

# 數學解題方法期末報告 說明書

組別：第一組

報告名稱：幾何界新形狀—SCUTOID

組員： 410631111 數四甲 林佳儀  
410631135 數四甲 孔儀馨  
410631226 數四乙 白元亦  
410731238 數三乙 呂若慈  
410731239 數三乙 江晏淳

## 壹、發現緣由

### 一、偶然的發現

西班牙塞維亞大學、巴伯羅德歐拉維德大學和美國理海大學這三所研。究。機構的人員在研究上皮組織時，發現「scutoid」這種形狀。

### 二、電腦模擬

研究人員利用電腦模擬並且預測哪些細胞在保持平面或彎曲下，彼此間的接觸最有效，結果電腦出現了一個長得像角柱的形狀，但又不是角柱。

### 三、顯微鏡觀察

研究人員利用顯微鏡觀察果蠅唾液腺細胞以及斑馬魚細胞後發現，牠們的細胞組織都長得跟這種叫不出名字的新形狀一樣。於是，研究人員認為這種形狀的細胞組織存在於任何彎曲的上皮組織，連人類也不例外。

### 四、盾片狀(Scutoid)的命名由來

研究人員認為甲蟲背上的「中胸小盾片（scutellum）」，與新立體的形狀十分相似，便命名為盾柱體。

## 貳、盾片狀簡介

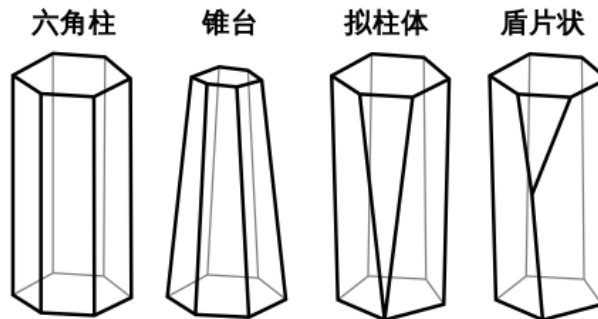
### 一、盾片狀介紹

盾片狀（英語：Scutoid），是一種存在於上下兩個平行表面之間的立體幾何形狀，其兩平行表面（以及它們之間的所有其他平行面）的邊各自圍成多邊形，此兩表面之間至少存在一個頂點，且上下兩個多邊形的頂點通過曲線或Y字形線來連接。盾片狀的兩個面之間至少存在一個頂點，但盾片狀的面不一定是凸面，所以多個盾片狀可以緊密接合在一起，從而填滿兩個平行表面之間的所有空間。

### 二、盾柱體與一般柱體的差異

1. **六角柱**：在幾何學中，六角柱又稱六角稜柱，是一種底面為六邊形的柱體。所有六角柱都有 8 個面，18 個邊和 12 個頂點。六角柱是屬於正多邊形柱體。
2. **錐台**：在幾何學中，錐台又稱平截頭體，指的是圓錐或稜錐被兩個平行平面所截後，位於兩個平行平面之間的立體。根據所截的是圓錐還是稜錐，可分為圓台與稜台。錐台是屬於其他凸多面體。

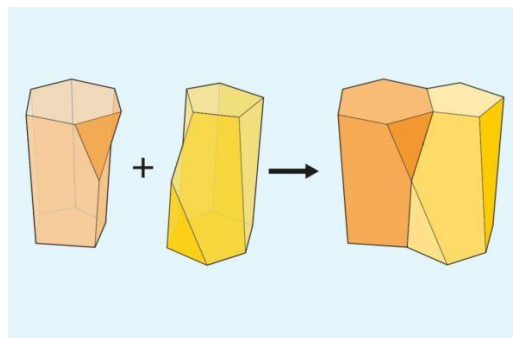
3. **擬柱體**：擬柱體是指所有的頂點都在兩個平行平面中的多面體。擬柱體的側面可是是三角形、梯形或平行四邊形。擬柱體包含範圍很廣，一般的柱體、稜台、帳塔、球檯等都屬於擬柱體。
4. **盾片狀**：盾片狀通常可以一般化地描述為介於錐台和擬柱體之間的混合幾何體。盾片狀與錐台相同，在各類凸多面體中歸類於其他凸多面體。



