Describir la parametrización de rotaciones de acuerdo a los ángulos de Euler

Gutiérrez Muñoz José de Jesús
7 - A
Ing. Mecatrónica

8 - Octubre - 2019

Puede demostrarse que cualquier rotación de un sólido puede expresarse como la composición de tres rotaciones elementales alrededor de ejes diferentes (no necesariamente ortogonales). A su vez, estas rotaciones pueden considerarse en torno a unos ejes fijos o en torno a unos ejes intrínsecos.

Aquí consideraremos la segunda opción, es decir, especificaremos una composición de rotaciones que nos llevarán desde un sistema exterior considerado fijo ("sólido 1") hasta un sistema ligado al sólido ("sólido 4") mediante sólidos intermedios. Para ello:

Primero efectuamos una rotación de un ángulo en torno a un eje del sólido 1 que nos lleva a un sólido intermedio "2".

A continuación rotamos un ángulo en torno a un eje del sólido 2, que nos lleva a un sólido intermedio "3".

Por último, giramos un cierto ángulo en torno a un eje del sólido 3, lo que nos lleva hasta el sólido móvil 4.

La elección de qué ejes son los de rotación puede hacerse de diferentes formas. La elección que haremos aquí, que es la más habitual en el uso de los ángulos de Euler consiste en la secuencia $Z_1X_2Z_3$. El que se repita uno de los ejes (aunque no sean coincidentes, por la rotación intermedia) es lo que define a esta descomposición como de ángulos de Euler. Si fueran todos diferentes ($Z_1Y_2X_3, porejemplo$) serían de Tait-Bryan, que veremos después.

Analizaremos la expresión de la posición, velocidad y aceleración en función de estos ángulos y sus derivadas temporales.

Posición de matriz de rotación:

Para obtener el resultado de la rotación, debemos ver qué posición ocupa en el sistema de referencia fijo un punto perteneciente al sólido. El vector de posición se escribirá con componentes diferentes en la base fija y en la base móvil, aunque el vector sea el mismo

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}_1 + z\vec{k}_1 = X\vec{\imath}_4 + Y\vec{\jmath}_4 + Z\vec{k}_4$$

donde, por ser un punto del sólido las componentes (X,Y,Z) son constantes. El problema se reduce entonces a relacionar los vectores de las bases. Para ello, componemos las tres rotaciones.

