Raízes (ou Zeros) de Funções Reais

Prof. Jonathan Esteban Arroyo Silva

Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de São João del-Rei
silva.jea@ufsj.edu.br

Sumário

Introdução

O problema a seguir:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sendo $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$, consiste em encontrar os valores de x para os quais a função:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

seja zero, ou dito de forma simplificada, achar os zeros (ou raízes) da função $f(x)$

Afortunadamente, para este tipo de problema a solução é bastante conhecida.
No Brasil é chamada de *fórmula de Bhaskara*:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Porém, de modo geral, não podemos encontrar os zeros de uma função através de uma expressão fechada, tendo que recorrer a métodos aproximados.

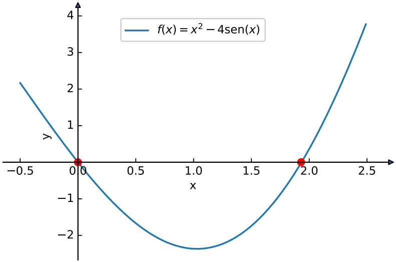
Um dos problemas que ocorrem mais frequentemente em trabalhos científicos é o de calcular (ou achar) as raízes de equações da forma:

$$f(x) = 0$$

sendo $f(x)$ um polinômio em x ou uma função transcendente.

Exemplo

Sendo $f(x) = x^2 - 4\text{sen}(x) = 0$, visualmente é possível dizer onde estão localizadas as raízes



Curiosidade

No caso vetorial onde $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, o problema consiste em encontrar o vetor $\mathbf{x}$ tal que todas as componentes de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ são iguais a zero simultaneamente.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 + 0.2 \\ -x_1 + x_2^2 + 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Curiosidade

No caso vetorial onde $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, o problema consiste em encontrar o vetor $\mathbf{x}$ tal que todas as componentes de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ são iguais a zero simultaneamente.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 + 0.2 \\ -x_1 + x_2^2 + 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O vetor solução é dado por $\mathbf{x} = [0.5 \;\; 0.5]^T$

Definição

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função dada, um ponto $\bar{x} \in [a, b]$ é um zero (ou raiz) de f se $f(\bar{x}) = 0$.

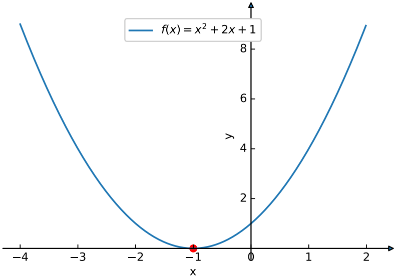
Nesta disciplina iremos trabalhar apenas com as raízes reais.

Definição

Um ponto $\bar{x} \in [a, b]$ é uma raiz de multiplicidade m da equação $f(x) = 0$ se $f(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = \ldots = f^{(m-1)}(\bar{x}) = 0$ e $f^{(m)}(\bar{x}) \neq 0$.

Exemplo

Sendo $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, a raiz será $\bar{x} = -1$ com multiplicidade $m = 2$, pois, sendo $f'(x) = 2(x+1)$, tem-se, $f(-1) = 0$, $f'(-1) = 0$ e $f''(-1) = 2 \neq 0$



Etapas

Pode-se dividir o processo de achar as raízes de funções reais em duas partes:

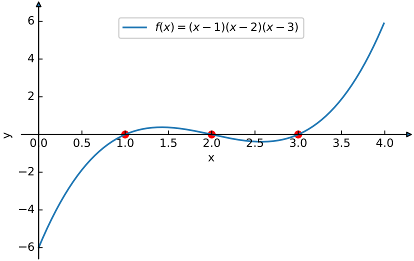
- Isolamento das raízes:
  - Encontrar um intervalo $[a, b]$ que contenha **apenas uma** raiz
  - Determinar uma aproximação inicial x_0 (ou mais de uma, dependendo do método)
- Aplicação do processo iterativo ou refinamento da aproximação:
  - Gerar uma sequência $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ que convirja para a raiz exata $\bar{x}$ de $f(x) = 0$

Teorema

Se uma função contínua $f(x)$ *assume valores de sinais opostos nos pontos extremos do intervalo* $[a, b]$, *isto é, se* $f(a) \cdot f(b) < 0$, *então existe* ***pelo menos um*** *ponto* $\bar{x} \in [a, b]$, *tal que* $f(\bar{x}) = 0$.

Exemplo I

Sendo $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, sabemos que existem 3 raízes no intervalo $[0, 4]$.
É possível ver que no intervalo $[0.5, 2.5]$ existem duas raízes, porém o Teorema anterior não é aplicável, o que isso significa?