### 三、盾片狀的特性

盾片狀是一種加入中層頂點的擬柱體。這個多出來的頂點讓最終形成幾何體上的部分平面變成了曲面(如圖一)。這意味著盾片狀不是一種多面體，因為它並非所有面都是平面。把一個盾柱體與另一個顛倒的盾柱體拼在一起，兩個立體便能無縫連接，且無限數量的盾柱體更可以不斷合攏延伸。對於創造了或發現了盾片狀的計算生物學家來說，這種幾何體的的關鍵屬性在於，它可以讓自身與其他幾何對象（如錐台）結合以構成上皮細胞的立體堆積結構。

塞維亞大學研究人員艾思古德洛 (Luisma Escudero) 說：「上皮細胞就像建造器官的積木，它們就像能組成動物的樂高。」細胞在特定情況下會採用盾片狀形狀來排列。在上皮組織細胞中，細胞可以變成盾片狀的形狀，以促進組織彎曲，這對於發育中的器官的形成至關重要。通過包裹成“盾片狀”，細胞可以讓能耗最小，並最大限度地提高它們包裹在一起的穩定性。



(圖一)

# 參、肥皂泡泡理論

## 一、普拉圖定律：

### 參考資料及網址：

1. 維基百科。普拉托定律。

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%99%AE%E6%8B%89%E6%89%98%E5%AE%9A%E5%BE%8B>

2. 陳諾、黃宗威(2019)。美的冒泡。工程技術類投稿。

<https://www.shs.edu.tw/works/essay/2019/10/2019103008110060.pdf>

3. 以泡泡世界為主題之科普活動，設計與推廣。

<http://ntcuir.ntcu.edu.tw/bitstream/987654321/7090/1/NSC094101.pdf>



普拉圖是最早系統化研究泡泡力學的科學家，他在大量的皂液膜實驗觀測之基礎上總結而出四條經驗定律，分別為：

- (1) 泡泡膜附著在鐵絲框架(或其他封閉的結構體)上，具有平滑的結構。
- (2) 以曲線或同一頂點相接的泡泡膜，其面與面之間夾角相等；兩個泡泡膜靠在一起成一個面時夾角為  $180^\circ$ ，若有三個表面互相接觸時夾角為  $120^\circ$ ，四個泡泡靠在一起時夾角也是由三個表面相接觸且夾角是  $120^\circ$ 。
- (3) 泡泡膜之間三個表面沿著一條平滑的曲線相連。
- (4) 泡泡膜之間六個平面形成四條曲線在一個頂點相接。

