

數學思維與解題—期末報告

第七組書面報告—《魔幻三角形—解出三角形的角度和邊長》

組員: 410631214 吳承遠

410831242 吳明珠

410531236 林柏安

410631210 高浚洋

410731105 馬紹恆

前言:

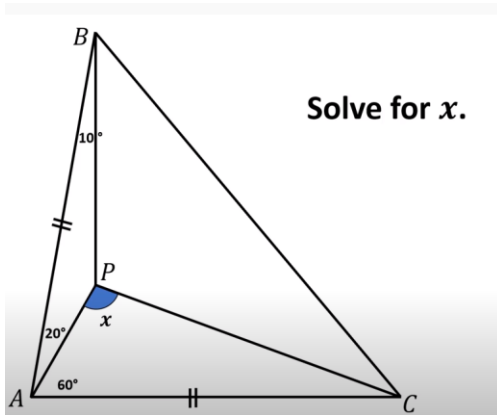
會選這個主題的原因是我們數學系有不少人的未來都會跟老師這個職業相關，難免都有機會遇到突然不會解的題目。而且特別常在在**幾何題型**中發生，所以我們決定找一些有趣的題目、乍看之下看不出解法或容易被誤導的題目來做為這次報告的內容。

§ 常用的解三角形角度/邊長定理:

- 1.相似形
 - 2.全等
 - 3.平行線截比例線段
 - 4.餘弦定理
 - 5.輔助線
 - 6.三角形三心性質
-

我們下面準備了 2 題角度 2 題長度和 1 題角度和長度都有的題目

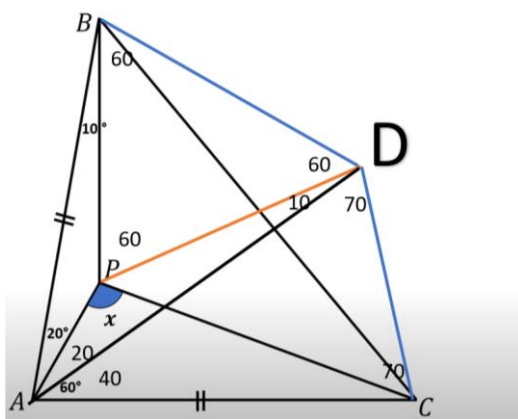
Question1(角度相關)



這題非常特別，光是第一條輔助線要想到就有一定的難度，雖然看起來他只用到了**全等三角形**和**找輔助線**這些基礎的觀念，但做出全等之後很容易就想不出後來的**相似三角形**，所以這題有三個難點：

1. 做出輔助線
2. 做出正三角形
3. 找出與正三角形相關的等腰三角形

<Solution>


$$(\text{線段})AB = (\text{線段})AC$$

而且 $\angle PBC = 3\angle PAB$

可以做一條 AD 使 $\angle PAD = 40^\circ$

(之後線段就讓我省略)

連接 BD CD 得到兩個全等三角形

要得到 X 的角度就要先知道 $\angle PCA$

$$\angle DCA = \angle ADC = 70^\circ$$

連接 PD

因為 $\triangle BAD$ 是等腰三角形 且 $\triangle BAP$ 和 $\triangle DAP$ 全等

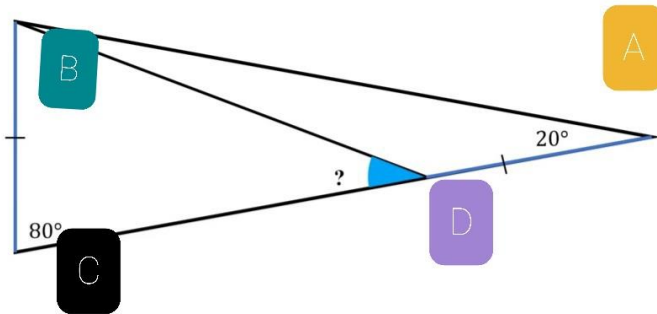
我們可以得到 BPD 是正三角形 所以 $DP=DC$

因為 $DP=DC$ 所以 PDC 是等腰三角形

可得 $\angle DPC=50^\circ$

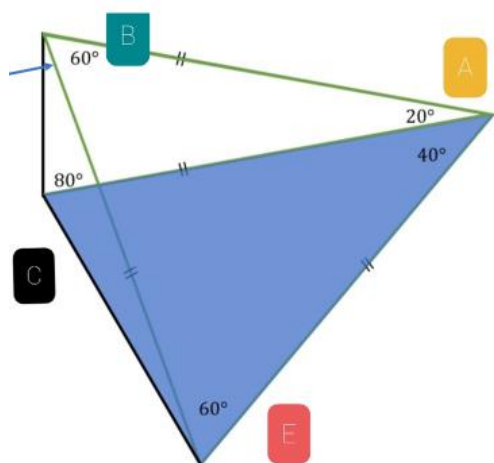
因此 $X=360-150-60-50=100^\circ$

Question2 (角度相關)

