

魔幻三角形

Magic Triangle

第7組

410631242 吳承遠

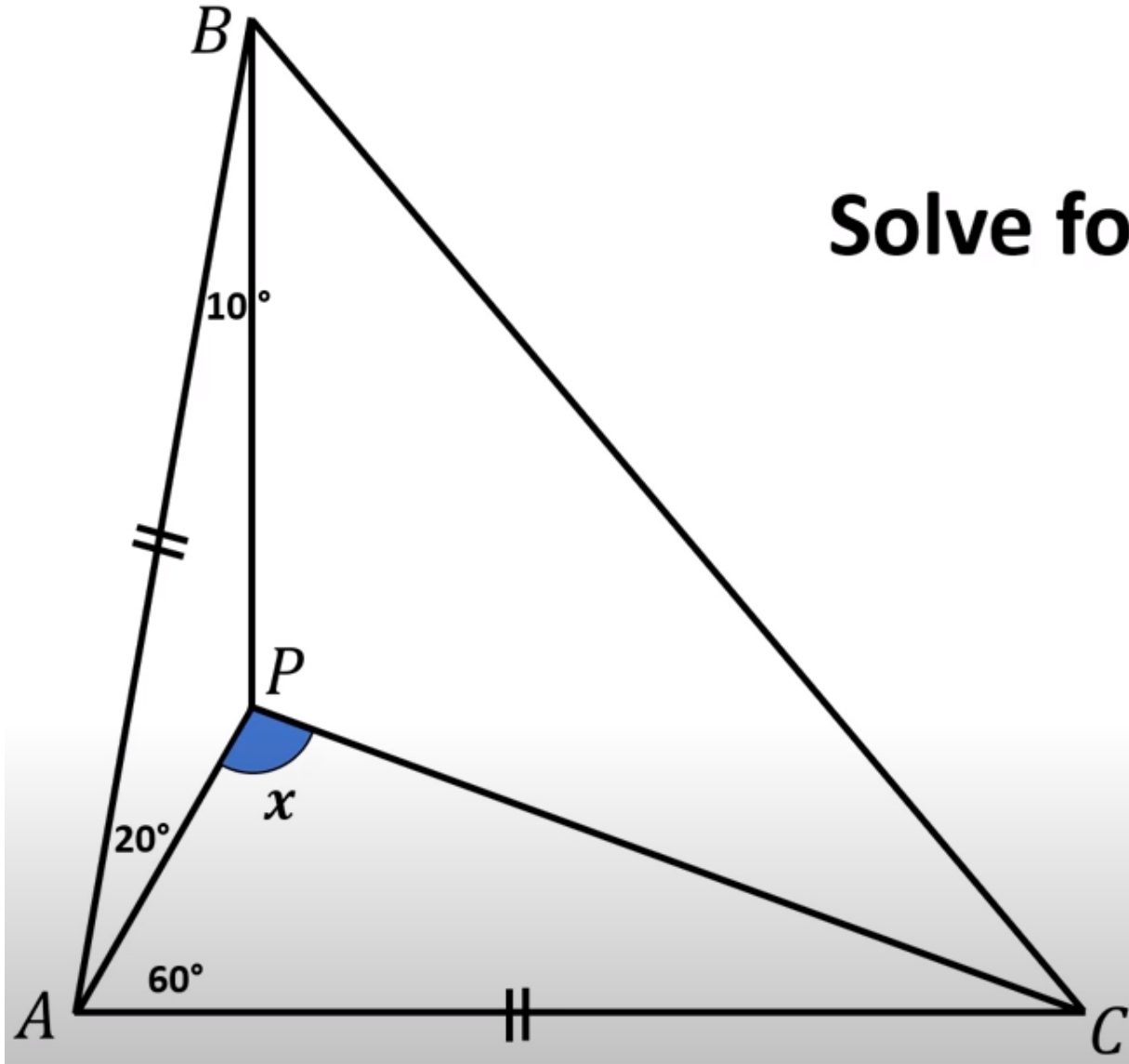
410531236 林柏安

410831242 吳明珠

410631210 高浚洋

Question:

Solve for x .



三角形求角度常用定理

1. 相似形

2. 全等

3. 平行線截比例線段

4. 餘弦定理

5. 輔助線

6. 三角形三心性質

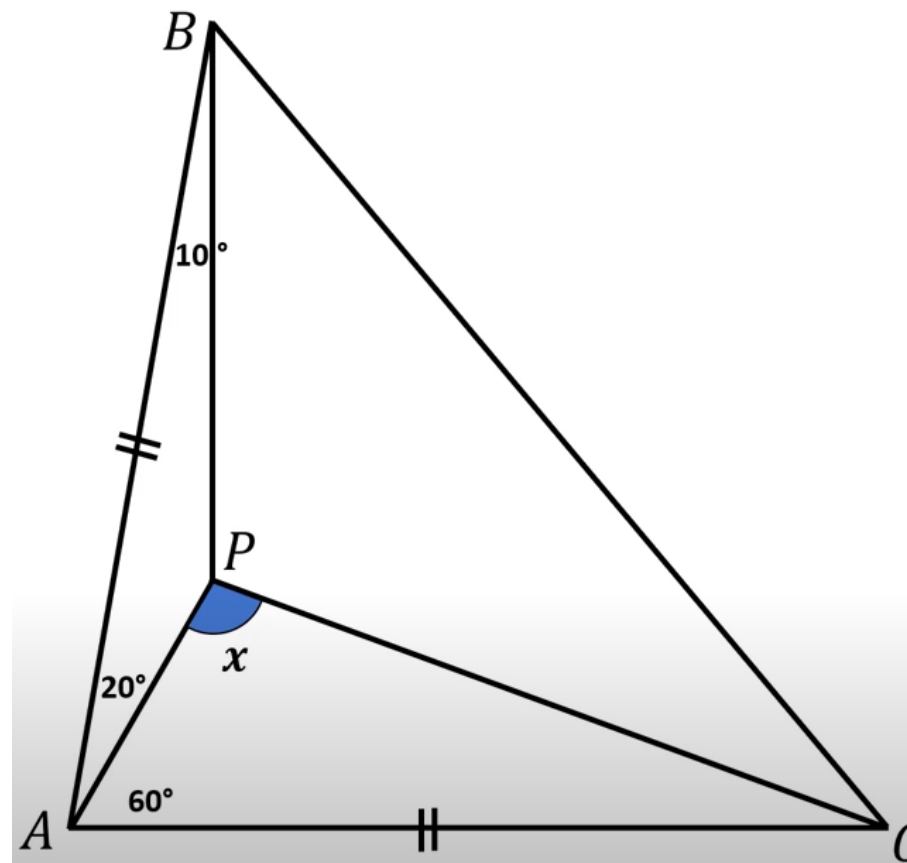
Solution:

STEP 1

$$AB = AC$$

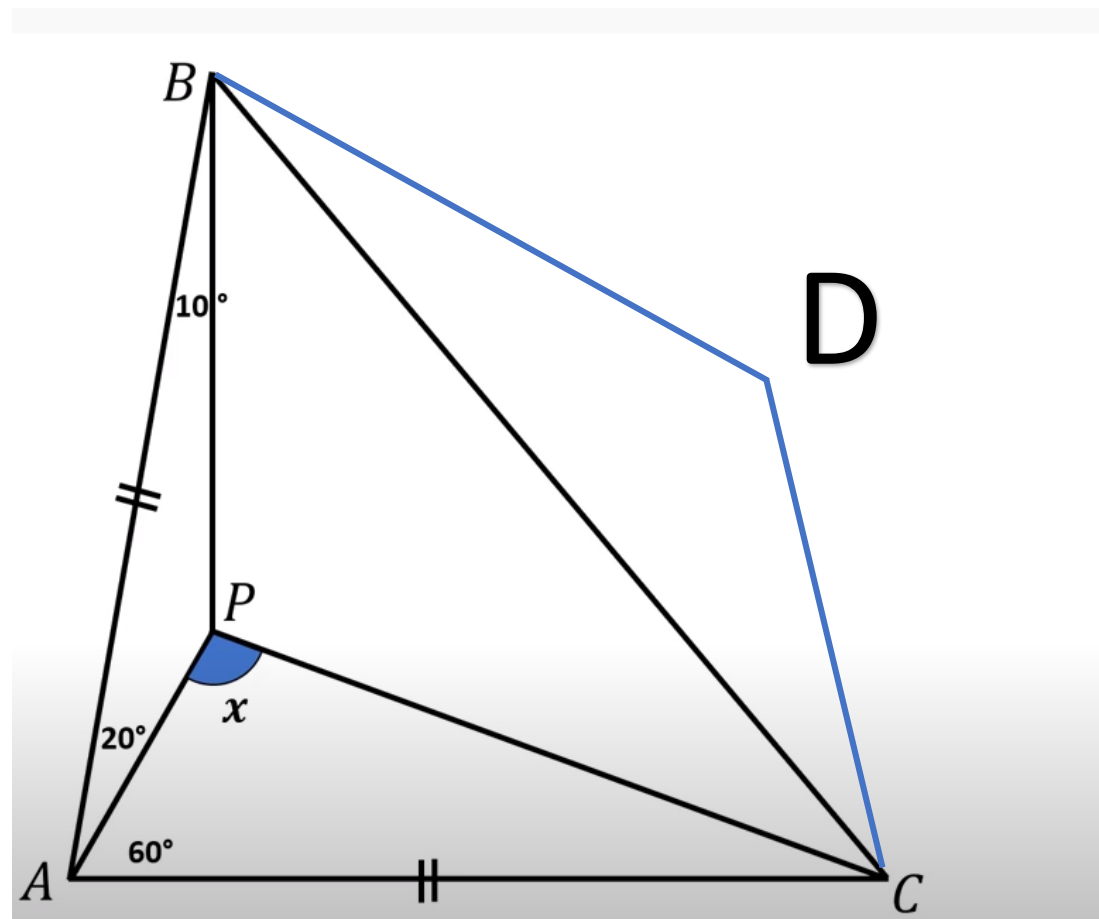
$$\text{而且 } \angle PBC = 3x \angle PAB$$