如果皂液膜的結構不遵循普拉圖定律，那麼這個泡膜結構是不穩定的，它將很快破滅或改變結構，最終變為符合普拉托定律的結構。

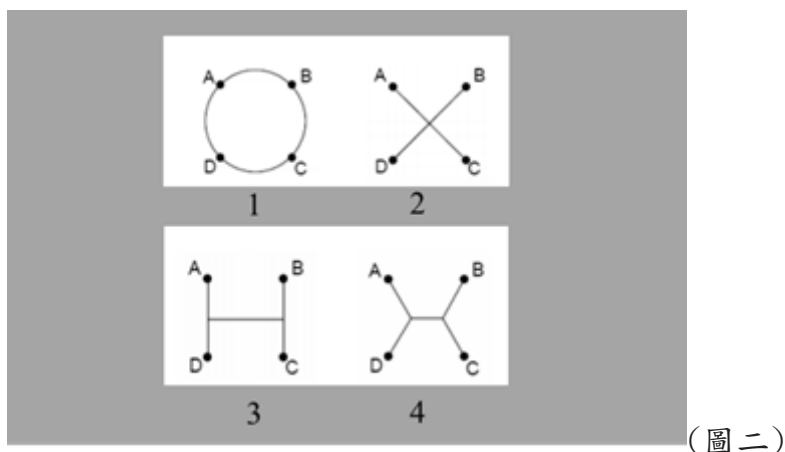
## 二、普拉圖問題：

### 參考資料及網址：

1. 傅宗政、陳正平 (2011)。冒泡的美。科學發展月刊，29(11)，788-796。  
[http://experiment.phys.nchu.edu.tw/EZphysics/ex\\_h/788-796.pdf](http://experiment.phys.nchu.edu.tw/EZphysics/ex_h/788-796.pdf)

2. 陳諾、黃宗威(2019)。美的冒泡。工程技術類投稿。  
<https://www.shs.edu.tw/works/essay/2019/10/2019103008110060.pdf>

Q: 下列四種路線圖形，哪一圖形的總路線長最短呢？



我們以平面上多點之間最短連接路徑的例子來說，以圖二平面上有兩兩相同距離的四個城市，假設要在 A、B、C、D 四個城市間建連通道路，且要使其達成「最短總路徑」，則總路徑最短的是圖 4 的連接法，可以發現其中每個線段的交角都是  $120^\circ$ ，而「對於其中所生成的任一節點而言，其連結的三條線段均有任兩線段之夾角為  $120^\circ$  的現象」，即為普拉圖定律的其中之一條，這些現象皆顯示了泡泡膜表面積傾向最小化的原理。

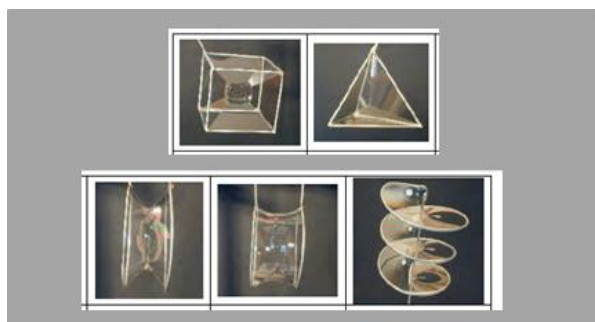
## 三、三維泡膜與盾柱狀：

### 參考資料及網址：

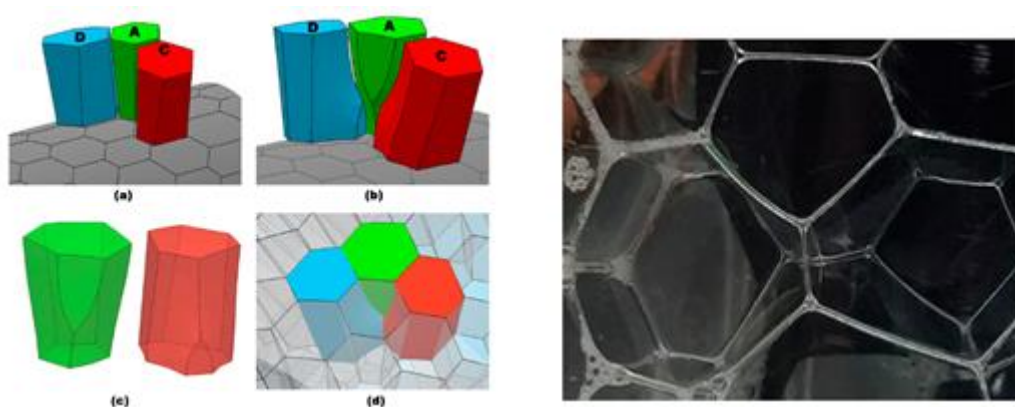
1. Scutoids cells discovered in soap bubbles <https://physicsworld.com/a/scutoid-cells-discovered-in-soap-bubbles/>

