Noter til matematik

Jens Chr. Larsen

Sorø Akademis Skole
Email address: jl@soroeakademi.dk

Indhold

Del 1

Grundlæggende emner

Kapitel 1

Deskriptiv Statistik

I dette kapitel vil deskriptiv eller beskrivende statistik blive introduceret. Statistik handler om at beskrive og vurdere talmateriale, vi har fået fra virkeligheden. Statistik er et stort emne i sig selv, og vi vil kun behandle det indledende, nemlig hvordan man danner sig et overblik over store mængder tal.

Der er grundlæggende to måder vi kan få præsenteret tal på. Den første er, at tallene står på en lang (usorteret) liste, det kaldes ugrupperet observationer. Den anden måde er, at nogen andre har gjort noget ved dataene før vi får fingrene i dem. Så kan tallene være inddelt i nogle grupper. Det kaldes grupperet observationer.

Vi vil begynde med at behandle den ugrupperede statistik, hvor vi præsenterer ni tal, der kan anvendes til at beskrive en datamængde (der er flere). Derefter vil vi gøre det samme med grupperet statistik.

1.1. Ugrupperet observationer

Statistik handler om tal, vi har fået fra virkeligheden, f.eks. højden af 18årige. Disse tal kaldes observationer, og kan stå på en lang liste. Disse lister kan undertiden være meget lange, hvorfor det kan være godt at have en computer til at lave beregningerne for os. Vi tage udgangspunkt en mindre liste på 50 observationer:

1,56	1,56	1,57	1,61	1,63	1,63	1,63	1,64	1,65	1,65
1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,66	1,66
1,66	1,67	1,68	1,68	1,68	1,68	1,68	1,68	1,68	1,68
1,69	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7
1,7	1,72	1,72	1,72	1,73	1,73	1,73	1,75	1,76	1,8

Tallene oven over er højder på 50 piger målt i meter. Det er de tal, vi skal beskrive. Hvis vi ser på vores liste af højder, så kan vi bemærke, at tallene er ordnet, og står i numerisk rækkefølge. Hvis vi en dag får nogle tal, der ikke er ordnet, så skal de først sorteres.

For at kunne beskrive oberservationerne vil vi angive en række andre tal – De såkaldte deskriptorer:

Deskriptor	Min	Q_1	m	Q_3	Max	$Max - Min$	$Q_3 - Q_1$	$\bar{x}$	σ
Værdi	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Vi vil nu udfylde den ovenstående tabel. Deskriptorerne Min og Max giver sig selv. Det er henholdsvis den mindste observation (minimum) og den største observation (maksimum). Vi kan markere dem på listen.

1,56	1,56	1,57	1,61	1,63	1,63	1,63	1,64	1,65	1,65
1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,66	1,66
1,66	1,67	1,68	1,68	1,68	1,68	1,68	1,68	1,68	1,68
1,69	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7
1,7	1,72	1,72	1,72	1,73	1,73	1,73	1,75	1,76	**1,8**

Vi kan nu tilføje de to værdier til tabellen over deskriptorer. Dermed ved vi, at den laveste pige var 1,56 meter høj, og den højeste var 1,8 meter høj.

Vi kan også tilføje det, der kaldes *variationsbredden* til listen. Begrebet dækker over forskellen på den mindste og største observation og beregnes:

$$Max - Min = 1{,}8 - 1{,}56 = 0{,}24$$

Så forskellen på den korteste og længste er 24 cm.

Deskriptor	Min	Q_1	m	Q_3	Max	$Max - Min$	$Q_3 - Q_1$	$\bar{x}$	σ
Værdi	1,56	-	-	-	1,8	0,24	-	-	-

Det næste vi vil finde er kvartilsættet. Dette ord dækker over, at vi inddeler vores data i kvarte, det vil sige, fire dele, så vi har de første 25%, de næste 25% svarende til 50%, og de næste 25% svarende til 75%.

Vi begynder med at finde midten af vores observationer, hvilket svarer til 50%. Dette tal kaldes *medianen*, og betegnes enten som Q_2 eller mere almindeligt som m.

Vi har 50 observationer, så vores median må ligge mellem den 25'ende og den 26'ende observation.

1,56	1,56	1,57	1,61	1,63	1,63	1,63	1,64	1,65	1,65
1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,66	1,66
1,66	1,67	1,68	1,68	**1,68**	**1,68**	1,68	1,68	1,68	1,68
1,69	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7
1,7	1,72	1,72	1,72	1,73	1,73	1,73	1,75	1,76	**1,8**

I dette tilfælde er det 1,68 meter, der ligger imellem. Det vil sige, at 50% af pigerne er 1,68 meter eller lavere.

Men hvad nu hvis vi havde haft to forskellige tal? Hvis den 25'ende observation var 1,68, og den 26'ende observation var 1,7. I sådan et tilfælde tager man gennemsnittet mellem de to observationer

$$\frac{1{,}68 + 1{,}7}{2} = 1{,}69$$

Men sådan er det ikke i vores tilfælde. Vi tilføjer vores median til tabellen.

Deskriptor	Min	Q_1	m	Q_3	Max	$Max - Min$	$Q_3 - Q_1$	$\bar{x}$	σ
Værdi	1,56	-	1,68	-	1,8	0,24	-	-	-

Nu er observationerne delt i to dele. I den første halvdel findes der også en median, som svarer til, at vi har taget halvdelen af halvdelen eller 25%. Da den første halvdel består af 25 observationer, så ligger den 13'ende observation lige i midten. Dette tal kaldes det *nedre kavartil*, og skrives som Q_1.

Vi kan gøre det samme med den anden halvdel af observationerne. Her kommer det 38'ende tal til at svare til 75%. Dette tal kaldes det *øvre kvartil*, og skrives Q_3. Vi markerer tallene på listen.

1,56	1,56	1,57	1,61	1,63	1,63	1,63	1,64	1,65	1,65
1,65	1,65	**1,65**	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,66	1,66
1,66	1,67	1,68	1,68	**1,68**	**1,68**	1,68	1,68	1,68	1,68
1,69	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	**1,7**	1,7	1,7
1,7	1,72	1,72	1,72	1,73	1,73	1,73	1,75	1,76	**1,8**

Det vil sige, at 25% af pigerne er 1,65 meter eller lavere. Eller omvendt, at 75% af pigerne er 1,65 meter eller højere. Ligeledes er 75% af pigerne 1,7 meter eller lavere. Eller omvendt, at 25% af pigerne er 1,7 meter eller højere.

Ligesom med minimum og maksimum er der endnu et tal, vi kan beregne, nemlig *kvartilbredden*. Den beregnes som forskellen mellem det nedre og øvre kvartil.

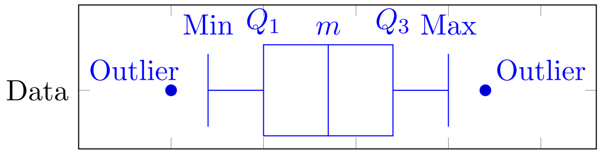
$$Q_3 - Q_1 = 1{,}7 - 1{,}65 = 0{,}05$$

Så kvartilbredden er 5 cm. Vi tilføjer tallene til tabellen.

Deskriptor	Min	Q_1	m	Q_3	Max	$Max - Min$	$Q_3 - Q_1$	$\bar{x}$	σ
Værdi	1,56	1,65	1,68	1,7	1,8	0,24	0,05	-	-

De tre tal Q_1, m og Q_3 kaldes *kvartilsættet* for observationerne. De fem tal Min, Q_1, m, Q_3, og Max kaldes det *udvidede kvartilsæt* for observationerne.

1.1.1. Boksplot. Vi vil gerne lave en grafisk repræsentation af vores observationer ved hjælp af det, der kaldes et boksplot.



Figur 1.1. Figuren viser et vilkårligt boksplot. Over hver lodret linje er der angivet hvad linjen viser. Der er medtaget to outliers.

Et boksplot tegnes ud fra de fem tal, der udgør det udvidede kvartilsæt og de *outliers*, der må være blandt observationerne. Et vilkårligt eksempel på et boksplot kan ses på figur 1.1.

Før et boksplot kan tegnes skal det udvidede kvartilsæt kendes, samt eventuelle outliers. Definitionen af en outlier er følgende.

Definition 1.1 (Outlier)**.** En observation er en outlier, hvis den er mere halvanden kvatilbredde under nedre kvartil Q_1 eller mere end halvanden kvartilbredde over øvre kvartil Q_3.

Det vil sige, at i vores eksempel, så skal vi tage kvartilbredden $Q_3 - Q_1 = 0,05$ og gange med 1,5: $0,05 \cdot 1,5 = 0,075$. Vi skal trække tallet fra Q_1 for at få den nedre grænse for, hvornår en observation er en outlier $Q_1 - 0,075 = 1,65 - 0,075 = 1,575$. Dermed har vi, hvis en observation er lavere end 1,575, så er det en outlier. Vi har tre sådanne observationer 1,56; 1,56 og 1,57.

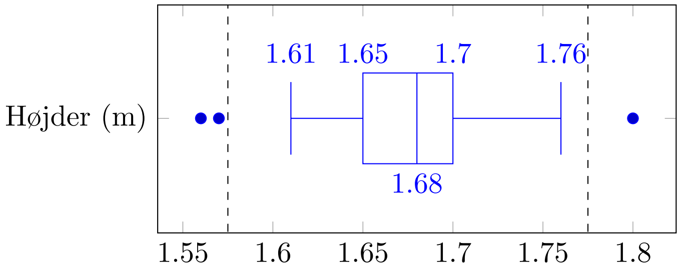
Vi skal gøre det samme med Q_3. Vi lægger 0,075 til Q_3 og får: $Q_3 + 0,075 = 1,7 + 0,075 = 1,775$. Dermed er en observation en outlier, hvis den er større end 1,775. Vi har en enkelt observation på 1,8 meter, der er en outlier.

Men hvor skal boksplottet, så begynde og slutte, når der er outliers? Boksplottet begynder ved den laveste observationer, der ikke er en outlier. I vores tilfælde er det 1,61. Boksplottet skal så slutte ved den højeste observation, der ikke er en outlier. I vores tilfælde er det 1,76. Vi har nu alle oplysninger, der skal til for at tegne et boksplot. Resultatet kan ses på figur 1.2.

Inden vi går videre til den næste deskriptor, så er der en rækkefølge det er fornuftigt at følge, når der skal tegnes et boksplot . Vi laver en liste og henviser i øvrigt til figur 1.1 og figur 1.2, som viser, hvordan et boksplot kan se ud.

(1) Tegn en talakse, som boksplottet skal ligge over. Her anvender vi, at vi kender den mindste og største observation.

(2) Over talaksen, tegner vi de tre lodrette streger, der passer til Q_1, m, og Q_3. Tegn dem lige høje (højden er ligegyldig).



Figur 1.2. Boksplot over højder for 50 piger. De to stiplede linjer angiver, hvor grænsen går for, at en observation er en outlier – de er normalt ikke med.

(3) Forbind toppen og bunden af de lodrette streger, der svare til Q_1 og Q_3, så vi får en kasse/boks.

(4) Til venstre for boksen: Tegn en lodret streg for den mindste observation, der ikke er en outlier.

(5) Forbind den venstre streg med boksen med en vandret streg.

(6) Til højre for boksen: Tegn en lodret streg for den største observation, der ikke er en outlier.

(7) Forbind den højre streg med boksen med en vandret streg.

(8) Afsæt eventuelle outliere som punkter.

Vi kan nu tegne boksplottet svarende til vores observationer se figure 1.2.

1.1.2. Middelværdi og spredning. Når man har en mængde tal, så er det oplagt at beregne gennemsnittet. Det kaldes *middelværdien* eller middeltallet, og skrives som $\overline{x}$ eller μ. Den mest direkte metode er at lægge alle tallene sammen og dividere med antallet af observationer.

$$\overline{x} = \frac{1{,}56 + 1{,}56 + 1{,}57 + 1{,}61 + \ldots + 1{,}75 + 1{,}78 + 1{,}8}{50} = 1{,}676 \approx 1{,}68$$

Dermed er pigerne i gennemsnit 1,68 meter høje.

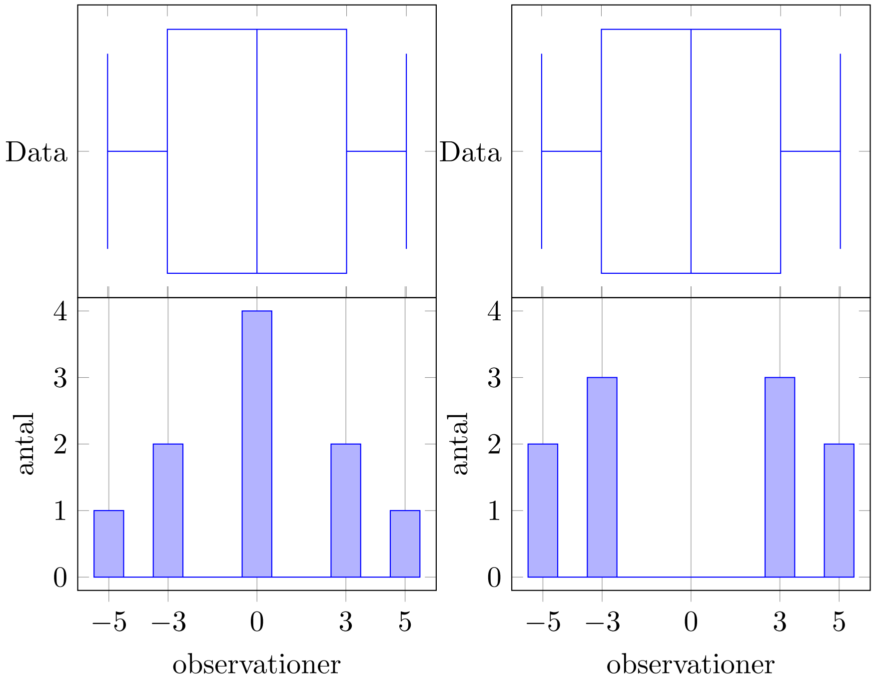
Vi bemærker, at der er gentagelser i observationerne. Så vi kunne også have skrevet:

$$\overline{x} = \frac{1{,}56 \cdot 2 + 1{,}57 + 1{,}61 + \ldots + 1{,}75 + 1{,}78 + 1{,}8}{50}$$

Men det er mest effektivt, når der er mange gentagelser.

Vores tabel ser nu sådan ud:

Deskr.	Min	Q_1	m	Q_3	Max	$Max - Min$	$Q_3 - Q_1$	$\bar{x}$	σ
Værdi	1,56	1,65	1,68	1,7	1,8	0,24	0,05	1,68	-



Figur 1.3. Figuren viser boksplot og søjlediagram for to datasæt henholdsvis til højre og venstre. I begge tilfælde er alle deskriptorer ens undtagen spredning σ.

Det sidste, vi vil beregne, er spredningen. Dog, før spredningen kan beregnes, skal vi først beregne det, der kaldes variansen, og som skrives som σ^2 eller $Var(X)$.

Det, vi er interesseret i at beregne, er, hvor tæt vores data er på middelværdien $\overline{x}$ i gennemsnit. For at illustrere tankegangen giver vi et eksempel:

Eksempel 1.2. Vi tager to sæt observationer. Det første sæt står øverst og det andet står nederst:

$$\begin{array}{cccccccccc} -5 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 5 \\ -5 & -5 & -3 & -3 & -3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 \end{array}$$

De to sæt har samme deskriptorer (se figur 1.3). Men er tydeligvis ikke ens. Det øverste sæt har flest værdier, som er 0. Mens det andet sæt ikke har nogle værdier der er 0.

Begge sæt har middelværdien $\overline{x} = 0$ (hvorfor?). Så hvis vi måler afstanden fra observationerne til middelværdien, så vil vi kunne kende forskel på de to datasæt. Måden man gør det på kaldes varians, og det tal vil vi bruge til at beregn spredningen for vores observationer.

Generelt definerer vi variansen som:

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

Hvor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er vores observationer, $\overline{x}$ er middelværdien for observationerne, og n er antallet af observationer.

Som tidligere nævnt, så er variansen noget vi beregner for at få spredningen. Problemet med variansen er, hvis vores observationer har enheden kg, så har variansen enheden kg^2, fordi alle parenteserne er i anden. Derfor tager vi kvadratroden af variansen for at få et tal, der har samme enhed som vores observationer.

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

For vores observationer har vi $\overline{x} = 1,68$. Dermed kan vi beregne variansen således:

$$\sigma^2 = \frac{(1{,}56 - 1{,}68)^2 + (1{,}56 - 1{,}68)^2 + \ldots + (1{,}76 - 1{,}68)^2 + (1{,}8 - 1{,}68)^2}{50}$$
$$= 0{,}002123$$

Vi tager kvadratroden for at beregne spredningen.

$$\sigma = \sqrt{0{,}002123} = 0{,}046$$

Dermed er spredningen 4,6 cm. Det vil sige, at den gennemsnitlige afstand til middelværdien er 4,6 cm. Tabellen gøres færdig.

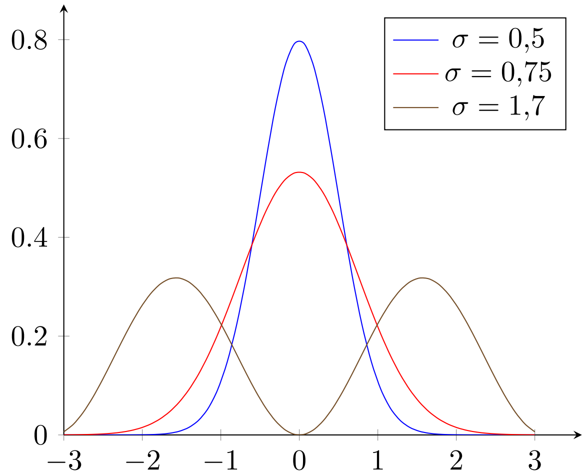
Deskr.	Min	Q_1	m	Q_3	Max	$Max - Min$	$Q_3 - Q_1$	$\bar{x}$	σ
Værdi	1,56	1,65	1,68	1,7	1,8	0,24	0,05	1,68	0,046

Spredning kan komme til udtryk på mange måder på figur 1.4. Når observationer generelt ligger langt fra middelværdien, så har vi en høj spredning, mens vi har en lav spredning, når observationerne ligger tæt på middelværdien. Så overordnet er observationer med lav spredning mere præcise end observationer med høj spredning.

1.2. Stikprøver og usikkerhed

I afsnit 1.1 side 3 fandt vi statistiske deskriptorer for højden af 50 piger. De tal, vi fik ud af vores undersøgelse, siger noget om præcis de 50 piger. Men kan vi også bruge dem til at sige noget generelt om højderne på piger?

Ofte når der laves statistiske undersøgelser, så er vi interesseret i at sige noget overordnet om for eksempel alle vælgere i et land, eller alle bakterier af en bestemt type. I det første tilfælde kan der afholdes et valg, hvis vælgernes holdning ønskes tilkendegivet, men noget sådant er dyrt og besværligt, så det kan ikke gøres særligt ofte. I forhold til bakterier, vil vi aldrig kunne teste alle bakterier. Det er fysisk umuligt.



Figur 1.4. Figuren viser tre eksempler på fordelinger med stigende spredning.

Løsningen på det ovenstående er at udvælge en mindre del og undersøge den. For eksempel kan vi spørge 1000 vælgere, eller undersøge 100.000 bakterier. Når der på den måde udvælges en del af en helhed, så kaldes delen (1000 vælgere, 100.000 bakterier) en *stikprøve*, og helheden (alle vælgere, alle bakterier) en *population*.

Ideen er at få stikprøven til at sige noget om populationen. Regneteknisk er det ikke særligt svært. Derimod er der en lang række forhold, der skal være på plads, før vi kan anvende stikprøven.

Eksempel 1.3. I 1936 var der præsidentvalg i USA. For demokraterne genopstillede Franklin Delano Roosevelt (1882-1945). For republikanerne opstillede Alfred Mossman Landon (1887-1987). Et tidsskrift – *The Literary Digest* – gennemførte en meningsmåling ved at udsende et spørgeskema til 10 millioner amerikanere, hvor de blev spurgt, hvad de ville stemme. Ca. 2,3 millioner svarede. Tidsskriftet vurderede, at Landon ville vinde valget. Desværre for tidsskriftet vandt Roosevelt valget med en af de største valgsejre i amerikansk historie.

Det, der gik galt for The Literary Digest, var, at stikprøven, selvom den var meget stor, var lavet forkert. Tidsskriftet havde spurgt personer, de kunne finde på tre lister. For det første havde de spurgt deres abonnenter; for det andet folk, der ejede en bil; og for det tredje folk, der ejede en telefon. Med andre ord, så havde de spurgt personer, der tjente væsentlig mere end den gennemsnitlige amerikanske vælger.

Dermed ville de få et skævt billede af resultatet. Men der var en anden faktor, der gjorde, at resultatet blev endnu mere skævt. Nemlig, at de 2,3 millioner, der svarede, der ville en stor del svare på spørgeskemaet, netop fordi de ikke kunne lide Roosevelt. Hvorimod, de personer, der ville stemme på Roosevelt, var mindre tilbøjelige til at sende spørgeskemaet tilbage.

Det, der kan læres af dette, er, at det er vigtigere, hvem du spørger, og under hvilke forhold du spørger, end om du spørger mange. For en stor stikprøve, der er valgt forkert, giver bare et endnu mere falsk resultat end en lille stikprøve, der er valgt forkert.

Der er derfor en række elementer, som bør overvejes i forbindelse med stikprøver.

(1) **Information:** Hvad ved vi egentlig? Ved vi, hvad populationen er? Spurgt anderledes ved vi, hvad stikprøven er en stikprøve af? Når vi laver laver en undersøgelse, eller læser om en undersøgelse, bør vi stille disse spørgsmål. Det er også vigtigt at kende *stikprøvestørrelsen*, det vil sige, hvor meget eller mange er der i stikprøven?

(2) **Repræsentativitet:** Er stikprøven repræsentativ? Det vil sige, ligner stikprøven populationen? I en meningsmåling bør de personer, vi spørger, være fordelt på samme måde som i samfundet. For eksempel i forhold til alder, uddannelse, køn og så videre. At en stikprøve er repræsentativ, er ikke det samme som, at den er tilfældig. Hvis man stiller sig op på torvet, og spørger tilfældige personer omkring frokosttid, så vil man få spurgt nogle pensionister, skoleelever, og arbejdsløse, men ikke nødvendigvis alle dem, der er på arbejde. Dermed kan man, ved at spørge tilfældige personer, få en ikke repræsentativ stikprøve. Sådanne fejl kaldes *systematiske fejl* eller *bias*.

(3) **Skjulte variable:** Hvis vi har en repræsentativ stikprøve, så er der andre ting, der kan gå galt. Hvis vi har en type bakterie i en petriskål med en eller anden form for næring, og vi tilsætter noget, som er giftigt for bakterien, så kan det være, at stoffet faktisk ikke er giftigt i sig selv, men kun er det i forbindelse med næringen i skålen. I forbindelse med meningsmålinger kan der være problemer med, at nogen ikke siger sandheden, fordi den måske er pinlig for dem. Det kan så skubbe undersøgelsen til at vise noget skævt. Disse to tilfælde er eksempler på skjulte variable.

Det ovenstående bør illustrere, at det at lave en stikprøve ikke er nogen let opgave. Faget statistik handler blandt andet om, hvordan undersøgelser laves, så de ovenstående problemstillinger bliver foregrebet.

1.2.1. Middelværdi og spredning for en stikprøve. Hvis vi nu har lavet en stikprøve efter alle kunstens regler, hvad kan stikprøven så sige om populationen? Det vi vil, kaldes at lave et *estimat* eller estimere (vurdere) middelværdien og spredningen for populationen. Middelværdien og spredning for stikprøven er det eneste vi kan beregne, men vil de også passe på populationen? En måde (men ikke den eneste) at svare på er at se på, hvad der ville ske, hvis vi tog flere stikprøver. Vi kan så spørge om de middelværdier vi beregner for hver stikprøve, i gennemsnit rammer populationens middelværdi? Og om de spredninger vi beregner for hver stikprøve, i gennemsnit rammer populationens spredning?

Hvis populationens middelværdi, som vi ikke kender, kaldes μ, så viser det sig, at den kan estimeres direkte ud fra stikprøvens middelværdi. Så et estimat af μ er

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m}{n}$$

Anderledes forholder det sig for spredning af stikprøven. Hvis vi tager mange stikprøver, og beregner spredningen for hver af dem. Så vil spredningerne i gennemsnit *ikke* give populationens spredning. Vi skal ændre formlen en lille smule.

Hvis populationens spredning, som vi ikke kender, kaldes σ, så kan den estimeres ud fra stikprøvespredningen s. Som sædvanlig beregner vi stikprøvevariansen først.

$$s^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}$$

Bemærk, at den eneste forskel, der er på stikprøvevarians og populationsvarians, er, om der divideres med $n-1$ eller n henholdsvis.

Stikprøvespredningen er så givet ved:

$$s = \sqrt{s^2}$$

Hvis vi ser på eksemplet med de 50 piger (se afsnit 1.1), så beregnede vi spredningen $\sigma = 0,046$. Hvis vi gentager udregningen, men dividere med $n-1$ i stedet for n, så vil vi få $s = 0,0465 \approx 0,047$. Så stikprøvespredningen er 4,7 cm i stedet for 4,6 cm. Der med andre ord en millimeter til forskel. Vi skal dog anvende stikprøvespredningen s, hvis vi arbejder med vores observationer som noget, der skal sige noget om en population. Hvis vi derimod ikke vil anvende spredningen til andet, end at beskrive lige præcis de observationer vi har, så kan vi anvende populationsspredningen σ.

Der er en metode, hvormed vi kan omregne fra spredning til stikprøvespredning. Vi skal gange med et tal. Formlen for varians kan omregnes ved at gange med n på begge sider af lighedstegnet:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n} \\ n\cdot\sigma^2 &= (x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2 \end{aligned}$$

Formlen for stikprøvevarians er:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\overbrace{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}^{n\cdot\sigma^2}}{n-1} \\ s^2 &= \frac{n\sigma^2}{n-1} \\ s^2 &= \frac{n}{n-1}\cdot\sigma^2 \end{aligned}$$

Vi tager kvadratroden på begge sider af lighedstegnet:

$$s = \sqrt{\frac{n}{n-1}\cdot\sigma^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\cdot\sigma$$

Med andre ord, så kan vi omregne fra spredning til stikprøvespredning ved at gange med tallet $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$.

1.2.2. Statistisk usikkerhed. Det sidste begreb, vi mangler, er statistisk usikkerhed. Når vi har taget en stikprøve, så er vores resultat aldrig helt sikker. Men vi kan give et bud på, hvad det rigtige svar burde være med 95% sikkerhed. Hvordan skal det forstås?

De situationer vi ser på er dem, hvor vi for eksempel har, at 15% af vores stikprøve vil stemme på parti XX til næste valg, eller situationen, hvor 30% af bakterier i en petriskål bliver grønne, når stof NN tilsættes.

De to tal 15% og 30% kaldes *stikprøveandelen* af vælgere eller bakterier. Den skrives som $\hat{p}$. Symbolet: $\hat{}$ kaldes en hat, og stikprøveandelen kaldes p-hat.

Når vi har stikprøveandelen $\hat{p}$, så mangler vi kun størrelsen på selve stikprøven, den kaldes n, og fortæller hvor mange observationer, der er i alt i stikprøven. Den statistiske usikkerhed er så givet ved:

$$\pm 2\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$$

Hvis de 15%, der ville stemme på partiet XX er taget ud af en stikprøve på 1000 personer, så er den statistiske usikkerhed:

$$\begin{aligned}
\pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} &= \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot (1-0{,}15)}{1000}} \\
&= \pm 2 \cdot \sqrt{0{,}0001275} = \pm 2 \cdot 0{,}01129 \\
&= \pm 0{,}02258
\end{aligned}$$

Det vil sige, at den statistiske usikkerhed er $\pm 2{,}3\%$. Det betyder, at vælgertilslutningen til parti XX kan være så lav som $15\% - 2{,}3\% = 12{,}7\%$ eller så høj som $15\% + 2{,}3\% = 17{,}3\%$. Læg mærke til at stikprøveandelen ligger midt imellem de to yderpoler. Vi er kun sikker på, at tilslutningen til parti XX ligger mellem 12,7% og 17,3% med 95% sikkerhed, I statistik kaldes det konfidens og intervallet

$$[12{,}7\%; 17{,}3\%]$$

kaldes et 95% konfidensinterval.

Konfidensintervallet kan også beregnes direkte med:

$$\left[\hat{p} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} \ ; \ \hat{p} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} \ \right]$$

1.3. Grupperet observationer

Under tiden kan man få data, hvor observationerne er placeret i nogle grupper. Det vil sige, at vi ikke har adgang til de enkelte observationer, men kun ved noget om hyppigheden eller frekvensen observationerne forekommer med inden for hver gruppe.

I følgende tabel er der samlet højder for 213 drenge.

Højde (m)	Hyppighed	Frekvens (%)	kumuleret frekvens (%)
1,65-1,70	6	-	-
1,70-1,75	16	-	-
1,75-1,80	45	-	-
1,80-1,85	66	-	-
1,85-1,90	46	-	-
1,90-1,95	23	-	-
1,95-2,00	11	-	-

Hyppigheden er antallet af drenge med en højde i det givne interval. Intervaller har tilsyneladende overlap, således optræder 1,70 både i intervallet 1,65-1,70 og i intervallet 1,70-1,75. Grunden til det er, at en dreng kunne måle 1,6999 og så vil det være svært at vide, hvad der skal være den øvre grænse for intervallet 1,65-1,70. Sådan som data er samlet på i dette tilfælde, er intervaller valgt til at være åbne til højre for eksempel 165-170 kan skrives som $[1{,}65; 1{,}70[$.

Bemærkning 1.4 (Intervalnotation)**.** Et interval er en sammenhængende række tal, som vi angiver ved at give den mindste og største værdi for. For eksempel er $[2; 5]$ alle tal mellem 2 og 5. Det kan vi også skrive som $2 \leq x \leq 5$. Nogen gange vil vi gerne have alle mellem 2 og 5, men ikke 5. Det vil sige, at vi vil godt have tal som 4,999 med. Da vi kan sætte lige så mange nitaller efter kommaet, som vi har lyst til, så kan vi ikke rigtig skrive et tal, som er størst. Derfor skrives der $[2; 5[$, hvilket betyder alle tal mellem 2 og 5, men ikke 5. Det kan også skrives som $2 \leq x < 5$. Generelt peger [væk fra tallet, hvis det ikke må være med i intervallet. To andre eksempler er $]2; 5]$, hvor 2 ikke må være med, og $]2; 5[$, hvor hverken 2 eller 5 må være med.

Det første vi vil beregne er frekvensen. Det er, hvor meget hyppigheden ud af alle observationer er i procent. Vi vil altså beregne:

$$\frac{\text{hyppighed}}{\text{Observationer i alt}}$$

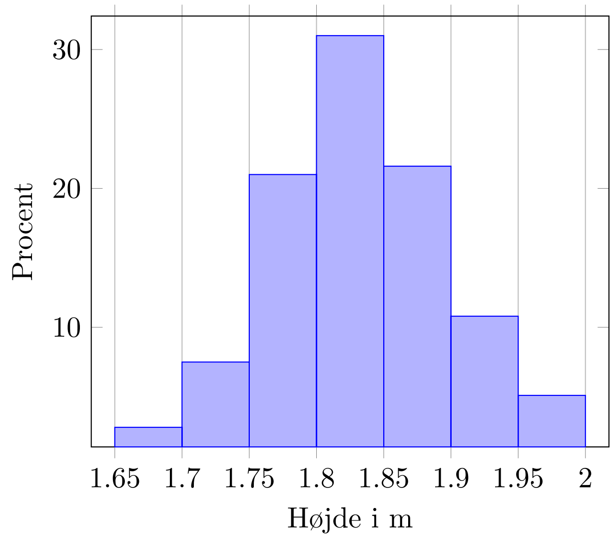
Det giver følgende beregninger:

$$\frac{6}{213} \approx 2{,}82\% \qquad \frac{16}{213} \approx 7{,}51\% \qquad \frac{45}{213} \approx 21{,}13\%$$
$$\frac{66}{213} \approx 30{,}99\% \qquad \frac{46}{213} \approx 21{,}60\% \qquad \frac{23}{213} \approx 10{,}80\%$$
$$\frac{11}{213} \approx 5{,}16\%$$

Vores beregninger kan indsættes i tabellen:

Højde (m)	Hyppighed	Frekvens (%)	kumuleret frekvens (%)
1,65-1,70	6	2,82%	-
1,70-1,75	16	7,51%	-
1,75-1,80	45	21,13%	-
1,80-1,85	66	30,99%	-
1,85-1,90	46	21,60%	-
1,90-1,95	23	10,80%	-
1,95-2,00	11	5,16%	-

1.3.1. Histogram. Når vi nu har fundet frekvenserne, så kan vi tegne det, der kaldes et *histogram*. Et histogram er et søjlediagram, hvor højden af hver søjle skal være, således at arealerne af alle søjlerne til sammen giver 1 eller 100%. Det vil sige, at arealet af hver søjle skal være frekvensen.



Figur 1.5. Figuren viser et histogram over højderne for de 213 drenge.

Dog er det sådan, at hvis intervallernes bredde er ens, så tegnes søjler med en højde, der passer til deres frekvens. Se figur 1.5.

Et histogram anvendes typisk til at få et overblik over, hvordan observationer er fordelt i et datasæt. På figur 1.5 kan det ses, at de fleste observationer ligger i midten, og resten er fordelt jævnt på begge sider, dog med lidt flere blandt de rigtig høje.

Hvis vi ikke har samme bredde på alle intervallerne, så skal vi beregne nogle nye højder til vores søjler. Vi vælger at slå alle intervaller fra 1,65 til 1,80 sammen den nye frekvens bliver så $2{,}82\% + 7{,}51\% + 21{,}31\% = 31{,}46\%$. Vi slår intervallerne fra 1,80 til 1,90 sammen: $30{,}99\% + 21{,}60\% = 52{,}58\%$, og de sidste to intervaller slår vi også sammen: $10{,}80\% + 5{,}16\% = 15{,}96\%$.

Nu mangler vi højderne på søjlerne. Arealet af et rektangel A beregnes ud fra højden h og bredden b:

$$A = h \cdot b$$

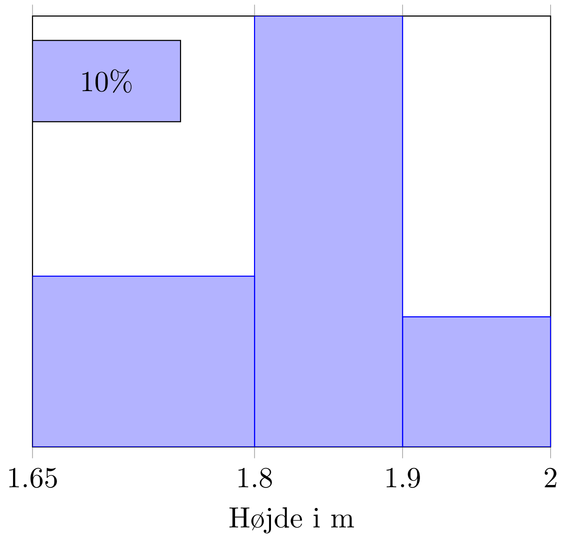
Men så kan vi bestemme højden ved at dividere med bredden på begge sider:

$$h = \frac{A}{b}$$

Vi laver så følgende tre udregninger, hvor vi husker, at arealet skal være frekvensen:

$$\frac{31{,}46\%}{1{,}80 - 1{,}65} \approx 2{,}1\%/m \qquad \frac{52{,}58\%}{1{,}90 - 1{,}80} \approx 5{,}3\%/m \qquad \frac{15{,}58\%}{2{,}00 - 1{,}90} \approx 1,6\%/m$$

Vi kan samle disse beregninger i følgende tabel:



Figur 1.6. Histogram over højderne for 213 drenge. Intervallerne har forskellig bredde, hvorfor arealer er beregnet. Rektanglet øverst til venstre angiver, hvor meget 10% fylder.

Højde (m)	Frekvens (%)	Søjlehøjde (%/m)
1,65-1,80	31,46%	2,1%/m
1,80-1,90	52,58%	5,3%/m
1,90-2,00	15,58%	1,6%/m

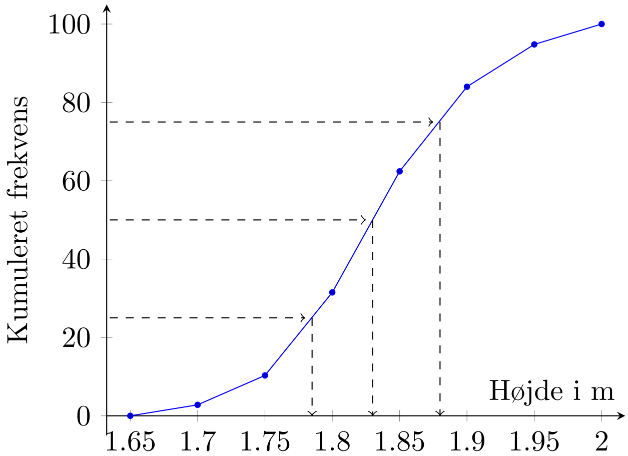
I figur 1.6 er histogrammet, så blevet tegnet. Læg mærke til, at der er et rektangel, der angiver hvor meget 10% udgør på billedet. Det er nødvendigt, da vi eller ikke ville vide, hvor meget hver søjle ville svare til i %.

1.3.2. Sumkurve. Da vi behandlede ugrupperede observationer, kom vi frem til kvartilsættet. Noget sådan kan også findes, når observationerne er grupperede. Måden de kan bestemmes på er ved at anvende en sumkurve.

For at kunne tegne en sumkurve skal man kende de *kumulerede frekvenser*. De kumulerede frekvenser beregnes ved at følge listen af frekvenser nedad, og for hvert nyt tal man kommer til, så lægger man det til det, man har fået indtil videre.

Så vi begynder med frekvensen for intervallet 1,65-1,70. Der er ikke noget at lægge den til, så vi skriver bare 2,82% ud for intervallet i søjlen kumuleret frekvens. Så tager vi den næste frekvens 7,51%, den kan lægges til det vi har nemlig 2,82%, og vi får 2,82% + 7,51% = 10,33%. Det skriver vi ud for intervallet 1,70-1,75 i søjlen kumuleret frekvens. Så tager vi den næste ... Til sidst ender vi på 100%.

Vores tabel ser nu sådan ud:



Figur 1.7. Figuren viser sumkurven for højderne af de 213 drenge. Kvartilsættet er indtegnet, og kan aflæses: $Q_1 = 1{,}78$m, $m = 1{,}83$m, og $Q_3 = 1{,}88$m.

Højde (m)	Hyppighed	Frekvens (%)	kumuleret frekvens (%)
1,65-1,70	6	2,82%	2,82%
1,70-1,75	16	7,51%	10,33%
1,75-1,80	45	21,13%	31,46%
1,80-1,85	66	30,99%	62,44%
1,85-1,90	46	21,60%	84,04%
1,90-1,95	23	10,80%	94,84%
1,95-2,00	11	5,16%	100%

Ideen er nu at anvende de kumulerede frekvenser til at tegne sumkurven. Vi placerer den kumulerede frekvens i højre intervalendepunkt. Hvilket giver os punkterne:

$$(1{,}65; 0) \quad (1{,}70; 2{,}82) \quad (1{,}75; 10{,}33) \quad (1{,}80; 31{,}46) \quad (1{,}85; 62{,}44)$$
$$(1{,}90; 84{,}04) \quad (1{,}95; 94{,}84) \quad (2{,}00; 100)$$

Vi afsætter punkterne i et koordinatsystem, og tegner rette linjer i mellem dem. Se figur 1.7.

Kvartilerne kan nu aflæses ved at gå vandret ud fra 25%, 50% og 75% til man rammer kurven, og så gå lodret ned. Det giver generelt ikke mening at bestemme minimum- og maximumværdierne for observationerne med mindre de bliver oplyst. På figur 1.7 kan vi aflæse kvartilsættet til at være $(1{,}78; 1{,}83; 1{,}88)$.

1.3.3. Middelværdi og spredning. Når vi har observationer vil vi også gerne beregne middelværdi og spredning. Når observationerne er grupperet, så skal vi dog lave nogle antagelser om vores observationer, da vi ikke har adgang til de konkrete observationer, der har givet anledning de fundne hyppigheder.

Vi laver en antagelse om, at vores observationer inden for hvert interval er jævnt fordelt. Det betyder, at observationerne i gennemsnit inden for intervallet ligger i midten af intervallet. Så vi anvender intervalmidtpunkterne til at beregne middelværdien. Derudover, skal vi også forholde os til at hvert interval ikke skal tælle lige meget i middelværdien, således skal intervallet 1,65-1,70 tælle meget mindre end intervallet 1,8-1,9. Så vi ganger intervalmidtpunkterne med frekvensen.

I vores eksempel kan middelværdien så beregnes med:

$$\overline{x} = 1{,}675 \cdot 0{,}0282 + 1{,}725 \cdot 0{,}0751 + \ldots + 1{,}975 \cdot 0{,}0516 \approx 1{,}83$$

Dermed er drengene i gennemsnit 1,83m høje.

Hvis x_i er det i'te intervalmidtpunkt, og f_i er den i'te frekvens, så kan middelværdien beregnes med:

$$\overline{x} = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n$$

Spredningen kan beregnes på måde, der minder om middelværdiens beregning. Vi begynder med variansen.

$$\begin{aligned} Var(X) = {} & (1{,}675 - 1{,}83)^2 \cdot 0{,}0282 + (1{,}725 - 1{,}83)^2 \cdot 0{,}0751 \\ & + \ldots \\ & + (1{,}975 - 1{,}83)^2 \cdot 0{,}0516 \approx 0{,}0046 \end{aligned}$$

Spredningen kan så beregnes:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0{,}0046} \approx 0{,}068$$

Det vil sige, at spredningen er 6,8 cm

Med de samme symboler som ved beregningen af middelværdien, så variansen beregnes med:

$$Var(X) = (x_1 - \overline{x})^2 \cdot f_1 + (x_2 - \overline{x})^2 \cdot f_2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2 \cdot f_n$$

Og spredningen kan beregnes:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Vi kan også have brug for stikprøvespredningen. Den kræver dog, at vi omregner alle vores frekvenser. Da vi beregnede frekvenserne dividerede vi med n og når vi skal beregne stikprøvespredningen, så skal vi dividere med $n-1$. Der er en metode til at omregne til stikprøvespredning, hvis vi kender spredningen. Hvis vi betegner med h en hyppighed, og med f den tilhørende frekvens, så er frekvensen beregnet som:

$$f = \frac{h}{n} \Leftrightarrow h = f \cdot n$$

Den frekvens vi skal bruge til at beregne stikprøvespredningen, kalder vi $\tilde{f}$, og den beregnes som:

$$\tilde{f} = \frac{h}{n-1}$$

Vi indsætter $h = f \cdot n$:

$$\tilde{f} = \frac{f \cdot n}{n-1} = f \cdot \frac{n}{n-1}$$

Dermed skal vi gange vores frekvenser med $\frac{n}{n-1}$, når vi skal beregne stikprøvevariansen. Hvis vi ser på formlen for stikprøvevariansen s^2, så får vi:

$$\begin{aligned} s^2 &= (x_1 - \overline{x})^2 \cdot \tilde{f}_1 + (x_2 - \overline{x})^2 \cdot \tilde{f}_2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2 \cdot \tilde{f}_n \\ &= (x_1 - \overline{x})^2 \cdot f_1 \cdot \frac{n}{n-1} + (x_2 - \overline{x})^2 \cdot f_2 \cdot \frac{n}{n-1} + \ldots \\ &\quad + (x_n - \overline{x})^2 \cdot f_n \cdot \frac{n}{n-1} \end{aligned}$$

Sætter $\frac{n}{n-1}$ uden for parentes:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{n}{n-1} \cdot \big((x_1 - \overline{x})^2 \cdot f_1 + (x_2 - \overline{x})^2 \cdot f_2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2 \cdot f_n\big) \\ s^2 &= \frac{n}{n-1} \cdot Var(X) \end{aligned}$$

Så variansen skal også ganges med $\frac{n}{n-1}$ for at omregne til stikprøvevariansen. Stikprøvespredningen beregnes ved at tage kvadratroden.

$$s = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot Var(X)} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sqrt{Var(x)} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sigma$$

Det vil sige, at vi kan beregne vores stikprøvespredning som:

$$s = \sqrt{\frac{213}{213-1}} \cdot 0{,}068 \approx 0{,}0683$$

Hvilket ikke er den store forskel.

1.4. Teori for histogram og sumkurve

I dette afsnit vil vi præsenterer noget teori, der knytter histogrammer og sumkurver sammen. Vi indfører noget notation, for at kunne beskrive sammenhængen helt generelt. Til sidst giver vi et konkret eksempel.

Vores observationer antages at ligge i nogle på hinanden følgende intervaller. Endepunkterne i intervallerne betegnes: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Og intervallerne skrives $[x_0; x_1]$, $]x_1; x_2]$, $]x_2; x_3]$ og $]x_{n-1}; x_n]$. Intervallerne bliver nummereret efter indekset på deres højre intervalendepunkt. Til hvert interval knyttes frekvenser $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$. Ligeledes antages det, at summen af alle frekvenser er 1:

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = 1$$

De kumulerede frekvenser beregnes ved at lægge en frekvens sammen med de foregående frekvenser. Følgende skema viser notationen:

Intervalnr.	interval	frekvens	kumuleret frekvens
1	$[x_0; x_1]$	f_1	f_1
2	$]x_1; x_2]$	f_2	$f_1 + f_2$
3	$]x_2; x_3]$	f_3	$f_1 + f_2 + f_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$]x_{n-1}; x_n]$	f_n	$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = 1$

Et histogram er defineret som et søjlediagram med en søjle for hvert interval, hvor hver søjles areal er frekvensen for intervallet. Bredden af et interval er givet ved: $x_i - x_{i-1}$. Hvis højden af søjlen kaldes h_i, så kan frekvensen beregnes som:

$$h_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = f_i$$

Og højden bliver dermed:

$$h_i = \frac{f_i}{x_i - x_{i-1}}$$

Sumkurven er en stykkevis lineær funktion, hvor hvert stykke er defineret inden for et af de intervaller, der givet på forhånd. Vi kan benytte formlen:

$$y = a \cdot (x - x_0) + y_0$$

til at finde en forskrift for hvert stykke. Punkterne (x_0, y_0), der skal indgå i formlen kan laves ud fra det venstre interval endepunkt, således at de bliver: Første interval: $(x_0, 0)$, andet interval: (x_1, f_1), tredje interval: $(x_2, f_1 + f_2)$ og så videre.

Vi mangler hældningen, som vi kan beregne med $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. For det i'te interval har vi de to intervalendepunkter $(x_{i-1}, f_1 + f_2 + \ldots + f_{i-1})$ og $(x_i, f_1 + f_2 + \ldots + f_{i-1} + f_i)$. Hældningen bliver så:

$$a_i = \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_{i-1} + f_i - (f_1 + f_2 + \ldots + f_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$a_i = \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_{i-1} + f_i - f_1 - f_2 - \ldots - f_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$a_i = \frac{f_i}{x_i - x_{i-1}} = h_i$$

Med andre ord, *højderne af søjlerne i histogrammet er netop hældningerne for stykkerne i sumkurven.* Vi kan nu opstille en generel forskrift for en sumkurve:

$$f(x) = \begin{cases} h_1 \cdot (x - x_0), & x_0 \leq x \leq x_1 \\ h_2 \cdot (x - x_1) + f_1, & x_1 < x \leq x_2 \\ h_3 \cdot (x - x_2) + f_1 + f_2, & x_2 < x \leq x_3 \\ \vdots & \vdots \\ h_n \cdot (x - x_{n-1}) + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1}, & x_{n-1} < x \leq x_n \end{cases}$$

Eksempel 1.5. Fra tidligere havde vi et eksempel med 213 drenges højder, og vi har nået frem til følgende tabel:

Højde (m)	Hyppighed	Frekvens (%)	kumuleret frekvens (%)
1,65-1,70	6	2,82%	2,82%
1,70-1,75	16	7,51%	10,33%
1,75-1,80	45	21,13%	31,46%
1,80-1,85	66	30,99%	62,44%
1,85-1,90	46	21,60%	84,04%
1,90-1,95	23	10,80%	94,84%
1,95-2,00	11	5,16%	100%

Vi dropper hyppigheden, og beregner i stedet højden på søjlerne i histogrammet. For eksempel:

$$\frac{2{,}82\%}{1{,}70 - 1{,}65} = \frac{0{,}0282}{0{,}05} = 0{,}56$$

Det giver en ny tabel:

Højde (m)	Frekvens (%)	kumuleret frekvens (%)	højde
1,65-1,70	2,82%	2,82%	0,56
1,70-1,75	7,51%	10,33%	1,50
1,75-1,80	21,13%	31,46%	4,23
1,80-1,85	30,99%	62,44%	6,20
1,85-1,90	21,60%	84,04%	4,32
1,90-1,95	10,80%	94,84%	2,16
1,95-2,00	5,16%	100%	1,03

Vi kan nu opstille en forskrift for det første stykke:

$$h_1 \cdot (x - x_0) = 0{,}56 \cdot (x - 1{,}65)$$

Og for det andet stykke:

$$h_2 \cdot (x - x_1) + f_1 = 1{,}50 \cdot (x - 1{,}70) + 2{,}82$$

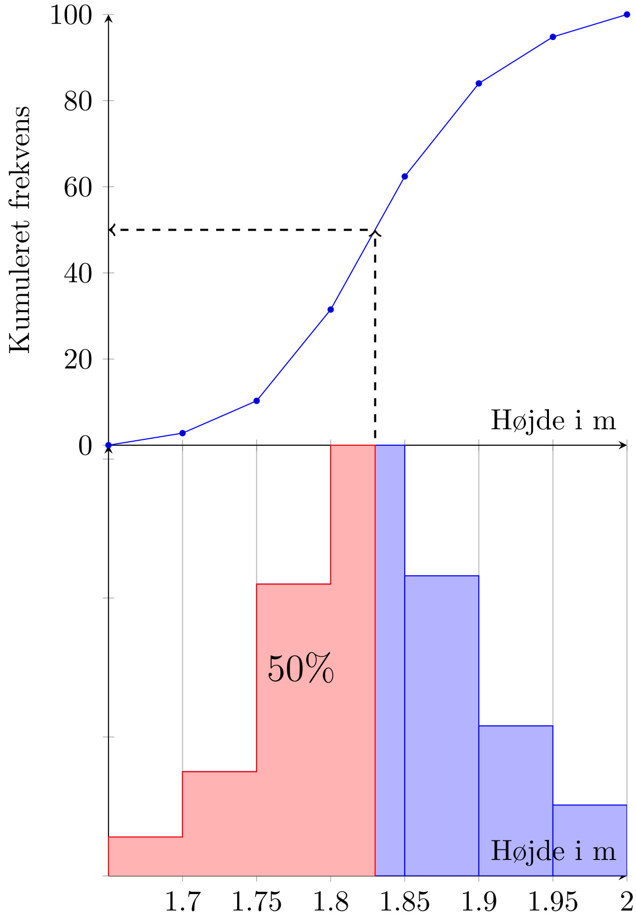
Og for det tredje stykke:

$$h_3 \cdot (x - x_2) + f_1 + f_2 = 4{,}23 \cdot (x - 1{,}75) + 10{,}33$$

Samlet kan sumkurven skrives som:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}56 \cdot (x - 1{,}65), & 1{,}65 \leq x \leq 1{,}70 \\ 1{,}50 \cdot (x - 1{,}70) + 2{,}82, & 1{,}70 < x \leq 1{,}75 \\ 4{,}23 \cdot (x - 1{,}75) + 10{,}33 & 1{,}75 < x \leq 1{,}80 \\ 6{,}20 \cdot (x - 1{,}80) + 31{,}46, & 1{,}80 < x \leq 1{,}85 \\ 4{,}32 \cdot (x - 1{,}85) + 62{,}44, & 1{,}85 < x \leq 1{,}90 \\ 2{,}16 \cdot (x - 1{,}90) + 84{,}04, & 1{,}90 < x \leq 1{,}95 \\ 1{,}03 \cdot (x - 1{,}95) + 94{,}85, & 1{,}95 < x \leq 2{,}00 \end{cases}$$

For eksempel beregner $f(183)$ den kumulerede frekvens, for 183 cm. Men det er præcis det samme som arealet fra begyndelsen af histogrammet til den lodrette linje $x = 183$. Det er indholdet af figur 1.8.



Figur 1.8. Figuren viser histogram nederst og den tilhørende sumkurve øverst for højderne af de 213 drenge. Medianen på 1,83m er markeret både på histogrammet og sumkurven. Arealet til venstre på histogrammet er præcis 50%, hvilket også kan findes på andenaksen hos sumkurven.

Kapitel 2

Eksponentielle funktioner I

Dette kapitel vil, som det første af to kapitler, handle om eksponentielle funktioner. I modsætning til lineære funktioner, der har en fast vækst, så har de eksponentielle funktioner en relativ vækst. Det vil sige, at de vokser eller aftager med en vis % pr. x-enhed.

Således vil vi begynde med at se på procentregning. Især hvordan man lægger procenter til eller trækker dem fra. Denne behandling giver anledning til at introducere eksponentielle funktioner, som en generel måde at arbejde med %-vækst.

Vi vil beskrive eksponentielle modeller, der kommer ud fra virkelige data. I den forbindelse vil vi behandle eksponentiel regression og vi vil se på det særlige tilfælde, hvor vi har fået givet to punkter.

I forlængelse heraf vil vi skulle beskrive potenser og rødder. Da det spiller en central rolle i anvendelsen af eksponentielle funktioner.

Vi afslutter med at gennemgå noget teori for eksponentielle funktioner, ud fra hvad dette kapitel giver mulighed for at sige noget om.

2.1. Procentregning

En gang i mellem støder man på meningsmålinger, med udsagn om at så og så mange procent mener et eller andet. Det, der bliver sagt, er, at en vis del mener noget. For eksempel, hvis 32% mener, at julemusik er rædsomt. Så ved vi noget om den andel, der har den holdning. Procent betyder hundrededele, så 32% er tallet 0,32.

Procenter er ret lette at regne ud. Hvis 64 ud af 256 mener, at julemusik er rædsomt. Så svare det til

$$\frac{64}{256} = 0{,}25 = 25\%$$

Her oversættes 0,25 til 25%. Oftest gøres det ved at gange med 100%. Eller ved at flytte kommaet to pladser til højre.

I denne situation har vi en del (de 64) af en helhed (de 256), andelen i procent kan så beregnes som:

$$procent = \frac{del}{helhed}$$

Hvis nu vi ved, at 37,5% af de 256 synes, at julemusik er rædsomt. Så kan vi regne ud hvor mange, der mener det.

$$256 \cdot 0{,}375 = 96$$

Her har vi divideret procenterne med 100% eller flyttet kommaet to pladser til venstre. I dette tilfælde har vi en andel i procent (37,5%) og en helhed (de 256). Delen kan så beregnes:

$$del = helhed \cdot procent$$

Til sidst kan vi forestille os, at vi ved, at 40% synes, at julemusik er rædsomt, og det svarer til 56 personer, hvor mange personer har vi så spurgt i alt? Her mangler vi helheden, mens vi kender delen og andelen i procent. Udregningen er

$$\frac{56}{0{,}4} = 140$$

Eller skrevet generelt:

$$helhed = \frac{del}{procent}$$

Bemærkning 2.1. Der to almindelige fejltagelser ved regning med procent. Den første er direkte forkert. Nogle gange ser man følgende udregning:

$$\frac{64}{256} = 0,25 \cdot 100 = 25\%$$

Problemet er her, at der er sat lighedstegn, så det der kommer til at stå er $25 = 25\%$ eller $\frac{64}{256} = 25$, hvilket aldrig er rigtigt.

Den anden fejltagelse er ikke forkert. Den er bare uhensigtsmæssig i forhold til de udregninger vi skal lave senere. Der kunne stå

$$\frac{256}{100} \cdot 37,5 = 25,6 \cdot 37,5 = 96$$

Ideen er at beregne, hvad en procent af 256 er, og så gange med antallet af procenter. Men vi vil skulle dividere procenttallet med 100 i de udregninger, vi støder på. Så denne form for udregning vil vi ikke lave.

2.2. At lægger procenter til og trække procenter fra

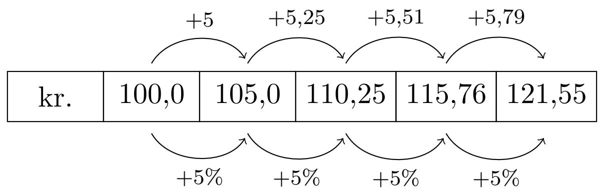
At lægge procenter til noget sker ret ofte ude i virkeligheden, for eksempel lægges der 25% moms på varer. Ligeledes trækkes der også procenter fra for eksempel skat af indkomst eller rabat i en butik. Det viser sig, at der er nogle effektive måder at "lægge til" og "trække fra" på. Men før vi kommer hen til dem, skal vi se på, hvorfor vi har brug for effektive metoder.

Eksempel 2.2. Her skal vi se, hvordan man *ikke* skal gøre. Vi forestiller os, at vi har 100 kroner, og vi ønsker at lægge 5% i rente til 4 gange.

Første gang	$100 \cdot 0{,}05 = 5$	5% af 100 kr.
	$100 + 5 = 105$	læg til 100 kr.
Anden gang	$105 \cdot 0{,}05 = 5{,}25$	5% af 105 kr.
	$105 + 5{,}25 = 110{,}25$	læg til 105 kr.
Tredje gang	$110{,}25 \cdot 0{,}05 = 5{,}51$	5% af 110,25 kr.
	$110{,}25 + 5{,}51 = 115{,}76$	læg til 110,25 kr.
Fjerde gange	$115{,}76 \cdot 0{,}05 = 5{,}79$	5% af 115,76 kr.
	$115{,}76 + 5{,}79 = 121{,}55$	læg til 115,76 kr.

Der er rigtig mange udregninger, der skal udføres for at frem til et svar. Og det er uhensigtsmæssigt, hvis det nu er 100 gange, der skal lægges procenter til.

Eksemplet oven for er ikke helt meningsløst. Læg mærke til, at det beløb, der lægges til hver gang vokser fra gang til gang. Det begynder på 5 og slutter på 5,79. Det er det, der bliver betegnet *rentes rente*. Følgende er en visuel beskrivelse af, hvad der foregår.