可以做一條AD使 $\angle PAD = 40^\circ$ 度



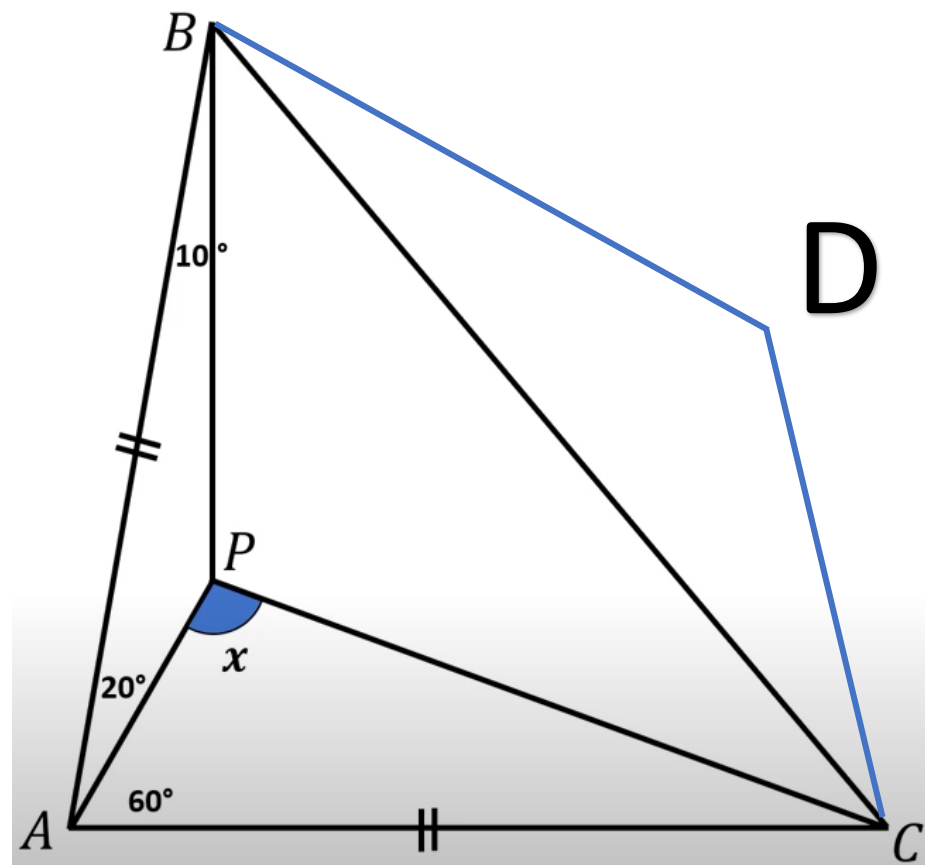
STEP 2

連接BD CD 得到兩個全等三角形



要得到X 要先知道 $\angle PCA$

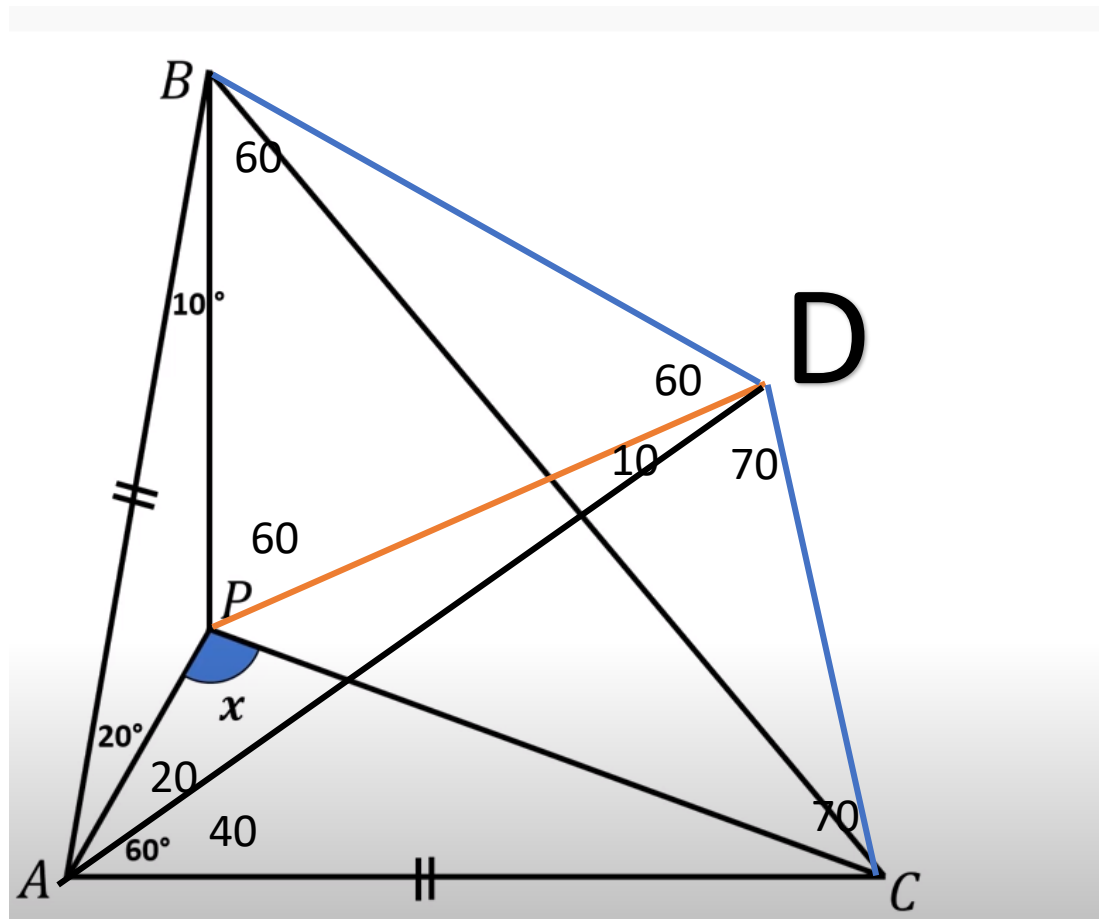
$\angle DCA = \angle ADC = 70^\circ$



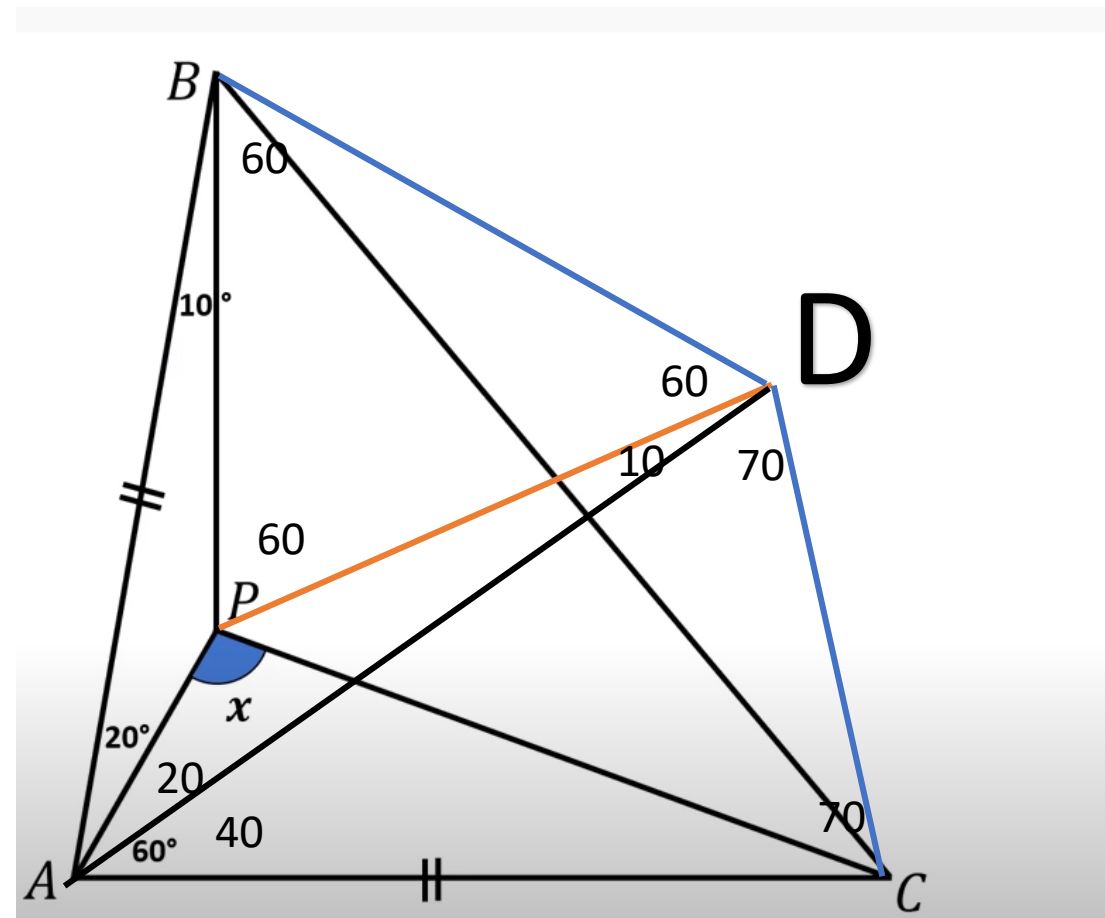
連接PD

