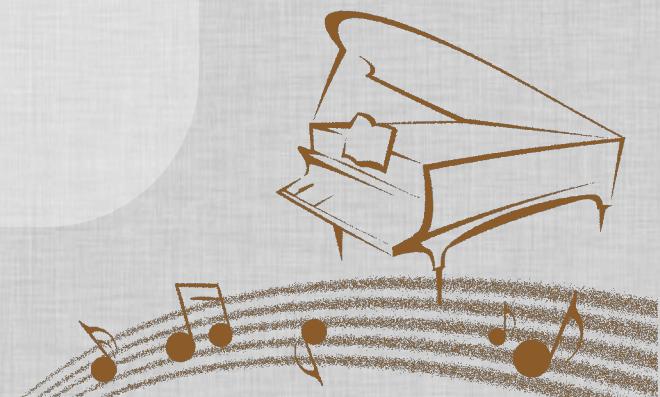
- 傳說畢氏某天經過一間打鐵舖，聽到打鐵聲竟然相當悅耳，便好奇心大發，當場做起研究。由於他聰明絕頂，很快發現了其中的奧秘。原來四名鐵匠所用的鎚子，重量分別是6, 8, 9, 12(斤)——簡單整數比 於是他趕緊衝回家，改用琴弦來做實驗，很快就歸納出類似的規律：只要兩條琴弦的長度成簡單整數比，例如：4:3, 3:2, 2:1，發出的聲音就會和諧悅耳。用現代術語來說，這三組音程分別是完全四度(相差5個半音)、完全五度(相差7個半音)以及完全八度(相差12個半音)。



9:十二平均律(主流的律式)

Definition

- 將一個八度平均分成十二等份，每等分稱為半音。八度音的頻率分為十二等分，即是分為十二項的等比數列，也就是每個音的頻率為前一個音的2的12次方根 $^{12}\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{12}} = 1.059 \dots$



音階	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		Do	Do [#]	Re	Re [#]	Mi	Fa	Fa [#]	So	So [#]	La	La [#]	Si
低音	頻率	262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	464	494
	簡譜	1		2		3	4		5		6		7
中音	頻率	523	554	587	622	659	698	740	784	831	880	932	988
	簡譜	1		2		3	4		5		6		7
高音	頻率	1046	1109	1175	1245	1318	1397	1480	1568	1661	1760	1865	1976
	簡譜	i		2		3	4		5		6		7

表 1 C 調音階·頻率對照表

相對於鋼琴的鍵盤，如圖 4 所示：



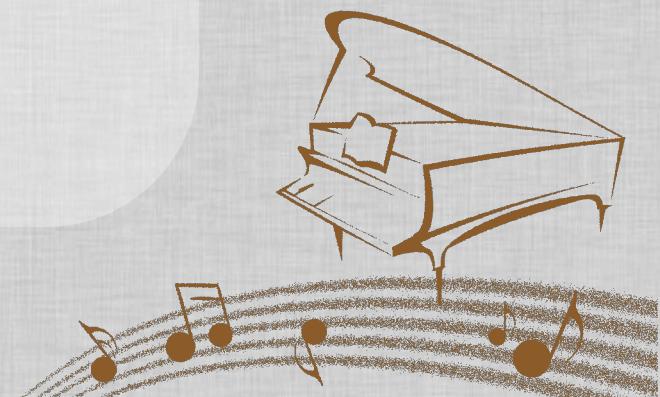
9:十二平均律歷史

- 現代的鋼琴也是以十二平均律來調律定音的。巴赫的《平均律鍵盤曲集》更是完美地詮釋了平均律的優越性和轉調的完美，被譽為鋼琴文獻的舊約聖經。其實十二平均律的確立最早是來自中國，很可能是通過東西文化的交流傳到了西方，被西方稱之為中國的第五大發明。



9: 十二平均律歷史

- 在歷史文獻中，最早詳細記錄求律方法的是春秋時期的《管子》，管仲（管子）為齊桓公「九合諸侯，一匡天下」，而且精通音樂。他所記載的求律方法稱為「三分損益法」，根據「三分損益法」得來的十二律就是「三分損益法十二律」。而西方最早使用類似方法求律的是希臘的數學家畢達哥拉斯，比管仲晚了一百四十多年。



中國音名	三分損益	西方音名	十二平均律	三分損益與十二平均律之偏差 (%)
黃鐘	81	C	81	-
林鐘	54	G	54.0610	0.11
太簇	72	D	72.1628	0.23
南呂	48	A	48.1629	0.34
姑洗	64	E	64.2898	0.45
應鐘	42.6667	B	42.9083	0.56
蕤賓	56.8889	F♯	57.2757	0.68
大呂	75.8519	C♯	76.4538	0.79
夷則	50.5679	G♯	51.0268	0.90
夾鐘	67.4239	D♯	68.1126	1.01
無射	44.9492	A♯	45.4597	1.12
仲呂	59.9323	F	60.6814	1.23

♪ 音階中的費氏數列



- 八個是白鍵，五個是黑鍵。
- 第三和第五音符創建了基本和弦的基礎
- 主音是第五個音符，它也是組成八度音階的所有13個音符的第八個音符。

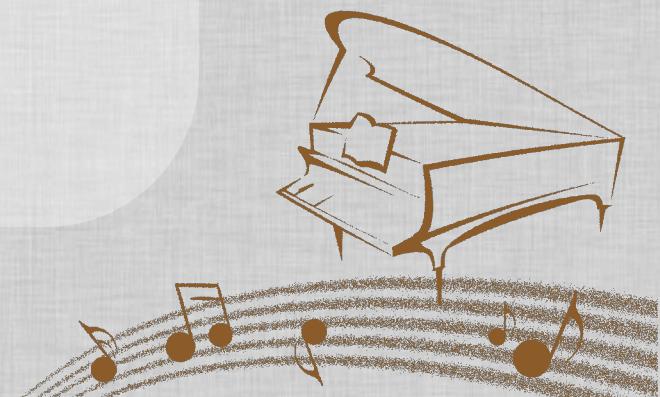
9: 音階中的費氏數列



- 八個音13個音符 $\rightarrow 8/13 = 0.61538\dots$ 近似黃金比例
- 3、5、8、13接氏費是數列

9: 費波那契數列與音樂

音樂是以八度音階為基礎。在鋼琴中，是由八個白鍵及五個黑鍵，總共13個鍵來代表。像大六度的E音與C音，震動頻率比為0.25倍，偏離真正的黃金比率僅0.006966。