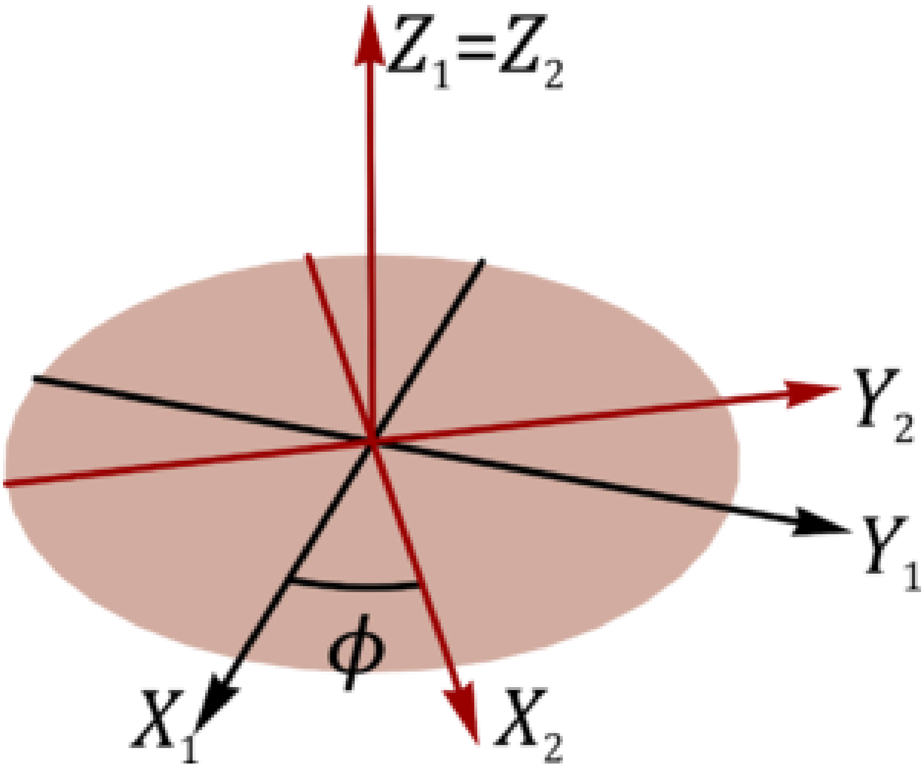
Precesión

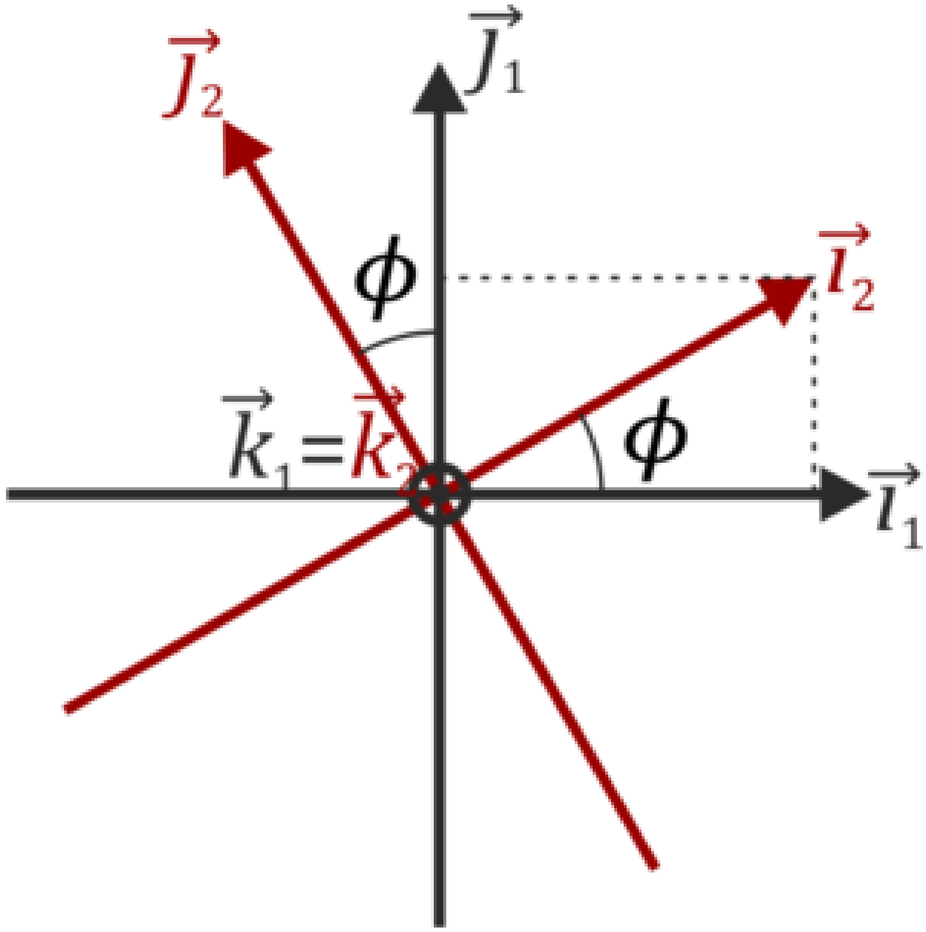
La primera rotación es una de un ángulo $\phi entornoaleje\mathrm{OZ}_1 = OZ_2$, que nos lleva al sólido 2. La relación entre la base fija 1 y la intermedia 2 es

$$\begin{aligned}
\vec{\imath}_2 &= \cos(\phi)\vec{\imath}_1 + \mathrm{sen}(\phi)\vec{\jmath}_1 \\
\vec{\jmath}_2 &= -\mathrm{sen}(\phi)\vec{\imath}_1 + \cos(\phi)\vec{\jmath}_2 \\
\vec{k}_2 &= \vec{k}_1
\end{aligned}$$

siendo su relación inversa

$$\begin{aligned}
\vec{\imath}_1 &= \cos(\phi)\vec{\imath}_2 - \mathrm{sen}(\phi)\vec{\jmath}_2 \\
\vec{\jmath}_1 &= \mathrm{sen}(\phi)\vec{\imath}_2 + \cos(\phi)\vec{\jmath}_2 \\
\vec{k}_1 &= \vec{k}_2
\end{aligned}$$





A esta rotación, cuando se realiza sin modificar ninguno de los otros dos ángulos, se la denomina movimiento de precesión.

