

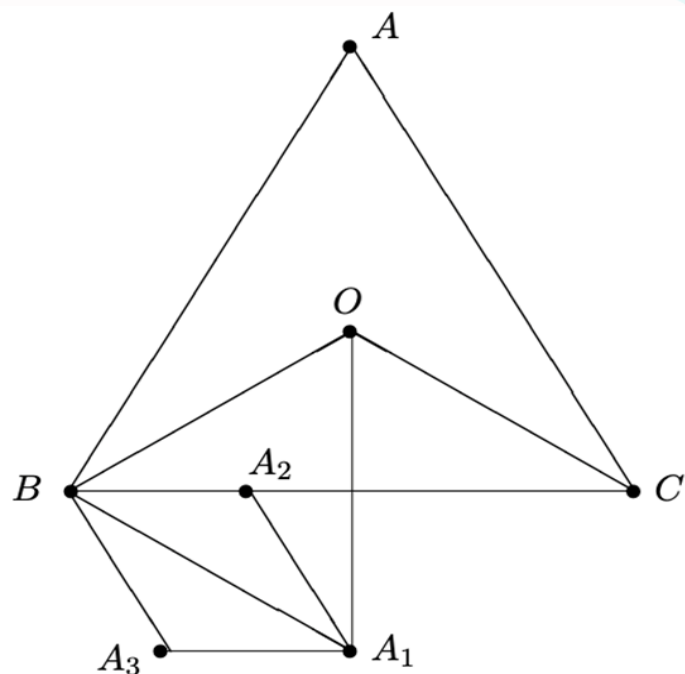
The background is a vibrant collage of geometric shapes and patterns. It features large triangles in shades of teal, pink, and white. There are various decorative elements: a row of pink dots at the top, a blue cylinder on the right, a pink cube on the left, and a pink circle with a teal triangle below it. The overall style is modern and artistic.

# 2019 第八組

王怡堯 黃翊瑄 唐仲暄 葉宗愿

01

## 幾何題型



Amy在一平面上畫三個點  $A, B, C$ 。

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 6$ 。

Amy將可以在平面上任三個點的外心上再畫上一個點。

例如下圖：

$O$  為  $\triangle ABC$  的外心， $A_1$  為  $\triangle BCO$  的外心， $A_2$  為  $\triangle A_1BO$  的外心等

(a) 試證，最終Amy可以畫出一個與先前的一點距離大於7

(b) 試證，最終Amy可以畫出一個與先前的一點距離大於2019

02

## 代數題型

$a, b$  為正整數使得  $a + b^3$  可以被  $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$  整除。  
試證，  $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$  可以被所有大於1的數的立方整除。

02

## 代數題型(類題)

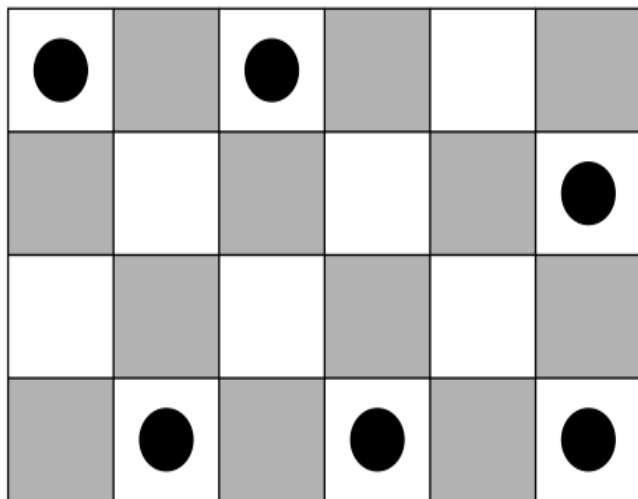
$a, b$  為正整數使得  $a + b^4$  可以被  $a^3 - 4a^2b + 6ab - 4b^3 - 1$  整除。

