

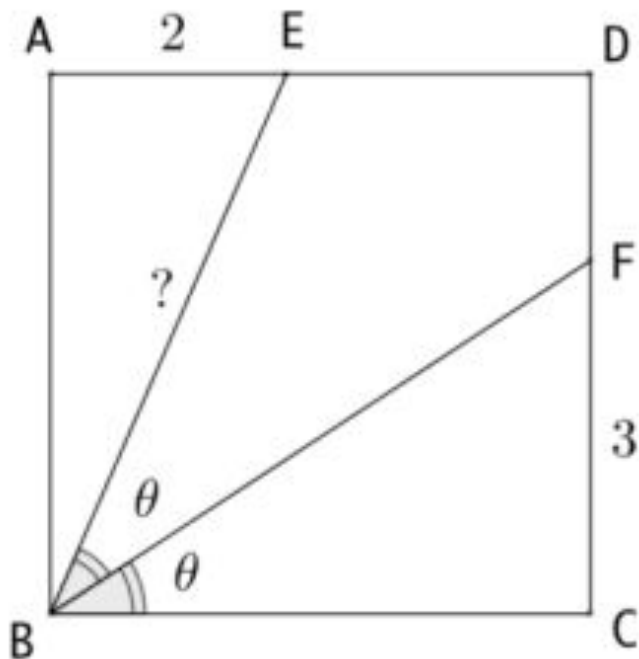
數學解題方法-期中報告

第八組

411131136 侯逸樺 / 411131118 董奕寬
411131114 林進暄 / 411131126 李霖嘉
411131138 侯卉榛 / 411031146 楊煥宇

Question:

ABCD 是個正方形, E 是邊 AD 上的一點, 在 A 與 D 之間; F 是邊 CD 上的點, 在 C 與 D 之間, 而且 BF 平分 $\angle EBC$ 。若 $AE = 2$, $CF = 3$, 求 EB。



(出自南非奧林匹克
2016)

Solution to the question

<sol> $BC = \frac{3}{\tan \theta} = AB = 2 \tan 2\theta = \frac{4 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

$$\frac{3}{\tan \theta} = \frac{4 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

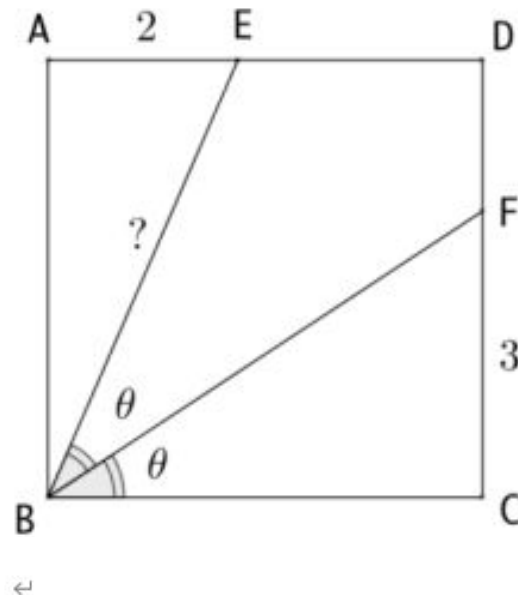
$$\frac{3}{\tan \theta} = \frac{4 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$3 - 3 \tan^2 \theta = 4 \tan^2 \theta$$

$$\tan^2 \theta = \frac{3}{7}$$

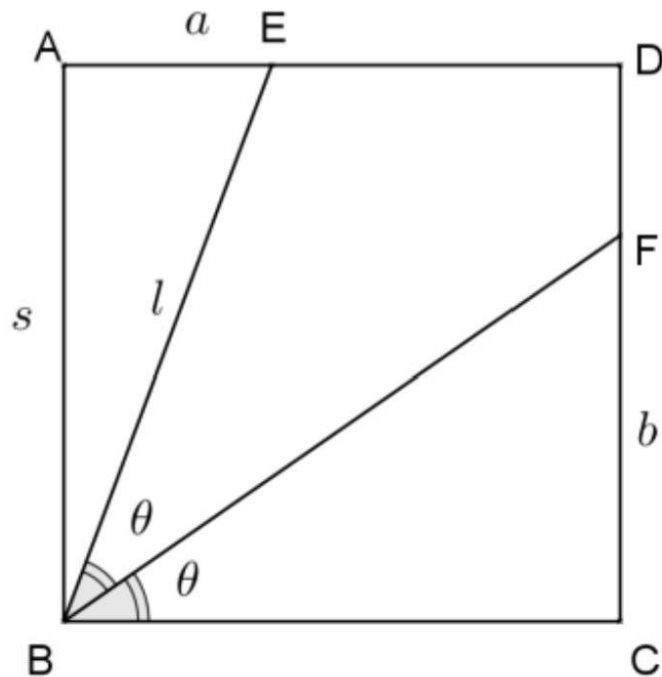
$$\text{so } \tan \theta = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\text{so } BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{\frac{3}{7}}}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{21 + 4} = 5$$