Pilene i toppen af tabellen viser det, der kaldes den *absolutte ændring*. Det er *forskellen* mellem to tal, og det kan beregnes ved at trække de to tal fra hinanden. Pilene i bunden af tabellen viser det, der kaldes den *relative ændring*. Det er *forholdet* mellem to tal, og det kan beregnes ved at dividere de to tal med hinanden, og trække en fra. Se formel 2.4 på side 2.4.

Vi har nu set et eksempel på, hvordan man *ikke* skal gøre. Det vi gerne vil frem til er at lave hele udregningen på én gang. Hvis vi skal forbedre udregningen i eksemplet (2.2), så kunne vi slå nogle af udregningerne sammen. Udregningen i de to første linjer kunne skrives: $100 + 100 \cdot 0{,}05 = 105$. Der vil dog stadig være en udregning for hver gang, der skal lægges procenter til. Vi kan gøre det bedre.

Hvis vi ser på en anden udregning $100 \cdot (1 + 0{,}05)$, så ser det ikke ud som om den har noget med de tidligere udregninger at gøre, men hvis vi nu ganger ind i parentesen:

$$\begin{aligned} & 100 \cdot (1 + 0{,}05) \\ &= 100 \cdot 1 + 100 \cdot 0{,}05 \\ &= 100 + 100 \cdot 0{,}05 \end{aligned}$$

Men det er jo netop den udregning, vi foreslog som alternativ lige før. Det vil sige, at hvis vi ønsker at lægge 5% til noget, så skal vi gange med $1{+}0{,}05$. Det kan vi skrive simplere som 1,05. Et tal vi ganger på for at lægge procenter til kalder vi en *fremskrivningsfaktor*

Vi kan nu definere to vigtige begreber.

Definition 2.3. Et tal r kaldes en *vækstrate*, hvis det svare til et antal procenter enten positivt eller negativt. Tallet $1 + r$ kaldes en *fremskrivningsfaktor.*

Hvis B er begyndelsesværdien, S er slutværdien, og r er vækstraten, så lægges procenter til eller trækkes fra B, med følgende formel:

$$S = B \cdot (1 + r) \tag{2.1}$$

Eksempel 2.4. Hvis vi tager det tidligere eksempel (2.2), så er vækstraten $r = 0{,}05$, fordi vi har en ændring på 5%. Vi har så en fremskrivningsfaktor, der er $1 + 0{,}05 = 1{,}05$. Vi vil lægge 5% til 250 kr. Så er begyndelsesværdien $B = 250$, vækstraten $r = 0{,}05$ og fremskrivningsfaktoren 1,05. Vi kender ikke slutværdien S. Udregningen bliver:

$$S = B \cdot (1 + r) = 250 \cdot 1{,}05 = 262{,}5$$

Så slutværdien er $S = 262{,}5$ kr.

Eksempel 2.5. I definitionen stod der, at vækstraten kan være negativ. Antag, at en person skal trækkes 40% i skat. Så er vækstraten: $-0{,}4$ og fremskrivningsfaktoren er $1 + (-0{,}4) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Hvis personens indtægt er 250000 kr. Så kender vi begyndelsesværdien $B = 250000$, vækstraten $-0{,}4$ og fremskrivningsfaktoren 0,6. Vi kender ikke slutværdien. Uderegningen bliver:

$$S = 250000 \cdot 0{,}6 = 150000$$

Så slutværdien er $S = 150000$ kr.

Eksempel 2.6 (Moms)**.** Det klassiske eksempel på at lægge procenter til er moms. Hvis vi har en vare, der koster 134 kr uden moms, hvad koster den så med moms? Vores vækstrate er $25\% = 0,25$, og derfor er vores fremskrivningsfaktor: $1 + 0,25 = 1,25$. Vi lægger 25% til ved at gange med de 1,25.

$$134 \cdot 1{,}25 = 167{,}5$$

Så varen koster 167,5 kr.

Hvis vi nu omvendt ved, at en vare koster 205 kr. med moms, hvad koster den så uden moms? Her ved vi, at det tal vi mangler x skal ganges med 1,25 for at give 205. Så vi skal løse ligningen $x \cdot 1{,}25 = 205$. Vi dividerer med 1,25.

$$x = \frac{205}{1{,}25} = 164$$

Så varen har kostet 164 kr.

Bemærkning 2.7. Mange har lært, at man kan regne tilbage til uden moms ved at gange med 0,8. Det er kun rigtigt, fordi momsen er 25%. Her er forklaringen hvorfor. Fremskrivningsfaktoren 1,25 kan skrives som en brøk $\frac{5}{4}$. Ligningen oven for bliver så:

$$x \cdot \frac{5}{4} = 205$$

Vi ganger med brøken $\frac{4}{5}$ på begge sider af lighedstegnet:

$$x \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = 205 \cdot \frac{4}{5}$$

4 går ud med 4, og 5 går ud med 5

$$x = 205 \cdot \frac{4}{5} = 164$$

Men brøken $\frac{4}{5}$ er præcis 0,8. Så huskereglen passer, indtil momsen bliver lavet om.

2.2.1. At regne frem og tilbage mellem tal og procenter. I det ovenstående nåede vi frem til, at det at lægge procenter til et tal bedst gøres ved at gange med en fremskrivningsfaktor $1 + r$. I eksempel 2.6, så vi, at hvis man regne tilbage til det oprindelige tal (f.eks. prisen uden moms) skal man dividere med fremskrivningsfaktoren. Men hvis man skal finde, hvor mange procent noget har ændret sig med, hvad så?

Eksempel 2.8. Hvis vi har 413 dygtige elever på en skole, og der året efter er 501 dygtige elever, hvor mange procent er det så vokset? Vi kan opstille en ligning, for vi ved, hvad vi begynder med B, og hvad vi slutter med S, men vi kender ikke vores fremskrivningsfaktor $1 + r$. Ligningen er

$$S = B \cdot (1 + r)$$
$$501 = 413 \cdot (1 + r)$$

Denne ligning kan løses ved dividere med 413 på begge sider af lighedstegnet. Det giver:

$$\begin{aligned}
501 &= 413 \cdot (1+r) \\
\frac{501}{413} &= 1+r \\
\frac{501}{413} - 1 &= r \\
1{,}213075 - 1 &= r \\
r &= 0{,}213075 = 21{,}3075\%
\end{aligned}$$

Dermed er ændringen 21,3%.

Omvendt, hvis antallet af dygtige elever falder til 353 elever, så er kan vi stadig opstille en ligning:

$$\begin{aligned}
S &= B \cdot (1+r) \\
353 &= 413 \cdot (1+r) \\
\frac{353}{413} &= 1+r \\
\frac{353}{413} - 1 &= r \\
0{,}8547 - 1 &= r \\
r &= -0{,}1453 = -14{,}53\%
\end{aligned}$$

Det vil sige, at antallet falder med 14,53%. Bemærk, at udregningen *skal* give et negativt resultat! Når der blive mindre af noget, så svarer til det til at trække procenter fra. Og vi regner procenter med fortegn.

Vi kan samle de ovenstående betragtninger i en sætning:

Sætning 2.9. *Hvis begyndelse værdien er B, slutværdien er S, og vækstrate er r, så gælder følgende tre ligninger:*

$$S = B \cdot (1+r) \tag{2.2}$$

$$B = \frac{S}{1+r} \qquad r \neq -1 \tag{2.3}$$

$$r = \frac{S}{B} - 1 \qquad B \neq 0 \tag{2.4}$$

Bevis. Udgangspunktet er $S = B \cdot (1+r)$. Vi udleder formel 2.3 ved at dividere med $(1+r)$:

$$\begin{aligned}
S &= B \cdot (1+r) \\
\frac{S}{1+r} &= B
\end{aligned}$$

Vi ser, at $1 + r \neq 0$, for ellers dividerer vi med 0. Dermed er $r \neq -1$. Vi udleder formel 2.4:

$$S = B \cdot (1 + r)$$

Dividerer med B

$$\frac{S}{B} = 1 + r$$

Trækker 1 fra

$$\frac{S}{B} - 1 = r$$

Vi ser, at $B \neq 0$, for ellers vil vi dividere med 0. □

2.2.2. Lægge til og trække fra flere gange. Hvis man ganger med en fremskrivningsfaktor, så kan man lægge procenter til eller trække fra et tal. Hvis vi ønsker at lægge 5% til 100 kr. 4 gange, så kan vi skrive:

$$100 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05$$

Men det at gange med det samme tal 4 gange er det samme som at skrive

$$100 \cdot 1{,}05^4 = 121{,}55$$

Vi behøver ikke at lægge den samme procent til hver gang følgende udregning viser, hvordan man lægger 5% til 3 gange og 7% til 2 gange:

$$1,05^3 \cdot 1,07^2$$

Eksempel 2.10. Antag, at vi har 500 bakterier, og der kommer 3% ekstra til hver time. hvor mange bakterier er der efter 12 timer? Vi beregner først fremskrivningsfaktoren. Da vækstraten er 3% har vi $1 + 0{,}03 = 1{,}03$ som fremskrivningsfaktor. Derfor vil følgende udregning give antallet efter 12 timer:

$$500 \cdot 1{,}03^{12} = 712{,}88 \approx 713$$

Eksempel 2.11. Hvis vi har en væske, hvor der fordamper 2% hver time, og vi begynder med 400mL, hvor meget er der tilbage efter 4 timer? Vores vækstrate er $-2\% = -0{,}02$, det er negativt, da der forsvinder væske. Fremskrivningsfaktoren er $1 + (-0{,}02) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$. Udregningen bliver så:

$$400 \cdot 0{,}98^4 = 368{,}95$$

Hvis vi er interesseret i at bestemme vækstraten, så skal der arbejdes lidt. Vi gentager et tidligere eksempel:

Eksempel 2.12. Hvis vi har 413 dygtige elever på en skole, og der 5 år efter er 501 dygtige elever, hvor mange procent er det så vokset pr. år? Vi kan opstille en ligning, for vi ved, hvad vi begynder med, og hvad vi slutter med, men vi kender ikke vores fremskrivningsfaktor $1 + r$. Ligningen er

$$501 = 413 \cdot (1 + r)^5$$

Denne ligning kan løses ved dividere med 413 på begge sider af lighedstegnet. Det giver:

$$\begin{aligned} 501 &= 413 \cdot (1 + r)^5 \\ \frac{501}{413} &= (1 + r)^5 \end{aligned}$$

Vi tager den femte rod på begge sider af lighedstegnet:

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{\frac{501}{413}} &= 1 + r \\ \sqrt[5]{\frac{501}{413}} - 1 &= r \\ 1{,}039388 - 1 &= r \\ r &= 0{,}039388 = 3{,}9388\% \end{aligned}$$

Dermed er den årlige ændring 3,94%.

Omvendt, hvis antallet af dygtige elever falder til 353 elever på 10 år, så kan vi stadig opstille en ligning:

$$\begin{aligned} 353 &= 413 \cdot (1 + r)^{10} \\ \sqrt[10]{\frac{353}{413}} &= 1 + r \\ \sqrt[10]{\frac{353}{413}} - 1 &= r \\ 0{,}9844 - 1 &= r \\ r &= -0{,}0156 = -1{,}56\% \end{aligned}$$

Det vil sige, at antallet falder med 1,56% pr. år. Bemærk, at udregningen *skal* give et negativt resultat! Når der blive mindre af noget, så svarer til det til at trække procenter fra. Og vi regner procenter med fortegn.

2.3. Eksponentielle funktioner

Vi kan nu give en definition af hovedemnet for dette kapitel, nemlig en eksponentiel funktion:

Definition 2.13 (Eksponentiel funktion)**.** Ved en eksponentiel funktion forstås et funktionsudtryk på formen:

$$f(x) = b \cdot a^x, \qquad a > 0,\ b > 0$$

hvor a er en fremskrivningsfaktor, og b er en begyndelsesværdi. Funktionsværdien $f(x)$ afhænger af den uafhængige variabel x. Givet en vækstrate r, så er $a = 1 + r$.

Med andre ord, så er en eksponentiel funktion en funktion, der lægger procenter til eller trækker procenter fra x gange.

Eksempel 2.14. Vi forestiller os, at vi sætter 200 kr. i banken til 10% i rente pr. år (hvilket er totalt urealistisk). Eftersom vi begynder med 200 kr. så er det vores begyndelsesværdi $b = 200$. Vi har en vækstrate på 10%, så $a = 1+r = 1+0{,}1 = 1{,}1$. Så vores eksponentielle funktion vil i dette tilfælde være

$$f(x) = 200 \cdot 1{,}1^x$$

hvor $f(x)$ er hvor mange penge i kr. der står på kontoen efter x år. Vi kan så begynde at regne ud hvor mange penge, der er på kontoen efter nogle år.

Efter et år $f(1) = 200 \cdot 1{,}1^1 = 220$. Efter to år $f(2) = 200 \cdot 1{,}1^2 = 242$. Efter tre år $f(3) = 200 \cdot 1{,}1^3 = 264{,}2$. Efter fire år $f(4) = 200 \cdot 1{,}1^4 = 292{,}82$. Og så videre. Hver gang årstallet stiger med en, så vokser beløbet ikke det samme antal kr. Det skyldes, at vi hele tiden lægger 10% til større og større tal. Men derimod er den relative forskel mellem to på hinanden følgende beløb altid 10%. Følgende tabel viser indholdet i denne sammenhæng:

+1 +1 +1 +1

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	200	220	242	264,2	292,82

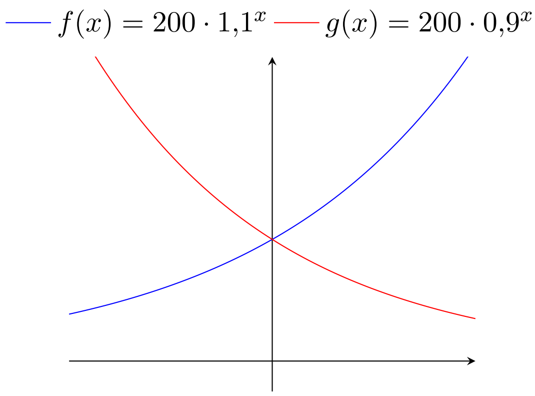
+10% +10% +10% +10%

Eksempel 2.15. Hvis vi forestiller os, at vi har 200 mL vand tæt ved kogepunktet, og der fordamper 10% af vandet pr. time. Så vil vores begyndelsesværdi være $b = 200$. Vores vækstrate er -10% og vores fremskrivningsfaktor er så $a = 1+r = 1+(-0{,}1) = 1-0{,}1 = 0{,}9$. Dermed er vores eksponentielle funktion:

$$f(x) = 200 \cdot 0{,}9^x$$

hvor $f(x)$ mængden af vand i mL efter x timer. Vi kan så begynde at regne ud hvor meget vand, der er tilbage efter nogle timer:

Efter en time er der $f(1) = 200 \cdot 0{,}9^1 = 180$. Efter to timer er der $f(2) = 200 \cdot 0{,}9^2 = 162$. Efter tre timer er der $f(3) = 200 \cdot 0{,}9^3 = 145{,}8$.



Figur 2.1. Graferne for $f(x) = 200 \cdot 1{,}1^x$ og $g(x) = 200 \cdot 0{,}9^x$.

Efter fire timer er der $f(4) = 200 \cdot 0{,}9^4 = 131{,}22$. Og så videre. Hver gang der går en time, så falder mængden af vand ikke med den samme mængde. Det skyldes, at vi trækker 10% fra mindre og mindre tal. Men derimod er den relative forskel mellem to på hinanden følgende mængder altid -10%. Følgende tabel viser indholdet i denne sammenhæng:

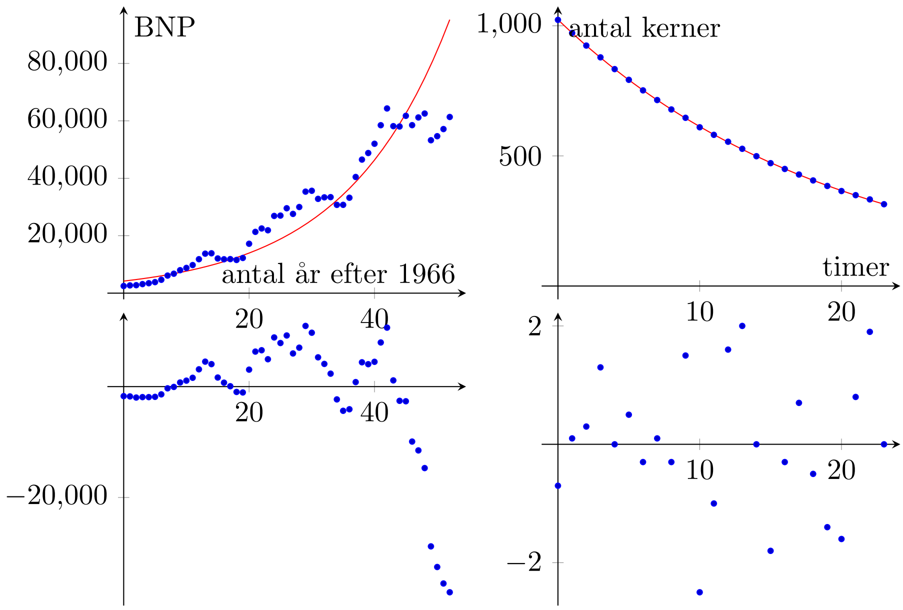
$+1$ $+1$ $+1$ $+1$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	200	180	162	145,8	131,22

-10% -10% -10% -10%

Fra de to eksempler oven for kunne man få den idé, at når vækstraten er positiv, så vokser en eksponentiel funktion hurtigere og hurtigere, mens når vækstraten er negativ, så aftager en eksponentiel funktion langsommere og langsommere. Det er faktisk rigtigt. Graferne for de to funktioner i de ovenstående eksempler (eksempel 2.14 og 2.15), kan ses på figur 2.1.

Grafen for en eksponentiel funktion vil altid ligge over førsteaksen (en eksponentiel funktion er en positiv funktion). Derudover, vil grafen for en eksponentiel funktion altid skære andenaksen i $(0, b)$. Hvorfor vi kan finde begyndelsesværdien ved at se, hvor grafen skærer andenaksen. Bemærk, at graferne også eksisterer til venstre for anden aksen. Så vi kan derfor godt sætte negative tal ind på x. Så vi skal kunne regne f.eks. $1{,}2^{-3}$ ud. Det vender vi tilbage til.



Figur 2.2. Koordinatsystemet i øverste venstre hjørne viser punkter og regression for BNP (i dollar pr. person) for et land, som funktion af antal år efter 1966. Lige nedenunder i nederste venstre hjørne er det tilsvarende residualplot. I koordinatsystem i øverste højre hjørne findes punkter og regression for antallet af atomkerner, som funktion af antal timer. Lige nedenunder i højre hjørne er det tilsvarende residualplot.

2.4. Regression og beregning

Som med lineære funktioner er det muligt at udføre regression, hvor resultatet er en eksponentiel funktion. Typisk vil man anvende et computerprogram til at foretag de beregninger, der ligger til grund for regressionen. Hvordan de konkret gøres skifter fra program til program, så det vil ikke interessere os her. Til gengæld vil vi give to eksempler, hvor det kunne give mening at udføre eksponentiel regression.

Eksempel 2.16. Det første eksempel er Brutto NationalProduktet (BNP) for et land. Oftest opgøres BNP i dollar pr. person. Hvordan BNP beregnes skal ikke interessere os her. Dog er der en ting ved BNP, der giver anledning til en eksponentiel model for BNP. Økonomer taler om vækst, som angives i % af BNP. Dermed er væksten de % BNP vokser (forhåbentlig) med hvert år. Til venstre på figur 2.2. Er BNP for et land angivet som punkter og regressionslinjen er placeret bedst muligt i forhold til disse punkter. Under regressionen er residualplottet tegnet.

Modellen er givet ved formlen:

$$f(x) = 4205{,}7 \cdot 1{,}062^x$$

hvor $f(x)$ angiver BNP pr. person i dollar, x år efter 1966. Modellen vurderer, at BNP i 1996 var 4205,7 dollar, mens væksten har været på 6,2% pr. år

Vi kan se på residualplottet, at antagelsen om at BNP vokser eksponentielt i begyndelsen af data ser ud til at være korrekt. Mens det mod slutning ser ud til at gå meget dårligt. Så umiddelbart vil en eksponentiel regression over alle årene ikke være den rigtige model, men måske kunne den være fornuftig for de første mange tal.

Eksempel 2.17. Et andet eksempel kunne være et radioaktivt stof. Hvis vi begynder med et antal atomkerner af stoffet, så kunne det tænkes at over tid, så henfalder kernerne, og vi får dermed mindre af stoffet. Til højre på figur 2.2 ses en tænkt situation. Da hver kerne har en vis sandsynlighed for at henfalde, så giver det mening med eksponentiel model.

Modellen er givet ved formlen:

$$f(x) = 1023{,}6 \cdot 0{,}95^x$$

hvor $f(x)$ er antallet af atomkerner efter x timer. Modellen vurderer antallet af kerner til at begynde med er 1023,6, samt at antallet af kerner falder med 5% pr. time.

Fra residualplottet kan vi se, at en eksponentiel model giver mening. Residualerne er spredt usystematisk omkring førsteaksen og afvigelserne er ganske små i forhold de målte antal kerner.

Regression er noget vi bruger, når vi har mange måledata, vi ønsker at beskrive. Men hvis vi har præcis to punkter, så findes der to formler, der kan bruges til at beregne a og b i en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$.

Hvis vores to punkter skrives som (x_1, y_1) og (x_2, y_2), så kan a beregnes ved:

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

og b kan beregnes ved:

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Vi giver et eksempel på anvendelsen af formlerne.

Eksempel 2.18. Hvis vi har to punkter $(3, 9)$ og $(5, 81)$. Så kan vi vælge det første punkt til at være (x_1, y_1) og det andet punkt til at være (x_2, y_2). Det vil sige,

$$(x_1, y_1) = (3, 9)$$
$$(x_2, y_2) = (5, 81)$$

Nu kan vi sætte ind i formlen for a først:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \\ &= \sqrt[5-3]{\frac{81}{9}} \\ &= \sqrt[2]{9} = 3 \end{aligned}$$

Så $a = 3$. Nu kan vi beregne b ved at indsætte i dens formel:

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{9}{3^3} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

Så $b = \frac{1}{3}$. Det vil sige, at forskriften for den eksponentielle funktion, hvis graf går igennem de to punkter er:

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^x$$

2.5. Potenser

Det følgende afsnit omhandler potenser, som er en måde at regne med gange og dividere. Vi vil først motivere potenser ved at se på noget tilsvarende med plus.

Hvis vi ser på plusstykket:

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

så kan vi enten lave alle fem additioner, eller vi kan se, at vi lægger 2 til sig selv 6 gange. Dermed kan vi skrive:

$$\underbrace{2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2}_{\text{6 gange}} = 2 \cdot 6$$

Den sidste udregning $2 \cdot 6$ er lettere at udføre, og det fylder mindre end det lange plusstykke.

Vi kan gøre det samme med gangestykker. Hvis vi har gangestykket

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

så kan vi se, at vi ganger 2 med sig selv 6 gange. Det har vi en måde at skriv på som er lettere at læse

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{6 gange}} = 2^6$$

Den sidste udregning 2^6 er lettere at taste ind på en lommeregner/computer, og det fylder mindre.

Bemærkning 2.19. Læg mærke til, at de to beregninger på ingen måde er ens. F.eks. giver $2 \cdot 6 = 12$, mens $2^6 = 64$. En meget ofte forekommende fejl er at forveksle disse to måder at skrive henholdsvis plus- og gangestykker på.

Vi kan nu indføre nogle begreber for potenser.

Definition 2.20 (Potens)**.** En potens er et regneudtryk på formen

$$a^p$$

hvor a og p er tal. Tallet a kaldes grundtallet, og tallet p kaldes eksponenten. Potenser kommer før gange og dividere; og plus og minus i regnearternes hierarki.

Vi kan nu regne med potenser.

Eksempel 2.21. En meget almindelig udregning er:

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

En mere kompliceret udregning er:

$$-4^2 = -(4 \cdot 4) = -16$$

Her skal man lægge mærke til, at potensen 4^2 kommer før minus i regnearternes hierarki og skal derfor regnes først. Hvis der er -4, der skal ganges med selv, så skal man skrive:

$$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$$

Eksponenten behøver ikke være 2, men kan være alle mulige tal for eksempel 3^{10}.

2.5.1. Løsning af ligning med potens. Det første sted potenser indgår er i at kunne løse en ligning. Vi tager et eksempel:

$$x^2 = 16$$

Her er det muligt at gætte en løsning, nemlig 4, idet $4 \cdot 4 = 16$, og dermed $4^2 = 16$. Så det er en løsning. Der er imidlertid også en anden løsning. Nemlig -4. Fordi $(-4) \cdot (-4) = 16$ og dermed $(-4)^2 = 16$. Så der er to løsninger.

Hvis vi ikke kan gætte en løsning til ligningen, så er vi nødt til at have en metode til at bestemme løsningerne. Metoden er det, der kaldes en rod. Den mest kendte rod kaldes for *kvadratroden*. Hvis vi skriver:

$$\sqrt{25}$$

så ønsker vi at bestemme et tal, som når det bliver ganget med sig selv, giver 25, vi kan hurtigt indse, at det må være 5, fordi $5 \cdot 5 = 25$, så vi kan skrive

$$5^2 = 25 \Leftrightarrow 5 = \sqrt{25}$$

Med andre ord så omgør $\sqrt{\cdot}$ potensen $\cdot^2$. Dog er det således, at ligninger $x^2 = a$ typisk har en positiv og en negativ løsning. Så vi bør skrive

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

hvor symbolet $\pm$ betyder, at der er to tal et positivt og et negativt.

Kvadratroden er et af de eneste steder i matematik, hvor vi skjuler et tal der ikke er 1, men derimod 2. Vi burde vi skrive $\sqrt[2]{25} = 5$. Hvilket kan læses som den anden rod af 25.

Det burde indikere, at der er andre rødder. For eksempel kubikroden: $\sqrt[3]{\cdot}$ eller den 10'ende rod $\sqrt[10]{\cdot}$. Hvis vi har ligningen

$$x^3 = 27$$

så kan vi se, at det giver

$$x = \sqrt[3]{27} = 3$$

Grunden til at $x^3 = 27$ ikke har en negativ løsning er at et negativ tal ganget med sig selv tre gange giver et negativt tal. For eksempel

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 9 \cdot (-3) = -27$$

Generelt er det sådant, at en lige eksponent i en potens regner et negativt grundtal til et positivt tal, og en ulige eksponent regner et negativt grundtal til negativt tal.

Det betyder at følgende udregning ikke giver mening

$$\sqrt{-4} = \text{vås}$$

mens

$$\sqrt[3]{-27} = -3$$

Definition 2.22 (rod)**.** Givet ligningen

$$a^p = b$$

så er en rod en løsning til ligningen (hvis den eksisterer) skrevet som

$$a = \sqrt[p]{b}$$

- Hvis p er et positiv *lige* heltal ($p > 0$), så skal b være ikke-negativ ($b \geq 0$).
- Hvis p er et positivt *ulige* heltal ($p > 0$), så kan b være alle tal.
- I alle andre tilfælde vil vi kræve, at $b > 0$.

Bemærkning 2.23. Det sidste krav kan faktisk gøres mere blødt, hvis for eksempel p er en brøk. Men det giver en hel del særtilfælde, så vi tager den begrænsning, der er mest sikker, det vil sige, som ikke kommer til at give problemer.

Vi skal se senere, at en rod kan opfattes som en potens. Men det kræver, at vi indfører nogle regneregler.

2.5.2. Regneregler med fælles grundtal. Vi begynder med regneregler, hvor grundtallet er det samme. Husk, at potenser omhandler gange og dividere, hvorfor der ikke er regneregler for plus- og minusstykker.

Vi ser på $2^4 \cdot 2^3$. Det kan vi begynde med at skrive op:

$$2^4 \cdot 2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4+3=7} = 2^7$$

Med andre ord, så kan vi beregne $2^4 \cdot 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$.

Det kan vi også se helt generelt:

$$a^p \cdot a^q = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{q} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p+q} = a^{p+q}$$

Dermed har vi vores første regneregel:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \tag{2.5}$$

Vi kan på en lignende måde finde en formel hvor vi dividerer. For eksempel $\frac{2^5}{2^3}$. Her skal vi husk brøkregnereglen $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b$. Vi laver følgende beregning

$$\frac{2^5}{2^3} = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}^{5}}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3}} = \overbrace{2 \cdot 2}^{5-3=2} \cdot \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}^{3}}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3}} = 2^2 \cdot 1 = 2^2$$

Det vil sige, at vi kan lave følgende udregning $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$.

Vi kan også se på udregningen helt generelt:

$$\frac{a^p}{a^q} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}^{p}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{q}} = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{p-q} \cdot \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{q}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{q}} = a^{p-q} \cdot 1 = a^{p-q}$$

Det giver os vores anden regneregel:

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \tag{2.6}$$

Vi kan også tage en potens af en potens. For eksempel $\left(4^2\right)^3$. Det kan vi beregne på følgende måde:

$$\left(4^2\right)^3 = \left(\underbrace{4 \cdot 4}_{2}\right)^3 = \overbrace{\underbrace{(4 \cdot 4)}_{2} \cdot \underbrace{(4 \cdot 4)}_{2} \cdot \underbrace{(4 \cdot 4)}_{2}}^{3} = 4^{2 \cdot 3} = 4^6$$

Det vil sige, at vi kan lave følgende udregning: $\left(4^2\right)^3 = 4^{2\cdot 3} = 4^6$.

Helt generelt har vi:

$$
\begin{aligned}
(a^p)^q &= \left(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p}\right)^q \\
&= \overbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p}}^{q} \\
&= a^{p\cdot q}
\end{aligned}
$$

Det giver os den tredje regneregel:

$$(a^p)^q = a^{p\cdot q} \tag{2.7}$$

2.5.3. Tre vigtige regler. Fra definition af en rod 2.22 har vi en ligning $a^p = b$, og en løsning $a = \sqrt[p]{b}$. Hvis løsningen indsættes i ligningen, så får vi:

$$a^p = \left(\sqrt[p]{b}\right)^p = b$$

Omvendt, hvis vi indsætter $a^p = b$ i $a = \sqrt[p]{b}$, så får vi

$$a = \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{a^p}$$

Med andre ord er potens og rod det omvendte af hinanden. Den oplysning gør det muligt at finde en potens, der angiver en rod! Fra regneregel 2.7 har vi:

$$(a^p)^q = a^{p\cdot q}$$

Vi kan overveje, hvad der skal til for at få $a^{p\cdot q}$ til at give a? Hvis $q = \frac{1}{p}$, får vi

$$a^{p\cdot q} = a^{p\cdot \frac{1}{p}} = a^{\frac{p}{p}} = a^1 = a$$

Det betyder, at hvis vi sætter

$$\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$$

så har vi fundet en beskrivelse af rødder som potenser.

Der er en særlig eksponent, som man ofte vil få brug for, nemlig 0. Hvad giver a^0? For at kunne besvare spørgsmålet, anvender vi regneregel 2.5. Hvis vi har a^p, så kunne vi også skrive a^{p+0}, da $p = p + 0$. Udregning bliver så:

$$a^p = a^{p+0} = a^p \cdot a^0$$

Med andre ord er $a^p = a^p \cdot a^0$. Men det eneste tal, vi kan gange med, og få det tal vi begyndte med, er 1. Så derfor er reglen:

$$a^0 = 1$$

Vi har ikke sagt noget om, hvorvidt eksponenterne må være negative. Det må de godt, men hvad skal det betyde? Hvis vi har potensen a^{-p}, så kan vi skrive $-p = 0 - p$. Og så kan vi benytte regnereglen 2.6 til at beregne, hvad a^{-p} skal være:

$$a^{-p} = a^{0-p} = \frac{a^0}{a^p} = \frac{1}{a^p}$$

Dermed er

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

Det giver tre regler, som vi noterer her:

$$\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}} \tag{2.8}$$

$$a^0 = 1 \tag{2.9}$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p} \tag{2.10}$$

2.5.4. Regneregler med fælles eksponent. Vi mangler to regneregler. Det de har tilfælles er, at grundtallet ikke nødvendigvis er det samme, men eksponenterne er ens.

Hvis vi ønsker at beregne $2^3 \cdot 4^3$, så kan vi gøre følgende:

$$2^3 \cdot 4^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3} \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3} = \underbrace{(2 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 4)}_{3} = (2 \cdot 4)^3$$

Dette argument kan vi lave helt generelt.

$$a^p \cdot b^p = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{p} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{p} = (a \cdot b)^p$$

Dermed er regnereglen:

$$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p \tag{2.11}$$

Den sidste regneregel handler om division. Hvis vi har $\frac{2^3}{4^3}$, så kan vi regne det på følgende måde:

$$\frac{2^3}{4^3} = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}^{3}}{\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3}} = \underbrace{\frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4}}_{3} = \left(\frac{2}{4}\right)^3$$

Dette kan også gøres helt generelt:

$$\frac{a^p}{b^p} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{p}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{p}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$$

Dermed er den sidste regneregel:

$$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p \tag{2.12}$$

Bemærkning 2.24 (0^0 =?)**.** Der er mange udregninger, vi kan lave med potenser, men der er en enkelt udregning, der ikke giver mening, nemlig

$$0^0$$

her er resultatet ikke defineret, det vil sige, at vi ikke kan give udregningen et tal som resultat. Så hvad går galt? Hvis vi lader som om, at 0^0 gav et resultat, så kunne vi lave følgende udregning:

$$\frac{2^0}{0^0} = \left(\frac{2}{0}\right)^0$$

Her har vi benyttet regneregel 2.12. Det, der står i parentesen, giver ikke mening. Det er *forbudt* at dividere med nul! Det betyder, at vi ikke kan sige, hvad 0^0 giver, og det er derfor udefineret.

2.6. Teori for eksponentielle funktioner

I eksempel 2.14 på side 33, så vi på den eksponentielle funktion

$$f(x) = 200 \cdot 1{,}1^x$$

Det der kendetegnede denne funktion, var at hver gang x voksende med en, så voksende funktionsværdierne $f(x)$ med 10%. Vi ved fra tidligere, at der lægges 10% til ved at gange med 1,1. Det vil sige, at hvis vi skulle forstørre x med 4, så skulle vi gange 4 gange med 1,1, men det svare til at gange med $1{,}1^4$. Det kan vi vise på følgende tabel.

+4

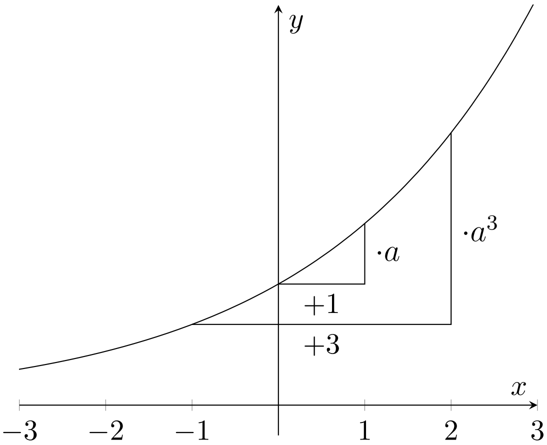
+1 +1 +1 +1

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	200	220	242	264,2	292,82

$\cdot 1{,}1$ $\cdot 1{,}1$ $\cdot 1{,}1$ $\cdot 1{,}1$

$\cdot 1{,}1^4$

Faktisk gælder det helt generelt. Hvis x vokser med 4, så svare det til at gange funktionsværdien med a^4. Tabellen neden for viser det mere generelle tilfælde.



Figur 2.3. Grafisk illustration af situationerne, hvor der lægges en og tre til et førstekoordinat og ganges med a og a^3 i andenkoordinaten.

$+4$

$+1 \quad +1 \quad +1 \quad +1$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$

$\cdot a \quad \cdot a \quad \cdot a \quad \cdot a$

$\cdot a^4$

Figur 2.3 viser det samme som tabellerne. Her er det dog tre, der lægges til x i ene tilfælde.

Denne egenskab ved eksponentielle funktioner kan vi nu bevise. Vi vil anvende potensregnereglerne fra sidste afsnit.

Sætning 2.25. *Hvis $f(x) = b \cdot a^x$ er en eksponentiel funktion, og h er et tal, så gælder det*

$$f(x+h) = f(x) \cdot a^h$$

Bevis. Beviset er en af udregning af $f(x+h)$.

$$f(x+h) = b \cdot a^{x+h}$$

Potensregneregel 2.5:

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{b \cdot a^x}_{f(x)} \cdot a^h \\
&= f(x) \cdot a^h
\end{aligned}
$$

□

Vi påstod, at grafen for en eksponentiel funktion går igennem punktet $(0, b)$. Eller sagt anderledes, at grafen skær andenaksen i b. Det kan vi let vise. Da $x = 0$, så kan vi indsætte det i formlen for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= b \cdot a^0 \\
&= b \cdot 1 \\
&= b
\end{aligned}
$$

Her har vi benyttet regneregel 2.9. Det vil sige, at når $x = 0$, så er $f(0) = b$, og grafen for f går igennem $(0, b)$.

Vi er også i stand til at bevise formlen for beregning af a ud fra to punkter.

Sætning 2.26. *Hvis punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er givet, hvor $x_1 \neq x_2$ og $y_1, y_2 > 0$, så eksisterer der en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$, hvis graf går igennem de to punkter, og a kan beregnes ved:*

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

Og b kan beregnes ved:

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Bemærkning 2.27. Der er to krav til første- og andenkoordinaterne. Det første krav $x_1 \neq x_2$ er nødvendigt, fordi hvis $x_1 = x_2$, så ville de to punkter ligge lodret over hinanden, og der findes ingen funktion, der så ville passe. Kravet om at $y_1, y_2 > 0$ er nødvendigt, fordi vi kræver at eksponentielle funktioner har $a, b > 0$, og derfor kun antager positive funktionsværdier.

Bevis. Antag, at punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) opfylder kravene i sætningen. Hvis der findes en eksponentiel funktion, hvis graf går igennem de to punkter, så gælder:

$$
\begin{aligned}
f(x_1) &= b \cdot a^{x_1} = y_1 \\
f(x_2) &= b \cdot a^{x_2} = y_2
\end{aligned}
$$

Vi isolerer b i den første linje:

$$\begin{aligned} b \cdot a^{x_1} &= y_1 \\ b &= \frac{y_1}{a^{x_1}} \end{aligned}$$

Dette giver os beviset for b. Vi indsætter dette i anden ligning:

$$\begin{aligned} b \cdot a^{x_2} &= y_2 \\ \frac{y_1}{a^{x_2}} \cdot a^{x_2} &= y_2 \\ \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} &= \frac{y_2}{y_1} \end{aligned}$$

Potensregneregel 2.6:

$$\begin{aligned} a^{x_2 - x_1} &= \frac{y_2}{y_1} \\ a &= \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \end{aligned}$$

Dette giver formlen for a. Dermed findes der en eksponentiel funktion, hvis graf går igennem punkterne. $\square$

Logaritmer

Dette kapitel introducerer en familie af funktioner kaldet logaritmer. Vi begynder med titalslogaritmen, som har anvendelse i naturvidenskab i forbindelse med richter-skalaen (jordskælv), pH-skalaen (kemi), og decibelskalaen (lyd).

Vi introducerer så logaritmer generelt, og viser deres store anvendelsesmuligheder inden for løsning af ligninger.

Derefter viser vi en sammenhæng mellem logaritmer og eksponentielle funktioner, og det der kaldes et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.

Til sidst introducerer vi en vigtig logaritme, den såkaldt naturlige logaritme. Her vil vi også støde på Eulers tal e.

3.1. Titalslogaritmen

I forrige kapitel var vi inde på, at potensen og rødder er hinandens omvendte. Hvilket vi kunne bruge til at bestemme grundtallet i en ligning som $x^3 = 27$. Men hvad nu hvis vi skal bestemme eksponenten. Det vil sige, at ligningen kunne komme til at se sådan ud

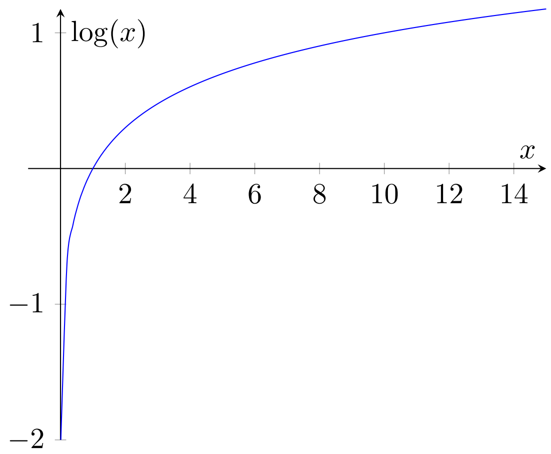
$$3^x = 27$$

I et sådant tilfælde vil vi måske kunne gætte os til, at $x = 3$ løser ligningen. Men vi vil gerne kunne gøre det helt generelt. Så vi er ude på at finde det modsatte af f.eks. 3^x. Vi vil dog begynde med

$$10^x$$

Det omvendte til den funktion vil vi kalde titalslogaritmen

$$\log(x), \qquad x > 0$$



Figur 3.1. Grafen for titalslogaritmen $\log(x)$.

At de to funktioner er omvendte af hinanden, betyder følgende:

$$\log\left(10^x\right) = x \quad \text{og} \quad 10^{\log(x)} = x$$

Det vi skrev efter $\log(x)$, nemlig $x > 0$ er en angivelse af hvilke værdier det er tilladt at sætte ind i en logaritme. Vi må kun sætte *positive* tal ind i en logaritme. Vi siger at logaritmens *definitionsmængde* er de positive tal.

Bemærkning 3.1 (gammeldags notation)**.** I ældre tekster om matematik kan vi finde skrivemåden $\log 3$, hvor der mangler parenteser. Denne skrivemåde er uheldig. Dels fordi den ikke kan bruges på moderne lommeregnere og computere, og dels fordi den skjuler, at det er en funktion, vi har med at gøre. Støder man på notationen, så skal man huske selv at sætte parenteserne.

Titalslogaritmen har den særlige egenskab, at den tæller antallet af nuller i for eksempel 1000. Generelt har vi:

$$\begin{aligned} \log(0{,}0001) &= -4 & \log(10000) &= 4 \\ \log(0{,}001) &= -3 & \log(1000) &= 3 \\ \log(0{,}01) &= -2 & \log(100) &= 2 \\ \log(0{,}1) &= -1 & \log(10) &= 1 \\ \log(1) &= 0 \end{aligned}$$

Særligt kan vi se, at selvom vi ikke må sætte negative tal ind i en logaritme, så kan logaritmen godt give et negativt resultat.

På figur 3.1 har vi tegnet grafen for titalslogaritmen. Det er en voksende funktion, men den vokser meget langsomt. For eksempel skal vi helt ud til

100 på førsteaksen, før vi kommer op til 2 på andenaksen. Og vi skal ud til 1000 på førsteaksen for at komme op på 3 på andenaksen!

Der findes mange anvendelser af titalslogaritmen. Den indgår for eksempel i richter-skalaen, i pH-skalaen og i decibelskalaen.

Eksempel 3.2 (decibelskalaen)**.** Decibelskalaen måler styrken af lyd. For eksempel måles almindelig samtale på skalaen til at ligge imellem 60 og 70 decibel, mens en motorsav kan larme op til 110 decibel. At hviske kan gøres ved 25 decibel.

Decibel måles ved at måle en kraft P, og den forholder man til en referencekraft P_0. Decibel er så defineret ved formlen:

$$db = 10 \cdot \log\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

Normalt siger man, at hvis lyden bliver dobbelt så kraftig så stiger decibel med 3. Det er faktisk ikke svært at vise. Hvis P er det dobbelte af P_0, så gælder $P = 2 \cdot P_0$. Hvis vi indsætter det i formlen, så får vi, da $\log(2) \approx 0{,}3$

$$10 \cdot \log\left(\frac{P}{P_0}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{2P_0}{P_0}\right) = 10 \cdot \log(2) \approx 10 \cdot 0{,}3 = 3$$

Argumentet kan godt gøres mere generelt og præcist end det ovenstående.

3.2. Logaritmer og ligninger

Vi vil nu introducere logaritmer generelt, for der er visse egenskaber alle logaritmer deler.

Definition 3.3. Lad a være et positivt tal med $a \neq 1$, så er logaritmen med grundtal a (a-talslogaritmen) den funktion

$$\log_a(x), \qquad x > 0$$

som opfylder

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(x)} = x$$

Hvis $a = 10$ kaldes logaritmen med grundtal 10 for titalslogaritmen, og vi skriver den som log.

Bemærkning 3.4 (totalslogaritmen)**.** I datalogi, hvor man arbejder med computere har man ofte brug for totalslogaritmen. Den har fået notationen

$$\lg(x)$$

fordi den anvendes så ofte.

Der er med andre ord uendelig mange logaritmer, en for hvert positive tal ($a \neq 1$). Logaritmer har også en række egenskaber til fælles, den vigtigste er, at de kan løse ligninger. Egenskaber skriver vi ned i en sætning, som ikke bevises her.

Sætning 3.5. *Hvis logaritmen med grundtal a er givet ved* $\log_a(x)$*, så gælder følgende for alle a.*

$$\log_a(1) = 0 \tag{3.1}$$

$$\log_a(a) = 1 \tag{3.2}$$

$$\log_a(p \cdot q) = \log_a(p) + \log_a(q) \tag{3.3}$$

$$\log_a\left(\frac{p}{q}\right) = \log_a(p) - \log_a(q) \tag{3.4}$$

$$\log_a\left(p^x\right) = x \cdot \log_a(p) \tag{3.5}$$

Det er især den sidste regel, som kan anvendes til at løse ligninger.

Eksempel 3.6. Vi ønsker at løse ligningen

$$3^x = 27$$

Ligningen kan løses ved at anvende titalslogaritmen på begge sider af lighedstegnet. Dog skal vi lige se, at begge sider er positive for ellers dur en logaritme ikke. 3^x er en eksponentiel funktion, og de er positive, og det er 27 også. Så vi gør følgende:

$$\begin{aligned} 3^x &= 27 \\ \log\left(3^x\right) &= \log(27) \\ x \cdot \log(3) &= \log(27) \\ x &= \frac{\log(27)}{\log(3)} = 3 \end{aligned}$$

Det sidste resultat spørger vi en lommeregner om. Vi kunne også have benyttet tretalslogaritmen $\log_3$.

$$\begin{aligned} 3^x &= 27 \\ \log_3\left(3^x\right) &= \log_3(27) \\ x &= \log_3(27) = 3 \end{aligned}$$

Her har vi benyttet at $\log_a(a^x) = x$. For at kunne bruge denne teknik skal vi kunne beregne $\log_3(27)$, hvilket måske er noget svært på en almindelig lommeregner.

Eksempel 3.7. Vi kan løse ligninger, der stammer fra eksponentielle funktioner. Hvis vi har funktionen

$$f(x) = 200 \cdot 1{,}1^x$$

og ligningen

$$f(x) = 1000$$

så kan vi løse den på følgende måde.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1000 \\
200 \cdot 1{,}1^x &= 1000 \\
1{,}1^x &= \frac{1000}{200} \\
\log\left(1{,}1^x\right) &= \log\left(\frac{1000}{200}\right) \\
x \cdot \log(1{,}1) &= \log\left(\frac{1000}{200}\right) \\
x &= \frac{\log\left(\frac{1000}{200}\right)}{\log(1{,}1)} = \frac{\log(5)}{\log(1{,}1)} \approx 16{,}886
\end{aligned}$$

Udregningen er noget lang men ikke umulig. Faktisk giver den en generel metode til at løse eksponentielle ligninger. Lad os isolere x i følgende:

$$\begin{aligned}
y &= b \cdot a^x \\
\frac{y}{b} &= a^x \\
\log\left(\frac{y}{b}\right) &= \log\left(a^x\right) \\
\log\left(\frac{y}{b}\right) &= x \cdot \log(a) \\
\frac{\log\left(\frac{y}{b}\right)}{\log(a)} &= x
\end{aligned}$$

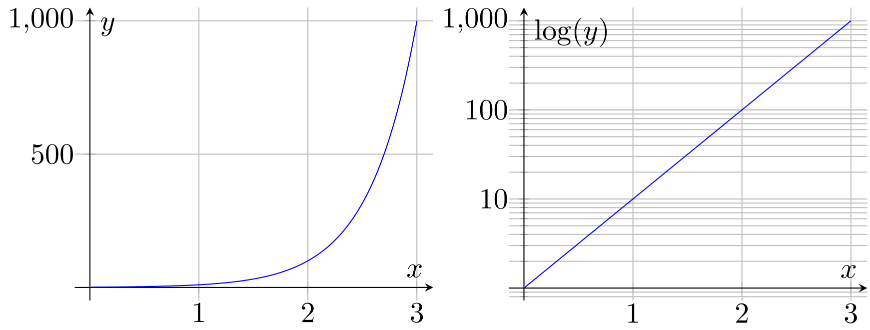
3.3. Enkeltlogaritmisk koordinatsystem

Eksponentielle funktioner kan vokse meget hurtigt, hvorfor det kan være vanskeligt nogen gange at se på og aflæse en graf for en eksponentiel funktion. Især hvis man både har brug for at aflæse små og store anden koordinater. Det viser sig, at der er en metode til at få bedre overblik over en eksponentiel funktion.

Hvis vi tager logaritmen til funktionsværdierne for en eksponentiel funktion, så bliver dens graf til en ret linje. Se figur 3.2. Inddelingen af andenaksen ændre sig, så og man skal tage sig i agt, når der aflæses. Koordinatsystemet, hvor der er taget logaritmer af funktionsværdierne, kaldes for et *enkeltlogaritmisk koordinatsystem*

Der er en forholdsvis simpel udregning, der viser, at eksponentielle funktioners graf bliver til ret linje, når vi tager logaritmen til funktionsværdierne. Udgangspunktet er den eksponentielle funktion:

$$y = b \cdot a^x$$



Figur 3.2. To tegninger af 10^x, tegningen til venstre er det normale. Det kan være svært at aflæse andenkoordinater, når x er mellem 0 og 1. I koordinatsystemet til højre er der taget logaritmen til 10^x. Bemærk, hvordan andenaksen er inddelt, og at der ikke er samme afstand imellem hver markering på aksen.

Vi tager logaritmen på begge sider af lighedstegnet

$$\log(y) = \log\left(b \cdot a^x\right)$$

Fra logaritmeregneregel 3.3:

$$\log(y) = \log(b) + \log\left(a^x\right)$$

Fra logaritmeregneregel 3.5:

$$\log(y) = \log(b) + x \cdot \log(a)$$
$$\log(y) = \log(a) \cdot x + \log(b)$$

Det sidste udtryk er en lineær funktion med hældning $\log(a)$ og begyndelsesværdi $\log(b)$. Lineære funktioner har en graf, der er en ret linje, hvorfor grafen for en eksponentiel funktion i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem også er en ret linje.

Bemærkning 3.8. Før computere blev almindelige, benyttede man i naturvidenskab det, der kaldes enkeltlogaritmisk papir. Hvis ens målinger næsten lå på en ret linje i på et sådant papir, så kunne man anvende en eksponentiel model til at beskrive data. Det gør man ikke mere, men grafer og målinger, kan ofte blive illustreret i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem for at give et godt overblik.

3.4. Den naturlige logaritme

Der en særlig logaritme, som vi er nødt til at beskrive. Den kaldes *den naturlige logaritme*. Den skrives som $\ln(x)$.

Bemærkning 3.9 (en almindelig fejl)**.** Udtrykket $\ln(x)$ bliver ofte læst forkert som $in(x)$. Det første bogstav i $\ln(x)$ er et lille L.

Ovenfor har vi beskrevet, hvordan logaritmer er defineret ud fra et grundtal, så hvad er grundtallet for den naturlige logaritme? Grundtallet for den naturlige logaritme er et tal, der er opkaldt efter Leonhard Euler (1707-1783). Det kaldes Eulers tal, og har bogstavet e, og er ca. lig med:

$$e \approx 2{,}718281828459\ldots$$

Dermed er den naturlige logaritme defineret som:

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

Den naturlige logaritme opfylder alle de samme regneregler som alle andre logaritmer. Det er ofte normalt at definere de andre logaritmer ud fra den naturlige logaritme:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Det er noget kedelig øvelse at vise, at det definerer alle logaritmer. Så det vil vi ikke gøre her.

Den omvendte funktion til $\ln(x)$ er e^x, hvor e er tallet fra før. Dermed opfylder de to funktioner:

$$\ln\left(e^x\right) = x \quad \text{og} \quad e^{\ln(x)} = x$$

Hvilket fører os frem til en sidste anvendelse af den naturlige logaritme, nemlig at den kan anvendes til at definere, hvad vi for eksempel mener med 2^π. Da vi har, at $e^{\ln(x)} = x$, så kan vi indsætte 2^π på x. Så får vi

$$e^{\ln(2^\pi)} = 2^\pi$$

Fra logaritmeregneregel 3.5 kan vi skrive:

$$e^{\pi \cdot \ln(2)} = 2^\pi$$

Dermed vil vi definere, hvad vi forstår ved en potens med en *generel* eksponent:

$$a^x = e^{x \cdot \ln(a)}, \quad a > 0$$

Her er vi nødt til at kræve, at $a > 0$, for ellers giver udtrykket $\ln(a)$ ikke mening. Igen er det kedelig opgave at vise, at potenser defineret på denne måde faktisk opfylder potensregnereglerne. Så det vil vi ikke gøre.

Kapitel 4

Eksponentielle funktioner II

I dette kapitel vil vi færdiggøre vores behandling af eksponentielle funktioner. Vi begynder med at introducere den naturlige eksponentielle funktion, som typisk anvendes i naturvidenskab.

Derefter beskriver vi en særlig egenskab ved eksponentielle funktioner, nemlig tilstedeværelsen af en konstant kaldet enten fordoblings- eller halveringskonstanten, alt efter om funktionen er voksende eller aftagende.

Til sidst introducerer vi et begreb, som vil gå igen i disse noter, nemlig væksthastighed.

4.1. Den naturlige eksponentialfunktion

I kapitlet om logaritmer introducerede vi den naturlige logaritme, som er logaritmen med Eulers tal som grundtal. I naturvidenskab og i matematik er det normalt at anvende Eulers tal som udgangspunktet for eksponentielle funktioner. Det skyldes dels, at der er visse ting, der bliver lettere, men også at Eulers tal dukker op igen og igen.

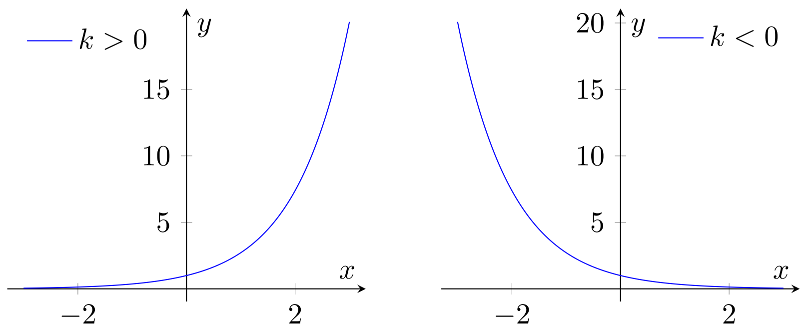
Definition 4.1 (Naturlig eksponentialfunktion)**.** Ved den naturlige eksponentialfunktion forstås funktionen

$$f(x) = e^x$$

hvor $e \approx 2{,}718281828459\ldots$ er Eulers tal En eksponentiel funktion kan skrives

$$f(x) = b \cdot e^{kx}$$

hvor $k \neq 0$ er et vilkårligt tal, og konstanten b betegnes begyndelsesværdien.



Figur 4.1. Graferne for henholdsvis en voksende naturlig eksponentiel funktion $k > 0$ til venstre, og en aftagende naturlig eksponentiel funktion $k < 0$ til højre.

For de almindelige eksponentielle funktioner gælder det, at når $a > 1$, så vokser funktionen, og når $0 < a < 1$, så aftager funktionen. For de eksponentielle funktioner baseret på e er det således, at det er k, der afgør om funktionen er voksende eller aftagende. Når $k > 0$, så vokser funktionen, og når $k < 0$, så aftager funktionen (se figur 4.1). Med andre ord så opfører k sig mere som hældningen i en lineær funktion.

Eksempel 4.2. Hvis vi har funktionen

$$f(x) = 234 \cdot e^{0{,}5 \cdot x}$$

så er $b = 234$, og $k = 0{,}5$. Denne funktion er voksende.

Hvis vi har funktionen

$$g(x) = 432 \cdot e^{-0{,}75 \cdot x}$$

så er $b = 432$, og $k = -0{,}75$. Denne funktion er aftagende.

Vi kan ofte have behov for at regne frem og tilbage mellem de almindelige og naturlige eksponentielle funktioner. Med andre ord, vi ønsker at kunne omforme mellem

$$f(x) = b \cdot e^{kx}$$

og

$$g(x) = b \cdot a^x$$

Vi ser straks, at der ikke er behov for at gøre noget ved b, det er det samme tal i begge funktioner. Derimod skal vi omregne e^{kx} til a^x. Vi har en potensregneregel, der siger, at $a^{pq} = (a^p)^q$. Vi kan anvende den regel på e^{kx}:

$$e^{k \cdot x} = \left(e^k\right)^x$$

Dermed må det gælde, at

$$a = e^k$$

En umiddelbar konsekvens af den formel er, at vi kan se, at når $k > 0$, så er $e^k > 1$. Derimod, når $k < 0$, så gælder det, at

$$e^{-k} = \frac{1}{e^k} < 1$$

Det vil sige, at kendetegnene for hvornår $f(x) = b \cdot a^x$ vokser eller aftager, afhænger af de tilsvarende kendetegn for e^{kx}.

Vi kan også regne den anden vej. Hvis vi kender a, så kan vi beregne k. Vi løser ligningen $a = e^k$.

$$\begin{aligned} a &= e^k \\ \ln(a) &= \ln\left(e^k\right) \\ \ln(a) &= k \end{aligned}$$

Her benytter vi, at $\ln(x)$ og e^x er hinandens omvendte funktioner. Det vil sige, at

$$a = e^k \qquad k = \ln(a)$$

Eksempel 4.3. I eksempel 4.2 havde vi funktionen

$$f(x) = 234 \cdot e^{0{,}5x}$$

Her kan vi aflæse, at $k = 0{,}5$, og dermed er $a = e^{0{,}5} = 1{,}64872$. Dermed bliver den omskrevne funktion til

$$f(x) = 234 \cdot 1{,}64872^x$$

Hvis vi har funktionen

$$g(x) = 75 \cdot 0{,}88^x$$

så kan vi omregne: $k = \ln(0{,}88) = -0{,}12783$. Dermed bliver den omskrevne funktion til

$$g(x) = 75 \cdot e^{-0{,}12783x}$$

4.2. Fordoblings- og halveringstid

Eksponentielle funktioner har en særlig egenskab kaldet fordoblingstid eller halveringstid (alt efter om funktionen vokser eller aftager).