因為BAD是等腰三角形 且BAP和DAP全等

我們可以得到BPD是正三角形 所以 $DP=DC$

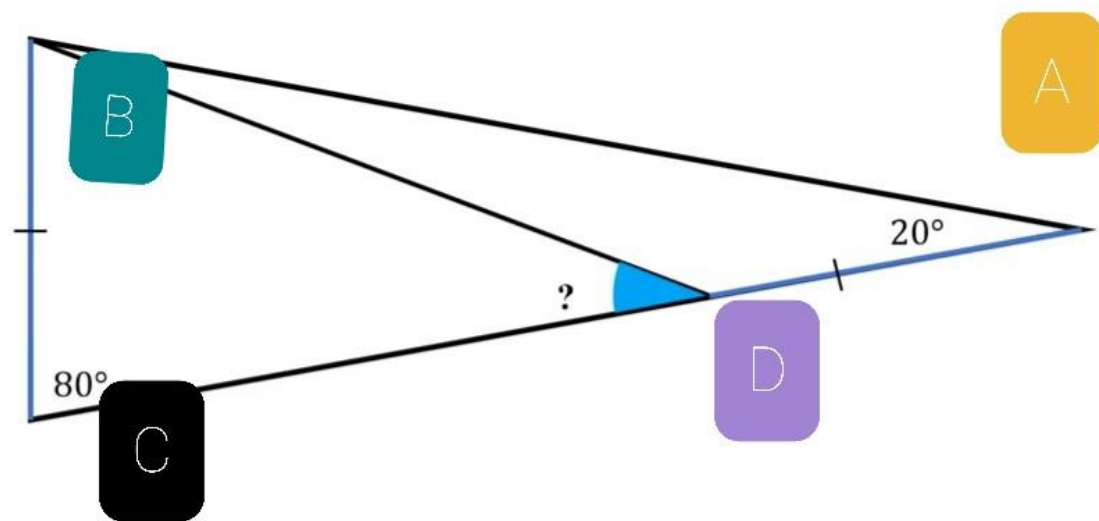


因為 $DP=DC$ 所以 PDC 是等腰三角形
 可得角 $DPC=50$ 度
 因此 $x=360-150-60-50=100$



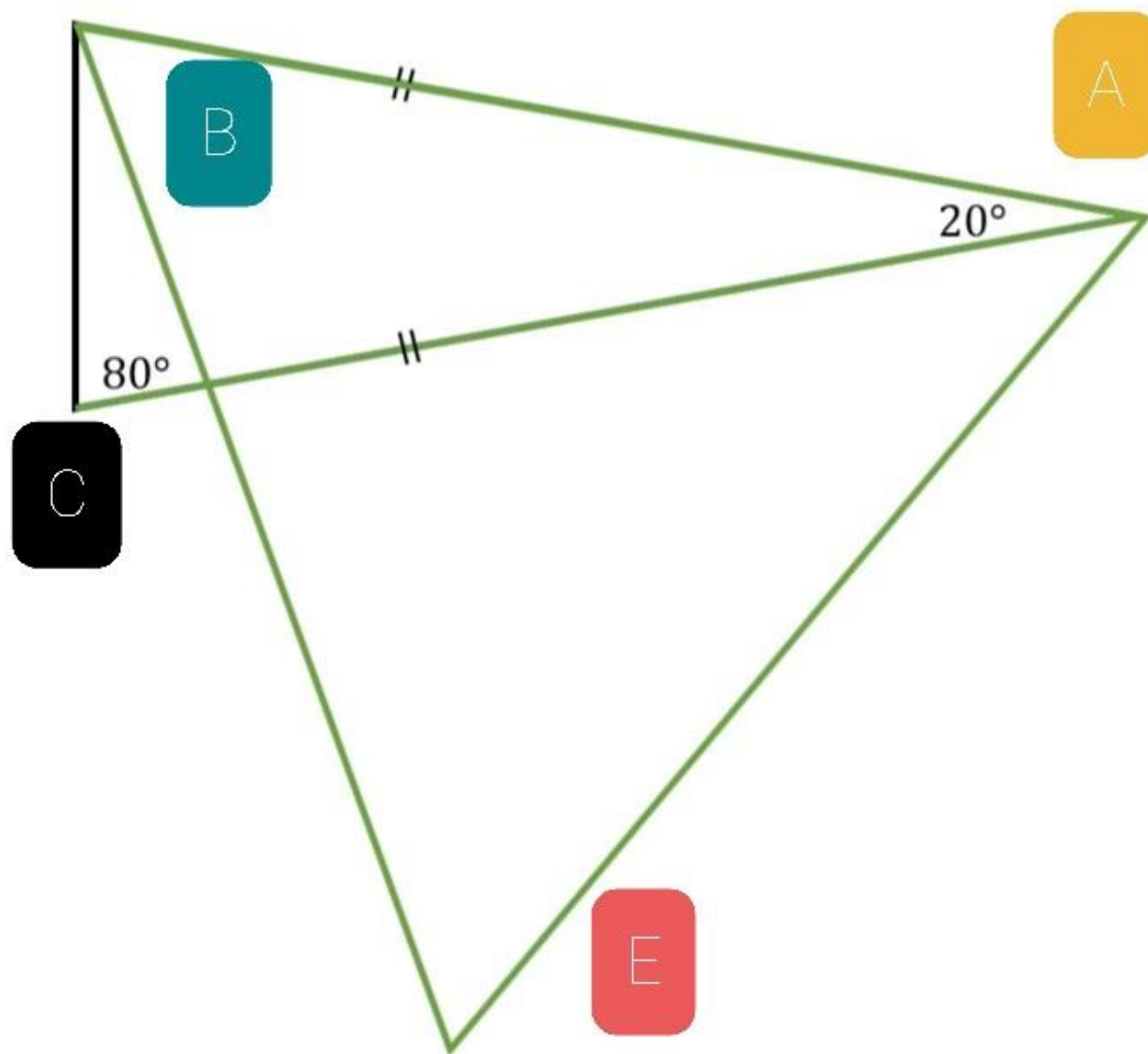
Question:

今有一等腰三角形ABC如圖
若在AC上取一點D使得 $AD=BC$
求 $\angle BDC=?$



Solution:

取一點E使得三角形ABE
為一正三角形



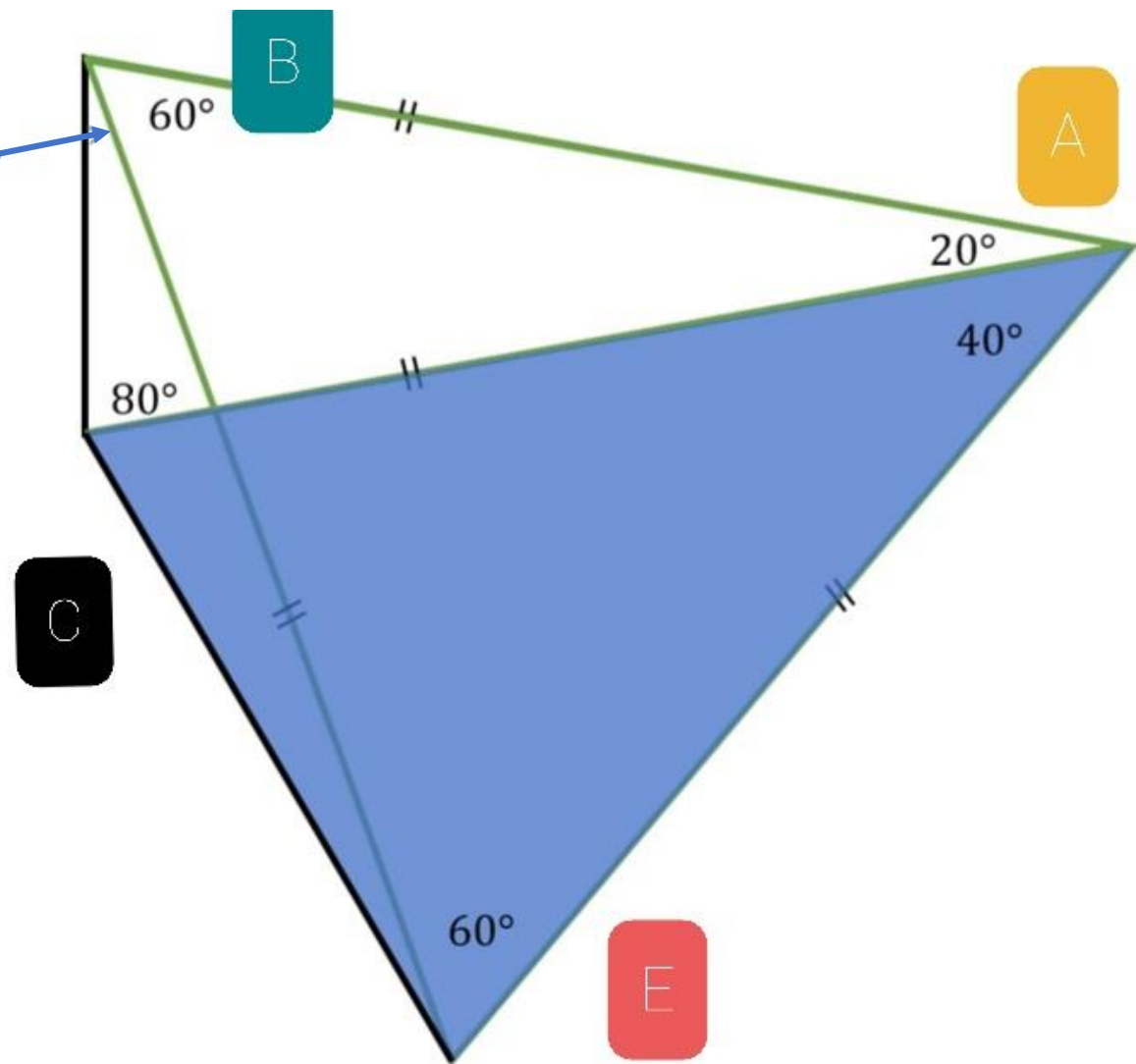
已知 $\triangle ABE$ 為正三角

則我們知道 $\angle EBC = 80 - 60 = 20$ 度

已知 $\triangle CAE$ 為等腰因為

$AB = AE = EC$ 可知 $\angle AEC$ 與 $\angle ECB$ 為 $(180 - 40) / 2 = 70$

則 $\angle BEC = 70 - 60 = 10$ 度



最後我們可以找到 $\angle EBC = 20^\circ$

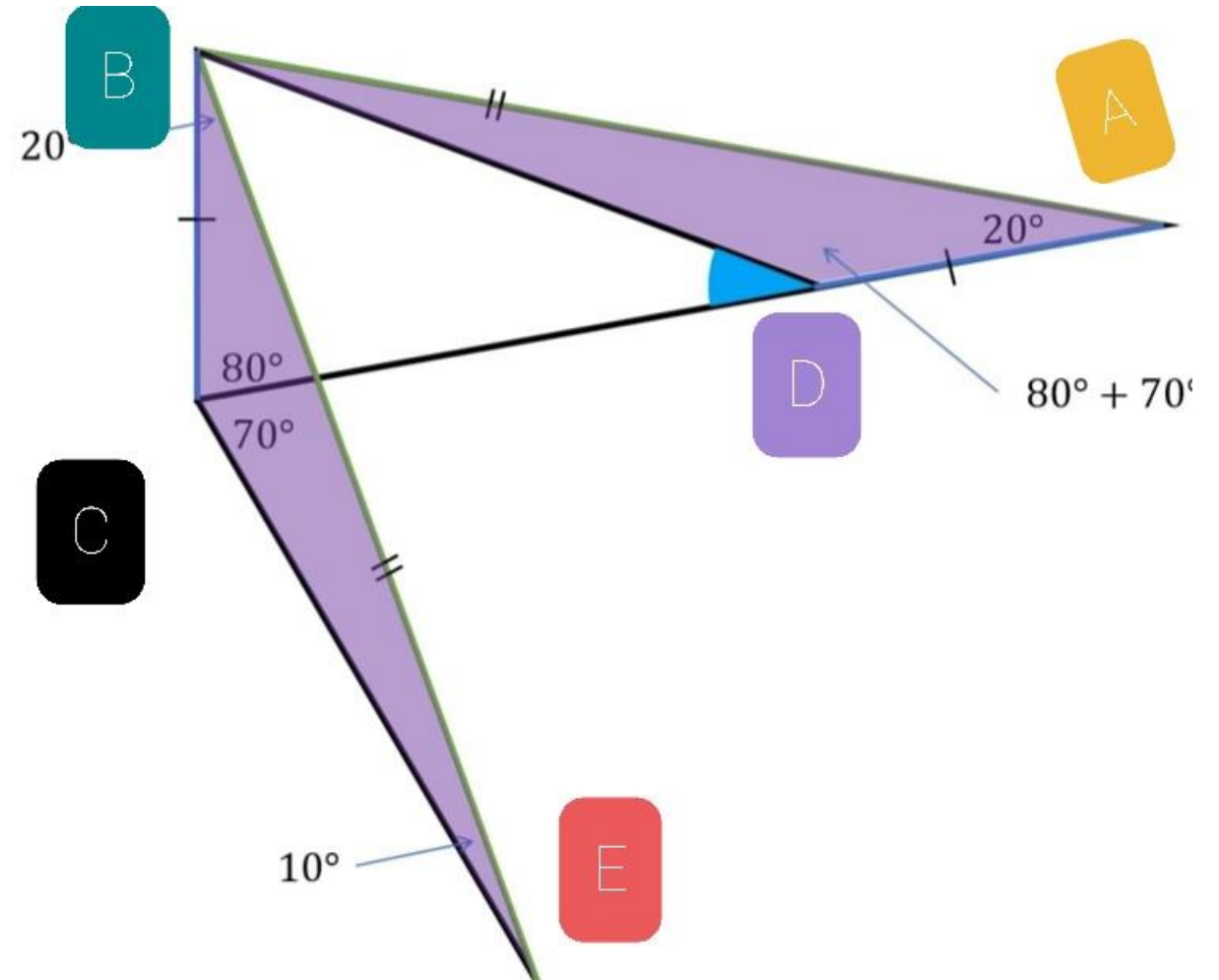
以及題目給的 $BC = AD$

還有取正三角形而得的 $AB = BE$

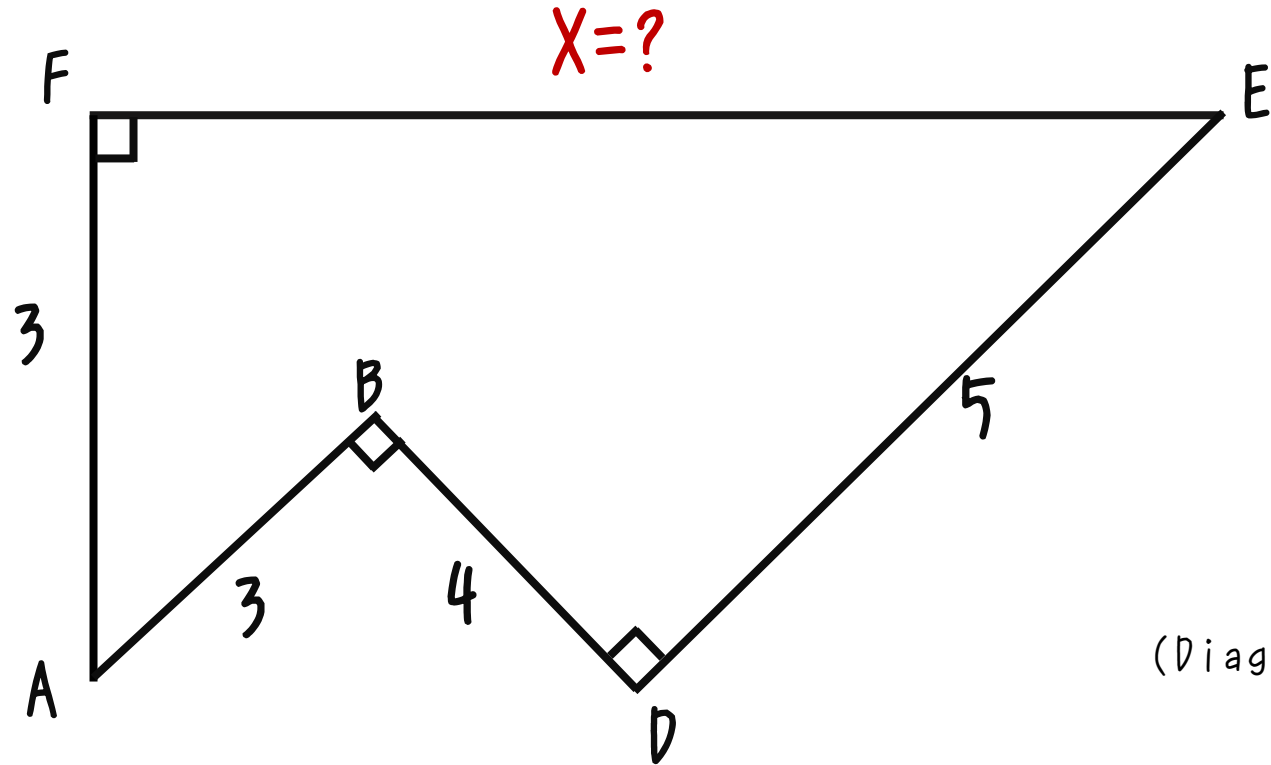