2. Demonstration and interpretation of 'scutoids' cells formed in a quasi-2D soap froth  
<https://doi.org/10.1080/09500839.2018.1552806>

泡泡膜表面積傾向最小化的原理也同樣適用於三度立體空間，將鐵絲做成各種呈現封閉空間的立體形狀，接著，將鐵絲完全浸入泡泡水中，拿起就可以看到因應不同空間自動形成最小表面積的泡泡膜，泡泡膜會因「惰性」而呈現各種不同的形態，自然界中有許多生物的形態和生長方式，例如放射蟲的矽結構，甚至人類紅血球的形狀都和肥皂膜的幾何原理有關。



回到任意的立體泡泡膜，當它們任意相接時，符合表面積傾向最小化原理，形成表面形狀緊密貼合的平面，並且成為各個柱狀的泡泡，即成為盾柱狀，而可自由平滑彎曲移動。



## 四、補充:水立方:

### 參考資料及網址:

1. 哲學雜誌快報，開爾文問題。<http://www.luo Zhuang-edu.cn/jy kx/82053.html>

中國國家游泳中心水立方，其建築外表面亦是以泡泡堆疊而成，其中所使用的原理，其實就是使用了泡泡膜表面積傾向最小化的性質，讓整體的建築架構能更加輕盈，省去不必要的重量，節省更多的資源。

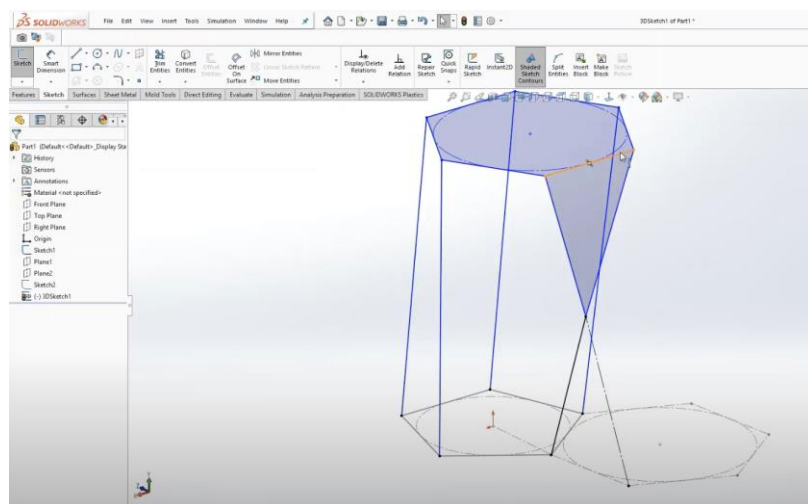


## 肆、動手做做看

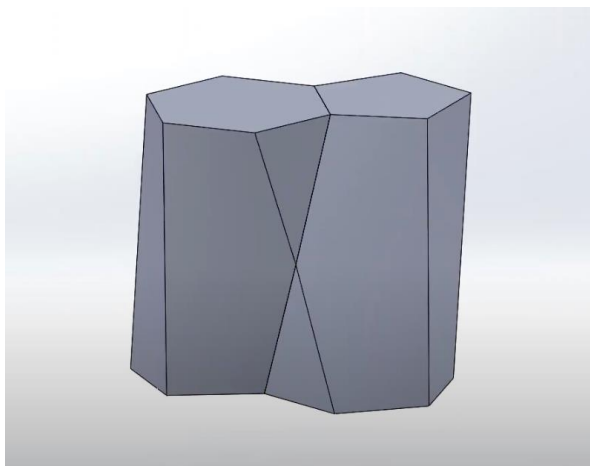
### 一、GGB 實作盾柱狀

參考網址：<https://www.youtube.com/watch?v=BmrRRZFV5U&t=2>

同學可以結合大三上的幾何學課程，或是自行學習 GGB 軟體，製作盾柱狀，從而探討盾柱狀的構造與組成原理。







## 二、盾柱狀穩固與堅固程度之探討

前面的部分有提到**盾片狀(scutoid)**是個非常穩固的組合，更是**人類細胞的組合方式**。因此，本小節參考「彰化縣 108 年第 59 屆中小學科學展覽會-幾何界的新成員，比較盾片狀與長方體穩固、堅固程度之研究」，希望可以利用科學的方式證明盾片狀與長方體相較起來更加的穩固與堅固。

