第四組報告 Transcendental Number 超越數

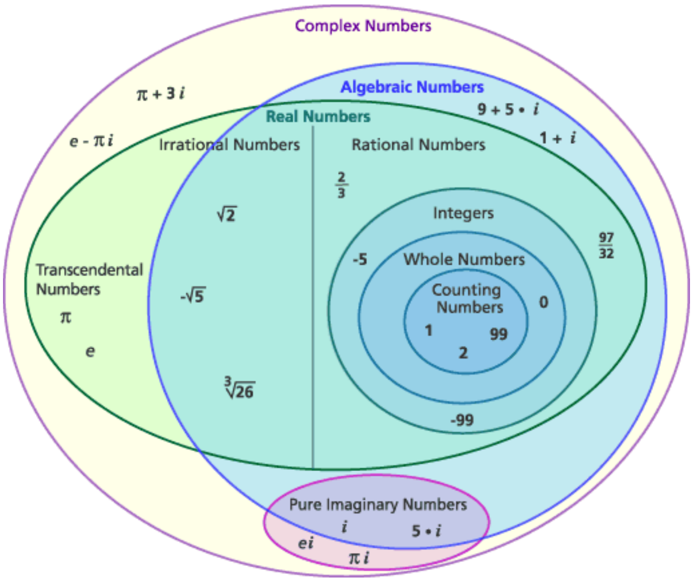
組員:410931130 李簡奕辰
410731151 謝少然
410831227 張淯昇
410831149 楊弘暐
410631244 沈致均

前言

某次意外參加某校單車節，並參加該校數學系介紹，當初學習內容是數學歸納法與超越數，也介紹很表面的內容，讓高三生要填寫志願時，對數學系有進一步認識，知道這科系都在做些什麼事情。也因為介紹了很表面，令我對它 產生了好奇，想一探究竟，剛好藉這次機會多了解超越數，於是將這次小組小論文主題定為超越數。

從古希臘幾何三大問題，方圓問題、倍立方問題、三等分角問題經過時間推進，說明數學家如何將幾何問題轉化為代數問題並引入超越數，這想法去證明，接著會說明關於著名 Liouville's theorem 以及 Liouville's number。

為什麼 n 次方程有 n 個根，什麼是代數數什麼是超越數?並講述為何 π 和 e 都是超越數，以及代數基本定理證明



無理數 Irrational Numbers

假設$\sqrt{2}$是有理數並令$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$*且*(p,q)=1

兩邊平方，得到 $2=\frac{p^2}{q^2}$

將此式改寫成 $2q^2=p^2$ ，意味p^2為偶數

∵ 平方能保持奇偶性

∴ p 只能為偶數

∴ p^2為偶數

設 p=$2p_1$其中p_1為整數

代入$q^2=2{p_1}^2$

同理得知 q 也是偶數

這與(p,q)=1(∋∈)

∴ $\sqrt{2}$是有理數的假設不成立，即無理數

代數數 Algebraic Numbers

代數數是代數與數論中的重要概念，指任何整係數多項式的複根。

代數數可以定義為「有理係數多項式的複根」或「整係數多項式的複根」

設 z 為複數。

如果存在正整數 n，以及 n+1 個有理數q_0，$q_1 \ldots q_n$，並且$q_n \neq 0$，

使得：

$$q_n z^n+\cdots+q_1 z+q_0=0$$

則稱 z 是一個代數數。

代數數不一定是實數，實數也不一定是代數數。

代數數的集合是可數的。

$$\text{實數}=\text{有理數}\bigcup\text{無理數}$$

$$\text{複數}=\text{代數數}\bigcup\text{超越數}$$

$$\text{無理數}=\text{無理數中的代數數}\bigcup\text{實數中的超越數}$$

$$\text{實數的代數數}=\text{有理數}\bigcup\text{無理數中的代數數}$$

代數數可數

思路:要證明代數數是可數的，就是要證明整係數多項式是可數的

1.證明整係數多項式可數

2.證明代數數可數

因為是集合對應集合 所以是映射(mapping)

假設$\mathrm{P_n}$為 n 次多項式($\deg(p) = n$) 集合，從$\mathrm{P_n}$到正整數 N 的映射($f: P_n \to N$)

$$f(\, a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = 2^{f(a_0)} 3^{f(a_1)} 5^{f(a_2)} \cdots p(n-1)^{f(a_n)}$$

其中p_n為正整數到質數的任一 bijection(e.g. $\mathrm{p}(n)$*為第*n*個質數*)

f_n是整數到非負整數的任一 bijection

(e.g.當$n \geq 0$，$f(n) = 2n$，當$n < 0$，$f(n) = -2n - 1$

∵質因數分解有唯一性，這個映射是 bijection

∴ P_n可數

而所有整係數多項式集合

$\because P = \bigcup_{n \in N} P_n$ 是可數個可數集的聯集

∴ 依然可數

證明代數數可數

∵n 次多項式最多有 n 個根，假設R_p*為多項式*p*的根*(代數基本定理，後面會補充)