而形成一個SAS全等三角形

得知 $\angle BCD = \angle ADB = 150^\circ$

則 $\angle BDC = 180 - 150 = 30^\circ$



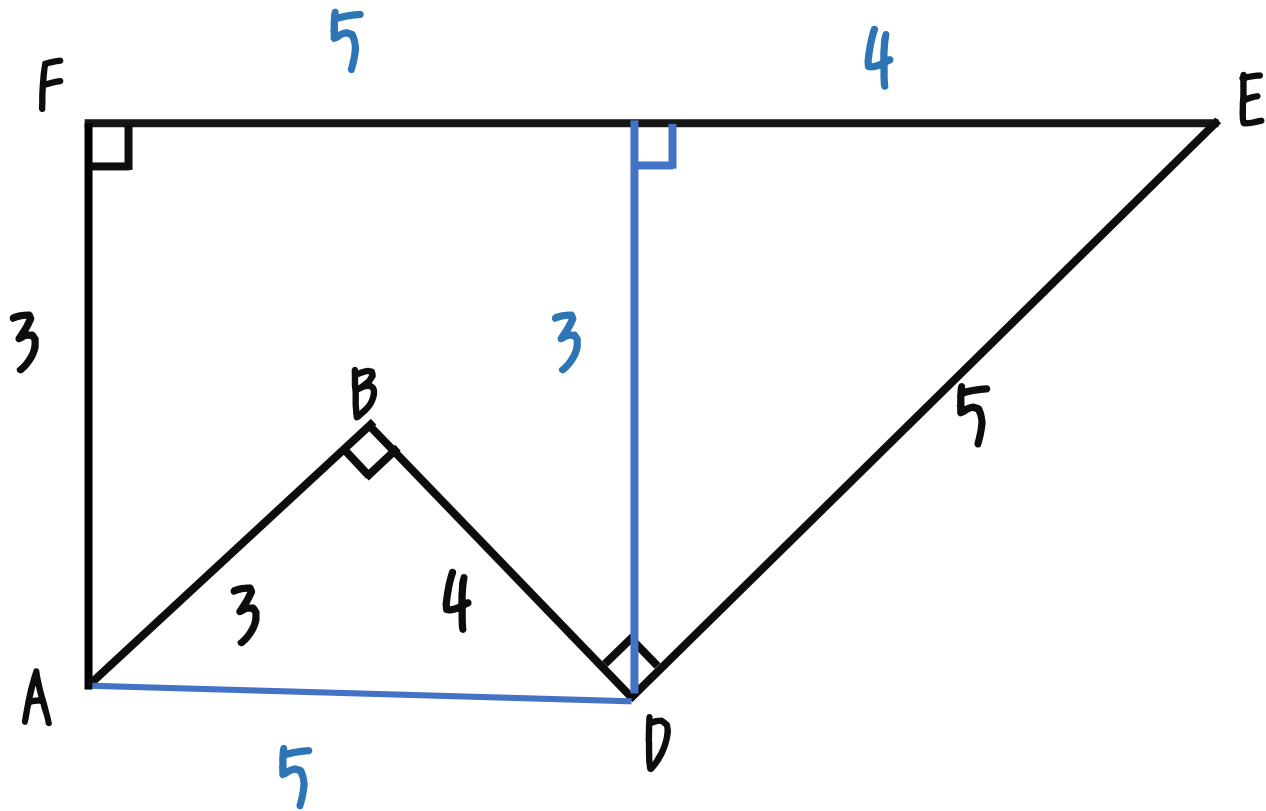
Q: What is The Length?

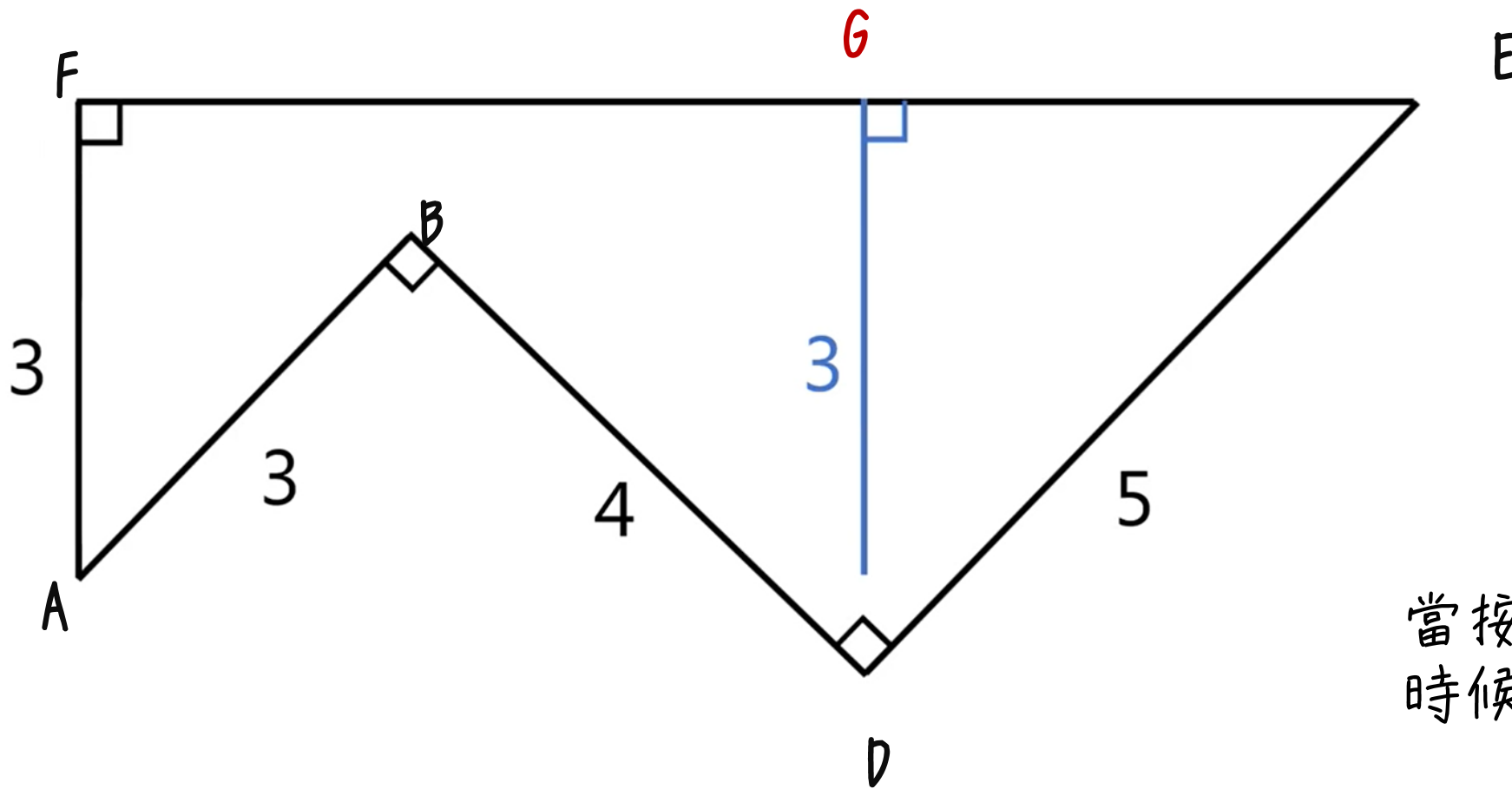


(Diagram not to scale)

(Mind your decisions- Michael Timothy)

【Wrong Method】

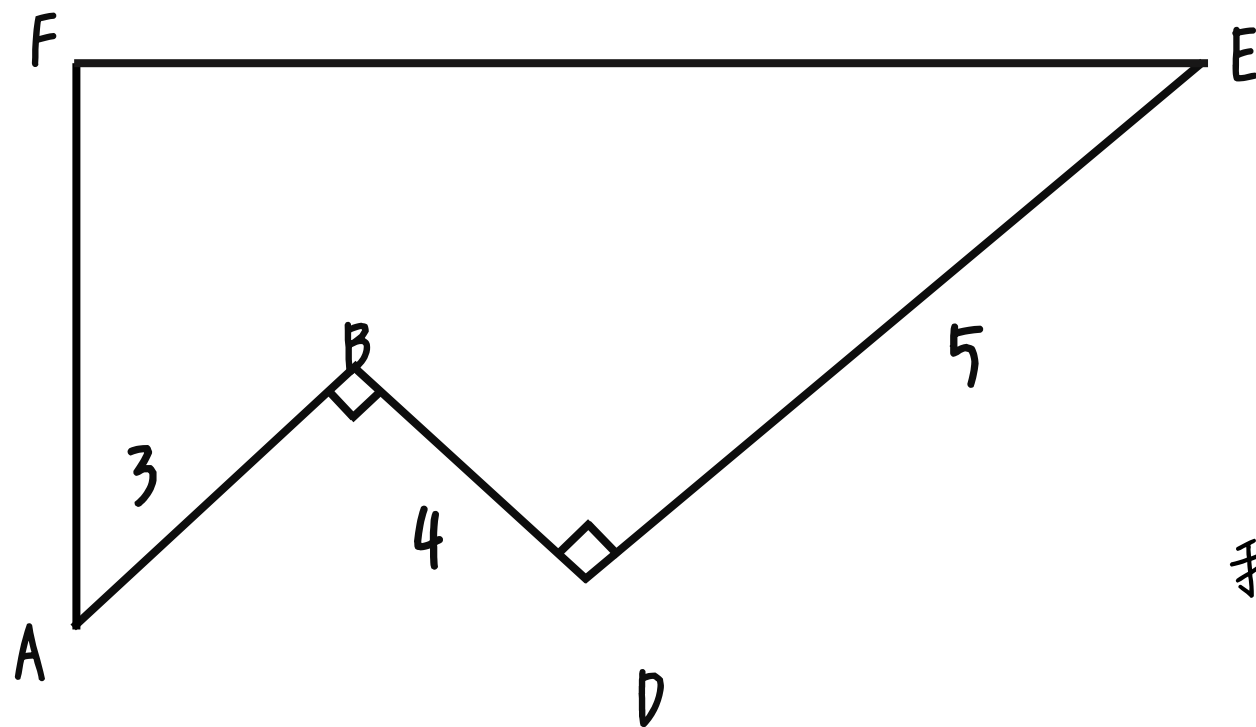




當按照比例去畫圖的時候， $GD \neq 3$

(Diagram to scale)