### (一) 摘要

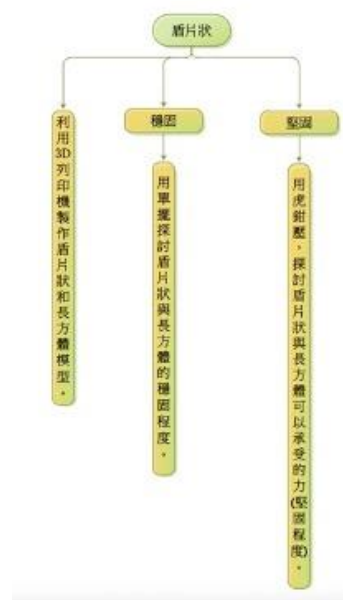
利用 **3D 列印機**製作模型，用**單擺**不同角度的擺角驗證盾片狀和長方體模型的穩固程度。**自製儀器虎鉗加上量角器**，利用盾片狀和長方體不同的堆疊方式測試堅固程度。

實驗顯示：

- (1)盾片狀比長方體穩固。
- (2) 盾片狀較堅固。
- (3)盾片狀較易變形，但不易破。

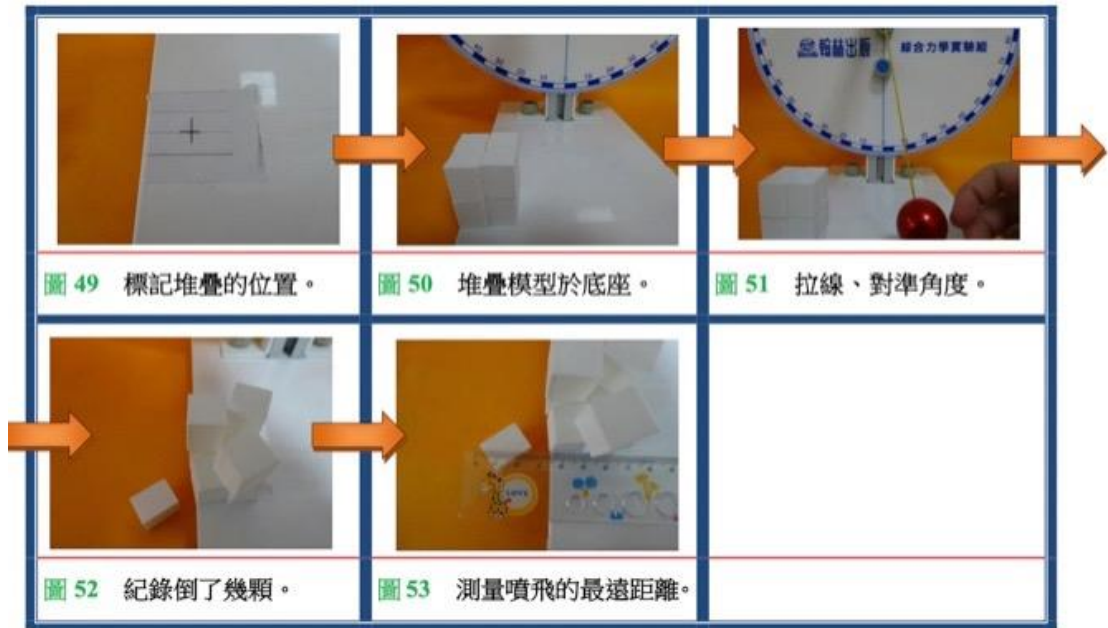