∴ R_p有限

代數數 $\mathrm{A} = \bigcup_{p \in P} R_p$*為可數個有限集的聯集*

因此，依然可數

利用若 p 則 q，非 q 則非 p。我們知道非代數數(超越數)為不可數

超越數 Transcendental Number

- **超越數**（transcendental number）是指任何一個不是代數數的無理數。只要它不是任何一個有理係數代數方程的根，它即是超越數。最著名的超越數是 e 以及 π
- 幾乎所有的實數和複數都是超越數，這是因為代數數的集合是可數集，而實數和複數的集合是不可數集。
- 超越數是代數數的相反，即說若x*是一個超越數*，那對任何整數 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$*都滿足* $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \neq 0$，$where\ a_n \neq 0$

- 第一個確認為超越數的數，是於 1844 年劉維爾發現
- 劉維爾數:$\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0.110001000000000000000001000\cdots$

基本性質-超越數一定是無理數

如果$x = \frac{c}{d} (c, d \in \mathbb{Z}, d > 0)$

取夠大的 n 使得$2^{n-1} > d$

當$\frac{c}{d} \neq \frac{p}{q}$

則$\left|x - \frac{p}{q}\right| = |\frac{c}{d} - \frac{p}{q}| = |\frac{cq-dp}{dq}| \geq \frac{1}{dq} > \frac{1}{2^{n-1}q} \geq \frac{1}{q^n} (\ni\in)$

接著先證明劉維爾定理再證明代數基本定理

劉維爾數為複數的檢定法

Liouville's theorem complex analysis

Every bounded , entire function $f(z)$ is constant

Suppose a and b are two points on the complex plane.

Take a as the center of the circle, r is the radius

Pack b inside the circle

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z-b} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z-a} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right) f(z)\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{b-a}{(z-b)(z-a)} f(z)\, dz$$

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-b)(z-a)} dz$$

$$|z-a| = r$$

$$|z-b| = |z-a+a-b| \geq |z-a| - |a-b| = r - |a-b| \geq \frac{r}{2}$$

$$|f(b) - f(a)| = \frac{|b-a|}{|2\pi i|} | \oint \frac{f(z)}{(z-b)(z-a)} dz$$

$$\leq \frac{|b-a|}{2\pi} | \oint \frac{M}{(z-b)(z-a)} dz| , f \text{ is bounded}$$

$$= \frac{|b-a|}{2\pi} \frac{M}{(\frac{r}{2})r} 2\pi r \cdots (*)$$

$$f(b) - f(a) \le (*) = \frac{2|b-a|M}{r}$$

Let $r \to \infty$ we get $f(b) - f(a) = 0$

$$=> f(z)\ is\ constant$$

代數基本定理(Fundamental Theorem of Algebra)

$$A\ poly.equ'n\ \mathbb{P}(z) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0\ where\ a_k \in \mathbb{C}\ and\ k = 0,1,\ldots,n\ ,\ \ a_0 \ne 0, n \ge 1\ has\ a\ sol'n\ in\ \mathbb{C}$$

In other words , $\mathbb{C}$ is algebraically closed.

<Proof by contradiction>

Suppose that $\mathbb{P}$(z) has not sol'n.

i.e. $f(z) = \frac{1}{\mathbb{P}(z)}$ *is entire function and bounded*.

According to Liouville's theorem ,$f(z) is\ constant$.

So $\mathbb{P}$(z) is also constant. (∋∈)

p is poly.isn't constant

∴$\mathbb{P}$(z) has sol'n

設f'(T)是 f(T)的導函數，其中

$f(T) = a_0T^n + a_1T^{n-1} + \cdots + a_{n-1}T + a_n$

找一個正數 M，使得只要$x - 1 < u < x + 1$，就會有|f'(u)| < $\frac{1}{M}$

如果 $\frac{p}{q}$ 足夠靠近 x，使得

$$x - 1 < \frac{p}{q} < x + 1 \text{ 且} f\left(\frac{p}{q}\right) \ne 0$$

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{|a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n|}{q^n} \ge \frac{1}{p^n}$$

$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) - f(x) = \left(\frac{p}{q} - x\right) \times f'(x)$其中$x - 1 < x_1 < x + 1$(中間值定理)

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| = \frac{|f(\frac{p}{q})|}{f'(x_1)} > \frac{M}{q^n}$$

Q.E.D.

課程反思

對 entire function 的描述
可導出代數基本定理
代數基本定理也間接說明一個 n 次多項式在複數系會有 n 個根

問教授

若實數x滿足

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

的代數數a_i是整數，$a_0 \neq 0$，則存在一個正數 c，使得 $\left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}$，其中$\frac{p}{q}$是足夠靠近 x 的有理數，且$\frac{p}{q} \neq x$

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_08_2_01/page4.html

Liouville's Theorem on approximation

For any algebraic number a wth degree n>1，there exists c=c(α)>0 such that

$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}$ for all rationals $\frac{p}{q}(q>0)$

如果α為一n次代數無理數則必存在正數C，使

因此，對固定的 C，上述不等式對每一正整數 N 均有解 $\frac{p}{q}$，則α是超越數

Liouville's theorem($\sqrt{2}$)

