

數學解題期末報告 第二組

任意三角形最小內接正三角形之尺規作圖

410631105 王嘉顥

410631106 王士齊

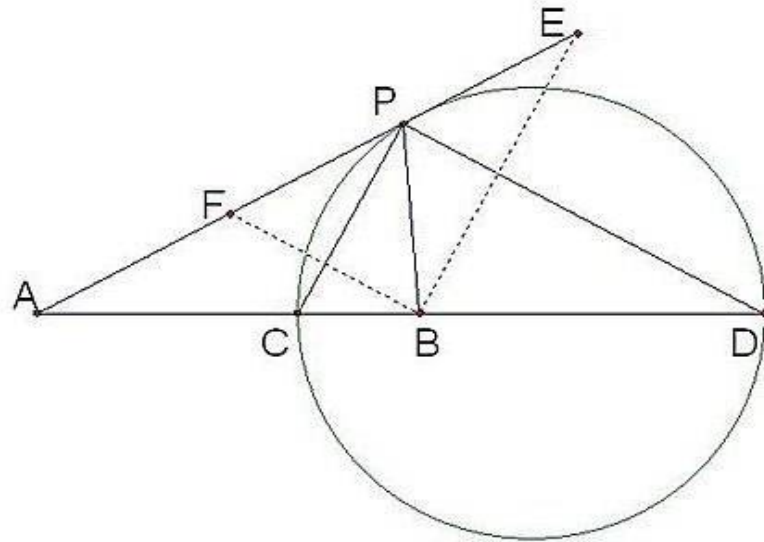
410631116 劉家宇

410631125 李宥德

410631127 張茗洋

一、介紹阿波羅尼斯圓

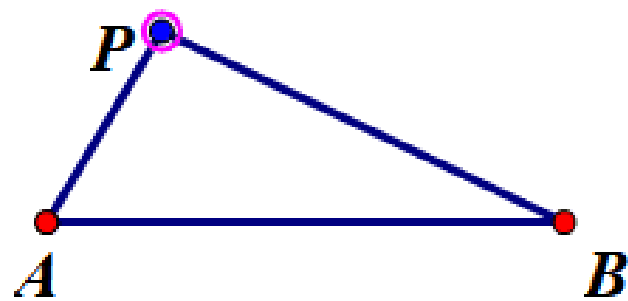
- 給定平面上兩定點 A 、 B ，並且令平面上動點 P 滿足 $\overline{PA} : \overline{PB} = k : 1$
- 並且 $k \neq 1$ ， $k \geq 0$ ，則 P 集合為圓形



$$\overline{PB} = 4.18 \text{ 厘米}$$

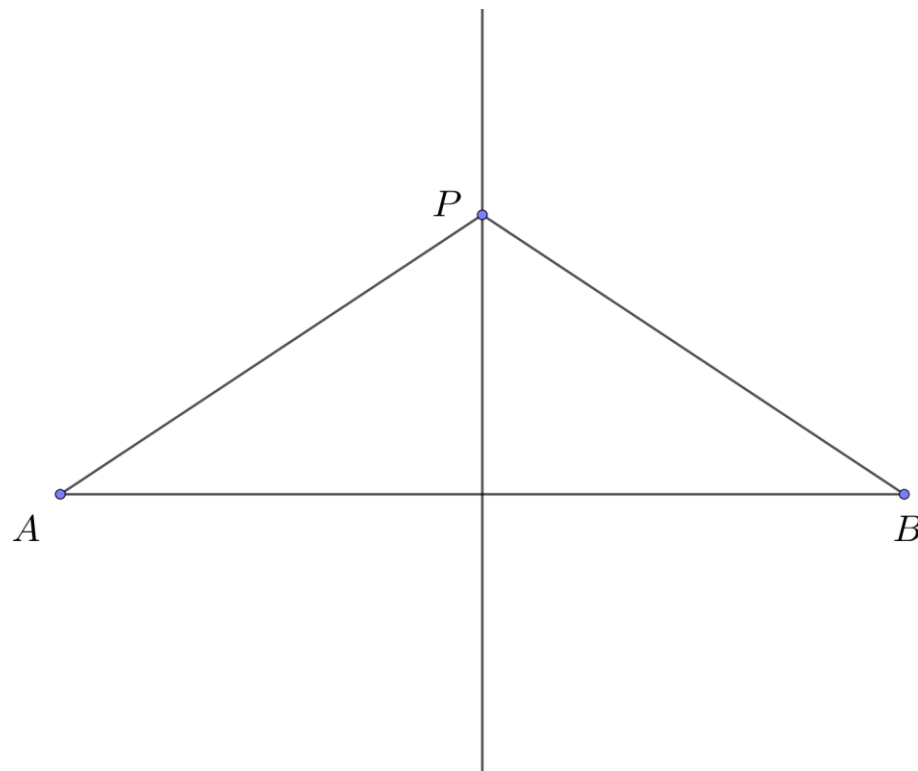
$$\overline{PA} = 2.09 \text{ 厘米}$$

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = 2.00$$



- $\overline{PA} : \overline{PB} = k : 1$

- 若 $k = 1$ ，則P集合為 \overline{AB} 中垂線



代數證明：

在不失一般性假設下，假設 $A(0,0)$ 、 $B(d,0)$

令 $P(x,y)$ 滿足 $\overline{PA} : \overline{PB} = k : 1$ ， $k \neq 1$ ， $k \geq 0$

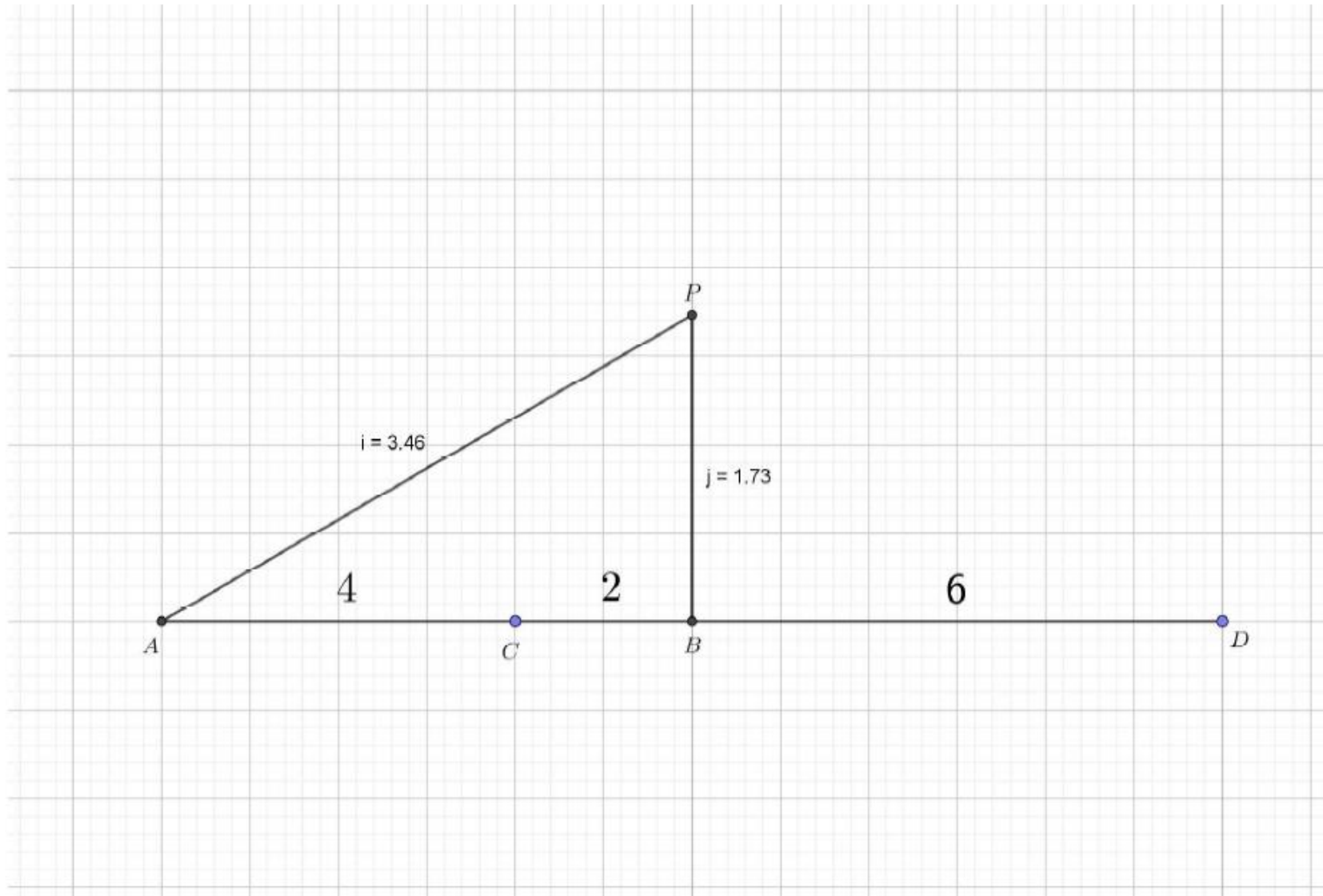
$$\sqrt{x^2 + y^2} : \sqrt{(x - d)^2 + y^2} = k : 1$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = k\sqrt{(x - d)^2 + y^2}$$