試證， $a^3 - 4a^2b + 6ab - 4b^3 - 1$  可以被所有大於1的數的四次方整除。



03

## 組合題型



$m, n$  為正整數。

一個  $2m \times 2n$  的棋盤被塗成白色跟灰色。

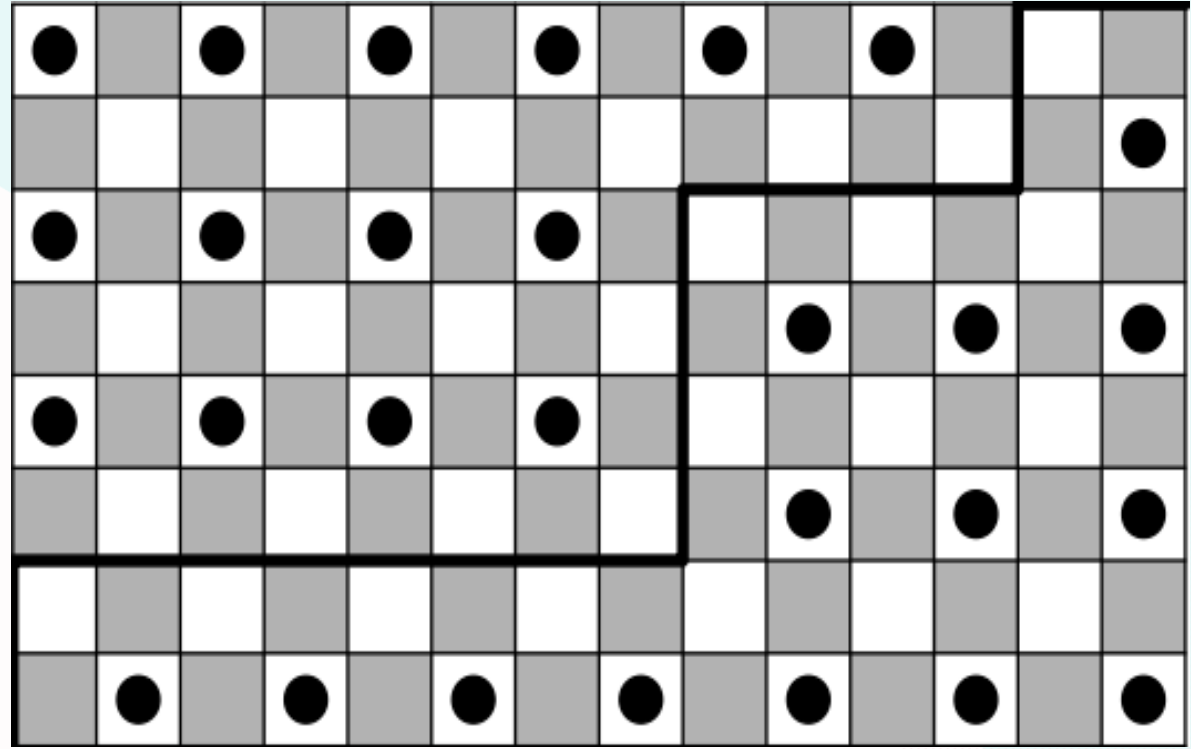
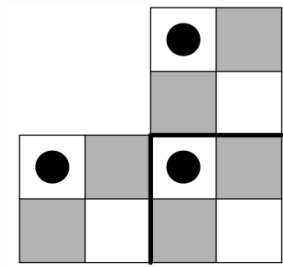
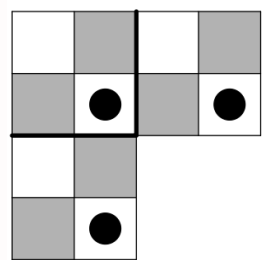
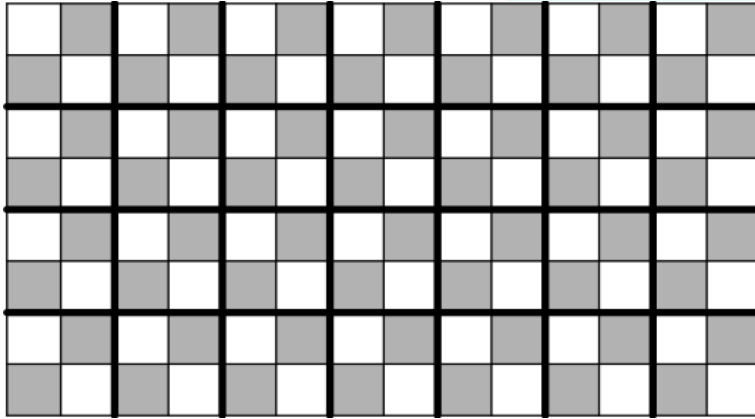
將  $mn$  個棋子擺在白色格子上，且不能對角相鄰。

找出所有擺放方式的個數。

左圖為  $m=2$  and  $n=3$  的範例：



### 03 組合題型



04

## 代數題型

$n$ 為一個大於1的整數，一數列  $a_0, a_1, \dots, a_n$  為實數且  $a_1 = a_{n-1} = 0$ 。

試證，對於所有正整數  $k$ ， $|a_0| - |a_n| \leq \sum_{i=0}^{n-2} |a_i - ka_{i+1} - a_{i+2}|$ 。

05

## 數論題型

*David* 和 *Jacob* 再玩一遊戲，在一平面上有 $n$ 個點 ( $n \geq 3$ )，任三點不共線。玩家可以在此平面上選擇兩點，畫上他們的線段。

當一玩家畫出一個環包含奇數個線段組成的(*odd cycle*)，則輸掉遊戲。

假設*David*先，找出所有 $n$ 使得他有必勝策略。



The background is a vibrant collage of geometric shapes and patterns. It includes a teal top bar with a row of pink dots, a pink and white striped vertical bar on the left, a blue cylinder on the right, and various other shapes like triangles, circles, and lines in shades of pink, teal, and blue. The text '謝謝大家' is centered in a large, bold, black font.

# 謝謝大家