Eksempel 4.4 (Fordoblingstid)**.** Vi forestiller os, at vi har en gryde med lunken sovs. I den gryde er der også en bakterie af den ubehagelige slags. Da sovsen har en, for bakterien god, temperatur, og der er rigeligt med næring, så vil bakterien dele sig i to på et tidspunkt. Med andre ord, vi går fra en bakterie til to bakterier, og antallet af bakterier er blevet fordoblet. Den tid, det tager, er præcis den samme som, hvis vi begyndte med en million bakterier, og ventede til der var to millioner bakterier. Tiden det tager for antallet af bakterier at blive fordoblet afhænger ikke af, hvor mange bakterier vi begynder med.

Den grundlæggende idé i fordoblingstiden er, hvis vores førstekoordinat vokser med f.eks. 3, så bliver funktionsværdien fordoblet.

$+3 \quad +3 \quad +3 \quad +3$

x	0	3	6	9	12
$f(x)$	5	10	20	40	80

$\cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2$

I den ovenstående tabel vokser førstekoordinaterne med 3, mens funktionsværdierne bliver fordoblet. Vi siger, at fordoblinstiden er $T_2 = 3$. Se figur 4.2 for en grafisk illustration.

Eksempel 4.5 (Halveringstid)**.** Hvis vi forestiller os, at vi har to radioaktive atomer, så vil der gå noget tid, og så vil en af atomerne henfalde, og vi har et atom tilbage. Den tid, det tager for atomerne at blive halvt så mange, kaldes halveringstiden. Hvis der er to millioner atomer, så vil tiden det tager for atomerne til at henfalde til en million atomer være den samme som fra to til et atom. Tiden, det tager for atomerne at blive halvt så mange, afhænger ikke af det antal atomer vi begynder med. Det vil altid være den samme tid

Den grundlæggende idé i halveringstiden er, hvis vores førstekoordinat f.eks. vokser med 5, så bliver funktionsværdien halveret.

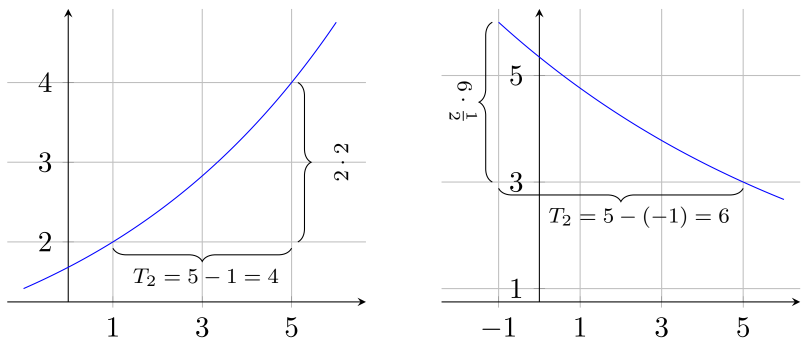
$+5 \quad +5 \quad +5 \quad +5$

x	0	5	10	15	20
$f(x)$	64	32	16	8	4

$\cdot\frac{1}{2} \quad \cdot\frac{1}{2} \quad \cdot\frac{1}{2} \quad \cdot\frac{1}{2}$

I den ovenstående tabel vokser vores førstekoordinat med 5, mens funktionsværdierne bliver halveret. Vi siger, at halveringstiden er $T_{1/2} = 5$. Se figur 4.2 for en grafisk illustration.

Hvis vi har en tabel som ovenfor eller en graf som i figur 4.2, så kan vi være heldige, at det er let at aflæse en fordoblings- eller halveringstid. Generelt vil vi gerne kunne bruge en formel til at regne tiderne ud. Da det vil være mest præcist.



Figur 4.2. Figuren til venstre viser en eksponentielt voksende graf. Der er indtegnet fordoblingen af andenkoordinater, og ændringen i førstekoordinater. Figuren til højre viser en eksponentiel aftagende graf. Der er indtegnet halveringen af andenkoordinater, og ændringen i førstekoordinater.

Hvis vores eksponentielle funktion er $f(x) = b \cdot a^x$, så har vi formlerne:

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)} \qquad T_{1/2} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(a)}$$

hvor T_2 er fordoblingstiden, og $T_{1/2}$ er halveringstiden.

Hvis vores eksponentielle funktion er $f(x) = b \cdot e^{kx}$, så har vi formlerne:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{k} \qquad T_{1/2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{k}$$

hvor T_2 er fordoblingstiden, og $T_{1/2}$ er halveringstiden.

Eksempel 4.6. Hvis antallet af bakterier i en sovs er givet ved

$$f(x) = 45 \cdot 1{,}12^x$$

hvor $f(x)$ er antallet af bakterier efter x timer, så kan vi beregne fordoblingstiden til:

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)} = \frac{\log(2)}{\log(1{,}12)} \approx 6{,}12$$

Dermed er antallet af bakterier fordoblet efter ca. 6 timer.

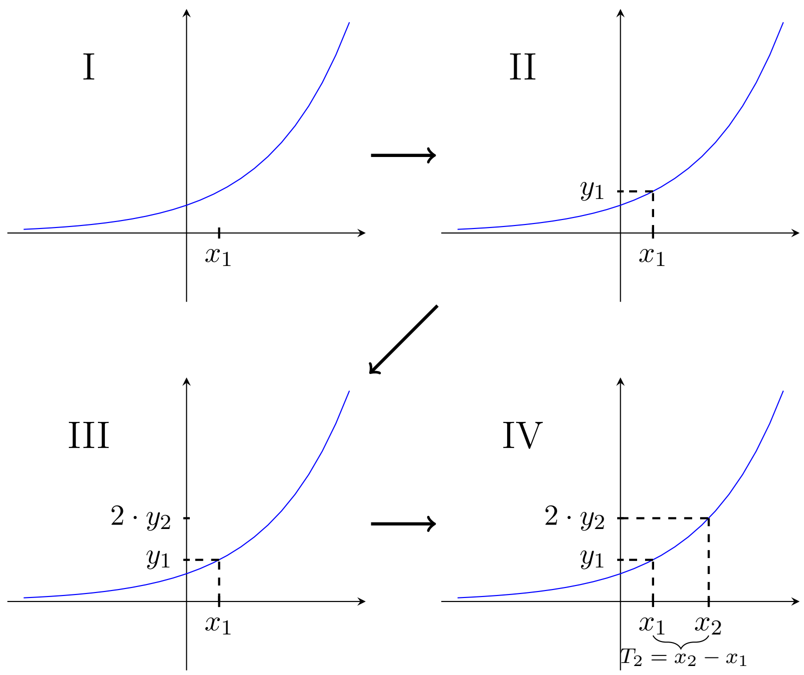
Hvis antallet af radioaktive atomer er givet

$$g(x) = 16000 \cdot e^{-0{,}05x}$$

hvor $f(x)$ er antallet af atomer efter x timer, så er halveringstiden:

$$T_{1/2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{k} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{0{,}05} \approx 13{,}86$$

Dermed er antallet af atomer halveret efter ca. 14 timer.



Figur 4.3. Figuren viser de fire trin, der er forbundet med at bestemme en fordoblingstid.

Måden, hvorpå vi ville aflæse en fordoblingstid, giver en idé til, hvordan formlerne for fordobling- og halvering kan bevises. Hvis vi ser på figur 4.3, så består fremgangsmåden af fire trin.

I Vælg et førstekoordinat x_1.

II Bestem det tilsvarende andenkoordinat y_1

III Gang andenkoordinatet y_1 med to og find placering af $2 \cdot y_2$.

IV Bestem førstekoordinatet x_2 til $2 \cdot y_1$, og beregn fordoblingstiden $T_2 = x_2 - x_1$

Dette kan vi nu anvende til at bevise:

Sætning 4.7. *Hvis $f(x) = b \cdot a^x$ er en eksponentiel funktion, så er fordoblingstiden for f givet ved:*

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Bevis. Vi vælger et punkt (x_1, y_1) på grafen for f. Vi ganger andenkoodinaten med 2, og får et nyt punkt $(x_2, 2 \cdot y_1)$ på grafen for f. Da punkterne ligger på grafen gælder følgende:

$$\begin{aligned} 2 \cdot y_1 &= b \cdot a^{x_2} \\ y_1 &= b \cdot a^{x_1} \end{aligned}$$

Vi dividerer de to formler med hinanden:

$$\begin{aligned} \frac{2y_1}{y_1} &= \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}} \\ 2 &= \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} \\ 2 &= a^{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

Ud fra vores konstruktion ved vi, at $T_2 = x_2 - x_1$. Så det indsætter vi i den sidste formel, og isolerer T_2.

$$\begin{aligned} 2 &= a^{T_2} \\ \log(2) &= \log\left(a^{T_2}\right) \\ \log(2) &= T_2 \cdot \log(a) \\ \frac{\log(2)}{\log(a)} &= T_2 \end{aligned}$$

Hvilket vi skulle vise. □

Bemærkning 4.8. I beviset oven for har vi benyttet titalslogaritmen, men vi kunne lige så godt have valg den naturlige logaritme. Så ville vore formel have set således ud:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

Hvis vi har en eksponentiel funktion på formen $f(x) = b \cdot e^{kx}$, så kan vi bruge ovenstående formel, når vi husker, at $a = e^k$. Dermed får vi:

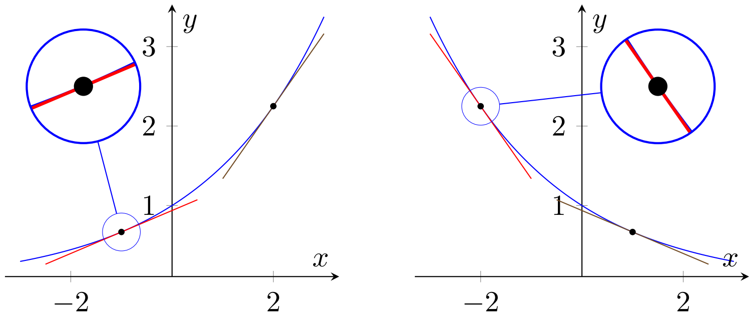
$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(e^k)} = \frac{\ln(2)}{k}$$

Hvilket er den anden formel for fordoblingstid.

Beviserne for halveringstid foregår på samme måde som det ovenstående bevis, andenkoordinaten ganges blot med $\frac{1}{2}$ i stedet for 2.

4.3. Væksthastighed

En eksponentiel funktion vokser med en konstant andel i %. Så hvis der er 100 kr på en konto til 10% i rente pr. år, så vokser beløbet til 110 kr. Hvis der derimod er 1.000.000 kr. på en konto til 10% i rente pr. år, så vokset beløbet til 1.100.000 kr. I det første tilfælde er den absolutte ændring 10 kr på et år, i det andet til er det 100.000 kr på et år. Denne forskel



Figur 4.4. Figuren viser en voksende (venstre) og en aftagende (højre) eksponentiel graf. På hver graf er der udvalgt to punkter, og der er tegnet to linjestykker der tangerer grafen i punkterne. På hver graf er der valgt et punkt, som der zoomes ind på.

betyder, at eksponentielle funktioner ikke vokser (eller aftager) med den samme hastighed.

Det ovenstående indledende eksempel illustrerer det begreb, der kaldes væksthastighed. Væksthastighed er et udtryk for, hvor meget en størrelse ændrer sig til et bestemt tidspunkt. Hvor stor ændringen er vil vi opfatte som hældningen i et punkt. På figur 4.4 er der tegnet en voksende og en aftagende eksponentiel graf. I to punkter på hver graf er der afsat et linjestykke, der har samme hældning som grafen i det givne punkt. På hver graf zoomes der ind på et af punkterne, og vi kan se, at linjestykket er ikke til at skelne fra grafen. Vi siger, at linjestykket *tangerer* grafen, og at linjen, linjestykket er en del af, er en tangent.

Vi vil nu definere, hvad væksthastigheden for en funktion er.

Definition 4.9. Lad f være en funktion, og lad $(x_0, f(x_0))$ være et punkt på grafen for f, så er væksthastigheden, når $x = x_0$, et tal skrevet som $f'(x_0)$ (læses som f-mærke af x_0), der angiver hældningen af grafen for f i punktet $(x_0, f(x_0))$.

Definitionen introducerer f' (læses som f-mærke), som også kaldes den afledte funktion af f. Formålet med f' er at få en funktion, der angiver hældninger i stedet for funktionsværdier. Således regner f' noget andet ud end f.

For at kunne beregne en væksthastighed, så skal vi omforme vores funktion. Den proces kaldes at *differentiere*. Vi giver nogle regneregler, som vi bagefter viser, hvordan anvendes. På venstre side af tabellen kan vi slå det op, som vores funktion ligner, og på højre side af tabellen står der, hvad funktionen skal laves om til.

f	f'
e^x	e^x
e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Eksempel 4.10 (e^x)**.** Hvis vores funktion hedder

$$f(x) = e^x$$

så kan vi finde det til venstre i tabellen, og se, at det skal laves om til

$$f(x) = e^x$$

Med andre ord, er der ikke sket noget. Det er derfor e^x bliver kaldt den naturlige eksponentialfunktion, fordi den opfører sig meget pænt.

Eksempel 4.11 (e^{kx})**.** Hvis vores funktion hedder

$$f(x) = e^{3x}$$

så kan vi finde det til venstre i tabellen, og se, at det ligner e^{kx}, hvor $k = 3$. Det skal laves om til $k \cdot e^{kx}$, eller når $k = 3$

$$f'(x) = 3 \cdot e^{3x}$$

Eksempel 4.12 (a^x)**.** Hvis vores funktion hedder

$$f(x) = 0{,}65^x$$

så kan vi finde det til venstre i tabellen, og se, at det ligner a^x med $a = 0{,}65$. Det skal laves om til $a^x \cdot \ln(a)$, eller når $a = 0{,}65$

$$f'(x) = 0{,}65^x \cdot \ln(0{,}65)$$

Eksempel 4.13 ($\ln(x)$)**.** Hvis vores funktion hedder

$$f(x) = \ln(x)$$

så kan vi finde det til venstre i tabellen, og se, at det skal laves om til

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

I vores eksempler på eksponentielle funktioner oven for har vi faktisk ikke en hel eksponentiel funktion. Vi mangler en b-værdi som i $f(x) = b \cdot a^x$. Men det er faktisk ikke svært at gøre noget ved. Der er en generel regneregel, hvis k er et tal (en konstant), og f er en funktion, så gælder:

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

Vi lader altså tallet stå, og ganger med f-mærke.

Eksempel 4.14. Vi har en eksponentiel funktion

$$f(x) = 72 \cdot e^{0,5x}$$

Vi ønsker at bestemme væksthastigheden, og gør følgende:

$$f'(x) = \left(72 \cdot e^{0,5x}\right)' = 72 \cdot \left(e^{0,5x}\right)' = 72 \cdot 0,5 \cdot e^{0,5x} = 36 \cdot e^{0,5x}$$

Dermed er $f'(x) = 36 \cdot e^{0,5x}$

Vi vil nu vise, hvordan væksthastighed kan anvendes til at sige noget om eksponentielle modeller.

Eksempel 4.15. I eksempel 2.16 på side 35 havde vi en model for BNP for et land givet ved

$$f(x) = 4205,7 \cdot 1,062^x$$

hvor $f(x)$ er BNP pr. person i dollar, x år efter 1966. Vi differentierer f, det vil sige, at vi beregner f'.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4205,7 \cdot 1,062^x)' \\ &= 4205,7 \cdot (1,062^x)' \\ &= 4205,7 \cdot 1,062^x \cdot \ln(1,062) \\ f'(x) &= 252,99 \cdot 1,062^x \end{aligned}$$

Vi kan nu beregne væksthastigheder for forskellige årstal. I år 1966:

$$f'(0) = 252,99 \cdot 1,062^0 = 252,99$$

Det vil sige, i år 1966 voksede BNP med 252,99 dollar pr. person pr. år.

I år 1990:

$$f'(24) = 252,99 \cdot 1,062^{24} \approx 1071,74$$

Det vil sige, i år 1990 voksede BNP med 1071,74 dollar pr. person pr. år.

I år 2010:

$$f'(44) = 252,99 \cdot 1,062^{44} \approx 3569,28$$

Det vil sige, i år 2010 voksede BNP med 3569,28 dollar pr. person pr. år.

Selvom der er forskellige væksthastigheder, så er *vækstraten* konstant 6,2% pr. år.

Eksempel 4.16. I eksempel 2.17 på side 36 havde vi en model for antallet af atomkerner givet ved:

$$f(x) = 1023,6 \cdot 0,95^x$$

hvor $f(x)$ angiver antallet af atomkerne efter x timer. Vi differentierer f, det vil sige, at vi beregner f'.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1023{,}6 \cdot 0{,}95^x)' \\ &= 1023{,}6 \cdot (0{,}95^x)' \\ &= 1023{,}6 \cdot 0{,}95^x \cdot \ln(0{,}95) \\ f'(x) &= -52{,}5 \cdot 0{,}95^x \end{aligned}$$

Vi kan nu beregne væksthastigheder for forskellige tidspunkter. Efter 0 timer:

$$f'(0) = -52{,}5 \cdot 0{,}95^0 = -52{,}5$$

Det vil sige, efter 0 timer så falder antallet af atomkerner med 52,5 kerner pr. time.

Efter 10 timer:

$$f'(10) = -52{,}5 \cdot 0{,}95^{10} \approx -31{,}4$$

Det vil sige, efter 10 timer så falder antallet af atomkerner med 31,4 kerner pr. time.

Efter 20 timer:

$$f'(20) = -52{,}5 \cdot 0{,}95^{20} \approx -18{,}8$$

Det vil sige, efter 20 timer så falder antallet af atomkerner med 18,8 kerner pr. time.

Selvom der er forskellige væksthastigheder, så er *vækstraten* konstant -5%.

Eftersom væksthastigheden angiver hældningen for en graf i et punkt, så kan den også fortælle om grafen vokser eller aftager. Hvis grafen har positiv hældning, så vokser den, og hvis grafen har negativ hældning, så aftager den.

Hvis vi ser på vores eksponentielle funktion

$$f(x) = b \cdot e^{kx}$$

så kan vi differentiere den, og få:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(b \cdot e^{kx}\right)' \\ &= b\left(e^{kx}\right)' \\ &= b \cdot k \cdot e^{kx} \end{aligned}$$

Det vil sige, at $f'(x) = b \cdot k \cdot e^{kx}$.

Vi forudsatte b er positiv, og potensen e^{kx} er også positiv. Så hvorvidt $f'(x)$ er positiv eller negativ afhænger udelukkende af k. Dermed, hvis $k > 0$

(k er positiv), så er f' positiv. Og den eksponentielle funktion f har positive hældninger alle steder. Derfor vokser den. Omvendt, hvis $k < 0$ (k er negativ), så er f' negativ. Og den eksponentielle funktion f har negative hældninger alle steder. Derfor aftager den.

Det samme argument kan laves for funktionen

$$f(x) = b \cdot a^x$$

her afhænger det bare af $\ln(a)$. Idet

$$f'(x) = b \cdot \ln(a) \cdot a^x$$

Hvis $0 < a < 1$, så er $\ln(a) < 0$, og f' er negativ. Og funktionen f aftager. Hvis $a > 1$, så er $\ln(a) > 0$, og f' er positiv. Og funktionen vokser.

Hermed har vi argumenteret for de påstande, vi kom med om udseendet på graferne for eksponentielle funktioner.

Kapitel 5

Potensfunktioner

Dette korte kapitel handler om potensfunktioner. Disse funktioner anvendes til at beskrive situationer, hvor lineære eller eksponentielle funktioner ikke helt slår til.

Vi vil begynde med at beskrive funktionen og give nogle eksempler. I den forbindelse vil vi se på de forskellige grafer for potensfunktioner.

Herefter vil vi se på, hvor vi kan bestemme en forskrift ud fra to punkter. Derefter vil vi behandle en vigtig vækstegenskab ved potensfunktioner, nemlig det, der kaldes "procent-procent"-vækst. Til sidst behandler vi væksthastigheden for en potensfunktion.

5.1. Definition og grafer

Forskriften for en potensfunktion ligner forskriften for en eksponentiel funktion, så de må ikke forveksles.

Definition 5.1 (Potensfunktion)**.** En potensfunktion er givet ved forskriften:

$$f(x) = b \cdot x^a, \qquad b, x > 0$$

Bogstaverne b og a hedder ikke noget særligt i en potensfunktion. Hvilket skyldes, at i modsætning til lineære og eksponentielle funktioner, så betyder b og især a ikke noget.

Vi giver et eksempel på en potensfunktion.

Eksempel 5.2. I biologi findes disciplinen aliometri, hvor man sammenligner kropsdele af et dyr. For eksempel har hannerne hos vinkekrabben en overdimensioneret klo, som blandt andet bruges til at kæmpe om hunnerne.

Vægten af kloen $f(x)$ og vægten af hele krabben x begge målt i mg er givet ved:

$$f(x) = 0{,}036 \cdot x^{1{,}356}$$

Dette illustrerer, at a sjældent er et helt tal.

Hvis krabben vejer 350 mg, så kan vi beregne vægten af kloen:

$$f(350) = 0{,}036 \cdot 350^{1{,}356} = 101{,}4 \text{ mg}$$

Hvis kloen vejer 50 mg, så vejer krabben:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}036 \cdot x^{1{,}356} \\ 50 &= 0{,}036 \cdot x^{1{,}356} \\ \frac{50}{0{,}036} &= x^{1{,}356} \\ \sqrt[1{,}356]{\frac{50}{0{,}036}} &= x \\ x &\approx 207{,}8 \end{aligned}$$

Det vil sige, at krabben vejer 207,8 mg.

Særligt interessant er det, når krabben vejer 1 mg. Så får vi

$$f(1) = 0{,}036 \cdot 1^{1{,}356} = 0{,}036 \text{ mg}$$

Hvilket indikerer, at b fortæller vægten af en krabbe på 1 mg.

Eksempel 5.3. For et pendul afhænger svingningstiden (tiden det tager at svinge frem og tilbage) af længden af snoren pendulet hænger i – i hvert fald når der er tale om ”små” udsving. En formel forsvingningstiden kan være:

$$f(x) = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

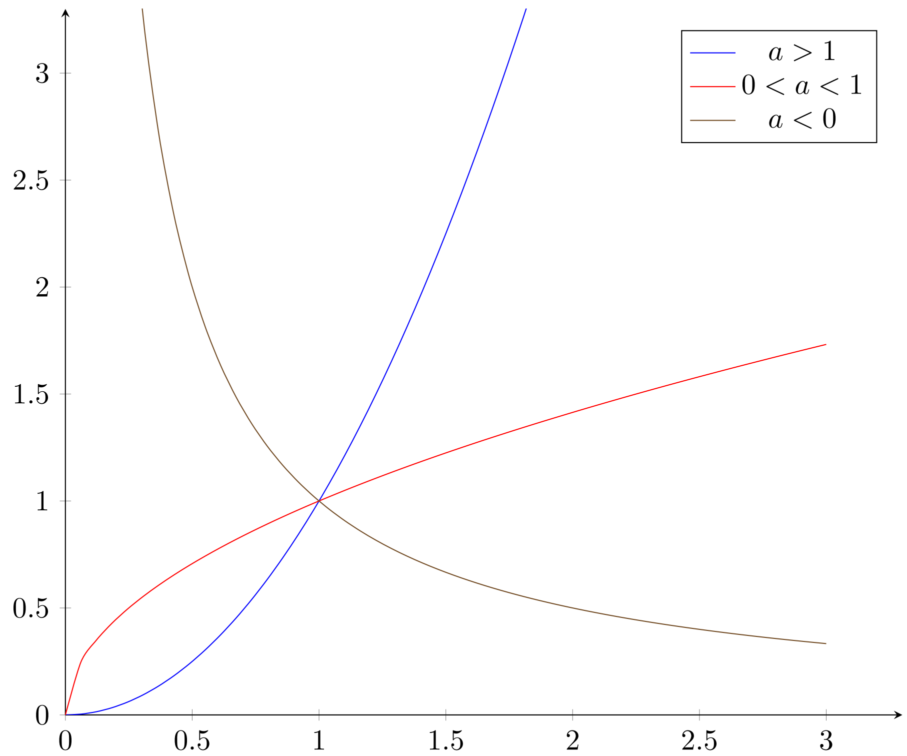
hvor $f(x)$ er svingningstiden i sekunder og x er længden af snoren i meter. Det særlige ved denne funktion er, at det er en skjult kvadratrod. Vi har en generel potensregneregel:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

så vi kan også skrive vores forskrift således:

$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$$

Dermed har vi en formel der er lettere at regne med. Hvis længden af snoren er $4m$, så er svingningstiden: $f(4) = 2 \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4s$. Derimod



Figur 5.1. Figuren viser de tre vigtige tilfælde for graferne af potensfunktioner. De to voksende grafer, hvor $a > 0$ og $0 < a < 1$, samt den aftagende graf, hvor $a < 0$. I alle tre tilfælde er $b = 1$, hvor alle graferne går igennem punktet $(1, 1)$.

hvis svingningstiden er 8 sekunder, så kan vi løse ligningen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cdot \sqrt{x} \\ 8 &= 2 \cdot \sqrt{x} \\ \frac{8}{2} &= \sqrt{x} \\ 4 &= \sqrt{x} \\ 4^2 &= \sqrt{x}^2 \\ 16 &= x \end{aligned}$$

Det vil sige, at snoren skal være 16 meter lang, for at svingningstiden er 8 sekunder.

Graferne for potensfunktioner, er noget mere bøvlede end for lineære og eksponentielle funktioner. Der er 5 forskellige tilfælde. Tre af tilfældene er vigtige og kan ses på figur 5.1.

Når $a < 0$ (dvs. a er negativ), så er grafen for en potensfunktion aftagende. Når $a > 0$ (dvs. a er positiv), så er grafen for en potensfunktion voksende. Der er to forskellige måder grafen kan vokse på. Hvis $0 < a < 1$ (dvs. hvis a ligger mellem 0 og 1), så bliver den hastighed grafen vokser med langsommere og langsommere desto større x bliver. Omvendt hvis $a > 1$ (dvs. a er større end 1), så stiger væksthastigheden desto større x bliver.

Der er 5 tilfælde, men vi har kun beskrevet de tre. De to sidste tilfælde er $a = 0$ og $a = 1$. Disse to tilfælde er ikke særligt brugbare ude i virkeligheden.

Hvis $a = 0$, så kan vi beregne $f(x) = b \cdot x^a$. Det gøres således:

$$f(x) = b \cdot x^0 = b \cdot 1 = b$$

Med andre ord, når $a = 0$, så er en potensfunktion en konstant funktion $f(x) = b$.

Hvis $a = 1$, så kan vi beregne $f(x) = b \cdot x^a$. Det gøres således:

$$f(x) = b \cdot x^1 = b \cdot x$$

Med andre ord, når $a = 1$, så er potensfunktion, en lineær funktion, med hældning b og ingen begyndelsesværdi $f(x) = bx$.

5.2. Topunktsformel

Lige som med lineære og eksponentielle funktioner, så findes der en formel for at beregne a, når vi kender to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) på grafen for en potensfunktion. Formlen er:

$$a = \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

Vi giver et eksempel:

Eksempel 5.4. Hvis vi har punkterne $(1, 3)$ og $(3, 27)$, så kan vi beregne a i potensfunktionen, hvis graf går igennem de to punkter:

$$a = \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

$$a = \frac{\log\left(\frac{27}{3}\right)}{\log\left(\frac{3}{1}\right)}$$

$$a = \frac{\log(9)}{\log(3)}$$

En lommeregner eller andet fortæller os, at det giver $a = 2$. Vi kan også regne det ud, hvis vi husker $9 = 3^2$

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\log(9)}{\log(3)} \\
a &= \frac{\log(3^2}{\log(3)} \\
a &= \frac{2 \cdot \log(3)}{\log(3)} \\
a &= 2
\end{aligned}$$

Tilsidst kan vi beregne b ved at indsætte et punkt i den generelle formel: $f(x) = b \cdot x^a$.

$$3 = b \cdot 1^2 \Leftrightarrow 3 = b \cdot 1 \Leftrightarrow 3 = b$$

Dermed er formlen vi mangler givet ved:

$$f(x) = 3 \cdot x^2$$

Vi beviser nu sætningen:

Sætning 5.5. *Hvis (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er to punkter i første kvadrant, med $x_1 \neq x_2$, så findes der en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^2$, hvis graf går igennem punkterne, og*

$$a = \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} \quad \text{og } b = \frac{y_1}{x_1^a}$$

Bevis. Hvis grafen for en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$, skal går igennem de to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2), så gælder følgende to ligninger:

$$\begin{aligned}
y_1 &= b \cdot x_1^a \\
y_2 &= b \cdot x_2^a
\end{aligned}$$

Vi dividerer de to formler med hinanden.

$$\begin{aligned}
\frac{y_2}{y_1} &= \frac{b \cdot x_2^a}{b \cdot x_1^a} && \\
\frac{y_2}{y_1} &= \frac{x_2^a}{x_1^a} && b \text{ går ud} \\
\frac{y_2}{y_1} &= \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a && \text{potensregneregel} \\
\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) &= \log\left(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a\right) && \text{tager logaritmen på begge sider} \\
\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) &= a \cdot \log\left(\frac{x_2}{x_1}\right) && \text{logaritmeregneregel} \\
a &= \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} && \text{dividerer}
\end{aligned}$$

Konstanten b beregnes:

$$\begin{aligned}
y_1 &= b \cdot x_1^a \\
\frac{y_1}{x_1^a} &= b
\end{aligned}$$

□

5.3. Procent-procent vækst

Potensfunktioner har en særlig egenskab, nemlig når den uafhængige variabel (x) ændres med en procent, så ændres den afhængige variabel (y) også med en procent. Denne egenskab kaldes "procent-procent"-vækst. Vi giver et eksempel:

Eksempel 5.6. Vinkekrabben, så vi tidligere, har en sammenhæng mellem klo- og kropsvægt. Givet ved

$$f(x) = 0{,}036 \cdot x^{1{,}356}$$

Hvis vi ønsker at få en krabbe til at veje 25% mere, så kan vi gange krabbens vægt med fremskrivningsfaktoren svarende til 25%. Den kan vi beregne til at være 1,25.

Nu vil vi gerne vide, hvor mange flere procent kloen kommer til at veje? Vægten af kloen er $f(x)$, og vægten af kloen for den krabbe, der vejer 25% mere er $f(x \cdot 1{,}25)$. Ændringen i procent er så:

$$\frac{f(x \cdot 1{,}25)}{f(x)} = \frac{0{,}036 \cdot (x \cdot 1{,}25)^{1{,}356}}{0{,}036 \cdot x^{1{,}356}} = \frac{0{,}036 \cdot x^{1{,}356} \cdot 1{,}25^{1{,}356}}{0{,}036 \cdot x^{1{,}356}} = 1{,}25^{1{,}356}$$

Med andre ord, så kan vi beregne kloen procentvækst ved at beregne

$$1{,}25^{1{,}356} - 1 \approx 0{,}35330$$

Eller $35,3\%$.

Eksemplet oven for er en kende besværligt, men vi kan bruge det til at udlede en formel, der kan benyttes til at beregne procent-procentvæksten:

Sætning 5.7. *For en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ gælder det, at en procentændring r_x af den uafhængige variabel medfører en procentændring r_y af den afhængige variabel, og sammenhængen imellem de to er givet ved:*

$$1 + r_y = (1 + r_x)^a$$

Bevis. Fremskrivningsfaktoren svarende til en vækst på r_x er givet ved: $1 + r_x$. Og fremskrivningsfaktoren svarende til en vækst på r_y er givet ved: $1+r_y$. Ændringen i den afhængige variabel givet en ændring i den uafhængige variabel kan beregnes som:

$$\begin{aligned}
(1 + r_y) \cdot f(x) &= f(x \cdot (1 + r_x)) \\
1 + r_y &= \frac{f(x \cdot (1 + r_x))}{f(x)} \\
&= \frac{b \cdot (x \cdot (1 + r_x))^a}{b \cdot x^a} \\
&= \frac{b \cdot x^a \cdot (1 + r_x)^a}{b \cdot x^a} \\
1 + r_y &= (1 + r_x)^a
\end{aligned}$$

□

Eksempel 5.8. Dermed kan det forrige eksempel skrives som:

$$1 + r_y = (1 + r_x)^a = 1 + r_y = (1 + 0{,}25)^{1{,}356} = 1{,}25^{1{,}356} = 1{,}3533$$

Det vil sige, $r_y = 1{,}3533 - 1 = 0{,}3533 = 35{,}33\%$.

5.4. Væksthastighed

Væksthastigheden for potensfunktioner er let at beregne, og det kan anvendes til at beskrive udseendet på graferne for potensfunktioner. Væksthastigheden for en potensfunktion $f(x) = x^a$ beregnes som $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$.

Eksempel 5.9. Hvis vi har funktionen: $f(x) = x^3$, så kan vi beregne væksthastigheden f' ved at se, at f ligner x^a, hvor $a = 3$. Dermed kan vi omskrive den til $a \cdot x^{a-1} = 3 \cdot x^{3-1} = 3 \cdot x^2$.

Hvis vi har funktionen $f(x) = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$, så følger den også regnereglen. Totallet foran x lader vi stå med et gange efter sig. I dette tilfælde er $a = \frac{1}{2}$, og vi kan omskrive til $\frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$. Dermed har vi

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

Eksempel 5.10. I eksemplet med krabben :

$$f(x) = 0{,}036 \cdot x^{1{,}356}$$

kan vi beregne væksthastigheden:

$$f'(x) = 0{,}036 \cdot 1{,}356 \cdot x^{1{,}356-1} = 0{,}0488 \cdot x^{0{,}356}$$

Vi kan så se, hvor hurtigt en krabbe på 100 mg vokser.

$$f'(100) = 0{,}0488 \cdot 100^{0{,}356} = 0{,}2515$$

Det vil sige, at kloen hos en 100 mg krabbe vokser med 0,2515 mg klo pr. mg kropsvægt.

Det sidste vi vil benytte væksthastighed til er at argumentere for udseendet af graferne (se figur 5.1).

Helt generelt kan vi bestemme en funktion for væksthastigheden for en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$. Den vil være givet ved:

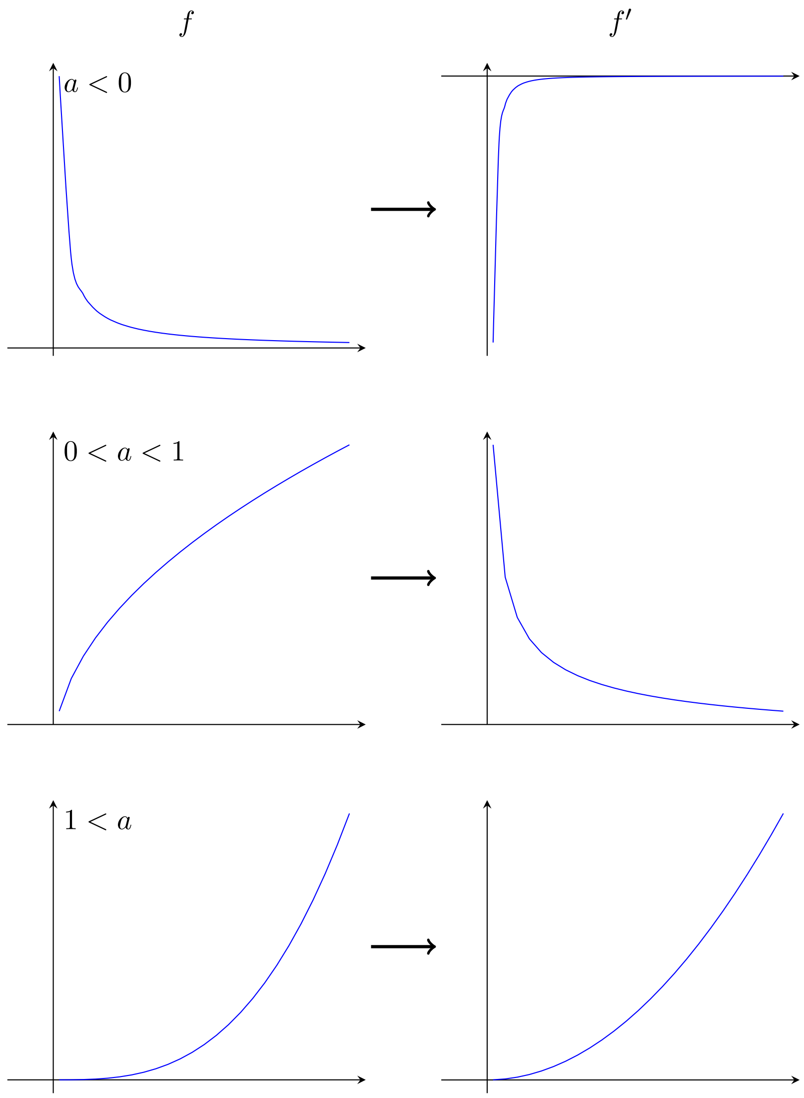
$$f'(x) = b \cdot a \cdot x^{a-1}$$

Potensfunktioner ligger i første kvadrant, hvor de er positive.

Vi begynder så at sige bagfra med $a < 0$. Hvis a er negativ, så vil $b \cdot a$ også være negativ (da $b > 0$), og dermed vil hele f' være negativ. Så når $a < 0$, vil væksthastigheden for f være negativ,, og dermed aftager funktionen. Se figur 5.2.

Hvis $0 < a < 1$, så er f' også positiv, fordi gangestykket $b \cdot a \cdot x^{a-1}$ består af positive tal. Dermed vokser f, fordi den har positiv væksthastighed. Bemærk dog, at væksthastigheden har en eksponent $a-1$ som er negativ (da $a < 1$). Det vil sige, at væksthastigheden er en aftagende potensfunktion. Så når $0 < a < 1$, så er f voksende, men den hastighed, den vokser med, er aftagende.

Hvis $a > 1$, så er f' positiv. Så f vokser. Væksthastigheden f' er også en positiv funktion, fordi $a - 1 > 0$ (da $a > 1$), Det vil sige, at f vokser og den hastighed, hvormed den vokser, stiger også.



Figur 5.2. Venstre søjle viser de tre mulige grafer for potensfunktioner $a < 0$, $0 < a < 1$ og $1 < a$. Højre søjle viser resultatet af at differentiere – bestemme væksthastigheden – i hver tilfælde.

Kapitel 6

Andengradspolynomier

Andengradspolynomier optræder overalt i matematik. De er nogle af de simpleste eksempler på funktioner, der ikke er monotone – det vil sige, kun er voksende eller aftagende. Derudover giver andengradspolynomier mulighed for at vise nogle af de teknikker, der kan anvendes på mere komplicerede funktioner.

Vi begynder dette kapitel med at præsentere andengradspolynomiets formel og tre særlige tal, som kaldes polynomiets koefficienter. Herefter viser vi grafen for et andengradspolynomium, og beskriver koefficienterne betydning for grafens udseende.

Herefter vil vi beskrive nogle særlige punkter på grafen for andengradspolynomiet, nemlig toppunktet og nulpunkterne. I forbindelse med nulpunkterne vil vi introducere begrebet en andengradsligning. Når vi har en ligning bliver spørgsmålet, hvordan løser vi ligningen?

For at kunne give et bevis for formlen for toppunktet, og vise de påstande vi har lavet om grafen for et andengradspolynomium, er vi nødt til at forholde os til væksthastighed. Hvilket vi angriber som det næste.

Til sidst vil vi give to alternative formler for andengradspolynomier, der bedst anvendes, når vi har en situation fra virkeligheden, der kan beskrives med et andengradspolynomium.

6.1. Formlen for andengradspolynomiet

Det er forholdsvis let at definere begrebet et andengradspolynomium.

Definition 6.1. Et andengradspolynomium er en funktion, der er givet ved:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \qquad a \neq 0$$

Tallene $a,\ b$ og c kaldes andengradspolynomiets koefficienter.

Definitionen giver os en funktion med nogle bogstaver. Vi kan se fra $f(x)$, at x er en uafhængig variabel, og dermed må $a,\ b$ og c være konstanter. Vi kræver, at $a \neq 0$, for hvis $a = 0$, så har vi $f(x) = 0 \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 + bx + c = bx + c$. Det er en lineær funktion med nogle andre bogstaver, end dem vi er vant til. Men vi ville definere et andengradspolynomium, og det skal være noget andet end en lineær funktion, så derfor kræver vi, at $a \neq 0$.

Utrolig meget kan siges om et konkret andengradspolynomium, hvis vi ved, hvad $a,\ b$ og c er. Derfor giver vi indtil flere eksempler på hvordan koefficienterne skal aflæses.

Eksempel 6.2. Vi begynder med $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$. Det skal læses som:

$$f(x) = \underbrace{2}_{a} \cdot x^2 \ \underbrace{-3}_{b} \cdot x \ \underbrace{+5}_{c}$$

Koefficienten a er det tal, der står foran x^2, og vi aflæser det til $a = 2$. Koefficienten b er der tal, der står foran x, vi skal have fortegnet med, så det aflæses til $b = -3$. Koefficienten c er det tal, der ikke ganges med x^2 eller x. I dette tilfælde er det $c = 5$. Dermed har vi samlet:

$$a = 2,\ b = -3,\ c = 5$$

Det er ikke altid, at alle koefficienter optræder i formlen. For eksempel: $f(x) = -4x^2 + 2x$, her mangler der tilsyneladende et tal. Det skyldes, at tallet er 0. Vi kan nemlig også skrive formlen som: $f(x) = -4x^2 + 2x + 0$, fordi det at lægge 0 til noget ikke ændrer noget.

$$f(x) = \underbrace{-4}_{a} \cdot x^2 \ \underbrace{+2}_{b} \cdot x \ \underbrace{+0}_{c}$$

Dermed har vi $a = -4,\ b = 2,\ c = 0$.

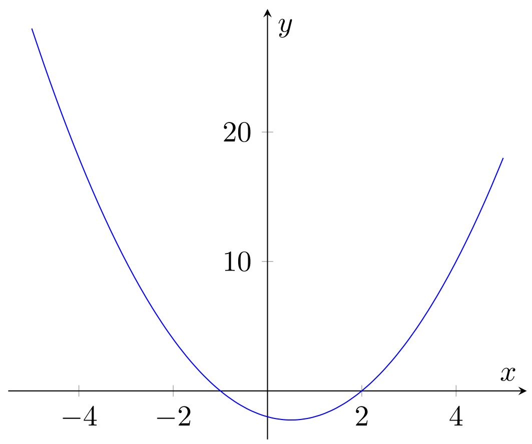
Det samme kan vi komme ud for med b. For eksempel: $f(x) = 3x^2 - 1$, her kan vi skrive: $f(x) = 3x^2 + 0 \cdot x - 1$. Fordi 0 gange noget giver nul, og det 0 lægger vi til noget, som så ikke ændrer sig:

$$f(x) = \underbrace{3}_{a} \cdot x^2 \ \underbrace{+0}_{b} \cdot x \ \underbrace{-1}_{c}$$

Dermed er $a = 3,\ b = 0,\ c = -1$.

I matematik er der nogle tal vi skjuler. Ofte er det tallet 1. Det kan også ske ved andengradspolynomier. Et eksempel: $f(x) = x^2 - x$. Umiddelbart kan vi ikke se nogle tal foran x^2 eller x. Men der er faktisk 1 og -1. Fordi $1 \cdot x^2 = x^2$, og $-1 \cdot x = -x$.

$$f(x) = \underbrace{1}_{a} \cdot x^2 \ \underbrace{-1}_{b} \cdot x \ \underbrace{+0}_{c}$$



Figur 6.1. Ovenfor ses grafen for andengradspolynomiet $f(x) = x^2 - x - 2$. Graferne for andengradspolynomier kaldes parabler.

Dermed er $a = 1,\ b = -1\ c = 0$.

Bemærkning 6.3 (En almindelig fejl)**.** Hvis andengradspolynomiet er $f(x) = x^2 + x$, så er en typisk fejl, at der aflæses $a = x^2$ og $b = x$. Det er *altid* forkert! Variablen x har intet med a og b at gøre. Hvis man har begået denne fejl bør man læse det ovenstående eksempel grundigt.

Efter at have læst nogle sider om andengradspolynomier, så kan navnet måske undre. Det hedder et andengradspolynomium, fordi den største eksponent, der optræder i formlen er 2. Generelt har de forskellige dele af polynomiet nogle navne.

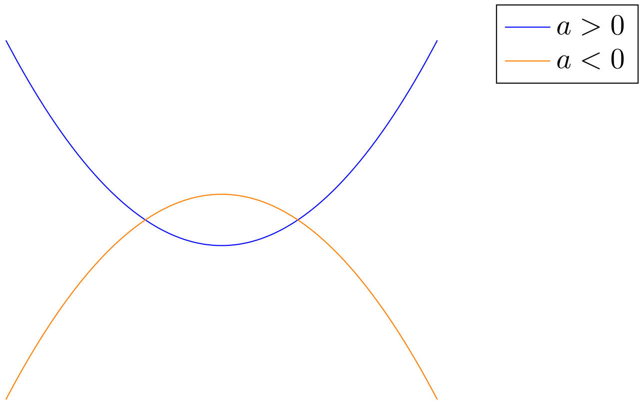
$$f(x) = \underbrace{a \cdot x^2}_{\text{Andenordensled}} \quad \overbrace{+b \cdot x}^{\text{førsteordensled}} \quad \underbrace{+c}_{\text{konstantled}}$$

Særligt kaldes a for *den ledende koefficient*.

6.2. Graferne for andengradspolynomier

På figur 6.1 ses et eksempel på grafen for et andengradspolynomium. Andengradspolynomiernes grafer kaldes *parabler*. Et særligt kendetegn ved graferne for andengradspolynomier er, at der et område, hvor grafen vokser og et område, hvor grafen aftager.

Udseendet for graferne for andengradspolynomier er bestemt af fortegnene – positiv/negativ – på koefficienterne $a,\ b,\ c$, samt om b og c er 0. Dermed er der to mulige grafer bestemt af a, og tre mulige grafer for henholdsvis b og c, hvilket giver $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ mulige grafer (når vi lærer om nulpunkter, vil vi opdage, at der er endnu flere).



Figur 6.2. Figuren viser de to måder andengradspolynomier kan se ud på alt afhængig af værdien af a

.

Vi vil gennemgå nogle af graferne for de forskellige koefficienter:

6.2.1. Koefficienten a. Koefficienten a har indflydelse på om grafen begynder med at aftage, og så vokse, eller om grafen begynder med at vokse for så at aftage. Når vi ser fra venstre mod højre. Se på figur 6.2.

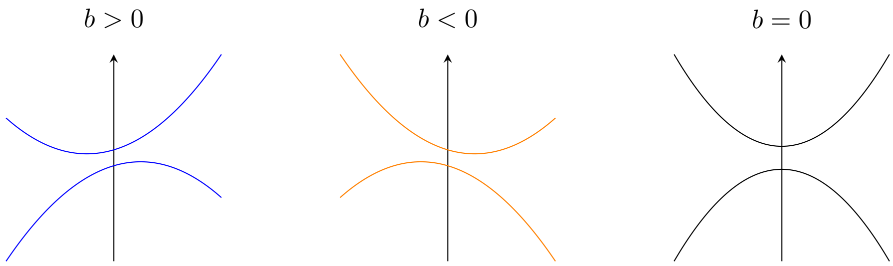
Når $a > 0$ – det vil sige, når a er positiv – så begynder grafen med at aftage for så at vokse. Det kaldes, at parablens *grene* vender opad.

Når $a < 0$ – det vil sige, når a er negativ – så begynder grafen med at vokse for så at aftage. Det kaldes, at parablens *grene* vender nedad.

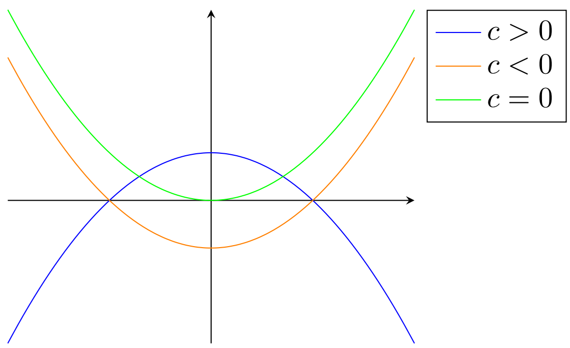
Stedet på grafen, hvor grafen skifter fra at være aftagende til voksende eller omvendt, kaldes *toppunktet*. Dette særlige punkt vil vi interesserer os for senere.

6.2.2. Koefficienten b. Koefficienten b kræver lidt tilvænning, se figur 6.3. Den fortæller om grafen for andengradspolynomiet er voksende elle aftagende *der hvor grafen skær andenaksen*. Så ideen er: Find der hvor grafen skær andenaksen, hvis grafen vokser, så er $b > 0$, det vil sige, positiv, hvis grafen aftager, så er $b < 0$, det vil sige, negativ. Hvis grafen hverken vokser eller aftager i skæringen med andenaksen, så er $b = 0$. I det sidste tilfælde ligger toppunktet på andenaksen.

6.2.3. Koefficienten c. Koefficienten c angiver simpelthen, hvor grafen for et andengradspolynomium skær andenaksen. Se figur 6.4. Således, hvis $c > 0$ – det vil sige, nårc er positiv – så skær grafen andenaksen over førsteaksen. Hvis $c < 0$ – det vil sige, c er negativ – skær grafen andenaksen under førsteaksen. Til sidst, hvis $c = 0$, så skær grafen i origo $(0, 0)$.



Figur 6.3. Hvis de tre forskellige muligheder $b > 0$, $b < 0$ og $b = 0$. I hvert tilfælde er der både tegnet grafen hvor $a > 0$ og hvor $a < 0$.



Figur 6.4. Figuren viser de 3 mulige placeringer af skæringen med andenaksen.

Det er forholdsvis let at vise, at c angiver skæringen med andenaksen. Vi ved, at når vi er på andenaksen, så er $x = 0$. Hvis vi ser på det generelle andengradspolynomium: $f(x) = ax^2 + bx + c$, så kan vi sætte $x = 0$ ind.

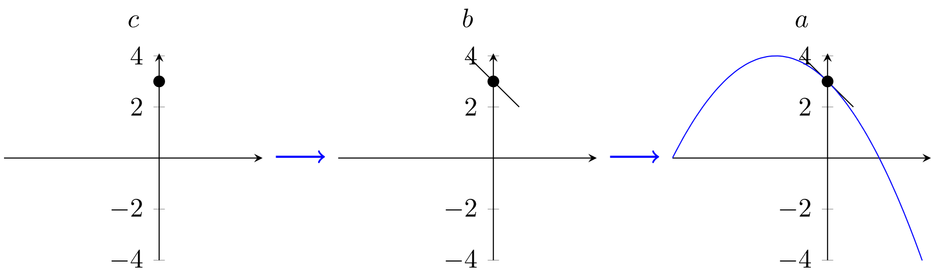
$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 + 0 + c = c$$

Det vil sige, at $f(0) = c$, og at grafen for et andengradspolynomium skær andenaksen i $(0, c)$.

6.2.4. Hvordan skitserer man et andengradspolynomium. Hvis vi får et andengradspolynomium, som vi skal skitsere, så er der forskellige måder at gøre det på. Men den metode, der er lettest at anvende er at tage koefficienterne i bagvendt rækkefølge:

(1) Begynd med at tegne et koordinatsystem (husk de negative akser).
(2) Afsæt c på andenaksen.
(3) Afsæt et lille linjestykke igennem c, som har en hældning, som er b.
(4) Tegn selve parablen ud fra a – skal grenene vende opad eller nedad?

Vi giver et eksempel.



Figur 6.5. Et eksempel på hvordan det er muligt at skitsere $f(x) = -x^2 - 2x + 3$.

Eksempel 6.4. Vi ser på andengradspolynomiet $f(x) = -x^2 - 2x + 3$. Vi begynder med at aflæse a, b og c. Vi ser, at $a = -1$, $b = -2$ og $c = 3$. Vi kan nu begynde at skitsere, se figur 6.5.

Vi tegner først et koordinatsystem, hvor der er plads til både positive og negative værdier. Så afsætter vi punktet $(0, 3)$ på andenaksen, da $c = 3$. I det punkt afsætter vi et lille linjestykke med hældningen -2, da $b = -2$. Det kan gøre ved at gå en ud og to ned. Til sidst kan vi tegne selve parablen. Da $a = -1$ må grenene vende nedad, og derfor er det meste af parablen til venstre for andenaksen.

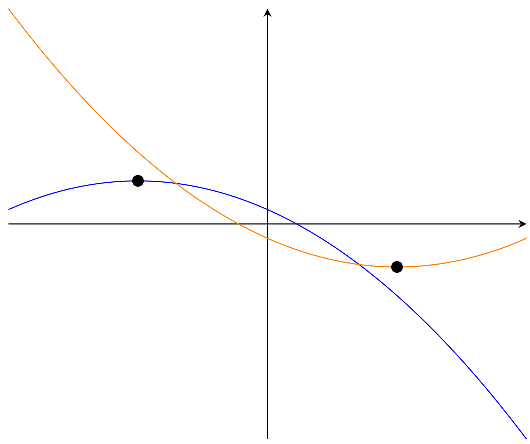
6.3. Toppunkter

Alle andengradspolynomier har ét særligt punkt, der bliver kaldt *toppunktet*. Toppunktet ligger på grafen for andengradspolynomiet lige der, hvor grafen skifter fra at være aftagende til voksende eller fra være voksende til aftagende. Så toppunktet ligger enten i toppen af grafen eller i bunden. Se figur 6.6.

Bemærkning 6.5 (Et dårligt navn)**.** Ordet toppunkt giver associationer til en top, men toppunktet kan også ligge i bunden, hvorfor ordet er et af de dårligste i matematik.

Der er mindst tre måder at beregne koordinatsættet til toppunktet på. Den første bruger en formel. Nummer to anvender den samme formel, som den første metode, men har endnu en formel, som de fleste regner forkert med. Den sidste metode, som anvender væksthastighed, er mest generel, hvilket vil sige, at den også virker for mange andre funktioner. Af de tre metoder er den første og sidste at foretrække. Metode 3 vil blive gennemgået i afsnittet om væksthastighed side 89.

6.3.1. Metode 1. Vi beregner først førstekoordinatet til toppunktet, og så anvender vi forskriften til at beregne andenkoordinatet. Formlen for



Figur 6.6. To parabler med toppunktet markeret.

førstekoordinatet er
$$x = \frac{-b}{2a}$$
Det vil sige, at hvis vi kender koefficienterne i vores forskrift, så kan vi sætte ind og regne ud.

Vi beregner toppunktet for $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$. Vi aflæser, at $a = 2$ og $b = -4$. Vi sætter ind i vores formel:
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$$
Nu ved vi, at førstekoordinatet er $x = 1$. Så kan vi sætte ind i forskriften f.
$$y = f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = 2 - 4 - 1 = -3$$

Dermed er koordinatsættet for toppunktet: $(x, y) = (1, -3)$

6.3.2. Metode 2. Denne metode anvender, at toppunktet kan beregnes som
$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a} \right)$$
Her er $d = b^2 - 4ac$, Så der skal regnes en hel del, og for mange går det galt.

Igen bruger vi $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$. Vi har beregnet førstekoordinatet i metode 1, så vi vil kun beregne andenkoordinatet. Først beregner vi:
$$d = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 16 - 8 \cdot (-1 = 16 + 8 = 24$$
Derefter beregner vi andenkoordinatet:
$$\frac{-d}{4a} = \frac{-24}{4 \cdot 2} = \frac{-24}{8} = -3$$
Dermed er andenkoordinatet $y = -3$.

6.4. Nulpunkter

Selve andengradspolynomiet er historisk set ikke det, der oprindelig har været interessant for matematikere. Derimod har ligninger som $x^2 + 4x - 3 = 0$ været i fokus. En sådan ligning kaldes en *andengradsligning*. Hvis en andengradsligning kan løses, kaldes løsningerne *nulpunkter* eller *rødder*.

Grafisk kan nulpunkter opfattes som parablens skæringer med førsteaksen. Hvis vi har et andengradspolynomium $f(x) = x^2 + 4x - 3$, så svarer ligningen $x^2 + 4x - 3 = 0$ til at finde de x-værdier, der opfylder $f(x) = 0$, men det svarer til at finde de x-værdier, der giver en y-værdi på 0.

Ud fra, hvad vi ved om udseendet på et andengradspolynomiums graf, så kan vi forestille os tre tilfælde. I det første tilfælde skær grafen førsteaksen to gange. I det andet tilfælde skær grafen førsteaksen præcis én gang, nemlig toppunktet. I det sidste tilfælde skær grafen ikke førsteaksen. Se figur 6.7. Nu er det så heldigt, at vi ikke behøver at kunne tegne grafen for andengradspolynomiet for at afgøre, hvor mange gange den skær førsteaksen. Vi kan beregne et tal, der kaldes *diskriminanten*. Diskriminanten kan beregnes ud fra kendskabet til a, b og c. Formlen er:

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Der er følgende tre tilfælde:

- $d > 0$ Hvis d er positiv, så er der to nulpunkter.
- $d = 0$ Hvis d er nul, så er der præcis ét nulpunkt, nemlig toppunktet.
- $d < 0$ hvis d er negativ, så er der ingen nulpunkter.

Eksempel 6.6. Hvis vi tager ligningen $x^2 + 4x - 3 = 0$, Så kan vi afgøre hvor mange nulpunkter der er ved at beregne diskriminanten. Vi aflæser at $a = 1$, $b = 4$ og $c = -3$.

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot b = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 - 4 \cdot (-3) = 16 + 12 = 28 > 0$$

Dermed er der to nulpunkter. Vi ved dog ikke, hvad de er.