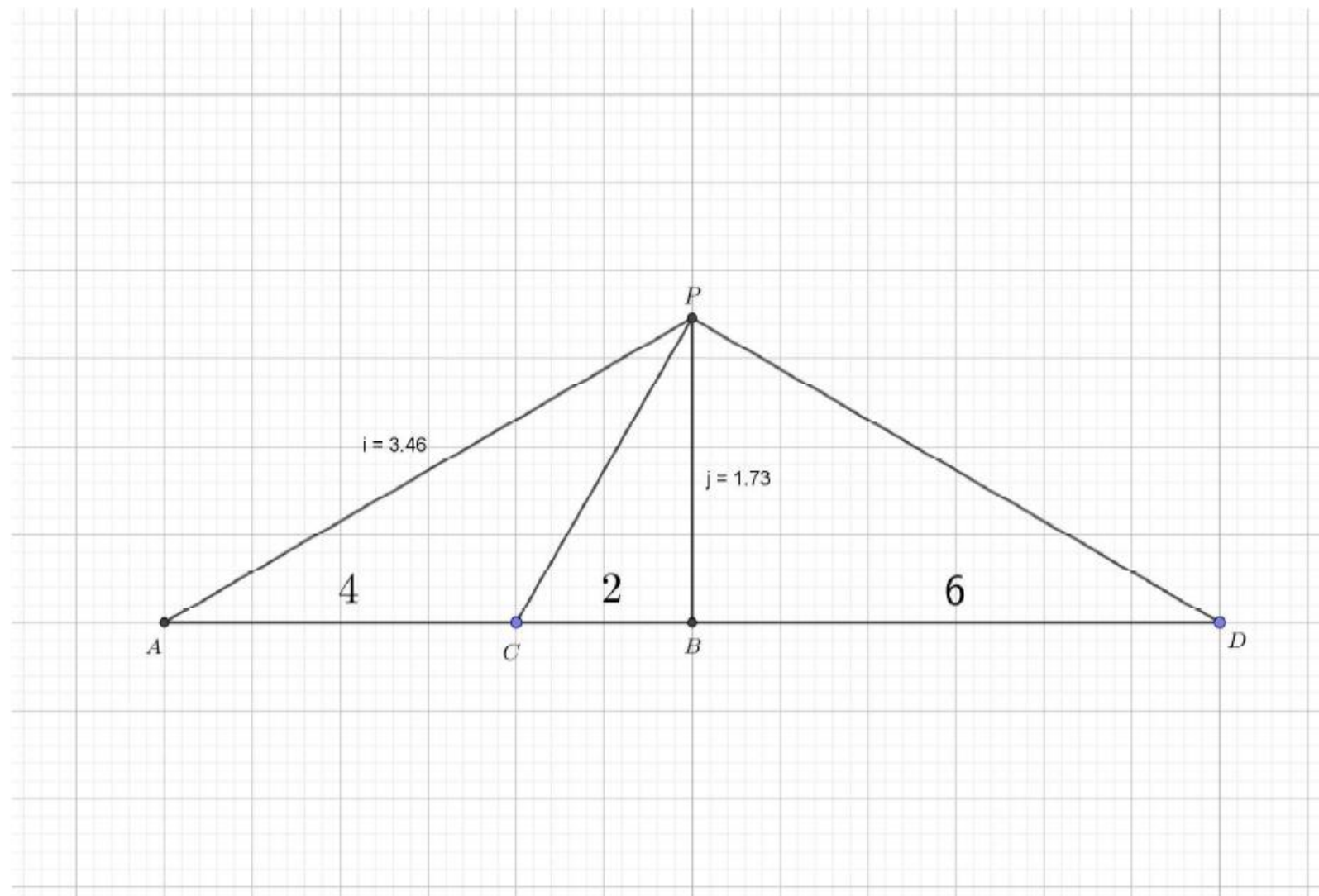
整理完可得 $(x - \frac{dk^2}{k^2 - 1})^2 + y^2 = (\frac{dk}{k^2 - 1})^2$

所以P點軌跡為圓心為 $(\frac{dk^2}{k^2 - 1}, 0)$ 半徑為 $\frac{dk}{k^2 - 1}$ 的圓

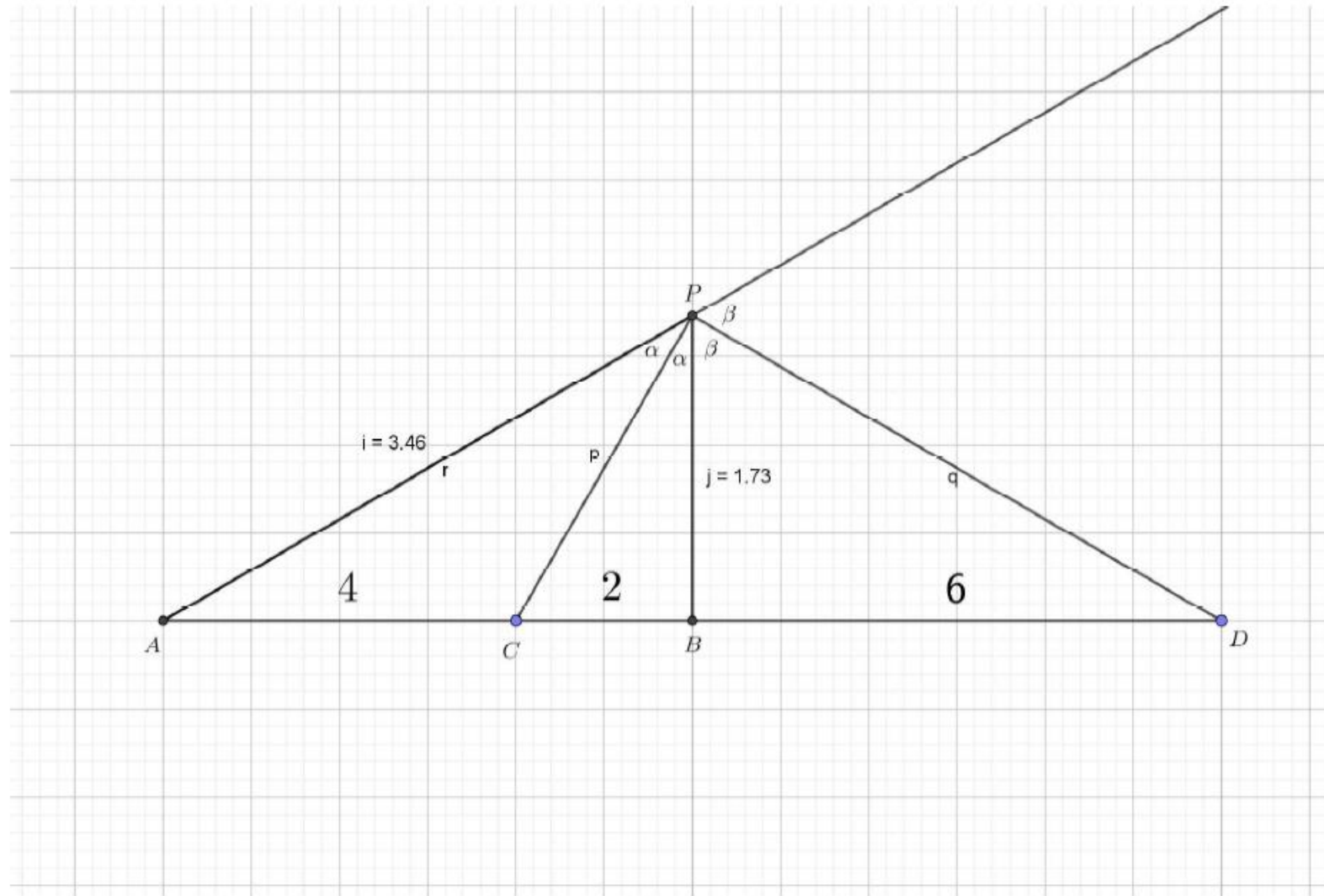
- 幾何 $\overline{PA}:\overline{PB} = 2:1$