Resposta - Exemplo I

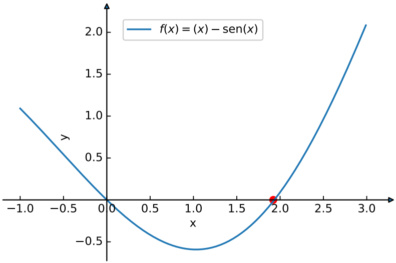
Significa apenas que os intervalos utilizados não permitem que utilizemos o Teorema.
Ao definir os intervalos como a seguir:

$$[0.5, 1.5]; [1.5, 2.5]; [2.5, 3.5];$$

o Teorema garante que em cada um deles exista **pelo menos** uma raiz, como observou-se no gráfico.

Exemplo II

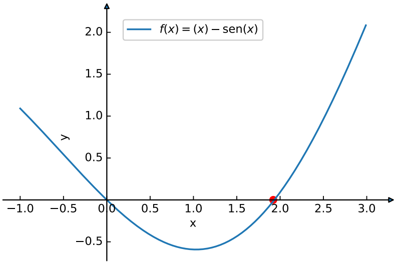
Defina um intervalo para achar a raiz positiva (não nula) de $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \text{sen}(x)$



UFSJ Universidade Federal de São João del-Rei

Exemplo II

Defina um intervalo para achar a raiz positiva (não nula) de
$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \text{sen}(x)$



Possível resposta: $[1.5, 2.5]$

Exemplo III

Encontre um intervalo de tamanho unitário em que haja ao menos uma raiz para $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$ de modo que $x \geq 0$

Exemplo III

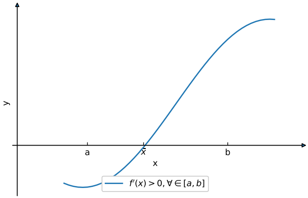
Encontre um intervalo de tamanho unitário em que haja ao menos uma raiz para $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$ de modo que $x \geq 0$
A partir da seguinte tabela:

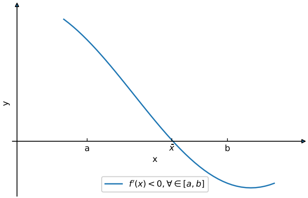
x	$f(x)$	sinal
0	-5.0	<0
1.0	-0.839397205857	<0
2.0	0.73753714619	>0

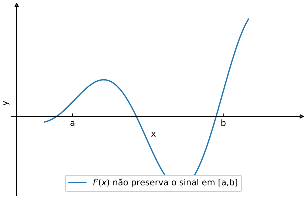
é possível ver que, sendo $f(x)$ contínua no intervalo $[1, 2]$, pelo Teorema há ao menos uma raiz.

Teorema

Sob as hipóteses do teorema anterior, se $f'(x)$ existir e preservar o sinal em $[a, b]$, então o intervalo contém um único zero de $f(x)$.







Exemplo

É possível garantir que exista apenas uma raiz para a função $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$ no intervalo $[1, 2]$?

Exemplo

É possível garantir que exista apenas uma raiz para a função $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$ no intervalo $[1, 2]$?
Resposta: Sim, pois $f(x)$ é **contínua** nesse intervalo, $\mathbf{f(1) \cdot f(2) < 0}$ e $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5e^{-x} > 0, \forall x > 0$, ou seja, $f'(x)$ **existe e preserva o sinal**.

Com esse segundo Teorema, temos as ferramentas suficientes para realizar a primeira parte do processo de achar as raízes de funções reais que é o **Isolamento das raízes**:

- Encontrar um intervalo $[a, b]$ que contenha **apenas uma** raiz
- Determinar uma aproximação inicial x_0 (ou mais de uma, dependendo do método)

Método da Bisseção

Pelo primeiro Teorema, se $f(x)$ tem sinais opostos em $x = a$ e $x = b$, então $f(x)$ tem no mínimo uma raiz em $[a, b]$, no método da bisseção é feito o seguinte procedimento:

- Calcula-se o ponto médio do intervalo: $x_1 = \dfrac{a + b}{2}$
- Se $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, então $f(x)$ tem uma raiz em $[a, x_1]$, pelo que repetimos o procedimento neste novo intervalo
- Se $f(a) \cdot f(x_1) > 0$, então $f(x)$ tem uma raiz em $[x_1, b]$, uma vez que $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, e repetimos o procedimento neste novo intervalo

