Integração Numérica

Prof. Jonathan Esteban Arroyo Silva

Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de São João del-Rei
silva.jea@ufsj.edu.br

Sumário

Introdução

Como o nome sugere, estamos interessados em estudar métodos numéricos para calcular de forma aproximada a integral de uma função com uma variável real em um intervalo $[a, b]$:

$$I = I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

sendo $f(x)$ uma função contínua com derivadas contínuas no intervalo [a, b].

Introdução

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, sabemos que:

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

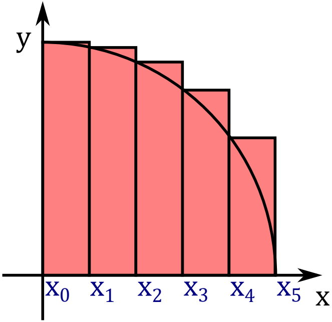
sendo $F(x)$ a função primitiva de $f(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$.

Introdução

Por outro lado, é importante lembrar que a integral pode ser definida através de um somatório infinito de áreas de retângulos:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n=\infty} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

sendo x_i os pontos da discretização em x, como no exemplo a seguir (n=5):



Introdução

De modo geral, a integração numérica consiste em integrar o polinômio $P_n(x)$ que interpola os pontos:

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$$

sendo $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$, ou seja:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_n} P_n(x)dx$$

por ser mais fácil de computar e trabalhar, como comentado em aulas anteriores.

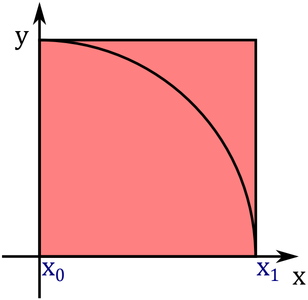
Fórmulas Fechadas de Newton-Cotes

- Considera-se inicialmente as fórmulas de Newton-Cotes do tipo fechada, isto é, quando $x_0 = a$ e $x_n = b$
- Serão adotados polinômios interpoladores $P_n(x)$ sobre nós igualmente espaçados no intervalo $[a, b]$
- Assim, $x_i = \left(\dfrac{b-a}{n}\right) i + a; \quad i = 0, 1, \ldots, n$
- Consequentemente, $h = \dfrac{b-a}{n} \rightarrow x_i = x_0 + ih; \quad i = 0, 1, \ldots, n$

Regra do Retângulo

- Como o polinômio mais simples é o polinômio constante, começaremos com ele
- Assim, $f(x)$ será aproximada pelo seu valor em $x_0 = a$ (ou em $x_1 = b$), de forma que:

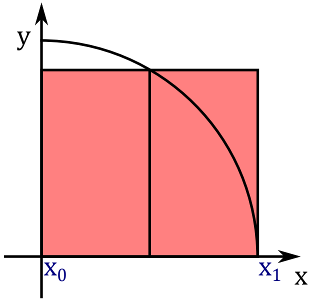
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0=a}^{x_n=b} P_n(x)dx = \int_a^b f(a)dx = [xf(a)]\big|_a^b$$
$$= (b-a)f(a) = hf(a)$$



Regra do Retângulo - Ponto médio

- Escolhendo $f(x)$ em algum outro ponto do intervalo $[a, b]$, podemos ter um melhor resultado?
- Uma escolha comum é o ponto médio do intervalo

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = hf\left(\frac{a+b}{2}\right)$$



Regra do Trapézio

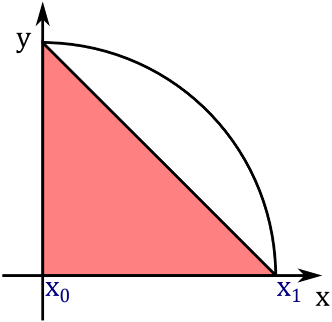
Seja $P_1(x)$ o polinômio interpolador de $f(x)$ que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, com $x_0 = a$ e $x_1 = b$, então, utilizando a forma de Lagrange para interpolação, tem-se:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx = \int_a^b f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)dx$$

Regra do Trapézio

Após alguns passos de algebrismo, tem-se

$$\int_a^b P_1(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right)$$



Exemplo

Calcule de forma aproximada o valor da seguinte integral $\int_0^{1.2} e^x \cos(x)dx$ usando a regra do trapézio.

