Investigacion de rotacion y cuaternios

Gutiérrez Muñoz José de Jesús
7 - A
Ing. Mecatrónica

16 - Septiembre - 2019

Rotación.

De los recursos de geometría analítica recordamos que al rotar un vector (x,y) $\in \mathbb{R}^2$ del origen por un ángulo θ obtenemos otro vector $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas son:

$x' = cos(0)xsen(0)y, y' = sen(0)x + cos(0)y$

Lo cual expresamos por:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} R = \theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{1}$$

Donde:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} cos\ 0 & -sen\ 0 \\ sen\ 0 & cos\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Observemos que:

$$R(\theta)\ .\ R^T(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

por lo que R $\in$ SO(2).

La froma de mitad de ángulo. Podemos obterner la matriz de rotación para un vector en el plano como sigue.

Consideremos:

$$A = \begin{bmatrix} a^2 - b^2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2ab \end{bmatrix} \tag{4}$$

Si $A = cos\frac{0}{2}$ y $B = sen\frac{0}{2}$ tenemos que

$$A = \begin{bmatrix} cos^2(\frac{0}{2}) - sen^2(\frac{0}{2}) \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 2sen^2(\frac{0}{2}) \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$= \begin{bmatrix} cos\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$B = \left[\begin{array}{c} 2cos(\frac{0}{2})sen(\frac{0}{2}) \end{array}\right] \tag{8}$$

$$= \left[\begin{array}{c} sen\ 0 \end{array}\right] \tag{9}$$

de modo que la matriz de rotación no cambia

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\ \alpha & -\ sen\ \alpha \\ 0 & sen\ \alpha & cos\ \alpha \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$R_y(\phi) = \begin{bmatrix} cos\ \phi & 0 & sen\ \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\ \phi & 0 & cos\ \phi \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} cos\ \theta & -\ sen\ \theta & 0 \\ sen\ \theta & cos\ \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

En este caso se tiene:
$R_x(\alpha)$ rota el plano yz alrededor del origen por un ángulo α
$R_y(\phi)$ rota el plano xz alrededor del origen por un ángulo ϕ
$R_z(\theta)$ rota el plano xy alrededor del origen por un ángulo θ

Cuaternios.

Para enetebnder la relación entre rotaciones $\mathbb{R}^3$ y los cuaternios, es conveniente utilizar la notación $q = [\lambda, a]$ para el cuaternios $q = \lambda + xi + ji + zk$, donde $a = xi + yj + zk$. La separación del cuaternio q en dos partes nos permite distinguir su parte real λ y su "Parte imaginaria" a; además, identificamos el cuaternio puro $a = xi + yj + zk$ con el vector $a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. De manera recíproca, dado un vector $b = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, le hacemos corresponder el cuaternio $q_b = [0, b]$, con $b = ui + vj + wk \in \mathbb{H}_p$.

De esta manera, dados los cuaternio $q = [\lambda, a]$ y $r = [\mu, b]$ definimos dpos operaciones entre las partes imaginarias de q y r: El producto punto y el producto cruz de los vectores $a, b \in \mathbb{R}^3$.

Notemos que con esta definición, a,b $\in \mathbb{R}$ y a x b es otro cuaternio con parte real igual a cero y su "parte imaginaria" está dada por los componentes del vector a x b. Usando esta notación se tiene que el producto de los cuaternio $q = [\lambda, a]$ y $r = [\mu, b]$ se expresa como:

$$q.r = [\lambda, a].[\mu, b] = [\lambda\mu - a, b, \lambda b + \mu a + axb, \qquad (13)$$

Y esta fórmula nos será muy útil para describir la relación entre los cuaternios unitarios y las rotaciones en $\mathbb{R}^3$.