Algoritmo

```
Para k = 1, 2,..., faça:
  x_k ← (a + b)/2
  Se f(a)·f(x_k) < 0 então:
    b ← x_k
  Senão:
    a ← x_k
```

Exemplo I

Aplicando o método para $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$ no intervalo $[1, 2]$ com alguns passos iterativos temos a tabela a seguir:

k	a	b	x_k	$f(x)$
1	1.0	2.0	1.5	0.10909407064943988
2	1.0	1.5	1.25	-0.3144899955510556
3	1.25	1.5	1.375	-0.0915940390678748
4	1.375	1.5	1.4375	0.011353785350889156
5	1.375	1.4375	1.40625	-0.03944857366448717
6	1.40625	1.4375	1.421875	-0.013882136918039523
7	1.421875	1.4375	1.4296875	-0.0012231854840827339

Exemplo II

Link para exemplo interativo

Critério de parada

Na prática a sequência de soluções aproximadas é interrompida quando seus valores satisfizerem a pelo menos um dos seguintes critérios:

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \epsilon \text{ (Erro absoluto)}$$
$$\left|\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k}\right| \leq \epsilon \text{ (Erro relativo)}$$
$$|f(x_k)| \leq \epsilon$$

sendo ϵ a precisão ou tolerância *fornecida* como parâmetro para o processo iterativo.

Critério de parada - observações

- É importante sempre limitar a quantidade de iterações, ou seja, fornecer um k_{final} ou k_{maximo}
- Em relação à precisão fornecida, normalmente tomamos $\epsilon = 10^{-m}$ onde m é o número de casas decimais que queremos corretas no resultado
- A utilização do erro relativo é o mais adequado dentre os três citados acima

Ordem de convergência

Um indicador importante sobre o *desempenho* do método é a rapidez da sequência de aproximações $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ em convergir para a raiz exata $\bar{x}$

Definição

Uma sequência $\{x_k | k \geq 0\}$ *é dita convergir com ordem* $p \geq 1$ *para um ponto* $\bar{x}$ *se:*

$$|\bar{x} - x_k| \leq c|\bar{x} - x_{k-1}|^p, \quad k \geq 0$$

para uma constante $c > 0$

Ordem de convergência - observações

Sendo $c < 1$, dizemos que:

- se $p = 1$ a convergência é linear
- se $1 < \mathrm{p} < 2$ a convergência é super-linear
- se $\mathrm{p} = 2$ a convergência é quadrática

Problemas de ponto fixo

Antes de falar do próximo método numérico, é necessário apresentar alguns conceitos:

Definição

*O **ponto fixo** de uma determinada função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o valor x que satisfaz:*

$$x = g(x)$$

Problemas de ponto fixo - observações

- Muitos métodos iterativos para resolver este tipo de problema utilizam uma função de iteração da forma:

$$x_k = g(x_{k-1})$$

  sendo que os pontos fixos de g também são solução para a equação $f(x) = 0$
- Para uma determinada equação $f(x) = 0$, pode existir mais de um problema de ponto fixo equivalente $x = g(x)$ com distintos g

Exemplo

Dado $f(x) = x^2 - x - 2$, é equivalentes resolver $f(x) = 0$ a resolver os seguinte problemas de ponto fixo:

- $g(x) = x^2 - 2$
- $g(x) = \sqrt{x + 2}$
- $g(x) = 1 + 2/x$
- $g(x) = \dfrac{x^2 + 2}{2x - 1}$

Exemplo

Dado $f(x) = x^2 - x - 2$, é equivalentes resolver $f(x) = 0$ a resolver os seguinte problemas de ponto fixo:

- $g(x) = x^2 - 2$
- $g(x) = \sqrt{x+2}$
- $g(x) = 1 + 2/x$
- $g(x) = \dfrac{x^2+2}{2x-1}$

Entretanto nem todas estas expressões são adequadas para uma função de iteração

Convergência do método de ponto fixo

Para que um problema de ponto fixo $x = g(x)$, seja adequado para a aplicação de métodos iterativos, ele precisa satisfazer os seguintes critérios:

- $g(x)$ e $g'(x)$ devem ser continuas num intervalo I contendo a raiz procurada
- $|g'(x)| < 1, \forall x \in I$

Método do ponto fixo

Após definir uma função de iteração $g(x)$, uma aproximação inicial adequada x_0 (no intervalo I), a precisão ϵ e o numero máximo de iterações $k_{\max}$:

Algoritmo

```
# Inicializar a variável
k ← 1
Enquanto o critério de parada não for satisfeito,
faça:
  x_k ← g(x_{k-1})
  k ← k + 1
```

Exemplo I

Dado $f(x) = x^2 - x - 2$, considerando $I = [1.5, 2.5]$ (uma vez que a raiz exata é $\bar{x} = 2.0$), verifique se a função de iteração $g(x) = x^2 - 2$, satisfaz os critérios de convergência do método do ponto fixo.

