Resolução de Sistemas Lineares - Parte I

Prof. Jonathan Esteban Arroyo Silva

Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de São João del-Rei
silva.jea@ufsj.edu.br

Sumário

Introdução

Métodos Diretos
- Eliminação Gaussiana
- Decomposição LU

Introdução

- Uma **equação** é dita **linear** se cada termo contém não mais que uma variável e cada variável aparece na primeira potência
- Um **sistema de equações lineares** é um conjunto finito de equações lineares nas mesmas variáveis

Definição

Um sistema de equações lineares S com m equações e n incógnitas é dado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sendo:

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$ os coeficientes
- $b_i \in \mathbb{R}$ constantes
- $x_j \in \mathbb{R}$ as variáveis (ou incógnitas) do problema
- $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$

Definição II

O sistema de equações lineares S também pode ser escrito na forma matricial como $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ou:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Importância

Sistemas de equações lineares aparecem em diferentes problemas das mais diversas áreas da ciência:

- Análise de estruturas
- Modelagem de circuitos elétricos
- Reações químicas (equilibrar equações)
- Programação linear e não-linear
- Aprendizagem de máquina (regressão/classificação)
- Métodos numéricos
  - Interpolação, mínimos quadrados, solução de equações diferenciais

Classificação dos sistemas

Seja um sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, com uma matriz quadrada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tem-se as seguintes possibilidades quanto ao vetor solução $\mathbf{x}$:

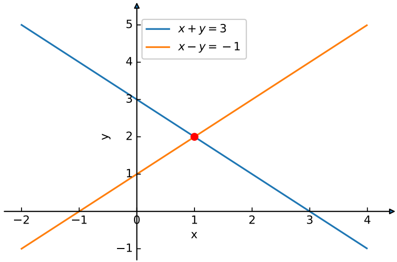
- Caso 1: Solução única (consistente e determinado)
- Caso 2: Infinitas soluções (consistente e indeterminado)
- Caso 3: Nenhuma solução (inconsistente)

Caso 1 - Exemplo

Seja o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

O vetor solução é dado por: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

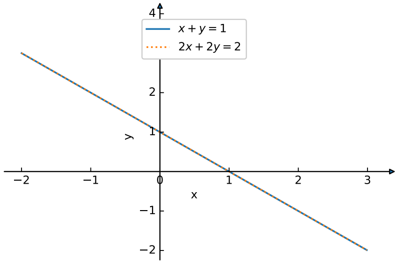


Caso 2 - Exemplo

Seja o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

O vetor solução é dado por: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$, sendo $\lambda \in \mathbb{R}$

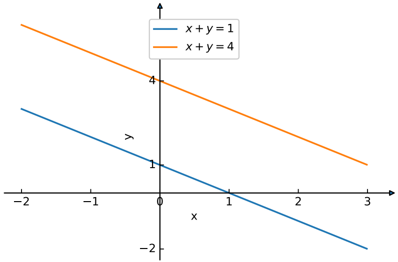


Caso 3 - Exemplo

Seja o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Não existe $\mathbf{x}$ que satisfaça $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$



Existência e Unicidade de solução

Seja uma matriz quadrada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

- $\mathbf{A}^{-1}$ existe
- A única solução para o sistema homogêneo $\mathbf{Ay} = \mathbf{0}$ é se $\mathbf{y} = \mathbf{0}$
- O posto da matriz $\mathbf{A}$ é n
- $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
- Dado qualquer vetor $\mathbf{b}$, existe exatamente um vetor $\mathbf{x}$ que satisfaça $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Exemplo

Verifique se os exemplos anteriores possuem solução através do cálculo do determinante:

Exemplo

Verifique se os exemplos anteriores possuem solução através do cálculo do determinante:

- Exemplo 1: como o determinante de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ é igual a $2 \neq 0$, então **existe solução** e é **única**
- Exemplo 2: como o determinante de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ é igual a 0, então o sistema não tem solução ou a **solução não é única**
- Exemplo 3: como o determinante de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é igual a 0, então o sistema **não tem solução** ou a solução não é única

Classificação dos Métodos Numéricos

A partir deste ponto, considera-se que **A** é uma matriz quadrada e não-singular (tem inversa). Sendo assim, os métodos que serão apresentados podem ser divididos em:

- Métodos diretos: Fornecem a solução exata do problema, a menos de erros de arredondamento, após um número finito de operações
- Métodos iterativos: Geram uma sequência de vetores a partir de uma aproximação inicial e, sob certas condições, essa sequência converge para a solução do problema

Métodos Diretos - Introdução

É chamado de **sistema triangular inferior L** de ordem n o sistema da forma:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Métodos Diretos - Introdução

É chamado de **sistema triangular inferior L** de ordem n o sistema da forma:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Um **sistema triangular superior U** de ordem n é dado de forma análoga.