For any p,q∈ N,we have

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{3p^2} \cdots (1)$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} + \cdots, \text{where } a_1, a_2, \cdots,\ a_n\ ,\cdots \in \{0,1\} \cdots (2)$$

First prove for any n∈ $N, a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{2n}$ *is not all* zero

(a) if $\frac{p}{q}$ is a positive integer,then we let p=1, $\frac{p}{q}$=q

(b) If $0 < \frac{p}{q} \leq \frac{3}{2}, then\ \sqrt{2} + \frac{p}{q} < \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$

(c) $|2 - \frac{q^2}{p^2}| = |\sqrt{2} - \frac{p}{q}| \times |\sqrt{2} + \frac{p}{q}| < 3|\sqrt{2} - \frac{p}{q}|$

(d) $|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| > \frac{|2p^2 - q^2|}{3p^2} \geq \frac{1}{3p^2}$

(e) (c)

(f) If $\frac{p}{q} > \frac{3}{2}$ *and* $p \geq 2$，*then*

(g) $|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| > \frac{3}{2} - \sqrt{2} \geq \frac{1}{3\times 2^2} \geq \frac{1}{3\times p^2}$

(h) Combining (a), (b), (c) to prove the result of (1).

(i) $\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \geq 0.4 > \frac{1}{3\times 1^2}$

Second prove(2)

let$\frac{p}{q} = 1 + \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}$,

Then we get p$\leq 2^{n-1}$，$sub.(1)$

$$\left|\frac{a_n}{2^n} + \cdots + \frac{a_{2n}}{2^{2n}}\right| + \left(\frac{a_{2n+1}}{2^{2n+1}} + \cdots\right)| = |\sqrt{2} - \frac{p}{q}| > \frac{1}{3p^2} \geq \frac{1}{2^{2n}}$$

$\because \frac{a_{2n+1}}{2^{2n+1}} + \cdots \leq \frac{1}{2^{2n+1}} + \cdots \leq \frac{1}{2^{2n}}$

$\therefore \left|\frac{a_n}{2^n} + \cdots + \frac{a_{2n}}{2^{2n}}\right| \neq 0.$

Hence $a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{2n}$ *is not all* 0

Remark: if $\frac{p}{q}$ approaching $\sqrt{2}$，then p is extremly big.

隨堂練習

Prove

$$\left|\sqrt[3]{2} - \frac{q}{p}\right| > \frac{1}{10p^3}, \forall p \in N \text{ and } \exists q \in Z$$

Answer

Obiviously when$\left|\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}\right| \geq 1$

Therefore , we assume that$\left|\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}\right| < 1$

$$|\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 - (\tfrac{p}{q})^3| = |\left(\sqrt[3]{2} - \tfrac{p}{q}\right)\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\left(\tfrac{p}{q}\right) + \left(\tfrac{p}{q}\right)^2\right)|$$

$$= |\left(\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}\right)\left(\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}\right)^2 - 3\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}\right) + 3\sqrt[3]{4})|$$

$$< \left|\left(\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}\right)\right|(1 + 4 + 56)\ \left(use\ \sqrt[3]{2} < 1.26\right)$$

$$\leq 10\left|\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}\right|$$

$$\frac{1}{p^3} \leq \left|\frac{2p^3 - q^3}{p^3}\right| = |\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 - \left(\frac{p}{q}\right)^3|$$

Liouville's theorem 就是在考慮像 $\sqrt{2}$這種無理數與有理數$\frac{p}{q}$差的範圍。

劉維爾數 Liouville‘s Number

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

<pf>

By Comparing test

$$\because \frac{1}{10^{k!}} \leq \frac{1}{10^k}\ k = 1,2,\ldots$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{9}$$

hence$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ is convergent series

$$s_n = \frac{p_n}{q_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}$$

$$q_n = 10^{n!}$$

on the other hand

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} < \frac{1}{10^{(n+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots\right)$$

$$= \frac{10}{9} \times \frac{1}{10^{(n+1)!}} = \frac{10}{9 \times 10^{n!}} \times \frac{1}{(10^{n!})^n} < \frac{1}{(10^{n!})^n} < \frac{1}{(q_n)^n}$$

choose $s_n = n, x$ is transcendental number

引注資料(References)

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%84%A1%E7%90%86%E6%95%B8(根號 2)

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BB%A3%E6%95%B8%E6%95%B8(代數數)

https://www.zhihu.com/question/367665734 代數數可數

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_08_2_01/page4.html(第 8 頁)

https://www.youtube.com/watch?v=ZZjte9HDsbM (Liouville 與代數基本定理)

http://pisa.math.ntnu.edu.tw/attachments/article/825/22%20mathdata.pdf

http://files.chiuchang.org.tw:8080/MyWeb/download/Biography/D03.pdf

https://zhuanlan.zhihu.com/p/138847089 劉維爾數

https://baike.baidu.com/item/%E5%88%98%E7%BB%B4%E5%B0%94%E6%95%B0

劉維爾數及證明

https://zhuanlan.zhihu.com/p/138847089

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_02_1_03/page4.html

Transcendental Number Theory Editors:Alan Baker

Number Theory IV Editors: **Parshin** A.N. **Shafarevich** I.R. (Eds.)