Exemplo I

Dado $f(x) = x^2 - x - 2$, considerando $I = [1.5, 2.5]$ (uma vez que a raiz exata é $\bar{x} = 2.0$), verifique se a função de iteração $g(x) = x^2 - 2$, satisfaz os critérios de convergência do método do ponto fixo.

- Uma vez que $g'(x) = 2x$, sabemos que $g(x)$ e $g'(x)$ são contínuas em I
- Porém $\max_{x \in I} |2x| > 1$, logo, o método do ponto fixo não converge para essa escolha da função de iteração

Exemplo II

Verifique se a função de iteração $g(x) = \sqrt{x+2}$, satisfaz os critérios de convergência do método do ponto fixo do problema anterior.

Exemplo II

Verifique se a função de iteração $g(x) = \sqrt{x+2}$, satisfaz os critérios de convergência do método do ponto fixo do problema anterior.

- Uma vez que $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$, sabemos que $g(x)$ e $g'(x)$ são contínuas em I
- Como $\max_{x \in I} \left| \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} \right| = 0.267 < 1$, logo, o método do ponto fixo converge para essa escolha da função de iteração

Exemplo II - Implementação

Link para exemplo interativo

Método de Newton

- O método de Newton é obtido utilizando $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ como função de iteração para o Método de ponto fixo
- Possui ordem de convergência igual a 2, em condições ideais
- É o método clássico mais utilizado para este tipo de problemas

Algoritmo

```
# Inicializar a variável
k ← 1
Enquanto o critério de parada não for satisfeito,
faça:
```

$$x_k \leftarrow x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$$

$$k \leftarrow k + 1$$

Exemplo

Resolva $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$, considerando $I = [1.5, 2.5]$.

Exemplo

Resolva $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$, considerando $I = [1.5, 2.5]$.

- Das informações necessárias para utilizar o método de Newton, falta apenas explicitar que $f'(x) = 2x - 1$
- Tem-se então a fórmula de iteração:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{x_{k-1}^2 - x_{k-1} - 2}{2x_{k-1} - 1}$$

Exemplo - Implementação

Link para exemplo interativo

Método da Secante

- O método da secante é obtido utilizando a aproximação $f'(x_{k-1}) \approx \frac{f(x_{k-1})-f(x_{k-2})}{x_{k-1}-x_{k-2}}$ para a derivada de $f(x)$ no método de Newton
- Possui ordem de convergência super linear
- É recomendado quando não se tem uma expressão explícita ou muito complexa para $f'(x)$

Algoritmo

```
# Inicializar a variável
k ← 1
Enquanto o critério de parada não for satisfeito,
faça:
```

$$x_k \leftarrow \frac{x_{k-2} \cdot f(x_{k-1}) - x_{k-1} \cdot f(x_{k-2})}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}$$

```
  k ← k + 1
```

Exemplo

Resolva $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$, considerando $I = [1.5, 2.5]$.

Exemplo

Resolva $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$, considerando $I = [1.5, 2.5]$.

- A fórmula de iteração é dada por:

$$x_k = \frac{x_{k-2} \cdot (x_{k-1}^2 - x_{k-1} - 2) - x_{k-1} \cdot (x_{k-2}^2 - x_{k-2} - 2)}{(x_{k-1}^2 - x_{k-1} - 2) - (x_{k-2}^2 - x_{k-2} - 2)}$$

Exemplo - Implementação

Link para exemplo interativo

Conclusão I

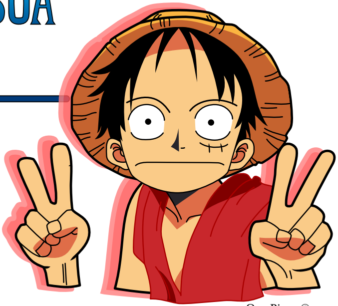
Foram abordados os seguintes assuntos:

- Apresentação do problema de achar raízes de funções reais
- As etapas para a aplicação dos métodos numéricos
  - Isolamento das raízes
  - Aplicação do processo iterativo
- O método da Bisseção
- Apresentação dos conceitos de Critério de parada e Ordem de convergência

Conclusão II

- O método do ponto fixo
- O método de Newton
- O método da Secante

OBRIGADO PELA SUA PARTICIPAÇÃO



One Piece ©