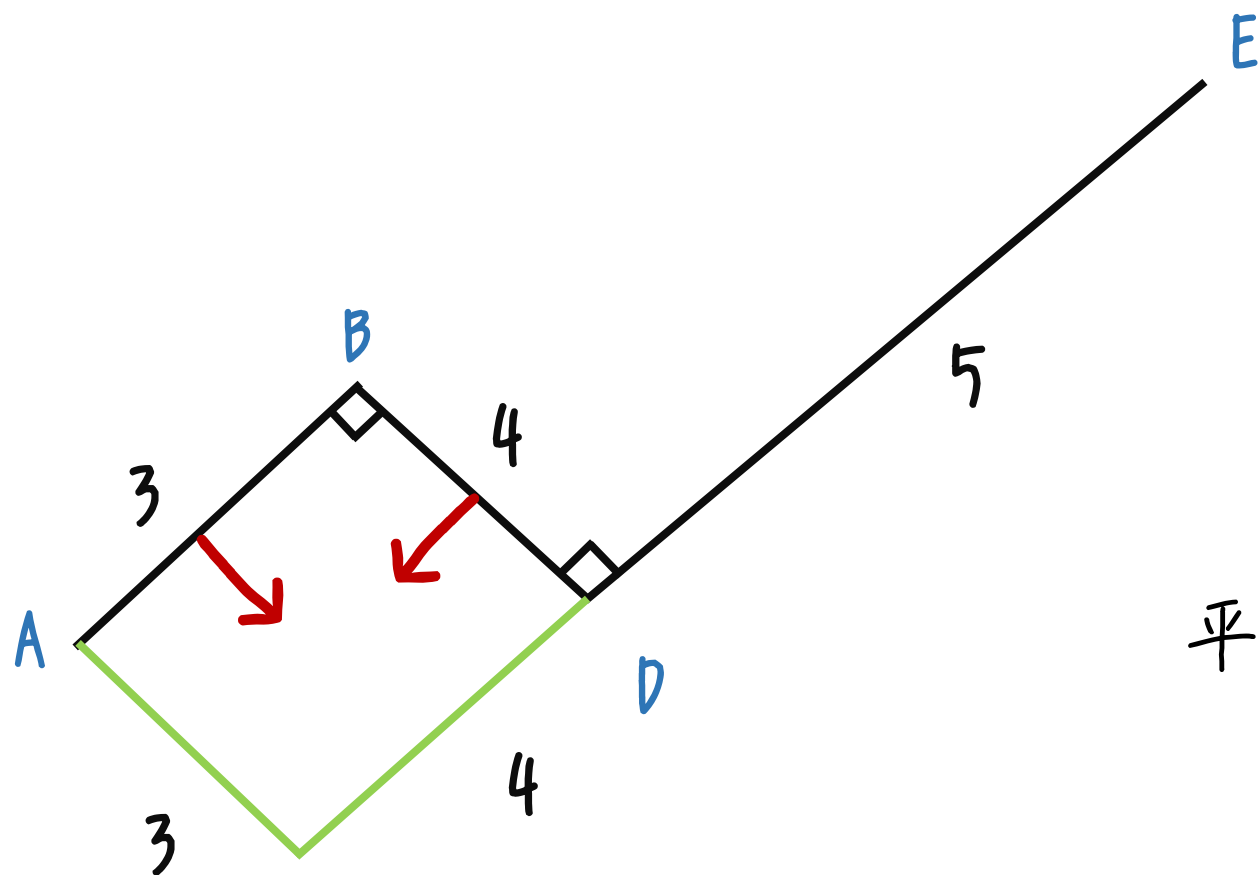
【Video】Solution



我們先拿掉AF和FE

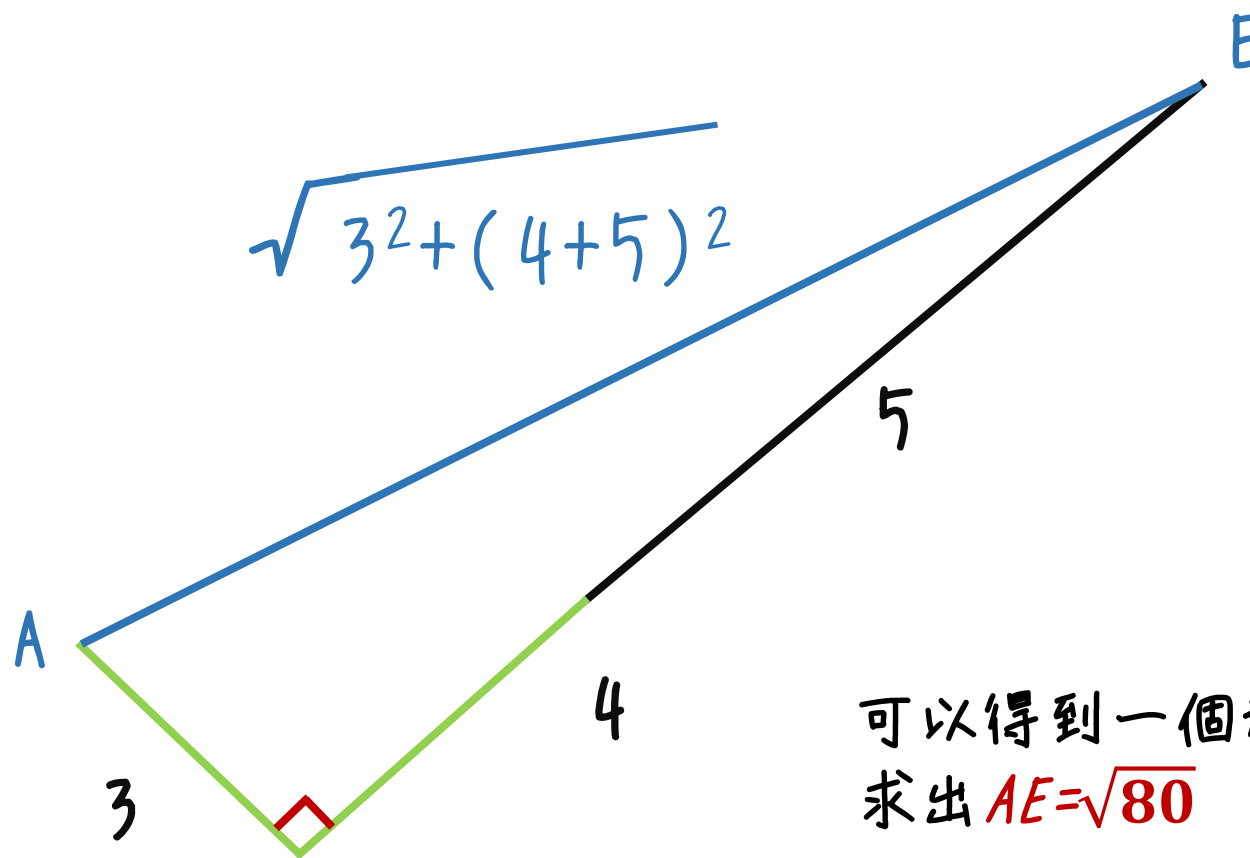
(Diagram not to scale)