費波那契數的強大

揚聲器的線



斯特拉迪瓦里小提琴

薩克斯管吹嘴





樂譜曲集作

音符

長度	音符	休止符
1	全音符	
1/2	2分音符	
1/4	4分音符	
1/8	8分音符	
1/16	16分音符	
1/32	32分音符	

音符

$$\circ = \circ + \text{♩}$$

$$\text{♩} = \text{♩} + \text{♩}$$

$$\text{♪} = \text{♪} + \text{♪}$$

$$\text{♪} = \text{♪} + \text{♪}$$

$$\text{█} = \text{█} + \text{█}$$

$$\text{█} = \text{█} + \{\}$$

$$\{\cdot = \{\cdot + \gamma$$

$$\gamma = \gamma + \gamma$$

譜曲創作

- 貝多芬的音樂生涯中大部分都是聾的!!!
- 開頭從一連串綿長的三連音開始，將相同音型的D大調三和弦（D、F[#]、A）拉出來檢視，從上列數學程式中可以得出三顆音符的正弦波，其組合出來的動聽和弦稱為「協和音程」。

Adagio sostenuto

sempre *pp* e senza sordini

The musical score consists of two staves. The top staff is for the treble clef (G-clef) and the bottom staff is for the bass clef (F-clef). Both staves are in common time (indicated by 'C'). The key signature has three sharps (F#-C-G). The score shows a series of measures starting with a sustained note followed by a series of eighth-note chords. The first chord is a D major triad (D-F#-A) played with a 3-2-1 fingering pattern. Subsequent chords are also D major triads, each with a different fingering pattern (3-3-3, 3-3-3, 1-3-5, 1-3-5).



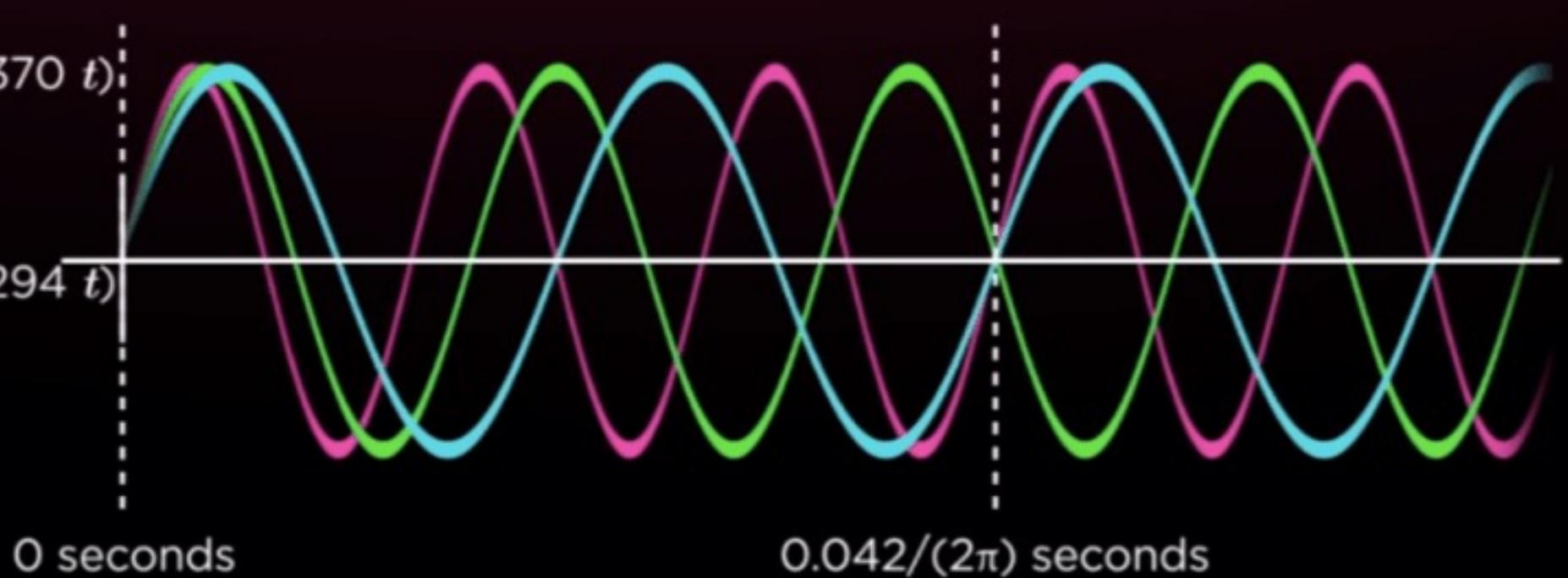
$$y(t) = \sin(2\pi f t)$$

A₄ $f = 440 \text{ Hz}$
 $y(t) = \sin(2\pi 440 t)$

$f = \text{frequency (in Hz)}$
 $t = \text{time (in seconds)}$

F#₄ $f \approx 370 \text{ Hz}$
 $y(t) = \sin(2\pi 370 t)$

D₄ $f \approx 294 \text{ Hz}$
 $y(t) = \sin(2\pi 294 t)$



Consonance



Dissonance



0 seconds

$0.042/(2\pi)$ seconds



♪ 主歌比例(根據53屆科展統計)

