書面報告

摘要：

蒙特霍爾問題亦稱為**蒙特霍問題**、**山羊問題**或**三門問題**源自博弈論的數學遊戲問題，參賽者會看見三扇關閉了的門，其中一扇的後面有一輛汽車或者是獎品，選中後面有車的那扇門就可以贏得該汽車或獎品，而另外兩扇門後面則各藏有一隻山羊。當參賽者選定了一扇門，但未去開啟它的時候，知道門後情形的節目主持人會開啟剩下兩扇門的其中一扇，露出其中一隻山羊。主持人其後會問參賽者要不要換另一扇仍然關上的門。而所探討的問題是選擇換門或不換是否會影響中獎的機率。如果嚴格按照上述的條件的話，答案是**會**。換門後贏得汽車的機率是$\frac{2}{3}$而不換門則為$\frac{1}{3}$。

壹、研究動機

在一開始上數學思維與解題的時候，老師有提過機率的問題，而我們這組又對利用不同的方法來找出或算出題目的機率特別感興趣，想要找些題目來玩，上網找到了這個蒙提霍爾問題，覺得還不錯，因此想要和大家分享。

貳、研究目的

(1)考慮蒙提霍爾問題中所有的變量，找出其規律，並且將其規律以公式表達出來。
(2)驗證是否所有情況下的蒙提霍爾問題皆為換門的中獎機率大於不換們的中獎機率。

參、研究過程或方法

根據蒙特霍爾問題的特性，我們有三個延伸的方向:

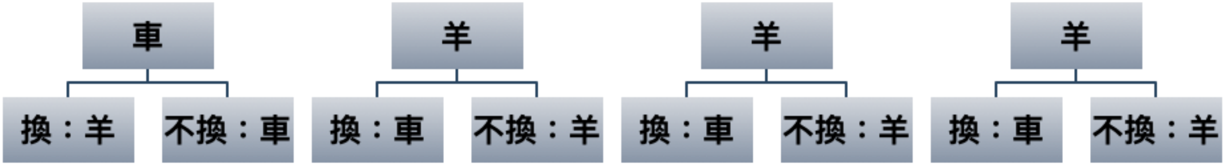
第一個延伸方向:若門的總數為三以上，是否會遵守換門的中獎機率大於不換門的中獎機率。也就是 N 門開 1 門。

第二個延伸方向:若門的總數為三以上和主持人開的門為一以上，是否會遵守換門的中獎機率大於不換門的中獎機率。也就是 N 門開 M 門。

第三個延伸方向:延續第二個延伸方向的條件後若獎品的個數也不為一，是否同樣會遵守換門的中獎機率大於不換門的中獎機率。也就是 N 門 A 車開 M 門 。

(1)第一個延伸方向

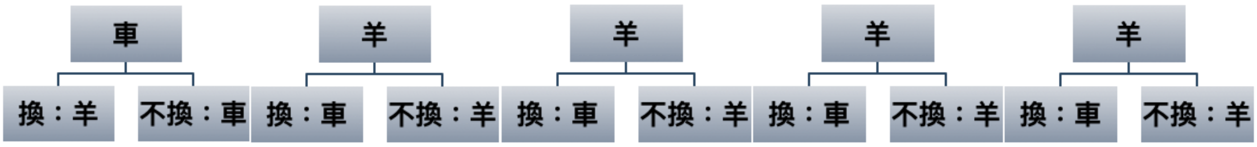
四門開一門：



換門：因為有四個門，所以每個門被選中的機率都為$\frac{1}{4}$，而若一開始抽中有車的門後換門中獎的機率為零，因為換門只能選有羊的門。一開始抽中有羊的門後換門的中獎機率為$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times 3$，因為每個門被選中的機率都為$\frac{1}{4}$，且因為主持人會開啟一扇有羊的門，所以此時只需從一扇有車一扇有羊的門中選出一扇，所以換門時抽中車的機率是$\frac{1}{2}$，又共有三扇有羊的門，所以乘上三。因此最後得到換門的機率為$\frac{1}{4}\times\left(0+3\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$。