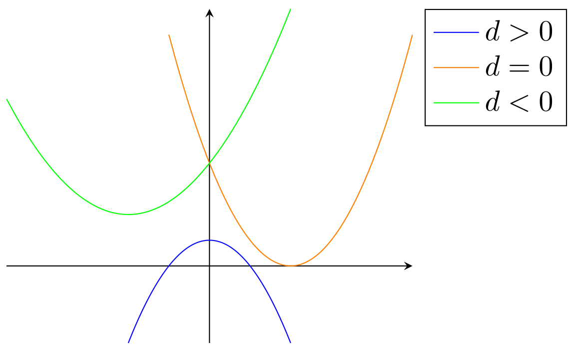
Nu mangler vi at beregne nulpunkter, det er der en formel der kan hjælpe med. Formlen er:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a}$$

Symbolet $\pm$ betyder, at vi skal lave to udregninger, en for $-$ og en for $+$. Teknikken er, at først beregne diskriminanten d, og derfor beregne nulpunkterne, hvis de findes.

Eksempel 6.7. Vi prøver at løse ligningen $x^2 - 4x + 3 = 0$. Vi aflæser, at $a = 1$, $b = -4$ og $c = 3$. Vi beregner diskriminanten:

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$



Figur 6.7. Tre parabler, der viser de tre tilfælde, ingen nulpunkter, ét nulpunkt, og to nulpunkter

Dermed er der to nulpunkter, som vi så beregner:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

Vi kan nu beregne de to løsninger. Vi begynder med minus:

$$x = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Så tager vi plus:

$$x = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Dermed er løsningerne til ligningen: $x = 1$ eller $x = 3$.

6.4.1. Når man ikke behøver formlen 1. Det er ikke alle andengradsligninger, hvor det giver mening at anvende formlen. I nogle tilfælde er det hurtigere at løse ligningen direkte. Et eksempel kunne være $x^2 - 16 = 0$. Her er $a = 1$, $b = 0$ og $c = 16$. Formlen for nulpunkter vil godt kunne bruges, men lad os løse ligningen direkte:

$$x^2 - 16 = 0$$

Vi lægger 16 til på begge sider af lighedstegnet

$$x^2 = 16$$

Vi uddrager kvadratrodden på begge sider af lighedstegnet

$$x = \pm\sqrt{16}$$
$$x = \pm 4$$

Nu kan det undre, at der står $\pm$. Det skyldes at -4 også er en løsning til ligningen $x^2 - 16 = 0$, fordi den passer ind: $(-4)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$. Det vil sige, at når $b = 0$, så har vi en hurtig metode til at løse andengradsligningen.

6.4.2. Bevis for nulpunktsformlen. Vi ønsker nu at bevise nulpunktsformlen. Men før vi gør det, bør vi lige se på et eksempel, der giver os metoden til at løse en generel andengradsligning.

Eksempel 6.8. Vi ønsker at løse ligningen $x^2 - 2x - 8 = 0$, men vi vil gøre det uden at anvende nulpunktsformlen. Vi begynder med at lægge 8 til på sidder af lighedstegnet:

$$x^2 - 2x = 8$$

Nu er ideen at prøve at lave ligningen om til noget, der ligner f.eks. $x^2 = 16$, som vi har set, hvordan vi løser oven for. Udtrykket $x^2 - 2x$ ligner noget fra en kvadratsætning for eksempel $(p-q)^2 = p^2 + q^2 - 2pq$. Hvis vi skriver:

$$\underbrace{x^2}_{p^2} - \underbrace{2x}_{-2pq}$$

Så kan vi se at der mangler noget, nemlig q. Så hvis $x = p$, hvad skal $q =?$. Vi har at $2x = 2pq = 2xq$, da $x = p$, men så må $q = 1$, idet $2xq = 2x \cdot 1 = 2x$. Så vi lægger det manglende $q^2 = 1^2$ til på begge sider af lighedstegnet:

$$\underbrace{x^2}_{p^2} + \underbrace{1^2}_{+q^2} - \underbrace{2x}_{-2pq} = 8 + \underbrace{1^2}_{+q^2}$$

Da vi har $p^2 + q^2 - 2pq = (p-q)^2$ eller $x^2 + 1^2 - 2x = (x-1)^2$, har vi:

$$\begin{aligned}(x-1)^2 &= 9\\ x - 1 &= \pm\sqrt{9}\\ x - 1 &= \pm 3\\ x &= 1 \pm 3\end{aligned}$$

Dermed er løsningerne: $x = 1 - 3 = -2$ eller $x = 1 + 3 = 4$.

Det eksemplet viser vil blive benyttet mere generelt i beviset for følgende sætning:

Sætning 6.9. *Andengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$ har løsninger givet ved:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a}, \qquad d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Hvis $d < 0$, så er der ingen løsninger. Hvis $d = 0$, så er der en løsning. Hvis $d > 0$,så er der to løsninger.

Bevis. Vi ønsker at løse ligningen:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

For at undgå brøker, ganger vi på begge sider af lighedstegnet med $4a$.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ 4a \cdot \left(ax^2 + bx + c\right) &= 4a \cdot 0 \\ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 \end{aligned}$$

Vi trækker $4ac$ fra på begge sider af lighedstegnet:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Da $4 = 2^2$, kan vi skrive: $4a^2x^2 = 2^2a^2x^2 = (2ax)^2$

$$(2ax)^2 + 4abx = -4ac$$

Vi anvender første kvadratsætning: $p^2 + q^2 + 2pq = (p+q)^2$:

$$\underbrace{(2ax)^2}_{p^2} + \underbrace{4abx}_{+2pq} = -4ac$$

Det vil sige, at vi sætter: $2ax = p$. Dermed har vi

$$\begin{aligned} 4abx &= 2pq \\ 4abx &= 2 \cdot (2ax) \cdot q \\ 4abx &= 4ax \cdot q \end{aligned}$$

Dermed må $q = b$. Så vi lægger b^2 til på begge sider af lighedstegnet.

$$\underbrace{(2ax)^2}_{p^2} + \underbrace{b^2}_{+q^2} + \underbrace{4abx}_{+2pq} = \underbrace{b^2}_{+q^2} - 4ac$$

Da $p^2 + q^2 + 2pq = (p+q)^2$ eller $(2ax)^2 + b^2 + 4abx = (2ax+b)^2$ har vi:

$$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$$

Vi kalder $b^2 - 4ac$ for d, og uddrager kvadratroden på begge sider af lighedstegnet

$$\begin{aligned} 2ax + b &= \pm\sqrt{d} \\ 2ax &= -b \pm \sqrt{d} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} \end{aligned}$$

Påstandene om antallet af løsninger, følger af denne formel. □

6.5. Væksthastighed

Som med mange andre funktioner, så er det muligt at beregne et andengradspolynomiums væksthastighed forskellige steder på dens graf. Formålet med at beregne en væksthastighed kunne være at bestemme den hastighed en kanonkugle rammer med, eller at finde det punkt, hvor væksthastigheden er nul, hvilket er i toppunktet.

Når vi skal beregne en væksthastighed, så skal vi omforme vores funktion f til en ny f', kaldet f-mærke. For et andengradspolynomium skal vi anvende følgende tre regler:

f	f'
c	0
bx	b
ax^2	$2ax$

Disse tre regler er en omskrivning af nogle mere generelle regler, til andengradspolynomier.

Eksempel 6.10. Vi har et andengradspolynomium $f(x) = -x^2 + 6x + 2$. Vi ønsker at kende væksthastigheden, når $x = 1$, $x = 3$, og $x = 5$. For at kunne gøre det er vi nødt til at omforme vores andengradspolynomium:

$$f(x) = -x^2 + 6x + 2$$
$$f'(x) = -2x + 6$$

Nu kan vi beregne væksthastigheden:

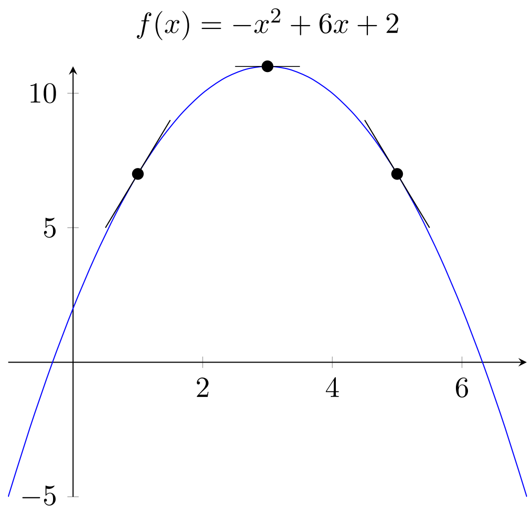
$$f'(1) = -2 \cdot 1 + 6 = -2 + 6 = 4$$
$$f'(3) = -2 \cdot 3 + 6 = -6 + 6 = 0$$
$$f'(5) = -2 \cdot 5 + 6 = -10 + 6 = -4$$

Det vi kan se ud af det ovenstående er, at når $x = 1$, så er væksthastigheden 4, dermed vokser f, når $x = 1$, fordi den har en positiv væksthastighed der. Når $x = 3$, så er væksthastigheden 0, det vil sige, at f er konstant, når $x = 3$. Når $x = 5$, så er væksthastigheden -4, det vil sige, at f aftager, når $x = 5$, fordi væksthastigheden er negativ. Hvis man ser på grafen for f, vil man kunne forvisse sig om at det er rigtigt. Se figur 6.8.

Eksempel 6.11. Vi forestiller os, at vi skyder en kanonkugle afsted. Kuglens højde over jorden kan i dette tilfælde beskrives ved:

$$f(x) = -4.42 \cdot x^2 + 100 \cdot x + 2, \qquad 0 \leq x$$

hvor $f(x)$ er højden over jorden målet i meter, og x er tiden efter affyring målt i sekunder. Vi ønsker at bestemme den lodrette hastighed, når kuglen lander på jorden.



Figur 6.8. Grafen for $f(x) = -x^2+6x+2$. De tre punkter er stederne på grafen for f med førstekoordinat $x = 1$, $x = 3$ og $x = 5$. De sorte linjestykker har samme hældning som væksthastigheden i de tre punkter.

Det første, vi gør, er, at vi finder ud hvor lang tid, der går før kuglen lander på jorden. Da jorden er 0 meter over jorden. Skal vi løse $f(x) = 0$. Hvilket er en andengradsligning. Vi regner lidt og finder ud af det tager ca. 22,64 sekunder for kuglen at ramme jorden.

Nu beregner vi forskriften for væksthastigheden:

$$f(x) = -4.42 \cdot x^2 + 100 \cdot x + 2$$
$$f'(x) = -9.82 \cdot x + 100$$

Så indsætter vi tiden $x = 22{,}64$

$$f'(22{,}64) = -9.82 \cdot 22{,}64 + 100 \approx -100{,}14$$

Dermed rammer kuglen med hastighed på $-100{,}14 m/s$. Enheden meter i sekundet kommer af, at væksthastigheden er ændringen i y-værdi pr. ændring i x-værdi.

6.5.1. Metode 3 til beregning af toppunkt. Her anvender vi væksthastighed til at beregne toppunktet. Vi bemærker, at toppunktet er kendetegnet ved, at væksthastigheden i punktet er 0. Det vil sige, at vi skal finde den x-værdi, der får ligningen $f'(x) = 0$ til at passe.

Vi genbruger $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$. Og differentierer:

$$f'(x) = 2 \cdot 2x^2 - 4 = 4x - 4$$

Vi løser $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x - 4 &= 0 \\ 4x &= 4 \\ x &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Dermed ved vi nu, at førstekoordinatet er $x = 1$. Andenkoordinatet beregnes som i metode 1 på side 82. Dermed er toppunktet igen $(1, -3)$.

Fordelen ved denne metode er, at den virker på mange andre funktioner end andengradspolynomier, og så kræver den ikke, at der huskes en formel.

6.5.2. Bevis for toppunktet. I det følgende vil vi bevise toppunktet. Vi anvender den egenskab, at toppunktet er kendetegnet ved, at væksthastigheden er 0. Dermed skal vi helt generelt løse $f'(x) = 0$.

Sætning 6.12. *Et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ har et toppunkt i*

$$(x, y) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right), \qquad d = b^2 - 4ac.$$

Bevis. Vi betragter polynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$, hvor $a \neq 0$. Vi differentierer f, og får

$$f'(x) = 2ax + b,$$

og løser $f'(x) = 0$, for finde det x, hvor væksthastigheden er 0.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2ax + b &= 0 \\ 2ax &= -b \\ x &= \frac{-b}{2a} \end{aligned}$$

.

Vi mangler at finde y-værdien for toppunktet. Vi indsætter $x = \frac{-b}{2a}$ i $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ f\left(\frac{-b}{2a}\right) &= a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c \end{aligned}$$

Vi bruger en potensregneregel på det første led, og ganger b på tælleren i det andet led

$$= a\left(\frac{(-b)^2}{2^2a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c$$

Vi ganger med a på tælleren i det første led

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

Vi forlænger brøken i det andet led med 2

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c$$

Vi sætter på fælles brøkstreg

$$= \frac{b^2 - 2b^2}{4a} + c$$

Vi forlænger det sidste led med $4a$

$$= \frac{-b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

Vi sætter på fælles brøkstreg

$$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Vi sætter $-$ uden for parentes

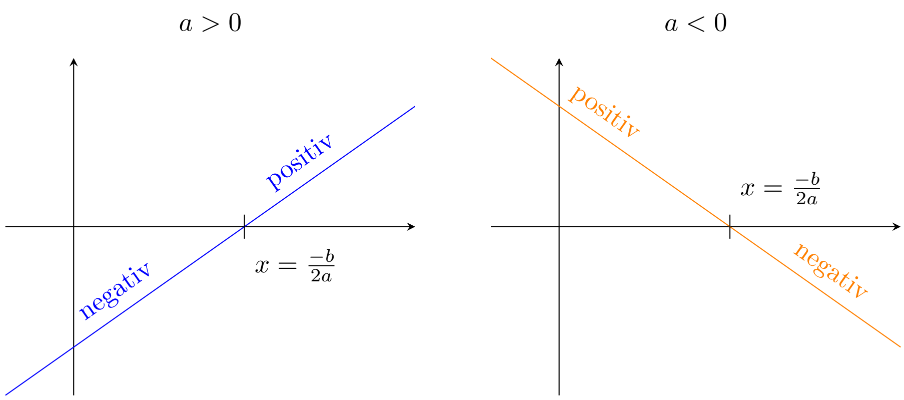
$$= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$
$$= \frac{-d}{4a}$$

Hvilket var, hvad vi skulle vise. □

6.5.3. Andengradspolynomiets grafs udseende. Vi begyndte dette kapitel med at beskrive sammenhængen mellem koefficienterne a, b og c og grafens udseende. Vi argumenterede kun for c betydning, se side 81. Men vi er nu i stand til at argumenterer for a og b's betydning for grafen. Vi begynder med b.

At b kan benyttes til at sige om grafen vokser eller aftager i skæringen med andenaksen skyldes, at b netop angiver væksthastigheden/hældningen i skæringen med andenaksen. Det er muligt at vise dette meget let. Vi ser på det generelle andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$, og differentierer det.

$$f'(x) = 2ax + b$$



Figur 6.9. Mulige udseender for $f'(x) = 2ax + b$ for et andengradspolynomium. På graferne angives, hvor væksthastigheden for f er positiv eller negativ.

Når vi er på andenaksen, så er $x = 0$. Så det kan vi sætte ind i formlen for f':

$$f'(0) = 2a \cdot 0 + b = 0 + b = b$$

Med andre ord, $f'(0) = b$, hvilket vil sige, at væksthastigheden ved skæringen med andenaksen netop er b.

For at vise a's betydning for grafen, begynder vi med at bemærke, at der er et toppunkt med førstekoordinat $x = \frac{-b}{2a}$, hvor væksthastigheden er 0. Hvis vi ved, hvordan væksthastigheden er på hver side af toppunktet, så ved vi også om grenene vender opad eller nedad.

Hvis vi ser på $f'(x) = 2ax + b$ ser vi, at det er en lineær funktion, med hældningskoefficient $2a$ og begyndelsesværdi b, se figur 6.9. Hvis $a > 0$, så ved vi (fra 1.g), at $f'(x)$ er en voksende funktion, derfor antager $f'(x)$ negative værdier på venstre side af $x = \frac{-b}{2a}$, og positive værdier på højre side af $x = \frac{-b}{2a}$. Det vil sige, at væksthastigheden er negativ til venstre for toppunktet og positiv til højre for toppunktet. Hvilket netop er kendetegnet for, at grenene vender opad.

Hvis $a < 0$, så er $f'(x) = 2ax + b$ en aftagende lineær funktion. Derfor antager $f'(x)$ positive værdier til venstre for toppunktet og negative værdi til højre for toppunktet. Det vil sige, at væksthastigheden er positiv før toppunktet og negativ efter toppunktet. Hvilket netop er kendetegnet for, at grenene vender nedad.

6.5.4. Væksthastigheden i nulpunkterne. Hvis vi har et andengradspolynomium med nulpunkter, så er der en særlig simpel formel for væksthastigheden i nulpunkterne.

Ideen er at tage formlen for nulpunkterne:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

og sætte den ind i formlen for væksthastighed for et generelt andengradspolynomium:

$$f'(x) = 2ax + b.$$

Det giver:

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}\right) &= 2a\left(\frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}\right) + b \\ &= -b \pm \sqrt{d} + b \\ &= \pm\sqrt{d} \end{aligned}$$

Dermed ved vi, at væksthastighederne i nulpunkterne er plus/minus kvadratroden af diskriminanten, og det vil sige, at størrelsen af vælsthastigheden i nulpunkterne er den samme.

6.6. Andre formler for andengradspolynomier

Under tiden kan vi komme ud for at skulle frembringe andengradspolynomier, der beskriver en eller anden situation. Et eksempel kunne være, at vi skulle beskrive vandstrålerne på figur 6.10.

6.6.1. Formel ud fra toppunkt. Den første formel kan bedst anvendes, når vi kender toppunktet og enten a eller et ekstra punkt. Formlen er givet ved:

$$f(x) = a \cdot (x-h)^2 + k, \qquad \text{hvor } (h,k) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$$

Med andre ord, så er h førstekoordinatet til toppunktet, og k er andenkoordinatet til toppunktet.

Eksempel 6.13. Hvis vi ser på figur 6.10, så kan vi lave et koordinatsystem med origo i den forreste vanddyse. Det kan se ud som om toppen på den forreste vandstråle er 2 meter over jorden og 1 meter vandret fra dysen. Dermed toppunktet have koordinater $(h,k) = (-1,2)$. Førstekoordinatet er negativt, da toppunktet ligger til venstre for dysen. Vi kan sætte ind i vores formel, og får:

$$f(x) = a \cdot (x-h)^2 + k = a \cdot (x-(-1))^2 + 2 = a \cdot (x+1)^2 + 2$$

Figur 6.10. Billede af vandstråler, der danner parabler

Vi mangler at beregne a. Da vi har indsat koordinatsystemet, så origo er i ved vanddysen, må grafen gå igennem $(0,0)$. Det sætter vi ind i formlen:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x+1)^2 + 2 \\ f(0) &= a \cdot (0+1)^2 + 2 = 0 \\ 0 &= a \cdot (0+1)^2 + 2 \\ 0 &= a \cdot 1 + 2 \\ -2 &= a \end{aligned}$$

Samlet bliver formlen:

$$f(x) = -2 \cdot (x+1)^2 + 2,$$

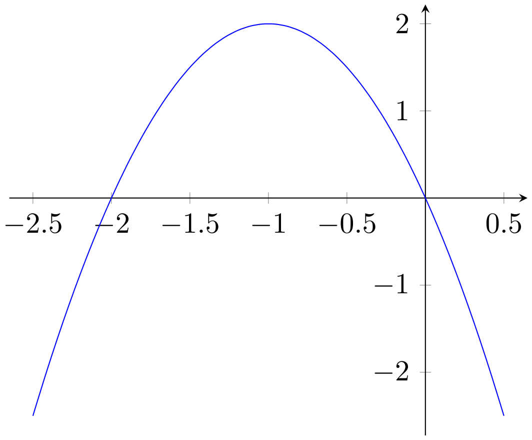
hvor $f(x)$ højden i meter, og x er afstanden fra vanddysen i meter. Se figur 6.11.

Vi kan omforme vores forskrift f til et almindelig andengradspolynomium ved at hæve parentesen:

$$f(x) = -2 \cdot (x+1)^2 + 2$$

Anvender første kvadratsætning: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$

$$= -2 \cdot (x^2 + 1^2 + 2 \cdot x \cdot 1) + 2$$



Figur 6.11. Grafen for $f(x) = -2\cdot(x+1)^2+2$. Bemærk, at toppunktet ligger i $(-1, 2)$.

Ganger ind i parentesen

$$\begin{aligned} &= -2\cdot x^2 - 2\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot x + 2 \\ &= -2\cdot x^2 - 4x \end{aligned}$$

Dermed kan formlen også skrives som:

$$f(x) = -2x^2 - 4x$$

Hvis vi har et generelt andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$, så kan vi undersøge om vores nye formel $f(x) = a\cdot(x-h)^2 + k$ faktisk er den samme funktion. Vi kan hæve parentesen og indsætte koordinatsættet for toppunktet.

Sætning 6.14. *Givet et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ med toppunkt $(h, k) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$. Da gælder det:*

$$ax^2 + bx + c = a\cdot(x-h)^2 + k$$

Bevis. Vi begynder med at hæve parentesen, og så indsætter vi toppunktet.

$$\begin{aligned} f(x) &= a\cdot(x-h)^2 + k \\ &= a\cdot(x^2 + h^2 - 2\cdot x\cdot h) + k \\ &= a\cdot x^2 + a\cdot h^2 - 2\cdot a\cdot x\cdot h + k \end{aligned}$$

Indsætter toppunktet: $(h,k) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$

$$\begin{aligned}
&= a \cdot x^2 + a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot x \cdot \frac{-b}{2a} + \frac{-d}{4a} \\
&= a \cdot x^2 + a \cdot \frac{(-b)^2}{(2a)^2} - x \cdot \frac{2a \cdot (-b)}{2a} + \frac{-d}{4a} \\
&= a \cdot x^2 + a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - x \cdot (-b) + \frac{-d}{4a} \\
&= a \cdot x^2 + \frac{a \cdot b^2}{4a^2} + b \cdot x + \frac{-d}{4a}
\end{aligned}$$

Da $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot b$, får vi:

$$\begin{aligned}
&= a \cdot x^2 + b \cdot x + \frac{b^2}{4a} + \frac{-(b^2 - 4 \cdot a \cdot c)}{4a} \\
&= a \cdot x^2 + b \cdot x + \frac{b^2}{4a} + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}
\end{aligned}$$

Sætter på fælles brøkstreg:

$$\begin{aligned}
&= a \cdot x^2 + b \cdot x + \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a} \\
&= a \cdot x^2 + b \cdot x + \frac{4ac}{4a} \\
&= a \cdot x^2 + b \cdot x + c
\end{aligned}$$

Dermed får vi det den samme funktion ved at anvende den nye forskrift. □

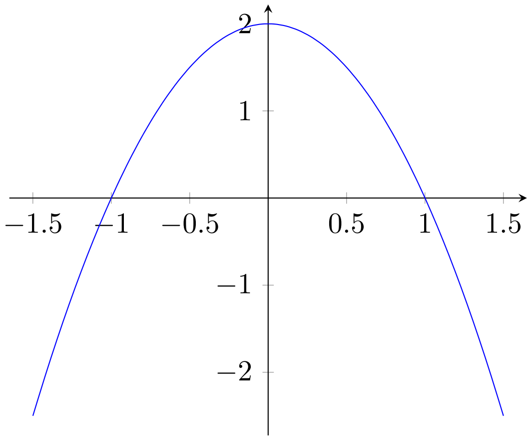
6.6.2. Formel ud fra nulpunkter. Den anden formel forudsætter, at vi kender nulpunkterne for et andengradspolynomium, og enten a eller et ekstra punkt. Formlen er givet ved:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2), \qquad \text{hvor } x_1 \text{ og } x_2 \text{ er nulpunkter}$$

Det vil sige, at vi skal have nulpunkter, for at kunne anvende formlen. Måden at skrive f op på kaldes for en *faktorisering* af f.

Eksempel 6.15. Hvis vi ser på figur 6.10 på side 94. Så kan vi lægge koordinatsystemet, så førsteaksen ligger langs jorden, og andenaksen går igennem toppunktet.

Vanddysen, og der hvor vandet rammer jorden, er ca. 1 meter væk fra andenaksen. Så vores nulpunkter er dermed $x_1 = -1$ og $x_2 = 1$. Vi mangler et punkt, men toppunktet må ligge i $(0, 2)$. Så nu kan vi bestemme en



Figur 6.12. Grafen for $f(x) = -2 \cdot (x+1) \cdot (x-1)$.

forskrift for f.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \\ &= a \cdot (x - (-1)) \cdot (x - 1) \\ &= a \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \end{aligned}$$

Indsætter $(0, 2)$:

$$\begin{aligned} 2 &= a \cdot (0 + 1) \cdot (0 - 1) \\ 2 &= a \cdot 1 \cdot (-1) \\ 2 &= a \cdot (-1) \\ -2 &= a \end{aligned}$$

Dermed er forkskriften:

$$f(x) = -2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1),$$

hvor $f(x)$ er højden i meter, og x er afstanden fra andenaksen i meter. Se figur 6.12.

Vi kan omforme f til et almindeligt andengradspolynomium ved at gange parenteserne ud.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \\ &= -2 \cdot (x^2 - x + x - 1) \\ &= -2 \cdot x^2 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \\ &= -2 \cdot x^2 + 2 \end{aligned}$$

Dermed kan formlen også skrives som:

$$f(x) = -2 \cdot x^2 + 2$$

6.6.3. Når man ikke behøver formlen 2. Visse ligninger kan lettest løses ved at dele dem op på en smart måde. En måde, det kan gøres på, er ved *nulreglen*.

Nulreglen siger kort fortalt, at hvis der er to tal, der ganget sammen bliver nul, så må et af tallene være nul (evt. begge tal). I symboler

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0$$

Symbolet $\vee$ betyder eller. Denne egenskab kan anvendes, hvis man har en ligning som:

$$\begin{aligned} x \cdot (x-3) &= 0 \\ x = 0 \ \vee \ x - 3 &= 0 \\ x = 0 \ \vee \ x &= 3 \end{aligned}$$

Et mere kompliceret eksempel kunne være:

$$\begin{aligned} (x-2) \cdot (x+7) &= 0 \\ x - 2 = 0 \ \vee \ x + 7 &= 0 \\ x = 2 \ \vee \ x &= -7 \end{aligned}$$

Et endnu mere kompliceret eksempel:

$$\begin{aligned} (2x-3) \cdot (x+4)^2 \cdot \sqrt{x-2} &= 0 \\ 2x - 3 = 0 \ \vee \ (x+4)^2 = 0 \ \vee \ \sqrt{x-2} &= 0 \\ 2x = 3 \ \vee \ x + 4 = 0 \ \vee \ x - 2 &= 0 \\ x = \frac{3}{2} \ \vee \ x = -4 \ \vee \ x &= 2 \end{aligned}$$

I de ovenstående ligninger er det lige til at anvende nulreglen. Men ofte er der noget, der skal gøres inden nulreglen kan anvendes. Meget ofte er tricket *at sætte uden for parentes*.

Ideen med at sætte uden for parentes kommer fra det, der kaldes den *distributive lov*. Den siger følgende i symboler:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Læses der fra venstre mod højre, står der, at man må gange ind i en parentes. Læses der højre mod venstre, står der, at man må sætte uden for parentes. Hvis vi ser på $a \cdot b + a \cdot c$, så er der to led ab og ac. Der optræder det samme bogstav a, hvilket kaldes en fælles faktor. Det er sådanne fælles faktorer, der må sættes uden for parentes.

For eksempel, så kunne vi have udtrykket $2 \cdot (x + 3)$, her kan vi gange ind i parentesen $2x + 6$. Men hvis vi har udtrykket $2x + 6$, så kan vi vælge at sætte 2 uden for en parentes: $2 \cdot (x + 3)$.

Hvordan hjælper det at sætte uden for parentes til at løse en ligning? Hvis vi har ligningen:

$$3x^2 - 12x = 0,$$

så kunne vi løse den med nulpunktsformlen. Men vi kunne også vælge, at sætte den fælles faktor x uden for en parentes.

$$x \cdot (3x - 12) = 0.$$

Hvis man er i tvivl om man har regnet rigtig, så kan man gange ind i parentesen igen.

Nu kan vi bruge nulreglen:

$$\begin{aligned} x \cdot (3x - 12) &= 0 \\ x = 0 \ \vee \ 3x - 12 &= 0 \\ x = 0 \ \vee \ 3x &= 12 \\ x = 0 \ \vee \ x &= \frac{12}{3} = 4 \end{aligned}$$

Vi har nu løst en andengradsligning på en noget lettere måde end med nulpunktsformlen.

Et mere kompliceret eksempel kunne være:

$$(x^2 - x) \cdot e^{-x} + (x - 4) \cdot e^{-x} = 0$$

Vi har e^{-x} som fælles faktor

$$\begin{aligned} &e^{-x} \cdot (x^2 - x + x - 4) = 0 \\ &e^{-x} \cdot (x^2 - 4) = 0 \end{aligned}$$

Nulregel:

$$e^{-x} = 0 \ \vee \ x^2 - 4 = 0$$

Da $e^{-x} \neq 0$, har vi:

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ x &= \pm\sqrt{4} = \pm 2 \end{aligned}$$

6.6.4. Bevis for faktorisering. Den nye funktion, vi får ud fra faktorisering, giver den samme funktion som et almindeligt andengradspolynomium med samme nulpunkter og a-værdi. Det kan vi bevise.

Sætning 6.16. *Givet et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ med rødderne x_1 og x_2 (muligvis den samme rod), da gælder det at:*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \tag{6.1}$$

Bevis. Vi beviser, at højresiden er identisk med venstresiden. Vi begynder med at gange parenteserne ud.

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2) \\ &= a(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2) \end{aligned} \tag{6.2}$$

Vi er nu interesseret i at beregne $x_1 + x_2$ og x_1x_2. Da x_1 og x_2 er rødder kan vi benytte udtrykket for nulpunkter, se side 85. Vi sætter $x_1 = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$ og $x_2 = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$ og beregner:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} & x_1x_2 &= \left(\frac{-b - \sqrt{d}}{2a}\right)\left(\frac{-b + \sqrt{d}}{2a}\right) \\ x_1 + x_2 &= \frac{-b - b - \sqrt{d} + \sqrt{d}}{2a} & x_1x_2 &= \frac{(-b - \sqrt{d})(-b + \sqrt{d})}{4a^2} \\ x_1 + x_2 &= \frac{-2b}{2a} & x_1x_2 &= \frac{b^2 - b\sqrt{d} + b\sqrt{d} - \sqrt{d}^2}{4a^2} \\ x_1 + x_2 &= \frac{-b}{a} & x_1x_2 &= \frac{b^2 - d}{4a^2} \end{aligned}$$

Da $d = b^2 - 4ac$ for vi i det sidste udtryk: $x_1x_2 = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$. Dermed er $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ og $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Dette kan vi sætte ind i udregningen fra 6.2.

$$a(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2) = a\left(x^2 - x\left(\frac{-b}{a}\right) + \frac{c}{a}\right)$$

Vi ganger a ind i parentesen:

$$\begin{aligned} &= ax^2 - ax \cdot \left(\frac{-b}{a}\right) + a \cdot \left(\frac{c}{a}\right) \\ &= ax^2 - (-b)x + c \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Hvilket vi skulle vise. □

Cirkler

Dette kapitel vil omhandle cirkler. En cirkel består af alle de punkter, der er den samme afstand fra et centrum. Dermed er vi nødt til at behandle afstande. Vi begynder med endimensionelle afstande, hvilket vi udvider til to dimensioner.

Derefter behandler vi ligningen for en cirkel, og hvordan en sådan opstilles, samt hvad vi kan aflæse fra ligningen.

Cirklens ligning kan omformes, både ved at hæve de parenteser, der optræder i ligningen, men også ved at gå den anden vej, og samle parenteserne sammen igen. Hjælpemidlet til dette bliver de første to kvadratsætninger.

Det sidste emne er skæringen mellem linjer og cirkler, hvor vi kommer til at skulle løse andengradsligninger.

7.1. Afstande

Hvis vi har to værdier på tallinjen, for eksempel -2 og 4, så er det let at se, at afstanden mellem de to tal er 6. Vi kan endda regne afstanden ud ved at sige $4-(-2)=4+2=6$. Det virker, fordi vi sætter det største tal først. Hvis vi lavede den omvendte udregning, så ville vi få $-2-4=-6$, hvilket næsten er afstanden, hvis det ikke var fordi, det er et negativt tal.

Nogle gange kan vi ikke på forhånd sige hvilket af to tal, der vil være det største for eksempel, hvis vi bare får to variable x_1 og x_2, for så hjælper vores huskeregel ikke. Desuden vil vi gerne have, at afstande fra -2 til 4 er den samme som afstanden fra 4 til -2. Måden, hvorpå vi undgår at skulle holde styr hvilket tal, der er størst, kaldes *numerisk værdi*. Den er givet som en gaffelfunktion:

$$|x| = \begin{cases} x & 0 \leq x \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Den numeriske værdi fjerner fortegn fra tal. Hvis vi ønsker at beregne $|-6|$, så ser vi, at $-6 < 0$, så derfor er det den nederste formel, vi skal benytte, nemlig $-x$. Hvis vi indsætter -6, får vi $-(-6) = 6$. Dermed har vi slettet det negative fortegn. Hvis vi derimod beregner $|6|$, så ser vi, at $0 \leq 6$, og derfor skal vi anvende den øverste formel x. Hvis vi indsætter 6 i den, får vi 6. Dermed ser vi, at numerisk værdi gør negative tal positive, og lader alle andre tal være. Men hvordan hjælper det til at beregne afstande?

I eksemplet med -2 og 4 kan vi prøve at beregne $|-2-4| = |-6| = 6$. Det vil sige, at ved at sætte udregningen, der skulle give afstanden, ind i numerisk værdi funktionen, så får vi et positivt tal, som derfor kan anvendes som afstanden. Det giver anledning til en definition

Definition 7.1 (Afstand 1-D)**.** Hvis x_1 og x_2 er to tal, så er afstanden imellem dem givet ved:

$$|x_2 - x_1|$$

En særlig egenskab ved numerisk værdi er, hvis man sætter den i anden for eksempel $|-6|^2$, så kan man droppe numerisk værdi tegnet og bruge parenteser i stedet. For eksempel har vi: $|-6|^2 = 6^2 = 36$, og med parentes $(-6)^2 = (-6) \cdot (-6) = 36$. Det vil sige, at numerisk værdi er overflødig, hvis vi sætter den i anden. Generelt så har vi:

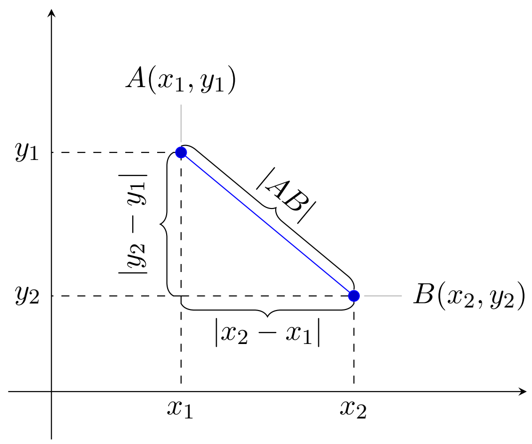
$$|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$$

Den relation vil blive nyttig i det, der kommer.

Vi vil nu se på afstande i to dimensioner. Her bliver situationen noget anderledes, vi har både beliggenhed i forhold til førsteaksen og i forhold til andenaksen. Det vil sige, at beregning af afstande skal tage højde for det.

Hvis vi har givet to punkter $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$, så kan vi beregne afstanden i mellem dem skrevet $|AB|$, se figur 7.1. Vi begynder med at beregne afstanden vandret og parallelt med førsteaksen ved at skrive $|x_2 - x_1|$. Ligeledes kan vi beregne afstanden lodret og parallelt med andenaksen ved at skrive $|y_2 - y_1|$. Hvis vi sætter en ret linje mellem de to punkter, så bliver den linje til hypotenusen i en retvinklet trekant, hvor den ene katete har længden $|x_2 - x_1|$, og den anden katete har længden $|y_2 - y_1|$. Ved hjælp af Pythagoras' sætning, så kan vi skrive:

$$\begin{aligned} hyp^2 &= kat^2 + kat^2 \\ |AB|^2 &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \end{aligned}$$



Figur 7.1. Figuren viser princippet bag afstandsformlen.

Numerisk tegn er ligegyldige:

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Det giver også en formel for afstanden mellem to punkter:

Definition 7.2 (Afstandsformlen)**.** Hvis to punkter $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ er givet, så kan afstanden mellem A og B skrevet $|AB|$, beregnes ved:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

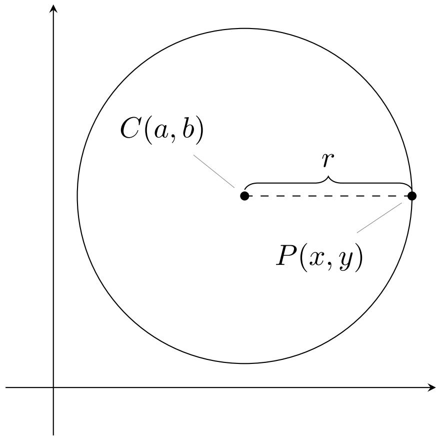
Eksempel 7.3. Hvis har fået givet punkterne $A(3, 5)$ og $B(7, 2)$, så kan vi aflæse, at $x_1 = 3$ og $x_2 = 7$, samt at $y_1 = 5$ og $y_2 = 2$. Vi sætter ind i formlen:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$|AB| = \sqrt{(7 - 3)^2 + (2 - 5)^2}$$
$$|AB| = \sqrt{4^2 + (-3)^2}$$
$$|AB| = \sqrt{16 + 9}$$
$$|AB| = \sqrt{25}$$
$$|AB| = 5$$

Dermed er afstanden fra A til B (eller omvendt) 5.

7.2. Cirklens ligning

Før vi kan behandle cirklens ligning, så er vi nødt til at være klar over, hvad vi mener med en cirkel.



Figur 7.2. Figuren viser ideen bag cirklens ligning.

Definition 7.4 (Cirkel)**.** Givet et punkt $C(a,b)$, så er en cirkel mængden af punkter, der er en bestem konstant afstand r fra centrum. Afstanden r kaldes radius.

Det vil sige, at hvis vi tegner en cirkel på et stykke papir, så er den streg vi har tegnet, der er cirklen. En konsekvens er, at en cirkel ikke har et areal, fordi streger ikke har nogen bredde. Det er selvfølgelig problematisk, at vi taler om arealet af en cirkel. Men det er et af de få steder, hvor den matematiske sprogbrug ikke er helt præcist. Faktisk, hvis vi gerne vil tale om cirkler som noget med et areal, så er ordet, vi skal bruge en *disk*.

På figur 7.2 har vi tegnet grundideen i en cirkel. Vi vil gerne sige, hvad det betyder for et punkt $P(x,y)$, at det ligger på en cirkel. Hvis vi har et centrum $C(a,b)$ og en radius r, så ved vi, at $|CP| = r$ eller, at afstanden fra C til P er radius. Vi kan nu bruge afstandsformlen til at få en ligning for cirklen:

$$\begin{aligned} |CP| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} &= r \\ \left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)^2 &= r^2 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Formlen $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ kaldes *cirklens ligning*.

Eksempel 7.5. Hvis vi har en cirkel med centrum i $C(1,3)$, og radius $r = 6$. Så kan vi indsætte i ligningen for cirklen:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$
$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 6^2$$
$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 36$$

Bemærk, fordi der står minus inde i parenteserne, så bliver positive koordinater negative.

Hvis vi har en cirkel med centrum i $C(-2,1)$, og radius $r = 7$. Så kan vi indsætte i ligningen for cirklen.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$
$$(x-(-2))^2 + (y-1)^2 = 7^2$$
$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 49$$

Bemærk, fordi førstekoordinaten til centrum er -2, og der allerede er et minus i formlen, så ender koordinaten med at optræde som positiv i formlen.

Eksempel 7.6. Hvis vi får givet en ligning for en cirkel:

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$$

Så kan aflæse, at centrum er $C(4,-2)$, og radius er $r = 5$. Grund til, at centrum er i $C(4,-2)$, er, at der er et minus mellem x og a og imellem y og b, så $x - 4$ betyder at $a = 4$, mens $y + 2 = y - (-2)$, hvilket betyder, at $b = -2$. At radiussen er $r = 5$, skyldes, at $r^2 = 25 \Rightarrow r = \sqrt{25} = 5$.

Vi kan undersøge om et punkt ligger på en cirkel, er inde i cirklen eller er uden for cirklen. Det kan vi, fordi cirklen ligning beregner afstanden i anden fra centrum til et punkt. Hvis den afstand i anden er mindre end r^2, så ligger punktet inden for cirklen, hvis afstanden i anden er større end r^2, så ligger punktet uden for cirklen. Og hvis afstanden i anden er præcis r^2, så ligger punktet på cirklen.

Eksempel 7.7. Hvis vi har cirklen:

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$$

så kan vi undersøge, om $(-7,2)$ ligger på cirklen. Vi indsætter punktet på x og y's plads i ligningen:

$$\begin{aligned}(x-4)^2 + (y+2)^2 &= (-7-4)^2 + (2+2)^2 \\ &= (-11)^2 + 4^2 \\ &= 121 + 16 = 137 \neq 25\end{aligned}$$

Så punktet $(-7,2)$ ligger ikke på cirklen, og faktisk ligger det uden for cirklen, fordi 137 er større end 25.

Vi vælger punktet $(1,-6)$, og prøver igen:

$$\begin{aligned}(x-4)^2+(y+2)^2 &= (1-4)^2+(-6+2)^2\\ &= (-3)^2+(-4)^2\\ &= 9+16=25\end{aligned}$$

Så punktet ligger på cirklen, fordi $(1,-6)$ opfylder ligningen.

Til sidst prøver vi med punktet $(6,-1)$.

$$\begin{aligned}(x-4)^2+(y+2)^2 &= (6-4)^2+(-1+2)^2\\ &= 2^2+1^2\\ &= 4+1=5\neq 25\end{aligned}$$

Dermed ligger punktet $(6,-1)$ ikke på cirklen, men faktisk inde i den, fordi 5 er mindre end 25.

7.3. Omformning af cirklens ligning

Dette afsnit handle om at omforme cirklens ligning. Det betyder, at vi vil hæve parenteserne og omvendt, hvis vi har en ligning, hvor parenteserne er hævede, så vil gendanne parenteserne.

Vi begynder med at se på, hvad der er involveret i at hæve en parentes, der er i anden. At parentesen er i anden betyder, at den skal ganges med sig selv:

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=?$$

Så vi er nødt til at kunne gange to parenteser sammen.

Metoden, til at gange parenteser sammen, er, at man begynder med det første led i den første parentes, det ganger man ind på hvert led i den anden parentes, så tager man det andet led i den første parentes, og ganger det på hvert led i den anden parentes. Og så lægger man det hele sammen. Rent visuelt ser det sådan ud:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot a$$

Denne måde at gange parenteser ud på kan anvendes til at beregne parenteser i anden. Faktisk er der tre formler, der beskriver, hvordan man skal gøre. De såkaldte *kvadratsætninger*.

Sætning 7.8. *For tal a og b gælder følgende kvadratsætninger:*

(1) $(a+b)^2=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b$

(2) $(a-b)^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b$

(3) $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$

Bevis. Vi begynder med første kvadratsætning:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b)\\ &= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b\\ &= a^2 + a\cdot b + a\cdot b + b^2\\ &= a^2 + b^2 + 2\cdot a\cdot b\end{aligned}$$

Den anden kvadratsætning:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)\cdot(a-b)\\ &= a\cdot a + a\cdot(-b) - b\cdot a - b\cdot(-b)\\ &= a^2 - a\cdot b - a\cdot b + b^2\\ &= a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\end{aligned}$$

Den tredje kvadratsætning er lettest at vise bagfra:

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(a-b) &= a\cdot a + a\cdot(-b) + b\cdot a + b\cdot(-b)\\ &= a^2 - a\cdot b + a\cdot b - b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

□

Bemærkning 7.9. Egentlig er den anden kvadratsætning overflødig. Den er faktisk en konsekvens af den første kvadratsætning. Det, man skal indse, er, at $(a-b)^2 = (a+(-b))^2$. Hvis vi bruger den første kvadratsætning på dette får vi:

$$(a+(-b))^2 = a^2 + (-b)^2 + 2\cdot a\cdot(-b) = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b$$

Alligevel kan det være praktisk at have begge kvadratsætninger.

En typiske anvendelse af kvadratsætningerne er til reduktion

Eksempel 7.10 (reduktion)**.** Vi har følgende udtryk vi ønske at reducere:

$$(a-b)^2 - b^2 + 2ab$$

ser på parentesen, og ser, at den ligner den anden kvadratsætning.

$$\begin{aligned}(a-b)^2 - b^2 + 2ab &= \underbrace{a^2 + b^2 - 2ab}_{(a-b)^2} - b^2 + 2ab\\ &= a^2 + b^2 - b^2 - 2ab + 2ab\\ &= a^2\end{aligned}$$

Det vil sige, at $(a-b)^2 - b^2 + 2ab = a^2$.

Et andet udtryk kunne være:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b}$$

Her kan vi bruge den tredje kvadratsætning på tælleren:

$$\begin{aligned}
\frac{a^2 - b^2}{a - b} &= \frac{\overbrace{(a+b)\cdot(a-b)}^{a^2-b^2}}{a-b} \\
&= (a+b)\cdot\frac{a-b}{a-b} \\
&= (a+b)
\end{aligned}$$

Dermed er $\dfrac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$.

I forhold til cirkler er der to parenteser, der skal hæves:

Eksempel 7.11. Vi har en cirkel med en ligning

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

Vi ønsker at hæve de to parenteser. Vi tager dem en af gangen:

$$\begin{aligned}
(x-3)^2 + (y+4)^2 &= 25 \\
\underbrace{x^2 + 3^2 - 2\cdot x\cdot 3}_{(x-3)^2} + (y+4)^2 &= 25 \\
x^2 + 9 - 6x + (y+4)^2 &= 25 \\
x^2 + 9 - 6x + \underbrace{y^2 + y^2 + 2\cdot y\cdot 4}_{(y+4)^2} &= 25 \\
x^2 + 9 - 6x + y^2 + 16 + 8y &= 25
\end{aligned}$$

Vi trækker 9 og 16 fra på begge sider af lighedstegnet:

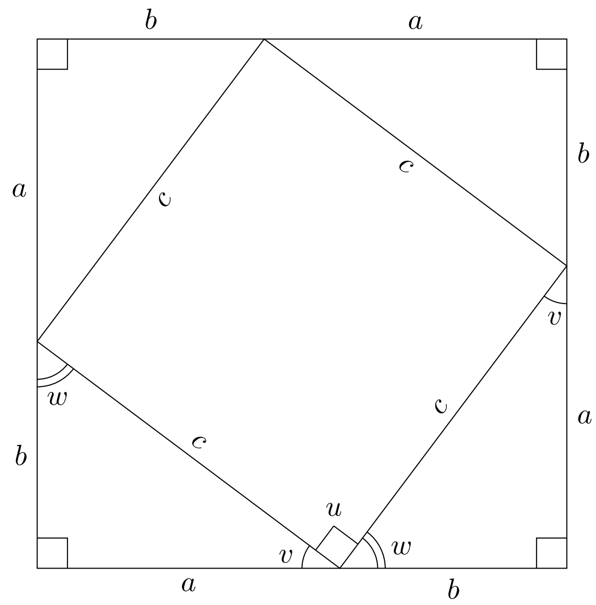
$$\begin{aligned}
x^2 - 6x + y^2 + 8y &= 25 - 9 - 16 \\
x^2 - 6x + y^2 + 8y &= 0
\end{aligned}$$

Det vil sige, hvis vi hæver parenteserne, så får vi ligningen $x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0$.

7.3.1. Pythagoras' sætning. Et sted kvadratsætningerne kan finde anvendelse er i et bevis for Pythagoras' sætning.

Sætning 7.12 (Pythagoras' sætning)**.** *Hvis vi har en retvinklet trekant med kateter a og b og hypotenuse c, så gælder følgende ligning:*

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Figur 7.3. Figuren viser udgangspunktet for Pythagoras' sætning.

Bevis. Vi forestiller os en retvinklet trekant med kateter a og b og hypotenuse c. De to vinkler, der ikke er rette, kaldes henholdsvis v og w. Vi placerer fire sådanne trekanter, som det kan ses på figur 7.3. De fire trekanter danner et ydre kvadrat med sidelængde $a + b$. Inde i dette kvadrat er der en firkant med sidelængde c. Vi begynder med vise, at denne indre firkant er et kvadrat. Vinkelsummen i en trekant er 180°. Dermed gælder det for hver trekant at:

$$v + w + 90° = 180°$$

Derfor gælder det, at $v+w = 90°$. På figur 7.3 kan vi se, at vinkel $v+u+w = 180°$. Da $v + w = 90°$ har vi $90° + u = 180°$. Dermed er $u = 90°$, og den indre firkant er et kvadrat.

Vi kan beregne arealet af det indre kvadrat på to måder, enten direkte som c^2 eller indirekte ved at tage arealet af den ydre firkant og trække arealerne af fire trekanter fra.

$$
\begin{aligned}
\text{areal af indre kvadrat} &= \text{areal af ydre kvadrat} - \text{areal af 4 trekanter} \\
c^2 &= (a+b)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot b\right) \\
c^2 &= (a+b)^2 - 2ab \\
c^2 &= a^2 + b^2 + 2ab - 2ab \\
c^2 &= a^2 + b^2
\end{aligned}
$$

□

Læg mærke til, at Pythagoras' sætning siger, hvis vi har en retvinklet trekant, så gælder $a^2 + b^2 = c^2$. Det giver anledning til spørgsmålet om det også gælder baglæns. Det vil sige, hvis en trekant opfylder $a^2 + b^2 = c^2$, er den så også retvinklet? Svaret er ja.

Sætning 7.13 (Omvendt Pythagoras' sætning)**.** *Hvis en trekant med siderne a, b og c opfylder $a^2 + b^2 = c^2$, så er den retvinklet.*

Bevis. Hvis vi har en trekant med siderne a, b og c, som opfylder, $a^2 + b^2 = c^2$. Så kan vi forstille os en ny retvinklet trekant med kateter med længde a og b. Vi ved fra Pythagoras' sætning, at vores nye trekant opfylder $a^2 + b^2 = c^2$, og dermed har hypotenusen længden c. Det vil sige, at vores nye trekant har de samme sidelængder som den oprindelige trekant, og derfor er de kongruente, og har de samme vinkler. Dermed er den oprindelige trekant også retvinklet. □

7.3.2. Kvadratkompletering. Det er nu tid til at regne baglæns. Vi forestiller os, at vi får en ligning for en cirkel, hvor parenteserne er blevet hævet, og der er blevet reduceret. En sådan ligning kunne se således ud:

$$x^2 - 6x + y^2 + 4x = -7$$

Vores opgave er at bestemme centrum og radius for denne cirkel. Det vil sige, at vi skal omforme ligningen, så den kommer tilbage på formen:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Metoden til at gøre det kaldes *kvadratkompletering*. Hele ideen med metoden er at benytte kvadratsætningerne baglæns. Da der både er et x og et y i cirklens ligning, så skal vi benytte metoden to gange. Derfor giver vi et simplere eksempel til at begynde med, som viser metoden én gang.

Eksempel 7.14. Vi ser på ligningen

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

Det er en andengradsligning, så vi kunne løse den med nulpunktsformlen. Vi vil dog tage en anden vej. Vi begynder med at trække 15 fra på begge sider af lighedstegnet:

$$x^2 - 8x = -15$$

Nu vil vi se på venstre side $x^2 - 8x$. Det ligner næsten resultatet af at have benyttet den anden kvadratsætning. Der mangler dog noget i anden:

$$\underbrace{x^2}_{a^2} + \underbrace{?}_{b^2} - \underbrace{8x}_{2ab}$$

Så vi mangler b. Hvis vi ser på $8x$, så skulle det svare til $2ab$. Vi ved, at $8 = 2 \cdot 4$, så vi kan skrive

$$8x = 2 \cdot 4x = 2 \cdot x \cdot 4$$

Her benytter vi, at rækkefølgen vi ganger, er ligegyldig. Dermed kan vi skrive:

$$\underbrace{x^2}_{a^2} + \underbrace{?}_{b^2} - \underbrace{2 \cdot x \cdot 4}_{2ab}$$

Det fortæller os, at $b = 4$ er et godt bud. Tallet $b^2 = 4^2$ mangler dog i ligningen, så det er vi nødt til at tilføje ved lægge 4^2 til på begge sider af lighedstegnet.

$$\begin{aligned} x^2 - 8x &= 15 \\ \underbrace{x^2}_{a^2} + \underbrace{?}_{b^2} - \underbrace{2 \cdot x \cdot 4}_{2ab} &= -15 \\ \underbrace{x^2}_{a^2} + \underbrace{4^2}_{b^2} - \underbrace{2 \cdot x \cdot 4}_{2ab} &= -15 + 4^2 \\ \underbrace{(x-4)^2}_{(a-b)^2} &= -15 + 16 \\ (x-4)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Nu kan vi uddrage kvadratroden og huske, at der er to muligheder:

$$x - 4 = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Den første ligning giver: $x - 4 = -1 \Leftrightarrow x = -1 + 4 = 3$, og den anden ligning giver: $x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = 1 + 4 = 5$. Det vil sige, at vi fundet løsningerne $x = -3$ og $x = 5$.

Teknikken der angives i eksemplet oven over er, at se på tallet foran x eller y og halvere det. Det halve tal i anden kan vi så lægge til på begge sider af lighedstegnet. Og så kan vi benytte kvadratsætningerne baglæns. Om det er den første eller anden kvadratsætning afgøres af fortegnet på tallet foran x eller y.

Eksempel 7.15. Vi har ligningen:

$$x^2 - 6x + y^2 + 4x = -7$$

Vi begynder med x. Tallet foran x er -6, så det er den anden kvadratsætning vi skal bruge. Halvdelen af 6 er 3, så vi kan skrive:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 + 4x &= -7 \\ x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + y^2 + 4y &= -7 \\ \underbrace{x^2 + 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3}_{a^2+b^2-2ab} + y^2 + 4y &= -7 + 3^2 \\ (x-3)^2 + y^2 + 4y &= -7 + 9 = 2 \end{aligned}$$

Nu skal vi se på tallet foran y. Det er tallet 4, så det er den første kvadratsætning vi skal anvende. Halvdelen af 4 er 2, så vi skal lægge 2^2 til på begge sider af lighedstegnet.

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + \underbrace{y^2 + 2^2 + 2 \cdot y \cdot 2}_{a^2+b^2+2ab} &= 2 + 2^2 \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 &= 6 \end{aligned}$$

Dermed er centrum for cirklen $C(3, -2)$, og radius er $r = \sqrt{6}$

7.4. Skæring mellem cirkel og linje

I dette sidste afsnit vil vi beregne skæringspunkter mellem en cirkel og en linje. På figur 7.4 er den samme cirkel tegnet med 3 forskellige linjer, der skær cirklen i to punkter. Umiddelbart er det muligt at aflæse koordinaterne til skæringspunkterne fra figuren, men vi vil gerne kunne beregne dem.

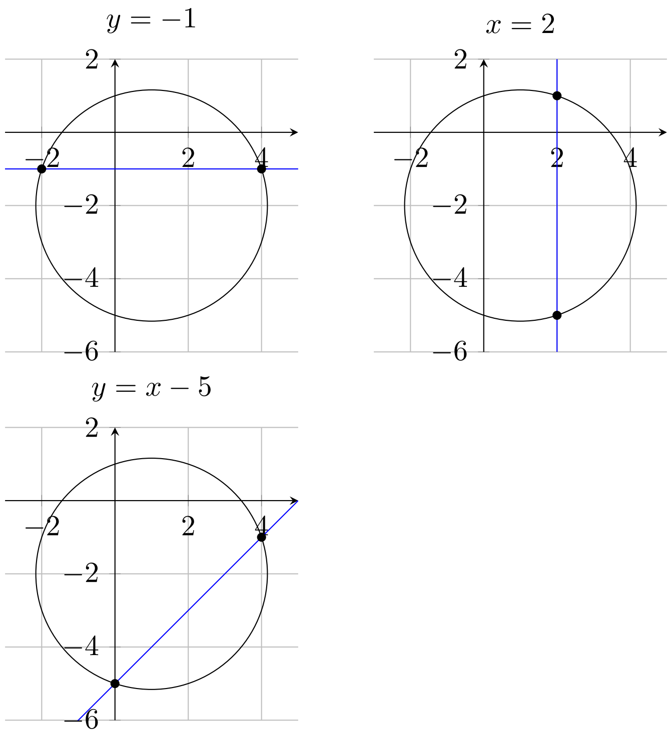
Vi skal bestemme alle de x og y, som sikrer, at ligningen for cirklen $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ og linjen $y = ax + b$ begge er opfyldt på samme tid. Vi giver et eksempel

Eksempel 7.16. Vi ønsker at bestemme skæringspunkterne til cirklen

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$$

og linjen

$$y = -1$$



Figur 7.4. Tre figurer der viser forskellige situationer, hvor linjer skær cirklen $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$.

Metoden, vi vil benytte, er at skifte y ud (substituere) i cirklens ligning med linjen.

$$
\begin{aligned}
(x-1)^2 + (y+2)^2 &= 10 \\
(x-1)^2 + (-1+2)^2 &= 10 && \text{indsætter } y = -1 \\
(x-1)^2 + 1^2 &= 10 \\
(x-1)^2 + 1 &= 10 \\
(x-1)^2 &= 9 \\
x - 1 &= \pm\sqrt{9} && \text{uddrager kvadratroden} \\
x - 1 &= \pm 3
\end{aligned}
$$

Dermed er der to ligninger: $x - 1 = -3 \Leftrightarrow x = -3 + 1 = -2$, og $x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 3 + 1 = 4$. Det vil sige, da $y = -1$, så er skæringspunkternes koordinater $(-2, -1)$ og $(4, -1)$.

Eksempel 7.17. Vi ønsker at bestemme skæringspunkterne til cirklen

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$$

og linjen

$$x = 2$$

Metoden, vi vil benytte, er at skifte x ud (substituere) i cirklens ligning med linjen.