Question:

ABCD 是個正方形, E 是邊 AD 上的一點, 在 A 與 D 之間; F 是邊 CD 上的點, 在 C 與 D 之間, 而且 BF 平分 $\angle EBC$ 。若 $AE = a$, $CF = b$, 試證明: $BE = a + b$ 。



Solution to the question

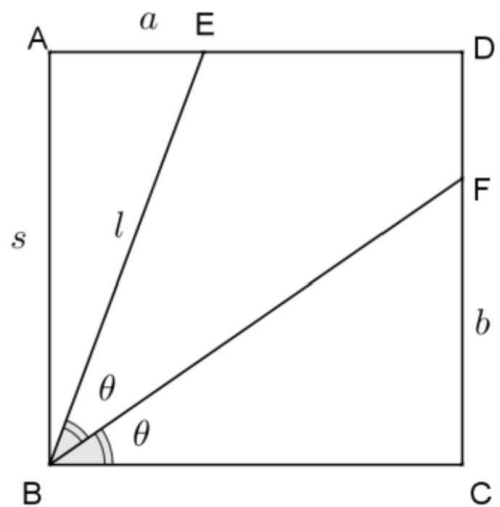
$$a = s \cot 2\theta, b = s \tan \theta, \angle EBF = \angle CBF = \theta$$

因為 $\cot 2\theta = 1 - t^2/2t$, $t = \tan \theta$, 故 $a/s = 1 - t^2/2t = 1 - (b/s)^2/2(b/s) = s^2 - b^2/2bs$,

即 $2abs = s^3 - sb^2$, 由於 $s \neq 0$, 故 $2ab = s^2 - b^2$,

$$\text{則 } EB^2 = a^2 + s^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,$$

$$\text{故 } EB = a+b = AE+CF$$



Another Solution

$$\triangle BAE = sa/2 \quad \triangle BCF = sb/2 \quad \triangle EDF = (s-a)(s-b)/2 \quad \triangle EBF = b\sqrt{(s^2+a^2)}/2$$

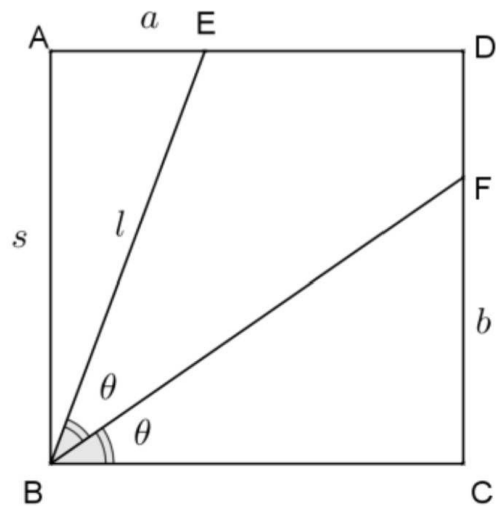
4個面積相加為 $ABCD = s^2$

$$\text{即 } sa/2 + sb/2 + (s-a)(s-b)/2 + b\sqrt{(s^2+a^2)}/2 = s^2$$

進行化簡後獲得 $s^2 = b^2 + 2ab$

$$EB^2 = a^2 + s^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$$

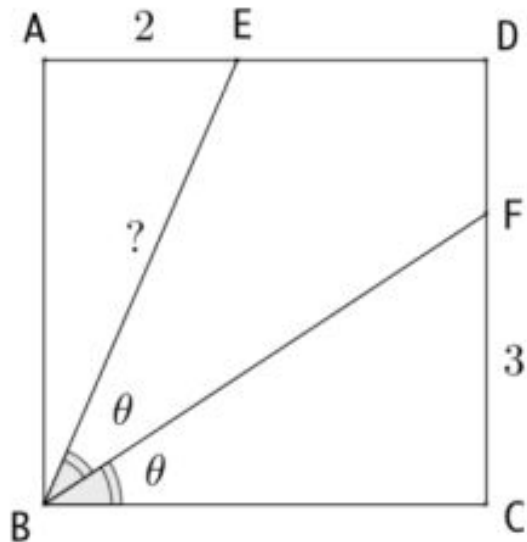
$$EB = a+b$$



Questions and answer contest with no prizes

1. 將AD向上平移並延伸BE至E與D重疊, 此時BE=?

2. 將AD向下平移至F與D重疊, 令其為A'D'並令BE與A'D'的焦點為E', 此時BE'=?



Ans: 1, $\frac{5\sqrt{21}}{2}$ 2, $\frac{2\sqrt{21}}{7}$



The End