不換門：四門選一門，因此為$\frac{1}{4}$

五門開一門：



換門：因為有五個門，所以每個門被選中的機率都為$\frac{1}{5}$，而若一開始抽中有車的門後換門中獎的機率為零，因為換門只能選有羊的門。一開始抽中有羊的門後換門的中獎機率為$\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\times 4$，因為每個門被選中的機率都為$\frac{1}{5}$，且因為主持人會開啟一扇有羊的門，所以此時只需從一扇有車兩扇有羊的門中選出一扇，所以換門時抽中車的機率是$\frac{1}{3}$，又共有四扇有羊的門，所以乘上四。因此最後得到換門的機率為$\frac{1}{5}\times\left(0+4\times\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{15}$。

不換門：五門選一門，因此為$\frac{1}{5}$

N 門開 1 門（N 為自然數）：

換門：由上述我們可以找出當為 N 門時，其選擇換們的機率為$\frac{1}{N}\times\left(0+(N-1)\times\frac{1}{(N-2)}\right)=$

$\frac{N-1}{N(N-2)}$。

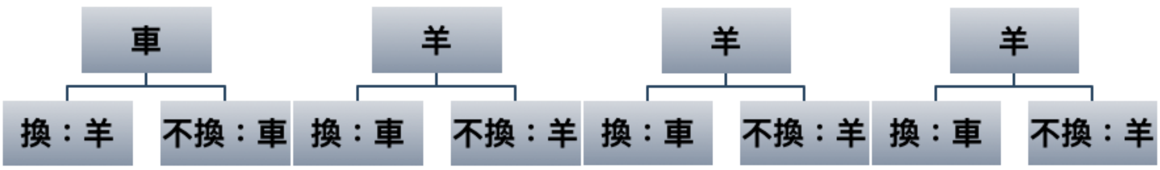
不換門：N 門選一門，因此為$\frac{1}{N}$

$\frac{N-1}{N(N-2)}-\frac{1}{N}=\frac{1}{N(N-2)}$(恆正，因為至少需要三扇門才有辦法討論，所以 N 必須大於 3。)

所以換門的中獎機率恆大於不換門的中獎機率。

(2)第二個延伸方向

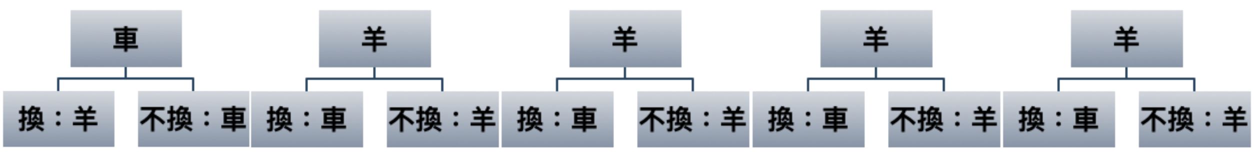
四門開二門：



換門：因為有四個門，所以每個門被選中的機率都為$\frac{1}{4}$，而若一開始抽中有車的門後換門中獎的機率為零，因為換門只能選有羊的門。一開始抽中有羊的門後換門的中獎機率為$\frac{1}{4}$，因為每個門被選中的機率都為$\frac{1}{4}$，且因為主持人會開啟兩扇有羊的門，所以此時只剩有車的門，所以換門時抽中車的機率是 1，又共有三扇有羊的門，所以乘上三。因此最後得到換門的機率為$\frac{1}{4}\times(0+3\times1)=\frac{3}{4}$。

不換門：四門選一門，因此為$\frac{1}{4}$

五門開二門：

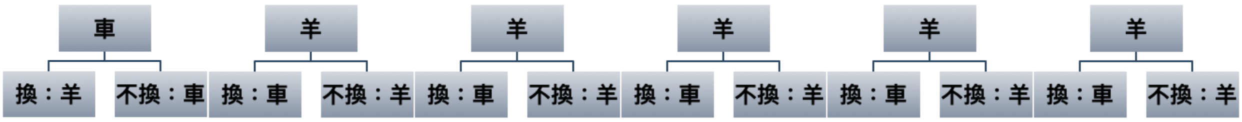


換門：因為有五個門，所以每個門被選中的機率都為$\frac{1}{5}$，而若一開始抽中有車的門後換門中獎的機率為零，因為換門只能選有羊的門。一開始抽中有羊的門後換門的中獎機率為