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 + (y+2)^2 &= 10 && \\
(2-1)^2 + (y+2)^2 &= 10 && \text{indsætter } x = 2 \\
1^2 + (y+2)^2 &= 10 && \\
(y+2)^2 &= 9 && \\
y + 2 &= \pm\sqrt{9} && \text{uddrager kvadratroden} \\
y + 2 &= \pm 3 &&
\end{aligned}$$

Dermed er der to ligninger: $y+2 = -3 \Leftrightarrow y = -3-2 = -5$, og $y+2 = 3 \Leftrightarrow y = 3-2 = 1$. Det vil sige, da $x = 2$, så er skæringspunkternes koordinater $(2, -5)$ og $(2, 1)$.

Eksempel 7.18. Vi ønsker at bestemme skæringspunkterne til cirklen

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$$

og linjen

$$y = x - 5$$

Metoden, vi vil benytte, er at skifte y ud (substituere) i cirklens ligning med linjen.

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 + (y+2)^2 &= 10 && \\
(x-1)^2 + (x-5+2)^2 &= 10 && \text{indsætter } y = x - 5 \\
(x-1)^2 + (x-3)^2 &= 10 && \\
x^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot x + (x-3)^2 &= 10 && \text{hæver første parentes} \\
x^2 + 1 - 2x + x^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot x &= 10 && \text{hæver anden parentes} \\
2x^2 - 2x - 6x + 1 + 9 &= 10 && \\
2x^2 - 8x + 10 &= 10 && \\
2x^2 - 8x &= 0 &&
\end{aligned}$$

Det sidste er en andengradsligning. Vi skal benytte

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}, \qquad d = b^2 - 4ac$$

Vi aflæser at $a = 2$, $b = -8$ og $c = 0$. Diskriminanten bliver:

$$d = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\cdot 2\cdot 0 = 64$$

Vi bestemmer x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm 8}{4}$$

Vi har nu to løsninger, og vi begynder med minus:

$$x = \frac{8-8}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Så tager vi plus:

$$x = \frac{8+8}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Dermed er vores førstekoordinater givet ved: $x = 0$ eller $x = 4$. Men hvad med y?. Vi har heldigvis en formel: $y = x - 5$. Så vi indsætter først $x = 0$:

$$y = x - 5 = 0 - 5 = -5$$

Så $x = 4$:

$$y = x - 5 = 4 - 5 = -1$$

Det vil sige, at skæringspunkterne er $(0, -5)$ og $(4, -1)$.

Del 2

Videregående emner

Kapitel 8

Væksthastighed

Dette kapitel handler om væksthastighed for funktioner. Det er en del af det store emne, der kaldes *differentialregning*. Vores fokus i dette kapitel vil være på, hvordan væksthastighed beregnes, og hvad væksthastigheden kan sige om en funktion.

Vi begynder kapitlet med at se på en række af de begreber, der knytter sig til funktioner og væksthastighed. Når vi har det på plads, begynder vi at skulle regne, og derfor indfører vi regneregler for væksthastighed, og viser hvordan den beregnes i de simple tilfælde.

Derefter, introducerer vi begrebet tangent, som er en måde, hvorpå vi næsten kan behandle en funktion, som om den er lineær.

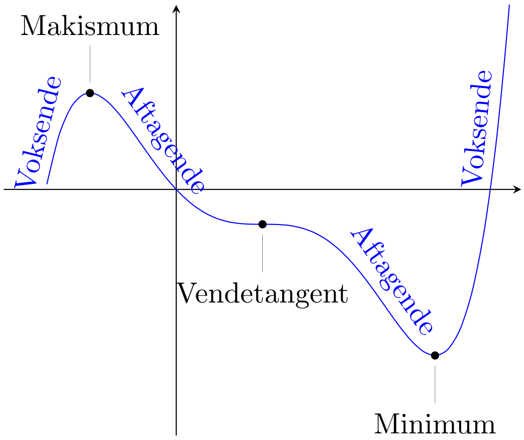
Væksthastighed giver os en metode til at finde maksima og minima – der hvor funktionsværdien er størst eller mindst – for funktioner. Det kan også bruges til at bestemme, hvordan funktionen ser ud, hvis vi ikke umiddelbart kan tegne dens graf. Det kaldes funktionens monotoniforhold.

Til sidst vil vi behandle, hvordan væksthastigheden kan beregnes for mere komplicerede funktioner.

8.1. Begreber om funktioner

I det følgende vil vi introducere en række begreber om funktioner (dog ikke alle begreber). Enhver funktion har en graf, som vi kan tegne i et koordinatsystem. Et eksempel på en graf for en funktion kan ses på figur 8.1.

Grafen på figur 8.1 skifter mellem at være voksende og aftagende. Hvis vi har en top på grafen, så er det maksimum, og hvis vi har et bund på grafen, så er det et minimum. Maksimum i flertal kaldes maksima , og det er punkter, hvor funktionsværdien ($f(x)$) er størst. Ligeledes kaldes minimum i flertal for



Figur 8.1. Figuren viser grafen for en funktion, på grafen er der skrevet, hvor den voksende og aftagende, og de typer ekstrema.

minima, og det er punkter, hvor funktionsværdien er mindst. Et maksimum er kendetegnet ved, at grafen vokser til venstre for maksimummet, og aftager til højre for maksimummet. Omvendt med et minimum. Der aftager grafen til venstre for minimummet og vokser til højre for minimummet. Bemærk, at det er upræcist at skrive til venstre for og til højre for, da der kan ske mange ting til venstre eller højre, men her er tanken, at der skal ses tæt på punktet.

På figur 8.1 er vores maksimum ikke højest, der er punkter helt ude til højre, der ligger længere oppe. Så vores maksimum er lavere end disse punkter. Men lige i nærheden af vores maksimum ligger vores maksimum højest, et sådant maksimum kaldes et lokalt maksimum. Det er også muligt at have et lokalt minimum, men på figur 8.1, der er der kun ét minimum, og et sådant kaldes et globalt minimum. Et maksimum kan også være globalt.

Vi vil nu definerer, hvad vi mener med et maksimum og et minimum. Til det skal vi bruge begrebet om et indre punkt i et interval. Givet et interval $[a; b]$ eller $]a; b[$, så er x et indre punkt i intervallet, hvis x ligger i intervallet og $x \neq a$ og $x \neq b$. Med andre ord, må x ikke ligge på kanten af intervallet.

Definition 8.1 (Maksimum og minimum)**.** Hvis x_0 er et indre punkt i et interval, så har funktionen f et maksimum i x_0, hvis det for alle x i intervallet gælder, at $f(x) < f(x_0)$. Funktionen f har et minimum i x_0, hvis det for alle x i intervallet gælder, at $f(x) > f(x_0)$.

Tallet x_0 kaldes henholdsvis maksimums- eller minimumsstedet. Funktionsværdien $f(x_0)$ kaldes henholdsvis maksimum- eller minimumværdien. Punktet $(x_0, f(x_0))$ kaldes henholdsvis et (lokalt) maksimum eller minimum.

Definitionen er stor mundfuld, men den siger bare det vi intuitivt kan se ud fra en graf.

Vi kan nu takle begrebet væksthastighed. En hastighed er et mål for hvor hurtigt et eller andet ændre sig. I forbindelse med funktioner er det et mål for, hvor hurtigt funktionsværdien vokser eller aftager i et punkt på grafen. Væksthastighed regnes med fortegn. Hvis en funktion vokser, så har den positiv væksthastighed, hvis den aftager, så har den negativ væksthastighed. Hvis vi derimod er i et maksimum eller minimum, så er væksthastigheden 0, for hvis den ikke var det, så ville vi ikke kunne gå fra voksende til aftagende eller omvendt.

Der er dog en anden mulighed for at væksthastigheden kan være nul. På figur 8.1 er der et punkt i midten, der kaldes en vandret vendetangent. Det, der kendetegner et sådant punkt, er, at grafen flader så meget ud, at væksthastigheden i et punkt på grafen bliver nul, hvorefter grafen fortsætter som hidtil. På figuren optræder vendetangenten, når funktionen aftager, men det kunne lige så godt ske mens funktionen vokser (vend grafen på hovedet).

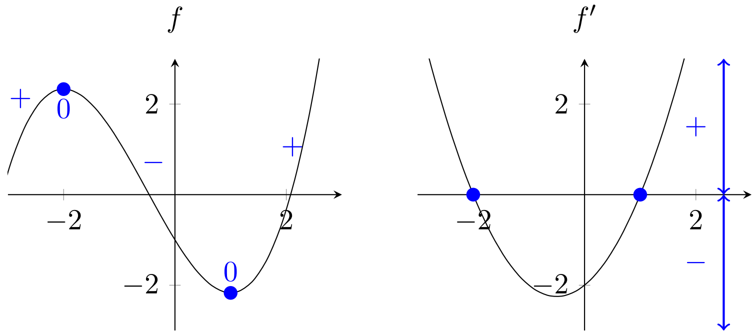
Udgangspunktet er, at vi har en funktion f, hvis væksthastighed vi ønsker at beregne. Det vi vil gøre er at tage f, og lave en ny funktion f' kaldet *f-mærke*. Ideen er, at det lille $'$ fortæller os, at vi ikke længere ser på f, men derimod en ny funktion, der er lavet ud fra f. Derfor kaldes f' for den afledte funktion af f, og processen, hvor vi beregner f', kaldes at differentiere. For figur 8.1 kan oplysningerne om positiv og negativ væksthastighed, samt udseendet på grafen samles i det, der kaldes en *monotonilinje*. Her har vi valgt nogle værdier for førstekoordinaterne til de tre steder med væksthastighed nul.

x		-1		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

På figur 8.2 er der til venstre tegnet en graf for en funktion f. Yderst til venstre vokser grafen for f, Det vil sige, at f har positiv væksthastighed. I det højre koordinatsystem, hvor f' er tegnet, svarer det til, at der er positive funktionsværdier. På den venstre graf er der sat to punkter i grafens maksimum og minimum. I de to punkter er der ikke nogen væksthastighed, hvorfor grafen for f' skær førsteaksen i højre koordinatsystem. I mellem de to punkter aftager f, og derfor har f' negative funktionsværdier.

Monotonilinjen for grafen i figur 8.2 vil se sådan ud:

x		-2		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



Figur 8.2. I det venstre koordinatsystem er der tegnet grafen for en funktion f. Fortegnene $+$ og $-$ angiver om der positiv eller negativ væksthastighed. I det højre koordinatsystem er der tegnet den afledte til f kaldet f'. Når f vokser antager f' positive værdier. Når f aftager, så antager f' negative værdier. Når f har et maksimum eller minimum, så skær grafen for f' førsteaksen.

Pointen er, at udseendet af f er bestemt af funktionsværdierne for f'. Det vil sige, hvis vi ved noget om f', så ved vi også noget om f.

For at afsluttet dette afsnit, giver vi et eksempel på en anvendelse af væksthastighed, hvor vi vil beregne en konkret hastighed, nemlig den hastighed en ting rammer jorden med, hvis den tabes fra 20 meters højde.

Eksempel 8.2. Vi taber en ting fra 20 meters højde. Hvor højt tingen er over jorden kan beskrives ved en funktion:

$$f(x) = -4{,}41 \cdot x^2 + 20,$$

hvor $f(x)$ er højden over jorden målt i meter, og x er tiden, der er gået siden tingen begyndte at falde målt i sekunder.

Hvis vi skal beregne tingens hastighed, når den rammer jorden, så er vi først nødt til at beregne, hvor lang tid der går før tingen når jorden. Ved jorden er tingen 0 meter over jordoverfladen. Så vi løser $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -4{,}41 \cdot x^2 + 20 &= 0 \\ 20 &= 4{,}41 \cdot x^2 \\ \frac{20}{4{,}41} &= x^2 \\ \pm\sqrt{4{,}535} &= x \\ \pm 2{,}13 &= x \end{aligned}$$

Her vælger vi den positive værdi, da tingen ikke rammer jorden i fortiden. Nu ved vi, at det tager 2,13 sekunder for tingen at ramme jorden. Så nu kan vi beregne hastigheden.

Vi vil i næste afsnit se, at væksthastigheden for f kan beregnes ud til at være:

$$f'(x) = 9{,}82 \cdot x,$$

hvor $f'(x)$ er hastigheden målt i meter i sekundet, og x er tiden målt i sekunder.

Vi kan nu beregne hastigheden:

$$f'(2{,}13) = 9{,}82 \cdot 2{,}13 \approx 20{,}9$$

Det vil sige, at tingen rammer jorden 20,9 meter i sekundet eller ca. 75 km. i timen.

8.2. Beregning af væksthastighed I

Så hvordan laver vi så f', når vi kender f. Svaret er, at vi benytter en oversættelsestabel. I den ene kolonne har vi f, og i den anden har vi det, vi skal lave f om til, nemlig f'.

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^a	ax^{a-1}
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
e^{kx}	ke^{kx}
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

En formelsamling vil indeholde flere end de ovennævnte funktioner. Så, hvis du ikke kan finde din funktion på den ovenstående liste, så kig i din formelsamling.

Tanken bag tabellen ovenfor er, hvis man har en funktion, så kan funktionen deles op i mindre dele, og så kan vi anvende tabellen på hver del. Vi giver en række eksempler

Eksempel 8.3. Vi begynder med et nogenlunde simpelt eksempel: $f(x) = x^3$. Her består funktionen kun af én del. Derfor kan vi straks lede i tabellen. Vi ser at x^3 ligner x^a, med $a = 3$, så det skal laves om til ax^{a-1}, og da $a = 3$, bliver det $3x^{3-1} = 3x^2$. Det vil sige, at f-mærke er

$$f'(x) = 3x^2$$

Eksempel 8.4. Vi tager nu funktionen $f(x) = \sin(x) + \ln(x)$. Vi kan se, at den består af to dele adskilt af et plus – også kaldet led. Reglen er, at vi må se på $\sin(x)$ og $\ln(x)$ hver for sig. Det første led $\sin(x)$ laves om til $\cos(x)$, og det andet led $\ln(x)$ laves om til $\frac{1}{x}$. Når vi har fundet ud af det, så er det vigtigt, at vi ændrer hele f på en gang, og dermed kan vi skrive

$$f'(x) = \cos(x) + \frac{1}{x}$$

Der er en alternativ måde at nå frem til det samme på, hvis man bliver forvirret. Vi sætter parenteser med $'$ efter på de dele/led, som vi vil finde væksthastigheden for individuelt. Det ser sådan ud:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin(x) + \ln(x))' \\ &= (\sin(x))' + (\ln(x))' \\ &= \cos(x) + (\ln(x))' \\ &= \cos(x) + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Eksempel 8.5. Vi ser på funktionen $f(x) = 4x^2 - 3 \cdot e^{5x}$. Som i det forrige eksempel kan vi dele funktionen i to led: $4x^2$ og $-3 \cdot e^{5x}$, hvis vi ser i tabellen er der noget, som kunne ligne de to led, men der står 4 og -3 foran, så hvad gør vi så. Svaret er, at vi lader 4 og -3 stå, og husker, at der er et gange efter dem. Så kan vi nøjes med at se på x^2, som bliver til $2x$, og e^{5x} som ligner e^{kx}, hvor $k = 5$, så den laves om til $5 \cdot e^{5x}$. Samlet får vi:

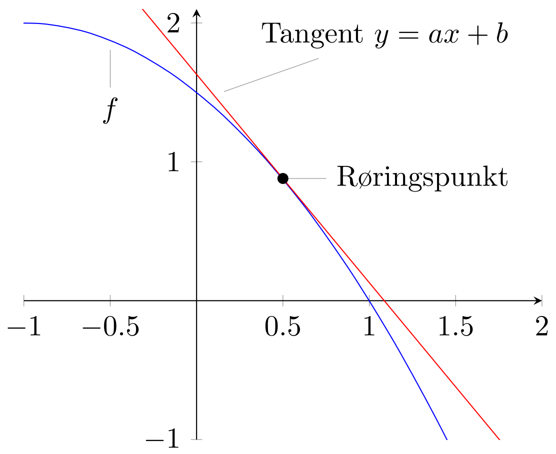
$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot 2x - 3 \cdot 5 \cdot e^{5x} \\ f'(x) &= 8x - 15 \cdot e^{5x} \end{aligned}$$

Som i det forrige eksempel kan vi tage funktionen i bidder:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(4x^2 - 3 \cdot e^{5x}\right)' \\ &= \left(4x^2\right)' - \left(3 \cdot e^{5x}\right)' \\ &= 4 \cdot \left(x^2\right)' - 3 \cdot \left(e^{5x}\right)' \\ &= 4 \cdot 2x - 3 \cdot 5 \cdot e^{5x} \\ &= 8x - 15 \cdot e^{5x} \end{aligned}$$

Vi giver i dette afsnit ikke flere eksempler. Resten af kapitlet vil være fyldt med beregninger af f-mærke, så der kommer ikke til at mangle eksempler.

I de tre ovenstående eksempler har vi benyttet, at vi kan dele funktionerne op på forskellig vis. Det skyldes, at der er tre regneregler, der tillader



Figur 8.3. Figuren viser grafen for en funktion f og dens tangent i røringspunktet $(x_0, f(x_0))$.

denne opdeling. Reglerne kan skrive som:

$$\text{Sumregel:} \quad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$
$$\text{Differensregel:} \quad (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$
$$\text{Konstant faktor:} \quad (k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

8.3. Tangent

En tangent er en lineær funktion, som tæt på et punkt på grafen for en funktion f, ligner f. Det lyder lidt kryptisk. Tanken er, at vi har en funktion f, og vi har et førstekoordinat x_0. Tæt på $(x_0, f(x_0))$ vil en tangent næsten have de samme funktionsværdier som f. Undertiden kaldes en tangent, derfor for en førsteordensapproximation til f. Ordet førsteorden indikerer, at der er højere ordner – mere om det senere.

En tangent er en lineær funktion $y = ax + b$, så derfor skal vi kunne beregne a og b, for at have en tangent. Udgangspunktet er, at vi kender en funktion f og et førstekoordinat x_0, så umiddelbart kan det se ud som om, at vi ikke har nok oplysninger, se figur 8.3. Nu er det sådan, at væksthastigheden i punktet $(x_0, f(x_0))$ – kaldet røringspunktet – kan beregnes som $f'(x_0)$. Men væksthastigheden er netop hældningen. Dermed er $a = f'(x_0)$. Med andre ord, vi kan beregne hældningen for tangenten ud fra f'. Så mangler vi b. Men formlen for b er givet ved: $b = y_0 - ax_0$. Her kender vi a og x_0, så hvis vi kan beregne y_0, så kan vi også beregne b. Funktionen f beregner andenkoordinater, så dermed er $f(x_0) = y_0$. Det ovenstående kan koges ned i følgende procedure.

- Bestem $f'(x)$

- Beregn $a = f'(x_0)$
- Beregn $y_0 = f(x_0)$
- Beregn $b = y_0 - a \cdot x_0$
- Sæt det hele sammen til en funktion $y = ax + b$

Vi giver et eksempel:

Eksempel 8.6. Vi ønsker at beregne en ligning for tangenten til

$$f(x) = -x^2 + 2x + 4$$

i punktet $(2, f(2))$. Det vil sige, at $x_0 = 2$. Vi beregner først

$$f'(x) = -2x + 2$$

Så beregner vi

$$a = f'(2) = -2 \cdot 2 + 2 = -4 + 2 = -2$$

Så hældningen er $a = -2$. Vi beregner andenkoordinatet

$$y_0 = f(2) = -2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = -4 + 4 + 4 = 4$$

Så punktet på grafen for f er $(2, 4)$. Vi beregner

$$b = y_0 - ax_0 = 4 - (-2) \cdot 2 = 4 + 4 = 8$$

Ligningen bliver så samlet:

$$y = -2x + 8$$

8.4. Monotoni

Vi har set på figur 8.2, at der er en klar sammenhæng mellem fortegn for f', og hvorvidt grafen for f vokser eller aftager. Sammenhængen er givet i følgende sætning kaldet *monotonisætningen*.

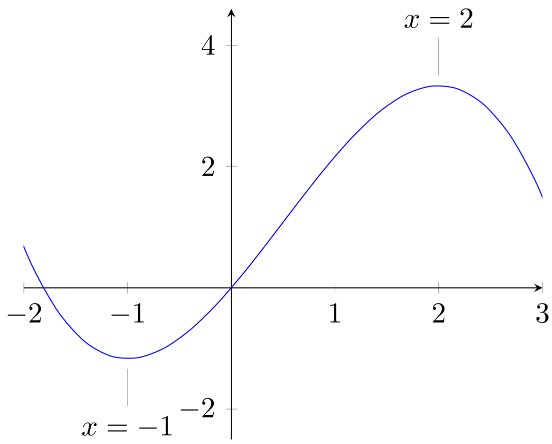
Sætning 8.7 (Monotonisætningen)**.** *Hvis funktion f er differentiabel gælder følgende:*

(1) *Hvis $f'(x) > 0$ for alle x i et interval I, så er f voksende på intervallet I.*

(2) *Hvis $f'(x) < 0$ for alle x i et interval I, så er f aftagende på intervallet I.*

(3) *Hvis $f'(x) = 0$ for alle x i et interval I, så er f konstant (dvs. $f(x) = k$) på intervallet I.*

Sætningen er noget af en mundfuld. Men det den siger er logisk. Hvis en funktion har positiv væksthastighed, så vokser funktionen, hvis den har negativ væksthastighed, så aftager funktionen, og hvis den ikke har væksthastighed, så er den konstant.



Figur 8.4. Graf for en funktion f, hvor førstekoordinaterne for maksimum og minimum er angivet.

Det vi skal er nu at bestemme i hvilke områder på førsteaksen en funktion er voksende, eller aftagende, og om der er nogle steder, hvor der er et maksimum eller minimum (eller noget helt andet). At bestemme disse ting for en funktion f, kaldes at bestemme dens *monotoniforhold*.

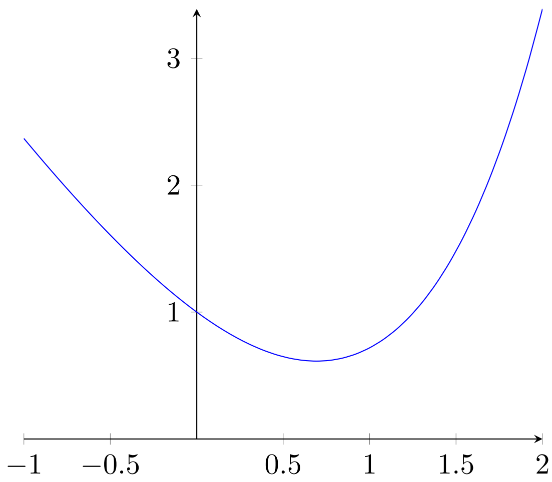
For at bestemme monotoniforhold for en funktion, vil vi normalt se efter, hvor grafen ændrer sig fra for eksempel at være voksende til aftagende. De punkter, hvor et sådant skift sker har vi tidligere kaldt maksimum, minimum eller vandret vendetangent. Men når vi bestemmer monotoniforhold for en funktion, så kan det være sådan, at vi ikke på forhånd kan vide hvilket type punkt vi har fundet. Derfor er der en samlet betegnelse for disse punkter: Vi kalder dem *ekstrema* i ental *ekstremum*. Vi vil bruge den betegnelse for alle punkter $(x_0, f(x_0))$, hvor vi har $f'(x_0) = 0$.

Vi vil give tre eksempler i stigende sværhedsgrad.

Eksempel 8.8 (Hvis vi har en graf)**.** Grafen for en funktion f kan ses på figur 8.4.

Der er to særlige punkter, der er angivet på grafen. Nemlig, der hvor grafen går fra at være aftagende til at være voksende og fra at være voksende til at være aftagende. Det, der kendetegner de to punkter, er, at deres væksthastighed er 0. Punktet, hvor $x = -1$, kaldes et minimum, og punktet, hvor $x = 2$, kaldes et maksimum. Vi kan se, at funktionen til er aftagende, når $x \leq -1$, voksende når $-1 \leq x \leq 2$, og aftagende når $2 \leq x$. En monotonilinje for grafen vil se sådan ud:

x		-1		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$



Figur 8.5. Grafen for $f(x) = e^x - 2x$.

Samlet kan vi angive monotoniforholdene med intervalnotation som:
Funktionen f er aftagende på intervallerne $]-\infty;-1]$ og $[2;\infty[$.
Funktionen f er voksende på intervallet $[-1;2]$.
Funktionen f har et maksimum i $(2, f(2))$.
Funktionen f har et minimum i $(-1, f(-1))$.

Vi anvender symbolet ∞ til at angive, at intervallet ikke har en øvre eller nedre grænse. Intervalparentesen] eller [skal vende væk fra ∞.

Eksempel 8.9 (Hvis vi kan få hjælp af en computer)**.** Vi har nu fået givet funktionen $f(x) = e^x - 2x$, og vi skal bestemme dens monotoniforhold. Da vi har en computer tilrådighed, kan vi begynde med at tegne grafen for f. Se figur 8.5.

Der ser ud til at være et minimum, men det er ikke let at aflæse dets førstekoordinat. Så vi kommer til at regne for at bestemme førstekoordinatet til minimummet.

Det vi leder efter er et x, så væksthastigheden i $(x, f(x))$ er nul. Det vil sige, at vi ønsker at løse følgende ligning:

$$f'(x) = 0$$

Hvis vi beder en computer om at løse den ligning, får vi $x \approx 0{,}69315$. Der er to ting vi nu kan sige. Det første er, at vi har fundet *alle* ekstrema, og det andet er, at de alle kan ses på vores graf. Dermed fortæller grafen hele historien om udseendet på f. Vi kan nu konkludere:

Funktionen f er aftagende på intervallet $]-\infty;0{,}69315]$.

Funktionen f er voksende på intervallet $[0{,}69315; \infty[$.

Funktionen f har et minimum i $(0{,}69315, f(0{,}69315))$.

En monotonilinje for f vil se sådan ud (men når vi bruger en computer, så er den overflødig)

$$\begin{array}{cccc}
x & & 0{,}69 & \\
\hline
f'(x) & - & 0 & + \\
f(x) & \searrow & & \nearrow
\end{array}$$

Vi bemærker som afslutning, at ligningen $f'(x) = 0$ faktisk godt kan løses i hånden i dette tilfælde. Vi differentierer f, og får: $f'(x) = e^x - 2$. Vi løser $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
e^x - 2 &= 0 \\
e^x &= 2 \\
\ln(e^x) &= \ln(2) \\
x &= \ln(2) \approx 0{,}69315
\end{aligned}$$

Eksempel 8.10 (Hvis vi ikke har en computer)**.** Vi får givet funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$. Nu kan vi ikke bare tegne grafen for f, så i stedet må vi lede efter ekstrema. Det vil sige, at vi løser

$$f'(x) = 0$$

Vi begynder med at differentiere:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

Derefter løser vi $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
3x^2 - 6x - 9 &= 0
\end{aligned}$$

Vi har fået fat på en andengradsligning. Så vi hiver diskriminantformlen frem:

$$\begin{aligned}
d &= b^2 - 4ac \\
d &= (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9) \\
&= 36 - 12 \cdot (-9) \\
&= 36 + 108 = 144
\end{aligned}$$

Dermed er der to nulpunkter:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} \\
x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 3} \\
&= \frac{6 \pm 12}{6} \\
x &= \frac{-6}{6} = -1 \ \vee \ x = \frac{18}{3} = 3
\end{aligned}
$$

Så vi har to mulige ekstrema, men vi kan ikke umiddelbart sige, hvad de er. En monotonilinje for f vil se sådan ud på dette tidspunkt:

x		-1		3	
$f'(x)$	?	0	?	0	?

Nu ved vi dog, at væksthastigheden før, imellem og efter de to ekstrema, er enten er positiv eller negativ (den kan jo ikke være 0). Så vi kan afprøve, hvad fortegnene for $f'(x)$ er? Vi vælger et tal før $x = -1$ f.eks. $x = -2$ et i mellem $x = -1$ og $x = 3$ f.eks. $x = 0$. Og vi vælger til sidst et tal større end $x = 3$ f.eks. $x = 4$. Dette kaldes en *fortegnsundersøgelse*. Nu kan vi beregne $f'(x)$ for de tre værdier:

$$
\begin{aligned}
f'(-2) &= 3 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) - 9 = 3 \cdot 4 + 12 - 9 = 12 + 12 - 9 = 15 > 0 \\
f'(0) &= 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 9 = -9 < 0 \\
f'(4) &= 3 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 - 9 = 3 \cdot 16 - 24 - 9 = 48 - 24 - 9 = 15 > 0
\end{aligned}
$$

Så vores monotonilinje kan nu gøres færdig:

x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Konklusionen er så:

Funktionen f er voksende på intervallerne $]-\infty; -1]$ og $[3; \infty[$.

Funktionen f er aftagende på intervallet $[-1; 3]$.

Funktionen f har et maksimum i $(-1, f(-1))$.

Funktionen f har et minimum i $(3, f(3))$.

I det sidste eksempel kan vi opskrive metoden i fire punkter.

(1) Beregn $f'(x)$.

(2) Løs ligningen $f'(x) = 0$.

(3) Lav en fortegnsundersøgelse.

(4) Konkluder.

Kapitel 9

Sandsynlighedsregning

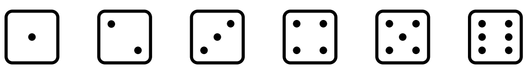
Dette kapitel introducerer sandsynlighedsregning. Kapitlet er forholdsvis begrebstungt. Vi begynder med kapitlet de grundlæggende begreber indenfor sandsynlighedsregning, inden vi fortsætter til kombinatorik.

Kombinatorik handler om at tælle, og det har vi brug for i forbindelse med kapitlets hovedbegreb, nemlig binomialfordelingen.

9.1. Grundlæggende begreber

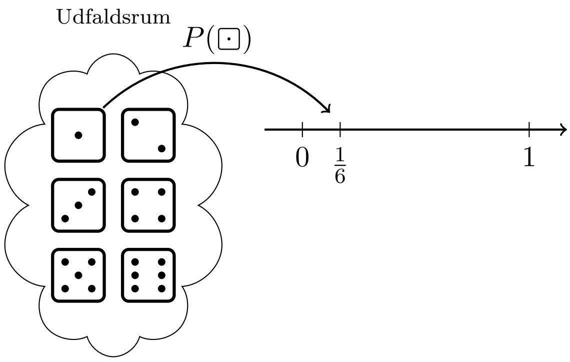
Sandsynlighedsregning handler situationer, hvor der er et element af tilfældighed involveret. Det kan være kast med en terning, et spil kort, og lignende. Typisk ved vi, hvor tilfældig tingene er på forhånd. På den måde adskiller sandsynlighedsregning sig fra statistik, hvor man næsten aldrig kender sandsynlighederne på forhånd.

I sandsynlighedsregning ser vi på en situation, for eksempel kast med en sekssidet terning. Når vi kaster én gang med terningen, så viser den et antal øjne, det kalder vi et *udfald*. Mængden af alle udfald kaldes et udfaldsrum. Hvis det er en sekssidet terning, så er udfaldsrummet:



Udfaldsrum betegnes typisk med bogstavet U.

Vi har ikke med sandsynlighedsregning at gøre, hvis der ikke er sandsynligheder. Et *sandsynlighedsmål* er en funktion P, der tager hvert udfald i udfaldsrummet U, og giver det en sandsynlighed mellem 0 og 1. Hvis det er en sekssidet terning, så giver det mening, at hvert udfald skal have sandsynligheden $\frac{1}{6}$, idet der er 6 udfald, og de er lige sandsynlige. Dermed kan



Figur 9.1. Figuren viser udfaldsrummet for en sekssidet terning til venstre, og sandsynligheden for at slå en eter ($\frac{1}{6}$).

der skrives:

$$P(⚀) = \frac{1}{6}$$

Se figur 9.1.

Parret (U, P) kaldes et *sandsynlighedsfelt*, og når alle sandsynligheder er lige store, som i eksemplet med den sekssidet terning, så kaldes det et *symmetrisk sandsynlighedsfelt*.

Under tiden kan man støde på spørgsmål, som hvad er sandsynligheden for at slå et lige antal øjne, eller hvad er sandsynligheden for *ikke* at slå en femmer? For at kunne svare på de to spørgsmål kræver det, at vi introducerer begrebet en *hændelse*. Hvis vi ser på det første spørgsmål, om at slå et lige antal øjne med en sekssidet terning, så bemærker vi, at udfaldene ⚁, ⚃ og ⚅ opfylder betingelsen at have et lige antal øjne. Dermed er hændelsen at slå et lige antal øjne en mængde af udfald. Der er to måder at argumentere for sandsynligheden af hændelsen. Den første benytter, at hvis to hændelser A og B er adskilte eller uafhængige, så kan vi beregne sandsynligheden for A eller B ved formlen:

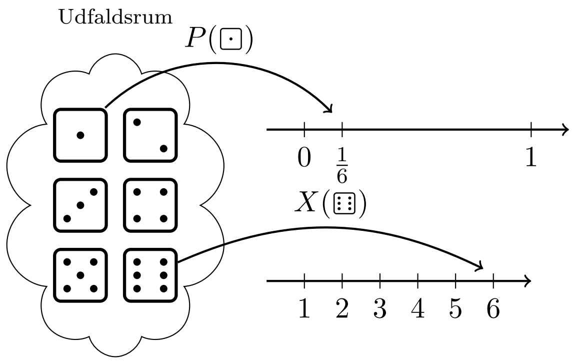
$$P(A \text{ eller } b) = P(A) + P(B)$$

Da alle vores udfald i hændelsen – at slå et lige antal øjne – også er hændelser, kan vi beregne:

$$P(\text{Lige antal øjne}) = P(⚁) + P(⚃) + P(⚅) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

Her benytter vi, at alle udfald er hændelser (men ikke alle hændelser er udfald).

Den anden metode virker kun ved symmetriske udfaldsrum. Det udnytter begrebet *gunstige udfald*. Et gunstigt udfald er et, som er en del af hændelsen. I vores tilfælde er det ⚁, ⚃ og ⚅, der er de gunstige udfald.



Figur 9.2. Figuren viser udfaldsrummet for en sekssidet terning til venstre, og sandsynligheden for at slå en eter ($\frac{1}{6}$). Nederst vises den stokastiske variabel X. Den afbilder en sekser til tallet 6.

Dermed kan vi beregne:

$$P(\text{Lige antal øjne}) = \frac{\text{Antal gunstige udfald}}{\text{Antal udfald i alt}} = \frac{3}{6}$$

Vi havde et andet spørgsmål, nemlig hvad sandsynligheden er for, at *ikke* slå en femmer. Med de to foregående teknikker kan vi nå frem til at sandsynligheden er $\frac{5}{6}$. Men der er en anden teknik, som i nogle tilfælde kan være hurtigere. For et sandsynlighedsfelt skal det gælde, at alle sandsynligheder lagt sammen skal give 1. Eller sagt anderledes, at sandsynligheden for hændelsen "alle udfald", er 1. I vores situation har vi

$$P(\text{⚀}) + P(\text{⚁}) + P(\text{⚂}) + P(\text{⚃}) + P(\text{⚄}) + P(\text{⚅}) = 1$$

Men dermed kan vi beregne sandsynligheden for ikke at få en femmer som:

$$P(\text{ikke en femmer}) = 1 - P(\text{⚄}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

9.2. Stokastisk variabel

I afsnittet ovenfor benyttede vi terninge symboler for de forskellige udfald. Selvom det tydeligt viser, hvad de konkrete udfald er, så er det bøvlet, især hvis vi har flere terninger, eller andre objekter. Derfor indfører vi en særlig variabel, nemlig den *stokastiske variabel*. En stokastisk variabel X er en funktion fra udfaldsrummet ind i de reelle tal. Dette er en bøvlet måde at sige, at for hvert udfald knytter vi et tal. Et eksempel er, at hvert muligt terningeudfald får antallet af øjne. Det vil sige,

$$X(\text{⚀}) = 1,\ X(\text{⚁}) = 2, \ldots,\ X(\text{⚅}) = 6$$

Se figur 9.2. Det er dog ikke den eneste måde at gøre det på. Vi vil se en anden måde senerne.

Pointen med den stokastiske variabel er, at den giver mulighed for at skrive beregninger af sandsynlighed på en forholdsvis let måde. Skrivemåderne beskriver vi i følgende eksempel:

Eksempel 9.1 (Notation)**.** I dette eksempel er den stokastiske variabel X antallet af øjne på en sekssidet terning. Hvis vi skriver $X = 3$, så mener vi, at terningen har tre øjne. Dermed hvis vi skriver:

$$P(X = 3)$$

så betyder det sandsynligheden for, at terningen har tre øjne.

Denne notation/skrivemåde, giver mulighed for at opskrive andre sandsynlighedsspørgsmål. Hvis vi skriver

$$P(X \leq 2)$$

så betyder det sandsynligheden for, at terningen viser to eller mindre. Det kan beregnes således:

$$P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = 1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Vi kan også skrive

$$P(2 \leq X \leq 4)$$

. Hvilket betyder, sandsynligheden for at terningen viser mellem to og fire (dvs. 2,3 eller 4). Det kan vi beregne som:

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

Vi kan samle informationerne om sandsynlighederne i en tabel, kaldet en *sandsynlighedstabel*

t	1	2	3	4	5	6
$P(X = t)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Her skriver vi t, fordi det er svært at kende forskel på X og x, hvis man for eksempel skriver i hånden.

Eksempel 9.2 (vigtigt!)**.** Det følgende eksempel er vigtigt, idet vi visere en anden måde at bruge stokastiske variable på, samt introducere begrebet forventet værdi eller middelværdi for en stokastisk variabel. Vi forestiller os, at vi spiller et pengespil med en sekssidet terning, hvor vi spiller mod "huset". Vi vælger, at X skal være gevinsten ved de forskellige udfald. Hvis vi vinder, så er X positiv, hvis "huset" vinder, så er X negativ. Vi laver en tabel over udfald og gevinster:

Udfald	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
Gevinst (X)	10	-5	-5	5	-20	10

Vi bemærker, at der er flere udfald, der giver den samme gevinst, dermed har vi for eksempel: $X($⚀$) = X($⚅$)$. Det betyder, at vores sandsynlighedsfordelingstabel skal se sådan ud:

t	-20	-5	5	10
$P(X = t)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

Med denne tabel kan vi svare på spørgsmål om, hvad sandsynlighederne er for forskellige gevinster. Bemærk, at vi ikke har nogen oplysninger i tabellen om hvilke udfald, der giver hvilken gevinst.

Hvis vi beregner

$$P(X < 0)$$

så spørger vi om, hvad sandsynligheden er for, at gevinsten er negativ, det vil sige, at tabe penge. Ud fra tabellen kan vi beregne:

$$P(X < 0) = P(X = -20) + P(X = -5) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Med andre ord, vil vi tabe penge halvdelen af gangene, og dermed vil vi vinde penge halvdelen af gangene. Nu kunne man tro, at det vil være ligegyldigt, om man spiller eller ej. Men faktisk kan det ikke tilrådes, at man spiller. I gennemsnit vil man tabe penge. Det centrale begreb er den *forventede værdi* eller *middelværdien*. Vi forestiller os, at vi spiller uendelig mange gange, og vil gerne vide, hvad vi kan forvente at få som gevinst. Vi kan opskrive en formel. Hvis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er de forskellige værdier X kan antage, så er den forventede værdi $E(X)$ eller μ givet ved:

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

Ud fra vores sandsynlighedsfordelingstabel kan vi skrive:

$$\begin{aligned} E(X) &= -20 \cdot \frac{1}{6} + (-5) \cdot \frac{2}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot \frac{2}{6} \\ &= \frac{-20}{6} - \frac{5 \cdot 2}{6} + \frac{5}{6} + \frac{10 \cdot 2}{6} \\ &= \frac{-20 - 10 + 5 + 20}{6} \\ &= \frac{-5}{6} \end{aligned}$$

Det vil sige, at vi i gennemsnit vil tabe $\frac{-5}{6}$, hvis vi spiller spillet.

Gennemsnittet sige dog ikke noget om, hvor galt det kan gå. Kan vi tabe 100 gange i træk? Dette spørgsmål er vanskeligt at svare på, men vi kan sige noget om hvor stor variation eller spredning, der er i gevinsterne. En stokastisk variabel har det, der kaldes en *varians*, Hvis vi anvender μ i stedet for $E(X)$, så kan variansen beregnes som:

$$Var(X) = (x_1 - \mu)^2 P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 P(X = x_2) + \ldots + (x_n - \mu)^2 P(X = x_n)$$

Vi kan ud fra vores tabel beregne:

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \left(-20-\left(-\frac{5}{6}\right)\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(-5-\left(-\frac{5}{6}\right)\right)^2\cdot\frac{2}{6}\\
&+\left(5-\left(-\frac{5}{6}\right)\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(10-\left(-\frac{5}{6}\right)\right)^2\cdot\frac{2}{6}\\
&=\left(\frac{-115}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{-25}{6}\right)^2\cdot\frac{2}{6}+\left(\frac{35}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{65}{6}\right)^2\cdot\frac{2}{6}\\
&\approx 111{,}8056
\end{aligned}$$

Dette tal siger ikke så meget. Vi er næsten altid mere interesseret i *spredningen* σ, som vi kan beregne ved:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

. Ud fra vores tal får vi:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{111{,}8058} = 10{,}57$$

En måde, at fortolke dette tal på, er at sige, at udsvingene i gevinst er ca 11 pr. spil.

Fordi stokastiske variable har værdier, der er tal giver det mening at udføre regneoperationer på dem. For eksempel kan vi skrive $X_1 + X_2$ eller $X_1 - X_2$ og så videre. Der er nogle komplikationer ved at skulle regne sandsynligheder for sådanne stokastiske variable, men det er vigtigt at kunne regne med stokastiske variable, da de optræder tilstrækkelig ofte i virkeligheden. Det følgende eksempel er klassisk.

Eksempel 9.3. Vi har to sekssidet terninger, som vi kaster, og lægger øjnene sammen. Vi kan forstå situationen sådan, at vi har en stokastisk variabel X_1, der giver antal øjne på den første terning. Vi har en anden stokastisk variabel X_2, der giver antal øjne på den anden terning. Summen X af øjnene kan vi så skrive som: $X_1 + X_2 = X$. Nu bliver spørgsmålet, hvordan vi skal forstå udtryk som $P(X = 4)$, hvad er sandsynligheden for at øjnene til sammen giver 4? For at kunne svare på dette spørgsmål, må vi svare på, hvordan vi kan få terningerne til at vise fire. En mulighed er, at $X_1 = 1$ og $X_2 = 3$. Vi kan så beregne sandsynligheden for, at den første terning viser 1, og den anden viser 3. Da vi må antage, at terninger ikke har nogen indflydelse på hinanden – det vil sige, de er uafhængige – så kan vi beregne sandsynligheden ved at gange hver ternings udfald med hinanden:

$$P(X_1 = 1 \text{ og } X_2 = 3) = P(X_1 = 1)\cdot P(X_2 = 3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Med andre ord, sandsynligheden for, at den første terning viser 1, og den anden viser 3, er $\frac{1}{36}$. Så langt så godt, men der er andre måder at kaste med to terninger, så summen af øjnene viser 4. Der er også: $X_1 = 2$ og $X_2 = 2$; og $X_1 = 3$ og $X_2 = 1$. Da hver mulighed er uafhængig af de andre, kan vi lægge alle sandsynlighederne sammen for at få den samlede sandsynlighed for at kaste to terninger, så øjnene giver 4.

$$\begin{aligned} P(X=4) &= P(X_1 = 1 \text{ og } X_2 = 3) + P(X_1 = 2 \text{ og } X_2 = 4) + P(X_1 = 3 \text{ og } X_2 = 1) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Det vil sige, sandsynligheden for at kaste med to terninger og få summen 4 er $\frac{1}{12}$.

Pointen med det ovenstående er, at for at kunne beregne sandsynligheder, skal vi kende sandsynligheden for et udfald, af den ønskede slags (summen 4), og antallet af måder vi kan skabe de ønskede udfald. Med andre ord, er det nødvendigt at have metoder til at beregne antallet af bestemte udfald. Det er emnet for det næste afsnit.

Som en sidste kommentar, så kan vi i tilfældet to terninger faktisk opskrive samtlige muligheder:

$X_1 + X_2$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

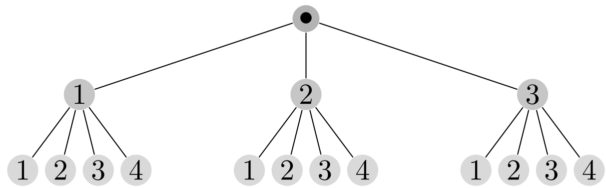
En sandsynlighedstabel vil derfor se sådan ud:

t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=t)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

9.3. Kombinatorik

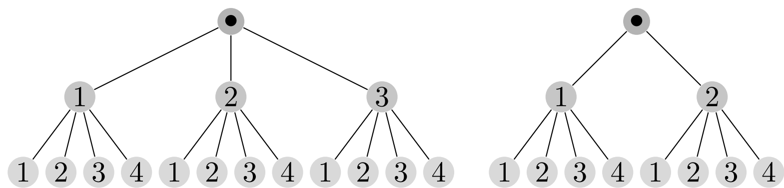
I eksempel 9.3, så vi på tilfældet, hvor der blev kastet to terninger. For at kunne beregne sandsynligheden var det nødvendigt, at vi vidste, hvor mange måder en sum af øjne kunne opstå på. Det med at kunne beregne antallet af måder eller kombinationer, kaldes kombinatorik, hvilket er emnet for dette afsnit.

For at komme i gang begynder vi med *multiplikationsprincippet* og *additionsprincippet*. Multiplikationsprincippet siger, at hvis vi har to antal som vi skal blande, så skal vi gange antallene sammen. Et eksempel er vaffelis. Her kan vi måske begynde med at vælge antal kugler, antal smage og om der skal noget oven på. Vi antager, at man vælger tre kugler, og hvis man kan vælge imellem fire smage, så vil der være $3 \cdot 4 = 12$ måder, det kan ske på. Her tillader vi, at man må vælge den samme smag flere gange. Ideen bag multiplikationsprincippet kan vises med et *tælletræ*.



Tælletræet har viser oppefra og ned de tre kugler, og de fire smage. Ved at tegne et nyt træ kan man overbevise sig selv om, at rækkefølgen ikke er vigtig.

Nu mangler vi additionsprincippet. Det siger, at hvis vi har to antal, hvor vi skal vælge enten fra den ene eller den anden, så findes det samlede antal kombinationer ved at lægge antallene sammen. Hvis vi forestiller os, at isbutikken sælger is i en vaffel eller et bæger, så er udelukker de to muligheder hinanden. Hvis bægerne er for små til 3 kugler og kun kan indeholde to, så er der $2 \cdot 4 = 8$ kombinationer af is, når man vælger et bæger. Dermed er der $8 + 12 = 20$ muligheder, når man skal vælge mellem vaffel eller bæger. To tælletræer for de to muligheder (vaffel/bæger) er følgende:



Dermed har vi, at hvis kan vælge imellem n af en slags *og* m af en anden slags, så har vi

$$n \cdot m$$

kombinationer. Hvis vi kan vælge n af en slags *eller* m af en anden slags, så har vi

$$n + m$$

kombinationer.

Vi vil nu se på antal af måder vi kan *sortere* n ting på. Det vil sige, at vi sætter dem i rækkefølge på alle mulige måder. Metoden til at beregne antallet af sorteringer, kaldes *fakultet*, og skrives $n!$. Formlen er:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

Det vil sige, at vi for eksempel kan beregne: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Dermed er der 120 måder, at sætte 5 ting i rækkefælge. Vi har følgende regneregel:

$$0! = 1$$

Det vil sige, at antallet, af måder vi kan sortere ingenting på, er 1.

Der er to måder at argumentere for formelen for fakultet. Den første er at sige, at vi har for eksempel 5 pladser, hvor vi skal placere 5 ting. På den første plads kan vi vælge mellem 5 ting, på den anden plads kan vi vælge mellem 4 (vi har placeret noget på den første plads), på den tredje plads kan vi vælge mellem 3 ting og så fremdeles. Det giver udregningen: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ muligheder, som følge af multiplikationsprincippet. Den anden måde at argumentere på er at sige, at den første ting kan placeres på 5 pladser, den næste ting kan placeres på 4 pladser (vi har brugt en plads), den tredje kan placeres på 3 pladser og så fremdeles. Det giver den samme udregning som før ud fra multiplikationsprincippet.

Det sidste, vi mangler fra kombinatorikken, er antallet af måder, vi kan vælge r ting ud fra n ting, hvor rækkefølgen af tingene ikke er vigtig. For eksempel, hvis vi har tallene $1, 2, 3, 4, 5$ og vi ønsker at bestemme, hvor mange måder vi kan vælge to tal ud af de fem tal, så kan vi prøve at skrive dem alle op. $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 5)$. Eller i alt 10 måder, men hvis vi nu skal finde 34 ud af 150? Så har vi brug for en formel. Vi kalder antallet af måder at vælge r ud af n ting for *binomialkoefficienten*, og skriver den $K(n, r)$. Den har formlen:

$$K(n, r) = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$$

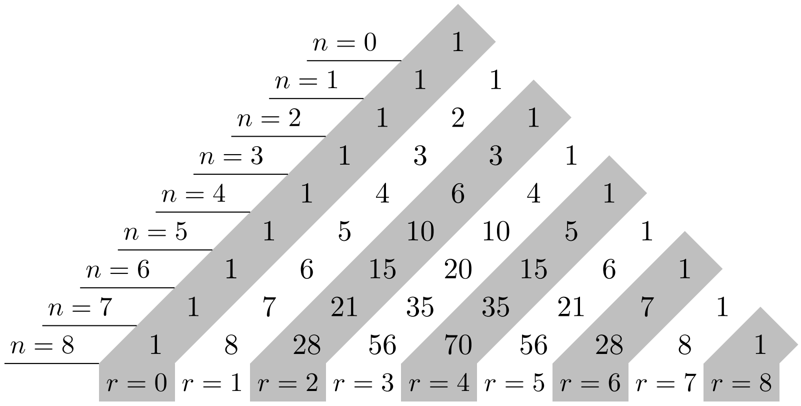
Eksempel 9.4. Vi forestiller os en klub, der har en bestyrelse på 9 personer. Klubben har brug for at nedsætte et udvalg, hvor der fire deltagere. Det kan de gøre på $K(9, 4)$ måder:

$$K(9, 4) = \frac{9!}{4! \cdot (9 - 4)!} = 126$$

Her har vi brugt en computer til at regne for os.

Hvis der nu er 3 kvinder og 6 mænd i bestyrelsen, så kan vi spørge om sandsynligheden for, at en kvinde kommer med i udvalget. For at kunne svare på det skal vi kende antallet af måder, vi kan vælge en kvinde ud af tre på, og antallet af måder de resterende tre udvalgsposter kan fordeles blandt tre ud af seks mænd. Vi kan vælge en kvinde til udvalget på $K(3, 1)$ måder. Og vi kan vælge tre mænd til være blandt de seks mænd i bestyrelsen, på $K(6, 3)$ måder. Dermed kan vi benytte multiplikationsprincippet til at sige, at antallet af måder at få en kvinde med i udvalget er $K(3, 1) \cdot K(6, 3)$. Det er antallet af gunstige udfald, så hvis vi dividere med antallet af måder at vælge fire til udvalget på, så har vi sandsynligheden for at en kvinde fra bestyrelse kommer i udvalget:

$$\frac{K(3, 1) \cdot K(6, 3)}{K(9, 4)} = 0{,}476 = 47{,}6\%$$



Figur 9.3. Figuren viser et udsnit af Pascals trekant. Værdierne for $K(n, r)$ kan aflæses ved at finde n ude til venstre og finde r i bunden. Så skal man følge striben op til n.

Der nogle tilælde, hvor vi direkte kan beregne binomialkoefficienten K. Det er typisk, når både n og r er meget små, eller når n er meget større end r (eller når n og r er meget tæt på hinanden).

Eksempel 9.5. Hvis vi skal vælge 2 ud af 28 – for eksempel to elevrådsrepræsentanter, ud af 28 elever i en klasse – så skal vi beregne:

$$K(28, 2) = \frac{28!}{2! \cdot (28-2)!} = \frac{28!}{2! \cdot 26!}$$

Nu kan man tro, at vi skal beregne 28! og 26!, hvilket er to meget store tal (28! kræver 30 cifre). Men det behøver vi ikke! Hvis vi lægger mærke til at $28! = 28 \cdot 27 \cdot 26!$, så kan vi reducere på følgende måde:

$$\frac{28!}{2! \cdot 26!} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26!}{2! \cdot 26!} = \frac{28 \cdot 27}{2 \cdot 1} = 14 \cdot 27 = 378$$

At vi kan lave udregningen med 28!, kan vi vise med et simplere eksempel 5!.

$$5! = 5 \cdot \overbrace{4 \cdot \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{3!}}^{4!}$$

Der endnu en måde at komme frem til $K(n, r)$ og det er ved hjælp af Pascals trekant, se figur 9.3. Her har vi n lodret og r vandret. Tallene står ikke lige under hinanden, men forskudt, så tallene på en linje neden under står i mellem tallene oven over. Måden man laver en ny linje er at skrive 1 yderst til venstre, så lægge tallene oven over den nye linje parvist sammen. Så på figur 9.3 er tallet, der skal så imellem og neden under 28 og 56 i den nederste linje $28 + 56 = 84$.

Vi vil afslutte kombinatorik med at lave et bevis for binomialkoefficienten:

Sætning 9.6. *Binomialkoefficienten er givet ved:*

$$K(n,r) = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

Bevis. Udgangspunktet er, at vi har en mængde $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ med n elementer. Vi ved, at vi kan sortere mængden på $n!$ måder. Vi vil nu lave alle sorteringer på en lidt mere besværlig måde, hvor vi udnytter multiplikationsprincippet. Først udvælger vi alle delmængder, der består af r elementer. Dem er der $K(n,r)$ af. Hver af disse delmængder kan sorteres på $r!$ måder. Så vi har $K(n,r) \cdot r!$ måder at udvælge og sortere delmængderne på. Men vi mangler at sortere de elementer, der ikke blev udvalgt. Dem er der $n-r$ af og derfor $(n-r)!$ måder at sortere på. Dermed har vi samlet $K(n,r) \cdot r! \cdot (n-r)!$ måder at sortere hele mængden på. Men det er også $n!$, så vi har:

$$K(n,r) \cdot r! \cdot (n-r)! = n!$$

$$K(n,r) = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

□

9.4. Bernoullifordelingen

I det ovenstående har vi set på sandsynlighedsfelter, middelværdier og spredning. Alle tre ting, er bøvlede at have med at gøre, selv i simple tilfælde. I mange tilfælde kan vi gøre livet lettere for os selv, ved at inddrage det, der kaldes en sandsynlighedsfordeling. Der findes mange sandsynlighedsfordelinger, så vi skal være opmærksomme på, at vi bruger den rigtige fordeling, når vi arbejder med sandsynlighedsregning.

Vi vil i dette afsnit introducere Bernoullifordelingen, som nok er en af de simpleste fordelinger, der findes. Den er byggestenen til den vigtige binomialfordeling, som er emnet for det næste afsnit. Vi giver en definition:

Definition 9.7. En stokastisk variabel X er Bernoullifordelt med sandsynlighedsparameter p, hvis den har præcis to værdier kaldet succes $X = 1$ og fiasko $X = 0$. Sandsynligheden for en succes er $P(X = 1) = p$, og sandsynligheden for en fiasko er $P(X = 0) = 1 - p$. Vi skriver: $X \sim \mathit{Bernoulli}(p)$, hvis X er Bernoullifordelt med sandsynlighedsparameter p.

Hvis vi søger efter ting i virkeligheden, der er Bernoullifordelte, så vil det være situationer, hvor der er præcis to udfald, og hvor vi kun gør tingen en gang. For eksempel, hvis vi kaster én gang med en terning, og succes er en sekser, så har vi $X \sim \mathit{Bernoulli}(\frac{1}{6})$. Vi kan så beregne $P(X = 1) = \frac{1}{6}$ og $P(X = 0) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Dette illustrerer point med en sandsynlighedsfordeling, nemlig at vi kun behøver at kende parametrene i fordelingen for at kunne regne med den.

Generelt kan vi skrive en formel for en Bernoullifordeling:

$$P(X = t) = \begin{cases} 1 - p & t = 0 \\ p & t = 1 \end{cases}$$

Denne gaffelfunktion kan vi skrive som en samlet funktion. Ideen er, at vi har $p^1 = p$ og $(1-p)^1 = 1-p$, samt $p^0 = 1$ og $(1-p)^0 = 1$, så hvis vi skriver $P(X = t) = p^t \cdot (1-p)^{1-t}$, så vil den give det samme som gaffelfunktionen. Der er kun to værdier vi skal afprøve, så vi regner direkte efter:

$$\begin{aligned} P(X = t) &= p^t \cdot (1-p)^{1-t} \\ P(X = 0) &= p^0 \cdot (1-p)^{1-0} = 1 \cdot (1-p)^1 = 1 - p \\ P(X = 1) &= p^1 \cdot (1-p)^{1-1} = p \cdot (1-p)^0 = p \cdot 1 = p \end{aligned}$$

Dermed har vi en formel for Bernoullifordelingen med sandsynlighedsparameter p:

$$P(X = t) = p^t \cdot (1-p)^{1-t}$$

Det er ret let at beregne den forventede værdi eller middelværdi for en Bernoullifordeling. Vi skriver det som et bevis:

Sætning 9.8. *Middelværdien μ for en Bernoullifordeling med sandsynlighedsparameter p er givet ved*

$$\mu = p$$

Bevis. Formlen for middelværdi for en stokastisk variabel kan skrives som følger, når variablen er Bernoullifordelt:

$$\mu = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1)$$

Det giver så:

$$\mu = 0 + 1 \cdot p = p$$

□

Sætning 9.9. *Variansen σ^2 for en Bernoullifordeling er givet ved:*

$$\sigma^2 = p \cdot (1-p)$$

Bevis. Variansen opskrives:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (0-\mu)^2 \cdot P(X = 0) + (1-\mu)^2 \cdot P(X = 1) \\ &= (-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p \\ &= p^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p \end{aligned}$$

sætter p uden for en parentes

$$= p \cdot (p \cdot (1-p) + (1-p)^2)$$

sætter $1-p$ uden for en parentes

$$\begin{aligned} &= p \cdot (1-p) \cdot (p+1-p) \\ &= p \cdot (1-p) \end{aligned}$$

□

9.5. Binomialfordelingen

Hvis vi udfører et eksperiment med to udfald én gang, så var det Bernoullifordelt. Hvis vi gentager forsøget, og tæller antallet af succeser, så får vi en binomialfordeling. Vi forestiller os, at vi kaster med en sekssidet terning 30 gange, og vi vælger det at få en sekser som en succes. Vi kan dermed få mellem 0 og 30 seksere. Sandsynligheden for i et kast at få en sekser er $\frac{1}{6}$, men hvad er sandsynligheden for at få syv seksere? Dette spørgsmål kan besvares med binomialfordelingen.