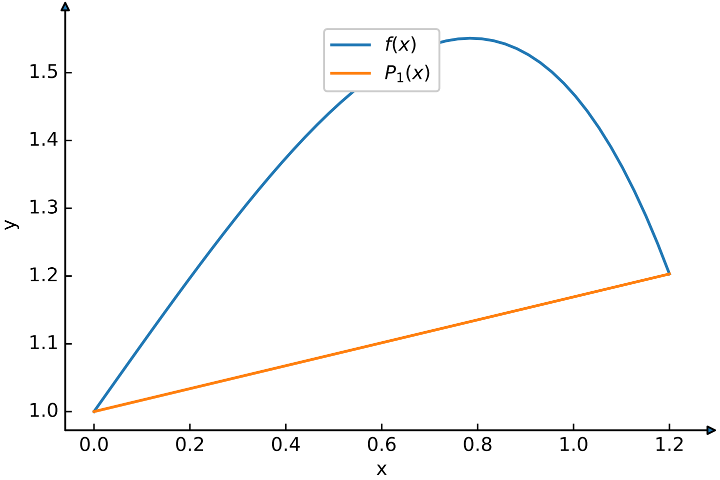
Exemplo

Calcule de forma aproximada o valor da seguinte integral $\int_0^{1.2} e^x \cos(x)dx$ usando a regra do trapézio.

- Como $a = x_0 = 0$ e $b = x_1 = 1.2$, logo $h = x_1 - x_0 = 1.2$
- Calculando os valores da função em x_0 e x_1 tem-se $f(0) = e^0 \cos(0) = 1$ e $f(1.2) = e^{1.2} \cos(1.2) = 1.2$
- Assim,

$$\int_0^{1.2} e^x \cos(x)dx \approx \frac{1.2}{2}(1 + 1.2) = 1.32$$

Exemplo



Regra 1/3 de Simpson

Seja $P_2(x)$ o polinômio interpolador de $f(x)$ que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, com $x_0 = a$ e $x_2 = b$, então, utilizando a forma de Lagrange para interpolação, tem-se:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx = f(x_0)\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}dx \\ + f(x_1)\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}dx \\ + f(x_2)\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}dx\end{aligned}$$

e após alguns passos algébricos, tem-se:

$$\frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

Exemplo

Calcule de forma aproximada o valor da seguinte integral $\int_0^{1.2} e^x \cos(x)dx$ usando a regra 1/3 de Simpson.

Exemplo

Calcule de forma aproximada o valor da seguinte integral $\int_0^{1.2} e^x \cos(x)dx$ usando a regra 1/3 de Simpson.

- Como $a = x_0 = 0$ e $b = x_2 = 1.2$, logo $h = \dfrac{x_2 - x_0}{2} = 0.6$
- Calculando os valores da função em x_0, x_1 e x_2 tem-se $f(0) = e^0 \cos(0) = 1$, $f(0.6) = e^{0.6} \cos(0.6) = 1.5$ e $f(1.2) = e^{1.2} \cos(1.2) = 1.2$
- Assim,

$$\int_0^{1.2} e^x \cos(x)dx \approx \frac{0.6}{3}(1 + 4 \cdot 1.5 + 1.2) = 1.64$$

Regra 3/8 de Simpson

Seja $P_3(x)$ o polinômio interpolador de $f(x)$ que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ e $(x_3, f(x_3))$ com $x_0 = a$ e $x_3 = b$, então, utilizando a forma de Lagrange para interpolação, tem-se:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_3(x)dx = f(x_0)\int_{x_0}^{x_3} \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}dx \\ + f(x_1)\int_{x_0}^{x_3} \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}dx \\ + f(x_2)\int_{x_0}^{x_3} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}dx \\ + f(x_3)\int_{x_0}^{x_3} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}dx\end{aligned}$$

e após alguns passos algébricos, tem-se:

$$\frac{3h}{8}(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3))$$

Exemplo

Calcule de forma aproximada o valor da seguinte integral $\int_0^{1.2} e^x \cos(x)dx$ usando a regra 3/8 de Simpson.