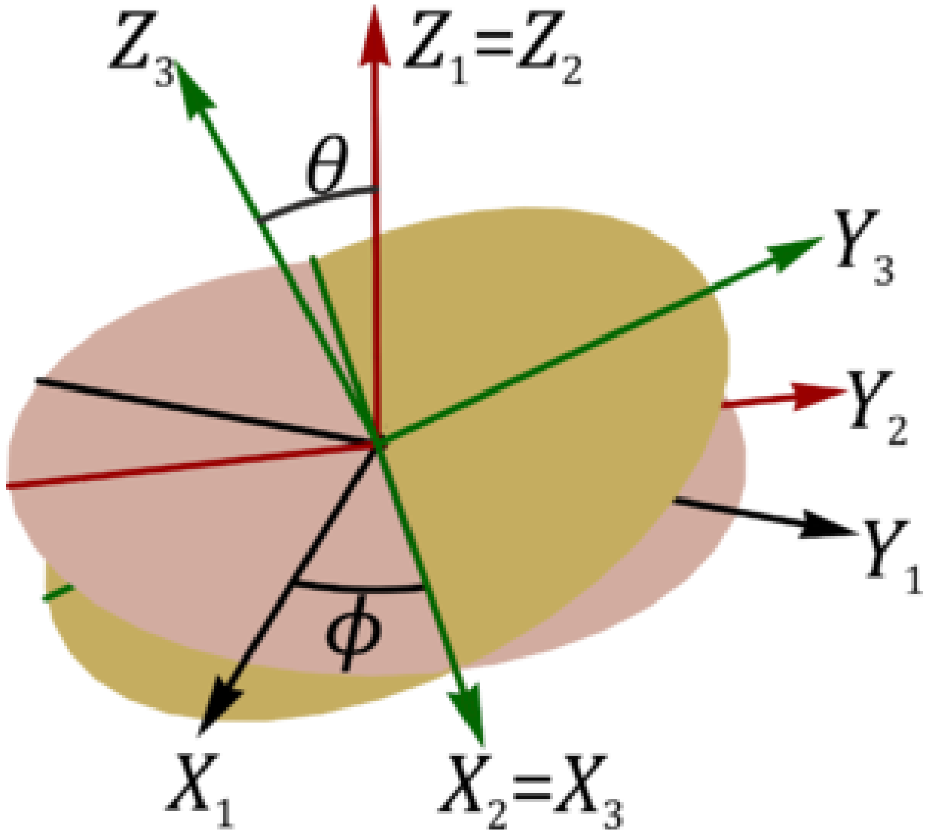
Nutación

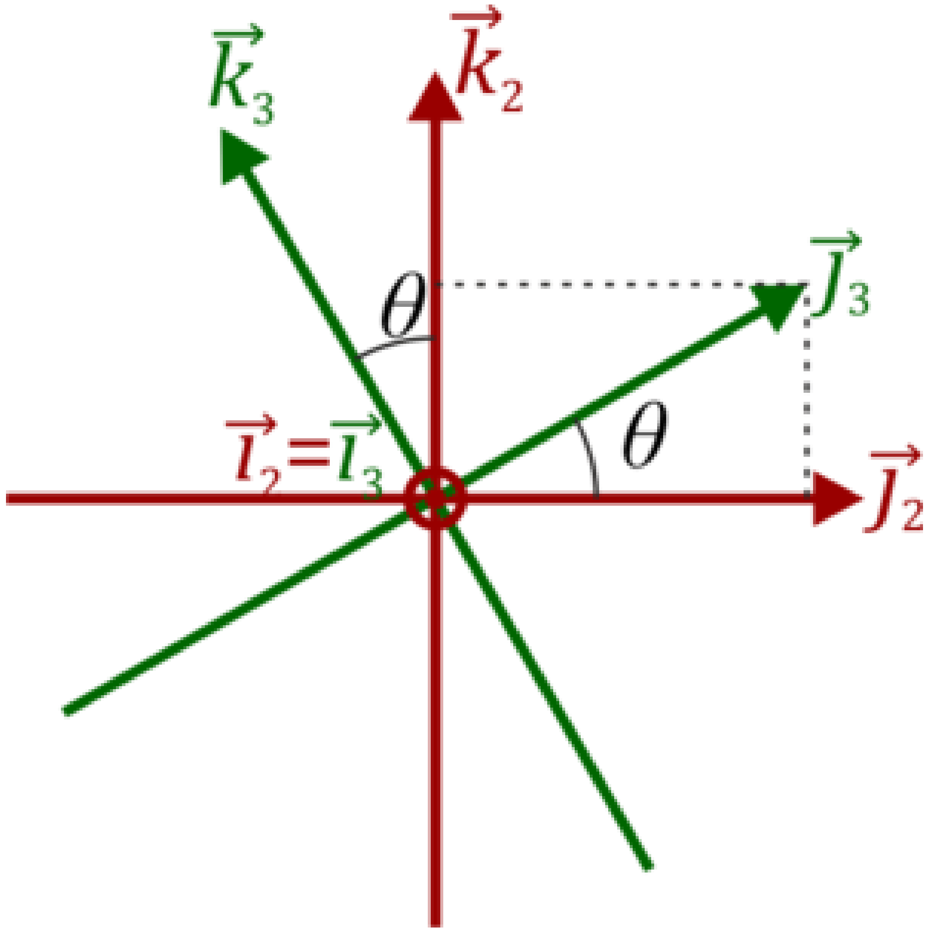
La segunda rotación consiste en el giro de un ángulo alrededor del eje $OX_2 = OX_3$. A este eje, que no se ve modificado por la rotación, se lo denomina línea de nodos. Esta rotación nos lleva al sólido intermedio 3, cuya base se relaciona con la 2 por

$$\begin{aligned} \vec{\imath}_3 &= \vec{\imath}_2 \\ \vec{\jmath}_3 &= \cos(\theta)\vec{\jmath}_2 + \operatorname{sen}(\theta)\vec{k}_2 \\ \vec{k}_3 &= -\operatorname{sen}(\theta)\vec{\jmath}_2 + \cos(\theta)\vec{k}_2 \end{aligned}$$

siendo su relación inversa

$$\begin{aligned} \vec{\imath}_2 &= \vec{\imath}_3 \\ \vec{\jmath}_2 &= \cos(\theta)\vec{\jmath}_3 - \operatorname{sen}(\theta)\vec{k}_3 \\ \vec{k}_2 &= \operatorname{sen}(\theta)\vec{\jmath}_3 + \cos(\theta)\vec{k}_3 \end{aligned}$$


Z_3
Z_1=Z_2
θ
Y_3
Y_2
Y_1
ϕ
X_1
X_2=X_3



Cuando se produce esta rotación sin que se modifiquen las otras dos se dice que el sólido efectñua un movimiento de nutación.