2008音樂風雲榜榜單前10名

編號	歌名	歌手	至副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合 黃金分割
1	沒有如果	梁靜茹	01:35	02:34	0.617	0
2	王妃	蕭敬騰	01:01	01:40	0.610	0
3	心牆	郭靜	01:00	01:36	0.625	0
4	壞人	方炯鑑	01:26	02:22	0.606	0
5	情歌	梁靜茹	01:11	01:45	0.617	0
6	妥協	蔡依林	01:06	01:47	0.617	0
7	如果我變成回憶	Tank	01:36	02:36	0.613	0
8	搞笑	羅志祥	01:11	01:58	0.602	0
9	別再為他流淚	梁靜茹	00:52	01:24	0.619	0
10	我愛他	叮噹	01:20	02:09	0.620	0

2009音樂風雲榜榜單前10名

編號	歌名	歌手	至副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合 黃金分割
1	說好的幸福呢	周杰倫	01:12	01:56	0.621	0
2	下一個天亮	郭靜	01:08	01:51	0.613	0
3	下雨天	南拳媽媽	01:00	01:37	0.619	0
4	終於說出口	小宇	01:01	01:39	0.614	0
5	擦肩而過	李聖傑	01:08	01:54	0.618	0
6	為你寫詩	吳克群	01:11	01:50	0.623	0
7	稻香	周杰倫	00:49	01:21	0.605	0
8	原諒我	蕭敬騰	00:54	01:30	0.600	0
9	會呼吸的痛	梁靜茹	01:06	01:46	0.623	0
10	我不配	周杰倫	01:24	02:17	0.613	0

2010、11音樂風雲榜榜單前10名

編號	歌名	歌手	至副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合 黃金分割
1	洋蔥	丁噹	00:59	01:33	0.634	0
2	沒關係	吳克羣	00:41	01:12	0.569	0
3	我們沒有在一起	劉若英	00:54	01:30	0.600	0
4	我是一隻小小鳥	丁噹	00:57	01:51	0.514	X
5	沒那麼簡單	黃小琥	01:26	02:09	0.666	0
6	天后	陳勢安	00:53	01:21	0.654	0
7	指望	郁可唯	00:30	00:58	0.517	X
8	好的事情	顏爵	00:52	01:21	0.642	0
9	那些年	胡夏	00:44	01:08	0.647	0
10	末班車	蕭煌奇	00:41	01:07	0.612	0

100%

100%

80%

主歌比例(根據53屆科展統計)

校園名歌

編號	歌名	歌手	至副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合 黃金分割
1	外婆的澎湖灣	潘安邦	00:43	01:10	0.614	O
2	拜訪春天	施孝榮	00:16	00:31	0.516	X
3	秋蟬	楊芳儀/徐曉青	00:48	01:19	0.608	O
4	捉泥鰌	包美聖	00:19	00:30	0.633	O
5	龍的傳人	李建復	01:21	01:37	0.835	X
6	讓我們看雲去	陳明詔	00:24	00:39	0.615	O
7	如果	合唱	00:24	00:41	0.585	O
8	浮雲遊子	陳明詔	00:28	00:45	0.622	O

75%

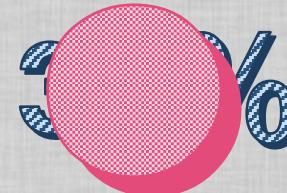
西洋經典

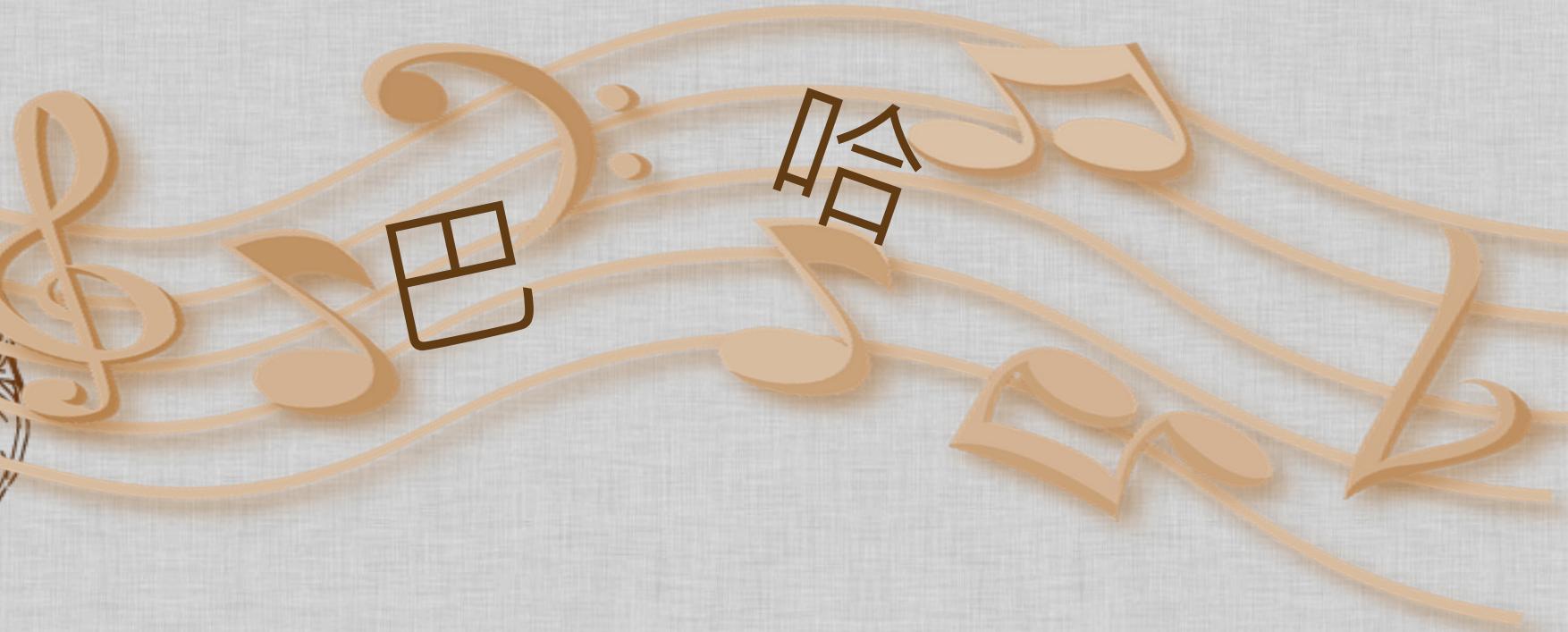
編號	歌名	到副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合 黃金分割
1	I Will Always Love You	00:43	01:10	0.614	O
2	Somewhere In Time	00:56	01:20	0.700	X
3	The Rose	02:08	02:49	0.757	X
4	Unchained Melody	01:03	01:46	0.594	O
5	My Heart Will Go On	00:58	01:35	0.611	O
6	Somewhere Out There	01:51	02:43	0.681	X
7	Edelweiss	00:43	01:10	0.614	O
8	Today	00:55	01:24	0.655	O
9	Take me home country road	00:33	00:54	0.611	O
10	All I ask of you(歌劇魅影)	00:37	01:00	0.617	O

