Resolução de Sistemas Lineares - Parte II

Prof. Jonathan Esteban Arroyo Silva

Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de São João del-Rei
silva.jea@ufsj.edu.br

Sumário

Introdução

Como comentado na aula passada,

- Métodos iterativos: Geram uma sequência de vetores a partir de uma aproximação inicial e, sob certas condições, essa sequência converge para a solução do problema
- Existem muitos métodos iterativos para a solução de sistemas lineares, entretanto só iremos estudar dois dos chamados métodos iterativos **estacionários**

Definição

Um método iterativo, escrito da forma:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$$

é dito **estacionário** quando a matriz **B** for fixa durante o processo iterativo.

Normas de Vetores

Para analisar o erro envolvido nas aproximações, será preciso associar a cada vetor e matriz um valor escalar não negativo. Assim, utilizaremos o conceito de norma de vetores, sendo as mais comuns:

- Norma Euclidiana ou norma L_2:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$$

- Norma infinito:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Normas de Matrizes

Analogamente, as normas mais comuns para matrizes são:

- Norma de Frobenius:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

- Norma infinito:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

ou a maior soma absoluta das linhas

Exemplo

Calcule a norma infinito da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

Exemplo

Calcule a norma infinito da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

Como a soma em módulo da primeira e segunda linha, é, respectivamente, 10 e 7, o máximo entre as duas opções é 10, assim:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = 10$$

Critério de parada

Desta forma, a distância entre dois vetores pode ser calculada, como a seguir:

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2 \quad \text{ou} \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_\infty$$

Neste sentido, sendo, $\mathbf{x}^{(k)}$ e $\mathbf{x}^{(k-1)}$, duas aproximações para o vetor solução $\mathbf{x}^*$, é possível definir o critério de parada (para o caso da norma infinto) como:

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|_\infty} = \frac{\max_{(1\leq i\leq n)} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|}{\max_{(1\leq i\leq n)} |x_i^{(k)}|} < \epsilon$$

onde ϵ representa a precisão desejada.

Critério de parada

Desta forma, a distância entre dois vetores pode ser calculada, como a seguir:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \quad \text{ou} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$$

Neste sentido, sendo, $\mathbf{x}^{(k)}$ e $\mathbf{x}^{(k-1)}$, duas aproximações para o vetor solução $\mathbf{x}^*$, é possível definir o critério de parada (para o caso da norma infinto) como:

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|_\infty} = \frac{\max_{(1 \leq i \leq n)} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|}{\max_{(1 \leq i \leq n)} |x_i^{(k)}|} < \epsilon$$

onde ϵ representa a precisão desejada.
Não esquecer de sempre definir um k_{max}

Método de Jacobi - Caso 3×3

A fim de ilustrar a ideia do método de Jacobi, aplicaremos o método para o caso de um sistema 3×3, como a seguir:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3
\end{aligned}
$$

o qual pode ser escrito como:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \\
x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22} \\
x_3 &= (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}
\end{aligned}
$$

Processo de iteração

A partir de uma aproximação inicial:

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix}$$

É possível calcular uma nova aproximação $\mathbf{x}^1$, utilizando o esquema apresentado anteriormente, como a seguir:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= (b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0)/a_{11} \\ x_2^1 &= (b_2 - a_{21}x_1^0 - a_{23}x_3^0)/a_{22} \\ x_3^1 &= (b_3 - a_{31}x_1^0 - a_{32}x_2^0)/a_{33} \end{aligned}$$

Método de Jacobi - Caso geral

Para o caso geral, a partir de uma aproximação inicial teremos, para cada passo de iteração k:

Algoritmo

Para i = 1,...,n, faça:
  soma_parcial $\leftarrow$ b_i
  Para j = 1,...,i-1, faça:
    soma_parcial $\leftarrow$ soma_parcial - $a_{ij} x_j^{k-1}$
  Para j = i+1,...,n, faça:
    soma_parcial $\leftarrow$ soma_parcial - $a_{ij} x_j^{k-1}$
  $x_i^k \leftarrow$ soma_parcial/a_{ii}

Exemplo

Resolva o seguinte sistema pelo método de Jacobi, utilizando como vetor inicial $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$:

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \\
0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\
0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20
\end{aligned}
$$

Exemplo

Resolva o seguinte sistema pelo método de Jacobi, utilizando como vetor inicial $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$:

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 &= 8 \\
0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 &= 9 \\
0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 &= 20
\end{aligned}
$$