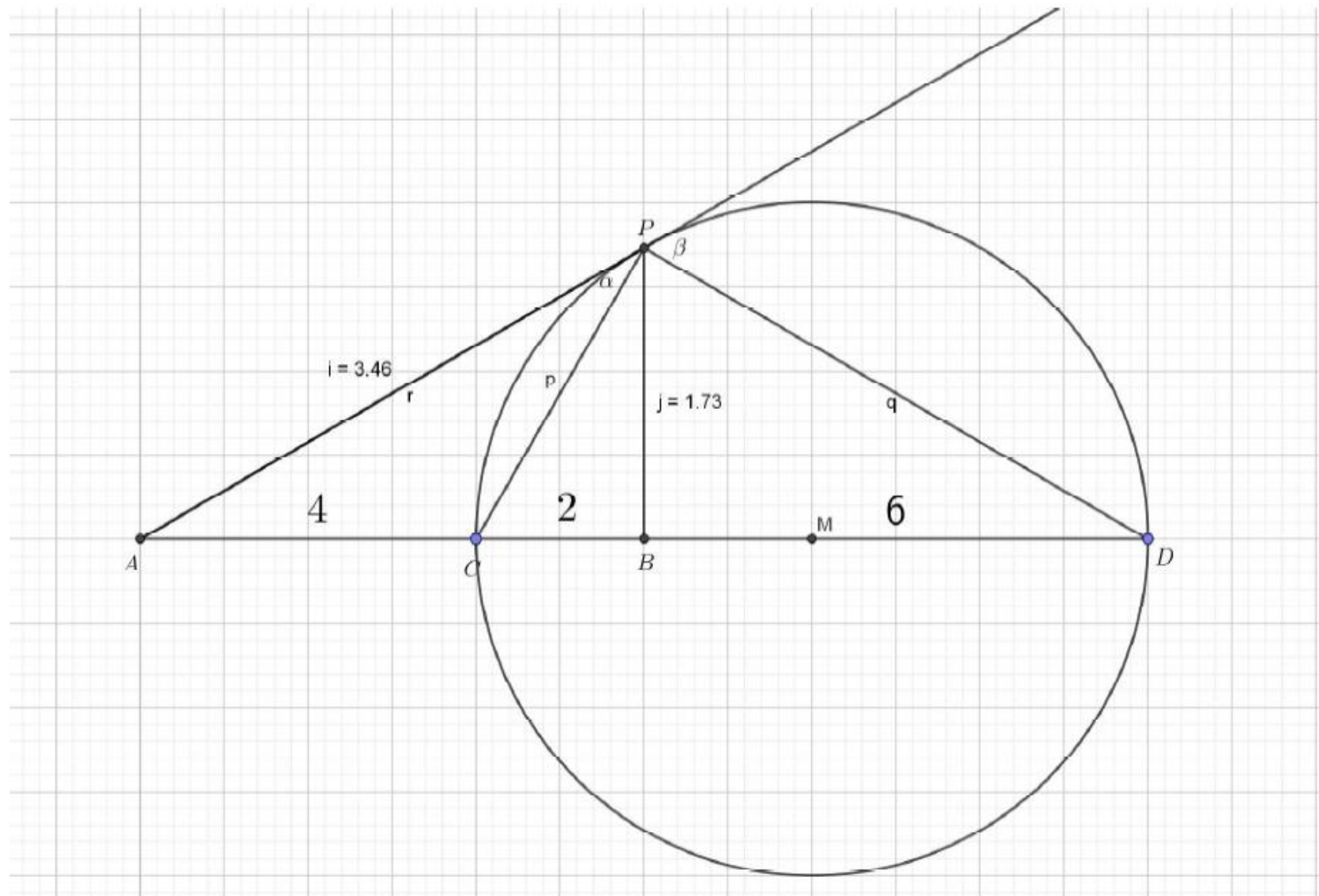
- 幾何 $\overline{PA}:\overline{PB} = 2:1$



- 幾何 $\overline{PA}:\overline{PB} = 2:1$



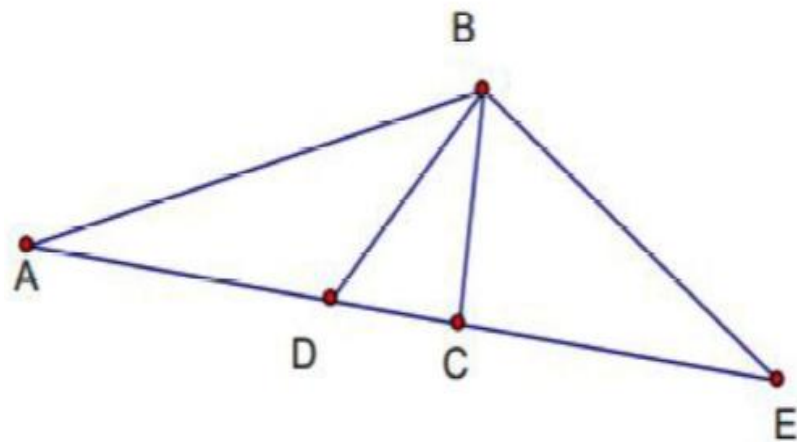
- 幾何 $\overline{PA}:\overline{PB} = 2:1$



二、畫出最小正三角形

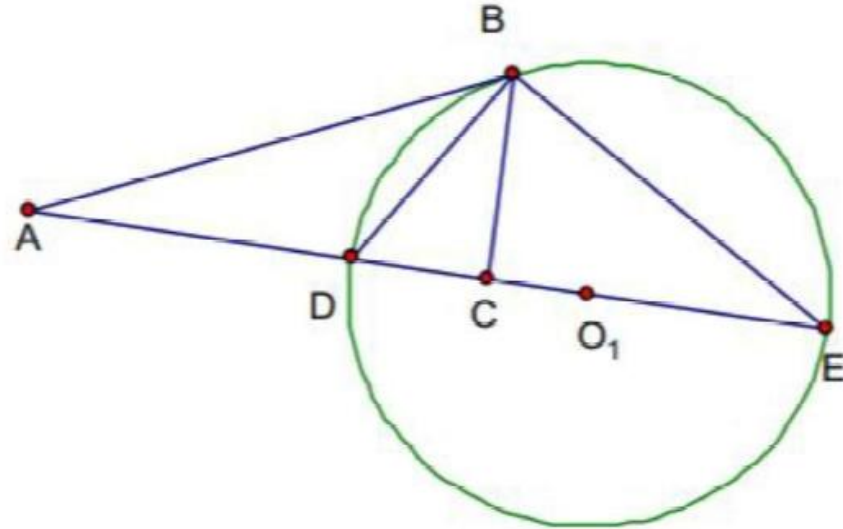
給任意三角形ABC，找出三角形ABC之最小內接正三角形

(1)先分別作三角形ABC中 $\angle ABC$ 的內、外角平分線，分別交 \overrightarrow{AC} 於D、E(如下圖)



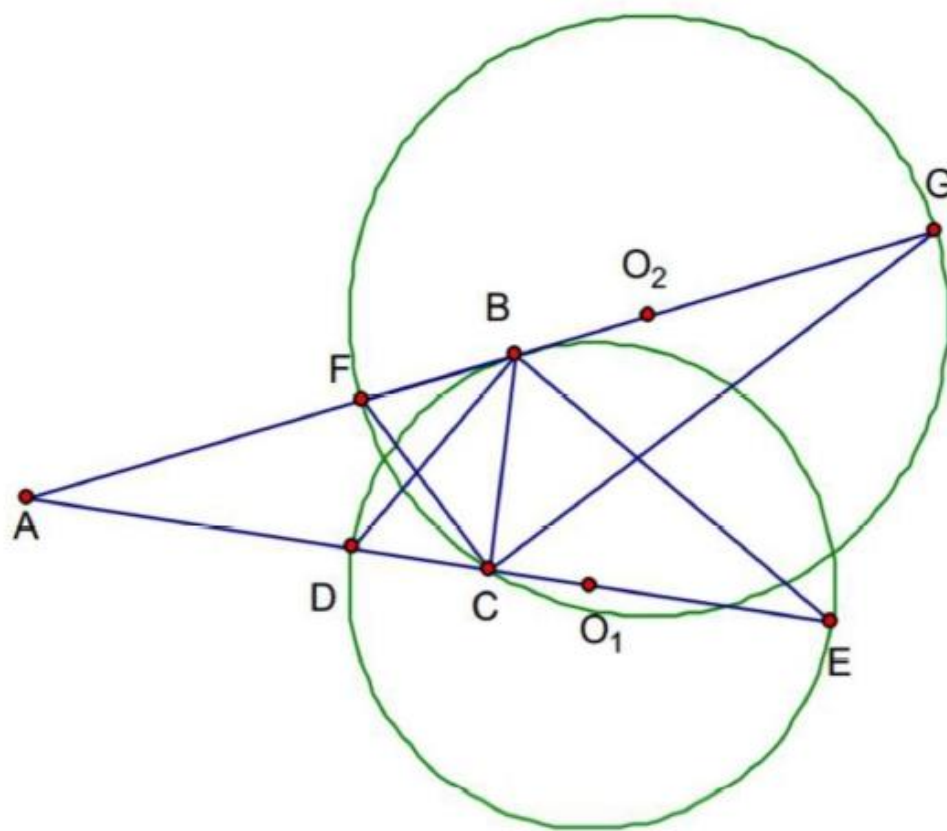
(引用自參考資料一)

(2) 以 \overline{DE} 為直徑做圓 O_1



(引用自參考資料一)