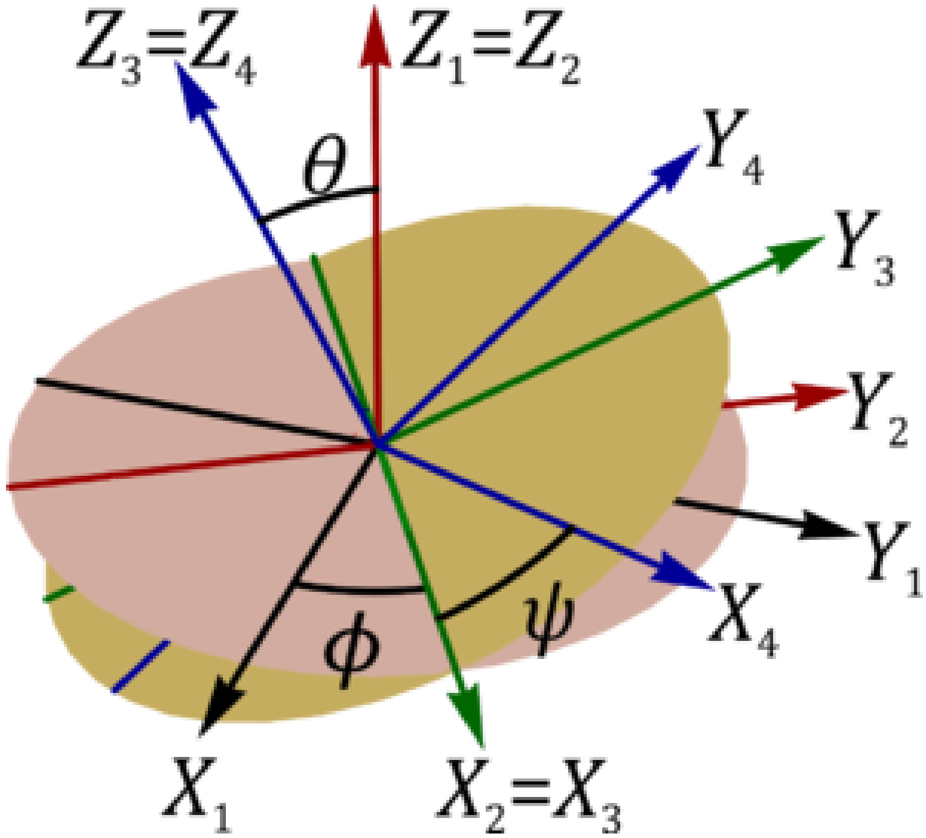
Rotación propia

El tercer giro (rotación propia, rotación intrínseca o simplemente rotación en el contexto del movimiento terrestre) corresponde a un nuevo giro de un ángulo alrededor del ángulo $OZ_3 = OZ_4$ (que no es el mismo, normalmente, que el $OZ_1 = OZ_2$). La relación entre las bases 3 y 4 es análoga a la que hay entre la 1 y la 2.

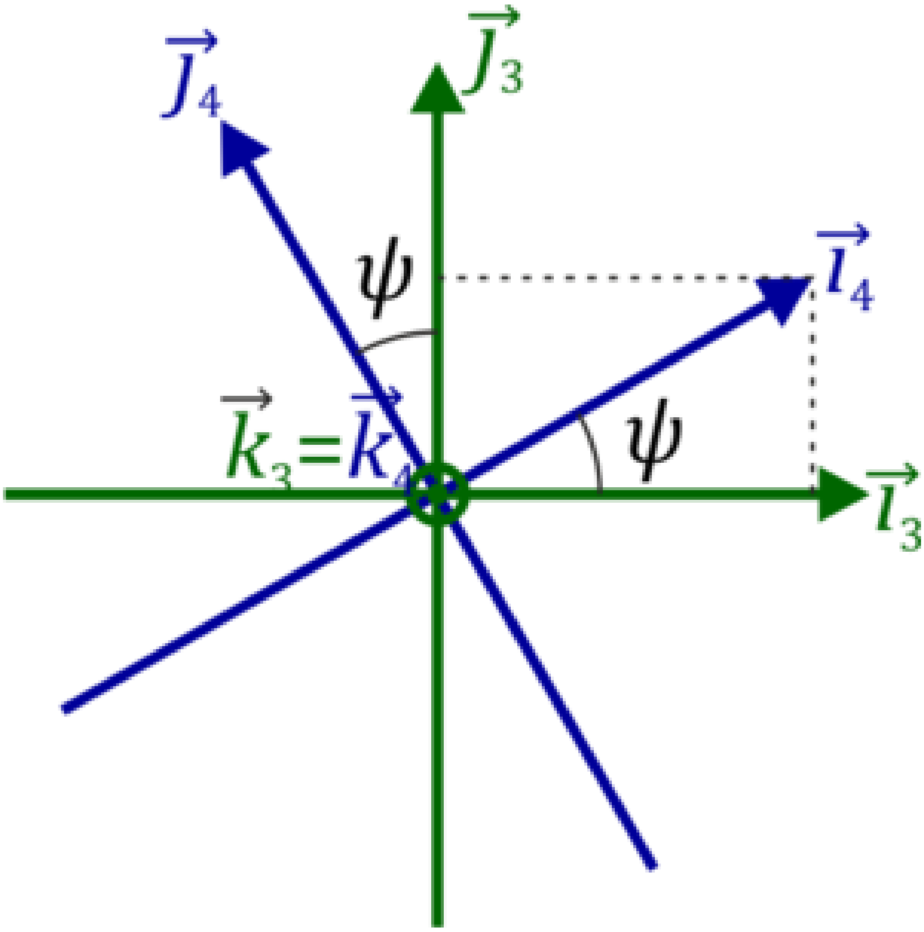
$$\begin{aligned}\vec{\imath}_4 &= \cos(\psi)\vec{\imath}_3 + \operatorname{sen}(\psi)\vec{\jmath}_3\\ \vec{\jmath}_4 &= -\operatorname{sen}(\psi)\vec{\imath}_3 + \cos(\psi)\vec{\jmath}_3\\ \vec{k}_4 &= \vec{k}_3\end{aligned}$$

