Interpolação Polinomial

Prof. Jonathan Esteban Arroyo Silva

Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de São João del-Rei
silva.jea@ufsj.edu.br

Sumário

Introdução

Forma de Lagrange

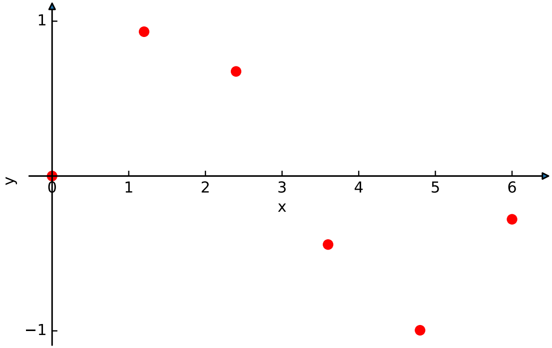
Diferenças divididas

Forma de Newton

Estimativa do erro na interpolação

Introdução

Num teste experimental, anotamos os valores de alguma determinada quantidade do nosso interesse em determinados instantes de tempo, obtendo um gráfico de pontos discretos semelhante a:

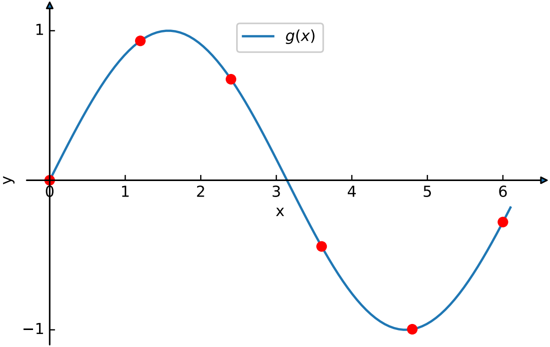


Introdução

- Entretanto, muitas vezes é de interesse saber o valor intermediário entre os pontos obtidos, assim, a **interpolação polinomial** vem como uma ferramenta para resolver este tipo de problema
- Dadas as $n+1$ duplas ou pontos distintos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, a função interpoladora $g(x)$ é aquela que $g(x_0) = y_0, g(x_1) = y_1, \ldots, g(x_n) = y_n$, para todos os pontos dados

Introdução

Obtendo idealmente uma função contínua e de fácil manuseio, como sugerido no gráfico a seguir:



Introdução

- Nesta disciplina iremos utilizar apenas funções polinomiais para este fim
  - Uma vez que polinômios são facilmente computáveis, suas derivadas e integrais são também polinômios, trazendo muitas facilidades
- Além do exemplo citado anteriormente, a interpolação polinomial é usada para aproximar uma função $f(x)$, quando ela é de difícil manejo:
  - Assim, a interpolação será usada também para calcular a integral numérica de $f(x)$ (cenas dos próximos capítulos)

Introdução

Dados $n+1$ pontos distintos, como comentado anteriormente, determinar um polinômio $P_n(x)$ de grau no máximo n que satisfaça:

$$P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, \ldots, P_n(x_n) = y_n$$

não é uma tarefa simples, tendo mais de uma forma de se calcular, porém com a garantia de que ele é **único**.

Neste sentido, procuramos um polinômio da forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

ou seja, precisamos encontrar os coeficientes que satisfaçam o seguinte *sistema linear*:

$$\begin{aligned}
P_n(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\
P_n(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\
&\vdots \\
P_n(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n
\end{aligned}$$

Escrevendo de forma matricial teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

onde a matriz dos coeficientes é chamada de **Matriz de Vandermonde**, e sabendo que o determinante de esta matriz é diferente de zero desde que os pontos x_i sejam distintos.

Caso n=1

Vamos focar no caso onde teremos que interpolar uma função tendo apenas dois pontos de informação: (x_0, y_0) e (x_1, y_1).
Ou seja procuramos uma *reta* com a cara:

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x \tag{1}$$

e

$$P_1(x_0) = a_0 + a_1 x_0 = y_0 \tag{2}$$
$$P_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1 = y_1 \tag{3}$$

Caso n=1

Da Eq.2 temos que $a_0 = y_0 - a_1 x_0$, *lembrando que as incógnitas são* a_i, e substituindo na Eq.3 teremos:

$$y_0 - a_1 x_0 + a_1 x_1 = y_1$$
$$a_1(x_1 - x_0) = y_1 - y_0$$
$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Caso n=1

Substituindo os valores encontrados na Eq.1 teremos:

$$P_1(x) = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x$$
$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Basta avaliar $P_1(x)$ em $x = x_0$ e $x = x_1$ para verificar que de fato este é o polinômio interpolador de (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

Exemplo

Dada a seguinte tabela:

x	1	1.1	1.2	1.3
$\tan(x)$	1.5574	1.9648	2.5722	3.6021

use interpolação linear ($n = 1$), para estimar o valor de $\tan(1.15)$.