(3)再對三角形ABC中 $\angle ABC$ 做上述兩動作，得圓 O_2

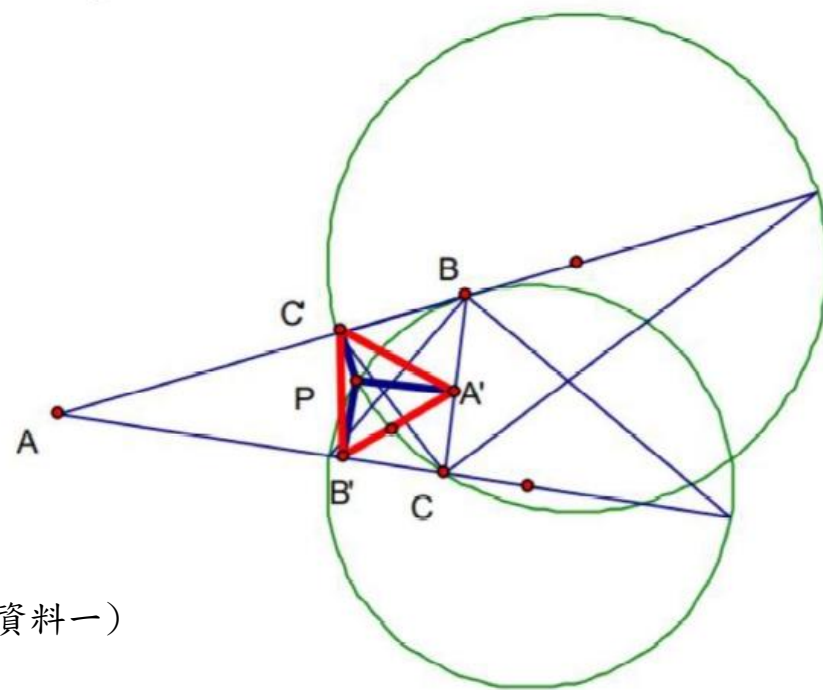


(引用自參考資料一)

(4)發現 O_1 、 O_2 在三角形內交點為P

(5)由P做三角形三邊的垂足 A' 、 B' 、 C'

(6)連接三點得三角形 $A'B'C'$ ，即為所求



(引用自參考資料一)

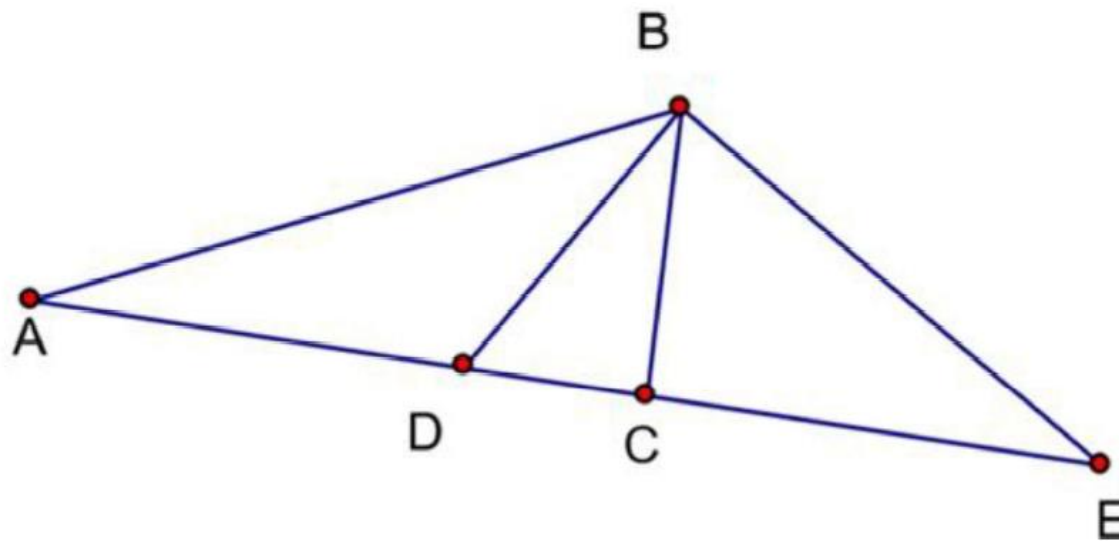
三、說明

(一)首先要先說明如此接出來的三角形是正三角形

首先要先說明如此接出來的三角形是正三角形。

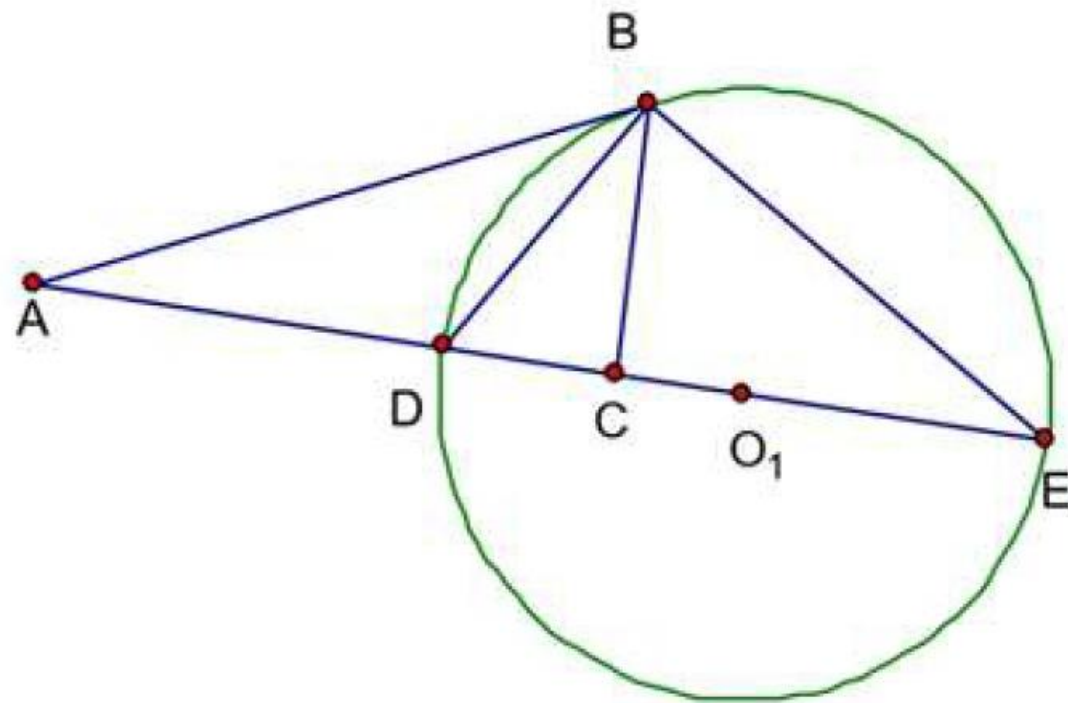
第一步因為做三角形ABC中 $\angle ABC$ 的內、外角平分線，由內分比定理 $\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}$ ，由外

分比定理 $\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$ ，由以上兩式可得 $\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$



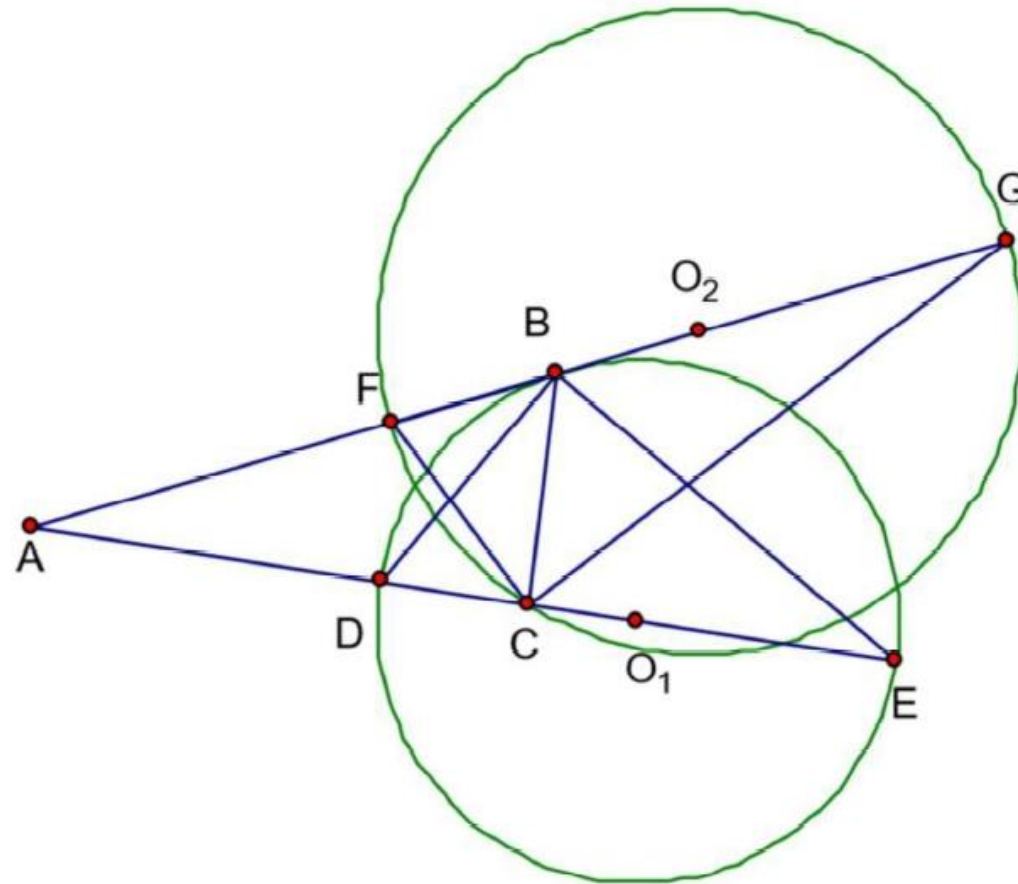
(引用自參考資料一)

我們發現B、D、E三點分別和A、C的距離比相等，由阿波羅尼斯圓的定義，B、D、E三點一定共圓，但因為是內、外角平分線，所以 $\angle DBE=90^\circ$ ，因此可以用 \overline{DE} 為直徑畫圓，且B、D、E三點必定在圓上。