70%

主歌比例(自行統計)

排名	歌曲	歌手	主歌時長	第一次結束	比值	符合分割
1	愛情你比我想的閣較偉大	茄子蛋	0:00:00.00	02:05	0.816	X
2	在這座城市遺失了你	吉五人	0:00:00.00	02:29	0.677852	X
3	我很好騙	火力火車	0:00:00.00	01:58	0.533898	X
4	四季予你'	程響	0:00:00.00	01:41	0.722772	X
5	阿拉斯加海灣	蔡恩爾	0:00:00.53	01:26	0.616279	O
6	因為你 所以我	五月天	0:01:20.00	01:47	0.747664	X
7	白月光與朱砂痣	大籽	0:01:06.00	01:28	0.75	X
8	失重前幸福	艾薇	0:00:59.00	01:28	0.670455	X
9	如果能幸福	周興哲	0:01:29.00	02:22	0.626761	O
10	星辰大海	黃霄雲	0:00:46.00	01:11	0.647887	O







螃蟹卡農

The musical score consists of three staves of music for two voices. The top staff features a soprano melody with eighth and sixteenth-note patterns. The middle staff features a basso continuo line with eighth-note chords. The bottom staff features another basso continuo line with eighth-note chords. The music is in common time, with a key signature of one flat.

倒

轉



Canon Trias Harmonica a 8 BWV 1072



對
稱
延
—
拍





Goldberg Canons

1. Canon Simplex (Simple Canon)

A musical score for two voices, labeled '1.' and '2.'. Both staves are in bass clef, 2/4 time, and A major (two sharps). The top staff has a measure of rest followed by a dotted half note, then eighth notes on the second and third beats. The bottom staff has a measure of rest followed by eighth notes on the second and third beats. A vertical red bar highlights the fourth beat of both measures, where both voices play a dotted half note.

對
稱



3. Both previous Canons simultaneously
the subject followed by it's inversion

A musical score consisting of two staves. The top staff is in treble clef, 2/4 time, and G major (indicated by a 'G' and a sharp sign). The bottom staff is in bass clef, 2/4 time, and A major (indicated by an 'A' and a sharp sign). Both staves begin with a dotted half note. A thick red vertical bar highlights the second note of each staff, which is a quarter note. The music continues with eighth notes.