siendo su relación inversa

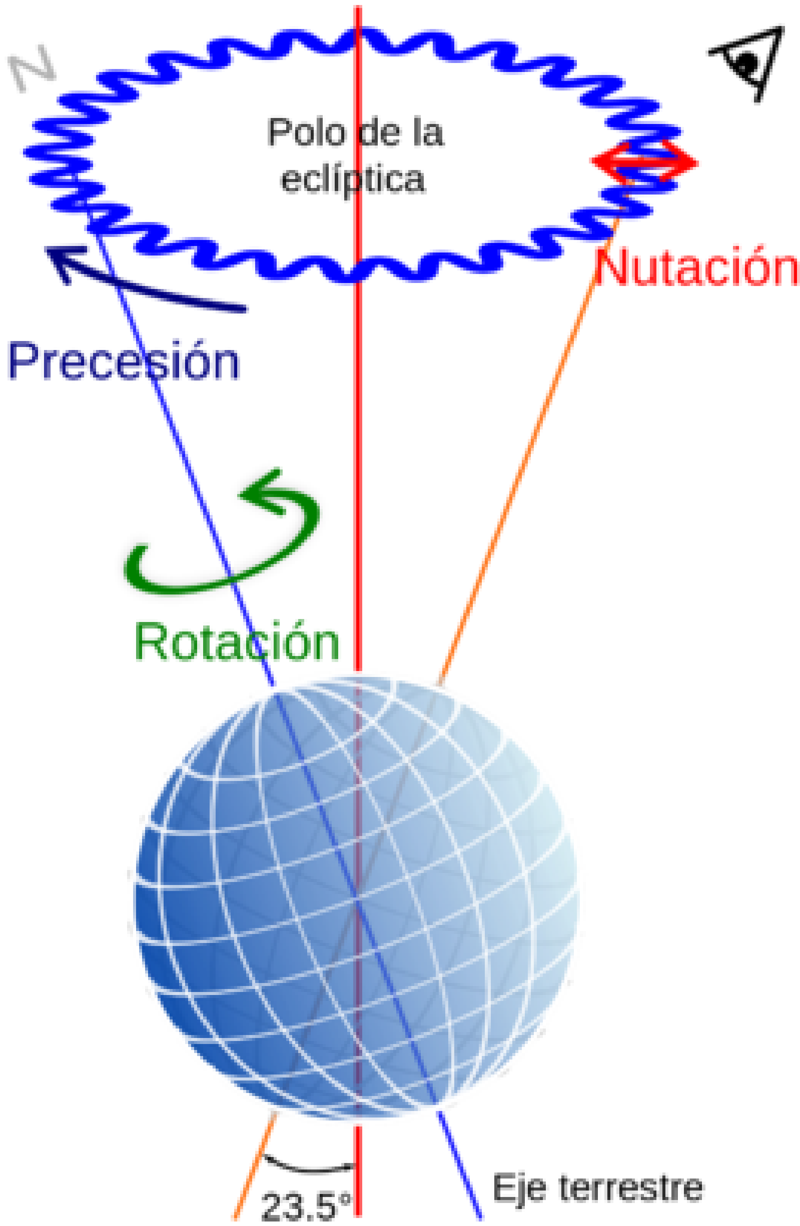
$$\begin{aligned}\vec{\imath}_3 &= \cos(\psi)\vec{\imath}_4 - \operatorname{sen}(\psi)\vec{\jmath}_4\\ \vec{\jmath}_3 &= \operatorname{sen}(\psi)\vec{\imath}_4 + \cos(\psi)\vec{\jmath}_4\\ \vec{k}_3 &= \vec{k}_4\end{aligned}$$