Substituição - I

A resolução de um sistema desta forma é dado pelo procedimento chamado de **substituição** ou substituições sucessivas:

$$
\begin{gathered}
l_{11}x_1 = b_1 \Rightarrow x_1 = b_1/l_{11} \\
l_{21}x_1 + l_{22}x_2 = b_2 \Rightarrow x_2 = (b_2 - l_{21}x_1)/l_{22} \\
\vdots \\
l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \ldots + l_{n2}x_n = b_n \Rightarrow \\
x_n = (b_n - l_{n1}x_1 - l_{n2}x_2 - \ldots - l_{n,n-1}x_{n-1})/l_{nn}
\end{gathered}
$$

Sendo os valores em vermelho ou dados ou calculados ao longo do processo.

Substituição - II

Outra forma de apresentar a resolução por substituição é a seguinte:

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j \right) / l_{ii}, \quad i = 1, \ldots, n$$

sendo o lado direito composto com valores dados ou calculados ao longo do processo.

Substituição - Exemplo

Resolva o seguinte sistema triangular inferior:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 48 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituição - Exemplo

Resolva o seguinte sistema triangular inferior:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 48 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$2x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 4/2 = 2$$

$$3x_1 + 5x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = (1 - 3 \cdot 2)/5 = -1$$

$$x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 54 \Rightarrow x_3 = (48 - 2 - (-6) \cdot (-1))/8 = 5$$

$$-x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 0 \Rightarrow$$

$$x_4 = (-(-1) \cdot 2 - 4 \cdot (-1) - (-3) \cdot 5)/9 = 21/9 = 7/3$$

Assim, dada a matriz **L** e o vetor **b**, o algoritmo do procedimento de substituição pode ser descrito como:

Algoritmo

$x_1 \leftarrow b_1/L_{11}$
$soma \leftarrow 0$
Para i = 2,...,n, faça:
  $soma \leftarrow b_i$
  Para j = 1,...,i-1, faça:
    $soma \leftarrow soma - L_{ij} * x_j$
  $x_i \leftarrow soma/L_{ii}$

Retro-substituição

De forma análoga, dado um **sistema triangular superior** com uma matriz **U** e vetor **b**, o algoritmo do procedimento de retro-substituição pode ser descrito como:

Algoritmo

```
xₙ ← bₙ/Lₙₙ
soma ← 0
Para i = n-1,...,1, faça:
  soma ← bᵢ
  Para j = i+1,...,n, faça:
    soma ← soma - Lᵢⱼ * xⱼ
  xᵢ ← soma/Uᵢᵢ
```

Método de Eliminação Gaussiana

A ideia fundamental do método é transformar a matriz **A** numa matriz triangular superior utilizando **operações elementares** sobre as linhas da matriz original, para em seguida usar a retro-substituição

- Mais precisamente, utilizaremos a operação que consiste em substituir uma equação (linha da matriz) pela diferença entre essa mesma equação e uma outra equação multiplicada por uma constante diferente de zero
- Tal operação não altera a solução do sistema, isto é, obtêm-se com ela outro sistema equivalente ao original (desde que aplicado a todo o sistema)
- Para isso utilizaremos o conceito de **matriz estendida** (ou aumentada)

Métodos de Eliminação Gaussiana - Exemplo

Seja o sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 7 \\ 91 \end{bmatrix}$$

aplique o método de Eliminação Gaussiana.

Métodos de Eliminação Gaussiana - Exemplo

Passo 1: Montar a matriz estendida

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 26 \\ 4 & -6 & 0 & 7 \\ -2 & 7 & 2 & 91 \end{array}\right]$$

Passo 2: Calcular as constantes para aplicar as operações elementares

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 4/2 = 2$$
$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = -2/2 = -1$$

Métodos de Eliminação Gaussiana - Exemplo

Passo 3: Aplicar as operações elementares nas respectivas linhas

$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21} \cdot L_1 = L_2 - 2 \cdot L_1$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31} \cdot L_1 = L_3 + 1 \cdot L_1$$

Resultando no seguinte sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 26 \\ 0 & -8 & -2 & -45 \\ 0 & 8 & 3 & 117 \end{array}\right]$$

Métodos de Eliminação Gaussiana - Exemplo

Passo 4: Repetir o **Passo 2** na próxima coluna

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = 8/(-8) = -1$$

Passo 5: Repetir o **Passo 3** nas respectivas linhas

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32} \cdot L_2 = L_3 + 1 \cdot L_2$$

Resultando no seguinte sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 26 \\ 0 & -8 & -2 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 72 \end{array}\right]$$

Método de Eliminação Gaussiana

Ao utilizar apenas **operações elementares** foi possível chegar a um sistema equivalente ao original, que é possível de resolver facilmente por retro-substituição, como comentado anteriormente.

Decomposição LU

A ideia fundamental do método é que uma matriz quadrada pode ser escrita como o produto de duas matrizes $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$, respectivamente, uma matriz triangular inferior e superior. Ou seja, a matriz original $\mathbf{A}$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

Assim, podemos reescrever o sistema da seguinte forma:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{LUx} = \mathbf{b} \tag{1}$$

Supondo que $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, um vetor $\mathbf{y}$ que neste momento não conheço (vetor de incógnitas), da equação 1 podemos escrever:

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

e resolver o sistema para encontrar $\mathbf{y}$.
Ao saber os valores de $\mathbf{y}$, será possível resolver o sistema:

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

e encontrar os valores para $\mathbf{x}$.