Exemplo

Calcule de forma aproximada o valor da seguinte integral $\int_0^{1.2} e^x \cos(x)dx$ usando a regra 3/8 de Simpson.

- Como $a = x_0 = 0$ e $b = x_3 = 1.2$, logo $h = \dfrac{x_3 - x_0}{3} = 0.4$
- Calculando os valores da função em x_0, x_1, x_2 e x_3, tem-se $f(0) = e^0 \cos(0) = 1$, $f(0.4) = e^{0.4} \cos(0.4) = 1.37$, $f(0.8) = e^{0.8} \cos(0.8) = 1.55$ e $f(1.2) = e^{1.2} \cos(1.2) = 1.2$
- Assim,

$$\int_0^{1.2} e^x \cos(x)dx \approx \frac{3(0.4)}{8} (1 + 3 \cdot 1.37 + 3 \cdot 1.55 + 1.2) = 1.6465$$

Análise de Erro de Integração

- Como em todos os casos aproximamos $f(x)$ por um polinômio interpolador $P_n(x)$ de grau n no intervalo $[a, b]$, o erro cometido é dado por:

$$E = \int_a^b f(x) - P_n(x)dx$$

- Por outro lado, o erro cometido ao interpolar uma função é dado por

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\eta(x))}{(n+1)!}$$

onde $\eta(x)$ é um ponto entre $[a, b]$ e $x_0, \ldots, x_n$ são os pontos de interpolação.

Análise de Erro de Integração

Assim, de forma geral tem-se que o cálculo do erro da integração é dado por:

$$E = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b (x - x_0) \cdots (x - x_n) f^{(n+1)}(\eta(x)) dx$$

Exemplo - Regra do retângulo

- No caso da regra do retângulo, tem-se $n = 0$ e $x_0 = a$, portanto:

$$E = \int_a^b (x - a) f'(\xi) dx$$

- Aplicando o teorema do valor médio para integrais, tem-se:

$$\int_a^b (x - a) f'(\eta(x)) dx = f'(\xi) \int_a^b x - a dx$$

$$= f'(\xi) \left[\frac{x^2}{2} - ax \right] \Bigg|_a^b = f'(\xi) \left[\frac{b^2}{2} - ab - \frac{a^2}{2} + a^2 \right]$$

$$= \frac{f'(\xi)}{2} \left[b^2 - 2ab + a^2 \right] = \frac{f'(\xi)}{2} (b - a)^2$$

Exemplo - Regra do retângulo

Assim como realizado na interpolação, em geral trabalhamos com um limitante superior para o erro, que é dado por:

$$|E_R| \leq \frac{M_1}{2}(b-a)^2$$

onde M_1 é um limitante superior para $|f'(x)|$ em $[a, b]$, isto é

$$M_1 = \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$$

Erro dos métodos de integração

Analogamente ao caso da Regra do retângulo, para os outros métodos de integração tem-se:

- Regra do Trapézio

$$E_T = -\frac{f''(\xi)}{12}h^3$$

- Regra 1/3 de Simpson

$$E_{1/3} = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}h^5$$

- Regra 3/8 de Simpson

$$E_{3/8} = -\frac{-f^{(4)}(\xi)}{80}h^5$$

Regras de Integração Generalizadas

- Quando o intervalo é grande, pode não ser conveniente aumentar o grau do polinômio interpolador
- Uma ideia é dividir o intervalo original em diversos subintervalos e aplicar uma regra de integração em cada subintervalo
- Essas são as chamadas regras repetidas