(引用自參考資料一)

同理，圓 O_2 是以A、B為定點的阿波羅尼斯圓，並且以 \overline{FG} 為直徑。

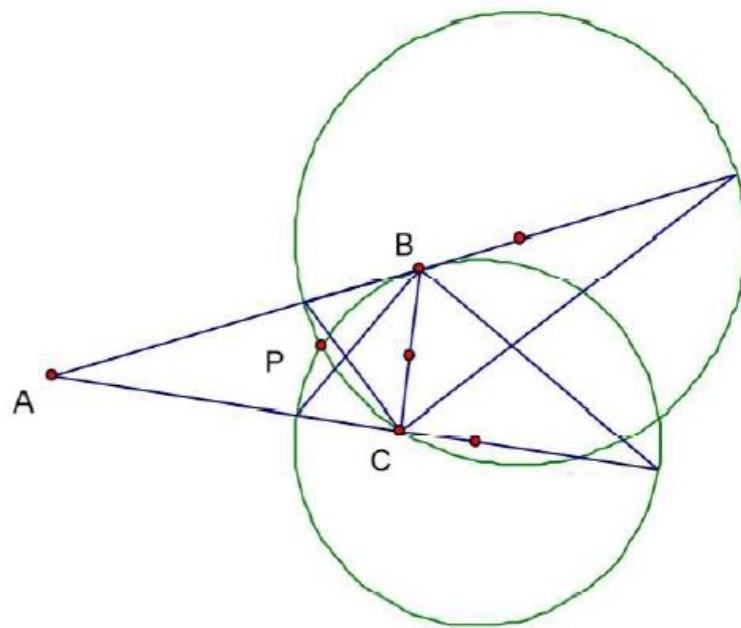


(引用自參考資料一)

因此， O_1 、 O_2 的交點P，因為同時符合兩個阿波羅尼斯圓，所以：

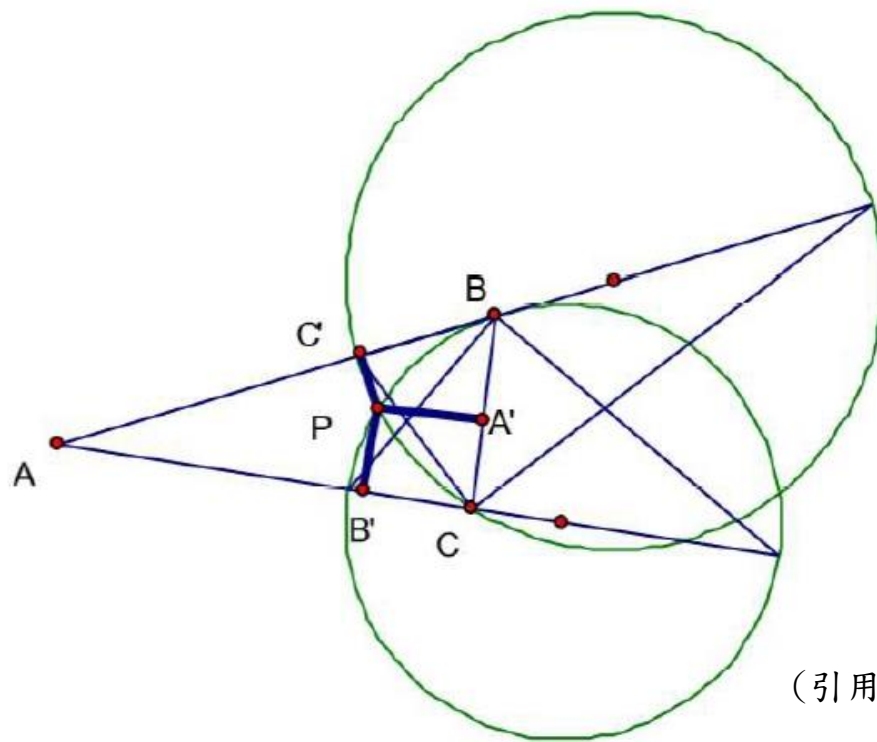
$$\textcircled{1} \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \quad \textcircled{2} \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \quad \textcircled{1} \div \textcircled{2} \Rightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

因此，我們得到一個重要關係： $\overline{PA} \times \overline{BC} = \overline{PB} \times \overline{AC} = \overline{PC} \times \overline{AB}$



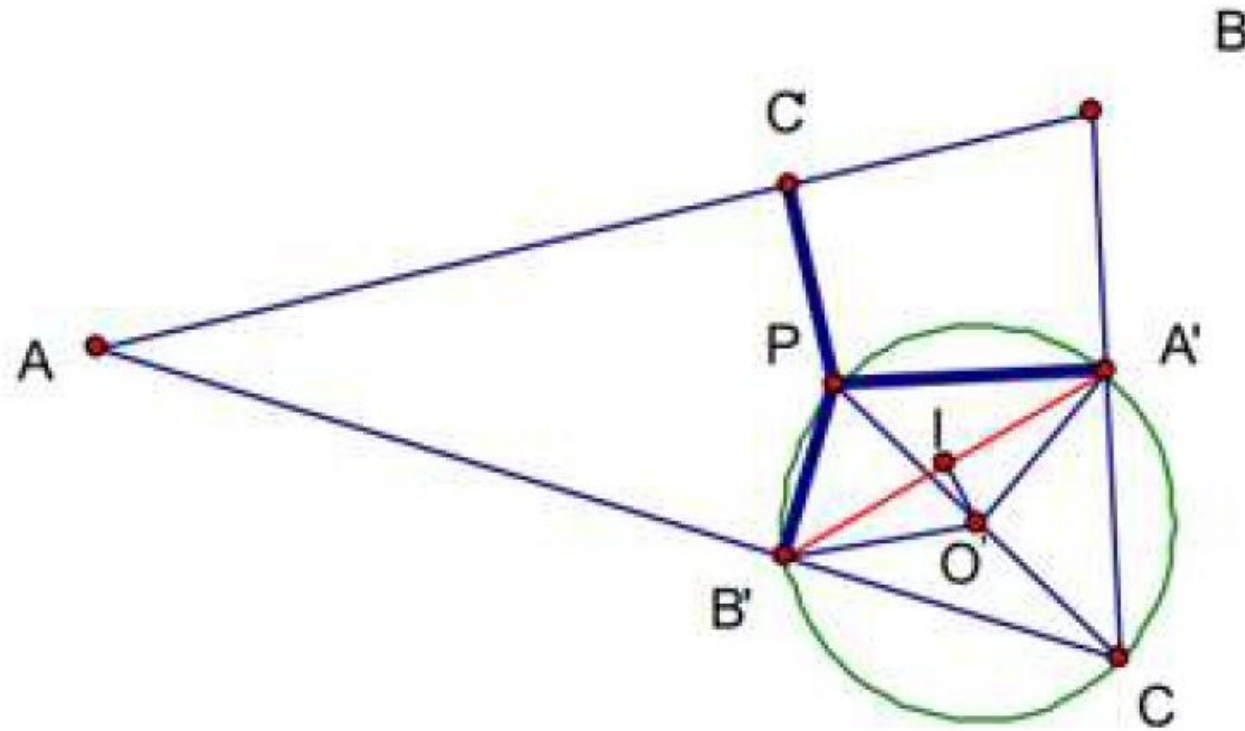
(引用自參考資料一)

接下來是由P點向三角形ABC三邊做垂線，分別交於A'、B'、C'，接下來再看回三角形ABC，將其特別拿出來討論。



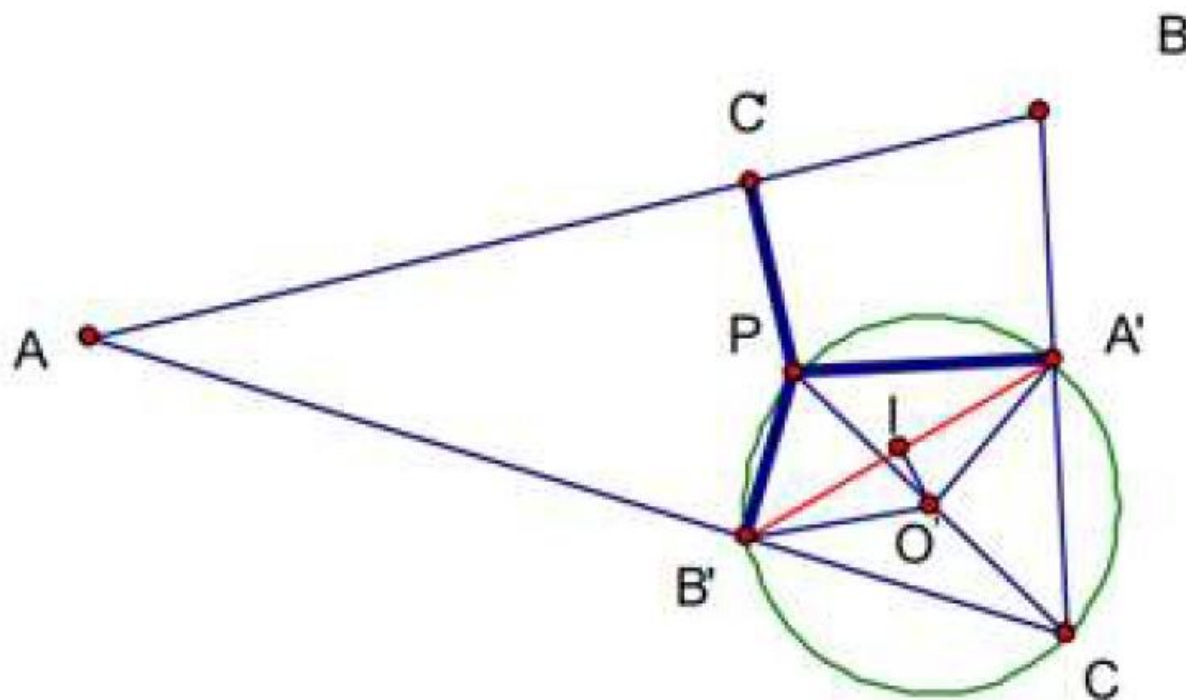
(引用自參考資料一)

