Princípios Gerais e Erros

Prof. Jonathan Esteban Arroyo Silva

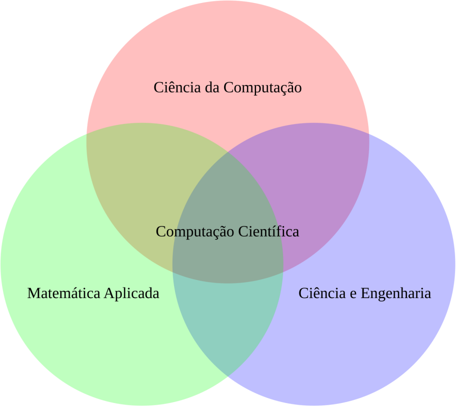
Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de São João del-Rei
silva.jea@ufsj.edu.br

Sumário

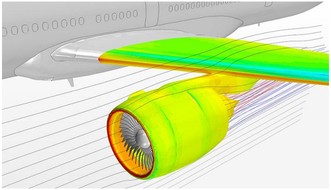
O que é Computação Científica?

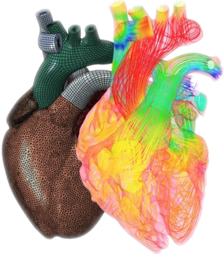
- Desenvolver e analisar algoritmos para resolver, de forma numérica, problemas matemáticos que surgem na ciência e engenharia

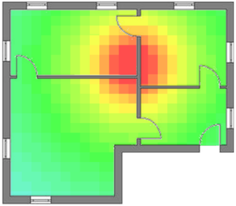
- *Michael T. Heath*

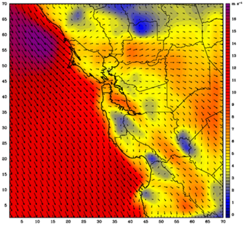


Exemplos









O que é Computação Científica?

- Para que serve computação científica?
  - Simulação preditiva de fenômenos naturais
  - Prototipagem virtual de projetos de engenharia
  - Análise de dados
- Diferentes aspectos da computação científica:
  - Trabalhar com quantidades *continuas* que são geralmente medidas com números reais (por exemplo: tempo, distância, velocidade, temperatura, densidade, pressão)
  - Avaliar os efeitos das *aproximações* utilizadas

O que é Cálculo numérico?

Uma disciplina introdutória para *Computação científica*

- Compreender como os números são representados nas calculadoras e computadores
- Apresentar os efeitos de utilizar *aproximações*
- Conhecer os algoritmos clássicos para resolução de problemas numéricos
- Comparação e critério na escolha da *melhor* opção possível

Solução Analítica × Solução Numérica

- Solução Analítica:
  - Representação numérica exata ou simbólica da solução
  - Exemplo: Fórmula de Bháskara
- Solução numérica:
  - Representação computacional ou aproximada da solução
  - Exemplo: Algoritmo de Eudoxo

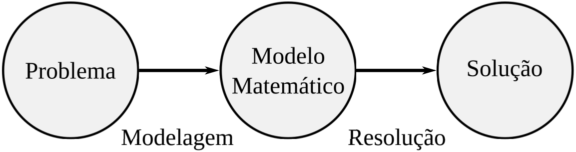
Por quê estudar soluções aproximadas?

I've learned that, in the description of Nature, one has to tolerate ***approximations****, and that work with approximations can be* ***interesting*** *and can sometimes be* ***beautiful****.*

- P. A. M. Dirac

Aprendi que, ao descrever a Natureza, é preciso tolerar ***aproximações****, e que o trabalho com aproximações pode ser* ***interessante*** *e, por vezes,* ***belo****.*

Descrevendo a Natureza



Como resolver um problema numérico?

Para resolver um problema numérico, é necessário entender bem cada uma das três etapas:

- Método matemático: uma descrição matemática sobre o processo de solução
- Algoritmo: um passo-a-passo de como executar o método (Pseudocódigo)
- Implementação: uma instanciação particular do algoritmo (utilizando alguma linguagem de programação)

Ponto flutuante

A representação de ponto flutuante é baseada na notação científica. Nessa notação um numero real não nulo x é expresso por:

$$x = \pm d \times \beta^e$$

em que

- d representa a mantissa;
- β representa a base do sistema de numeração
- e representa o expoente