延後四拍

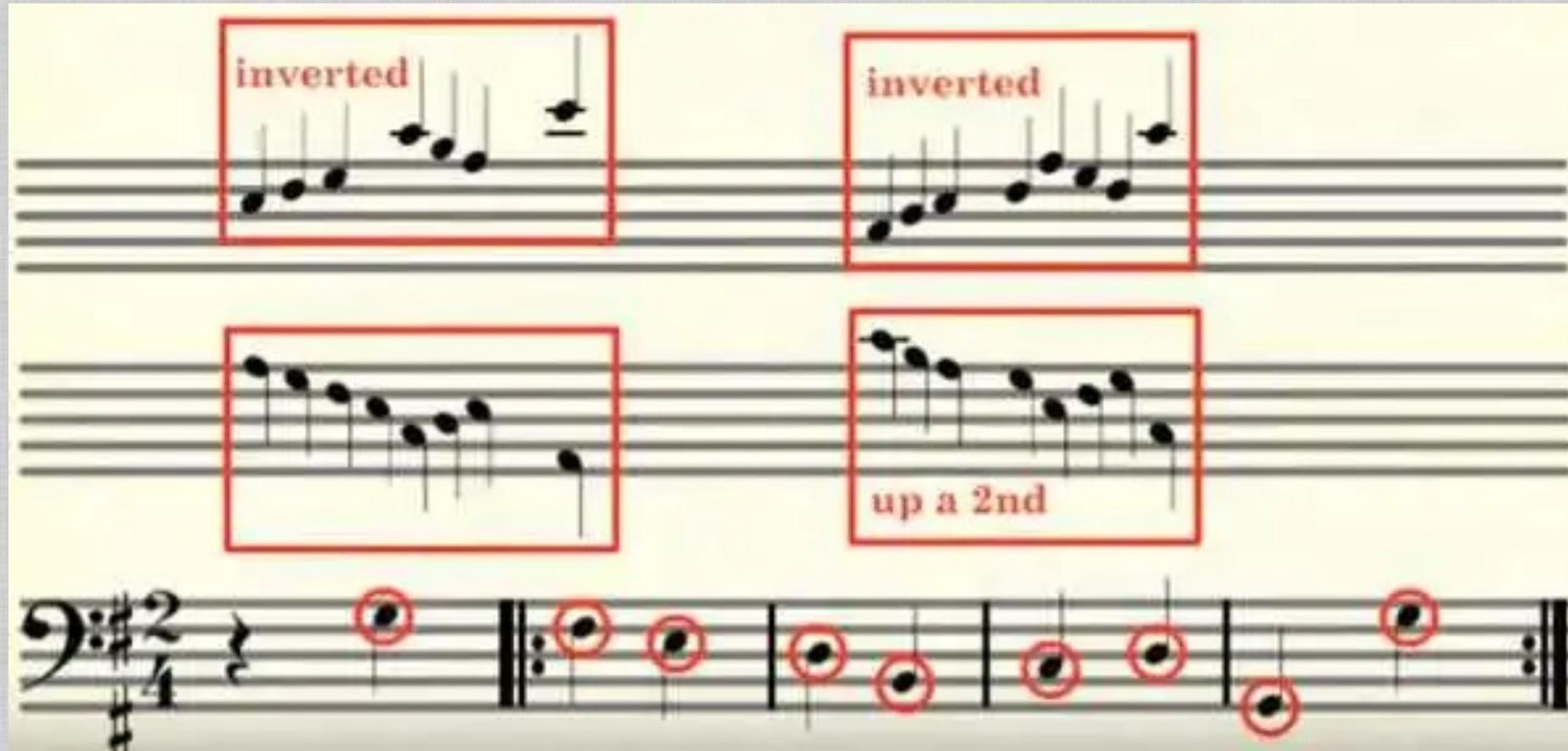


5. Double Canon in 4 parts

A musical score for a double canon in four parts. The score consists of four staves, each with a different clef (Treble, Alto, Bass, and another Bass) and a key signature of one sharp. The time signature is 2/4. A vertical red bar highlights a specific measure where the music is identical across all four voices. The notes are primarily eighth and sixteenth notes, with some quarter notes and rests.

對稱 延後四拍





對稱 延後一拍 升調 加速



7. The same. In 3 parts.

The image shows three staves of musical notation, each consisting of five horizontal lines. The top staff is in treble clef, the middle staff is in alto clef, and the bottom staff is in bass clef. The key signature is two sharps (F# and C#). The time signature is 2/4. A thick red vertical bar is positioned in the center of the page, extending from the top staff down to the bottom staff. The music consists of measures separated by vertical bar lines. The top staff has a measure starting with a quarter note followed by a sixteenth-note pattern, a measure with a sixteenth-note pattern, a measure with a sixteenth-note pattern, a measure with a eighth-note followed by a sixteenth-note pattern, and a measure with a sixteenth-note pattern. The middle staff has a measure starting with a eighth-note followed by a sixteenth-note pattern, a measure with a eighth-note followed by a sixteenth-note pattern, a measure with a eighth-note followed by a sixteenth-note pattern, and a measure with a eighth-note followed by a sixteenth-note pattern. The bottom staff has a measure starting with a quarter note followed by a half note, a measure with a quarter note followed by a half note, a measure with a quarter note followed by a half note, and a measure with a quarter note followed by a half note.

9. Canon in Unison after the 16th note in 3 parts.



對稱 延後一個16分音符

12. Double Canon over the said fundamental notes.
(in five parts)

The image shows a musical score for a double canon in five parts. The score consists of two systems of music. The first system starts with a treble clef, a key signature of one sharp (F#), and a common time signature. It features two staves: the top staff has a sixteenth-note pattern (A, B, C, D, E, F) with a red box labeled "inverted" underneath; the bottom staff has an eighth-note pattern (A, B, C, D, E, F). The second system begins with a bass clef, a key signature of one sharp (F#), and a common time signature. It also features two staves: the top staff has a sixteenth-note pattern (A, B, C, D, E, F) with a red box labeled "inverted" underneath; the bottom staff has an eighth-note pattern (A, B, C, D, E, F). A bass staff at the bottom provides harmonic support with sustained notes. Red circles highlight specific notes in the bass staff, corresponding to the notes played in the upper staves.

Scretto

12. Double Canon over the said fundamental notes.
(in five parts)

The musical score consists of five staves, each with a key signature of one sharp (F#) and a common time signature. A vertical red line serves as a visual cue, positioned at the end of the first measure of each staff.

- Top Staff:** Treble clef. Measures 1-2: Sixteenth-note patterns. Measure 3: Rest. Measures 4-5: Sixteenth-note patterns.
- Second Staff:** Treble clef. Measures 1-2: Sixteenth-note patterns. Measure 3: Rest. Measures 4-5: Sixteenth-note patterns.
- Third Staff:** Treble clef. Measures 1-2: Eighth-note patterns. Measure 3: Rest. Measures 4-5: Eighth-note patterns.
- Fourth Staff:** Treble clef. Measures 1-2: Eighth-note patterns. Measure 3: Rest. Measures 4-5: Eighth-note patterns.
- Bottom Staff:** Bass clef. Measures 1-2: Whole notes. Measure 3: Rest. Measures 4-5: Whole notes.

13. Triple Canon in 6 parts

A musical score for a triple canon in six parts. The score consists of six staves, each with a different clef (Treble, Alto, Bass, and three types of C-clefs) and key signature (one sharp). The music is divided into measures by vertical bar lines. A thick red vertical line highlights the third measure of the first staff, indicating the point where the canon begins. The notes are primarily eighth and sixteenth notes, with some quarter notes.