(1)因為做的是垂線，所以四邊形 $PA'CB'$ 因為對角互補，
必定四點共圓，找出圓心 O' ，做圓心到 $\overline{A'B'}$ 的垂線，垂
足 I



(引用自參考資料一)

(2)因為 $OA'B'$ 是等腰三角形，因此 $\angle B'OI = \angle A'OI$ ，又因為圓周角與圓心角的關係，因此 $\angle B'OI = \angle A'OI = \angle A'CB'$

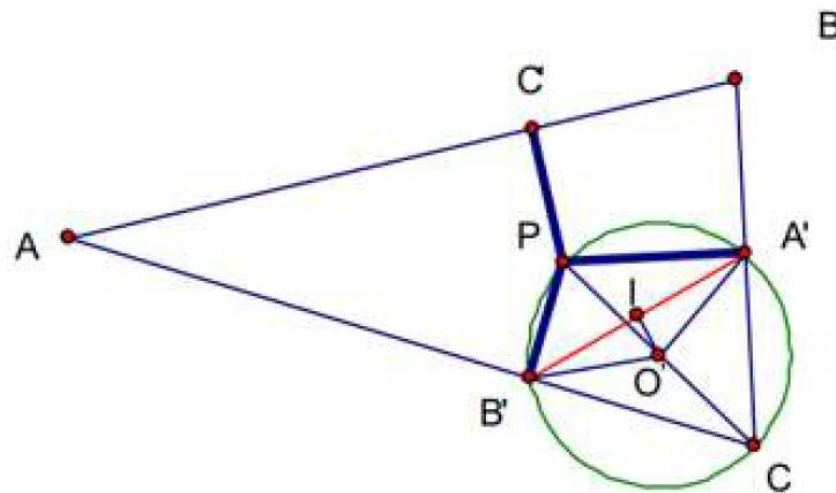


(引用自參考資料一)

(3) 由正弦定理可知 $\frac{\overline{A'B'}}{\sin C} = \overline{PC} \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{PC} \times \sin C$

(4) 同理，我們可推得以下式子：

$$\overline{A'C'} = \overline{PB} \times \sin B, \overline{B'C'} = \overline{PA} \times \sin A$$



(引用自參考資料一)

在ABC中，由正弦定理 $\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R$ ， R 為外接圓半

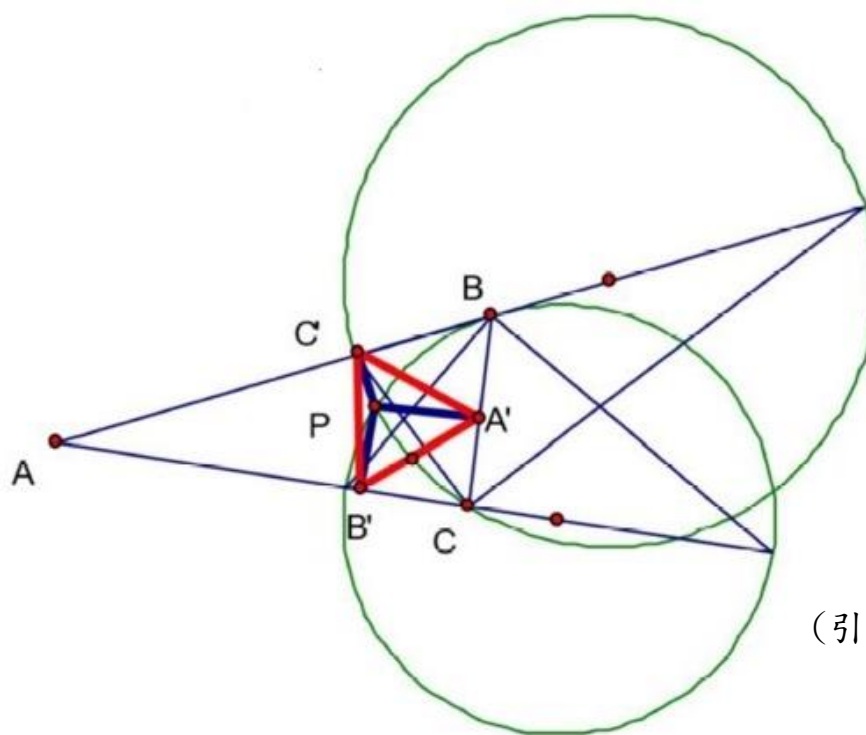
徑，因此，之前的三個式子可調整為

$$\overline{A'B'} = \overline{PC} \times \sin C \Rightarrow \overline{A'B'} = \frac{\overline{PC} \times \overline{AB}}{2R}$$

$$\overline{A'C'} = \overline{PB} \times \sin B \Rightarrow \overline{A'C'} = \frac{\overline{PB} \times \overline{AC}}{2R}$$

$$\overline{B'C'} = \overline{PA} \times \sin A \Rightarrow \overline{B'C'} = \frac{\overline{PA} \times \overline{BC}}{2R}$$

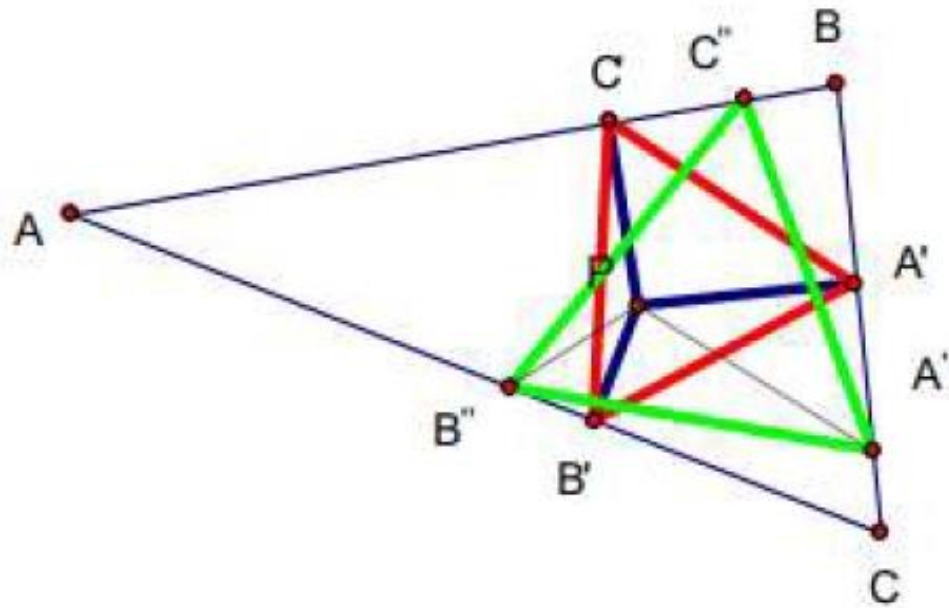
但是我們在說明的第4步驟時又得到 $\overline{PA} \times \overline{BC} = \overline{PB} \times \overline{AC} = \overline{PC} \times \overline{AB}$ ，因此，我們就證明了 $\overline{A'B'} = \overline{A'C'} = \overline{B'C'}$ ，也就是我們用這樣的方法做出來的三角形是一個正三角形。



(引用自參考資料一)