Definition 9.10. En stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p, når vi udfører et basiseksperiement n gange, som opfylder:

(1) Basiseksperimentet har præcis to udfald, som vi kalder succes og fiasko
(2) Alle basiseksperimenter er uafhængige af hinanden (dvs. at resultatet af et eksperiment ikke har betydning for andre eksperimenter)
(3) Sandsynligheden for succes p er konstant igennem alle basiseksperimenter.

Hvis den stokastiske variabel X desuden beskriver hændelsen at få r succeser, så er X binomialfordelt, og vi skriver: $X \sim b(n, p)$.

I eksemplet med terningen som bliver kastet 30 gange, der er basiseksperimentet ét kast med terningen. Vores antalsparameter er $n = 30$, og sandsynlighedsparameteret er $p = \frac{1}{6}$. Og vi vil kunne skrive $X \sim b\left(30, \frac{1}{6}\right)$.

Der findes en formel, der beregner for en binomialfordeling sandsynligheden for at få præcis r succeser.

Definition 9.11. Hvis $X \sim b(n, p)$, så kan sandsynligheden for at få præcis r succeser beregnes med:

$$P(X = r) = K(n, r) \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

Her er $K(n, r) = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$ antal kombinationer.

De enkelte dele af formlen kan forklares således:

$P(X = r)$**:** Sandsynligheden for at få r succeser. Antallet r ligger mellem 0 og n.

$K(n, r)$**:** Antallet af måder, hvorpå de r succeser kan opstå.

p^r**:** Sandsynligheden for r succeser. De ganges sammen, da hvert basiseksperiment er uafhængig af de andre.

$(1 - p)^{n-r}$**:** Sandsynligheden for $n - r$ fiaskoer. Når r ud af n udfald er succeser, så er $n - r$ udfald fiaskoer. Sandsynlighederne ganges sammen, fordi de er uafhængige.

Det er muligt at indse, at formlen faktisk giver det rigtige svar ved at se på et simpelt eksempel.

Eksempel 9.12. Vi forestiller os, at vi kaster tre gange med en sekssidet terning, og vi vælger en sekser som succes. Vi vil gerne beregne sandsynligheden for, at vi slår to seksere. Hvis vi slår to seksere på tre kast, så må et af kastene være noget andet end en sekser. Med andre ord, vi har to succeser og en fiasko. Antal måder, det kan ske på, kan vi skrive op med S for succes og F for fiasko. Vi kan slå to seksere i de to første kast SSF, vi kan slå to seksere i det første og det sidste kast SFS, vi kan slå to seksere i de to sidste kast FSS. Vi kan i hvert tilfælde beregne sandsynligheden. Hvis sandsynligheden for succes er p, så er sandsynligheden for fiasko $1 - p$. Vi kan gange sandsynlighederne sammen, fordi udfaldene er uafhængige af hinanden.

$$\begin{aligned} SSF &:= p \cdot p \cdot (1-p) = p^2 \cdot (1-p) \\ SFS &:= p \cdot (1-p) \cdot p = p^2 \cdot (1-p) \\ FSS &:= (1-p) \cdot p \cdot p = p^2 \cdot (1-p) \end{aligned}$$

Med andre ord, i hvert tilfælde er sandsynligheden den samme. Og eksponenten på p er antal succeser, og eksponenten på $1 - p$ er antal fiaskoer $3 - 2 = 1$. Vi kan nu lægge sandsynlighederne sammen, fordi hver kombination udelukker de andre. Så sandsynligheden er

$$3 \cdot p^2 \cdot (1-p)$$

Her er de 3 netop antallet af måder, man kan få 2 succeser ud af 3 mulige $K(3, 2)$. Samlet bliver udregningen af sandsynligheden for to seksere på tre kast, når vi husker at $p = \frac{1}{6}$:

$$
\begin{aligned}
P(X=r) &= K(n,r)\cdot p^r\cdot(1-p)^{n-r}\\
P(X=2) &= K(3,2)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2}\\
P(X=2) &= 3\cdot\frac{1}{36}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1\\
P(X=2) &= \frac{3\cdot 5}{36\cdot 6}\\
P(X=2) &= \frac{15}{216}\approx 0{,}0694 = 6{,}94\%
\end{aligned}
$$

På samme måde kan andre antal succeser. Vi samler resultaterne i følgende tabel:

r	0	1	2	3
$P(X=r)$	0,5787	0,3472	0,0694	0,0046

Når vi har en binomialfordelt stokastisk variabel $X \sim b(n,p)$, så er der $n+1$ forskellige sandsynligheder, vi kan beregne (det er $n+1$, fordi 0 også er med). Vi kan skrive sandsynlighederne op i en tabel som i eksemplet oven for, eller også kan vi tegne et søjlediagram, hvor hver søjle har bredden 1, og højden af søjlen er sandsynligheden. Så er arealet af søjlen netop sandsynligheden,, og vores søjlediagram er et histogram (se 1.5 side 16).

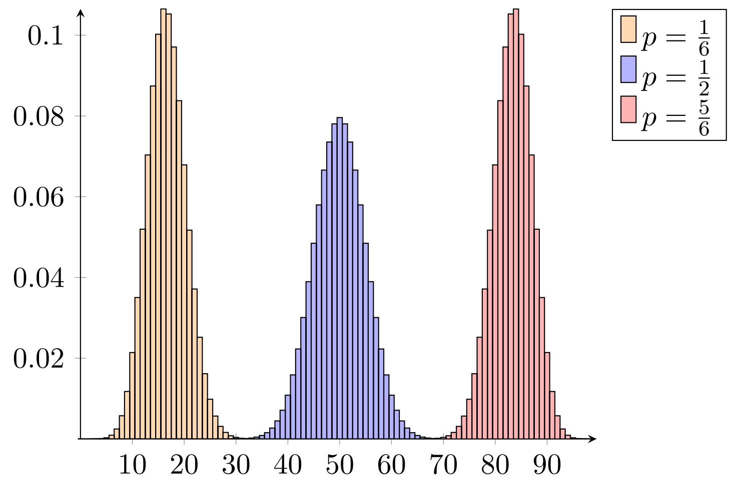
På figur 9.4 har vi tegnet søjlediagrammer for tre forskellige binomialfordelinger. Hver fordelingen har en "top", hvor sandsynlighederne er størst, og det kunne se ud som om, at det kun er inden for "toppen", at der er sandsynlighed. Der er også meget små sandsynligheder, når vi bevæger os væk fra "toppene", de er bare så små, at vi ikke kan se dem.

Vi kan ud fra en binomialfordelings antalsparameter og sandsynlighedsparameter beregne, hvad den mest sandsynlige hændelse er, og hvor ca. 95% af sandsynligheden ligger. En binomialfordeling har *forvenntet værdi* eller *middelværdi* skrevet som μ. Den kan beregnes ud fra de to parametre:

$$\mu = n\cdot p$$

Hvis vi kaster 100 gange med en sekssidet terning (venstre diagram i figur 9.4), så har vi binomialfordelt stokastisk variabel $X \sim b\left(100, \frac{1}{6}\right)$, hvor X er hændelsen at slå r seksere. Vi vil forvente at slå

$$\mu = n\cdot p = 100\cdot\frac{1}{6}\approx 16{,}667$$



Figur 9.4. Figuren viser histogrammerne for $P(X = r)$, hvor X binomialfordelt med $n = 100$, men med forskellig p-værdi. Tilfældene, hvor $p = \frac{1}{6}$ og $\frac{5}{6}$, svarer til, at der byttes om på, hvad der er succes og fiasko.

seksere. Det betyder, at det mest sandsynlige antal seksere er enten $P(X = 16) \approx 0{,}1065$ eller $P(X = 17) \approx 0{,}1052$. Det sidste her illustrerer, at intuition om at runde op eller ned ikke kan anvendes i forbindelse med binomialfordelinger. Det er nødvendigt at afprøve naboerne til μ, når man ikke får et helt tal.

Vi kan også få en vurdering af et område omkring middelværdien, hvor ca. 95% af en binomialfordelings største sandsynligheder ligger. Det kræver, at vi beregner spredningen σ. Den kan også beregnes ud fra de to parametre: n og p:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Rent grafisk, skal vi finde middelværdien μ, og bevæge os to spredninger til venstre og to spredninger til højre, så vil ca. 95% af de største sandsynligheder ligge der. Hvis man ser på søjlediagrammerne (figur 9.4), så kan vi se, at de mest sandsynlige udfald ligger tæt på middelværdien. Spredningen fortæller os, at i intervallet

$$[\mu - 2 \cdot \sigma; \ \mu + 2 \cdot \sigma]$$

der ligger ca, 95% af binomialfordelingens største sandsynligheder.

Hvis vi igen ser på tilfældet med 100 kast med en sekssidet terning, og tæller seksere, så har vi $n = 100$ og $p = \frac{1}{6}$:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \\
&= \sqrt{100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{100}{6} \cdot \frac{5}{6}} \\
&= \sqrt{\frac{500}{6}} \\
\sigma &\approx 3{,}7268
\end{aligned}$$

Dermed er kan vi bestemme et interval ved at beregne $\mu - 2 \cdot \sigma = 16{,}667 - 2 \cdot 3{,}7268 = 9{,}2134$ og $\mu + 2 \cdot \sigma = 16{,}667 + 2 \cdot 3{,}7268 = 24{,}1206$. Da binomialfordelinger kun virker med hele tal, så er vi nødt til at afrunde. Vi runder op så $9{,}2 \approx 10$, og ned så $24{,}1206 \approx 24$. Det gør vi, fordi middelværdien er tættere på 17 end 16. Så påstanden er, at i intervallet

$$[10; 24]$$

der ligger ca. 95% af de største sandsynligheder.

Fordi binomialfordelingen arbejder med hele tal, så kan vi ikke ramme 95% præcist i vores interval oven for. Så kan vi spørge hvor stor sandsynligheden, så er? I tilfældet med 100 kast med en sekssidet terning er vi interesseret i hændelsen, at antallet af seksere ligger mellem 10 og 24. Det kan skrive:

$$P(10 \leq X \leq 24)$$

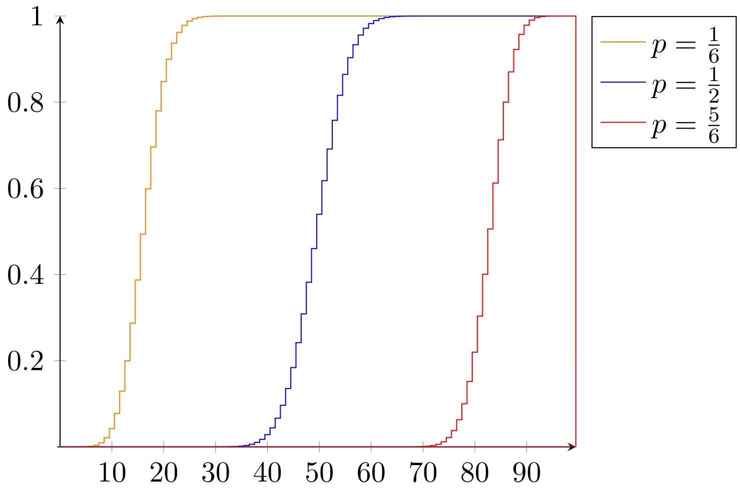
Det er så noget, der skal beregnes.

Tankegangen er, at vi kan beregne, hvad sandsynligheden for at hændelsen at få færre eller lig med r succeser indtræffer? Det beregnes ved at lægge alle sandsynligheder for hændelser, hvor antallet af succeser er mindre end lig med r:

$$P(X \leq r) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = r)$$

Hvis vi så skal beregne $P(X \leq 9)$ i vores eksempel, for at få sandsynligheden for at ramme uden for vores interval:

$$\begin{aligned}
P(X \leq 9) &= P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = 9) \\
&\approx 0 + 0 + \ldots + 0{,}0118 \\
P(X \leq 9) &\approx 0{,}0213
\end{aligned}$$



Figur 9.5. Figuren viser kurverne for $P(X \leq r)$ for binomialfordelte stokastiske variable med $n = 100$ og sandsynlighedsparamter som vist. Bemærk, at der kun er selve kurverne, der skal ses på.

Vi kan også beregne, at $P(X \leq 24) \approx 0{,}9783$. Det vil sige, at: vi kan beregne $P(10 \leq X \leq 24)$ ved at beregne $P(X \leq 9)$ og $P(X \leq 24)$, og trække dem fra hinanden.

$$\begin{aligned} P(10 \leq X \leq 24) &= P(X \leq 24) - P(X \leq 9) \\ &= 0{,}9783 - 0{,}0213 \\ P(10 \leq X \leq 24) &= 0{,}957 \end{aligned}$$

Det burde illustrere, at det interval vi fandt oven for, netop stemmer overens med ca. 95%

Vi kan tegne $P(X \leq r)$, som et trappediagram, se figur 9.5. Graferne er næsten sumkurver, men ikke helt. De spiller dog samme rolle.

Kapitel 10

Statistiske undersøgelser

Dette kapitel handler om statistiske undersøgelser. Hvor vi i sandsynlighedsregning kender alle sandsynligheder på forhånd, og terninger altid er perfekte og fair. Så er kendetegnet ved statistik, at vi ikke kender (alle) sandsynligheder, og der er målinger, som er behæftet med usikkerhed. Så vi skifter fra en "ideel" verden til den "virkelige" verden.

Der findes mange statistiske undersøgelser, men dem, der skal interessere os her, er dem vi kan lave ved konfidensinterval og ved binomialtest. Begge metoder kan svare på de samme spørgsmål, så der er egentlig tale om smag og behag (eller hvad en opgave kræver, at man bruger).

Vi begynder med nogle grundlæggende begreber, og fortsætter med først at se på konfidensintervaller og derefter på binomialtest. Undervejs vil vi benytte de to samme eksempler.

10.1. Grundlæggende begreber

Udgangspunktet, for de statistiske undersøgelser vi skal lave i dette kapitel, er, at vi har lavet nogle målinger. Det kan være vi har talt antal ærter i et biologiforsøg, eller talt antallet af personer, der vil stemme på et stemt parti. Sådanne målinger kalder vi *observationer* eller *empiriske* data. Vores observation ønsker vi så at sammenligne med noget, som er "sikkert". Det kan være en biologisk teori eller et valgresultat. Spørgsmålet er, om vores observation afviger statistik signifikant, fra det vi er "sikker" på?

Måden vi får vores observation er ved at lave en *stikprøve*, det vil sige, vi vælger et mindre antal eksempler, på det vi vil undersøge (ærter, vælgere) ud fra en *population* (alle ærter, alle vælgere). Stikprøven skal opfylder:

(1) Stikprøven skal kunne inddeles i to dele. Det vi er interesseret i, og det vi ikke er interesseret i.

(2) Observationer i stikprøven skal være antal og dermed hele ikke-negative tal.

(3) Hver individuel observation skal være uafhængig af de andre observationer.

Den empiriske observation, vi har fra stikprøven, skal så sammenlignes med enten en teoretisk størrelse, eller en tidligere målt størrelse vi er "sikker" på.

Vi giver nu nogle eksempler, der uddyber det oven stående.

Eksempel 10.1. Der laves et krydsningsforsøg med en bestemt type ærter for at afgøre om det er etgensnedarvning, der er tale om. Forsøget laves med 500 ærter. Det vil sige, at vores stikprøve består af 500 ærter ud af en population bestående af alle ærter af samme type. Ærterne inddeles efter farve. Nogle er grønne og andre er gule. Så vi har en inddeling i to grupper. Eftersom hver ært enten er grøn eller gul, så er vores observationer hele tal. Hvis vi har lavet forsøget rigtigt burde ærternes farve ikke have indflydelse på hinanden. Så stikprøven lever op til kriterierne. Forsøget viser, at 382 ud af de 500 ærter bliver grønne. Teorien forskriver, at 75% af ærterne skal blive grønne. Modbeviser forsøget teorien, eller er der overensstemmelse mellem de to?

Eksempel 10.2. Der laves en meningsmåling imellem to valg. Tilfældige vælgere bliver spurgt om, hvilket parti de vil stemme på til næste valg. Der bliver spurgt 1024 vælgere. Dermed er størrelsen på stikprøven 1024. Tilslutningen til parti XX undersøges, dermed inddeles stikprøven i to dele: Dem der vil stemme på parti XX, og dem som ikke vil, eller ikke har bestemt sig. Det er et bestemt antal personer, der vil stemme på parti XX, så observationen er et heltal. I meningsmålingen siger 125 ud af 1024 vælgere, at de vil stemme på parti XX. Ved sidste valg fik parti XX 17% af stemmerne. Har tilslutningen til parti XX ændret sig signifikant?

I begge eksempler skal vi undersøge om stikprøvens observation (grønne ærter, vælgere) stemmer overens med en teoretisk størrelse. Der er stor forskel imellem fag i forhold til, hvorvidt en stor afvigelse er ønskværdig. Hvis vi laver biologi, så vil vi typisk gerne have, at vores forsøg ikke modsiger teorien, fordi vi gerne vil eftervise teorien. Hvorimod, hvis vi laver samfundsfag, så vil vi gerne have, at en meningsmåling viser stor ændring siden et valg, fordi det giver os noget at diskutere.

10.2. Konfidensinterval

Når vi laver statistiske undersøgelser med et konfidensinterval, så er udgangspunktet den målet observation (382 grønne ærter, 125 stemmer på parti XX). Disse observationer kommer fra en stikprøve, som ikke dækker alle ærter eller vælgere, så derfor er målingerne behæftet med usikkerhed. Usikkerheden angiver vi som et konfidensinterval med observationen i midten. Hvis den teoretiske størrelse ligger i intervallet, så kan vi ikke sige, at observationen afviger signifikant fra teorien. Hvorimod, hvis den teoretiske størrelse ligger uden for intervallet, så er der en signifikant forskel på observation og teori.

Et 95% konfidensinterval er givet ved formlen:

$$\left[\hat{p} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Her er $\hat{p}$ *stikprøveandelen*, hvilket er antal observationer divideret med størrelsen af stikprøven. Bogstavet n er stikprøvens størrelse. Vi kan få andre størrelser konfidensinterval frem at ved ændre tallet 2 til for eksempel 2,58, som giver et ca. 99% konfidensinterval.

Fremgangsmåden er nu at gøre følgende:

(1) Bestem n og bestem $\hat{p}$ enten aflæsning eller ved at regne den ud.

(2) Beregn venstre og højre side af intervallet.

(3) Undersøg om den teoretiske størrelse ligger inden for intervallet eller uden for. Hvis den ligger inden for, så konkluder, at der ikke er nogen signifikant forskel, hvis den ligger uden for, så konkluder, at der er en signifikant forskel.

Eksempel 10.3 (forsættelse af 10.1)**.** Vi har, at der er 382 grønne ærter ud af 500. Dermed kan vi beregne stikprøveandelen ved:

$$\hat{p} = \frac{382}{500} \approx 0{,}764$$

Nu sætter vi ind i formlen for konfidensinterval:

$$
\begin{aligned}
&\hat{p} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} && \hat{p} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} \\
&= 0{,}764 - 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}764 \cdot (1-0{,}764)}{500}} && = 0{,}764 + 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}764 \cdot (1-0{,}764)}{500}} \\
&= 0{,}7642 \cdot 0{,}01899 && = 0{,}764 + 2 \cdot 0{,}01899 \\
&= 0{,}726 && = 0{,}802
\end{aligned}
$$

Dermed er intervallet:

$$[0{,}726; 0{,}802]$$

Vi bemærker, at den teoretiske størrelse $75\% = 0{,}75$ ligger i intervallet, så der er ingen signifikant forskel mellem teori og observation. Det vil sige, at eksperimentet er i overensstemmelse med teorien.

Eksempel 10.4 (forsættelse af 10.2)**.** Vi har, at der er 125 vælgere, der vil stemme på parti XX ud af 1024 vælgere. Dermed kan vi beregne stikprøveandelen ved:

$$\hat{p} = \frac{125}{1024} \approx 0{,}122$$

Nu sætter vi ind i formlen for konfidensinterval:

$$
\begin{aligned}
&\hat{p} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} && \hat{p} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} \\
&= 0{,}122 - 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}122 \cdot (1-0{,}122)}{1024}} && = 0{,}122 + 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}122 \cdot (1-0{,}122)}{1024}} \\
&= 0{,}122 - 2 \cdot 0{,}01023 && = 0{,}122 + 2 \cdot 0{,}01023 \\
&= 0{,}1016 && = 0{,}1425
\end{aligned}
$$

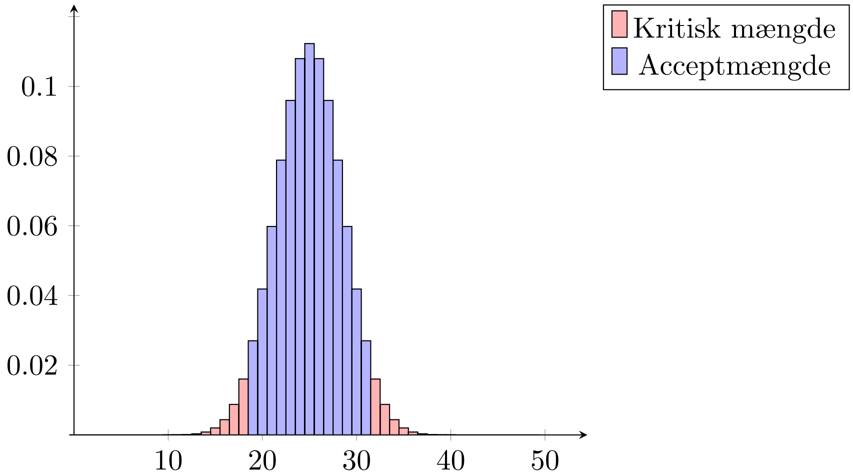
Dermed er intervallet:

$$[0{,}1016; 0{,}1425]$$

Vi bemærker, at den teoretiske størrelse $17\% = 0{,}17$ ligger uden for intervallet, så der er signifikant forskel mellem teori og observation. Det vil sige, at vi har grund til at mene, at vælgertilslutningen til parti XX har ændret sig siden valget.

10.3. Binomialtest

Hvor konfidensintervallet tog udgangspunkt i observationen, så tager binomialtest udgangspunkt i den teoretiske størrelse. Hvis teorien foreskriver, at en andel på p (ærter, vælgere) opfører sig på en bestemt måde, så vil vi kunne opskrive en teoretisk binomialfordeling $X \sim b(n,p)$, hvor n er stikprøvestørrelsen. Med andre ord er den teoretiske fordeling et udtryk for, hvordan stikprøven teoretisk skal se ud.



Figur 10.1. Histogrammet viser et eksempel på en binomialfordeling. Acceptmængden er markeret med blå, mens den kritiske mængde er rød.

En binomialtest er et eksempel på det, der kaldes en hypotesetest, som der findes mange forskellige af. Vi begynder binomialtesten med at opstille det, der kaldes en *nulhypotese* skrevet H_0. Nulhypotesen er altid, at den teoretiske størrelse p er den rigtige. Vores observation kan så bruges til at sige om nulhypotesen kan forkastes (dvs. den teoretiske værdi ikke er rigtig), eller at den ikke kan forkastes (dvs. at den teoretiske værdi ikke kan modbevises ud fra observationen). Samtidig kan vi opstille en *alternativ hypotese* skrevet H_1, der siger, at den teoretiske værdi ikke passer.

Ud fra den teoretiske værdi p og størrelsen på stikprøven n kan vi opstille en binomialfordeling $X \sim b(n, p)$. Vi ved, at hændelserne med størst sandsynlighed ligger i et interval omkring middelværdien μ. Vores observation har en sandsynlighed i denne fordeling, men er den langt fra μ eller tæt på?. Måden vi svarer på det, er ved at indføre begrebet *signifikansniveau*. Signifikansniveauet er typisk på 5% eller 1%. Signifikansniveauet benyttes til at bestemme størrelsen af det, der kaldes *acceptmængden*. Hvis signifikansniveauet er på 5%, så skal acceptmængden være de 95% mest sandsynlige hændelser. Disse hændelser ligger tæt på μ, derfor er der to områder – et til venstre og et til højre for μ – der hver indeholder halvdelen af de 5%. Det vil sige, 2,5% hver. De kaldes *den kritiske mængde*. Se figure 10.1.

Der er ikke rigtig nogen præcis metode til at bestemme acceptmængden. Dels fordi binomialfordelingen kommer i små hop, og dels fordi de to kritiske mængder ikke kan gøres lige store. Ofte vil en et computerprogram være en stor hjælp. Der dog to ting vi kan gøre. Den første er at beregne spredningen $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$, og huske at ca. 95% af den største sandsynlighed ligger i intervallet:

$$[\mu - 2 \cdot \sigma;\ \mu + 2 \cdot \sigma]$$

Det bør give os en idé om grænserne for acceptmængden. Når vi har vores bud på største og mindste værdi i acceptmængden, så er vi nødt til at undersøge om, det er de "rigtige" værdier, vi har fundet. Måden vi gør det på er ved at prøve os frem. Vi ved, at den venstre kritiske mængde skal fylde ca. 2,5%, så hvis vores bud er m, så kan vi beregne $P(X \leq m)$, hvis dette tal er under de 2,5%, skal vi prøve med et tal en større end m, hvis sandsynligheden er over 2,5%, så skal vi prøve med et tal under m. Det samme gør sig gældende for den største værdi i acceptmængden M, her regner vi bare $P(X \leq M)$ ud og sammenligner med 97,5%, fordi $2{,}5\% + 95\% = 97{,}5\%$.

Fremgangsmåden er så:

(1) Bestem den teoretiske størrelse p og brug den til at opstille en nulhypotese

(2) Vælg et signifikansniveau (5% eller 1%) (det er eventuelt valgt for dig)

(3) Bestem acceptmængden i binomialfordelingen $X \sim b(n, p)$.

(4) Hvis observationen ligger i acceptmængden, kan vi ikke forkaste nulhypotesen, og vi kan ikke sige, at der er forskel på teori og observation. Hvis observationen ligger uden for acceptmængden, så forkaster vi nulhypotesen, og der er forskel observation og teori (vi vælger at tro på den alternative hypotese).

Eksempel 10.5 (Fortsættelse af 10.1)**.** Vi har en teoretisk størrelse, der er $p = 0{,}75$ svarende til at i teorien er sandsynligheden 75% for at få grønne ærter. Dermed er vores nulhypotese

$$H_0 :\ p = 0{,}75$$

og vores alternative hypotese er:

$$H_1 : p \neq 0{,}75$$

Da stikprøven består af 500 ærter, har vi en binomialfordeling $X \sim b(500; 0{,}75)$. Det giver en middelværdi på:

$$\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}75 = 375$$

Spredningen er

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{500 \cdot 0{,}75 \cdot (1 - 0{,}75)} = 9{,}6825$$

En nedre grænse for acceptmængden er så ca.

$$\mu - 2 \cdot \sigma = 375 - 2 \cdot 9{,}6825 = 355{,}64$$

Et bud på den mindste værdi i acceptmængden er så 355. Ved hjælp af en computer kan vi beregne: $P(X \leq 355) = 0{,}023$ og $P(X \leq 356) = 0{,}029$. Så 356 er den mindste værdi i acceptmængden. Vi beregner den øvre grænse:

$$\mu + 2 \cdot \sigma = 375 + 2 \cdot 9{,}6825 = 394{,}36$$

Det kunne tyde på, at 394 er den største værdi. Vi beregner: $P(X \leq 394) = 0{,}9795$, hvilket er over 0,975, derfor beregner vi $P(X \leq 393) = 0{,}9735$. Dermed må den største værdi i acceptmængden være 393. Acceptmængden kan skrives:

$$\{356, 357, \ldots, 392, 393\}$$

Vores observation på 382 grønne ærter ligger i acceptmængden, og vi kan derfor ikke forkaste nulhypotesen. Det vil sige, at observation og teori stemmer overens.

Eksempel 10.6 (Fortsættelse af 10.2)**.** Vi har en teoretisk størrelse på 17%, som er resultatet af et valg. Dermed er vores nulhypotese

$$H_0 : \ p = 0{,}17$$

og vores alternative hypotese er:

$$H_1 : p \neq 0{,}17$$

Da stikprøven består af 1024 vælgere, har vi en binomialfordeling $X \sim b(1024; 0{,}17)$. Det giver en middelværdi på:

$$\mu = n \cdot p = 1024 \cdot 0{,}17 = 174{,}08$$

Spredningen er

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{1024 \cdot 0{,}17 \cdot (1 - 0{,}17)} = 12{,}02$$

En nedre grænse for acceptmængden er så ca.

$$\mu - 2 \cdot \sigma = 174{,}08 - 2 \cdot 12{,}02 = 150{,}02$$

Et bud på den mindste værdi i acceptmængden er så 150. Ved hjælp af en computer kan vi beregne: $P(X \leq 150) = 0{,}0237$ og $P(X \leq 151) = 0{,}0285$. Så 151 er den mindste værdi i acceptmængden. Vi beregner den øvre grænse:

$$\mu + 2 \cdot \sigma = 174{,}08 + 2 \cdot 12{,}02 = 198{,}1$$

Det kunne tyde på, at 198 er den største værdi. Vi beregner: $P(X \leq 198) = 0{,}9775$, hvilket er over 0,975, derfor beregner vi $P(X \leq 197) = 0{,}9725$. Dermed må den største værdi i acceptmængden være 197. Acceptmængden kan skrives:

$$\{151, 152, \ldots, 196, 197\}$$

Vores observation på 125 vælgere ligger uden for acceptmængden, og vi kan derfor forkaste nulhypotesen. Det vil sige, at observation og teori ikke stemmer overens. Og vi vælger at tro på den alternative hypotese $p \neq 0{,}17$.

Del 3

Avancerede emner

Kapitel 11

Teori for differentialregning

I det følgende vil teorien bag differentialregning blive gennemgået. Vi begynder med at behandle begreberne grænse og kontinuitet, hvorefter vi giver definitionen af differentialkvotienten ($f'(x)$). Til sidst vil vi udlede en række differentialkvotienter for nogle simple funktioner, samt bevise en række regneregler. Vi slutter med at bevise, at differentialkvotienten for sinus er cosinus.

Afsnittet forudsætter, at man har differentieret før, og har beregnet ting som tangenter og monotoniforhold for diverse funktioner.

11.1. Grænser og kontinuitet

For at kunne definere, hvad der menes med f', er vi nødt til at kende til begrebet grænseværdi. Dette begreb kommer i mange udgaver forskellige steder i matematik, men vi nøjes med at se på grænseværdibegrebet i forbindelse med funktioner.

Eksempel 11.1. Vi vil begynde med en meget simpel funktion, nemlig $f(x) = 2x$. Det, vi gerne vil, er at "flytte" på en x-værdi, så den kommer lige så tæt på et bestemt tal som overhovedet muligt, dog uden nogensinde at komme hen til tallet. Det, vi så holder øje med, er, hvad der sker med $f(x)$, når x bevæger sig henimod det givne tal?

I vores eksempel $f(x) = 2x$, kan vi spørge hvad der sker med $f(x)$, når vi nærmer x mod 1. Det vil sige, at vi ser på forskellige udregninger af $f(x)$, for forskellige værdier af x, mens det kommer tætter og tætter på 1.

Følgende tabel viser effekten af, at x nærmer sig 1.

x nærmer sig 1 → ← x nærmer sig 1

x	0.900	0.990	0.999	1.000	1.001	1.010	1.100
$f(x)$	1.800	1.980	1.998	2.000	2.002	2.020	2.200

$f(x)$ nærmer sig 2 → ← $f(x)$ nærmer sig 2

Umiddelbart er det klart, at når x nærmer sig 1, så nærmer $f(x)$ sig 2. Det skriver vi således:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Ordet lim er en forkortelse af det latinske ord limes, og det betyder "grænse". Det, der står under lim, er $x \to 1$, hvilket vi læser som "x går imod 1". Det, der står efter lim, er $f(x)$, det er det, vi holder øje med. At det er lig med 2, kan vi se i tabellen oven for. Samlet vil vi sige: "grænsen for $f(x)$ for x gående imod 1 er 2".

Det ovenstående eksempel er lidt mærkeligt, fordi vi "bare" kunne have regnet $f(1) = 2 \cdot 1 = 2$. Det næste eksempel viser, hvordan en grænse kan gå galt.

Eksempel 11.2. Vi ser på følgende gaffelfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Grafen for f kan ses i figur 11.1. Hvis vi følger grafen fra venstre mod højre, vil vi, til at begynde med, have, at $f(x)$ giver -1. Når vi når frem til 0, så hopper grafen op til 1. Det betydet, at grænsen:

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

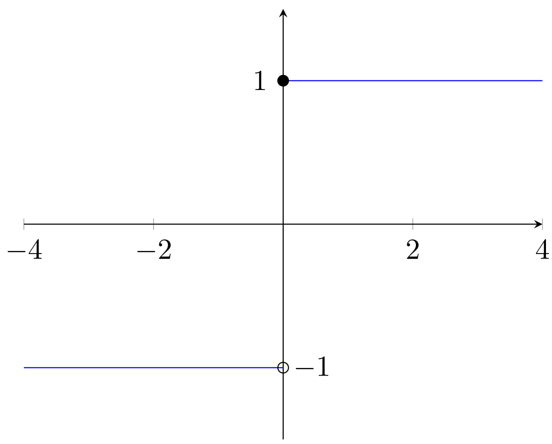
ikke giver mening. Skal den være -1 eller 1 eller noget helt andet? Følgende tabel indfanger problemet:

x nærmer sig 0 → ← x nærmer sig 0

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-1	-1	-1	?	1	1	1

$f(x)$ nærmer sig -1 → ← $f(x)$ nærmer sig 1

Med andre ord, så er grænsen ikke defineret, fordi vi skal være i stand til at give én værdi til grænsen, og i dette tilfælde har vi to.



Figur 11.1. Graf for funktionen $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \\ -1 & x < 0 \end{cases}$.

Vi vil nu give et eksempel, som vil gå igen i det følgende, og derfor er vigtigt.

Eksempel 11.3 (Vigtigt!)**.** Vi ser på funktionen:

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}, \qquad x \neq 4$$

Denne funktion har det særlige ved sig, at det ikke er muligt at indsætte $x = 4$ i formlen, og få et resultat. Hvis man gjorde det, så ville man få:

$$f(4) = \frac{4^2 - 16}{4 - 4} = \frac{16 - 16}{0} = \frac{0}{0}$$

Så ikke alene dividerer vi med nul, men det er nul, der divideres med nul. Så er spørgsmålet, hvad der sker, når x nærmer sig 4? Hvad sker der med $f(x)$? Hvis vi tegner grafen for f, ser vi, at det er en ret linje, hvor der mangler et punkt i $(4, 8)$. Og følgende tabel viser, at det ser ud som om $f(x)$ faktisk nærmer sig 8.

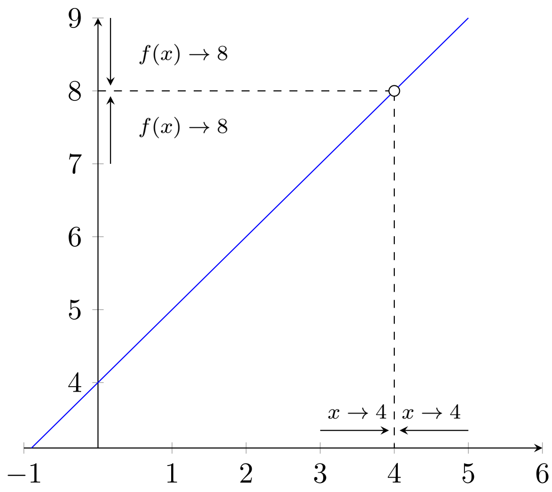
x nærmer sig 4 → ← x nærmer sig 4

x	3.900	3.990	3.999	4.000	4.001	4.010	4.100
$f(x)$	7.900	7.990	7.999	?	8.001	8.010	8.100

$f(x)$ nærmer sig 8 → ← $f(x)$ nærmer sig 8

Ved at se på grafen for f (se figur 11.2), og tabellen kan vi gætte på, at grænsen

$$\lim_{x \to 4} f(x)$$



Figur 11.2. Grafen for $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$. Der, hvor f ikke er defineret, er markeret med en cirkel. Ligeledes er bevægelserne for x og $f(x)$ markeret, når $x \to 4$.

faktisk eksisterer, og vi kan gætte på, at den er 8. Følgende udregning viser, at vi har ret:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 16}{x - 4} \\ &= \frac{x^2 - 4^2}{x - 4} \end{aligned}$$

Fra 3. kvadratsætning: $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ får vi:

$$\begin{aligned} &= \frac{(x + 4) \cdot (x - 4)}{x - 4} \\ &= x + 4 \quad \text{og} \quad x \neq 4 \end{aligned}$$

Det sidste udtryk giver også mening for $x = 4$. Dermed kan vi opstille en ny funktion:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4}, & x \neq 4 \\ 8, & x = 4 \end{cases}$$

Som også tager det manglende punkt med. Dog i dette tilfælde kan vi lave en simplere forskrift: $f^*(x) = x + 4$.

Med andre ord ”grænsen for $f(x)$ for x gående mod 4 er 8”, hvilket vi skriver

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 8$$

Når der tales om grænser og funktioner, bliver det nødvendigt at tale om begrebet *kontinuitet*. Kontinuitet for en funktion f bliver ofte præsenteret som, at grafen for en funktion er sammenhængende.

En funktion f kan være kontinuert i et punkt x_0, det er den, hvis funktionsværdierne $f(x)$, kan komme vilkårligt tæt på $f(x_0)$, når blot x og x_0 er tæt nok på hinanden.

Pointen med kontinuerte funktioner er, at de opfører sig pænt, når vi tager grænser. Det vil sige, hvis vi følger grafen for en kontinuert funktion, så kan vi nå frem til alle punkter på grafen.

Det giver anledning til følgende definition

Definition 11.4 (Kontinuert)**.** Hvis f er kontinuert i x_0, så gælder følgende:

(1) f er defineret i x_0.

(2) Følgende grænse:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

eksisterer, og grænsen er $f(x_0)$.

Hvis en funktion er kontinuert i alle værdier i dens definitionsmængde, så kaldes den bare kontinuert.

Hvis vi ser på vores tre eksempler oven for. Så er den første funktion $f(x) = 2x$ i eksempel 11.1 kontinuert i $x = 1$, men faktisk er den kontinuert i alle værdier, så den er slet og ret kontinuert.

I det andet eksempel 11.2 havde vi funktionen $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \\ -1, & x < 0 \end{cases}$. Der findes ingen grænse for x gående mod 0. Funktionen f er dog defineret i dette punkt, så den betingelse er opfyldt, men funktionen kan ikke være kontinuert i $x = 0$. Dette kaldes en *diskontinuitet*.

I eksempel 11.3 med funktionen: $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$, er funktionen ikke defineret i $x = 4$, dermed kan den heller ikke være kontinuert i $x = 4$, selvom grænsen eksisterer. Funktionen er faktisk kontinuert, fordi grænserne eksisterer for alle de værdier, hvor f *er defineret.*

Vi kan samle det ovenstående i følgende tabel:

Funktion	$f(x) = 2x$	$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \\ -1, & x < 0 \end{cases}$	$f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$
x_0	1	0	4
Defineret i x_0?	Ja	Ja	Nej
Eksisterer grænse?	Ja	Nej	Ja
Kontinuert i x_0?	Ja	Nej	–
Kontinuert?	Ja	Nej	Ja

11.1.1. Hvilke funktioner er kontinuerte? Det er praktisk at have en liste over kontinuerte funktioner. Denne liste vil blive benyttet i det følgende:

11.1.2. Funktionstyper. Følgende funktioner er kontinuerte for alle punkter i deres definitionsmængde.

(1) Alle konstante funktioner $f(x) = k$, hvor k er et vilkårligt tal.
(2) Alle polynomier $f(x) = ax + b$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, ...
(3) Alle eksponential funktioner $f(x) = e^x$, $f(x) = a^x$.
(4) Alle logaritmer $\log(x)$, $\ln(x)$, husk at $x > 0$.
(5) Alle trigonometriske funktioner $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$.
(6) Alle rødder $\sqrt[n]{x}$, hvor $x > 0$, når n er lige, og x er alle tal, når n er ulige.

11.1.3. Kombinationer af funktioner. Følgende kombinationer af kontinuerte funktioner er kontinuerte:

(1) Sum: $f(x) + g(x)$.
(2) Differens: $f(x) - g(x)$.
(3) Produkt: $f(x) \cdot g(x)$.
(4) Division $\frac{f(x)}{g(x)}$, når $g(x) \neq 0$.
(5) Sammensætning: $f(g(x))$.

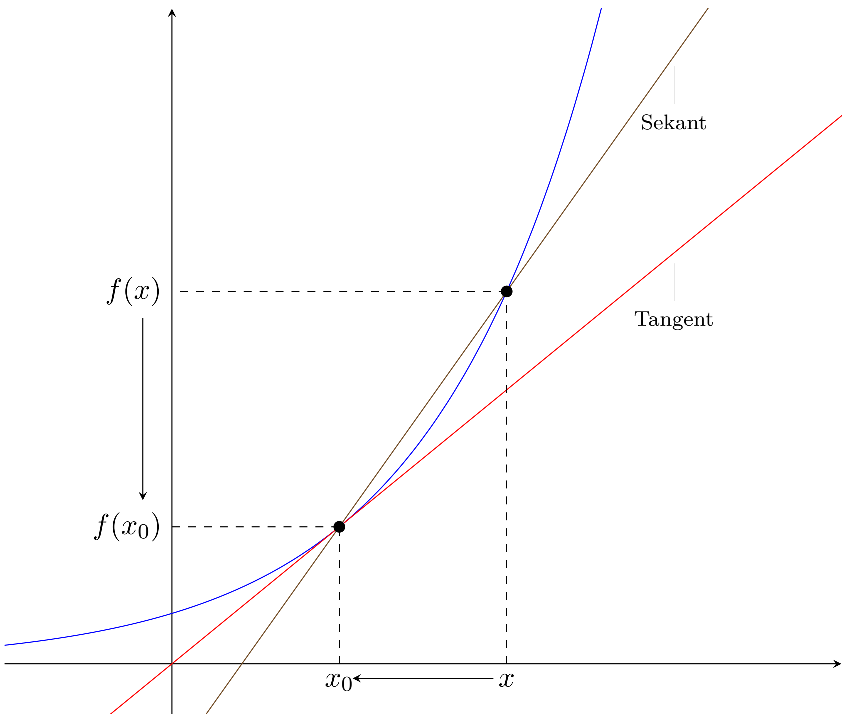
11.2. Definitionen af differentialkvotient

Udgangspunktet for differentiation er, at vi har en funktion f, som er defineret på et interval I (her kan et interval godt være alle tal). Hvis x_0 er et indre punkt i intervallet I, så kan vi undersøge om, vi kan beregne $f'(x_0)$. Det vi beregner med $f'(x_0)$, er tangenthældningen i punktet $(x_0, f(x_0))$. Se figur 11.3.

Problemet med er, at vi kun kender et punkt på f, og vi kan derfor ikke beregne tangentens hældning. Det kræver to punkter.

Løsningen er at indføre et hjælpepunkt $(x, f(x))$. Igennem punkterne $(x_0, f(x_0))$ og $(x, f(x))$ kan der tegnes en linje, der kaldes en *sekant*. Fordi sekanten er en ret linje, der går igennem to punkter, så har den en veldefineret hældning.

Hvis vi lader x gå henimod x_0, så vil punktet $(x, f(x))$ følge grafen for f og komme tættere på $(x_0, f(x_0))$. Sekanten vil dermed også komme tættere på tangenten. Hældningen for sekanten nærmer sig så hældningen for tangenten.



Figur 11.3. Figur der viser tanken bag differentialkvotienten

Grænsen, for denne bevægelse af x mod x_0, er, hvad vi vil kalde differentialkvotienten.

Sekantens hældning kan beregnes ved at anvende formlen for hældningen af en ret linje:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Vi har $(x_1, y_1) = (x_0, f(x_0))$, og $(x_2, y_2) = (x, f(x))$. Dermed er hældningen:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Vi er nu i stand til at lave en præcis definition af begrebet differentialkvotient.

Definition 11.5 (Differentialkvotient)**.** Givet en funktion f, defineret på et interval I med et indre punkt x_0. Hvis grænsen:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \tag{11.1}$$

eksisterer. Så kaldes f differentiabel i x_0, og grænsen betegnes med $f'(x_0)$, og kaldes differentialkvotienten.

Bemærkning 11.6 (Eksistens af grænse)**.** I definition af differentialkvotient, står der "hvis grænsen ... eksisterer". Det vil sige, at der er en risiko for, at en grænse ikke eksisterer, og dermed kan funktionen ikke differentieres i det punkt.

Når vi kan beregne hældningen af en tangent, så kan vi vel også beregne en ligning for en tangent. Det kan gøres med formlen:

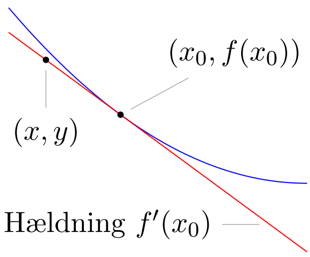
$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Formlen er forholdsvis let at bevise:

Sætning 11.7. *Hvis en funktion f er differentiabel i x_0, så er ligningen for tangenten til f med røringspunkt $(x_0, f(x_0))$ givet ved:*

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Bevis. Vi tegner en figur af situationen. Vi har to punkter:$(x_1, y_1) = (x_0, f(x_0))$ og $(x_2, y_2) = (x, y)$. Hældningen er $f'(x_0)$.



Vi har at:

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ f'(x_0) &= \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} \\ f'(x_0) \cdot (x - x_0) &= y - f(x_0) \\ y &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$

□

Vi kan opfatte tangenten som en tilnærmelse til grafen for f, hvis vi vel at mærke er "tæt" på punktet $(x_0, f(x_0))$. En tilnærmelse betyder, at der ikke er stor forskel på de værdier, man får ud af f, og dem man får ud af at bruge tangentligningen til at beregne y-koordinater. Til gengæld betyder det ikke, at grafen for f og tangenten ligner hinanden.

11.3. Sekanter

Sekanterne er nogle linjer, der skal hjælpe os til at komme frem til tangentens hældning. Da vi for ethvert $x \neq x_0$ har en sekant med en hældning, så kan vi opfatte udregningen af sekanthældning som en funktion, der afhænger af x. Med andre ord, så vil vi se på *sekantfunktionen*:

$$s(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

for forskellige eksempler på f.

Eksempel 11.8. Et simpelt eksempel kan være funktionen: $f(x) = x^2$. Hvis vi vælger $x_0 = 4$, så får vi sekantfunktionen:

$$s(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \frac{x^2 - 4^2}{x - 4} = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

Det er den funktion, vi så på i eksempel 11.3 på side 163. Der så vi, at grænsen for x gående mod 4, er 8. Eller sagt anderledes, at

$$\lim_{x \to 4} s(x) = 8$$

Dermed er $f(x) = x^2$ differentiabel i $x_0 = 4$, og $f'(4) = 8$.

Eksempel 11.9. Vi ser på eksemplet $f(x) = |x|$. Grafen kan ses på figur 11.4. vi vælger $x_0 = 0$. Vi husker, at $|x|$ er givet ved:

$$|x| = \begin{cases} x, & 0 \leq x \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Så vi bliver nødt til at dele vores sekantfunktion s op i to tilfælde $0 < x$, og $x < 0$.

Vi begynder med $0 < x$. Det vil sige, at $f(x) = x$. Vi skriver:

$$s_{0\leq}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

så s er konstant 1, når $0 < x$.

Vi ser nu på $x < 0$. Det vil sige, at $f(x) = -x$. Vi skriver:

$$s_{<0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-x - 0}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1$$

så s er konstant -1, når $x < 0$. Det vil sige, at sekantfunktionen er:

$$s(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

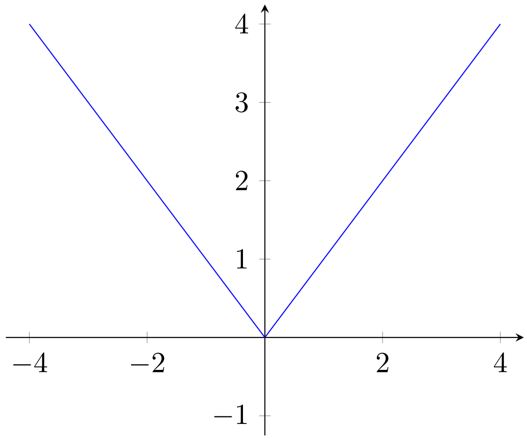
Det er den funktion vi, så på i eksempel 11.2, dog med den forskel, at s ikke er defineret for $x = 0$. Dermed ved vi, at grænsen:

$$\lim_{x \to 0} s(x)$$

ikke findes. Dermed er $f(x) = |x|$ ikke differentiabel i $x_0 = 0$.

Problemet med $f(x) = |x|$ er, at i $x_0 = 0$ er der to bud på, hvad tangenthældningen skal være, og vi vil have, at f-mærke er entydigt bestemt.

Generelt kan vi sige, at "skarpe kanter" på en funktion indikerer, at den ikke er differentiabel, det vil sige, at der er steder, hvor vi ikke kan beregne f-mærke.



Figur 11.4. Grafen for $f(x) = |x|$.

Vi giver et sidste eksempel på noget, der kan gå galt. Her vil funktion ikke have nogle "kanter", men der vil være et sted hvor tangenten ikke kan beregnes.´

Eksempel 11.10. Vi ser på funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x}$, som i modsætning til kvadratroden er defineret for alle tal. Vi vælger $x_0 = 0$. Vores sekantfunktion bliver:

$$s(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$$

Det er ikke umiddelbart til at se, hvad der sker med sekantfunktionen for x gående mod 0. På figur 11.5 er grafen for sekantfunktionen tegnet. Når vi nærmer os 0, fra venstre og højre, så stikker grafen for funktionen så at sige af mod uendelig.

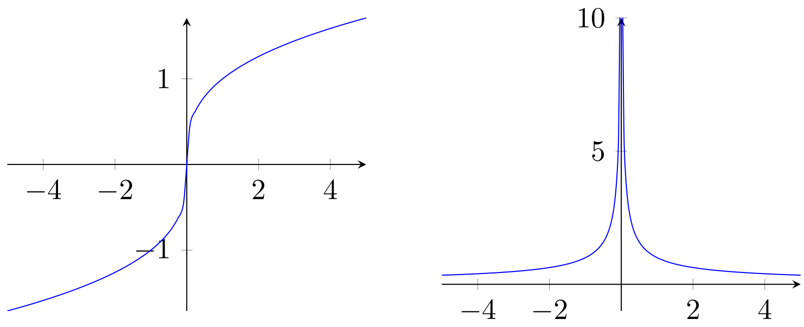
Det er med nogle lidt mere avancerede teknikker muligt at vise, at grænsen for x gående mod 0 for denne sekantfunktion er uendelig. Eller i symboler.

$$\lim_{x \to 0} s(x) = \infty$$

Så selvom $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ikke har nogle skarpe kanter, så er den ikke differentiabel, når $x = 0$, fordi uendelig ikke er en gyldig tangenthældning.

11.4. En vigtig beskrivelse af differentiabilitet

Pointen med vores eksempler med sekantfunktioner er, at vi har en kontinuert funktion s, der ikke er defineret et enkelt sted x_0. Hvis vi kan udvide den til en kontinuert funktion, så er f differentiable i x_0. Og det er tilfældet, hvis grænsen $\lim_{x \to x_0} s(x)$ eksisterer.



Figur 11.5. Til venstre grafen for $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Til højre Sekantfunktionen $s(x)$ med $x_0 = 0$

Definitionen af differentialkvotient siger, at grænsen

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

eksisterer, hvis f er differentiabel i x_0. Dermed kan vi definere en funktion f^*, som en kontinuert udvidelse af sekantfunktionen:

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x \neq x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0 \end{cases} \tag{11.2}$$

Denne funktion er netop kontinuert i x_0, når f er differentiabel, fordi f^* er defineret i x_0, og fordi:

$$\lim_{x \to x_0} f^*(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Ved at lave samme udregning som i beviset for tangentligningen, får vi:

$$f(x) - f(x_0) = f^*(x) \cdot (x - x_0)$$

Hvis vi omvendt forstiller os, at vi har en funktion $f^*(x)$ som er kontinuert i x_0, og som passer ind i ovenstående ligning for alle x i et interval, der indeholder x_0, så vil:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f^*(x)$$

Men da f^* er kontinuert i x_0, så findes den højre grænse, og den er lig med $f^*(x_0)$. Men det betyder, at den venstre grænse eksisterer og $f^*(x_0) = f'(x_0)$. Med andre ord, hvis vi kan bestemme en f^*-funktion, så kan vi afgøre om f er differentiabel, og hvad differentialkvotienten er i x_0.

Følgende sætning giver sammenhængen mellem f^* og f'.

Sætning 11.11 (Beskrivelse af differentiabilitet)**.** *Givet en funktion f defineret på et interval I med x_0 som et indre punkt. Så er f differentiabel i x_0, hvis og kun hvis, der findes en funktion f^* defineret på I, der opfylder:*

(1) *f^* er kontinuert i x_0.*

(2) *f^* opfylder ligningen: $f(x) - f(x_0) = f^*(x) \cdot (x - x_0)$.*

i det tilfælder er $f^*(x_0) = f'(x_0)$.

Bemærkning 11.12. Sætningen oven over kræver en forklaring. Når der står "hvis og kun hvis," så betyder det: Hvis f er differentiabel, så findes en f^*-funktion. Og omvendt, hvis der findes en f^*-funktion, så er f differentiabel. Det vil sige, at de to beskrivelser af differentiabilitet siger det samme. Det kræver en uddybning.

For at tage et mere jordnært eksempel. Hvis vi har to beskrivelser af begrebet kage, hvor den ene beskrivelse er, at kage er "en sød brødlignende spise", og den anden beskrivelse er, at kage er "en brødlignende dessert", så kunne vi forestille os, at vi argumenterer for, at de to beskrivelser siger det samme. Dermed har vi vist:

$$\text{kage} = \text{kage}$$

Det bliver vi ikke nødvendigvis klogere af. Men vi rammer ved siden af pointen: De to beskrivelser af kage kan noget forskelligt. Hvis man er ved at gå sukkerkold, så kan beskrivelse af kage som "en sød brødlignende spise" være god at anvende. Mens hvis et barn ønsker kage før aftensmad, så kan beskrivelsen af kage som "en brødlignende dessert" være god at bruge, for man spiser dessert til sidst.

Kageeksemplet er tænkt til at vise, at sætning 11.11 giver to beskrivelser af differentiabilitet, som er identiske, men kan noget forskelligt. Beskrivelsen af differentiabilitet som grænsen af sekanthældninger fortæller os, hvad det er der på spil, nemlig tangenthældning. Hvorimod f^*-beskrivelsen giver en effektiv måde at bevise sætninger om differentiable funktioner.

Nu kan vi lave beviset for sætning 11.11. Beviset vil være opbygget sådan, at vi begynder med en beskrivelse af differentiabilitet, og så omformer vi til den anden beskrivelse. Bagefter bytter vi om. Det er den første del af beviset, der mest interessant og relevant.

Bevis for sætning 11.11. Vi begynder med at vise, at hvis der findes en f^*-funktion, som opfylder de to punkter, så er f differentiabel i x_0.

Fra punkt 2 har vi:

$$f^*(x) \cdot (x - x_0) = f(x) - f(x_0)$$

Dividerer med $x - x_0$, og kræver, at $x \neq x_0$:

$$f^*(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0$$

Hvis f^* er kontinuert i x_0, gælder det, at $\lim_{x \to x_0} f^*(x) = f^*(x_0)$. Da f^* er kontinuert i x_0, så kan vi tage grænsen for x gående mod x_0 på begge sider af lighedstegnet.

$$\lim_{x \to x_0} f^*(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Da grænsen til venstre eksisterer, og er $f^*(x_0)$, så eksisterer grænsen til højre også:

$$f^*(x_0) = f'(x_0)$$

Dermed er f differentiabel i x_0.

Omvendt, hvis f er differentiabel i x_0, så vil vi finde en f^*-funktion. Da f er differentiabel i x_0, så har vi $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$. Dermed kan vi definere en funktion f^* ved:

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & x \neq x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0 \end{cases}$$

Vi skal undersøge om vores forslag til f^*-funktion, opfylder de to punkter. Vi begynder med kontinuitet. Definitionen af kontinuitet (11.4, side 165) siger, at før f^* er kontinuert i x_0, så skal f^* være defineret i x_0, hvilket den er da $f^*(x_0) = f'(x_0)$. Derudover skal følgende grænse eksisterer $(x \neq x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} f^*(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Her følger det sidste lighedstegn af, at f er differentiabel i x_0. Det vil sige, at $\lim_{x \to x_0} f^*(x) = f'(x_0) = f^*(x_0)$, og f^* er kontinuert i x_0.

Vi mangler nu at bevise, at f^* opfylder $f(x) - f(x_0) = f^*(x) \cdot (x - x_0)$. For $x \neq x_0$ kan vi bruge udledningen fra tidligere baglæns til at komme frem til denne ligning. I tilfældet $x = x_0$ laver vi følgende udregning:

$$f(x_0) = f^*(x_0) \cdot (x_0 - x_0) + f(x_0)$$

Men da f^* er defineret i x_0, og $x_0 - x_0 = 0$, så har vi $0 = 0$. Dermed er beviset gennemført. □

Bemærkning 11.13. Bemærk, at vi vil bruge sætning 11.11 til at vise om en funktion er differentiabel. Sætningen siger, at eksistensen af en funktion

f^*, der opfylder punkt 1 og 2 oven for er det samme som at være differentiabel.

Vi kan tilføje en funktion til listen over kontinuerte funktioner:

Sætning 11.14. *Hvis f er differentiabel i x_0, så er den også kontinuert i x_0.*

Bevis. Hvis f er differentiabel i x_0, så findes der en funktion f^*, der er kontinuert i x_0, og som opfylder

$$f(x) - f(x_0) = f^*(x) \cdot (x - x_0).$$

Højre side af lighedstegnet er kontinuert i x_0, da f^*, $(x - x_0)$ og $f(x_0)$ alle er det. Dermed er f også kontinuert i x_0. □

Bemærkning 11.15. Læg mærke til, at det modsatte ikke er tilfældet, som vi så med $f(x) = |x|$, der er kontinuert i $x = 0$, men ikke differentiabel i $x = 0$. Se eksempel 11.9.