Regra do retângulo generalizada

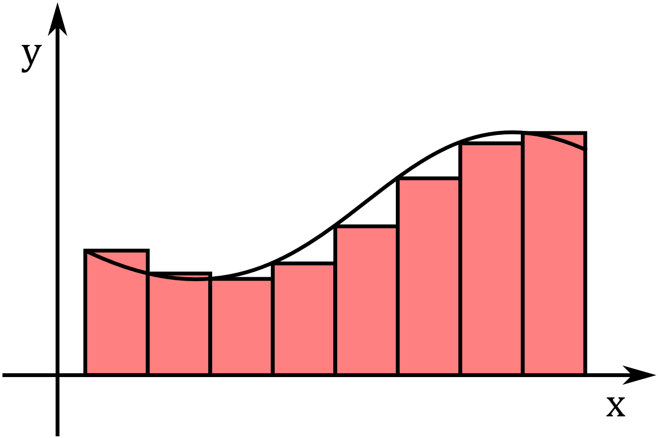
- Dividindo o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos, com $x_0 = a$, $x_m = b$ e $x_i = a + ih$ para $i = 0, \dots, m$ então

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

- Expandindo a regra do retângulo tem-se

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{m} hf(x_{i-1})$$

Regra do Retângulo generalizada

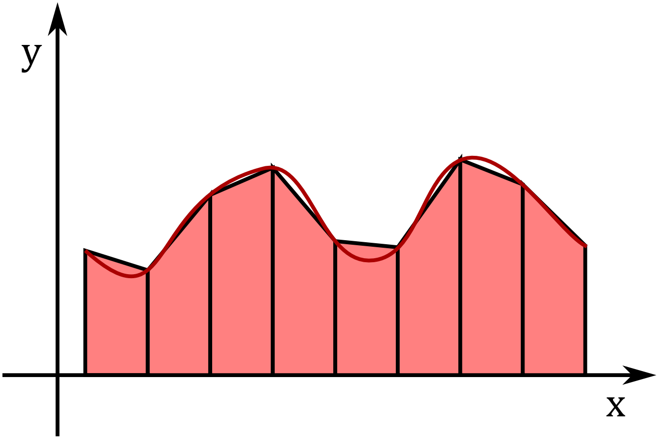


Regra do Trapézio generalizada

- De forma análoga ao realizado anteriormente e lembrando da regra do trapézio, tem-se:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{i=1}^{m} \frac{h}{2}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right] \\
&= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] + \dots \\
&+ \frac{h}{2}\left[f(x_{m-2}) + f(x_{m-1})\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_{m-1}) + f(x_m)\right] \\
&= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_m)\right] + h\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i)
\end{aligned}
$$

Regra do Trapézio generalizada



Regra 1/3 de Simpson generalizada

- De forma análoga ao realizado anteriormente, subdividindo o intervalo de integração $[a, b]$ em m (múltiplo de 2) subintervalos iguais e lembrando da regra 1/3 de Simpson, tem-se:

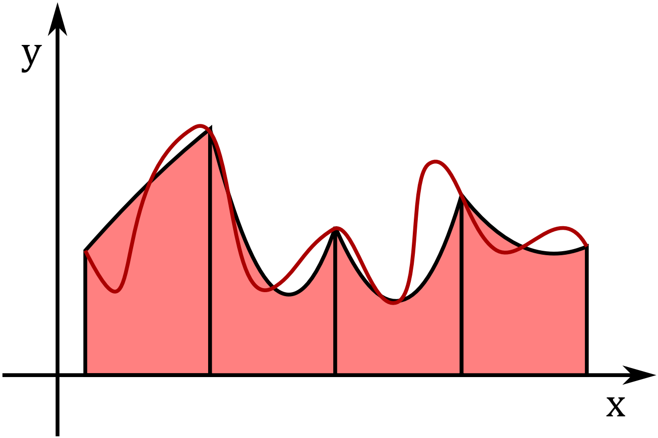
$$\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{m-1} \frac{h}{3}\left[f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] + \frac{h}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right] + \ldots$$

$$+ \frac{h}{3}\left[f(x_{m-2}) + 4f(x_{m-1}) + f(x_m)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_m)\right] + \frac{4h}{3}\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{m-1} f(x_i) + \frac{2h}{3}\sum_{i=2,4,6,\ldots}^{m-2} f(x_i)$$