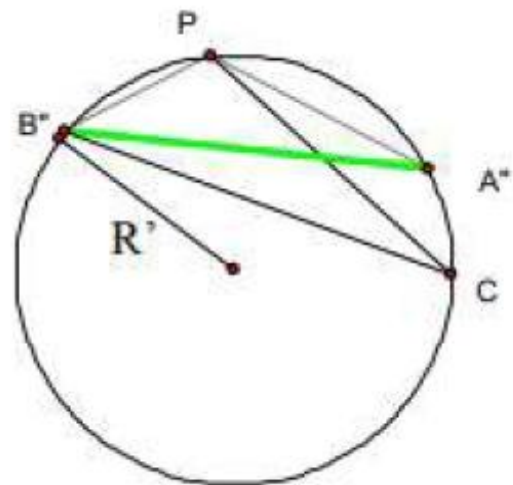
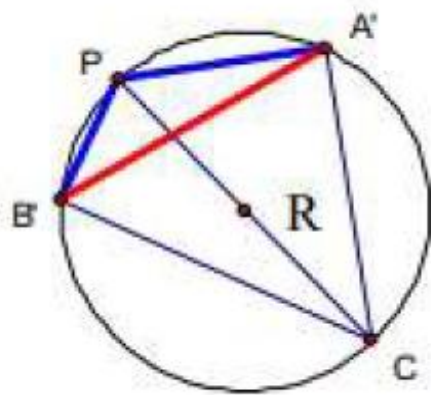
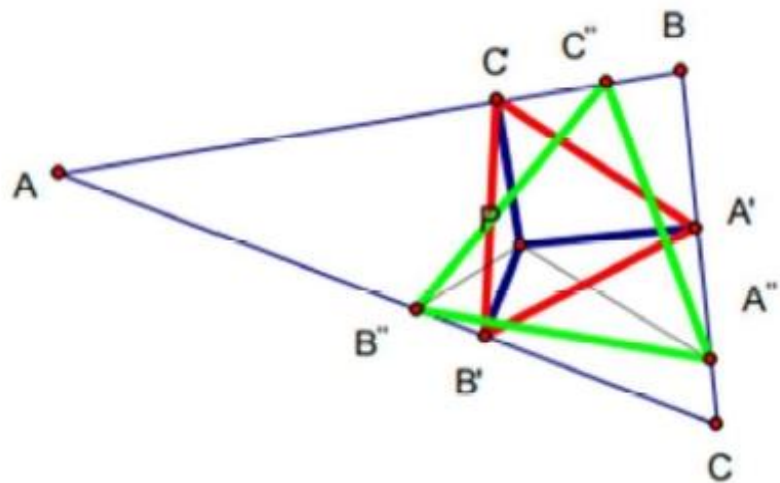
四、要說明這個三角形為最小

如果我們在 \overline{BC} 上另取一點 A'' ，並且以 A'' 作內接正三角形 $A''B''C''$ ，而 $A''B''C''$ 可以視為 $A'B'C'$ 以 P 為中心旋轉而得。



(引用自參考資料一)

我們注意四邊形 $PA''CB''$ ，在前面提到，因為四邊形 $PA'CB'$ 是圓內接四邊形， $\angle B'PA'$ 和 $\angle C$ 互補，所以不管 A'' 在哪裡，只要能做出正三角形，則一定 $\angle B''PA'' = \angle B'PA'$ (因為旋轉)，所以一定都有四點共圓的性質，而這些四點共圓之中，又以 \overline{PC} 為直徑的圓半徑最小。



(引用自參考資料一)

$$\frac{\overline{A'B'}}{\sin C} = 2R$$

$$\frac{\overline{A''B''}}{\sin C} = 2R'$$

$$\overline{A'B'} = 2R \sin C$$

$$\overline{A''B''} = 2R' \sin C$$

$$R' > R \therefore \overline{A'B'} < \overline{A''B''}$$

因此，只要不是在垂直的所做出來的正三角形，所對應到的外接圓半徑必定都比之前的大，所以邊長也都比之前的大，所以 $\triangle A'B'C'$ 為最小正三角形。

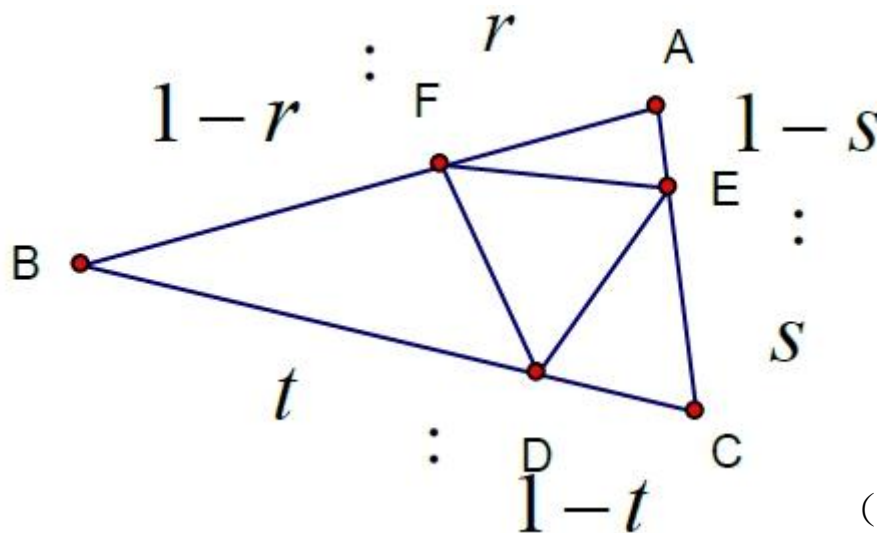
五、代數證明三角形為最小

若三角形 ABC 中的內接正三角形 DEF ，

D 在 \overline{BC} 上、 E 在 \overline{AC} 上、 F 在 \overline{AB} 上、且設

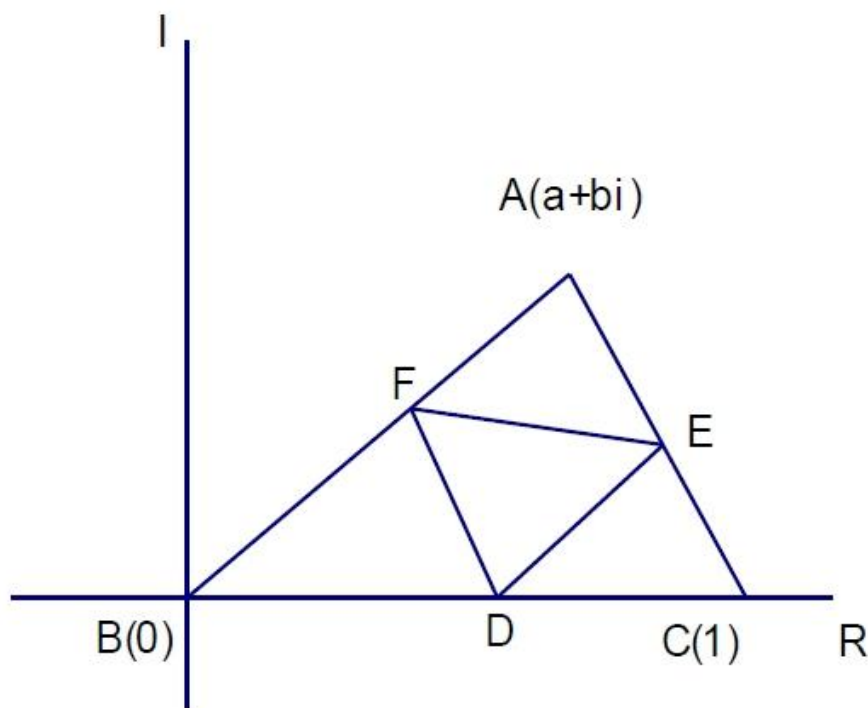
$$\overline{BD} : \overline{DC} = t : 1 - t, \quad \overline{CE} : \overline{EA} = s : 1 - s, \quad \overline{AF} : \overline{FB} = r : 1 - r$$

則當 $t + s + r = \frac{3}{2}$ 時，這時的內接正三角形邊長最小，所以面積也會最小。



(引用自參考資料一)

因為 ABC 為任意給的三角形，為了說明的完整性，我們將 ABC 放在複數平面上，而且令為 $B(0)$ 、 $C(1)$ 、 A 為 $a + bi$



(引用自參考資料一)

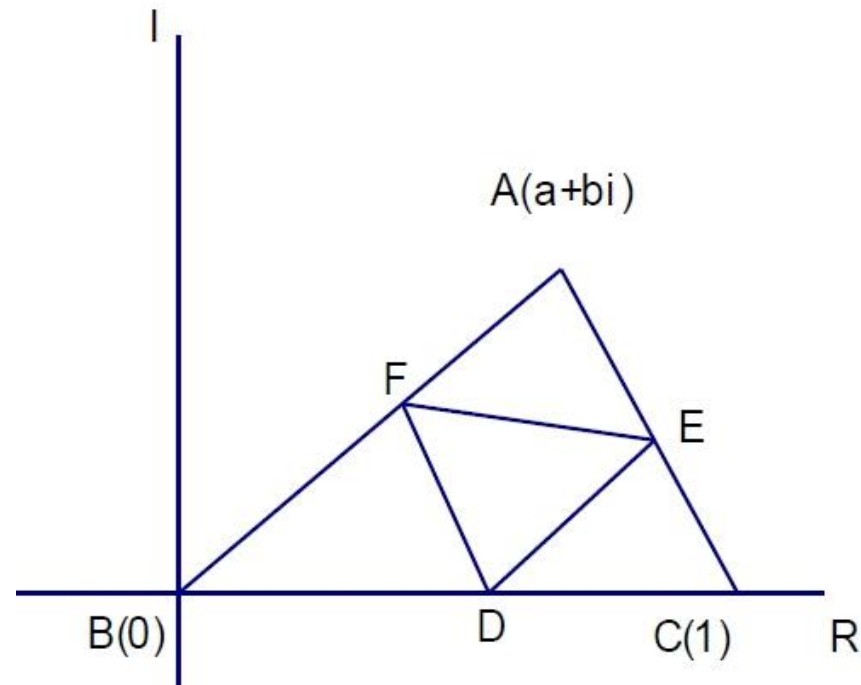
$\overline{BD} : \overline{DC} = t : 1 - t \Rightarrow D$ 點座標為 t

