數學解題期末報告 第二組

任意三角形最小內接正三角形之尺規作圖

組員：410631105 王嘉顥

410631106 王士齊

410631116 劉家宇

410631125 李宥德

410631127 張茗洋

目錄：

動機：

在上學期的某一堂課找尋資料時，發現高中科展有許多有趣的主題，當得知期末報告是自選主題時，便立刻想到，於是上網搜尋，在歷屆高中科展中找尋了雖然沒有得獎但適合作為數學教育用途的主題來介紹。

主題簡介：

介紹如何利用尺規作圖做出任意三角形之最小內接正三角形，並透過代數證明來說明為何這樣的作法是正確的。

工作分配：

王嘉顥：投影片製作、講解、統整

王士齊：投影片製作、講解

劉家宇：投影片製作、講解

李宥德：投影片製作、講解

張茗洋：投影片製作、講解

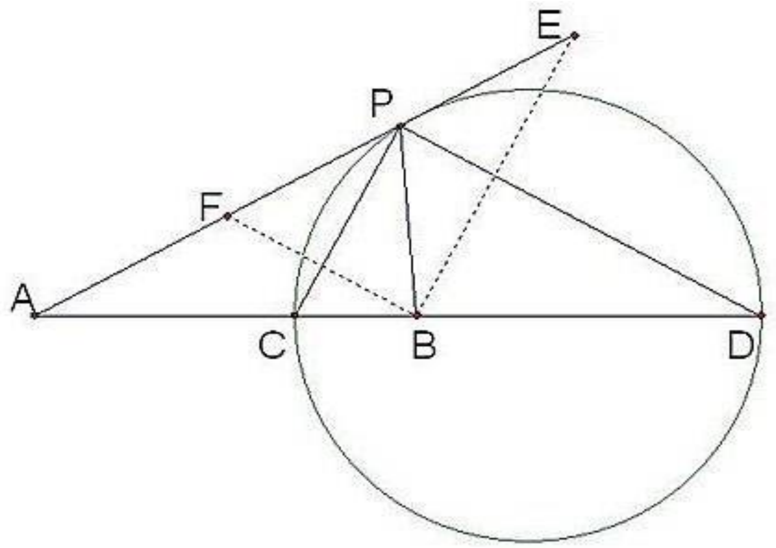
1、介紹阿波羅尼斯圓

定義：

給定平面上兩定點A、B，並且令平面上一動點P滿足

$\overline{PA}$：$\overline{PB}$ = k：1

並且$k \neq 1$，$k \geq 0$，則P集合為圓形



代數證明：

在不失一般性假設下，假設 A(0, 0)、B(d, 0)

令 P(x, y)滿足$\overline{\mathrm{PA}}$：$\overline{\mathrm{PB}}$ = k：1，$\mathrm{k} \neq 1$，$\mathrm{k} \geq 0$

$$\sqrt{x^2+y^2}:\sqrt{(x-d)^2+y^2}=k:1$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=k\sqrt{(x-d)^2+y^2}$$

整理完可得$(x-\frac{dk^2}{k^2-1})^2+y^2=(\frac{dk}{k^2-1})^2$

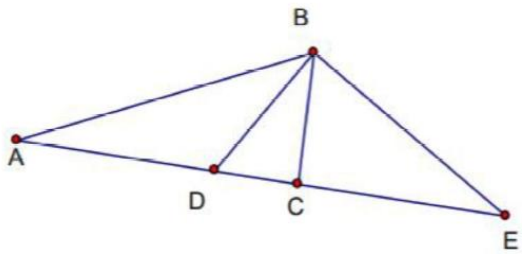
所以 P 點軌跡為圓心為$(\frac{dk^2}{k^2-1},0)$半徑為$\frac{dk}{k^2-1}$的圓