$\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times 4$，因為每個門被選中的機率都為$\frac{1}{5}$，且因為主持人會開啟一扇有羊的門，所以此時只需從一扇有車一扇有羊的門中選出一扇，所以換門時抽中車的機率是$\frac{1}{2}$，又共有四扇有羊的門，所以乘上四。因此最後得到換門的機率為$\frac{1}{5}\times\left(0+4\times\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{5}$。

不換門：五門選一門，因此為$\frac{1}{5}$

六門開二門：



換門：因為有六個門，所以每個門被選中的機率都為$\frac{1}{6}$，而若一開始抽中有車的門後換門中獎的機率為零，因為換門只能選有羊的門。一開始抽中有羊的門後換門的中獎機率為$\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times 5$，因為每個門被選中的機率都為$\frac{1}{6}$，且因為主持人會開啟一扇有羊的門，所以此時只需從一扇有車兩扇有羊的門中選出一扇，所以換門時抽中車的機率是$\frac{1}{3}$，又共有五扇有羊的門，所以乘上五。因此最後得到換門的機率為$\frac{1}{6}\times\left(0+5\times\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{18}$。

不換門：六門選一門，因此為$\frac{1}{6}$

N 門開 M 門（N、M 皆為自然數）:

換門：由上述我們可以找出當為 N 門開 M 門時，其選擇換們的機率為$\frac{1}{N}\times$

$$\left(0+(N-1)\times\frac{1}{(N-M-1)}\right)=\frac{N-1}{N(N-M-1)}。$$

不換門：N 門選一門，因此為$\frac{1}{N}$

$\frac{N-1}{N(N-M-1)}-\frac{1}{N}=\frac{M}{N(N-M-1)}$(恆正，因為 N-M-1 必大於零。)

所以換門的中獎機率恆大於不換門的中獎機率。

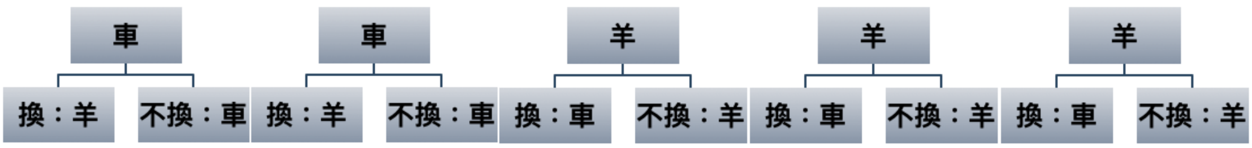
(3)第三個延伸方向

四門二車開一門：

換門：因為有四個門，所以每個門被選中的機率都為$\frac{1}{4}$，而若一開始抽中有車的門後換門中獎的機率為$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times 2$，因為每個門被選中的機率都為$\frac{1}{4}$，而主持人會開啟一扇有羊的門，所以此時只需從一扇有車一扇有羊的門中選出一扇，所以換門時抽中車的機率是$\frac{1}{2}$，又共有兩扇有車 1 的門，所以乘上二。一開始抽中有羊的門後換門的中獎機率為$\frac{1}{4}\times 1\times 2$，因為每個門被選中的機率都為$\frac{1}{4}$，且因為主持人會開啟一扇有羊的門，所以此時只剩兩扇有車的門中選出一扇，所以換門時抽中車的機率是 1，又共有兩扇有羊的門，所以乘上二。因此最後得到換門的機率為$\frac{1}{4}\times\left(2\times\frac{1}{2}+2\times 1\right)=\frac{3}{4}$。