### (二) 研究過程與方法

❖ 探討盾片狀與長方體的穩固程度。



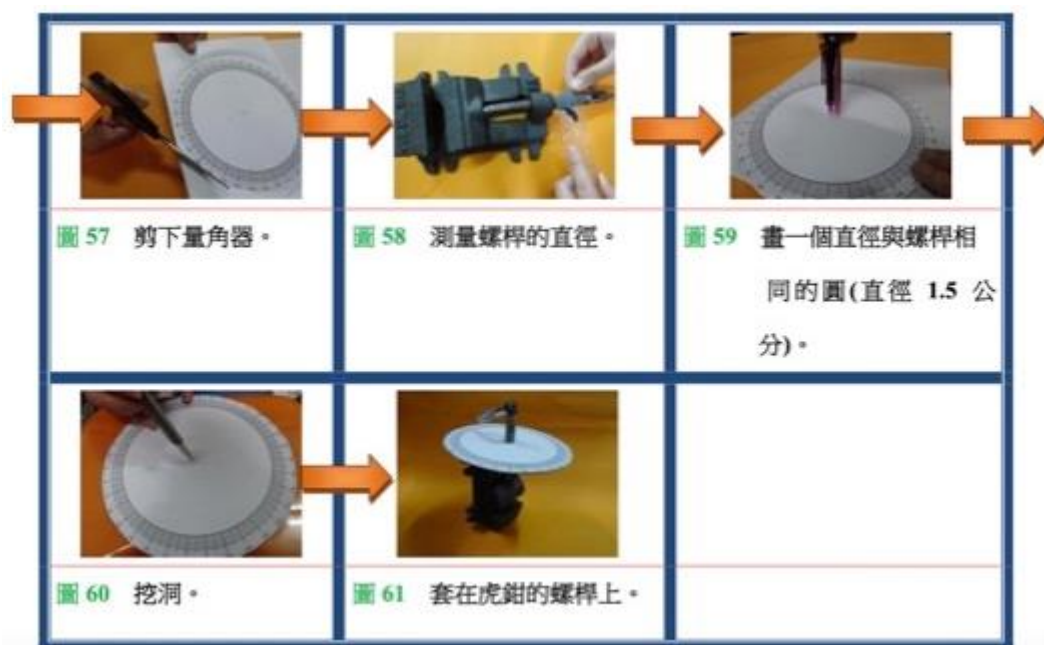
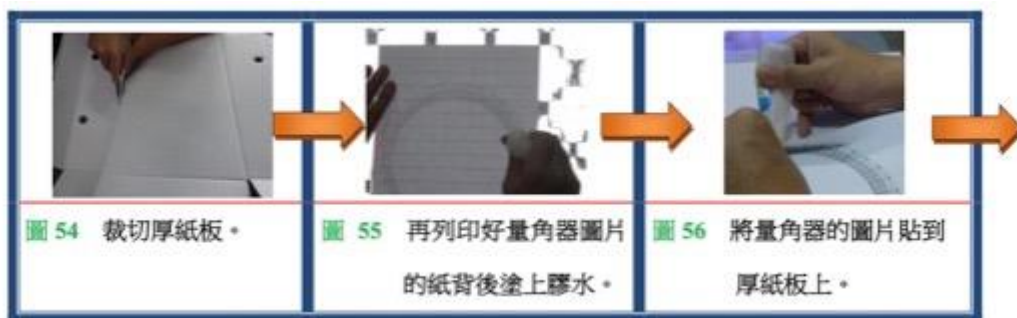


1. 用單擺撞擊，噴飛顆數越多表示越不穩固，噴飛距離越遠也表示越不穩固。
2. 本實驗中盾片狀和長方體的質量相等，因為如果不相同，被擺錘撞擊之後質量較輕的噴飛最遠距離當然也就會比較遠。