2、畫出最小正三角形

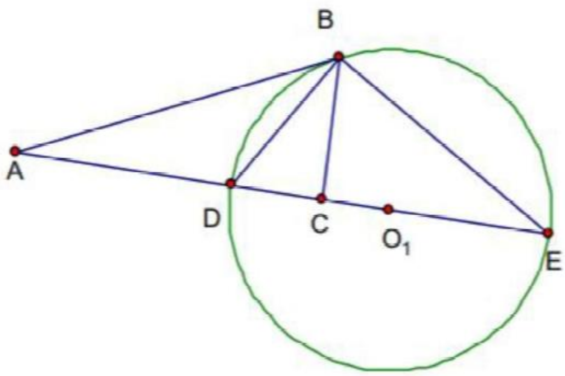
給任意三角形 ABC，找出三角形 ABC 之最小內接正三角形

步驟：

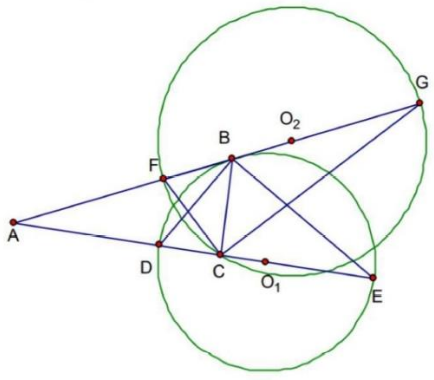
(1) 先分別作三角形 ABC 中∠ABC 的內、外角平分線，分別交$\overrightarrow{AC}$於 D、E(如下圖)



(2) 以$\overline{DE}$為直徑做圓 *以*$\overline{DE}$ *為直徑做圓*O_1



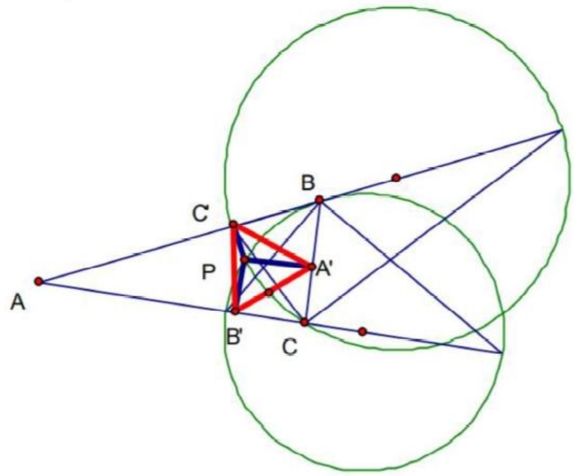
(3) 再對三角形 ABC 中∠ABC 做上述兩動作，得圓O_2



(4) 發現O_1、O_2在三角形內交點為P

(5) 由P做三角形三邊的垂足A'、B'、C'

(6) 連接三點得三角形$A'B'C'$，即為所求

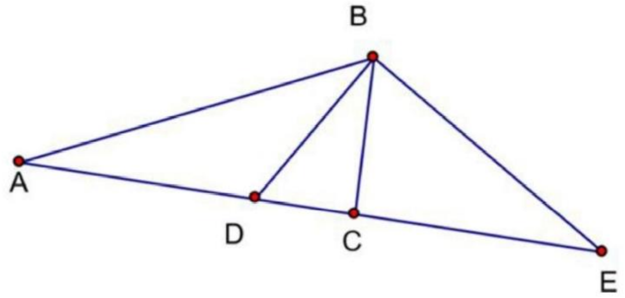


3、說明

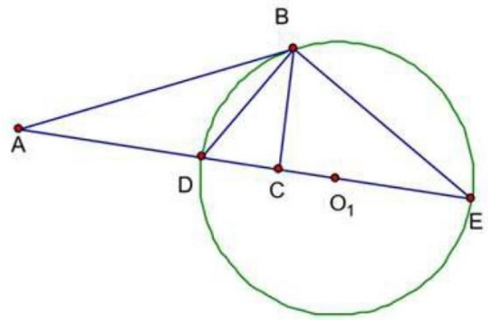
首先要先說明如此接出來的三角形是正三角形。

第一步因為做三角形 ABC 中∠ABC 的內、外角平分線，由內分比定理$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}$，由外分比定理$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$

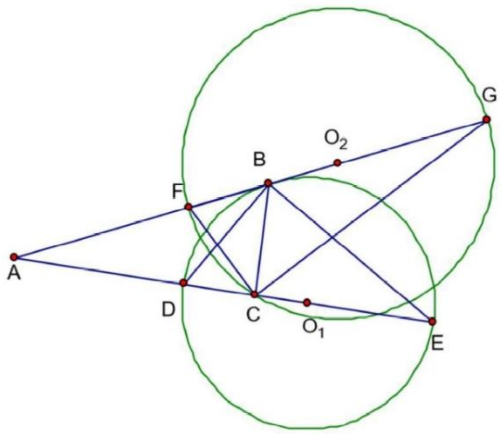
由以上兩式可得 $\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$



我們發現 B、D、E 三點分別和 A、C 的距離比相等，由阿波羅尼斯圓的定義，B、D、E 三點一定共圓，但因為是內、外角平分線，所以∠DBE=90°，因此可以用$\overline{DE}$為直徑畫圓，且 B、D、E 三點必定在圓上。