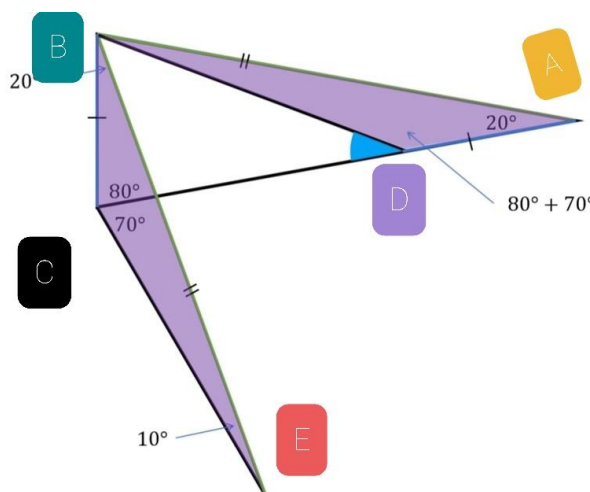


今有一等腰三角形 ABC 如圖
若在 AC 上取一點 D 使得
 $AD=BC$
求 $\angle BDC=?$

<Solution>



取一點 E 使得三角形 ABE 為一正三角形
已知 $\triangle ABE$ 為正三角形
則我們知道 $\angle EBC = 80 - 60 = 20^\circ$
已知 $\triangle CAE$ 為等腰
(因為 $AB=AE=EC$)
可知 $\angle AEC$ 與 $\angle ECB$ 為 $(180-40)/2=70^\circ$
則 $\angle BEC = 70 - 60 = 10^\circ$

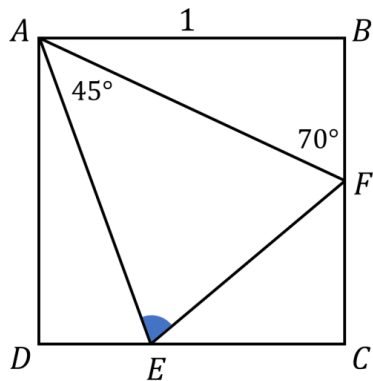


最後我們可以找到 $\angle EBC = 20^\circ$
以及題目給的 $BC=AD$
還有取正三角形而得的 $AB=BE$
而形成一個 SAS 全等三角形
得知 $\angle BCD = \angle ADB = 150$
則 $\angle BDC = 180 - 150 = 30^\circ$

Question3(角度、長度相關)

這一題主要是求三角形的角度，需要運用到三角形的全等性質而且要充分了解正方形和三角形，才得以用可行的方式算出來。

首先依照題目給予的條件，可以知道大部分的角度，這邊問題不大，比較需要注意的是如何運用得到的角度，這裡很容易卡住，需要思考，方法不只一種。



▲題目:

在 ABCD 為正方形

$\angle AFB = 70^\circ$ $\angle EAF = 45^\circ$ $AB = 1$ 的條件下

求 $\angle AEF = ?$ 、 $EC + CF + FE = ?$

<Solution>

<角度>

這一題可以先利用正方形和三角形的性質得到需要的資訊：

因為 ABCD 為正方形，可得 $\angle ABF = 90^\circ$ 。

因為 ABF 為三角形，進而得出 $\angle FAB = 20^\circ$

同理，

$$\angle DAE = 90^\circ - 20^\circ - 45^\circ = 25^\circ$$

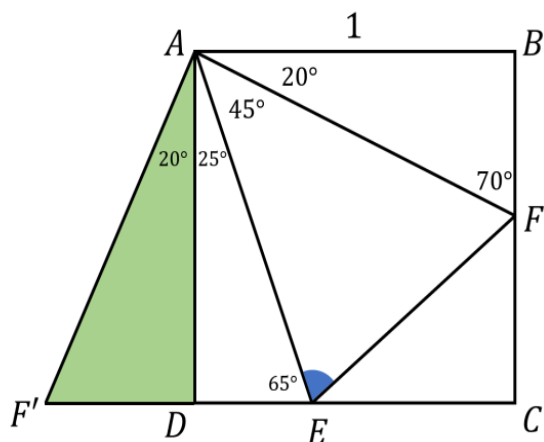
因為 $\angle ADE = 90^\circ$

$$\angle AED = 65^\circ$$

因為 $AB = AD = 1$ ，

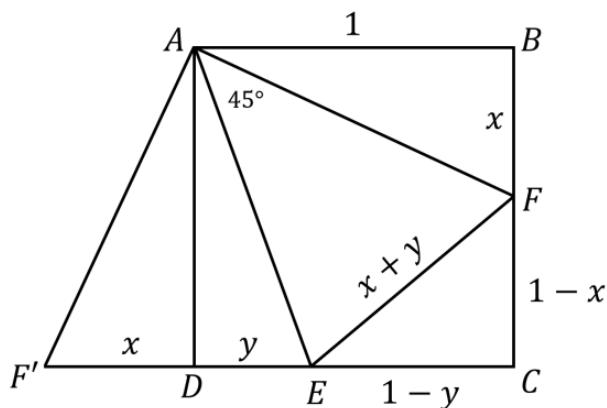
由 $\triangle AFB$ 以點 A 為圓心順時針旋轉 90° 轉變為 $\triangle AF'D$ ，

得 $\triangle AF'E$



由於 $\angle F'AE$
 $= \angle F'AD + \angle EAD = 20^\circ + 25^\circ$
 $= 45^\circ = \angle EAF$
 且 $AF' = AF$ 、 $AE = AE$
 根據 SAS 定理，得 $\triangle AF'E$ 全等
 於 $\triangle AFE$
 因此可得 $\angle AEF = \angle AEF' = 65^\circ$

<長度>



承上題，這邊已經知道 $\triangle AF'E$ 全等於 $\triangle AFE$ 以及 $\triangle AF'D$ 為 $\triangle AFB$ 以
 點 A 為圓心順時針旋轉 90° 轉變的，

所以假設 $BF = F'D = x$ ， $DE = y$ ，則 $FE = x + y$ ， $CF = 1 - x$ ， $EC = 1 - y$

所以 $EC + CF + FE = (1 - y) + (1 - x) + (x + y) = 2$

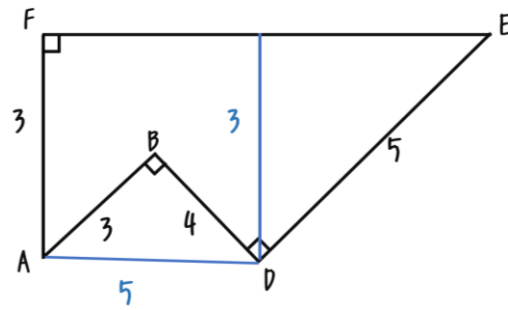
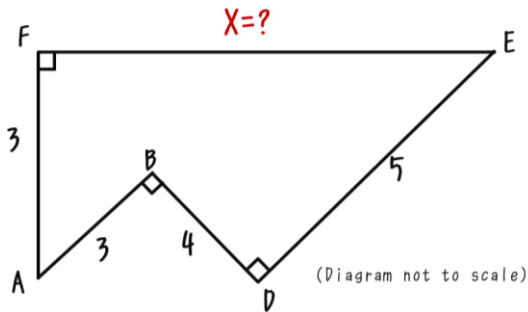
Question4(長度相關)

像這一題就會屬於容易直接被圖形騙到，畢竟我們國中的時候遇到的很多圖形都會按照比例畫好，加上這個圖又給我們那麼多比例 3-4-5，我們很容易就會把答案寫成 $EF=9$ ，而忽略掉 diagram not to scale

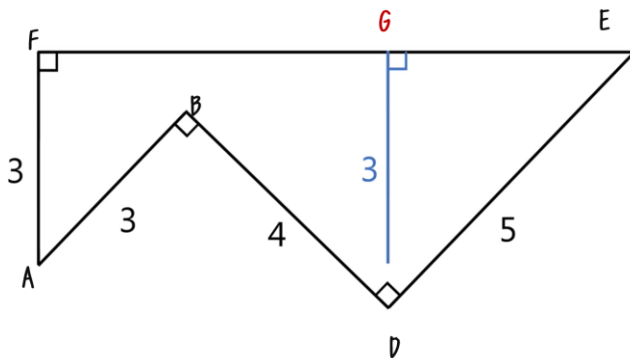
影片裡用動畫平移線段 AB 和線段 BD 去求 AE，一般是很難想到去移動線段，我就想說能不能不用移動線段，並且運用我們熟知的國中基礎知識去求解，然後我就想到用相似形去求出 AE 線段，因為和線段 EF 最直接的三角形就是三角形 AEF