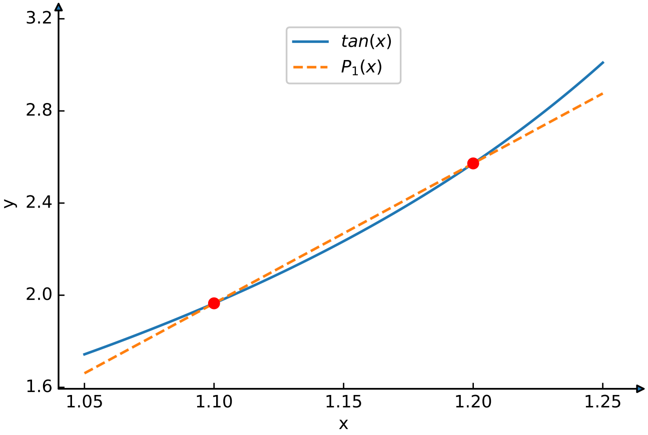
Exemplo

Uma vez que utilizaremos apenas dois pontos e $x = 1.15$ se encontra entre os valores 1.1 e 1.2, teremos que a aproximação no ponto desejado será dada pela fórmula:

$$\tan(1.15) \approx 1.9648 + \frac{2.5722 - 1.9648}{1.2 - 1.1}(1.15 - 1.1) = 2.2685$$

Sabendo que o valor *exato* para $\tan(1.15) = 2.2345$, podemos afirmar que a aproximação foi razoável.

Exemplo



Universidade Federal de São João del-Rei

Caso geral

Dados (x_i, y_i) para $i = 0, 1, \ldots, n$, para encontrar o polinômio $P_n(x)$, precisamos resolver o sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

usando algum método que já estudamos (Eliminação Gaussiana, Decomposição LU, etc).

Entretanto, a matriz de **Vandermonde** costuma ser mal-condicionada, levando a perda de precisão na solução.

Forma de Lagrange - n=2

Para ilustrar a ideia resolveremos um exemplo com três pontos distintos (x_0, y_0), (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Ou seja procuramos um *polinômio* do tipo:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

e

$$P_2(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2$$

Universidade Federal de São João del-Rei

Forma de Lagrange - n=2

Pela forma de Lagrange, procuraremos um polinômio da forma

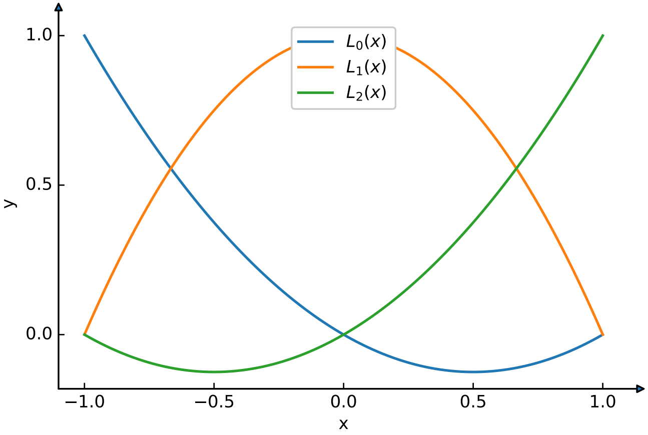
$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

sendo

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

as chamadas *funções de base de Lagrange* para interpolação quadrática.

Forma de Lagrange - n=2



Forma de Lagrange - n=2

Essas funções possuem a seguinte propriedade:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

para $i, j = 0, 1, 2$ sendo todas de grau 2, e consequentemente, fazendo com que $P_2(x)$ tenha grau ≤ 2.