11.5. Beviser for simple funktioner

Vi vil nu lave nogle beviser, hvor vi udleder differentialkvotienten for nogle simple funktioner. Disse beviser er skåret over samme læst. Vi vil finde en forskrift f^*, der passer ind i ligningen $f(x) - f(x_0) = f^*(x_0) \cdot (x - x_0)$, og så vil vi vise, at f^* er kontinuert. Så kan vi anvende sætning 11.11 til at vise to ting. For det første, at vores funktion er differentiabel, og for det andet, at funktionen har en bestemt differentialkvotient.

Skematisk bliver det til:

(1) Vi begynder med at beregne $f(x) - f(x_0)$ for at få et bud på, hvad f^* kan være for en funktion.
(2) Vi undersøger om den fundne f^* er kontinuert i x_0.
(3) Hvis f^* er kontinuert i x_0, så konkluderer vi, at f er differentiabel i x_0.
(4) Til sidst beregner vi $f^*(x_0)$, for at bestemme $f'(x_0)$.

Før vi laver et bevis, giver vi et eksempel på anvendelse af metoden.

Eksempel 11.16. Vi ser på funktionen:

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

Vi vil lade x_0, være et vilkårligt tal, for ellers mister vi overblikket. Vi skriver:

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= 3x^2 - 4x + 1 - \left(3x_0^2 - 4x_0 + 1\right) && \text{Opskriver punkt 1}\\
&= 3x^2 - 4x + 1 - 3x_0^2 + 4x_0 - 1 && \text{Hæver parentesen}\\
&= 3x^2 - 3x_0^2 - 4x + 4x_0 + 1 - 1 && \text{Samler ens led}\\
&= 3(x^2 - x_0^2) - 4(x - x_0) && \text{Sætter 3 og -4 uden for parentes}\\
&= 3(x + x_0)(x - x_0) - 4(x - x_0) && \text{Bruger 3. kvadratsæting}\\
&= (3(x + x_0) - 4) \cdot (x - x_0) && \text{Sætter } x - x_0 \text{ uden for parentes}
\end{aligned}$$

Resultatet af udregningen er

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{(3(x + x_0) - 4)}_{f^*(x)} \cdot (x - x_0)$$

Dermed er $f^*(x) = 3(x + x_0) - 4$, og vi har fundet et bud på f^* i punkt 1. Det er en lineær funktion, så derfor er den kontinuert i x_0, så vi har klaret punkt 2. Vi ved nu, at f er differentiabel i x_0, hvilket er punkt 3. Vi beregner nu $f^*(x_0) = 3(x_0 + x_0) - 4 = 3 \cdot 2 \cdot x_0 - 4 = 6x_0 - 4$. Det vil sige, at $f'(x_0) = 6x_0 - 4$. Og vi har klaret punkt 4, og vi er færdige.

Sætning 11.17. *Lad f være en funktion, så gælder:*

(1) *Hvis $f(x) = k$, så er f differentiabel med differentialkvotient: $f'(x) = 0$.*

(2) *Hvis $f(x) = x$, så er f differentiabel med differentialkvotient: $f'(x) = 1$.*

(3) *Hvis $f(x) = x^2$, så er f differentiabel med differentialkvotient: $f'(x) = 2x$.*

Bevis. Vi lader x_0 være et vilkårligt punkt i definitionsmængderne for vores funktioner

Ad 1:($f(x) = k$) Vi skriver:

$$f(x) - f(x_0) = k - k = 0$$

Da $0 \cdot (x - x_0) = 0$, kan vi skrive:

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{0}_{f^*(x)} \cdot (x - x_0)$$

Dermed skal $f^*(x) = 0$, og da det er en kontinuert funktion (den er konstant) i x_0, så er f differentiabel, og $f^*(x_0) = 0 = f'(x_0)$. Da x_0 var vilkårligt gælder det for alle x_0.

Ad 2:$(f(x) = x)$ Vi skriver:

$$f(x) - f(x_0) = x - x_0$$

Da $1 \cdot (x - x_0) = x - x_0$, kan vi skrive:

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{1}_{f^*(x)} \cdot (x - x_0)$$

Dermed skal $f^*(x) = 1$, og da det er en kontinuert funktion (den er konstant) i x_0, så er f differentiabel, og $f^*(x_0) = 1 = f'(x_0)$. Da x_0 var vilkårligt gælder det for alle x_0.

Ad 3:$(f(x) = x^2)$ Vi skriver:

$$f(x) - f(x_0) = x^2 - x_0^2$$

Fra 3. kvadratsætning: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, får vi:

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{(x + x_0)}_{f^*(x)} \cdot (x - x_0)$$

Dermed skal $f^*(x) = x + x_0$, og da det er en kontinuert funktion (den er lineær) i x_0, så er f differentiabel, og $f^*(x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0 = f'(x_0)$. Da x_0 var vilkårligt gælder det for alle x_0. □

Bemærkning 11.18 (Højere eksponenter)**.** Ideen fra beviset for $f(x) = x^2$ kan udvides til alle heltallige positive eksponenter. F.eks. kan man lave følgende omskrivning for x^3

$$x^3 - x_0^3 = (x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2)(x - x_0)$$

For x^4:

$$x^4 - x_0^4 = (x^3 + x^2 x_0 + x x_0^2 + x_0^3)(x - x_0)$$

For x^n:

$$x^n - x_0^n = (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots + x^2 x_0^{n-3} + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})(x - x_0)$$

Vi vil nu bevise to lidt mere avancerede formler.

Sætning 11.19. *Hvis* $f(x) = \frac{1}{x}$*, så er* f *differentiabel for alle* $x \neq 0$ *med differentialkvotient* $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

Bevis. Vi skriver:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}$$

Forlænger brøkerne, så vi har en fælles nævner:

$$= \frac{x_0}{xx_0} - \frac{x}{xx_0}$$
$$= \frac{x_0 - x}{xx_0}$$

I tælleren sættes -1 uden for parentes:

$$= \frac{-(x - x_0)}{xx_0}$$
$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{-1}{xx_0}}_{f^*(x)}(x - x_0)$$

Dermed er $f^*(x) = \frac{-1}{xx_0}$, når $x \neq 0$. Denne funktion er kontinuert i x_0, da den er en division af en konstant med en lineær funktion. Det vil sige, at f er differentiabel, og $f^*(x_0) = \frac{-1}{x_0^2} = f'(x_0)$. Da x_0 var vilkårligt gælder det for alle x_0. □

Sætning 11.20. *Hvis $f(x) = \sqrt{x}$, så er f differentiabel for alle $x > 0$ med differentialkvotient $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$*

Bevis. Vi skriver:

$$f(x) - f(x_0) = \sqrt{x} - \sqrt{x_0}$$

Der ganges med $1 = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$

$$= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{x_0})$$
$$= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{x_0})}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$
$$= \frac{\sqrt{x}\sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$
$$= \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$
$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}}_{f^*(x)}(x - x_0)$$

Dermed er $f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$. Denne funktion er kontinuert i x_0. Det vil sige, at f er differentiabel, og $f^*(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = f'(x_0)$. Da x_0 var vilkårligt gælder det for alle x_0. □

11.6. Beviser for regneregler

Vi har lige lavet beviser for simple funktioner. Her var det vigtigt, at vi fandt et f^*, som var kontinuert og passede i ligningen: $f(x) - f(x_0) = f^*(x - x_0)$. I de følgende beviser vil vi antage, at vores funktioner er differentiable. Så vi antager, at et passende f^* findes, og så viser vi, at en kombination af funktioner også opfylder betingelserne i sætning 11.11.

Sætning 11.21 (Sum og produkt)**.** *Givet funktioner f og g, der er differentiable x_0, så er funktionerne $f + g$ og $f \cdot g$ differentiable i x_0, og følgende gælder:*

(1) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
(2) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

Bevis. Hvis f og g er differentiable i x_0, så findes der f^* og g^*, der kontinuerte i x_0 og som opfylder henholdsvis:

$$f(x) - f(x_0) = f^*(x)(x - x_0)$$

og

$$g(x) - g(x_0) = g^*(x)(x - x_0)$$

Ad 1:(sum) Vi skriver:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) - (f + g)(x_0) &= f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0)) \\ &= f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)\end{aligned}$$

Hæver minusparentes

$$\begin{aligned}&= \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{f^*(x)(x-x_0)} + \underbrace{g(x) - g(x_0)}_{g^*(x)(x-x_0)} \\ &= f^*(x)(x - x_0) + g^*(x)(x - x_0)\end{aligned}$$

Sætter $x - x_0$ under for parentes

$$\begin{aligned}&= (f^*(x) + g^*(x))(x - x_0) \\ &= (f^* + g^*)(x)(x - x_0)\end{aligned}$$

Da f^* og g^* er kontinuerte i x_0, så er $f^* + g^*$ kontinuert i x_0. Dermed er $(f + g)^*(x) = (f^* + g^*)(x)$, og $(f + g)(x)$ er differentiabel i x_0 og

$$(f + g)^*(x_0) = f^*(x_0) + g^*(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) = (f + g)'(x_0)$$

Ad 2:(produkt) Vi skriver:

$(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0) = f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)$

Indsætter $-f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) = 0$

$$= f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)$$

Sætter $g(x)$ uden for parentes

$$= (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)$$

Sætter $f(x_0)$ uden for parentes

$$\begin{aligned} &= \underbrace{(f(x) - f(x_0))}_{f^*(x)(x-x_0)} g(x) + f(x_0) \underbrace{(g(x) - g(x_0))}_{g^*(x)(x-x_0)} \\ &= f^*(x)(x - x_0)g(x) + f(x_0)g^*(x)(x - x_0) \end{aligned}$$

Sætter $x - x_0$ uden for parentes

$$= (f^*(x)g(x) + f(x_0)g^*(x))(x - x_0)$$

De fire funktioner i $f^*(x)g(x) + f(x_0)g^*(x)$ alle er kontinuerte i x_0. Funktioner f^* og g^* har vi antaget, at de er kontinuerte. Funktionen g er kontinuert, fordi den er differentiabel, og $f(x_0)$ er konstant. Så sammensætningen af de fire funktion er også kontinuert i x_0. Det vil sige, $(f \cdot g)^*(x) = f^*(x)g(x) + f(x_0)g^*(x)$ og $f \cdot g$ er differentiabel i x_0. Vi får:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)^*(x_0) &= f^*(x_0)g(x_0) + f(x_0)g^*(x_0) \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) = (f \cdot g)'(x_0) \end{aligned}$$

□

Sætning 11.22 (Kædereglen)**.** *Givet to funktioner g og f, hvor g er differentiabel i x_0, og f er differentiabel i $g(x_0)$. Så er $f(g(x_0))$ differentiabel i x_0, og det gælder at:*

$$(f(g(x_0)))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Bevis. Hvis g er differentiable i x_0, og f er differentiabel i $g(x_0)$, så findes der g^* og f^*, der kontinuerte i x_0 og $g(x_0)$, og som opfylder henholdsvis:

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = f^*(g(x))(g(x) - g(x_0))$$

og

$$g(x) - g(x_0) = g^*(x)(x - x_0)$$

Dermed:

$$\begin{aligned} f(g(x)) - f(g(x_0)) &= f^*(g(x)) \underbrace{(g(x) - g(x_0))}_{g^*(x)(x-x_0)} \\ &= f^*(g(x)) \cdot g^*(x)(x - x_0) \end{aligned}$$

Funktionen $f^*(g(x)) \cdot g^*(x)$ er kontinuert i x_0, da den består af en sammensat funktion af to kontinuerte funktioner, og der ganges en kontinuert funktion på. Dermed er $f(g(x))$ differentiabel i x_0 og

$$f^*(g(x_0)) \cdot g^*(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

□

11.7. Differentiation af sinus

Vi ønsker at bevise følgende:

Sætning 11.23. *Differentialkvotienten af* $\sin(x)$ *er* $\cos(x)$. *Eller:*

$$\big(\sin(x)\big)' = \cos(x)$$

Her vil vi benytte tre trin.

(1) Skriv sekanthældningen op: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

(2) Gør noget smart.

(3) Tag grænsen: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

Det viser sig, at det at gøre noget smart er lidt bøvlet, men tilgengæld er det meget bøvlet at tage grænsen.

Bemærkning 11.24. Vi antager i det følgende, at både sinus og cosinus er kontinuerte funktioner. Ellers kan vi ikke være sikre på, at de grænser vi tager senere eksisterer.

Vi begynder stille og roligt:

11.7.1. De to første punkter.

Bevis. Vi ser på funktionen $f(x) = \sin(x)$. Vi opskriver sekanthældningen:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}$$

Vi benytter følgende regneregel:

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Her er $x = x_0 + h$ og $y = x_0$. Vi skriver op:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} &= \frac{2\cos\left(\frac{x_0+h+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x_0+h-x_0}{2}\right)}{h} \\ &= \frac{2\cos\left(\frac{2x_0+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\end{aligned}$$

Vi forlænger brøken med $\frac{1}{2}$:

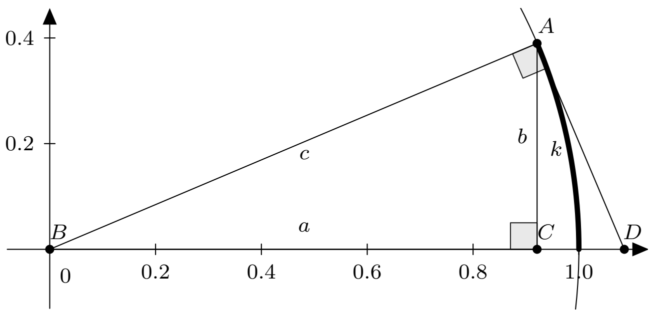
$$= \frac{\cos\left(\frac{2x_0+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$
$$= \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

Nu burde vi kunne lade h gå mod 0, men vi ved ikke, hvad $\frac{\sin(h/2)}{h/2}$ har for en grænse, når h går mod 0. Vi omdøber: $k = \frac{h}{2}$, hvilket også går mod 0, når h gør det. Det vil sige, at vi skal undersøge grænsen:

$$\lim_{k\to 0} \cos(x_0 + k)\frac{\sin(k)}{k}.$$

Dog er det kun sinusdelen, der giver os problemer. □

11.7.2. En mærkelig grænse. Da $\sin(0) = 0$ kunne man tro, at $\lim_{k\to 0} \frac{\sin(k)}{k} = \frac{0}{0}$. Men det giver faktisk 1. Vi tegner et udsnit af enhedscirklen:



Vi vil udnytte, at vi kan se, at $\sin(k) = b \leq k \leq |AD|$.

Vi har trekant ABC og trekant ABD. De er ensvinklede, da de begge deler vinkel B og er retvinkelede. For trekant ABC gælder det, at $a = \cos(k)$, $b = \sin(k)$ og $c = 1$. Vi ønsker at beregne længden af AD. Da c i trekant ABD er ensliggende med a i trekant ABC, og b i trekant ABC er ensliggende med AD i trekant ABD, får vi:

$$\frac{|AD|}{b} = \frac{c}{a}$$
$$\frac{|AD|}{\sin(k)} = \frac{1}{\cos(k)}$$
$$|AD| = \frac{\sin(k)}{\cos(k)}$$

Dermed har vi dobbelt uligheden:

$$\sin(k) \leq k \leq \frac{\sin(k)}{\cos(k)}$$

Vi deler uligheden op i to dele:

$$\begin{aligned} \sin(k) &\leq k \\ \frac{\sin(k)}{k} &\leq 1 \end{aligned}$$

Og på den anden side:

$$\begin{aligned} k &\leq \frac{\sin(k)}{\cos(k)} \\ \cos(k) \cdot k &\leq \sin(k) \\ \cos(k) &\leq \frac{\sin(k)}{k} \end{aligned}$$

Hvilket giver os, hvis vi sætter det sammen igen:

$$\cos(k) \leq \frac{\sin(k)}{k} \leq 1$$

Da cosinus er kontinuert, og $\cos(0) = 1$, får vi:

$$\lim_{k \to 0} \cos(k) = 1 \leq \lim_{k \to 0} \frac{\sin(k)}{k} \leq 1$$

Eller: $\lim\limits_{k \to 0} \frac{\sin(k)}{k} = 1$.

11.7.3. Beviset gjort færdigt.

Bevis. (fortsat) Vi ser på grænsen:

$$\begin{aligned} &\lim_{k \to 0} \cos(x_0 + k) \cdot \frac{\sin(k)}{k} \\ &\lim_{k \to 0} \cos(x_0 + k) \cdot \lim_{k \to 0} \frac{\sin(k)}{k} \\ &\lim_{k \to 0} \cos(x_0 + k) \cdot 1 \\ &= \cos(x_0) \end{aligned}$$

Hvilket vi skulle vise. □

Kapitel 12

Integralregning

I dette kapitel vil vi introducere integralregning. Vi kan desværre ikke nå mere end at kradse i overfladen. Emnet er stort, og er ofte sit eget kursus på universitetsniveau. Vi begynder kapitlet med at give to meget ens eksempler, der skal illustrerer, at integralregning handler om beregning af arealer under grafer for funktioner. Her vil vi også støde på sammenhængen integral- og differentialregning.

Denne sammenhæng vil vi derefter arbejde videre med og introducere begrebet stamfunktion og det ubestemte integral. Vi vil indføre notationen

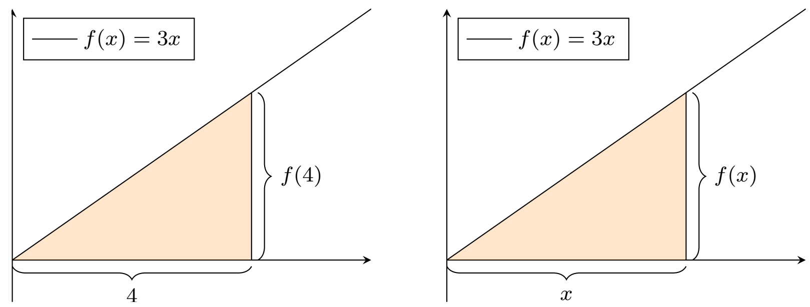
$$\int f(x)\ dx$$

Herefter tager vi hul på beregningen af arealer, og indfører det bestemte integral. I den forbindelse vil vi bevise det, der kaldes analysens fundamentalsætning.

Til sidst, vil vi behandle en teknik, der hedder integration ved substitution, samt komme ind på rumfang og længder af grafer.

12.1. To eksempler

Eksempel 12.1. Vi ser på den simple funktion $f(x) = 3x$. Hvis vi tegner grafen for f, så vil vi se, at den går igennem $(0, 0)$, og grafen er positiv i første kvadrant (se figur 12.1). Vi tegner en lodret linje $x = 4$, og vi får en retvinklet trekant. Vi kan beregne arealet af trekanten. Vi kender grundlinjen, den 4 lang, og vi kan beregne højden $f(4) = 3 \cdot 4 = 12$. Arealet er så $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24$.



Figur 12.1. Arealet i det første eksempel.

Hvis vi vælger andre tal end 4, så kan vi lave samme udregning, men efter et stykke tid med nye tal, vil vi måske gerne have en funktion, som vi kan sætte ind i.

Vi lader grundlinjen være x, og dermed er højden $f(x)$, og arealet A som funktion af x:

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot x = \frac{3}{2}x^2$$

Med andre ord, en funktion for arealet vil være $A(x) = \frac{3}{2}x^2$. Vi kan afprøve den med 4: $A(4) = \frac{3}{2} \cdot 4^2 = \frac{3}{2} \cdot 16 = 3 \cdot 8 = 24$. Så det ser ud til, at funktionen virker.

Lad os prøve at differentiere A

$$A'(x) = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot x = 3 \cdot x = f(x)$$

Vi her fået vores funktion igen, og $A'(x) = f(x)$.

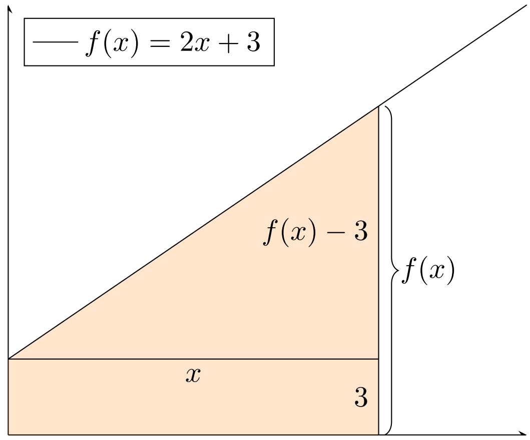
Eksempel 12.2. Vi prøver samme fremgangsmåde igen med $f(x) = 2x+3$. Her er vi nødt til at inddele arealet i en firkant med sidelænger x og 3, og en retvinklet trekant med grundlinje x og højde $f(x) - 3$ (se figur 12.2). Vi kan beregne arealerne.

Firkanten har arealet $3 \cdot x$. Trekanten har arealet

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (f(x) - 3) \cdot x &= \frac{1}{2}(2x + 3 - 3) \cdot x \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Dermed er det samlede areal

$$A(x) = x^2 + 3x$$



Figur 12.2. Arealerne i det andet eksempel.

Hvis vi differentierer denne arealfunktion, så får vi:

$$A'(x) = 2x + 3 = f(x)$$

Disse to eksempler burde gerne illustrere, at der er en sammenhæng mellem arealer under en funktion og det at differentiere. Vores to eksempler er meget simple, og vi kan spørge os selv om det også passer for meget mere komplicerede funktioner. Svaret er ja (hvis funktionen f.eks. er kontinuert).

Eksemplerne bør også vise, at for at kunne beregne arealer, så er vi nødt til at kunne regne baglæns i forhold til differentialregning. Det er emnet for det næste afsnit.

12.2. Stamfunktioner og ubestemte integraler

Vi har nu en idé om, hvad det er vi skal beregne i integralregning. Så vi vil definere et centralt begreb.

Definition 12.3 (Stamfunktion)**.** Givet en funktion f. Hvis der findes en funktion F, så

$$F'(x) = f(x)$$

for alle x. Så kaldes F en stamfunktion til f.

Definitionen kan anvendes til at afgøre, om en funktion er stamfunktion til anden funktion. Metoden til dette bliver undertiden kaldt integrationsprøven (eller testen).

Vi giver et eksempel:

Eksempel 12.4 (Integrationsprøven)**.** Hvis vi har en funktion $F(x) = x^3$, så kan vi undersøge, om den er en stamfunktion til $f(x) = 3x^2$, ved at differentiere F, og se om vi får f.

$$F'(x) = \left(x^3\right)' = 3x^2 = f(x) \quad \checkmark$$

Så i dette tilfælde har vi, at F er en stamfunktion til f. Vi kan nu prøve med en anden funktion f.eks. $F(x) = 2x^3$. Vi differentierer:

$$F'(x) = \left(2x^3\right)' = 6x^2 \neq 3x^2 \quad \text{X}$$

I dette tilfælde har vi ikke en stamfunktion. Det ser ud til, at vores stamfunktion til $f(x) = 3x^2$ skal se ud som $F(x) = x^3$. Men hvad med $F(x) = x^3 + 17$?

$$F'(x) = \left(x^3 + 17\right)' = 3x^2 = f(x) \quad \checkmark$$

Det vil sige, at vi kan lægge et vilkårligt tal til vores stamfunktion og stadig få en stamfunktion.

Ovenstående eksempel indikerer, at der er uendelig mange stamfunktioner til en funktion. Fordi vi kan lægge et vilkårligt tal til, uden der sker noget. Vi beviser dette:

Sætning 12.5. *Hvis F er en stamfunktion til f, så er $F(x) + k$ også en stamfunktion til f.*

Bevis.

$$(F(x) + k)' = F'(x) + (k)' = f(x) + 0 = f(x)$$

□

Det vil sige, at der findes uendelig mange stamfunktioner til en funktion. Det kunne betyde, at der er mange muligheder for, hvordan stamfunktionen F kan se ud. Men heldigvis er der kun én måde at lave stamfunktioner på. Det er indholdet i følgende sætning.

Sætning 12.6. *Hvis F og G er stamfunktioner til f, så har vi*

$$F(x) = G(x) + k.$$

Bemærkning 12.7. Sætningen siger, at hvis vi har to stamfunktioner F og G, så er den eneste forskel på dem et tal. Det vil sige, at f.eks. G ikke kan være en meget anderledes funktion end F.

Beviset anvender, at hvis $F(x) = G(x) + k$, så har vi $F(x) - G(x) = k$. Det er det sidste, vi anvender i beviset, og som vi bruger det tredje punkt i monotonisætningen på: "Hvis funktionen h opfylder $h'(x) = 0$ for alle x, så er h en konstant". Så strategien i beviset er at opskrive $F(x) - G(x)$, differentiere, og se, at det giver 0. Konklusionen er så, at $F(x) - G(x)$ er konstant, og så er beviset færdig.

Bevis. Vi ser på $F(x) - G(x)$ og differentierer:

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x)$$

Da F og G er stamfunktioner til f, får vi:

$$= f(x) - f(x) = 0 \quad \text{for alle } x$$

Det vil sige, at $F(x)-G(x)$ er konstant ifølge monotonisætningen (3. punkt). Vi har:

$$\begin{aligned} F(x) - G(x) &= k \\ F(x) &= G(x) + k \end{aligned}$$

□

Vi er nu nået derhen, hvor vi kan begynde at beregne stamfunktioner. Vi skal dog først se på en notation, som vi ofte vil støde på. Man kan komme ud for, at der står:

$$\int f(x)\ dx$$

Symbolet $\int$ kaldes et integraltegn. Symbolet dx indeholder oplysninger om hvilken variabel, der regnes på. Nogen gange kan der også stå dt, hvis det er t, der er variablen. Selve f bliver kaldt integranten. Udsagnet $\int f(x)\ dx$ betyder "beregn stamfunktionen til f". Det vil sige, hvis $f(x) = 3x^2$, så kan vi skrive

$$\int 3x^2\ dx = x^3 + k.$$

Her husker vi k, da der er uendelig mange stamfunktioner, og vi ikke ved, hvilken konkret stamfunktion vi er ude efter. Konstanten k kaldes *integrationskonstanten*. Selve integralet kaldes *det ubestemte integral* af f.

Vi formulerer en sætning, hvor vi angiver nogle udvalgte stamfunktioner. Flere kan findes i en formelsamling:

Sætning 12.8. *Følgende tabel angiver funktioner og deres stamfunktioner:*

$f(x)$	$F(x)$ *eller* $\int f(x)\ dx$
a	ax
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$

Bemærkning 12.9 (Stamfunktionen til $\frac{1}{x}$)**.** Læg mærke til $\frac{1}{x}$. Her påstås det, at stamfunktionen er $\ln|x|$. Vi ved fra differentialregning, at $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Så hvorfor skal der være numerisktegn om x? Funktionen $\frac{1}{x}$ har som definitionsmængde alle tal undtagen 0. Men $\ln(x)$ har som definitionsmængde de positive tal $x > 0$. Derfor kan $\ln(x)$ ikke være stamfunktion til $\frac{1}{x}$, fordi $\frac{1}{-3}$ giver mening, men $\ln(-3)$ giver ikke mening. Så derfor sættes der numerisktegn om x. Det betyder så, at der er noget at bevise.

Bevis. Alle beviserne er ens. Opskriv stamfunktionen og differentier.

$$(ax)' = a$$

$$\left(\frac{1}{a+1}x^{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1} \cdot (a+1) \cdot x^{a+1-1} = x^a$$

$$\left(\frac{1}{k}e^{kx}\right)' = \frac{1}{k} \cdot k \cdot e^{kx} = e^{kx}$$

Så skal vi tænke lidt: $\ln|x|$ betyder, at vi skal tage den numeriske værdi af x, før vi tager ln, det betyder, at vi kan sætte negative tal ind i $\ln|x|$. Så vi har to tilfælde. Et hvor $x > 0$, og et hvor $x < 0$. Det første tilfælde $x > 0$: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Det andet tilfælde $x < 0$. Men så er $|x| = -x$ (minus-minus giver plus), så vi beregner med kædereglen:

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

Til den sidste stamfunktion, hvor vi benytter produktregnereglen:

$$(x\ln(x) - x)' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$$

□

Vi kan nu beregne nogle stamfunktioner:

Eksempel 12.10. Lad os finde stamfunktionerne til $f(x) = x^3$, $g(x) = e^{2x}$ og $h(x) = 2x + \ln(x) - 1$. For f kan vi se, at det er en potens: x^a, med $a = 3$. Så vi kan beregne:

$$\int x^3 \ dx = \frac{1}{3+1}x^{3+1} + k = \frac{1}{4}x^4 + k$$

Stamfunktionen til g findes ved at se, at det er en eksponentiel funktion e^{kx} med $k = 2$:

$$\int e^{2x} \ dx = \frac{1}{2}e^{2x} + k$$

Stamfunktionen til h kræver en inddeling i tre led. Første led $2x$ er en skjult potens $2x^1$. Andet led $\ln(x)$ kan findes direkte. Tredje led -1 har formen a, og giver ax.

$$\int (2x+\ln(x)-1)\ dx = 2\cdot\frac{1}{1+1}x^{1+1}+x\cdot\ln(x)-x-1\cdot x+k = x^2+x\ln(x)-2x+k$$

I alle tre tilfælde skal man huske $+k$.

I nogle tilfælde kan vi beregne k, hvis vi for eksempel får opgivet et punkt, grafen for stamfunktionen skal gå igennem.

Eksempel 12.11. Hvis vi har funktionen $f(x) = 3x^2+\frac{1}{x}$, og skal bestemme en stamfunktion, hvis graf går igennem $(1,22)$. Så kan vi gøre det i to skridt. Først finde vi stamfunktionen:

$$\int \left(3x^2+\frac{1}{x}\right)\ dx = 3\cdot\frac{1}{2+1}x^{2+1}+\ln|x|+k = x^3+\ln|x|+k$$

Det vil sige, at vores stamfunktion hedder $F(x) = x^3+\ln|x|+k$. Vi kan bestemme k ved at indsætte punktet $F(1) = 22$ og så isolere k.

$$\begin{aligned} F(1) &= 22 \\ 1^3+\ln|1|+k &= 22 \\ 1+0+k &= 22 \\ k &= 21 \end{aligned}$$

Så stamfunktionen til f igennem $(1,22)$ bliver:

$$F(x) = x^3+\ln|x|+21$$

Bemærkning 12.12. Læg mærke til, at lige så snart vi i eksemplet havde en stamfunktion, så gik vi over til at skrive $F(x)$ og ikke integraltegn. Det er fordi, integraltegnet skal opfattes som en besked om at bestemme en stamfunktion. Derudover er det meget kluntet, at skulle lave de sidste udregninger med integraltegn (prøv selv).

I de to foregående eksempler har vi anvendt, at vi i kan se på hvert led i funktionerne for sig. Det skal selvfølgelig bevises, og det vil vi gøre som det sidste i dette afsnit.

Sætning 12.13. *Givet to funktioner f og g, som har stamfunktioner, og k som er et tal, så gælder:*

(1)
$$\int (k\cdot f(x))\ dx = k\cdot\int f(x)\ dx$$

(2)
$$\int (f(x)+g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

Bemærkning 12.14. Beviset fungerer ved, at man differentierer på begge sider af lighedstegnet, og så ser man om man får det samme. I beviset skal man huske, at en stamfunktion differentieret giver den oprindelige funktion. Så vi har følgende:

$$\left(\int f(x)\ dx\right)' = f(x)$$

Bevis. Ad 1: Vi differentierer venstre side af lighedstegnet

$$\left(\int k \cdot f(x)\ dx\right)' = k \cdot f(x).$$

Vi differentierer højre side af lighedstegnet:

$$\left(k \cdot \int f(x)\ dx\right)' = k\left(\int f(x)\ dx\right)' = k \cdot f(x).$$

Vi får det samme på begge sider af lighedstegnet, så vi har vist 1.

Ad 2: Vi differentierer venstre side af lighedstegnet:

$$\left(\int (f(x) + g(x))\ \ dx\right)' = f(x) + g(x).$$

Vi differentierer højre side af lighedstegnet:

$$\left(\int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx\right)' = \left(\int f(x)\ dx\right)' + \left(\int g(x)\ dx\right)' = f(x) + g(x)$$

Vi får det samme på begge sider af lighedstegnet, så vi har vist 2. □

12.3. Anvendelse: Frit fald

Hvis vi forestiller os, at vi højt oppe fra slipper en eller anden tung genstand, så kan vi bruge integralregning til at sige noget om genstandens hastighed, og hvor den er henne på vej ned. Vi antager, at der ikke er luftmodstand, og vi slipper genstanden, og ikke kaster den (starthastigheden er nul).

Fra fysik ved man, at den totale kraft, der virker på genstanden er $F = ma$, hvor F er kraften, m er genstandens masse, og a er accelerationen. På den anden side har vi, at det kun er tyngdekraften, der påvirker genstanden, så vi har $F = -mg$, hvor g er graviationskonstanten, og minusset er fordi genstanden bevæger sig ned ad:

$$\begin{aligned} ma &- mg \\ \cancel{m}a &= -\cancel{m}g \\ a &= -g \end{aligned}$$

Accelerationen afhænger af tiden så: $a(t) = -g$.

Fra differentialregningen ved vi, at hvis vi har en stedfunktion s, der fortæller os, hvor vi er, så kan vi differentierer den og få hastigheden v. Med andre ord, $s'(t) = v(t)$. Så stedfunktionen er en stamfunktion til hastighedsfunktionen. Vi ved også, at hastigheden af hastigheden er accelerationen, så vi har $v'(t) = a(t)$. Så hastigheden er en stamfunktion til accelerationen. Samlet har vi

$$s''(t) = v'(t) = a(t)$$

Vi kan nu bestemme v og s.

Vi har

$$v(t) = \int a(t)\ dt = \int -g\ dt = -gt + v_0$$

Hvor v_0 er begyndelseshastigheden. Men den har vi antaget er nul, så vi har $v(t) = -gt$. Vi kan nu finde stedfunktionen.

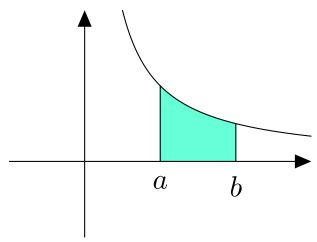
$$s(t) = \int v(t)\ dt = \int -gt\ dt = \frac{-g}{2}t^2 + h$$

Hvor h er højden, vi slipper genstanden fra.

Dermed kan vi benytte stamfunktioner til at finde sted- og hastighedsfunktioner. Hvilket er praktisk, hvis man ønsker at regne på noget sådant.

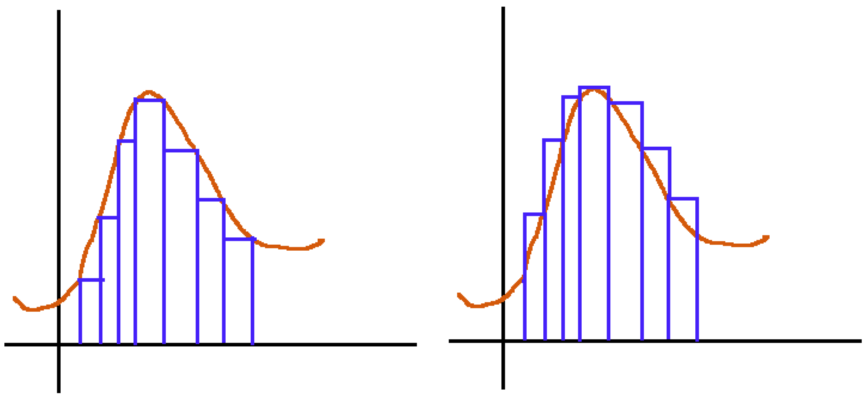
12.4. Arealer og bestemte integraler

Som vi så i forbindelse med de to eksempler, der indledte dette kapitel, så er der en sammenhæng mellem stamfunktioner og arealer under grafer. Vi begynder dette afsnit med at give et indblik i de teknikker, der ligger bag ved, de arealer vi skal beregne senere.



På tegningen oven over kan vi se et eksempel på et areal, vi kunne være ude på at beregne. Vi har grafen for en funktion, der er aftagende og positiv (over førsteaksen). Vi tegner to lodrette linjer $x = a$ og $x = b$. Arealet vi vil beregne er arealet af området, der ligger under grafen, over førsteaksen og imellem de to lodrette linjer. Det er altid sådan, at arealet begrænses lodret.

Udgangspunktet, for den teori vi skal fremstille her, er den observation, hvis vi har en kontinuert funktion f, der er defineret på et lukket interval $[a; b]$, hvor $-\infty < a < b < \infty$. Så gælder der om funktionen, at den har et minimum og et maksimum (eventuelt det samme, hvis funktionen er



Figur 12.3. Det venstre billede viser en orange graf og de tilhørende arealer, der indgår i undersummen for denne inddeling. Det højre billede viser den samme orange graf og de tilhørende arealer, der indgår i oversummen for den samme inddeling. Bemærk, at rektanglerne ikke behøver at være lige brede, og at maksimum og minimum for hvert interval ikke behøver at ligge i enderne – se på toppen af grafen.

konstant). Det vil sige, at funktionen har et minimumssted x_m og en minimumsværdi $f(x_m)$, et maksimumssted x_M og en maksimumsværdi $f(x_M)$, hvor både x_m og x_M ligger i intervallet $[a;b]$.

Det ovenstående er falsk, hvis funktionen ikke er kontinuert, eller hvis intervallet ikke er lukket.

Det, at vi har et minimum og et maksimum, gør, at vi kan tilnærme arealet under en graf, ved hjælp af rektangler. Hvis vores interval er $[a;b]$, så kan vi lave en inddeling P af intervallet $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Hvilket giver en inddeling i n mindre intervaller. Hvert af disse intervaller er lukket, så inden for hvert interval er der et minimumsted $x_{m,i}$ og et maksimumsted $x_{M,i}$, hvor i angivet nummeret på intervallet. Vi kan så tegne rektangler under grafen, der anvender minimumværdier $f(x_{m,i})$, som højder, og rektangler, der anvender maksimumværdier $f(x_{M,i})$, som højder. Se figur 12.3.

Bemærkning 12.15 (hegnspæle)**.** I det ovenstående har vi punkter, der tælles fra 0 til n, hvorfor man kunne tro, at der er $n+1$ intervaller. Det er ikke tilfældet. Vi tæller mellemrummene, og der n af dem (fordi vi har begyndt med 0). Så hvert interval er nummereret efter det højre endepunkt. Disse problemer kaldes hegnspæleproblemer, da det svare til spørgsmålet om hvor mange hegnspæle, der kan anvendes, hvis man skal lave n mellemrum.

Ideen er, at vi kan beregne arealerne af hver rektangel. Bredden på hvert interval vil vi betegne $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Så hvis vi ser på tilfældet, hvor vi anvender minima, så får vi:

$$f(x_{m,1}) \cdot \Delta x_1 + f(x_{m,2}) \cdot \Delta x_2 + \ldots + f(x_{m,n}) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{m,i}) \Delta x_i$$

Dette udtryk vil vi kalde undersummen for f givet inddelingen P, og vi vil skrive

$$U(f, P)$$

Vi kan gøre det samme for rektanglerne, hvor vi har benyttet maksima.

$$f(x_{M,1}) \cdot \Delta x_1 + f(x_{M,2}) \cdot \Delta x_2 + \ldots + f(x_{M,n}) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{M,i}) \Delta x_i$$

Dette udtryk vil vi kalde oversummen for f givet inddelingen P, og vi vil skrive

$$O(f, P)$$

Fra tegningen i firgur 12.3 kan vi se, at en undersum er mindre end en oversum, og det areal vi faktisk er interesseret i, ligger i mellem de to summer. Spørgsmålet er så, hvordan vi kan komme tættere på arealet? Svaret er, at vi laver flere rektangler, som er smallere (vi skal stadig være mellem a og b). Det kaldes at lave en forfinning. For hvis der tilføjes flere rektangler til undersummen, så vil undersummen blive større, fordi rektanglerne vil ligge tættere på grafen. Ligeledes vil oversummen blive mindre af samme grund. Hvis $\tilde{P}$ er en forfining af P, så har vi med andre ord:

$$U(f, p) \leq U(f, \tilde{P}) \leq O(f, \tilde{P}) \leq O(f, P)$$

Hvis vi kalder maksimum for undersummerne givet alle inddelinger for

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ dx$$

og minimum for oversummerne givet alle inddelinger for

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ dx$$

Så kalder vi f for *integrabel*, hvis og kun hvis:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ dx = \overline{\int_a^b} f(x)\ dx$$

Og i dette tilfælde skriver vi

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

For det fælles ekstremum.

Bemærkning 12.16. Det ovenstående er en meget kortfattet udgave af den teori, der ligger bag integralregning. Der er mange ting, der skal vises, hvis det skal blive til en præcis teori. Det vigtige at få med er, at arealerne under graferne er lavet ved hjælpe af rektangler, og ved at lave flere og flere, smallere og smallere rektangler, så kan vi tilnærme arealet under grafen.

12.4.1. Regning med arealer. Det er nu på tide at begynde at regne på arealer. Hvis man slår op i en formelsamling, kan man typisk finde følgende formel:

$$\int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Det venstre udtryk $\int_a^b f(x)\ dx$ er en besked om at bestemme arealet mellem a og b under f. Det kaldes *det bestemte integral*. Tallet a vil næsten altid være lavere end b, og de to tal kaldes integralets *grænser*. Den kantede parentes i midten $[F(x)]_a^b$ er en mellemregning, hvor vi bestemmer stamfunktionen til f. Det sidste udtryk $F(b) - F(a)$ er der, hvor arealet bliver beregnet. Så udregningen kan opsummeres til være følgende:

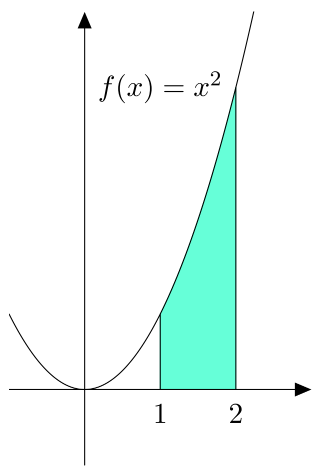
(1) Bestem stamfunktionen F til f.
(2) Indsæt a og b i F, og beregn $F(b) - F(a)$

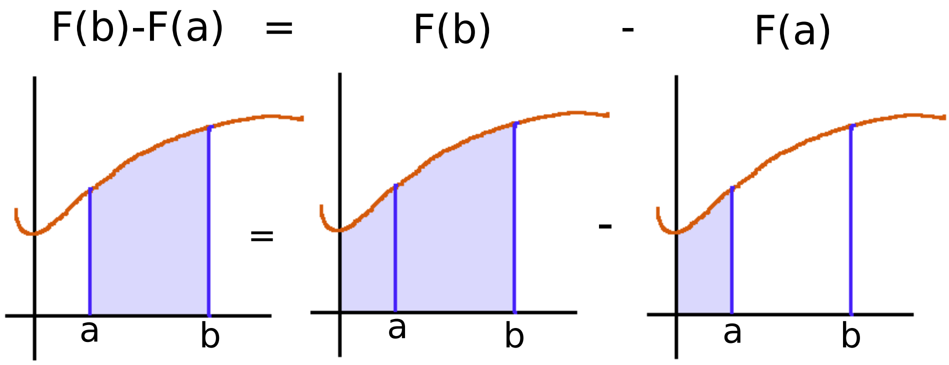
Vi giver eksempel:

Eksempel 12.17. Vi vil beregne

$$\int_1^2 x^2\ dx$$

Grafisk ser det således ud:





Figur 12.4. Ilustration af ideen bag $F(b) - F(a)$. Bemærk, at billedet kun er korrekt, hvis $F(0) = 0$.

Det første trin er at bestemme stamfunktionen:

$$\int_1^2 x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$$

Derefter indsætter vi 1 og 2, og trækker fra:

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2 \, dx &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3\right) \\ &= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}\end{aligned}$$

Det vil sige, at arealet er $\frac{7}{3}$, og vi kan skrive:

$$\int_1^2 x^2 \, dx = \frac{7}{3}$$

Ideen med at trække $F(a)$ fra $F(b)$ er illustreret på figur 12.4. Hvis vi har en stamfunktion F til f, hvor det gælder, at $F(0) = 0$, så vil vi kunne betragte $F(b)$ og $F(a)$, som arealerne under grafen for f, der begynder ved anden aksen ud til $x = b$ eller $x = a$. Forskellen på de to arealer giver, så arealet under grafen for f imellem $x = a$ og $x = b$.

Da vi tidligere beregnede stamfunktioner, satte vi et $+k$ på stamfunktionen. Det har vi ikke gjort i det ovenstående eksempel. Grunden er lige til, nemlig at det er ligegyldigt. Lad os for god ordens skyld se, hvad der sker, hvis vi anvender stamfunktionen med $+k$:

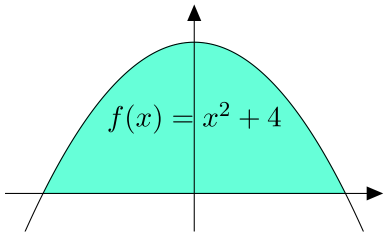
$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x) + k]_a^b = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$$

Det vil sige, at $+k$ kommer til at gå ud med $-k$. Vi vil derfor aldrig sætte et $+k$ på en stamfunktion, når vi skal beregne arealer.

Eksempel 12.18. Hvis vi har funktionen

$$f(x) = -x^2 + 4,$$

så kunne vi blive bedt om at bestemme arealet under grafen i første og andet kvadrant. Grafen med areal ser således ud:



Det, vi mangler for at kunne beregne arealet, er skæringerne med førsteaksen. Så vi må først løse $f(x) = 0$, det vil sige:

$$\begin{aligned} -x^2 + 4 &= 0 \\ 4 &= x^2 \\ x &= \pm\sqrt{4} = \pm 2 \end{aligned}$$

Så vi skal beregne:

$$\int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\ dx$$

Vi begynder med stamfunktionen:

$$\int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\ dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{2}$$

Nu kan vi sætte -2 og 2 ind i F og beregne:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2}(-x^2+4)\ dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{2} \\
&= -\frac{1}{3}\cdot 2^3+4\cdot 2-\left(-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3+4\cdot(-2)\right) \\
&= -\frac{8}{3}+8-\left(-\frac{-8}{3}-8\right) \\
&= -\frac{8}{3}+8+\frac{-8}{3}+8 \\
&= 16-\frac{16}{3} \\
&= \frac{48}{3}-\frac{16}{3} \\
&= \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

Så arealet er $\frac{32}{3}$, og vi kan skrive:

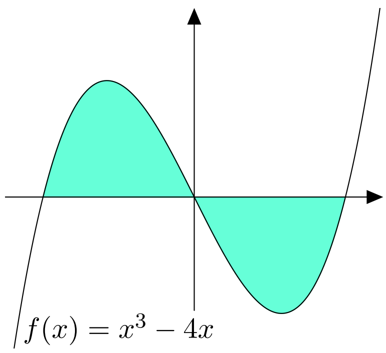
$$\int_{-2}^{2}(-x^2+4)\ dx = \frac{32}{3}$$

Om ikke andet så illustrerer dette eksempel, at integraler sjældent giver et "pænt" resultat.

Eksempel 12.19. I dette eksempel vil vi se på funktionen:

$$f(x) = x^3 - 4x$$

Arealet vi vil beregne er markeret på følgende billede.



Vi lægger straks mærke til, at vi har et område, der ligger under førsteaksen. Således lever det ikke op til vores definition af arealer. Men vi kan stadig bestemme arealet. Men før vi kan det, skal vi løse $f(x) = 0$, for at finde vores grænser:

$$
\begin{aligned}
x^3 - 4x &= 0 \\
x \cdot (x^2 - 4) &= 0
\end{aligned}
$$

Nulreglen giver:

$$
\begin{aligned}
x = 0 \quad &\vee \quad x^2 - 4 = 0 \\
x = 0 \quad &\vee \quad x^2 = 4 \\
x = 0 \quad &\vee \quad x = \pm 2
\end{aligned}
$$

Vi kunne forsøge at beregne:

$$\int_{-2}^{2} \left(x^3 - 4x\right) \ dx$$

Men vi vil opdage, at det *ikke* giver det rigtige resultat. Vi indskyder tilgengæld $x = 0$, og beregner det venstre areal

$$\int_{-2}^{0} \left(x^3 - 4x\right) \ dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0}$$

Vi indsætter grænserne, og beregner:

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{0} \left(x^3 - 4x\right) \ dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0} \\
&= \frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2\right) \\
&= -\left(\frac{1}{4} \cdot 16 - 8\right) \\
&= -(4 - 8) \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Vi laver nu den samme beregning med grænserne $a = 0$ og $b = 2$:

$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{2} \left(x^3 - 4x\right) \ dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{0}^{2} \\
&= \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2\right) \\
&= \frac{16}{4} - 8 \\
&= -4
\end{aligned}
$$

Dermed giver

$$\int_0^2 \left(x^3 - 4x\right)\ dx = -4$$

Hvis vi ser på konstruktionen af det bestemte integral, så er der intet i den konstruktion, der ikke også kan lade sig gøre, hvis grafen for funktionen er negativ (ligger under førsteaksen). Vi forventer at få et negativt tal, da de minima og maksima, der indgår alle er negative. Ved at tage den numeriske værdi kan vi få et positivt tal, og dermed kan vi beregne arealet som

$$4 + |-4| = 4 + 4 = 8$$

Hvis vi ikke havde delt op i to integraler, så ville vi have beregnet:

$$\int_{-2}^2 \left(x^3 - 4x\right)\ dx = \int_{-2}^0 \left(x^3 - 4x\right)\ dx + \int_0^2 \left(x^3 - 4x\right)\ dx$$

Men det giver $4 + (-4) = 0$. Hvorfor vi vil få:

$$\int_{-2}^2 \left(x^3 - 4x\right)\ dx = 0$$

Hvilket ikke er arealet, men alligevel et veldefineret integral.

12.4.2. Regneregler. I det sidste eksempel oven for delte vi området, vi var interesseret i op i to dele. Det gjorde vi ved at indføre en ekstra grænse. Følgende sætning samler tre vigtige resultater omkring grænser for integraler.

Sætning 12.20. *Hvis f er integrabel over intevallet $[a;b]$, så gælder:*

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^b f(x)\ dx + \int_a^c f(x)\ dx$

(2) $\displaystyle\int_a^a f(x)\ dx = 0$

(3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$

Bevis. Ad 1: Højre side:

$$\begin{aligned}\int_c^b f(x)\ dx + \int_a^c f(x)\ dx &= F(b) - F(c) + F(c) - F(a)\\ &= F(b) - F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\ dx\end{aligned}$$

Ad 2: Beregner:

$$\int_a^a f(x)\ dx = F(a) - F(a) = 0$$

Ad 3: Beregner:

$$\begin{aligned} -\int_b^a f(x)\ dx &= -\left(F(a) - F(b)\right) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx \end{aligned}$$

□

Sætning 12.21. *Hvis f og g er integrable på $[a;b]$, og k er et tal. Så gælder:*

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$

(2) $\displaystyle\int_a^b k \cdot f(x)\ dx = k \cdot \int_a^b f(x)\ dx$

Bevis. Ad 1: Beregner:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) + g(x)\ dx &= F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) \\ &= F(b) + G(b) - F(a) - G(a) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx \end{aligned}$$

Ad 2: Beregner:

$$\begin{aligned} \int_a^b k \cdot f(x)\ dx &= (k \cdot F(b)) - (k \cdot F(a)) \\ &= k \cdot F(b) - k \cdot F(a) \\ &= k \cdot (F(b) - F(a)) \\ &= k \cdot \int_a^b f(x)\ dx \end{aligned}$$

□

12.4.3. Analysens fundamentalsætning. Vi vil nu bevise det, der kaldes analysens fundamentalsætning. Denne sætning knytter arealer og stamfunktioner sammen. Så vi vil begynde med at definere begrebet arealfunktion.

Definition 12.22 (Arealfunktion)**.** Hvis f er en kontinuert funktion defineret på $[a;b]$. Så er arealfunktionen A med udgangspunkt i a defineret som:

$$A(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

Med andre ord, så beregner arealfunktionen arealet under f fra a til x.

Bemærkning 12.23 (Hvorfor $f(t)$?)**.** Grunden til, at der står $f(t)$ og ikke $f(x)$ i integralet, er, at x kun skal være grænsen. Hvis vi havde defineret A til at være $\int_a^x f(x)\ dx$, så ville $A(5) = \int_a^5 f(5)\ dx$. Men $f(5)$ er et tal og ikke en funktion, så vi vil ikke få arealet under f.

Sætning 12.24 (Analysens fundamentalsætning)**.** *Hvis f er en kontinuert funktion på $[a;b]$, så gælder:*

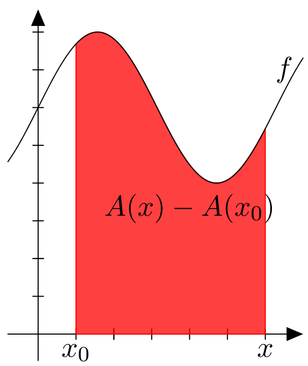
$$A'(x) = f(x), \quad \textit{på }]a;b[$$

hvor A er arealfunktionen til f.

Bemærkning 12.25. Her springer vi faktisk noget vigtigt over. Nemlig at bevise, at f faktisk har en arealfunktion. Derudover mangler vi at bevise, at arealfunktionen er kontinuert, ellers kan vi ikke være sikker på, at den er begrænset og dermed, at de uligheder, der anvendes i beviset, er sande.

Bevis. Vi lader f være en kontinuert funktion defineret på $[a;b]$, og vi lader A være arealfunktionen til grafen for f, med startværdi i a. Det vil sige, at $A(x)$ er arealet under f's graf fra a til x. Vi vil vise, at for x_0 i $]a;b[$, så gælder $A'(x_0) = f(x_0)$. Vi ser på intervallet $[x_0;x]$, hvor $x > x_0$. Arealet under grafen for f fra x_0 til x kan vi beregne ved

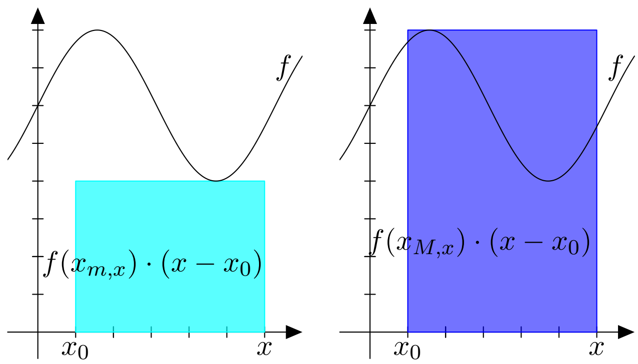
$$A(x) - A(x_0).$$



Da f er kontinuert på $[x_0;x]$, har vi, at der findes et maksimumsted $x_{M,x}$ og et minimumsted $x_{m,x}$, som begge afhænger af x. Vi laver to rektangler med grundlinje fra x_0 til x. Højden på det første rektangel er minimumværdien

$f(x_{m,x})$, og højden på det andet rektangel er maksimumværdien $f(x_{M,x})$. Arealet af det første rektangel er $f(x_{m,x}) \cdot (x - x_0)$, og arealet af det andet rektangel er $f(x_{M,x}) \cdot (x - x_0)$, da afstanden mellem x_0 og x er $x - x_0$. Derfor har vi følgende dobbelt ulighed:

$$f(x_{m,x}) \cdot (x - x_0) \leq A(x) - A(x_0) \leq f(x_{M,x}) \cdot (x - x_0)$$



Hvis vi dividerer dobbeltuligheden med $(x - x_0)$, får vi:

$$f(x_{m,x}) \leq \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_{M,x})$$

Igen, da f er kontinuert, så har vi fra sætning 11.4.

$$\lim_{x \to x_0} f(x_{m,x}) = f(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x_{M,x}) = f(x_0)$$

Hvis tager grænsen for x gående imod x_0 alle tre steder i uligheden får vi:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x_{m,x})) \leq \lim_{x \to x_0} \left(\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \right) \leq \lim_{x \to x_0} (f(x_{M,x}))$$
$$f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0} \left(\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \right) \leq f(x_0)$$

Vi kan lave samme argument, hvis $(x - x_0)$ er negativ, så vi har samlet:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

Eller $A'(x_0) = f(x_0)$.

$\square$

12.5. Anvendelse: Definition af den naturlige logaritme

Den naturlige logaritme kan defineres som et integral:

Definition 12.26. Den naturlige logaritme ln er defineret på $]0;\infty[$, og er givet ved:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\ dt$$

En direkte konsekvens af sætning 12.24 er, at $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

En lang række af egenskaberne ved ln, kan uden større besvær vises. For eksempel $\ln(1) = 0$, da

$$\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\ dt = 0.$$

Vi kan også se, at ln er en monotont voksende funktion. Da $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ har $\ln'(x) = 0$ ingen løsninger, og da $\frac{1}{x}$ er en positiv funktion for alle x i $]0;\infty[$, så følger det af monotonisætningen, at $\ln(x)$ er monotont voksende.

Vi kan nu også bevise regnereglerne for ln.

Sætning 12.27. *Hvis $a, b > 0$, så gælder:*

(1) $\ln\left(a^b\right) = b \cdot \ln(a)$

(2) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

(3) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

Bevis. De to første beviser anvender monotonisætningen.