▲題目:求出線段 $EF=?$

【WRONG Method】



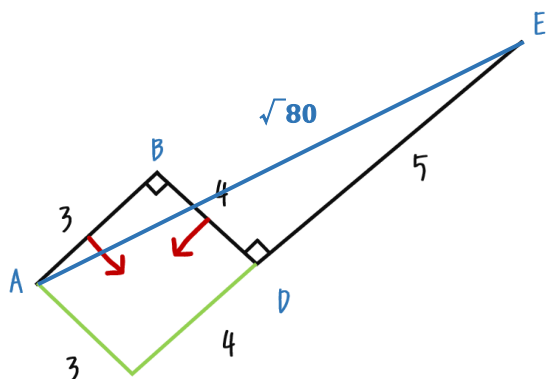
【Diagram to scale】



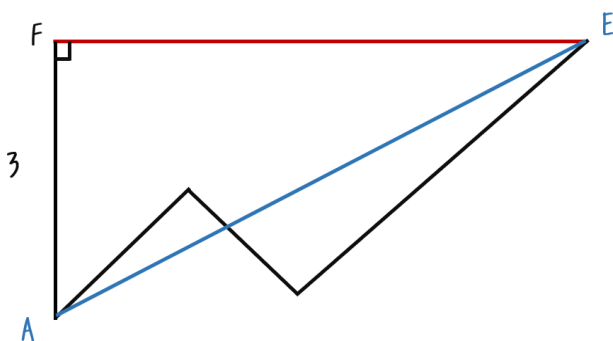
當按照比例去畫圖的時候，
 $GD \neq 3$

因為當圖形不按照比例繪圖時我們就不能確定所有線的位置交點是正確的
→我們不能平移沒有互相垂直(AF 不垂直 AD)的線

<Solution>



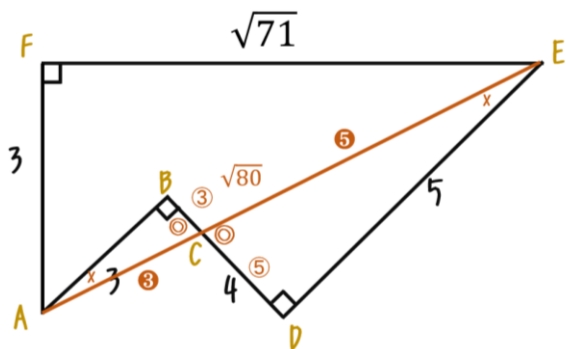
我們先拿掉 AF 和 FE
 平移線段 BD 和 AB
 可以得到一個和 AE 相關的
 直角三角形



求出 $AE = \sqrt{80}$
 在看回三角形 AEF 我們就可
 以求線段 $EF = \sqrt{71}$

<Solution2>

<相似形>



$$\triangle ABC \sim \triangle EDC$$

(AAA 相似)

$$BC = \frac{3}{2}, CD = \frac{5}{2}$$

$$AC = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$CE = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow AE = \sqrt{80}$$

$$\triangle AEF$$

$$AF = 3$$

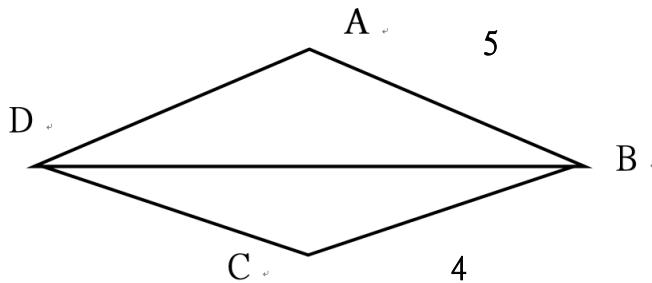
$$AE = \sqrt{80}$$

$$EF = \sqrt{71}$$

Question5(長度相關)