同理，圓O_2是以 A、B 為定點的阿波羅尼斯圓，並且以$\overline{FG}$為直徑。



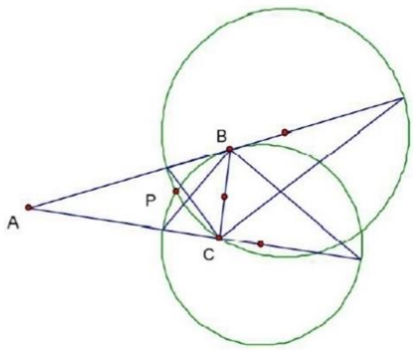
因此，O_1、O_2的交點 P，因為同時符合兩個阿波羅尼斯圓，所以：

① $\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$　　②$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$

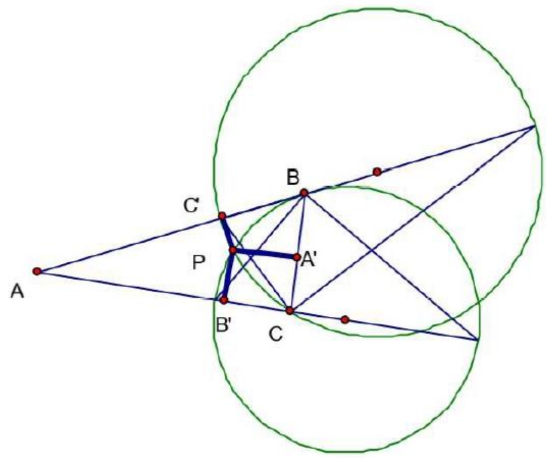
①÷②$\Longrightarrow\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

因此，我們得到一個重要關係：

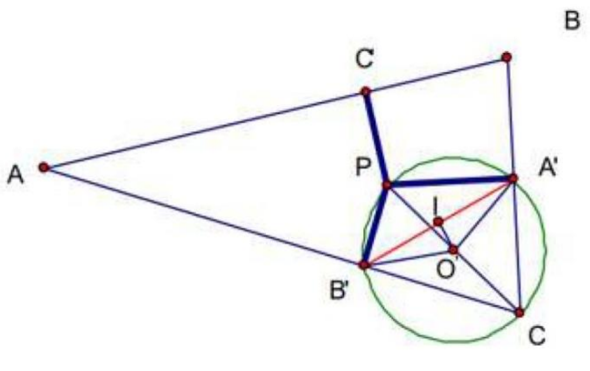
$$\overline{PA} \times \overline{BC} = \overline{PB} \times \overline{AC} = \overline{PC} \times \overline{AB}$$



接下來是由 P 點向三角形 ABC 三邊做垂線，分別交於 A'、B'、C'，接下來再看回三角形 ABC，將其特別拿出來討論。



（1） 因為做的是垂線，所以四邊形$PA'CB'$因為對角互補，必定四點共圓，找出圓心O'，做圓心到$\overline{A'B'}$的垂線，垂足I



(2) 因為$OA'B'$是等腰三角形，因此$\angle B'OI=\angle A'OI$，又因為圓周角與圓心角的關係，因此 $\angle B'OI=\angle A'OI=\angle A'CB'$

(3) 由正弦定理可知$\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{sinC} = \overline{\mathrm{PC}} \Longrightarrow \overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{PC}} \times sinC$

(4) 同理，我們可推得以下式子：

$$\overline{\mathrm{A'C'}} = \overline{\mathrm{PB}} \times sinB \text{、} \overline{\mathrm{B'C'}} = \overline{\mathrm{PA}} \times sinA$$

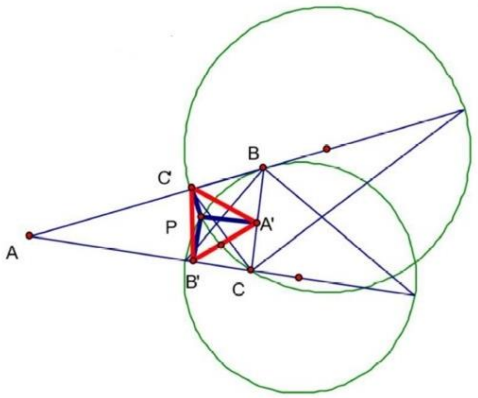
在 ABC 中，由正弦定理$\frac{\overline{BC}}{sinA} = \frac{\overline{AC}}{sinB} = \frac{\overline{AB}}{sinC} = 2R$，$R$為外接圓半徑，因此，之前的三個式子可調整為

$$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{PC}} \times sinC \Longrightarrow \overline{\mathrm{A'B'}} = \frac{\overline{PC} \times \overline{AB}}{2R}$$

$$\overline{\mathrm{A'C'}} = \overline{\mathrm{PB}} \times sinB \Longrightarrow \overline{\mathrm{A'C'}} = \frac{\overline{PB} \times \overline{AC}}{2R}$$