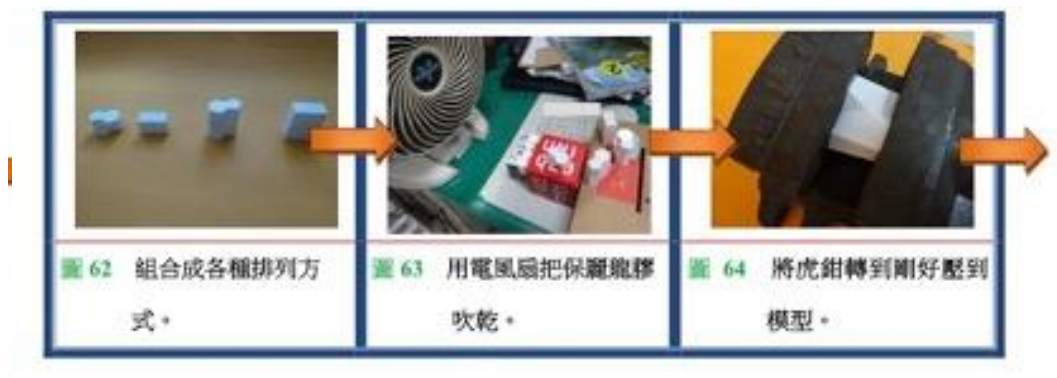
#### ❖ 探討盾片狀與長方體可以承受的力(堅固程度)。

1. 當虎鉗往下轉時，頂在模型上下的鐵片距離會越來越小，對模型施的力也會越來越大，本組在虎鉗上加裝了量角器，角度越大鐵片之間的距離就越小，用壓到出現第一條裂痕所需轉的角度來比較長方體和盾片狀可以承受的力(堅固程度)。
2. 本實驗中盾片狀和長方體模型兩兩拚在一起時，盾片狀和長方體的底面積相同，模型高度相同，底面積約是 4.2050 平方公分，模型高度是 2.00 公分因為要讓受力面積相等。



量

角器」製作過程



### (三) 研究結果

#### ❖ 探討盾片狀與長方體的穩固程度。

噴飛顆數，擺角 10 度:長方體>盾片狀，擺角 20 度:盾片狀>長方體，擺角 30 度:長方體>盾片狀，擺角 40 度:長方體>盾片狀，擺角 50 度:長方體>盾片狀，由噴飛顆數得知穩固程度是盾片狀>長方體。

噴飛最遠距離，擺角 10 度:長方體>盾片狀，擺角 20 度:長方體>盾片狀，擺角 30 度:長方體 = 盾片狀，擺角 40 度:盾片狀>長方體，擺角 50 度:盾片狀>長方體，整體而言的穩固程度是盾片狀不一定比長方體好。

#### ❖ 探討盾片狀與長方體可以承受的力(堅固程度)

用虎鉗壓到出現第一條裂痕時螺桿所需轉的角度，第一次實驗:盾片狀堆 4 個>盾片狀堆 2 個>長方體堆 4 個>長方體堆 2 個，第二次實驗:盾片狀堆 4 個>長方體堆 4 個>盾片狀堆 2 個>長方體堆 2 個，第三次實驗:盾片狀堆 4 個>長方體堆 4 個>盾片狀堆 2 個>長方體堆 2 個，第四次實驗:盾片狀堆 4 個>長方體堆 4 個>盾片狀堆 2 個>長方體堆 2 個，第五次實驗:盾片狀堆 4 個>盾片狀堆 2 個>長方體堆 4 個>長方體堆 2 個，由平均後的數據得知堅固程度是盾片狀堆 4 個>盾片狀堆 2 個>長方體堆 4 個>長方體堆 2 個。

## 伍、未來發展和應用

這個新發現的形狀，可以透過不同的排列方式，形成多種樣貌。一個委內瑞拉的藝術家，他擅長透過 3D 列印的技術去呈現視覺的藝術，這兩個圖，就是他透過 3D 列印的方式，將盾柱狀排列在一起得出不同的形狀。