對稱 延後四派



14. Canon in 4 parts. by Augmentation and Diminution

The musical score consists of four staves of music, each in common time (indicated by '2/4') and major key (indicated by a 'C' with a sharp sign). The first two staves are in treble clef, while the last two are in bass clef. The music is divided into measures by vertical bar lines. The notation includes various note heads and stems, some with diagonal lines through them, suggesting augmentation or diminution. The score is presented on a light-colored background.

對稱 擷取

14. Canon in 4 parts. by Augmentation and Diminution

Normal Speed ➔



2x Slower ➔



4x Slower ➔



8x Slower ➔



降速



巴哈樂曲中的數學公式

$$g(t) = Af(t - c) + B$$

其中 $f(t)$ 為原本的音樂函數

A, B, c 為實數

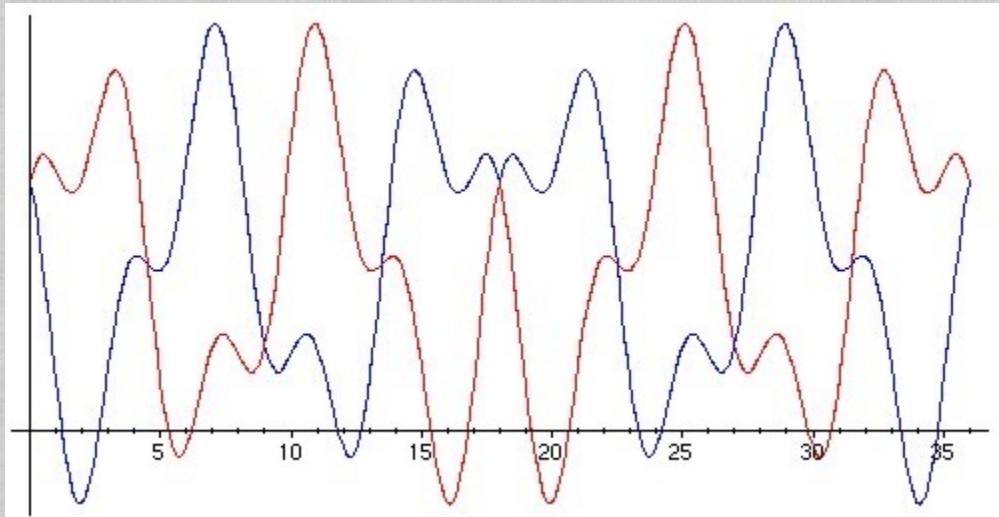
A : 波的幅度

B : 波的高低

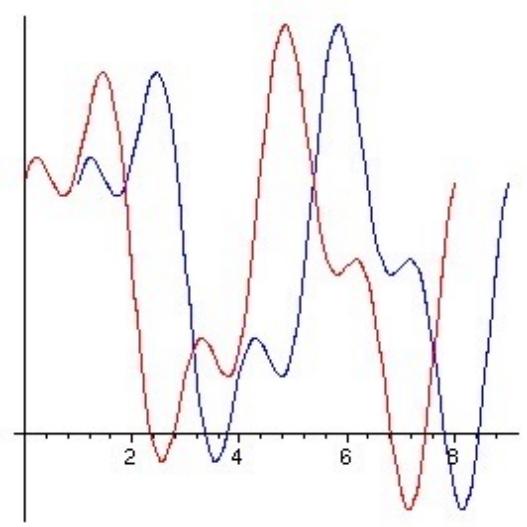
c : 快/慢幾拍

t : 時間函數

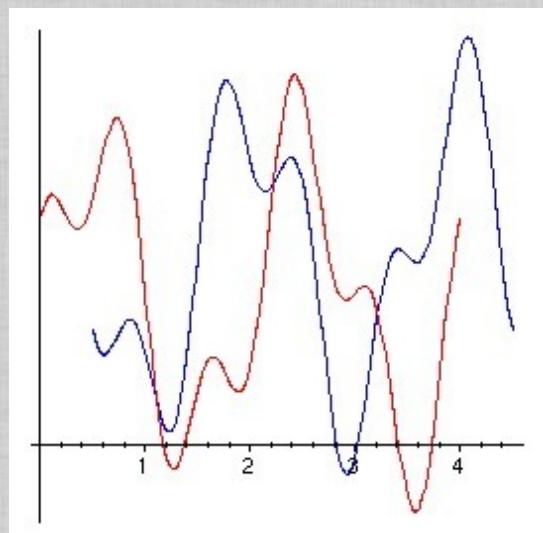




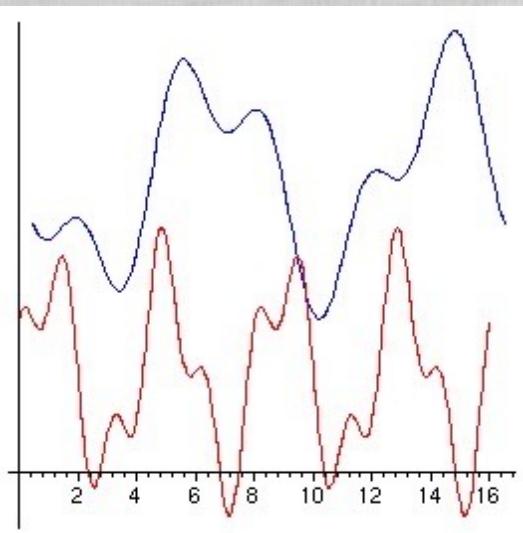
$$g(t) = f(18-t)$$



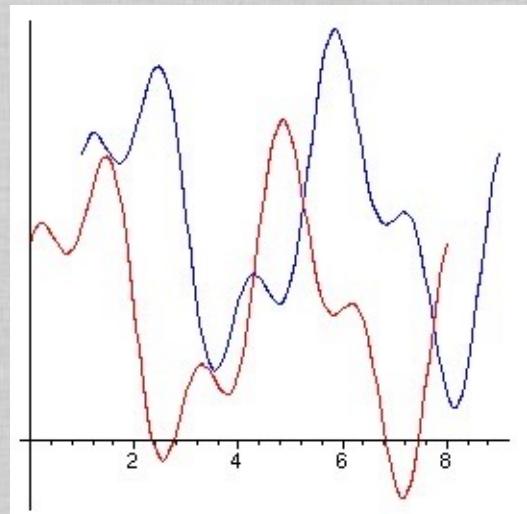