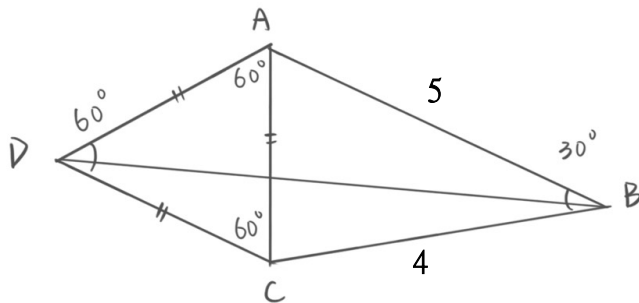
(試題出處:新竹市 107 學年度國中數學能力競賽 數學達人賽)

我的題目是求右圖線段 BD 的長度，這題有趣的地方就是此題目是出自於某國中數學能力競賽的試題，所以解題也要盡量以國中生的思維。



▲題目:四邊形 ABCD 中,
 $\angle ABC=30^\circ$
 $\angle ADC=60^\circ$
且 $AD=CD$
若 $BC=4$ $AB=5$ 則 $BD=?$

<Solution1>



連接線段 AC

餘弦定理得

$$AC^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ$$

設 $\angle CAB = \theta$

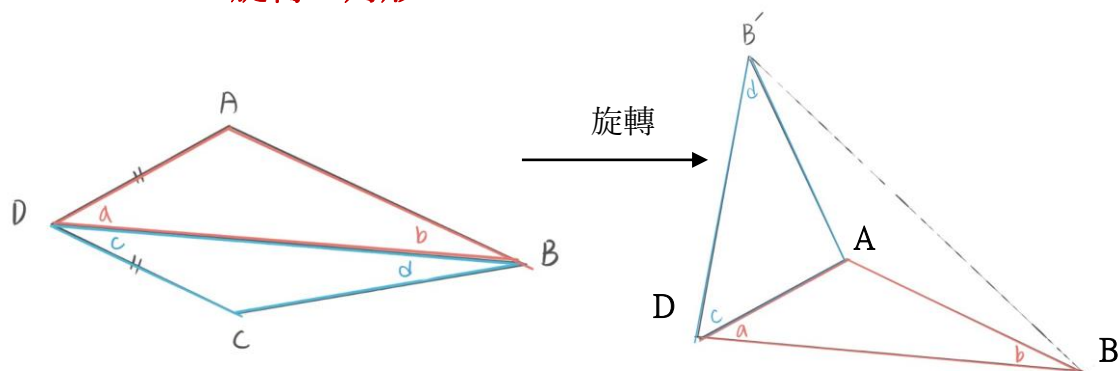
$$\angle ACB = 150^\circ - \theta$$

則 $\angle DAB = 60^\circ + \theta$

$$\angle DCB = 210^\circ - \theta$$

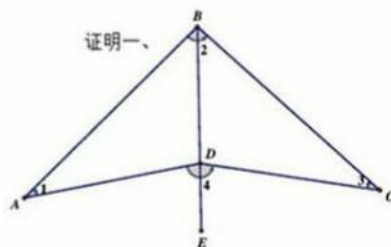
$$\begin{aligned} & (AD)^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot (AD) \cdot \cos(60^\circ + \theta) \\ &= (CD)^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot (CD) \cdot \cos(210^\circ - \theta) \\ &= (BD)^2 \end{aligned}$$

<Solution2> 旋轉三角形



旋轉三角形 BCD' 以 D 為圓心，逆時針旋轉 60 度，使 DC 對齊 DA

【鏢型角度】



圖型形成一個鏢型，因此角 $BAB' = \angle ABD + \angle ADB' + \angle BDB'$

$$= (\angle ABD + \angle ADB') + \angle BDB'$$

$$= 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$$

因此三角形 BAB' 為一個直角三角形，所以線段 $BB' = 5^2 + 4^2 = \sqrt{41}$

又因線段 $BD = \text{線段 } B'D$ 及角 BDB' 為 60° ，所以三角形 BDB' 為正三角形

故得出線段 $B'D = \text{線段 } DB = \text{線段 } BB' = \sqrt{41}$

參考資料

<https://www.youtube.com/watch?v=kfijuP5HDjU>

https://www.youtube.com/watch?v=ct_9l70Bf6o&t=192s

<https://www.youtube.com/watch?v=Rjo-PcrKrB0&t=182s>

<https://www.youtube.com/watch?v=5vhklRWogzo>

新竹市 107 學年度國中數學能力競賽 數學達人賽