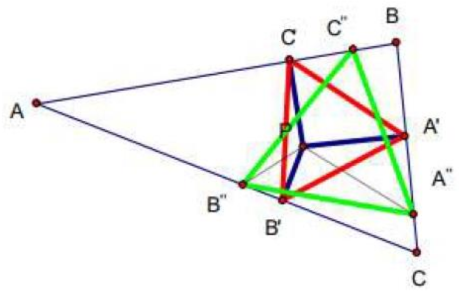
$$\overline{\mathrm{B'C'}} = \overline{\mathrm{PA}} \times sinA \Longrightarrow \overline{\mathrm{B'C'}} = \frac{\overline{PA} \times \overline{BC}}{2R}$$

但是我們在說明的第 4 步驟時又得到$\overline{PA} \times \overline{BC} = \overline{PB} \times \overline{AC} = \overline{PC} \times \overline{AB}$，因此，我們就證明了$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{A'C'}} = \overline{\mathrm{B'C'}}$，也就是我們用這樣的方法做出來的三角形是一個正三角形。

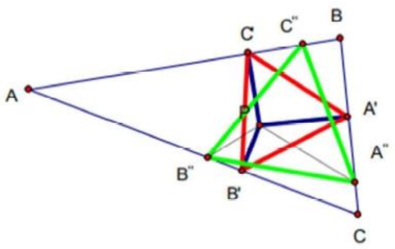


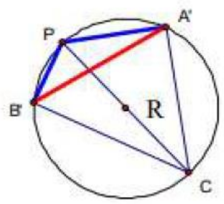
4、要說明這個三角形為最小

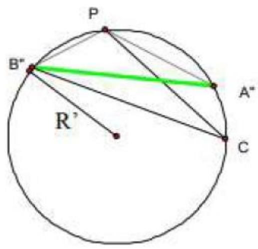
如果我們在$\overline{BC}$上另取一點A''，並且以A''作內接正三角形$A''B''C''$，而$A''B''C''$可以視為$A'B'C'$以 P 為中心旋轉而得。



我們注意四邊形$PA''CB''$，在前面提到，因為四邊形$PA'CB'$是圓內接四邊形，$\angle B'PA'$和$\angle C$ 互補，所以不管A''在哪裡，只要能做出正三角形，則一定$\angle B''PA''$=$\angle B'PA$(因為旋轉)，所以一定都有四點共圓的性質，而這些四點共圓之中，又以$\overline{PC}$為直徑的圓半徑最小。







且根據前面，$\frac{\overline{A'B'}}{sinC} = 2R$、$\frac{\overline{A''B''}}{sinC} = 2R'$

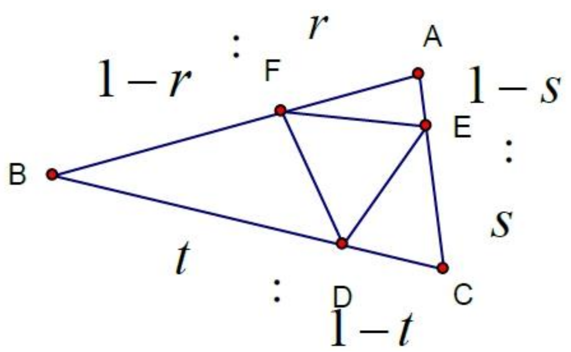
$\overline{A'B'} = 2R \times sinC$、$\overline{A''B''} = 2R'sinC$

$$R' > R \quad \therefore \overline{A'B'} < \overline{A''B''}$$

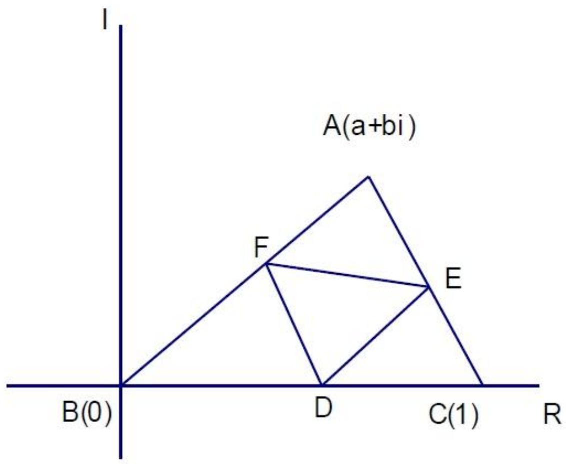
因此，只要不是在垂直的所做出來的正三角形，所對應到的外接圓半徑必定都比之前的大，所以邊長也都比之前的大，所以$\Delta A'B'C'$為最小正三角形。