Forma de Lagrange - n=2

Essas funções possuem a seguinte propriedade:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

para $i, j = 0, 1, 2$ sendo todas de grau 2, e consequentemente, fazendo com que $P_2(x)$ tenha grau ≤ 2.
Verifique se $P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$ respeita a condição de que $P_2(x_i) = y_i, \ i = 0, 1, 2$.

Universidade Federal de São João del-Rei

Exemplo

Dada a seguinte tabela:

x	-1	0	1
$f(x)$	0.54	1	0.54

teremos

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = 1-x^2$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x(x+1)}{2}$$

Exemplo

Em seguida,

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \\
&= (0.54)\frac{x(x-1)}{2} + (1)(1-x^2) + (0.54)\frac{x(x+1)}{2} \\
&= 1 - 0.46x^2
\end{aligned}
$$

Caso geral

Considerando $n+1$ pontos, o polinômio interpolador obtido pela forma de Lagrange será dado por:

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + \ldots + y_n L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

sendo

$$\begin{aligned} L_i(x) &= \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} \\ &= \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \end{aligned}$$

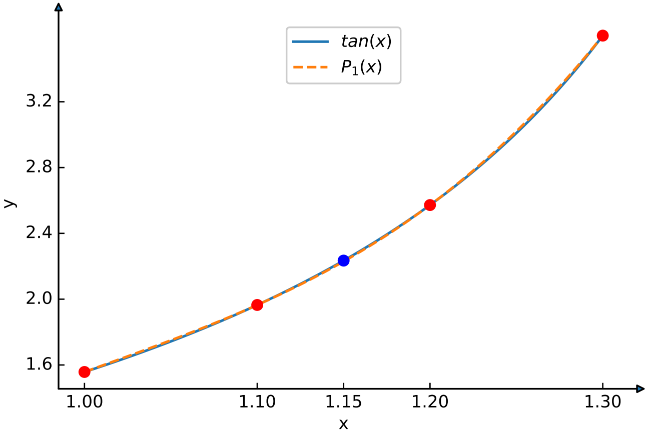
Exemplo

Dada a seguinte tabela:

x	1	1.1	1.2	1.3
$\tan(x)$	1.5574	1.9648	2.5722	3.6021

interpole a função com um polinômio de ordem $n = 3$, para estimar o valor de $\tan(1.15)$.

Exemplo



Forma de Lagrange

Sendo n, **x**, **y**, r, respectivamente, o número de pontos, os vetores de coordenadas dos pontos e o valor a interpolar:

Algoritmo

```
s← 0 Para i = 1,...,n, faça:
  c← 1
  d← 1
  Para j = 1,...,i-1, faça:
    c← c*(r - x_j)
    d← d*(x_i - x_j)
  Para j = i+1,...,n, faça:
    c← c*(r - x_j)
    d← d*(x_i - x_j)
  s← s + y_i*c/d
```

Diferenças divididas

Um conceito importante antes de se estudar a forma de Newton para se obter o polinômio interpolador, é o do operador de diferença dividida. Sendo assim, considere a função $f(x)$ e os pontos x_i,

- A diferença dividida de ordem **zero** é simplesmente o valor de f no ponto x_i, ou seja:

$$f[x_i] = f(x_i)$$

- A diferença dividida de **primeira** ordem de f é definida considerando dois pontos distintos:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i} = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$

Diferenças divididas

Definindo de forma recursiva os operadores de diferença divida de ordem mais alta, teremos:

- Segunda ordem:

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

- Terceira ordem:

$$f[x_i, x_j, x_k, x_l] = \frac{f[x_j, x_k, x_l] - f[x_i, x_j, x_k]}{x_l - x_i}$$

- n-ésima ordem:

$$f[x_i, \ldots, x_n] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_n] - f[x_i, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_i}$$

Diferenças divididas

Como definimos as diferenças divididas de forma recursiva, é necessário aplicar a definição até chegar nos operadores de ordem **zero**, ou seja, até que os cálculos envolvam apenas o valor da função nos pontos:

- Exemplo:

$$
\begin{aligned}
f[x_i, x_j, x_k] &= \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i} \\
&= \frac{\dfrac{f[x_k] - f[x_j]}{x_k - x_j} - \dfrac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}}{x_k - x_i} \\
&= \frac{\dfrac{f(x_k) - f(x_j)}{x_k - x_j} - \dfrac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}}{x_k - x_i}
\end{aligned}
$$