Mantissa

A mantissa é a representação de um número da seguinte forma:

$$(0.d_1 d_2 d_3 \cdots d_t)_\beta$$

e possuindo as seguintes propriedades:

- Os dígitos da mantissa $0 \leq d_i \leq \beta - 1$, para $i = 1, \ldots, t$ e com $d_1 \neq 0$
- O número está **normalizado** quando $d_1 \neq 0$

Sistema de ponto flutuante

Um sistema de ponto flutuante é representado da forma:

$$F(\beta, t, m, M)$$

em que:

- β é a base do sistema
- t é o número de dígitos da mantissa ou precisão
- m é o menor valor para o expoente e
- M é o maior valor para o expoente e

Propriedades de um sistema de ponto flutuante

- Um sistema de ponto flutuante é finito e *discreto*
- Não todos os números reais são representados de forma exata
- A quantidade total de números de um sistema de ponto flutuante é dada por:

$$2(\beta - 1)\beta^{t-1}(M - m + 1) + 1$$

- O menor número positivo normalizado é dado por: $\mathrm{UFL} = \beta^{m-1}$
- O maior número representável é dado por: $\mathrm{OFL} = \beta^{M}(1 - \beta^{-t})$

Exemplo

- Considerando o sistema de ponto flutuante $F(10, 3, -3, 3)$, o número 12.5 será representado por:

$$0.125 \times 10^2$$

- O número de Euler, $e = 2.718281\ldots$, será representado por:

$$0.271 \times 10^1 \text{(com truncamento)}$$
$$0.272 \times 10^1 \text{(com arredontamento)}$$

Exemplo

- Considerando o sistema de ponto flutuante $F(10, 3, -3, 3)$, todo número x tal que UFL $\leq |x| \leq$ OFL pode ser representado no sistema, sendo com arredondamento ou truncamento
- Se $|x| <$ UFL, o número não pode ser representado no sistema, ocorrendo o erro chamado de **underflow**, (e.g., 0.517×10^{-8})
- Se $|x| >$ OFL, o número não pode ser representado no sistema, ocorrendo o erro chamado de **overflow**, (e.g., 0.725×10^{9})

Operações aritméticas em ponto flutuante

As propriedades aritméticas não são verdadeiras para todos os casos em sistemas de ponto flutuante:

$$\text{Associatividade: } (a+b)+c = a+(b+c)$$
$$\text{Distributividade: } a(b+c) = ab+ac$$

Exemplo

Considerando o sistema de ponto flutuante $F(10, 3, m, M)$ com arredondamento, verifique se:

- $(11.4 + 3.18) + 5.05 = 11.4 + (3.18 + 5.05)$
- $5.55(4.45 - 4.35) = 5.55 \cdot 4.45 - 5.55 \cdot 4.35$

Tipos de erros

Sendo $\tilde{x}$ uma aproximação de x, definimos como:

- Erro absoluto:

$$\mathrm{EA}(\tilde{x}) = |x - \tilde{x}|$$

- Erro relativo:

$$\mathrm{ER}(\tilde{x}) = \frac{|x - \tilde{x}|}{|\tilde{x}|} = \frac{\mathrm{EA}(\tilde{x})}{|\tilde{x}|}$$

desde que $\tilde{x} \neq 0$

Efeitos numéricos

Outros tipos de erros são encontrados quando se realiza operações ariméticas nas seguintes condições:

- Soma entre dois números com ordens muito distintas
- Subtração entre dois números de magnitudes semelhantes

Exemplo

Considerando o sistema de ponto flutuante $F(10, 4, m, M)$ com arredondamento, realize as seguintes operações e compare os resultados com sua solução exata:

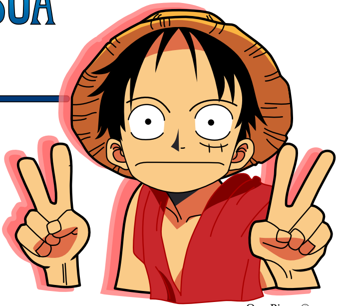
- $0.1 + 5000.0$
- $\sqrt{37} - \sqrt{36}$

Conclusão

Foram abordados os seguintes assuntos:

- Cálculo numérico como uma disciplina introdutória para *Computação científica*
- Solução analítica $\times$ Solução numérica
- Aritmética de ponto flutuante
- Tipos de erros em consequência de trabalhar com um sistema *discreto* e finito

OBRIGADO PELA SUA PARTICIPAÇÃO



One Piece ©