【Video】Solution



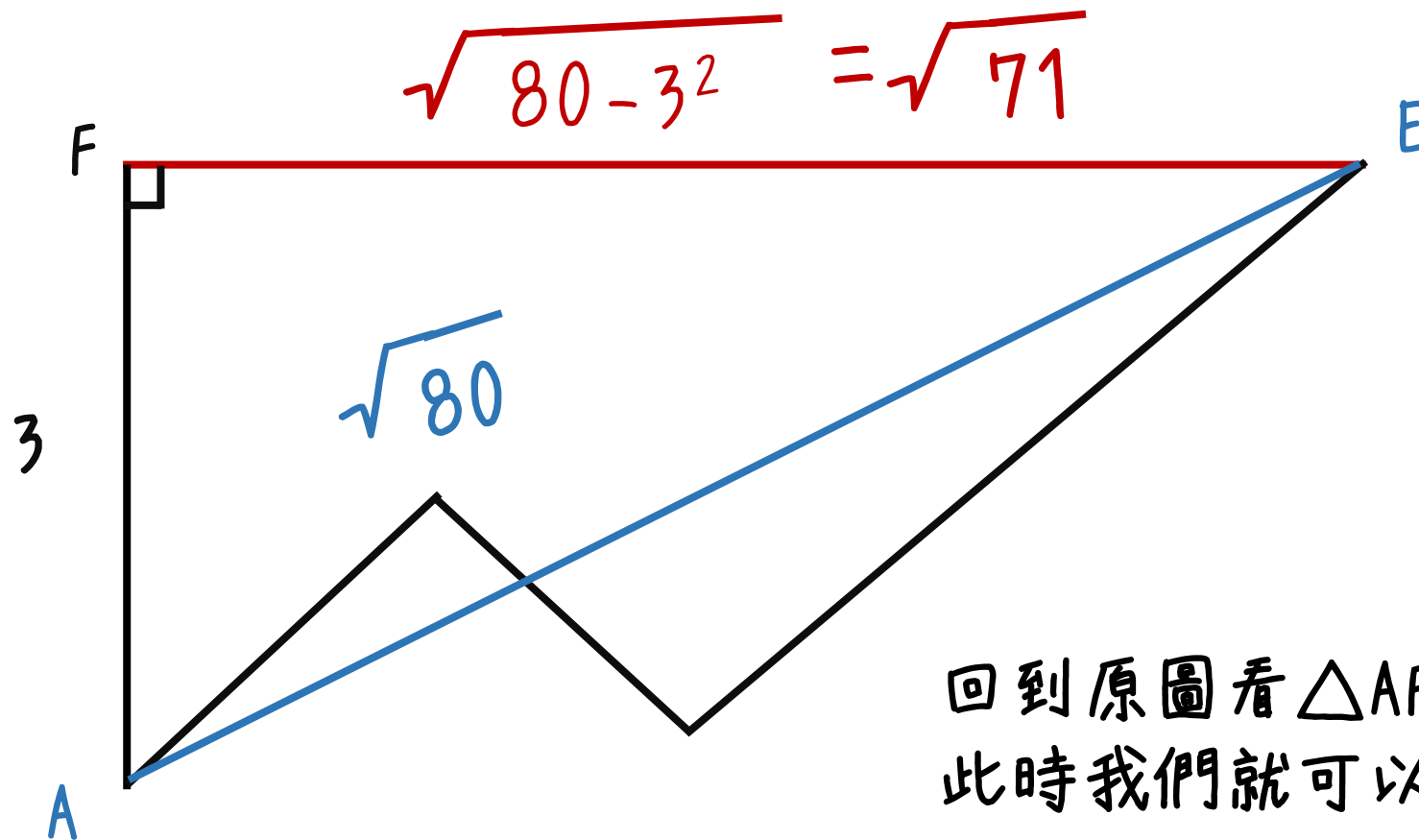
平移線段BD和AB

【Video】Solution



可以得到一個和AE相關的直角三角形
求出 $AE = \sqrt{80}$

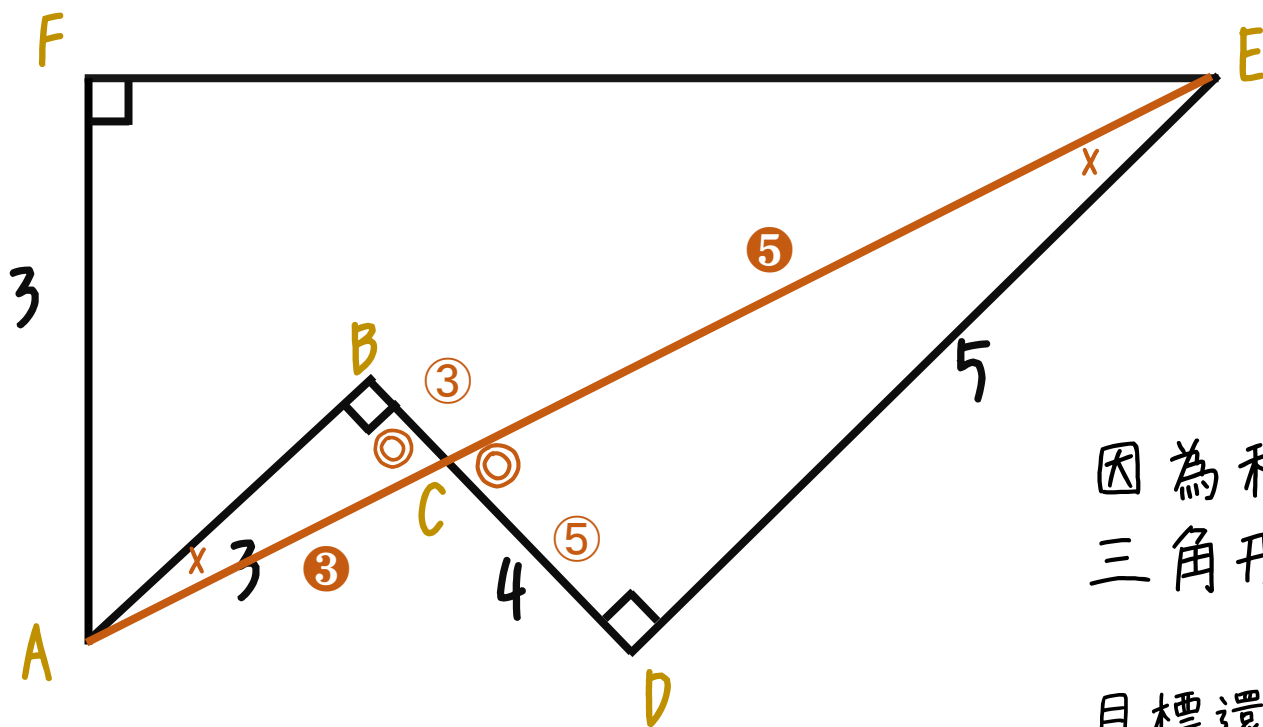
【Video】Solution



回到原圖看 $\triangle AFE$

此時我們就可以求線段 $EF = \sqrt{71}$

【用相似形解】

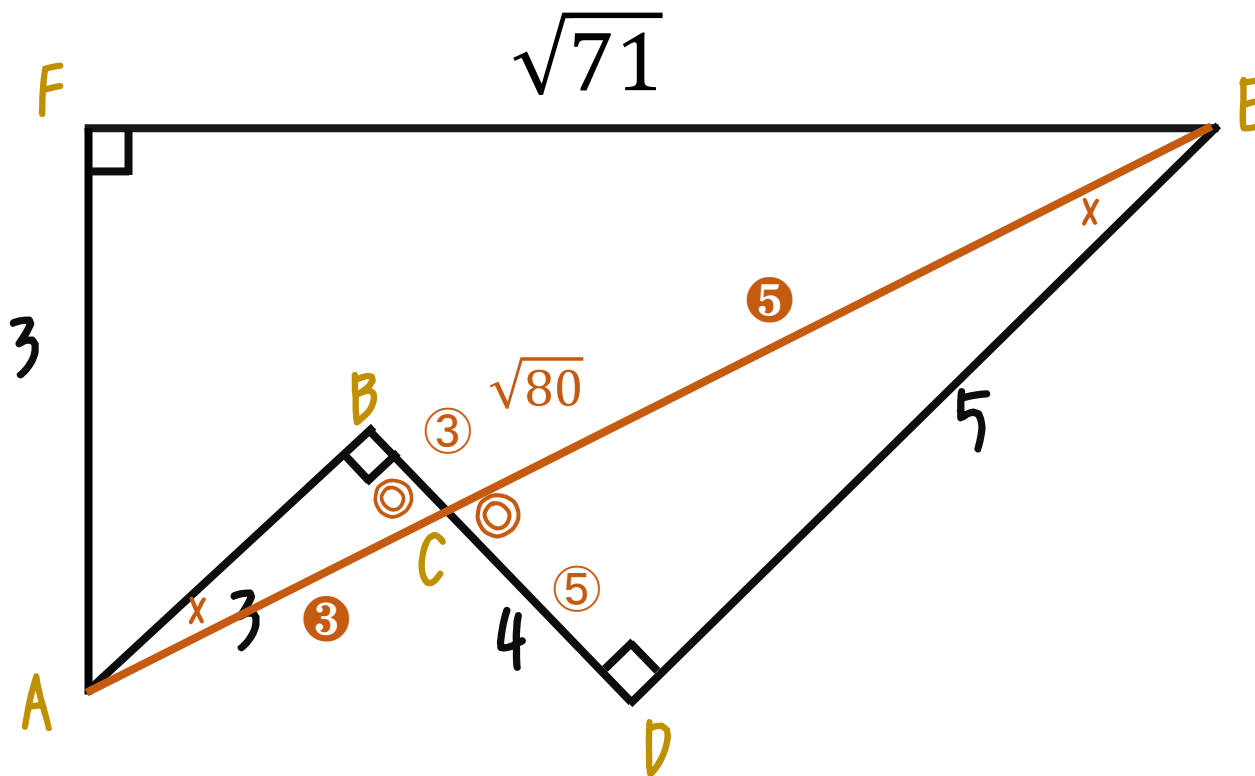


因為和EF線段最相關的
三角形還是 $\triangle AEF$

目標還是先求出AE

→連接AE

【用相似形解】



$$\triangle ABC \sim \triangle EDC$$

$$BC = \frac{3}{2}, CD = \frac{5}{2}$$

$$AC = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$CE = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow AE = \sqrt{80}$$