Z_3=Z_4
Z_1=Z_2
θ
Y_4
Y_3
Y_2
Y_1
X_4
ψ
ϕ
X_1
X_2=X_3



El origen de los nombres precesión, nutación y rotación procede del análisis del movimiento terrestre. La rotación es el movimiento alrededor del eje terrestre. La precesión es el lento movimiento de dicho eje, que provoca que la estrella situada en el polo norte celeste vaya cambiando en el tiempo. La nutación es el cambio en la inclinación del eje terrestre, que no siempre ha estado a 2327' como actualmente.



Matriz de rotación

Para pasar directamente de la base 4, ligada al sólido, a la base 1, fija, podemos hacer sustituciones sucesivas, aunque los cálculos se vuelven rápidamente engorrosos. La matrix de rotación está formada por los productos escalares entre ambas bases

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\imath}_1 \cdot \vec{\imath}_4 & \vec{\imath}_1 \cdot \vec{\jmath}_4 & \vec{\imath}_1 \cdot \vec{k}_4 \\ \vec{\jmath}_1 \cdot \vec{\imath}_4 & \vec{\jmath}_1 \cdot \vec{\jmath}_4 & \vec{\jmath}_1 \cdot \vec{k}_4 \\ \vec{k}_1 \cdot \vec{\imath}_4 & \vec{k}_1 \cdot \vec{\jmath}_4 & \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

siendo el camino más corto para hallar cada elemento no el pasar de la base 4 a la 1 directamente, sino ayudarnos de las bases intermedias. Así para el elemento R11 tenemos

$$
\begin{aligned}
\vec{\imath}_1 &= \cos(\phi)\vec{\imath}_2 - \operatorname{sen}(\phi)\vec{\jmath}_2 \\
\vec{\imath}_4 &= \cos(\psi)\vec{\imath}_3 + \operatorname{sen}(\psi)\vec{\jmath}_3 \\
\vec{\imath}_1 \cdot \vec{\imath}_4 &= \cos(\phi)\cos(\psi)\vec{\imath}_2 \cdot \vec{\imath}_3 + \cos(\phi)\operatorname{sen}(\psi)\vec{\imath}_2 \cdot \vec{\jmath}_3 - \operatorname{sen}(\phi)\cos(\psi)\vec{\jmath}_2 \cdot \vec{\imath}_3 - \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\psi)\vec{\jmath}_2 \cdot \vec{\jmath}_3
\end{aligned}
$$

y, dado que,

$$
\vec{\imath}_2 \cdot \vec{\imath}_3 = 1 \qquad \vec{\imath}_2 \cdot \vec{\jmath}_3 = \vec{\jmath}_2 \cdot \vec{\imath}_3 = 0 \qquad \vec{\jmath}_2 \cdot \vec{\jmath}_3 = \cos(\theta)
$$

queda finalmente

$$
R_{11} = \vec{\imath}_1 \cdot \vec{\imath}_4 = \cos(\phi)\cos(\psi) - \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\psi)\cos(\theta)
$$

y análogamente para el resto de elementos. El más simple es

$$
R_{33} = \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_4 = \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3 = \cos(\theta)
$$

A estos resultados también se puede llegar multiplicando matrices, pero vamos a intentar aprovechar al máximo la cinemática del movimiento relativo.