Utilizando o esquema de iteração:

$$
\begin{aligned}
x_1^k &= (8 - 0.24x_2^{k-1} + 0.08x_3^{k-1})/4 \\
x_2^k &= (9 - 0.09x_1^{k-1} + 0.15x_3^{k-1})/3 \\
x_3^k &= (20 - 0.04x_1^{k-1} + 0.08x_2^{k-1})/4
\end{aligned}
$$

Exemplo

Para $k = 1$ teremos:

$$x_1^1 = (8 - 0.24x_2^0 + 0.08x_3^0)/4 = 8/4 = 2$$
$$x_2^1 = (9 - 0.09x_1^0 + 0.15x_3^0)/3 = 9/3 = 3$$
$$x_3^1 = (20 - 0.04x_1^0 + 0.08x_2^0)/4 = 20/4 = 5$$

Assim, a solução para os primeiros 3 passos de iteração k será dada por:

k	0	1	2	3
x_1	0	2	1.92	1.91
x_2	0	3	3.19	3.1944
x_3	0	5	5.04	5.0446

Matriz de iteração do método de Jacobi

O método de Jacobi aplicado num sistema de equações lineares pode ser visto de forma matricial como:

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax} = \mathbf{b} &\Rightarrow (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\,\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\Rightarrow \mathbf{Dx} = \mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\,\mathbf{x}\end{aligned}$$

onde **L**, **D** e **U**, são respectivamente, matrizes da forma triangular inferior, diagonal e triangular superior.
Ao aplicar o processo iterativo, na expressão anterior teremos:

$$\mathbf{Dx}^{(k)} = \mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\,\mathbf{x}^{(k-1)}$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\,\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{B}_J\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$$

Convergência

Sendo a **matriz de iteração** do método de Jacobi dada por:

$$\mathbf{B}_J = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$$

o método convergirá se:

$$\|\mathbf{B}_J\|_\infty < 1$$

Critério das linhas

Sendo $\alpha_i = \sum_{j=1, i \neq j}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|$ para $i = 1, \ldots, n$, se $\alpha = \max\{\alpha_i\} < 1$, então o método de Jacobi converge independentemente da aproximação inicial $\mathbf{x}^0$.

Verifique se a matriz $\mathbf{A}$ abaixo satisfaz o critério das linhas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0.24 & -0.08 \\ 0.09 & 3 & -0.15 \\ 0.04 & -0.08 & 4 \end{bmatrix}$$

Critério das linhas

Sendo $\alpha_i = \sum_{j=1, i \neq j}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|$ para $i = 1, \ldots, n$, se $\alpha = \max\{\alpha_i\} < 1$, então o método de Jacobi converge independentemente da aproximação inicial $\mathbf{x}^0$.

Verifique se a matriz $\mathbf{A}$ abaixo satisfaz o critério das linhas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0.24 & -0.08 \\ 0.09 & 3 & -0.15 \\ 0.04 & -0.08 & 4 \end{bmatrix}$$

Resposta: Como $\alpha = 0.08 < 1$, então a matriz $\mathbf{A}$ satisfaz o critério das linhas.

Matriz estritamente diagonal dominante

Uma matriz **A** é estritamente diagonal dominante se:

$$\sum_{j=1, i \neq j}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, \ldots, n$$

Matrizes estritamente diagonal dominante satisfazem o critério das linhas, portanto, o método de Jacobi converge para este tipo de matrizes.

Exemplo - Implementação

Link para exemplo interativo

Método de Gauss-Seidel - Introdução

- O método de Gauss-Seidel pode ser visto como uma modificação do método de Jacobi
- Será utilizado a mesma forma de iterar que o método de Jacobi, aproveitando os cálculos parciais das componentes das linhas anteriores

Método de Gauss-Seidel - Caso 3×3

A partir de uma aproximação inicial:

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix}$$

É possível calcular uma nova aproximação $\mathbf{x}^1$, utilizando o esquema apresentado anteriormente, como a seguir:

$$\begin{aligned} x_1^{1} &= (b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0)/a_{11} \\ x_2^{1} &= (b_2 - a_{21}x_1^{1} - a_{23}x_3^0)/a_{22} \\ x_3^{1} &= (b_3 - a_{31}x_1^{1} - a_{32}x_2^{1})/a_{33} \end{aligned}$$

Método de Gauss-Seidel - Caso geral

Para o caso geral, a partir de uma aproximação inicial teremos, para cada passo de iteração k:

Algoritmo

Para i = 1,...,n, faça:
  soma_parcial $\leftarrow$ b_i
  Para j = 1,...,i-1, faça:
    soma_parcial $\leftarrow$ soma_parcial - $a_{ij}x_j^k$
  Para j = i+1,...,n, faça:
    soma_parcial $\leftarrow$ soma_parcial - $a_{ij}x_j^{k-1}$
  $x_i^k \leftarrow$ soma_parcial/a_{ii}