不換門：四門選一門，因此為$\frac{1}{4}$

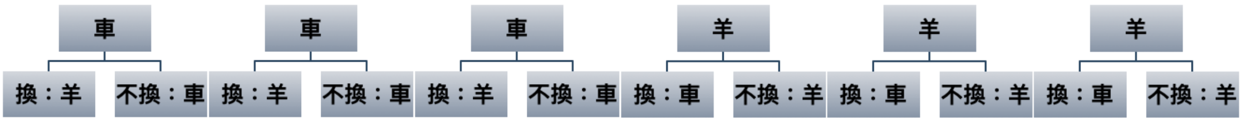
五門二車開二門：



換門：因為有五個門，所以每個門被選中的機率都為$\frac{1}{5}$，而若一開始抽中有車的門後換門中獎的機率為$\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times 2$，因為每個門被選中的機率都為$\frac{1}{5}$，而主持人會開啟兩扇有羊的門，所以此時只需從一扇有車一扇有羊的門中選出一扇，所以換門時抽中車的機率是$\frac{1}{2}$，又共有兩扇有車的門，所以乘上二。一開始抽中有羊的門後換門的中獎機率為$\frac{1}{5}\times 1\times 3$，因為每個門被選中的機率都為$\frac{1}{5}$，且因為主持人會開啟兩扇有羊的門，所以此時只剩兩扇有車的門中選出一扇，所以換門時抽中車的機率是 1，又共有三扇有羊的門，所以乘上三。因此最後得到換門的機率為$\frac{1}{5}\times\left(2\times\frac{1}{2}+3\times 1\right)=\frac{4}{5}$。

不換門：五門選一門，因此為$\frac{1}{5}$

六門三車開二門：



換門：因為有六個門，所以每個門被選中的機率都為$\frac{1}{6}$，而若一開始抽中有車的門後換門中獎的機率為$\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times 3$，因為每個門被選中的機率都為$\frac{1}{6}$，而主持人會開啟兩扇有羊的門，所以此時只需從兩扇有車一扇有羊的門中選出一扇，所以換門時抽中車的機率是$\frac{2}{3}$，又共有三扇有車的門，所以乘上三。一開始抽中有羊的門後換門的中獎機率為$\frac{1}{6}\times 1\times 3$，因為每個門被選中的機率都為$\frac{1}{6}$，且因為主持人會開啟兩扇有羊的門，所以此時只剩三扇有車的門中選出一扇，所以換門時抽中車的機率是 1，又共有三扇有羊的門，所以乘上三。因此最後得到換門的機率為$\frac{1}{6}\times\left(3\times\frac{2}{3}+3\times 1\right)=\frac{5}{6}$。

不換門：六門選一門，因此為$\frac{1}{6}$

N 門 A 車開 M 門（N、A、M 皆為自然數）：

初始設定：N-A-1≥ M

換門：由上述我們可以找出當為 N 門 A 車開 M 門時，其選擇換們的機率為$\frac{1}{N}\times$

$$\left(A\times\frac{(A-1)}{(N-M-1)}+(N-A)\times\frac{A}{(N-M-1)}\right)=\frac{A(N-1)}{N(N-M-1)}。$$

不換門：N 門選一門，因此為 $\frac{A}{N}$

$\frac{A(N-1)}{N(N-M-1)}-\frac{A}{N}=\frac{AM}{N(N-M-1)}$(恆正，因為 N-A-1≥ M，得 N-M-1 大於等於 A。)

所以換門的中獎機率恆大於不換門的中獎機率。

肆、結論

1. 在任何情況下，換門的中獎機率一定比不換門的中獎機率來得大。

2.

(1)當為 N 門開 1 門時，其換門後中獎的機率為$\frac{N-1}{N(N-2)}$

(2) 當 N 門開 M 門時，其換門後中獎的機率為$\frac{N-1}{N(N-M-1)}$

(3) 當 N 門 A 車開 M 門時，其換門後中獎的機率為$\frac{A(N-1)}{N(N-M-1)}$

3. 當有獎品的門增加至 A 個（也就是 A 台車）時則將其原本的機率乘上 A 倍後，即為其換門後的中獎機率。

伍、參考資料

(1) **維基百科：**

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%92%99%E6%8F%90%E9%9C%8D%E7%88%BE%E5%95%8F%E9%A1%8C

(2) **聰明反被聰明誤–**絕妙又惱人的蒙提霍爾問題：

https://www.shs.edu.tw/works/essay/2017/11/2017111321370570.pdf

(3) **換與不換的兩難–蒙提霍爾問題延伸探討：**

https://www.shs.edu.tw/works/essay/2013/11/2013111418352920.pdf