Decomposição LU - Detalhes

- Como $\mathbf{L}$ é triangular inferior podemos resolver $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ facilmente usando o algoritmo de substituição
- Como $\mathbf{U}$ é uma matriz triangular superior, podemos resolver este sistema usando o algoritmo da retro-substituição

Decomposição LU - Condição de existência

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem n e $\mathbf{A}_k$ o *menor principal*, composto das k primeiras linhas e k primeiras colunas de $\mathbf{A}$. Se $\det(\mathbf{A}_k) \neq 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Então existe:

- uma **única** matriz triangular inferior $\mathbf{L} = (l_{ij})$ com $l_{ii} = 1$, para $i = 1, \ldots, n$
- uma **única** matriz triangular superior $\mathbf{U} = (u_{ij})$

De forma que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, além disso, $\det(\mathbf{A}) = u_{11} u_{22} \ldots u_{nn}$

Decomposição LU - Montagem de L e U

Como visto em *Álgebra linear*, as **operações elementares** podem ser vistas como matrizes. Tendo isso em mente, faremos o exemplo anterior novamente.

Seja o sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 7 \\ 91 \end{bmatrix}$$

aplique o método de Eliminação Gaussiana.

Decomposição LU - Montagem de L e U

Como trabalharemos com matrizes não é necessário montar a matriz estendida, assim, podemos pular o **Passo 1** do método anterior.

Passo 1: Calcular as constantes para aplicar as operações elementares

$$m_{21} = 2$$
$$m_{31} = -1$$

Passo 2: Montar a matriz de operações elementares utilizando as constantes calculadas no passo anterior

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Decomposição LU - Montagem de L e U

Passo 3: Multiplicar a matriz de operações elementares nos dois lados da igualdade pelo lado esquerdo

$$\mathbf{M}_1\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{M}_1\mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 \\ 7 \\ 91 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ -45 \\ 117 \end{bmatrix}$$

Decomposição LU - Montagem de L e U

Repare na semelhança entre os resultados parciais de ambas as abordagens.

Passo 4: Repetir o **Passo 1** para a próxima coluna

$$m_{32} = -1$$

Passo 5: Repetir o **Passo 2** utilizando as novas constantes

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo 6: Multiplicar a matriz de operações elementares nos dois lados da igualdade pelo lado esquerdo

$$\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 \\ -45 \\ 117 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ -45 \\ 72 \end{bmatrix}$$

Decomposição LU - Montagem de L e U

Após o último passo chegamos na matriz triangular superior desejada, ou seja:

$$\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}$$

Chamando $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}$, teremos:

$$\mathbf{MA} = \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}$$

pela **condição de existência** das matrizes $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$, elas são únicas, logo, chamando $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{L}$, teremos:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

Para maiores detalhes ler *Michael T. Heath. Scientific Computing. An Introductory Survey (2018). pags. 65-68*.

Decomposição LU - Montagem de L e U

Tudo isso para mostrar que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, é possível montar as matrizes da **Decomposição LU** através do **Método de eliminação gaussiana** (sem utilizar o conceito de matriz estendida).

Decomposição LU - Mais detalhes

A decomposição LU entretanto é importante do ponto de vista computacional, uma vez que é normal acontecerem problemas matemáticos onde apenas o vetor **b** muda de valores e a matriz **A** se mantém fixa. Logo, tendo realizado previamente a decomposição de **A** em **L** e **U**, precisaríamos apenas resolver:

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

e em seguida:

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

para encontrar **x**, ao invés de ter que transformar a matriz **A** em triangular toda vez que mudamos o vetor **b**.

Decomposição LU - Eliminação gaussiana

Inicializando as matrizes **L** e **U** como matrizes identidade e copia da matriz **A**, respectivamente, teremos:

Algoritmo

Para k = 1,...,n-1, faça:
  Se U_{kk} == 0 faça:
    BREAK
  Para i = k+1,...,n, faça:
    $L_{ik} \leftarrow U_{ik} / U_{kk}$
  Para j = k,...,n, faça:
    Para i = k+1,...,n, faça:
      $U_{ij} \leftarrow U_{ij} - L_{ik} * U_{kj}$

Exemplo - Implementação

Link para exemplo interativo

Conclusão I

Foram abordados os seguintes assuntos:

- Definição de sistema linear e a sua importância na ciência
- Classificação dos sistemas lineares: solução única, infinitas soluções, nenhuma solução
- Existência e unicidade da solução

Conclusão II

- Classificação dos métodos numéricos para resolver este tipo de problema: métodos diretos e métodos iterativos
- Introdução aos métodos diretos
- Sistemas triangulares, inferior e superior, assim como a sua resolução por substituição e retro-substituição respectivamente

Conclusão III

- Método de eliminação gaussiana utilizando matriz estendida
- Conceito de decomposição LU, condição de existência
- Montagem das matrizes **L** e **U** através do método de eliminação gaussiana

OBRIGADO PELA SUA PARTICIPAÇÃO