(圖片來源:Pinterest)

對於這個形狀的新發現以及它的特性，在未來上的應用也是非常的廣泛，除了能在人工器官這方面有貢獻之外，我們認為在我們日常生活中或多或少也能有不一樣的幫助。

### (一)人工器官

「scutoid」形狀的細胞在生長時排列在一塊很有效率，未來科學家在培養人工器官時，或許就可以參考這種形狀，因為這種形狀替彎曲的組織帶來了構造上的穩定度又保有一定的彈性。

參考網址：<https://dq.yam.com/post.php?id=9695>

### (二)家具設計

利用 scutoid 的特性和幾何學的概念，打造出既緊密結合又可以保有彈性的家具。在家具設計，我們找到一家名字就叫「scutoid 思拓」的家具設計，因為這個形狀的新發現展現出幾何學與生物學的完美搭配，表現出可以既緊密結合又可以保有彈性的強大特點。他們也能為顧客量身打造家具，傳遞嶄新美學演繹的精神。



參考網址: <https://www.new-world.com.tw/brands/>

### (三)建築設計

同樣利用 scutoid 能緊密結合又堅固穩固的特性，應用在建築設計上，或許能打造出兼顧穩固和美學的建築。雖然目前還沒有資料能正確指出盾柱狀在這方面的貢獻，但我們認為或許在未來都可以被實現，而圖中是在 twitter 有人分享外觀長的很像 scutoid 的建築，大家對於這個新發現在為來的應用都是非常期待的。



(圖片來源: twitter)

### 補充:科羅拉多州立大學之裝置藝術

這個設計的理念主要就是讚嘆 scutoid 這個新發現的形狀對於生物學和解剖學所帶來的貢獻。較有趣的是，他們設計了可以從外面看到形狀裡面的窗口，透過反射平面和折射光顯示出萬花筒的景象，這也在暗示著更多在我們皮膚底下尚未被發現的世界值得我們去探索。





參考網址: <https://www.areaprojects.com/filter/CSU/VEIL>

## 陸、參考資料:

一、 維基百科。普拉托定律。

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%99%AE%E6%8B%89%E6%89%98%E5%AE%9A%E5%B%E%8B>

二、傅宗政、陳正平（2011）。冒泡的美。科學發展月刊，29(11)，788-796。

三、以泡泡世界為主題之科普活動，設計與推廣。

<http://ntcuir.ntcu.edu.tw/bitstream/987654321/7090/1/NSC094101.pdf>

四、Scutoids cells discovered in soap bubbles

<https://physicsworld.com/a/scutoid-cells-discovered-in-soap-bubbles/>

五、Demonstration and interpretation of ‘scutoids’ cells formed in a quasi-2D soap froth <https://doi.org/10.1080/09500839.2018.1552806>

六、哲學雜誌快報，開爾文問題。[http://www. luozhuang-edu.cn/jy kx/82053.html](http://www.luo Zhuang-edu.cn/jy kx/82053.html)

七、 維基百科。盾片狀

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%9B%BE%E7%89%87%E7%8A%B6>

八、科技新報。幾何世界新成員：scutoid

<https://technews.tw/2018/08/04/new-member-of-the-geometric-world-scutoid/>

#### 九、**How to Model: Self-Packing Scutoid in SOLIDWORKS**

<https://www.youtube.com/watch?v=BmrRRZFYV5U&t=2s>

#### 十、**彰化縣 108 年第 59 屆中小學科學展覽會 作品說明書**

[http://science.hs.jh.chc.edu.tw/upload\\_works/108/de293dd77fd3cc76cb3bc721c6bdfd97.pdf](http://science.hs.jh.chc.edu.tw/upload_works/108/de293dd77fd3cc76cb3bc721c6bdfd97.pdf)