$\overline{CE} : \overline{EA} = s : 1 - s \Rightarrow E$ 點座標為 $(as - s + 1) + (bs)i$

$\overline{AF} : \overline{FB} = r : 1 - r \Rightarrow F$ 點座標為 $(a - ar) + (b - br)i$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = (as - s + 1 - t) + (bs)i$$

$$\overrightarrow{DF} = (a - ar - t) + (b - br)i$$



(引用自參考資料一)

又由複數的隸美弗定理：

$$\therefore \overrightarrow{DE}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = \overrightarrow{DF} \quad (\because \angle FDE = 60^\circ)$$

$$\begin{aligned} \therefore [(as - s + 1 - t) + (bs)i] \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ = (a - ar - t) + (b - br)i \end{aligned}$$

乘開之後實部=實部、虛部=虛部，會得到以下的等式：

$$\left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}b}{2} - \frac{1}{2}\right)s - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} = a - ar - t \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)s - \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2} = b - br \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

接下來要逐步的把 t 、 s 、 r 等未知數的關係用 a 、 b 表示，

先把上兩式改寫成：

$$-ar = \left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}b}{2} - \frac{1}{2} \right) s + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} - a \dots\dots \textcircled{3}$$

$$-br = \left(\frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) s - \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2} - b \dots\dots \textcircled{4}$$

兩式相除，消去 r ，同時分子分母同乘2，會得到：

$$\frac{a}{b} = \frac{(a - \sqrt{3}b - 1)s + t + 1 - 2a}{(\sqrt{3}a + b - \sqrt{3})s - \sqrt{3}t + \sqrt{3} - 2b}$$

交叉相乘：

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3}a^2 + ab - \sqrt{3}a)s - \sqrt{3}at + \sqrt{3}a - 2ab \\ &= (ab - \sqrt{3}b^2 - b)s + bt + b - 2ab \end{aligned}$$

移項整理，左邊把有s的整理起來，右邊把t和沒有t分開，得以下式子：

$$(\sqrt{3}a^2 + \sqrt{3}b^2 - \sqrt{3}a + b)s = (\sqrt{3}a + b)t + (b - \sqrt{3}a)$$

把S前係數移項：

$$s = \frac{\sqrt{3}a+b}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b} t + \frac{b-\sqrt{3}a}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b} \dots\dots\textcircled{5}$$

就可得到s和t的關係。

同理，如果我們如果我們在一開始的①、②改寫成：

$$\left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}b}{2} - \frac{1}{2}\right)s = a - ar - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)s = b - br + \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

兩式相除，這次就會消去s，再經由和上面一模一樣的相乘整理，最後

得到r和t的關係：
$$r = \frac{\sqrt{3}+b-\sqrt{3}a}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}t + \frac{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a-b}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b} \dots\dots\textcircled{6}$$

我們再次回到原先假設的那個三角形，之前說到E點座標為 $(as - s + 1) + (bs)i$ ，F點座標為 $(a - ar) + (b - br)i$ ，把⑤、⑥代入，則E、F點在直角座標可變成：

$$E: \left[\frac{(\sqrt{3}a^2 + ab - \sqrt{3}a - b)t + (ab + \sqrt{3}b^2)}{\sqrt{3}a^2 + \sqrt{3}b^2 - \sqrt{3}a + b}, \frac{(\sqrt{3}ab + b^2)t + (-\sqrt{3}ab + b^2)}{\sqrt{3}a^2 + \sqrt{3}b^2 - \sqrt{3}a + b} \right]$$

$$F: \left[\frac{(\sqrt{3}a^2 - ab - \sqrt{3}a)t + 2ab}{\sqrt{3}a^2 + \sqrt{3}b^2 - \sqrt{3}a + b}, \frac{(\sqrt{3}ab - b^2 - \sqrt{3}b)t + 2b^2}{\sqrt{3}a^2 + \sqrt{3}b^2 - \sqrt{3}a + b} \right]$$

利用兩點距離公式，則 \overline{EF} 就可寫成：

$$\sqrt{\left[\frac{(2ab - b)t + (-ab + \sqrt{3}b^2)}{\sqrt{3}a^2 + \sqrt{3}b^2 - \sqrt{3}a + b} \right]^2 + \left[\frac{(2b^2 + \sqrt{3}b)t + (-\sqrt{3}ab - b^2)}{\sqrt{3}a^2 + \sqrt{3}b^2 - \sqrt{3}a + b} \right]^2}$$

我們可以發現，根號裡面是 t 的二次式，所以擁有最小值，所以我們對根號裡進行配方，又因為分母是一樣的，所以對以下的式子配方即可：

$$[(2ab - b)t + (-ab + \sqrt{3}b^2)]^2 + [(2b^2 + \sqrt{3}b)t + (-\sqrt{3}ab - b^2)]^2$$

發現當 $t = \frac{1}{2} + \frac{2a-1}{2a^2+2b^2-2a+2\sqrt{3}b+2}$ 時 \overline{EF} 會最小，再把這時候的 t 代

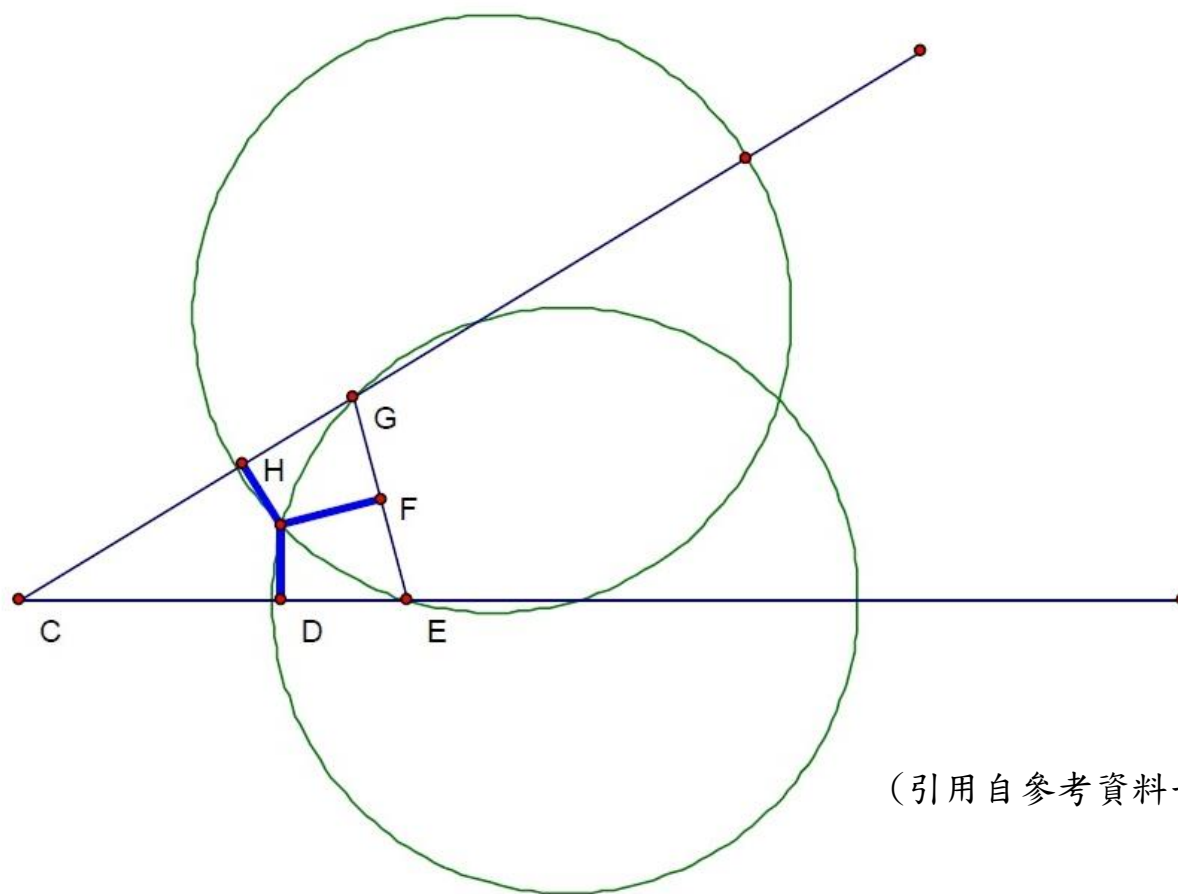
回⑤、⑥兩式，就得到 $t + s + r = \frac{3}{2}$ ，由此可驗證一開始的假設。

最後再將剛剛畫出的圖代入，可得 $t + s + r = \frac{3}{2}$ ，因此可證明尺規作圖的方法是正確的

$$\overline{CD} = 2.70cm \quad \overline{EF} = 1.07cm$$

$$\overline{CE} = 4.00cm \quad \overline{EG} = 2.16cm$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} + \frac{\overline{EF}}{\overline{EG}} + \frac{\overline{GH}}{\overline{GC}} = 1.50$$



(引用自參考資料一)

參考資料：

一、第48屆科展:任意三角形最小內接正三角形之尺規作圖

<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/48/senior/040416.pdf>

二、第40屆科展:任意三角形內接正三角形

<https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=37&a=6821&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=7&sid=4839>