5、代數證明三角形為最小

若三角形 ABC 中的內接正三角形 DEF，D在 $\overline{BC}$ 上、E在 $\overline{AC}$ 上、F在 $\overline{AB}$ 上、且設 $\overline{BD}:\overline{DC}=t:1-t$、 $\overline{\mathrm{CE}}:\overline{\mathrm{EA}}=s:1-s$、 $\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{FB}}=r:1-r$，則當 $t+s+r=\frac{3}{2}$ 時，這時的內接正三角形邊長最小，所以面積也會最小。



因為 ABC 為任意給的三角形，為了說明的完整性，我們將 ABC 放在複數平面上，而且令為 $B(0)$、$C(1)$、A 為 $a+bi$



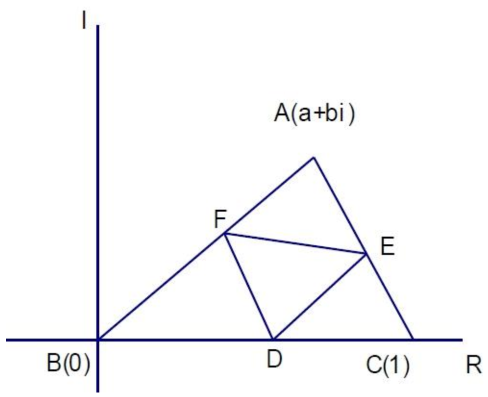
$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=t:1-t\ \Longrightarrow$D點座標為 t

$\overline{\mathrm{CE}}:\overline{\mathrm{EA}}=s:1-s\ \Longrightarrow$ E點座標為 $(as-s+1)+(bs)i$

$\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{FB}}=\mathrm{r}:1-\mathrm{r}\ \Longrightarrow$F點座標為 $(a-ar)+(b-br)i$

$\therefore \overline{\mathrm{DE}}=(as-s+1-t)+(bs)i$

$\overline{\mathrm{DF}}=(a-ar-t)+(b-br)i$



又由複數的棣美弗定理：

$\therefore \overline{\mathrm{DE}}\times(cos60°+\ isin\ 60°)=\overline{\mathrm{DF}}\ \ (\because \angle FDE=60°)$

$$\therefore [(as-s+1-t)+(bs)i]\times\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=(a-ar-t)+(b-br)i$$

乘開之後實部=實部、虛部=虛部，會得到以下的等式：

$$\left(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}b}{2}-\frac{1}{2}\right)s-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}=a-ar-t\ \cdots\cdots①$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)s-\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}=b-br\ \cdots\cdots②$$

接下來要逐步的把t、s、r 等未知數的關係用a、b表示，

先把上兩式改寫成：

$-ar=\left(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}b}{2}-\frac{1}{2}\right)s+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}-a$ ⋯⋯③

$-br=\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)s-\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}-b$ ⋯⋯④

兩式相除，消去r，同時分子分母同乘2，會得到：

$$\frac{a}{b}=\frac{\left(a-\sqrt{3}b-1\right)s+t+1-2a}{\left(\sqrt{3}a+b-\sqrt{3}\right)s-\sqrt{3}t+\sqrt{3}-2b}$$

交叉相乘：

$$\left(\sqrt{3}a^2+ab-\sqrt{3}a\right)s-\sqrt{3a}t+\sqrt{3}a-2ab$$
$$=\left(ab-\sqrt{3}b^2-b\right)s+bt+b-2ab$$

移項整理，左邊把有s 的整理起來，右邊把t和沒有 t分開，所以會得以下式子：

$$\left(\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b\right)s=\left(\sqrt{3a}+b\right)t+(b-\sqrt{3}a)$$

把s前係數移項：

$s=\frac{\sqrt{3}a+b}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}t+\frac{b-\sqrt{3}a}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}$ ⋯⋯⑤