Regra 1/3 de Simpson generalizada



Regra 3/8 de Simpson generalizada

- De forma análoga ao realizado anteriormente, subdividindo o intervalo de integração $[a, b]$ em m (múltiplo de 3) subintervalos iguais e lembrando da regra 3/8 de Simpson, tem-se:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0,3,6,\ldots}^{m-3} \frac{3h}{8}\left[f(x_i) + 3f(x_{i+1}) + 3f(x_{i+2}) + f(x_{i+3})\right] \\
&= \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right] \\
&+ \frac{3h}{8}\left[f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)\right] + \ldots \\
&+ \frac{3h}{8}\left[f(x_{m-3}) + 3f(x_{m-2}) + 3f(x_{m-1}) + f(x_m)\right]
\end{aligned}
$$

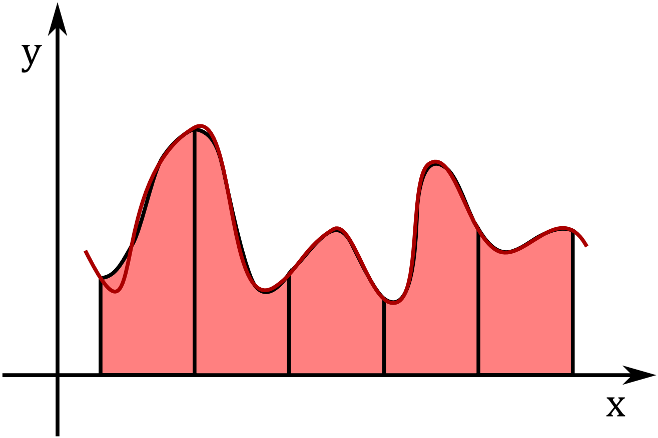
Regra 3/8 de Simpson generalizada

Resultando na expressão a seguir:

$$= \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + f(x_m)\right] + \frac{9h}{8} \sum_{i=1,4,7,\ldots}^{m-2} \left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

$$+ \frac{6h}{8} \sum_{i=3,6,9,\ldots}^{m-3} f(x_i)$$

Regra 3/8 de Simpson generalizada



Universidade Federal de São João del-Rei

Análise de Erro das Fórmulas Repetidas

- Considerando todos os espaçamentos iguais, i.e. $h_i = h$, tem-se:

$$h = \frac{b-a}{m} \rightarrow m = \frac{b-a}{h}$$

Regra do Retângulo Repetida

- Como o erro da regra do retângulo é dado por:

$$E_R = \frac{f'(\xi)}{2}(b-a)^2$$

- Ao somar o erro para todos os intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, então:

$$E_{RR} = \sum_{i=1}^{m} \frac{f'(\xi)}{2}(h)^2 = \frac{f'(\xi)}{2}(h)^2 m = \frac{f'(\xi)}{2}(h)^2 \frac{b-a}{h}$$
$$= \frac{f'(\xi)}{2}(b-a)h$$

- Assim também, tem-se o limitante superior do erro:

$$|E_{RR}| \leq \frac{|b-a|h}{2} \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$$

Regra do Trapézio Repetida

- Como o erro da regra do trapézio é dado por:

$$E_T = \frac{-f''(\xi)}{12}(h)^3$$

- Ao somar o erro para todos os intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, então:

$$E_{TR} = \sum_{i=1}^{m} \frac{-f''(\xi)}{12}(h)^3 = -\frac{f''(\xi)}{12}(h)^3 m = -\frac{f''(\xi)}{12}(h)^3 \frac{b-a}{h}$$
$$= \frac{-f''(\xi)}{12}(b-a)h^2$$

- Assim também, tem-se o limitante superior do erro:

$$|E_{TR}| \leq \frac{|b-a|h^2}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

Conclusão

Foram abordados os seguintes assuntos:

- Problemas envolvendo Integração Numérica
- Conceito das Fórmulas Fechadas de Newton-Cotes
- Regra do Retângulo
- Regra do Retângulo no ponto médio

Conclusão II

- Regra do Trapézio
- Regra 1/3 de Simpson
- Regra 3/8 de Simpson
- Formas repetidas das regras de integração vistas
- Análise de Erro de Integração para as regras de integração vistas

OBRIGADO PELA SUA PARTICIPAÇÃO

Dragon Ball ©