$$g(t) = f(t-1)$$



$$g(t) = -f(t-0.5) + K$$



$$g(t) = -f\left(\frac{t-0.5}{2}\right) + L$$



$$g(t) = f(t-1) + H$$



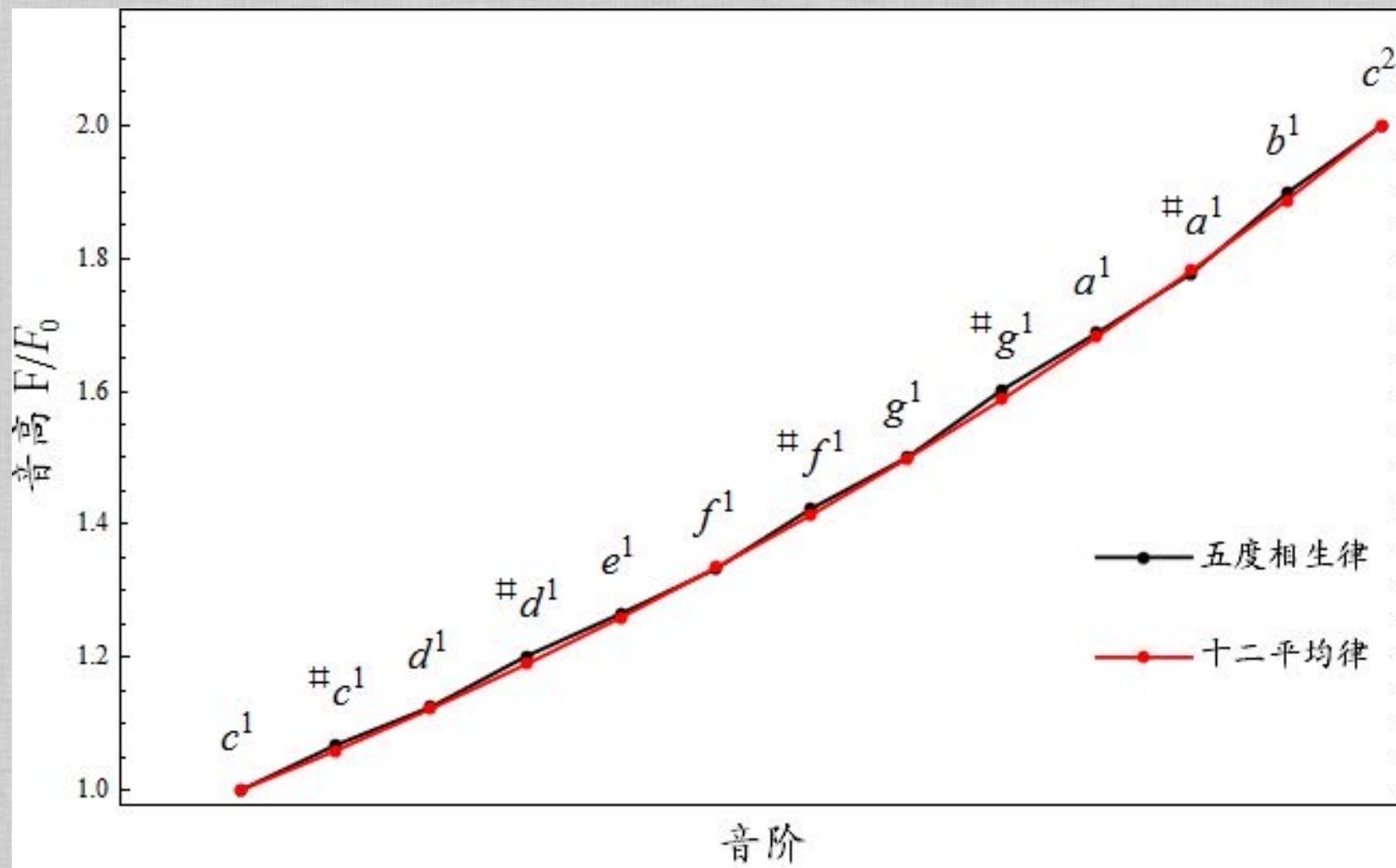
C大調二部創意曲

C大调二部创意曲
No.1 J.S.巴赫

Allegro



平均律鍵盤曲集





參 考 文 獻

REFERENCES



參考網址

- Mathematicians and Music:

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Archibald_music_1/

- 赫爾曼·京特·格拉斯曼:

<https://zh.wikipedia.org/zhtw/%E8%B5%AB%E7%88%BE%E6%9B%BC%C2%B7%E6%A0%BC%E6%8B%89%E6%96%AF%E6%9B%BC>

- 外代數:

<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%A4%96%E4%BB%A3%E6%95%B0>

- 奧古斯塔斯·德摩根:

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%A5%A7%E5%8F%A4%E6%96%AF%E5%A1%94%E6%96%AF%C2%B7%E5%BE%B7%E6%91%A9%E6%A0%B9>

- Short History of the Relation Between Mathematics and Music:

https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-42937-3_2?noAccess=true

- Mathematics and Music:

<https://www.simplifyingtheory.com/math-in-music/>

- 音樂中的中國古代數學之美:

<https://ppfocus.com/0/cua436cdb.html>

- 十二律:

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%81%E4%BA%8C%E5%BE%8B>

- 巴赫作曲的秘密竟與數學有關？

<https://kknews.cc/zh-tw/news/v2l3zn2.html>

- 約翰·塞巴斯蒂安·巴哈:

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%BA%A6%E7%BF%B0%C2%B7E5%A1%9E%E5%B7%B4%E6%96%AF%E8%92%82%E5%AE%89%C2%B7E5%B7%B4%E8%B5%AB>

- 皮耶·布列茲:

<https://zh.wikipedia.org/zhtw/%E7%9A%AE%E5%9F%83%E5%BD%94%C2%B7E5%B8%83%E8%8E%B1%E5%85%B9>

- 法國作曲家布列茲去世：他改變了整個音樂界的生態環境：

https://m.thepaper.cn/newsDetail_forward_1417793

- 序列主義:

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BA%8F%E5%88%97%E4%B8%BB%E4%B9%89>

- 古典音樂與數學:

<https://read.muzikair.com/us/articles/8e212f14-de1c-424c-82dd-61527e4533d2>

- 伊阿尼斯·澤納基斯:

<https://zh.wikipedia.org/zhtw/%E4%BC%8A%E9%98%BF%E5%B0%BC%E6%96%AF%C2%B7%E6%B3%BD%E7%BA%B3%E5%9F%BA%E6%96%AF>

- 畢氏音程:

<https://zh.wikipedia.org/zhtw/%E7%95%A2%E6%B0%8F%E9%9F%B3%E7%A8%8B>

- Ancient Math & Music:

<https://www.pbslearningmedia.org/resource/nvmm-math-mathmusic/ancient-math-music/>

- 畢氏音階:

<https://elarinet900.pixnet.net/blog/post/39214465>

- 弦樂泛音到底怎麼回事兒

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/59274917>

- 原來莫扎特的音樂秘訣在這裡——神奇的斐波那契數列

<https://kknews.cc/news/q6pmoy8.html>

- 貝多芬其實是數學天才？音樂與數學的巧妙關係

<https://dq.yam.com/post/8854>

- Music and Math. The Genius of Beethoven.

<https://www.youtube.com/watch?v=M51Bm9sNazM>

- ResearchGate-What relation exists between mathematics and music?

https://www.researchgate.net/post/What_relation_exists_between_mathematics_and_music

- 圓周率之歌：用音樂呈現數學之美

<https://www.youtube.com/watch?v=kV1t9b0D4To>

- 巴赫音樂中的數學性是怎麼體現的？

<https://www.getit01.com/p20180131839791973/>

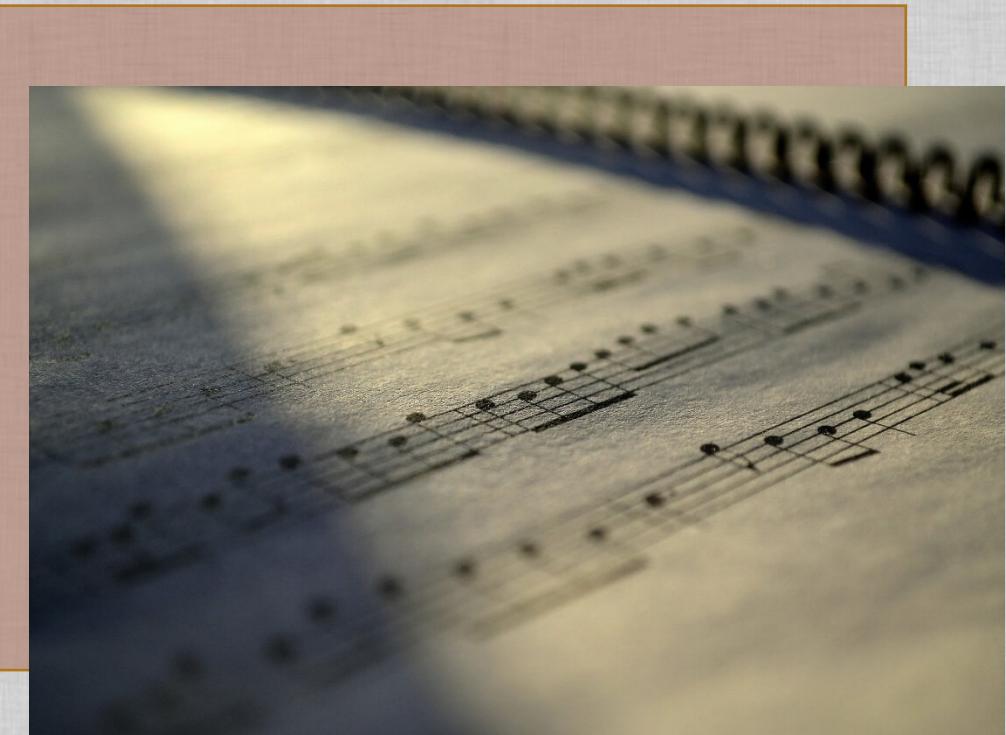


音影資料



- 圓周率之歌
- 螃蟹卡農
- BWV1072
- BWV1087
- 貓咪樂譜
- gerubach
- 十二平均律 C大調前奏曲

Art is an act of giving an aesthetic form to these elements. Art in math is to form thoughts to solve problems.



數學解題方法期末報告
第七組
《音數小子》

組員

411031108 魏碩廷
411031119 陳柏諺
411031137 游智宇
411031139 張天傑
411031216 許仲勛

本次報告聊解了音樂中的數學美
音樂無所不在，美就在身邊
那數學就跟空氣跟細菌一樣
遍佈在我們的四周
或許有一天

作詞曲方式不再是音樂人哼著哼著就出來了
有可能是對著電腦輸入感受等一下就出來了
或許電腦更注重旋律間的美
更注重詞的聲調是否會符合旋律
這一切都是在運用音樂中的數學