就可得到s和t的關係。

同理，如果我們如果我們在一開始的①、②改寫成：

$$\left(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}b}{2}-\frac{1}{2}\right)s=a-ar-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)s=b-br+\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

同樣的兩式相除，這次就會消去s，再經由和上面一模一樣的相乘整理，最後得到r和t的關係：

$$r=\frac{\sqrt{3}+b-\sqrt{3}a}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}t+\frac{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a-b}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}\ \cdots\cdots⑥$$

我們再次回到原先假設的那個三角形，之前說到Ｅ點座標

為（$as-s+1$)+$(bs)i$，Ｆ點座標為$(a-ar)+(b-br)i$，

把⑤、⑥代入，則 E、F 點在直角座標可變成：

E:〔$\frac{(\sqrt{3}a^2+ab-\sqrt{3}a-b)t+(ab+\sqrt{3}b^2)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b},\frac{(\sqrt{3}ab+b^2)t+(-\sqrt{3}ab+b^2)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}$〕

F:〔$\frac{(\sqrt{3}a^2-ab-\sqrt{3}a)t+2ab}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b},\frac{(\sqrt{3}ab-b^2-\sqrt{3}b)t+2b^2}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}$〕

利用兩點距離公式，則$\overline{EF}$就可寫成：

$$\sqrt{\left[\frac{(2ab-b)t+(-ab+\sqrt{3}b^2)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}\right]^2+\left[\frac{(2b^2+\sqrt{3}b)t+(-\sqrt{3}ab-b^2)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}\right]^2}$$

我們可以發現，根號裡面是t的二次式，所以擁有最小值，

所以我們對根號裡進行配方，又因為分母是一樣的，所以

對以下的式子配方即可：

$$[(2ab-b)t+\left(-ab+\sqrt{3}b^2\right)]^2+[\left(2b^2+\sqrt{3}b\right)t+(-\sqrt{3}ab-b^2)]^2$$

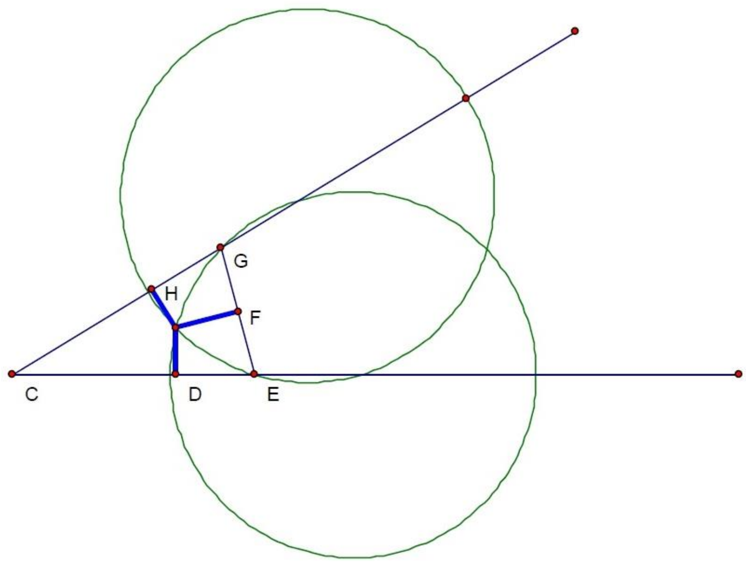
發現了當: $t=\frac{1}{2}+\frac{2a-1}{2a^2+2b^2-2a+2\sqrt{3}b+2}$

這時$\overline{EF}$會最小，再把這時候的 t 代回⑤、⑥兩式，就得到

$t+s+r=\frac{3}{2}$，由此可驗證一開始的假設。

最後再將剛剛畫出的圖代入，可得$\mathrm{t}+\mathrm{s}+\mathrm{r}=\frac{3}{2}$，因此可證

明尺規作圖的方法是正確的。



$\overline{CD} = 2.70cm$ $\overline{\mathrm{EF}} = 1.07cm$ $\overline{\mathrm{GH}} = 1.32cm$

$\overline{\mathrm{CE}} = 4.00cm$ $\overline{\mathrm{EG}} = 2.16cm$ $\overline{\mathrm{GC}} = 4.02cm$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{\mathrm{CE}}} + \frac{\overline{\mathrm{EF}}}{\overline{\mathrm{EG}}} + \frac{\overline{\mathrm{GH}}}{\overline{\mathrm{GC}}} = \frac{3}{2}$$

參考資料：

https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/48/senior/040416.pdf

https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=37&a=6821&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=7&sid=4839