Exemplo

Resolva o seguinte sistema pelo método de Gauss-Seidel, utilizando como vetor inicial $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$:

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 &= 8 \\
0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 &= 9 \\
0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 &= 20
\end{aligned}
$$

Exemplo

Resolva o seguinte sistema pelo método de Gauss-Seidel, utilizando como vetor inicial $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$:

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 &= 8 \\
0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 &= 9 \\
0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 &= 20
\end{aligned}
$$

Utilizando o esquema de iteração:

$$
\begin{aligned}
x_1^k &= (8 - 0.24x_2^{k-1} + 0.08x_3^{k-1})/4 \\
x_2^k &= (9 - 0.09x_1^k + 0.15x_3^{k-1})/3 \\
x_3^k &= (20 - 0.04x_1^k + 0.08x_2^k)/4
\end{aligned}
$$

Exemplo

Para $k = 1$ teremos:

$$x_1^1 = (8 - 0.24 \cdot 0 + 0.08 \cdot 0)/4 = 8/4 = 2$$
$$x_2^1 = (9 - 0.09 \cdot 2 + 0.15 \cdot 0)/3 = (9 - 0.18)/3 = 2.94$$
$$x_3^1 = (20 - 0.04 \cdot 2 + 0.08 \cdot 2.94)/4 = 5.0388$$

Assim, a solução para os primeiros 3 passos de iteração k será dada por:

k	0	1	2	3
x_1	0	2	1.924376	1.909240
x_2	0	3.94	3.194209	3.194955
x_3	0	5.0388	5.044640	5.044807

Matriz de iteração do método de Gauss-Seidel

O método de Jacobi aplicado num sistema de equações lineares pode ser visto de forma matricial como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} &\Rightarrow (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\,\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\Rightarrow (\mathbf{L} + \mathbf{D})\,\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{Ux} \end{aligned}$$

onde **L**, **D** e **U**, são respectivamente, matrizes da forma triangular inferior, diagonal e triangular superior.
Ao aplicar o processo iterativo, na expressão anterior teremos:

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D})\,\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{Ux}^{(k-1)}$$
$$\mathbf{x}^{(k)} = -\,(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\,\mathbf{Ux}^{(k-1)} + (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\,\mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{B}_{GS}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$$

Convergência

Sendo a **matriz de iteração** do método de Gauss-Seidel dada por:

$$\mathbf{B}_{GS} = -\left(\mathbf{L} + \mathbf{D}\right)^{-1}\mathbf{U}$$

o método convergirá se:

$$\|\mathbf{B}_{GS}\|_{\infty} < 1$$

Critério de Sassenfeld

Sendo $\beta i = \left(\sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \beta j + \sum_{j=1+1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right)$ para $i = 1, \ldots, n$, se $\beta = \max\{\beta_i\} < 1$, então método de Gauss-Seidel converge se satisfazer o **critério de Sassenfeld**.

Verifique se a matriz **A** abaixo satisfaz o critério das linhas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Critério de Sassenfeld

Sendo $\beta i = \left(\sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \beta j + \sum_{j=1+1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right)$ para $i = 1, \ldots, n$, se $\beta = \max\{\beta_i\} < 1$, então método de Gauss-Seidel converge se satisfazer o **critério de Sassenfeld**.

Verifique se a matriz **A** abaixo satisfaz o critério das linhas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Resposta: Como $\beta = 0.55 < 1$, então a matriz **A** satisfaz o critério de Sassenfeld.

Exemplo - Implementação

Link para exemplo interativo

Conclusão I

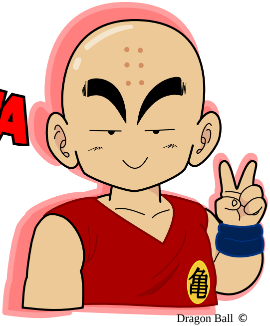
Foram abordados os seguintes assuntos:

- Introdução aos métodos iterativos
- Definição de métodos iterativos estacionários
- Revisão de norma de vetores e matrizes
- Critério de parada

Conclusão II

- Método de Jacobi - Caso geral
- Matriz de iteração, convergência e critério das linhas para o Método de Jacobi
- Definição de Matriz estritamente diagonal dominante
- Método de Gauss-Seidel - Caso geral
- Matriz de iteração, convergência e critério de Sassenfeld

OBRIGADO PELA SUA PARTICIPAÇÃO



Dragon Ball ©