$$\triangle AEF$$

$$AF = 3$$

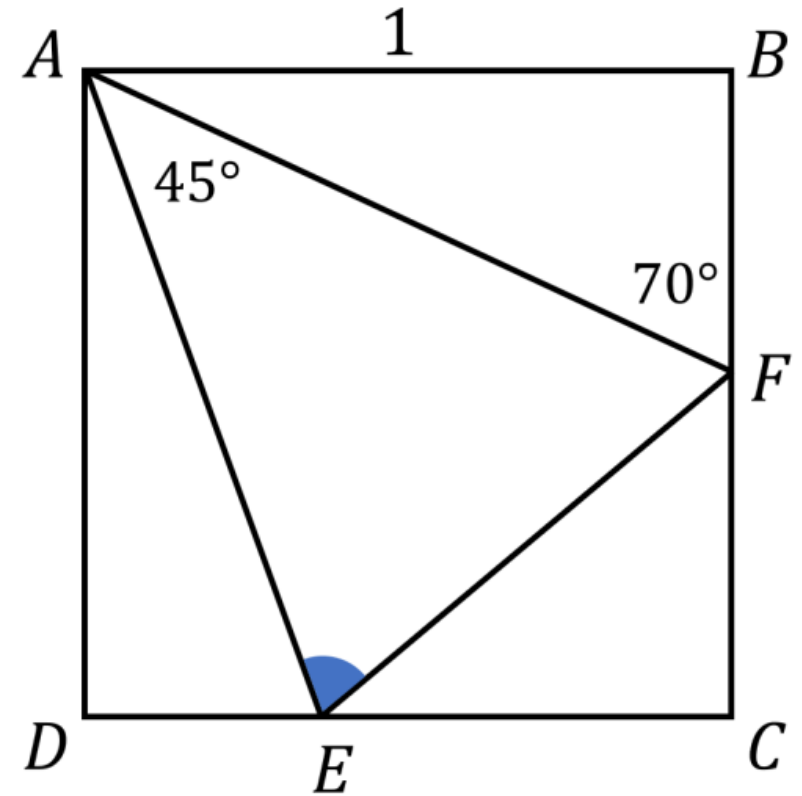
$$AE = \sqrt{80}$$

$$EF = \sqrt{71}$$

Question:

在ABCD為正方形

$\angle AFB = 70^\circ$ $\angle EAF = 45^\circ$ $AB = 1$ 的條件下
求 $\angle AEF = ?$ 、 $EC + CF + FE = ?$



這一題可以先利用正方形和三角形的性質得到需要的資訊

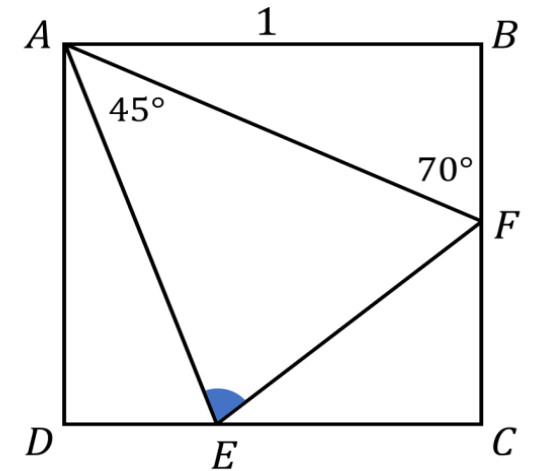
因為 $ABCD$ 為正方形，可得 $\angle ABF = 90^\circ$

因為 ABF 為三角形，進而得出 $\angle FAB = 20^\circ$

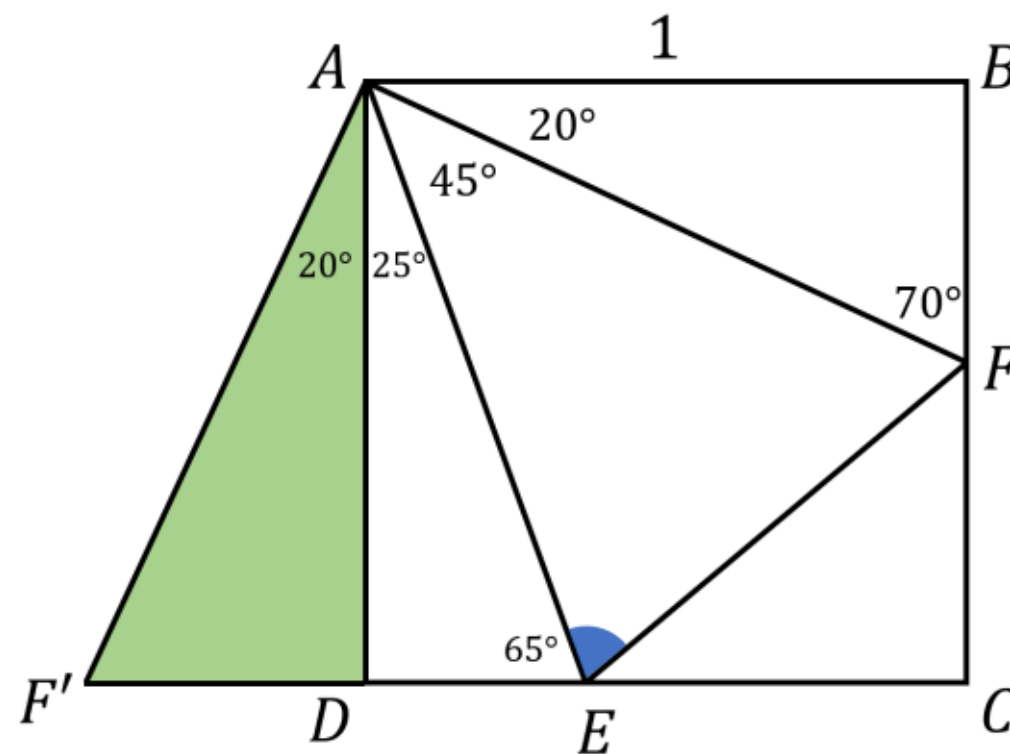
同理， $\angle DAE = 90^\circ - 20^\circ - 45^\circ = 25^\circ$

因為 $\angle ADE = 90^\circ$ ， $\angle AED = 65^\circ$

因為 $AB = AD = 1$ ，由 $\triangle AFB$ 以點 A 為圓心順時針旋轉 90° 轉變為 $\triangle AF'D$ ，得 $\triangle AF'E$ 。

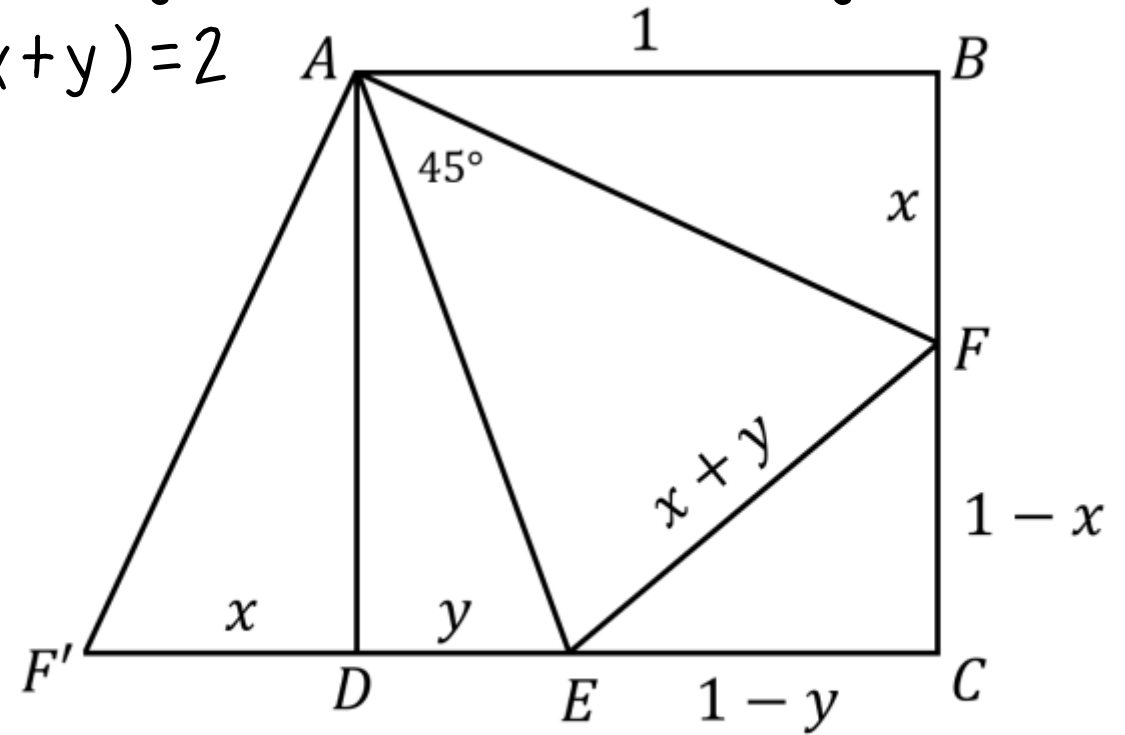


因此可以得知 $\angle AEF = \angle AEF' = 65^\circ$



承上題，這邊已經知道 $\triangle AF'E$ 全等於 $\triangle AFE$ 以及 $\triangle AF'D$ 為 $\triangle AFB$ 以點 A 為圓心順時針旋轉 90° 轉變的，


所以假設 $BF = F'D = x$ ， $DE = y$ ，則 $FE = x + y$ ， $CF = 1 - x$ ， $EC = 1 - y$ ，
所以 $EC + CF + FE = (1 - y) + (1 - x) + (x + y) = 2$



結語

- 這一題主要求三角形的角度，需要運用到三角形的全等性質而且要充分了解正方形和三角形，才得以用可行的方式算出來。
- 首先依照題目給予的條件，可以知道大部分的角度，這邊問題不大，比較需要注意的是如何運用得到的角度，這裡很容易卡住，需要思考，方法不只一種，我想先提供其中一種算法給各位參考吧。

參考資料: <https://mindyourdecisions.com/blog/2020/06/30/a-magical-triangle-think-outside-the-box/>



THE END