Diferenças divididas

Dada uma função $f(x)$ e um conjunto de pontos $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$, podemos usar o seguinte esquema para calcular as suas diferenças divididas:

Universidade Federal de São João del-Rei

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$
x_0	$f[x_0] = f(x_0)$		
		$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	
x_1	$f[x_1] = f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
		$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	
x_2	$f[x_2] = f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$
		$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	
x_3	$f[x_3] = f(x_3)$		$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$
		$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$	
x_4	$f[x_4] = f(x_4)$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Exemplo

Seja $f(x) = \cos(x)$, encontre $f[x_0, x_1, x_2]$, sabendo que $x_0 = 0.2, x_1 = 0.3, x_2 = 0.4$.

Exemplo

Seja $f(x) = \cos(x)$, encontre $f[x_0, x_1, x_2]$, sabendo que $x_0 = 0.2, x_1 = 0.3, x_2 = 0.4$.

Utilizando a tabela anterior teremos:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$
0.2	0.980		
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{0.955 - 0.980}{0.3 - 0.2} = -0.247$	
0.3	0.955		-0.475
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{0.921 - 0.955}{0.4 - 0.3} = -0.342$	
0.4	0.921		

Diferenças divididas - Detalhes

Uma propriedade importante do operador de diferenças divididas é que independe da ordem dos argumentos $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$, ou seja:

$$f[x_0, \ldots, x_n] = f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}]$$

para qualquer permutação $(i_0, \ldots, i_n)$ de $(0, 1, \ldots, n)$.

Forma de Newton

Considere que os dados gerados de uma função $f(x)$ nos pontos $x_i, i = 0, \ldots, n$ sejam tais que:

$$y_i = f(x_i)$$

utilizando as diferenças dividas é possível escrever polinômios interpoladores $P_i(x)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ P_2(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= P_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \end{aligned}$$

Forma de Newton

Para o caso geral ($i = n$), temos:

$$\begin{aligned} P_n(x) = &f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &+ \ldots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

que pode ser reescrita de forma recursiva como:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

A vantagem de utilizar a forma de Newton para interpolação é que ao aumentar a ordem do polinômio interpolador para $n + 1$ é possível reaproveitar as contas realizadas para o cálculo do polinômio de grau n

Exemplo

Do exemplo anterior obtivemos a seguinte tabela dos operadores de diferença divididas:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$
0.2	0.980		
		-0.247	
0.3	0.955		-0.475
		-0.342	
0.4	0.921		

Assim, pela forma de Newton podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&= 0.980 - 0.247(x - 0.2) - 0.475(x - 0.2)(x - 0.3)
\end{aligned}
$$

Estimativa do erro na interpolação

Sejam $x_0, \ldots, x_n$ um conjunto de $n+1$ pontos distintos e seja $f(x)$ uma função $n+1$ continuamente diferenciável e $P_n(x)$ o polinômio interpolador. Então, em qualquer ponto x entre $x_0, \ldots, x_n$ o erro de aproximação é dado por:

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

sendo que ξ se encontra entre os pontos $x_0, \ldots, x_n$.

Estimativa do erro na interpolação

Na prática, para estimar o erro utilizamos o seguinte resultado:

$$|E_n(x)| \leq \frac{|x - x_0| \cdots |x - x_n|}{(n+1)!} \max_{a \leq t \leq b} |f^{(n+1)}(t)|$$

sendo que $a = x_0$ e $b = x_n$.

Conclusão

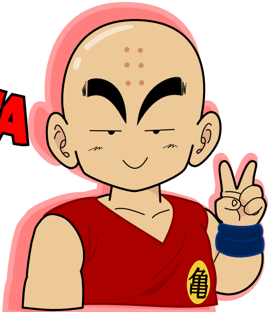
Foram abordados os seguintes assuntos:

- Problemas envolvendo interpolação
- Matriz de Vandermonde e o caso geral de interpolação polinomial
- Forma de Lagrange para interpolação polinomial

Conclusão II

- Operador de diferenças divididas
- Forma de Newton para interpolação polinomial
- Estimativa do erro na interpolação

OBRIGADO PELA SUA PARTICIPAÇÃO



Dragon Ball ©