Ad 1: Vi sætter $a = x$, og ser på funktionen $\ln(x^b) - b \cdot \ln(x)$. Den differentieres:

$$\begin{aligned}\left(\ln(x^b) - b \cdot \ln(x)\right)' &= \frac{1}{x^b} \cdot \left(b \cdot x^{b-1}\right) - b \cdot \frac{1}{x} \\ &= b \cdot \frac{x^{b-1}}{x^b} - b\frac{1}{x} \\ &= b \cdot \frac{1}{x} - b \cdot \frac{1}{x} = 0\end{aligned}$$

Dermed er $\ln(x^b) - b \cdot \ln(x) = k$ for en konstant k. Vi sætter $x = 1$, og beregner:

$$\ln(1^b) - b \cdot \ln(1) = 0$$

Det vil sige, at $k = 0$, og vi har $\ln(x^b) - b \cdot \ln(x) = 0$. Hvis vi sætter $x = a$, og trækker $b\ln(a)$ fra på begge sider af lighedstegnet, så får vi:

$$\ln\left(a^b\right) = b \cdot \ln(a)$$

Ad 2: Vi sætter $b = x$, og ser på funktionen $\ln(ax) - \ln(x)$. Der differentieres:

$$\begin{aligned}(\ln(ax) - \ln(x))' &= \frac{1}{ax} \cdot a - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0\end{aligned}$$

Dermed er $\ln(ax) - \ln(x) = k$. Vi sætter $x = 1$, og beregner:

$$\ln(a) - \ln(1) = \ln(a)$$

Det vil sige, at $\ln(ax) - \ln(x) = \ln(a)$. Vi sætter $x = b$, og lægger $\ln(b)$ til på begge sider af lighedstegnet:

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

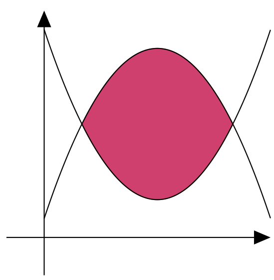
Ad 3: Den sidste sætning anvender, at $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, og $\frac{1}{b} = b^{-1}$. Vi beregner:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \ln\left(a \cdot b^{-1}\right) \\ &= \ln(a) + \ln\left(b^{-1}\right) = \ln(a) + (-1) \cdot \ln(b) \\ &= \ln(a) - \ln(b)\end{aligned}$$

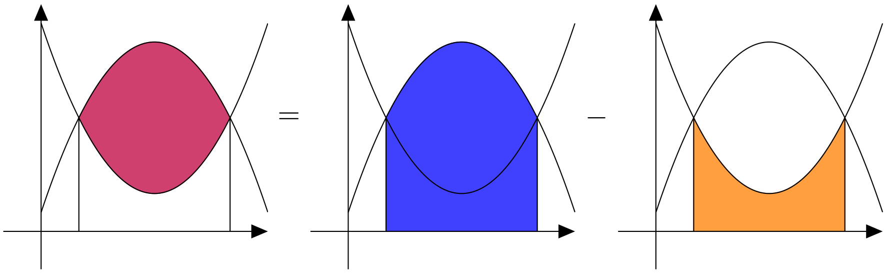
□

12.6. Areal mellem to grafer

I dette afsnit skal vi beregne arealer af områder, der ligger mellem to grafer. Det kan for eksempel se sådan ud:



Området er opad til begrænset af en funktion f og nedad til begrænset af en funktion g. Hvis vi kender førstekoordinaterne til skæringspunkterne, så kan vi bruge dem som grænser. Arealet kan så beregnes på følgende måde:

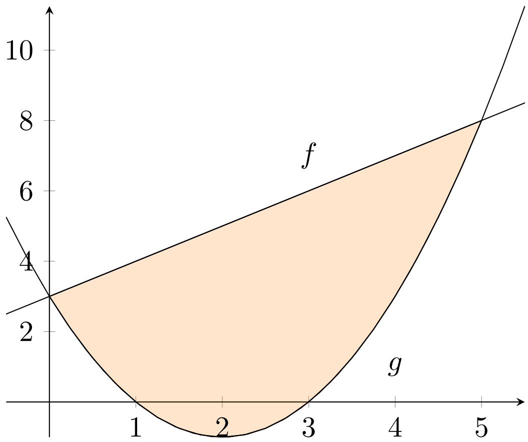


Eller i symboler:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b g(x)\ dx$$

Så for at kunne beregne et areal mellem to grafer, skal vi kende grænserne, samt vide hvilke to funktioner, der er i spil, og vide hvilken funktion, der ligger over den anden. Vi giver et eksempel.

Eksempel 12.28. Vi ser på funktionen $f(x) = x + 3$ og funktionen $g(x) = x^2 - 4x + 3$. De to grafer for f og g afgrænser et område.



Vi kan se, at f er den øverste graf, og g ligger neden under, så vi kan bruge $\int_a^b (f(x) - g(x))\ dx$ uden ændringer. Vi mangler grænserne. Dem kan vi bestemme ved at sætte de to funktioner lig med hinanden:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x + 3 &= x^2 - 4x + 3 \\ x &= x^2 - 4x \\ 0 &= x^2 - 5x \\ 0 &= x \cdot (x - 5) \end{aligned}$$

Nulreglen:

$$
\begin{aligned}
0 = x \ \vee \ 0 = x - 5 \\
x = 0 \ \vee \ x = 5
\end{aligned}
$$

Så grænserne er $a = 0$, og $b = 5$. Vi kan nu beregne integralet:

$$
\begin{aligned}
\int_0^5 (f(x) - g(x)) \ dx &= \int_0^5 \left(x + 3 - \left(x^2 - 4x + 3\right)\right) \ dx \\
&= \int_0^5 \left(x + 3 - x^2 + 4x - 3\right) \ dx = \int_0^5 \left(-x^2 + 5x\right) \ dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_0^5 \\
&= -\frac{1}{3} \cdot 5^3 + \frac{5}{2} \cdot 5^5 - \left(-\frac{1}{3} \cdot 0^3 + \frac{5}{2} \cdot 0^2\right) \\
&= -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = -\frac{250}{6} + \frac{375}{6} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Det vil sige, at arealet mellem graferne for f og g er $20\frac{5}{6}$.

Eksempel 12.29 (Vanskeligt)**.** Hvis vi ser på funktionen $f(x) = -x^2 + 6x$, så danner den med førsteaksen et område M, der har et areal i førstekvadrant. Det har vi set i et tidligere afsnit, hvordan vi kan beregne arealet af. Da vi får brug for svaret, beregner vi vi arealet. Vi bestemmer først nulpunkterne for grafen for f.

$$
-x^2 + 6x = 0
$$

Sætter x uden for en parentes

$$
x \cdot (-x + 6) = 0
$$

Nulregel:

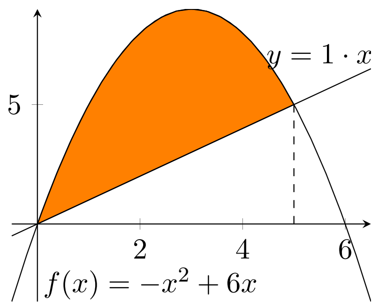
$$
\begin{aligned}
x = 0 \ \vee \ -x + 6 = 0 \\
x = 0 \ \vee \ x = 6
\end{aligned}
$$

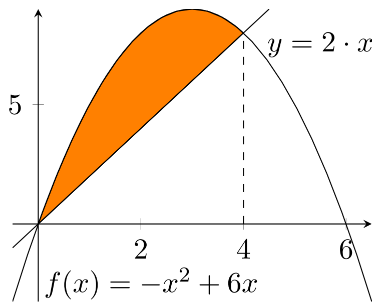
Så nu skal vi beregne:

$$
\begin{aligned}
\int_0^6 f(x)\ dx &= \int_0^6 \left(-x^2+6x\right)\ dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^6 \\
&= -\frac{1}{3}\cdot 6^3+3\cdot 6^2-\left(-\frac{1}{3}\cdot 0^3+3\cdot 0^2\right) \\
&= -\frac{1}{3}\cdot 6\cdot 6^2+3\cdot 36-0 \\
&= -\frac{6}{3}\cdot 36+3\cdot 36 \\
&= -2\cdot 36+3\cdot 36=36
\end{aligned}
$$

Så arealet af M er 36.

Men hvad nu, hvis vi får en funktion $y=ax$, hvor vi ikke ved hvad a er, og som deler området M i to lige store dele? Med andre ord, så skal vi bestemme a, så arealet mellem f og $y=ax$ er $\frac{1}{2}M$. Som følgende billede viser, så er problemet at forskellige værdier for a, giver forskellige grænser vi skal tage bruge i vores integral.





Så vi må begynde med at finde skæringerne mellem f og $y=ax$. Vi sætter dem lig med hinanden.

$$
\begin{aligned}
-x^2+6x &= ax \\
-x^2+6x-ax &= 0
\end{aligned}
$$

Sætter x uden for en parentes

$$-x^2+(6-a)x=0$$

Sætter x uden for en parentes

$$x\cdot(-x+6-a)=0$$

Nulregel:

$$x = 0 \;\vee\; -x + 6 - a = 0$$
$$x = 0 \;\vee\; x = 6 - a$$

Så fra vores billede kan vi se, at vi skal beregne a, så følgende er sandt:

$$\int_0^{6-a} (f(x) - ax)\ dx = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$$

Vi tager det i bidder, og lægger mærke til at $f(x) - ax$, faktisk optræder i udledningen oven over. Vi kan se, at $-x^2 + 6x - ax = -x^2 + (6-a)x$. Så det vil vi bruge i integralet.

$$\begin{aligned}
\int_0^{6-a} (f(x) - ax)\ dx &= \int_0^{6-a} \left(-x^2 + (6-a)x\right)\ dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{6-a}{2}x^2\right]_0^{6-a} \\
&= -\frac{1}{3} \cdot (6-a)^3 + \frac{6-a}{2} \cdot (6-a)^2 - \left(-\frac{1}{3} \cdot 0^3 + \frac{6-a}{2} \cdot 0^2\right) \\
&= -\frac{(6-a)^3}{3} + \frac{(6-a)^3}{2} - 0
\end{aligned}$$

Forlænger brøkerne og sætter på fælles brøkstreg

$$= -\frac{2(6-a)^3}{6} + \frac{3(6-a)^3}{6} = \frac{(6-a)^3}{6}$$

Med andre ord, vi kan bestemme arealet mellem f og $y = ax$ ved $\frac{(6-a)^3}{6}$. Nu er det på tide at sætte arealet lig med 18.

$$\begin{aligned}
\frac{(6-a)^3}{6} &= 18 \\
(6-a)^3 &= 108 \\
6 - a &= \sqrt[3]{108} \\
a &= 6 - \sqrt[3]{108} \approx 1{,}2377968
\end{aligned}$$

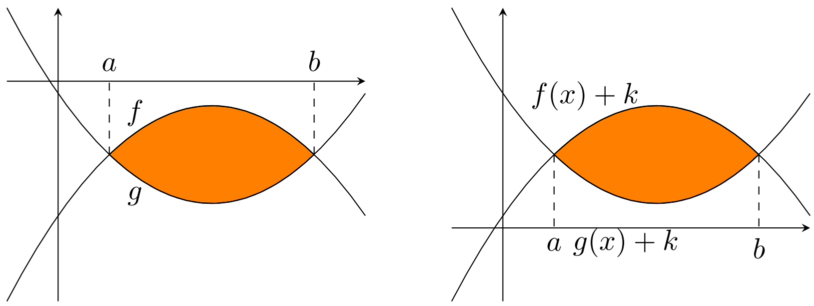
Så svaret er, at $a \approx 1{,}2377968$.

I de ovenstående beregninger har vi ikke forholdt os til om graferne for f og g er positive, dvs. ligger over førsteaksen. Det viser sig, at når der beregnes arealer mellem to grafer, så er den lodrette placering af graferne ligegyldig.

Sætning 12.30. *Hvis f og g er kontinuerte på $[a;b]$, med $f(x) > g(x)$ for alle x i $[a;b]$. Så beregnes der med integralet*

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\ dx,$$

arealet mellem de to grafer.



Bevis. Hvis både f og g er positive på $[a;b]$, så er sætningen klar. Hvis derimod mindst en af f eller g antager negative værdier, så har vi noget at vise. Da både f og g er kontinuerte på et lukket og begrænset interval, så er de begrænsede. Dermed finder der en konstant k, som vi kan lægge til f og g, så $f(x) + k$ og $g(x) + k$ er positive for alle x i $[a;b]$, dermed kan vi beregne arealet mellem de to nye funktioner:

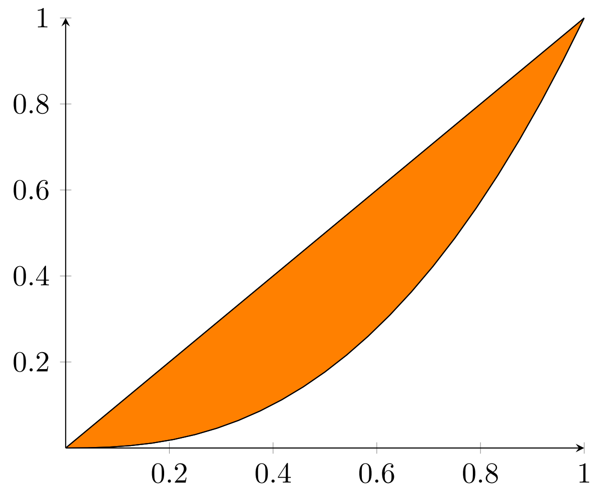
$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) + k - (g(x) + k))\ dx &= \int_a^b (f(x) + k - g(x) - k)\ dx \\ &= \int_a^b (f(x) - g(x))\ dx\end{aligned}$$

Dermed får vi det samme areal, selvom en eller begge funktioner er negative. $\square$

I eksempel 12.19 beregnede vi arealet af et område under førsteaksen ved at tage den numeriske værdi. Men vi har faktisk ikke vist, at det er noget vi kan gøre. Men det kan vi nu.

Sætning 12.31. *Hvis f er kontinuert på $[a;b]$ med $f(x) \leq 0$, så er arealet mellem grafen for f og førsteaksen givet ved:*

$$-\int_a^b f(x)\ dx$$



Figur 12.5. Billedet viser den fuldstændig lige fordeling – den rette linje – og en mere realistisk fordeling – den buede linje. Gini-koefficienten er den procentvise andel af det viste areal ud af arealet under den rette linje.

Bevis. Førsteaksen kan skrives som en funktion ved $y = 0$. Dermed kan vi beregne arealet mellem $y = 0$ og f.

$$\int_a^b (0 - f(x))\ dx = \int_a^b -f(x)\ dx$$
$$= -\int_a^b f(x)\ dx$$

□

12.7. Anvendelse: Gini-koefficienten

I samfundsfag interesserer man sig for økonomisk ulighed, og hvordan noget sådant kan måles. En måde at måle ulighed på er ved Gini-koefficienten. Man tager udgangspunkt i en fuldstændig lige fordeling af goder. Således inddeles en befolkning i tiendedele også kaldet deciler. Hvis de 10% fattigste har 10% af alle gode, og de næste 10% også har 10%, så giver det anledning til en ret linje $f(x) = x$, der beskriver den helt lige fordeling.

Men virkeligheden er ikke sådan. Så der findes en kurve g, som viser den faktiske fordeling af goder i befolkningen. Da de fattigste ikke har 10%, men derimod mindre, så vil den faktiske kurve ligge under den lige fordeling – se figur 12.5.

Gini-koefficienten er så den andel arealet mellem de to kurver udgør af arealet under den helt lige fordeling. Hvis den faktiske fordeling kaldes g, så kan det skrives som:

$$\frac{\int_0^1 (x - g(x))\ dx}{\int_0^1 x\ dx}$$

12.8. Integration ved substitution

Engang imellem kan man komme ud for at skulle bestemme en stamfunktion til for eksempel:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$$

Eller:

$$g(x) = 3x^2 \cdot (x^3 - 7)^8$$

Eller:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{3x + 1}}$$

I alle tre tilfælde har vi sammensatte funktioner eller noget, der ligner. Metoden der benyttes til at bestemme stamfunktionerne kaldes integration ved substitution, og er en af mange forskellige metoder til at bestemme integraler. Ideen er, hvis vi har en funktion, der ligner $f(g(x)) \cdot g'(x)$, så kan vi benytte kædereglen baglæns.

$$\int \big(f(g(x)) \cdot g'(x)\big)\ dx = F(g(x)) + k$$

Her F som sædvanlig en stamfunktion til f. Vi kalder g for u, og så indsætter vi u stedet for g. Der skal også ske noget med dx, hvilket vi viser i eksemplerne.

$$\int \big(f(g(x)) \cdot g'(x)\big)\ dx = \int f(u)\ du = F(u) + k = F(g(x)) + k$$

Teknikken bag metoden kan dog bedst vises ved eksempler:

Eksempel 12.32. Vi ønsker at bestemme stamfunktionen til $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 3}\ dx$$

Vi skal finde en funktion, som skal skiftes ud. I dette eksempel er der to muligheder $2x$ eller $x^2 + 3$. Vi vælger den sidste, og kalder den u. Det vil sige, $u(x) = x^2 + 3$. Vi bestemmer $\frac{du}{dx}$, hvilket er nogle andre symboler for $u'(x)$.

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

Vi vil nu behandle $\frac{du}{dx}$, som var det en brøk (det er det ikke), og vi isolerer du ved at gange med dx på begge sider af lighedstegnet.

$$du = 2xdx$$

Vores integral kan vi skrive som:

$$\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \int \frac{1}{x^2+3} \cdot 2xdx$$

Så nu skifter vi x^2+3 ud med u og $2xdx$ ud med du.

$$\int \frac{1}{u}\,du$$

Nu har vi fået et integral, der er til at beregne:

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + k$$

Og vi kan nu sætte $u(x) = x^2+3$ tilbage ind i formlen:

$$F(x) = \ln|x^2+3| + k$$

Nu har vi fundet stamfunktionen.

Metoden i det ovenstående eksempel kan sættes på punktform:

(1) Find den funktion du vil substituere. Kald den u (eller noget andet).
(2) Bestem $\frac{du}{dx}$ også kaldet $u'(x)$.
(3) Isoler du.
(4) Substituer u og du ind i integralet.
(5) Bestem stamfunktionen
(6) Substituer tilbage.

Eksempel 12.33. Vi ønsker at bestemme stamfunktionen til $g(x) = 3x^2 \cdot (x^3-7)^8$:

$$\int 3x^2 \cdot (x^3-7)^8\,dx$$

Vi sætter $u(x) = x^3 - 7$, og beregner:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

Isolerer du:

$$du = 3x^2dx$$

Substituerer u og du ind i integralet:

$$\int 3x^2 \cdot (x^3-7)^8\,dx = \int u^8\,du$$

Bestemmer integralet:

$$\int u^8\,du = \frac{1}{9}u^9 + k$$

Substituerer tilbage, og bestemmer stamfunktionen:

$$F(x) = \frac{1}{9}(x^3-7)^9 + k$$

Eksempel 12.34. Vi ønsker at bestemme stamfunktionen til: $h(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\ dx$$

Vi sætter $u(x) = 3x + 1$ og beregner:

$$\frac{du}{dx} = 3$$

Her vil vi til forskel isolere dx.

$$du = 3dx \Leftrightarrow \frac{1}{3}du = dx$$

Substituerer u og $\frac{1}{3}du$ ind i integralet:

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\ dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{3}du$$

Bestemmer integralet:

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{3}du = 2\sqrt{u} \cdot \frac{1}{3} + k$$

Substituerer tilbage, og bestemmer stamfunktionen:

$$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + k$$

12.8.1. Substitution af bestemte integraler. Hvad hvis vi skal beregne:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\ dx$$

En metode vil være at begynde med at ignorere de to grænser, finde stamfunktionen, og så beregne $F(2) - F(1)$. Og det vil faktisk give det rigtige resultat.

Nogle gange kan det være en fordel at gøre noget andet. For hvis vi substituerer noget ud, så kunne det være, at vi skulle have nogle andre grænser. Ideen bag det kan skrives:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\ du = [F(u)]_{u(a)}^{u(b)} = F(u(b)) - F(u(b))$$

Eksempel 12.35. Vi skal beregne:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\ dx$$

Følgende har vi lavet i eksempel 12.34, så vi viser ikke alle mellemregninger. Vi laver substitutionen $u = 3x + 1$. Beregner:

$$\frac{du}{dx} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}du = dx$$

Det nye er, at vi skal omregne grænserne:

$$u(0) = 3 \cdot 0 + 1 = 1 \quad u(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

Hvis vi substituerer, så får vi:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx &= \int_1^4 \frac{1}{3\sqrt{u}}\,du \\
&= \left[\frac{2}{3}\sqrt{u}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\sqrt{4} - \frac{2}{3}\sqrt{1} \\
&= \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Det vil sige:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx = \frac{2}{3}$$

Vi kan undersøge, om vi har fået det rigtige, ved at anvende den stamfunktion vi fandt i eksempel 12.34:

$$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + k$$

Vi beregner med de oprindelige grænser:

$$\begin{aligned}
F(1) - F(0) &= \frac{2}{3}\sqrt{3 \cdot 1 + 1} - \frac{2}{3}\sqrt{3 \cdot 0 + 1} \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{4} - \frac{2}{3}\sqrt{1} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Dermed giver begge teknikker det samme resultat.

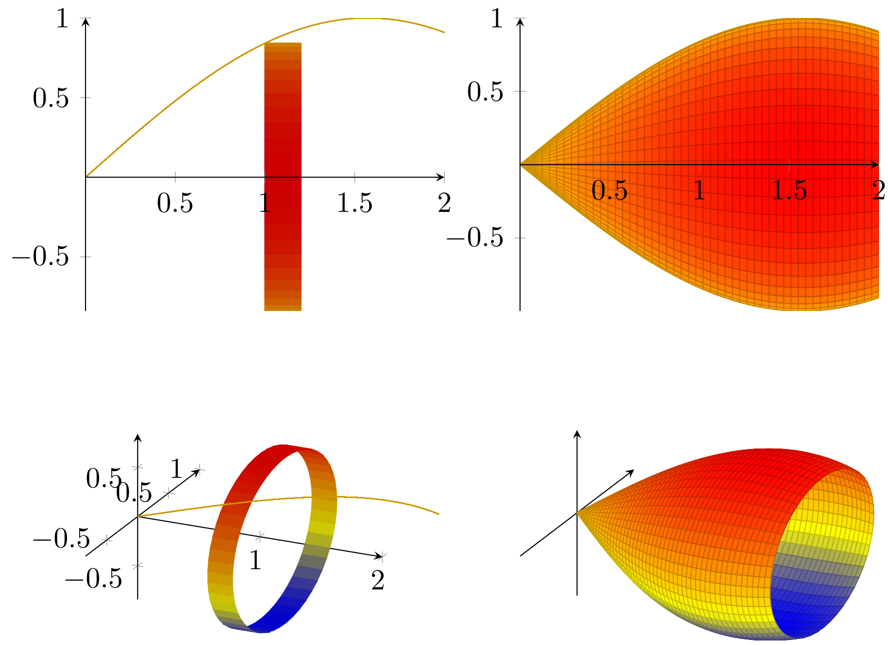
12.9. Rumfang af omdrejningslegemer

Vi kan også benytte integralregning til at beregne rumfanget eller volumen af nogle særlige figurer, der kaldes omdrejningslegemer (se firgur 12.6).

Et omdrejningslegeme er det, man får ved at rotere en graf omkring en akse. Så får man et tredimensionelt objekt, der er rund set fra en vinkel, og buet som grafen set fra en anden vinkel.

Vores idé med at få arealer ud af over- og undersummer, kan udnyttes i forbindelse med omdrejningslegemer. Her bliver rektanglerne bare til cylindre (se figur 12.6). Rumfanget af en cylinder er $\pi \cdot r^2 \cdot h$. Vi kan for eksempel beregne en undersum med cylindre som følger:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f(x_{m,i})^2 \Delta x_i$$



Figur 12.6. De fire billeder viser sinus til venstre og omdrejningslegemet til sinus til højre.. Øverste til venstre er der indtegnet grafen for sinus og en cylinder, der kan anvendes til en undersum. Øverst til højre ses omdrejningslegemet til sinus. Den nederste række viser det samme som den øverste. Billedet er blot drejet vandret med uret og op.

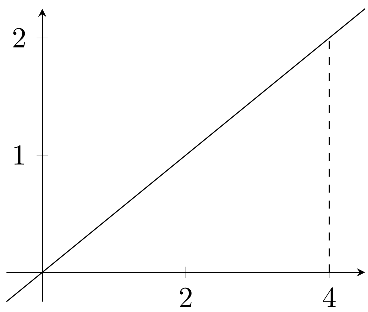
Her er radius $f(x_{m,i})$, og højden er Δx_i. Ved at lave en forfining af førsteaksen kan vi se, at rumfanget af omdrejningslegemet er givet ved:

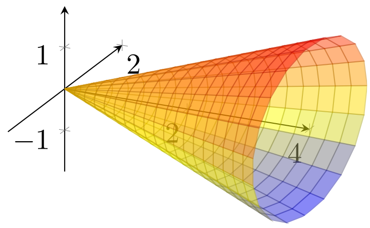
$$\pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

Typisk vil et integral til at beregne rumfang med være meget bøvlet, og man vil derfor ofte bruge en computer til at beregne rumfanget.

Eksempel 12.36. Et simpelt eksempel kan være $f(x) = \frac{1}{2}x$, hvor vi laver omdrejningslegemet i området $a = 0$ til $b = 4$. Vi skal altså beregne:

$$\pi \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \, dx$$





Udregningen er lige ud af landevejen:

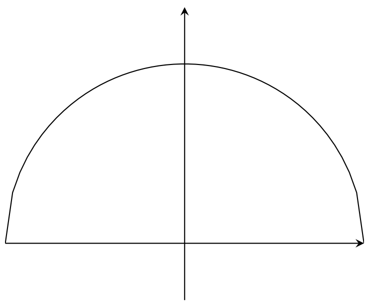
$$\pi \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \, dx = \pi \int_0^4 \frac{1}{4}x^2 \, dx$$
$$= \pi \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = \pi \left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^4$$
$$= \pi \left(\frac{1}{12} \cdot 4^3 - \frac{1}{12} \cdot 0^3\right) = \pi \frac{64}{12} = \pi \cdot 5\frac{1}{3}$$

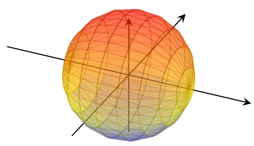
Med andre ord rumfanget er $\pi \cdot 5\frac{1}{3} \approx 16,76$

Eksempel 12.37 (Rumfanget af en kugle)**.** En cirkel med centrum i $(0,0)$ og radius r har ligningen

$$x^2 + y^2 = r^2$$

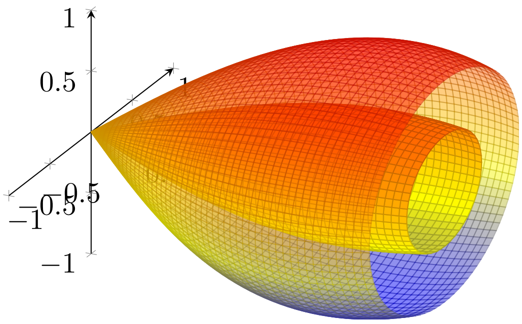
Hvis vi isolerer y, får vi $x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow y^2 = r^2 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Hvis vi vælger $+$, så får vi grafen for en halv cirkel, der skær førsteaksen, når $x = \pm r$. Omdrejningslegemet er en kugle med radius r.





Vi vil nu beregne rumfanget af en kugle.

$$\pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \, dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) \, dx$$
$$= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}$$
$$= \pi \left(r^2 \cdot r - \frac{1}{3}r^3 - \left(r^2 \cdot (-r) - \frac{1}{3}(-r)^3\right)\right)$$



Figur 12.7. Billedet viser omdrejningslegemet fremkommet af $\sin(x)$ yderst, og omdrejningslegemet fremkommet af $\frac{1}{2}\sin(x)$ inderst. Vi ønsker at beregne det rumfang, der ligger imellem de to omdrejningslegemer.

Da $(-r)^3 = -r^3$, fås:

$$\begin{aligned}
&= \pi\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3 - \left(-r^3 + \frac{1}{3}r^3\right)\right) \\
&= \pi\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3 + r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) \\
&= \pi\left(2r^3 - \frac{2}{3}r^3\right) \\
&= \pi\frac{4}{3}r^3
\end{aligned}$$

Her har vi genfundet formlen for rumfanget af en kugle $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

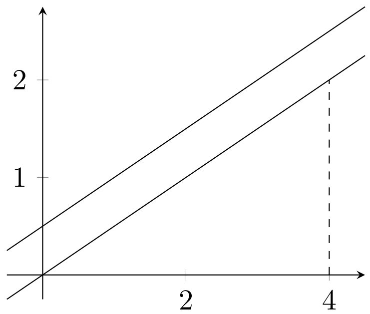
12.9.1. Rumfanget mellem to omdrejningslegemer. Ligesom man kan beregne arealet mellem to grafer, så kan man også beregne rumfanget mellem to omdrejningslegemer. Der vil være et omdrejningslegeme, der ligger yderst og et, der ligger inderst (se figur 12.7). Så rumfanget af det, der ligger imellem legemerne, fås ved at trække de to rumfang fra hinanden. Hvis det yderste rumfang er givet ved $\pi\int_a^b f(x)^2\ dx$, og det inderste rumfang er givet ved $\pi\int_a^b g(x)^2\ dx$, så kan rumfanget imellem de to omdrejningslegemer, beregnes som:

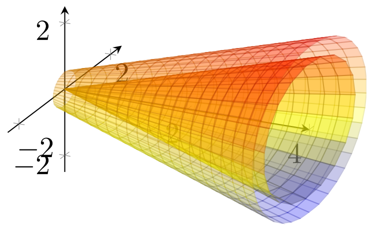
$$\begin{aligned}
\pi\int_a^b f(x)^2\ dx - \pi\int_a^b g(x)^2\ dx &= \pi\left(\int_a^b f(x)^2\ dx - \int_a^b g(x)^2\ dx\right) \\
&= \pi\int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2\right)\ dx
\end{aligned}$$

Bemærkning 12.38 (En typisk fejl)**.** En fejl, som let kan opstå, er, at eksponenten bliver placeret forkert. Så der kommer til at stå $\pi \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)^2 \, dx$. Dette er (stort set) altid *forkert*.

Som med rumfang er beregning af rumfang mellem to omdrejningslegemer, noget man får en computer til at beregne. Vi giver dog et enkelt eksempel.

Eksempel 12.39. Det eksempel, vi vil se på, bygger videre på eksempel 12.36. Der lavede vi en kegle med funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x$. Men de færreste kegler har uendelig lille tykkelse. Så det, vi kan gøre, er at lave en linje oven den første. Vores nye linje vil hedde $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

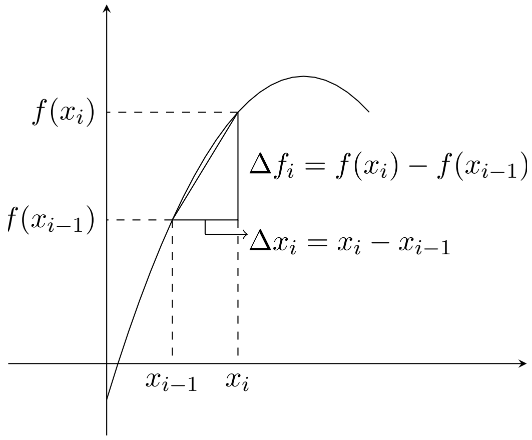




Da g ligger over f, så beregner vi:

$$
\begin{aligned}
\pi \int_0^4 \left(g(x)^2 - f(x)^2\right) \, dx &= \pi \int_0^4 \left(\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2\right) \, dx \\
&= \pi \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2\right) \, dx \\
&= \pi \int_0^4 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\right) \, dx \\
&= \pi \left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2\right]_0^4 \\
&= \pi \left(\frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 4^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0^2\right)\right) \\
&= \pi \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 16 - 0\right) \\
&= \pi \left(1 + 4\right) = \pi \cdot 5 \approx 15,7
\end{aligned}
$$

Det vil sige, at rumfanget mellem g og f er $5\pi \approx 15,7$.



Figur 12.8. Figuren viser grafen for en funktion. Der er valgt to førstekoordinater x_{i-1} og x_i, samt de to tilhørende andenkoordinater $f(x_{i-1})$ og $f(x_i)$.

12.10. Kurvelængde

Det sidste, vi vil anvende integralregning til, er at beregne længden af kurver, der er givet ved grafer for funktioner. Tanken bag længden af kurver kommer fra Pythagoras' sætning

Hvis vi vælger to punkter på førsteaksen x_{i-1} og x_i, så kan de sammen med andenkoordinaterne $f(x_{i-1})$ og $f(x_i)$ danne en retvinklet trekant – se figur 12.8. Hypotenusen af trekanten har tilnærmelsesvis samme længde som grafen for f i samme område. Hvis vi skriver $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ og $\Delta f_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$, så kan hypotenusen beregnes med:

$$\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta f_i)^2}$$

Vi sætter $(\Delta x_i)^2$ uden for parentes:

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 \cdot \left(1 + \frac{(\Delta f_i)^2}{(\Delta x_i)^2}\right)} \\ &= \sqrt{(\Delta x_i)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\right)^2} \end{aligned}$$

Med lidt omrokering

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

Ideen er nu, at vi kan inddele førsteaksen i et antal områder, og så lægge alle hypotenuserne sammen:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i.$$

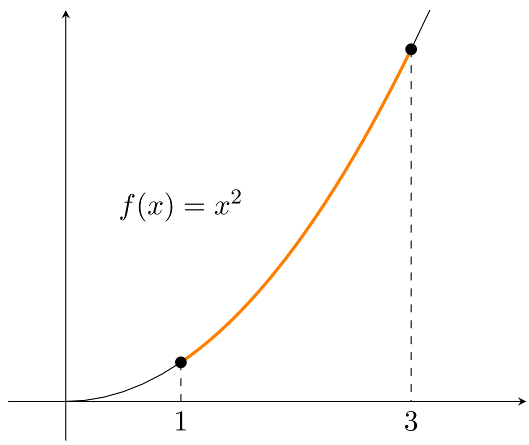
Når vi forfiner inddelingen, så sker der to ting. Det første er, at summen bliver til et integral, og det andet er, at brøken $\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}$ nærmer sig $f'(x)$. Dermed kan kurvelængden beregnes med

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Bemærkning 12.40. Det ovenstående er en argumentation for formlen for kurvelængde af en graf. Det er ikke et bevis. Påstanden om, at vi vil få et integral og $f'(x)$ ved at lave forfinninger, er ikke noget vi har belæg for umiddelbart. Men det giver fint mening upåagtet.

Det er med kurveintegraler, som det er med rumfang. Det er noget, vi sætter en computer til. Især kurvelængder kan selv i simple situationer give nogle meget vanskelige integraler. Vi giver kun et eksempel til skræk og advarsel.

Eksempel 12.41. Vi beregner længden, af den kurve $f(x) = x^2$ giver anledning til fra $x = 1$ til $x = 3$.



Vi begynder med at differentiere:

$$f'(x) = 2x$$

Og vi indsætter:

$$\int_1^3 \sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx = \int_1^3 \sqrt{1+(2x)^2}\ dx$$
$$= \int_1^3 \sqrt{1+4x^2}\ dx$$

Vi sætter 4 uden for en parentes:

$$= \int_a^b \sqrt{4\cdot\left(\frac{1}{4}+x^2\right)}\ dx$$
$$= \int_a^b \sqrt{4}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{4}+x^2\right)}\ dx$$
$$= 2\cdot\int_a^b \sqrt{\left(\frac{1}{4}+x^2\right)}\ dx$$

Et opslag i en formelsamling giver os følgende stamfunktion:

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\ dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

Da $\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=a$ kan vi beregne:

$$2\cdot\int_a^b \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+x^2\right)}\ dx = 2\cdot\left[\frac{x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}}{2}+\frac{\frac{1}{4}}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right)\right]_1^3$$

En lommeregner giver os:

$$\approx 8,27$$

Dermed er længden $8,27$, og vi kan se, hvor besværligt det er at beregne kurvelængder.

Kapitel 13

Differentialligninger

Dette kapital omhandler differentialligninger, det vil sige, ligninger hvor den afledte af en funktion indgår i et udtryk sammen med funktionen. Vi begynder med at give et indtryk af, hvad der skal forstås ved et sådan udsagn. Derefter gennemgår vi teorien for differentialligninger, ved konkret at anvende teorien på tre forskellige ligninger.

Eksemplerne stiger i sværhedsgrad, men viser også de centrale begreber i spil med konkrete eksempler. Når vi behandler differentialligninger er vi generelt interesseret i at løse ligningen, men også at kunne analyse ligningen med henblik på at få oplysninger om løsningerne uden at løse ligningen. Det sidste er vigtigt, for det er typisk sådan, at differentiallinger sjældent har løsninger, der kan skrives op med almindelige formeludtryk.

13.1. Ligninger og differentialligninger

Ordet differentialligning indeholder to elementer, dels noget, der handler om differentialregning, og noget, der handler om ligninger. Et eksempel på en vilkårlig differentialligning er:

$$y' = 2\frac{y}{x} - 7$$

På venstre side af lighedstegnet har vi en funktion y, der er blevet differentieret – hvilket vi kan se på mærket. På højre side af lighedstegnet har vi nogle tal, samt funktionen y og en variabel x.

Det vil sige, at en differentialligning er kendetegnet ved, at den forbinder differentierede funktioner med et udtryk, der (måske) indeholder funktionen selv.

Opgaven bliver at sige noget fornuftigt om denne type ligninger og eventuelt løse dem, det vil sige, bestemme en funktion y, der gør ligningen sand.

For at kunne komme ind på emnet vil vi indlede med at sige noget om tre tilgange til ligninger, som vi kan genfinde i forbindelse med differentialligninger.

13.1.1. Undersøge en løsning. Hvis vi har en almindelig ligning: $4x-1 = 7$, så kan man undersøge, om en bestemt værdi for x er en løsning til ligningen for eksempel: $x = 2$. Vi sætter $x = 2$ ind i ligningen, og hvis vi får det samme på begge sider af lighedstegnet, så har vi en løsning: $4 \cdot 2 - 1 = 8 - 1 = 7$. Hvis ikke så har vi ikke en løsning. Denne teknik lader sig direkte overføre til differentialligninger.

13.1.2. Løs en ligning ved beregning. Hvis vi har en ligning, så kan vi anvende beregning til at løse den:

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= -2x + 6 \\ 5x - 1 &= 6 \\ 5x &= 7 \\ x &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

For at komme frem til løsningen gør vi det samme på begge sider af lighedstegnet. Noget sådant er væsentlig sværere med differentialligninger, men der en metode, der virker for de differentialligninger, der kaldes separable, og metoden kaldes separation af de variable.

13.1.3. Løs ved hjælp af løsningsformel. Nogle ligninger er vanskelige at løse, hvorfor man anvender en formel, der giver løsningen. For eksempel vil andengradsligningen: $x^2 - 4x + 1 = 0$ kunne løses med løsningsformlen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}, \quad d = b^2 - 4ac$$

For nogle differentialligninger er der sådanne formler, der giver løsningen.

13.2. Første eksempel: $y' = ay$

Den første differentialligning, vi vil behandle, kan skrives som:

$$y' = a \cdot y \tag{13.1}$$

Ligningen ser simpel ud, og det er faktisk den mest simple ligning, der ikke er triviel. Så vi vil skrive et langt afsnit om den, for at fremvise alle de teknikker, der er nødvendige, for at behandle de differentialligninger vi støder på i matematik på gymnasieniveau. Vi vil give to konkrete eksempler på anvendelsen af vores ligning 13.1.

Eksempel 13.1. Vi forestiller os, at vi har nogle bakterier, der har uendelig meget mad og plads. Vi vil undersøge, hvad vi kan sige om væksthastigheden for bakterierne. Da vi ikke har en funktion til at beskrive situationen, vil vi bruge to punkter til at vurdere væksthastigheden – hvilket er acceptabelt, da det ikke er den konkrete værdi, men størrelsen på væksthastigheden vi er interesseret i. Væksthastigheden vil vi måle i bakterier pr. time. Vi antager, at bakterierne fordobler sig hver 12 timer. Det vil sige, hvis vi har 2 bakterier, vil det tage 12 timer før, der er 4 bakterier. Dermed er hastigheden $\frac{4-2}{12} = 1/6$ bakterie pr. time. Ligeledes, hvis vi har 60.000 bakterier, så vil vi have 120.000 bakterier efter 12 timer, dermed er væksthastigheden $\frac{120000-60000}{12} = \frac{60000}{12} = 5000$ bakterier pr. time.

Så væksthastigheden afhænger af antallet af bakterier, og kun det, da vores indledende antagelse ikke angiver nogle andre begrænsninger. Men det er faktisk indholdet af ligningen 13.1. Nemlig, hvis antallet af bakterier y er en funktion af tiden x, så afhænger væksthastigheden y' af antallet y. Vi siger, at y' er *proportional* med y.

$$y' = ay$$

I dette tilfælde kan man beregne, at $a = 0,057762$, hvorfor ligningen er

$$y' = 0,057762 \cdot y \tag{13.2}$$

Ud fra det ovenstående kan vi opstille en funktion, der beskriver situationen, og faktisk er en *løsning* til ligningen. Funktionen er

$$y(x) = c \cdot e^{0,057762 \cdot x} \tag{13.3}$$

I funktionen optræder der en konstant c, som ikke optræder i differentialligningen. Konstanten kommer af, at for at kunne løse en differentialligning, så skal der integreres, hvorfor der kommer en integrationskonstant. Differentialligningen er ikke kun en model for den konkrete situation men også for alle mulige andre lignende situationer. Derfor, for at kunne anvende modellen, skal man vide noget om antallet af bakterier til et bestemt tidspunkt. Det kaldes for et *begyndelsesværdiproblem*.

Eksempel 13.2. Antag, at vi har en mængde radioaktivt stof med en halveringstid på 12 dage. Hvis vi regner med, at der er 4 atomer, der kan henfalde, så er væksthastigheden: $\frac{2-4}{12} = \frac{-2}{12} = -1/6$ atom pr. dag. Hvis der er 120.000 atomer, så er væksthastigheden $\frac{60000-12000}{12} = -5000$ atomer pr. dag.

Igen afhænger væksthastigheden (negativt) af antallet af atomer. Hvorfor differentialligningen er:

$$y' = a \cdot y$$

I dette tilfælde kan man beregne, at $a = -0,057762$, og dermed er ligningen:

$$y' = -0,057762 \cdot y \tag{13.4}$$

I dette tilfælde er en løsning:

$$y(x) = c \cdot e^{-0,057762 \cdot x} \tag{13.5}$$

Bemærkning 13.3. Læg mærke til, at fortegnet på konstanten a har stor indflydelse på, om y er en voksende eller aftagende funktion. Det vil vi vende tilbage til.

Bemærkning 13.4 (Enheder)**.** Lad os se på enhederne i differentialligningen $y' = ay$. Hvis vi tager eksempel 13.1, så har y enheden antal bakterier, og y' har enheden bakterier pr. time. Dermed må a have enheden $timer^{-1}$. Hvilket vi kan eftervise med følgende beregning

$$\begin{aligned} y' &= ay \\ \frac{bakterier}{timer} &= timer^{-1} \cdot bakterier \\ \frac{bakterier}{timer} &= \frac{1}{timer} \cdot bakterier \\ \frac{bakterier}{timer} &= \frac{bakterier}{timer} \end{aligned}$$

Det er standard at angive konstanten a's enhed ved et $^{-1}$.

13.2.1. Undersøgelse af en løsning. I det ovenstående er det blevet påstået, at $y(x) = c \cdot e^{0,057762 \cdot x}$, og $y(x) = c \cdot e^{-0,057762 \cdot x}$ er løsninger til de to differentialligninger: $y' = 0,057762 \cdot y$, og $y' = -0,057762 \cdot y$ henholdsvis. Men hvordan afgøres det, om en funktion er en løsning til en differentialligning? Svaret er det samme som blev givet i indledningen: Der sættes ind i ligningen, og hvis der står det samme på begge sider af lighedstegnet, så har vi en løsning ellers ikke.

Forskellen på en differentialligning og en almindelig ligning er, at vi bliver nødt til at differentiere vores funktion. Vi tager funktionen $y(x) = c \cdot e^{0,057762 \cdot x}$, og undersøger om det er en løsning til: $y' = 0,057762 \cdot y$. Vi begynder med at differentiere y:

$$y'(x) = c \cdot 0,057762 \cdot e^{0,057762 \cdot x} = 0,057762 \cdot c \cdot e^{0,057762 \cdot x}$$

Dette indsætter vi i ligningen:

$$\begin{gathered} y' = 0,057762 \cdot y \\ \underbrace{0,057762 \cdot c \cdot e^{0,057762 \cdot x}}_{y'} = 0,057762 \cdot \left(\underbrace{c \cdot e^{0,057762 \cdot x}}_{y} \right) \quad \checkmark \end{gathered}$$

Da der står det samme på begge sider af lighedstegnet, har vi fundet en løsning. Vi kan nu sige noget om løsningerne på differentialligning 13.1

Sætning 13.5. *Funktionerne: $y(x) = c \cdot e^{ax}$ er løsninger til differentialligningen $y' = ay$*

Bevis. Vi differentierer: $y(x) = c \cdot e^{ax}$ således: $y'(x) = ace^{ax}$. Det indsættes i ligningen:

$$\begin{aligned} y' &= ay \\ \underbrace{ace^{ax}}_{y'} &= a \cdot \left(\underbrace{ce^{ax}}_{y}\right) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Hvilket skulle vises. □

Bemærkning 13.6. Vær opmærksom på, at vi ikke hævder at have fundet *alle* løsninger!

13.2.2. Begyndelsesværdiproblemer. I vores løsninger har vi i begge funktioner en konstant c. Vi vil nu beskrive, hvordan en sådan konstant kan bestemmes. Ind til videre indeholder vores differentialligninger fra eksempel 13.1 ikke noget, der kan hjælpe med en beregning. Så vi skal have en ekstra oplysning. Hvis for eksempel vi ved, at der er 5 bakterier, når tiden starter til $x = 0$, så ved vi, at $y(0) = 5$, så det kan vi sætte ind i vores bakterieformel:

$$\begin{aligned} y(x) &= c \cdot e^{0,057762 \cdot x} \\ y(0) &= c \cdot e^{0,057762 \cdot 0} = 5 \\ c \cdot e^{0} &= 5 \\ c &= 5 \end{aligned}$$

Dermed kan vi opskrive en *partikulær* løsning

$$y(x) = 5 \cdot e^{0,057762 \cdot x}$$

Det er så løsningen til begyndelsesværdiproblemet:

$$y' = 0,057762 \cdot y, \quad y(0) = 5$$

Ofte kan sådanne begyndelsesværdiproblemer løses med en computer.

Eksempel 13.7. Typisk kan vi løse en differentialligning ved at aflæse tal fra ligningen, og bruge løsningsformlen til at nå frem til en ligning. For eksempel, får vi følgende begyndelsesværdiproblem:

$$y' = 2y, \quad y(0) = 4$$

Vi ved, at den generelle formel for differentialligningen er $y' = ay$. Hvorfor vi kan aflæse, at $a = 2$. Når vi ved, at løsningen er givet ved: $y(x) = c \cdot e^{ax}$. Så ved vi, at vi har:

$$y(x) = c \cdot e^{2x}$$

Vi kan nu indsætte tallene fra begyndelsesværdiproblemet for at finde c.

$$\begin{aligned} y(0) &= 4 \\ c \cdot e^{2 \cdot 0} &= 4 \\ c \cdot e^{0} &= 4 \\ c \cdot 1 &= 4 \\ c &= 4 \end{aligned}$$

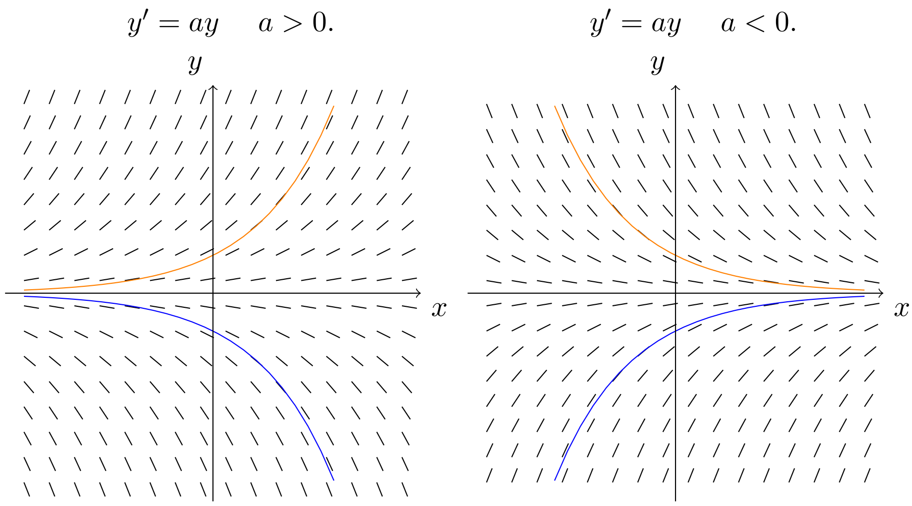
Dermed er ligningen givet ved: $y(x) = 4e^{2x}$.

13.2.3. Kvalitativ undersøgelse. Ud fra selv differentialligningen er det muligt at fremskaffe oplysninger om udseendet på løsningerne til differentialligningen. Dette kaldes en kvalitativ undersøgelse, fordi vi ikke får en konkret løsning, men kun får noget at vide om det generelle ved løsningerne. Der er to metoder, vi vil anvende, det første er det, der kaldes et *fasediagram* eller et $y - y' - plot$, hvilket sådan set bare er en monotoniundersøgelse ud fra ligningen (se figur 13.2). Den anden metode er ved et *linjeelementdiagram* eller *hældningsfelt*. Her kan man se den konkrete løsnings udseende (se figur 13.1).

Vi begynder med et *linjeelementdiagram*. Ideen med et sådan diagram er, at differentialligningen giver os en metode til at beregne hældningen i et vilkårligt punkt i koordiantsystemet. For eksempel, hvis vores differentialligning er $y' = 2y$, så vil hældningen i punktet $(1, 3)$ være $y' = 2 \cdot 3 = 6$. Her benytter vi ikke x-koordinatet, da det ikke optræder i ligningen. Således kan et *linjeelement* opfattes som en triple $(x_0, y_0; {y'}_0)$. En computer kan regne mange hældninger ud. Hvis computeren laver et gitter af punkter; beregner hældningen for hver af dem, og sætter et lille linjestykke i punktet med den tilhørende hældning, så får man et linjeelementdiagram.

På figur 13.1 har vi tegnet linjeelementdiagrammet for $y' = 0,5y$ til venstre, samt to grafer for løsninger de kaldes også for *integralkurver*.

Hvis vi ser på det venstre diagram i figur 13.1, og følger retningen af hældningerne fra venstre mod højre, ser det ud til, at der er to typer løsninger. En der ligger over x-aksen, og en der ligger under. Den, der er over x-aksen, er voksende, og den der er under x-aksen er aftagende. Begge løsninger bevæger sig væk fra $y = 0$, når vi bevæger os fra venstre mod højre.



Figur 13.1. Linjeelementdiagrammer for $y' = ay$. Venstre diagram viser linjeelementer for $a > 0$, samt to løsningskurver. Højre diagram viser linjeelementer for $a < 0$, samt to løsningskurver.

Anderledes ser diagrammet ud, hvis vi tage $y' = -0,5y$. Det har vi tegnet til højre i figur 13.1. Nu er løsningerne over x-aksen aftagende, og løsningerne under x-aksen er voksende. Her nærmer løsningerne sig $y = 0$, når vi går fra venstre mod højre.

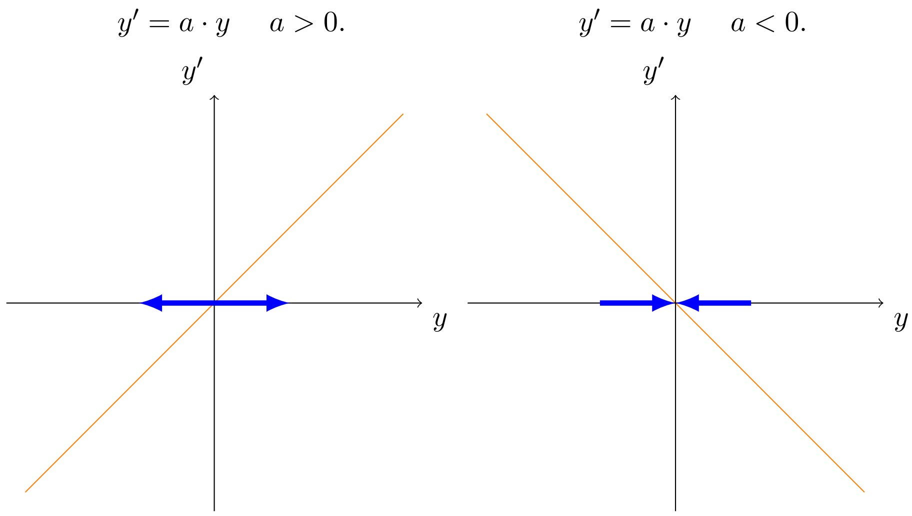
De to diagrammer i figur 13.1 kan give os et indtryk af, hvordan løsningerne til differentialligningen opfører sig. Men de kan ikke bruges som argumenter for alle løsninger, da vi kun ser et udsnit. Det næste diagram afhjælper dette problem. Men vi definerer først begrebet linjeelement:

Definition 13.8. Givet en differentialligning, hvor y' kan beregnes ud fra x og y, så er et *linjeelement*, en tripel $(x_0, y_0; y'_0)$, hvor y'_0 er beregnet ud fra at indsætte (x_0, y_0) i differentialligningen.

Der blev sagt, at *fasediagrammet* er en monotoniundersøgelse. Den kan vi udføre, fordi vi ved noget om den differentierede funktion y'. Vi begynder på normal vis, og løser $f'(x) = 0$, eller $y' = 0$. Men det er let at løse: $0 = y' = ay \Leftrightarrow y = 0$, da vi kun har interessante ligninger, hvis $a \neq 0$.

Nu er der to tilfælde, enten er $a > 0$, eller også er $a < 0$. Vi har tegnet de to tilfælde i figur 13.2. Til venstre har vi tegnet $y' = ay$ med $a = 1$. Og til højre har vi tegnet $y' = ay$ med $a = -1$.

På det venstre billede, hvor $a > 0$, kan vi se, når $y > 0$, så er $y' > 0$. Det vil sige, at y vokser, og grafen må bevæge sig væk fra $y = 0$. Ligeledes, når $y < 0$, så er $y' < 0$, og så må y være aftagende, og grafen bevæger sig væk fra $y = 0$. Det er den oplysning, der er gemt i de to blå pile, som er



Figur 13.2. $y'-y$-diagram for $y' = ay$. Venstre diagram viser en ustabil ligevægtstilstand. Højre diagram viser en stabil ligevægtstilstand.

tegnet ind efter undersøgelsen. Samlet vil man sige, at $y = 0$ er en *ustabil ligevægtstilstand*, fordi alt forsøge at komme væk fra den over tid.

Til højre har vi situationen $a < 0$. Her er situationen omvendt. Når $y > 0$, så er $y' < 0$, og derfor aftager y. Hvis $y < 0$, så er $y' > 0$, og y vokser. Dermed nærmer løsningerne sig ligevægtstilstanden $y' = 0$, som så kaldes en *stabil ligevægtstilstand*.

Til senere brug definerer vi nu begrebet ligevægtstilstand

Definition 13.9 (Ligevægtstilstand)**.** En *ligevægtstilstand* for en differentialligning er de punkter (x_0, y_0), der løser ligningen $y' = 0$. En ligevægtstilstand er *stabil*, hvis der findes løsninger tæt på (x_0, y_0), så:

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = y_0$$

Hvis en ligevægtstilstand ikke er stabil, kaldes den *ustabil*.

13.2.4. Løsning ved separation af de variable. I det ovenstående fik vi på magisk vis en løsning til vores differentialligning $y' = ay$, men vi har ikke fortalt, hvordan det er muligt at bestemme en løsning. I det følgende vil vi beskrive metoden *separation af de variable*, som ofte kan give en løsning. Men før vi anvender metoden, vil vi give en motivation for metoden.

Udgangspunktet for separation af de variable er kædereglen – eller reglen for differentiation af sammensatte funktioner. Vi ser på følgende sammensætning: $\ln(f(x))$, og undersøger, hvad der sker, når den differentieres:

$$(\ln(f(x)))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \tag{13.6}$$

Med andre ord, så er $\ln(|f(x)|)$ en *stamfunktion* til $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$.

Hvis vi vender tilbage til vores differentialligning, så kan vi ændre den, så vi nærmer os formel 13.6.

$$y' = a \cdot y$$

Vi ganger med $\frac{1}{y}$ på begge sider af lighedstegnet.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = a \cdot y \cdot \frac{1}{y}, \quad y \neq 0$$
$$\frac{1}{y} \cdot y' = a, \quad y \neq 0$$

På venstre side af lighedstegnet står der $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$ bare med y, og på højre side har vi en konstant. Vi kan nu finde stamfunktionen på begge sider af lighedstegnet:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = a, \quad y \neq 0$$
$$\int \frac{1}{y} \cdot y' \; dx = \int a \; dx, \quad y \neq 0$$
$$\ln(|y|) + c_1 = ax + c_2, \quad y \neq 0$$

Her har vi to integrationskonstanter c_1 og c_2. Vi samler dem på højreside af lighedstegnet til c_3, og så husker vi, at den omvendte funktion til $\ln(x)$ er e^x, så den bruger vi bagefter for at isolere y.

$$\ln(|y|) = ax + c_3, \quad y \neq 0$$
$$e^{\ln(|y|)} = e^{ax+c_3}, \quad y \neq 0$$
$$|y| = e^{ax} \cdot e^{c_3}, \quad y \neq 0$$

Vi sætter $c = e^{c_3}$

$$|y| = c \cdot e^{ax}, \quad y \neq 0$$

Undervejs har vi hele tiden forudsat, at $y \neq 0$, men det betyder, at enten er $y > 0$ for alle x, eller også er $y < 0$ for alle x. Da e^x altid er en positiv funktion, vil det være afhængig af fortegnet på c. Så ved at lade c være alle tal undtagen nul, kan vi droppe numerisktegnet om y.

Men hvad med $y = 0$? Det er faktisk en løsning til ligningen, for hvis $y = 0$, så er $y' = 0$, og vi får $0 = a \cdot 0 = 0$. Denne løsning kaldes en *triviel* løsning, eller hvad vi oftere vil bruge, så kaldes det en *ligevægtstilstand.* Dermed kan $c = 0$ medtages som en mulig værdi.

Yderligere bemærker vi, at for alle punkter (x_0, y_0) i planen, så findes der et c, så grafen for løsningen går igennem punktet. Faktisk kan c beregnes ved: $c = \frac{y_0}{e^{ax_0}}$. Det vil sige, at vi kan løse alle begyndelsesværdiproblemer.

Dermed kan vi skrive den *fuldstændige* løsning til $y' = ay$ som:

$$y(x) = c \cdot e^{ax}$$

Vi giver et taleksempel.

Eksempel 13.10. Hvis vi har differentialligningen $y' = -2y$, og begyndelsesværdien $y(0) = 4$, så kan vi løse ligningen med separation af de variable. På følgende måde, hvor vi regner med $\frac{dy}{dx}$, som om det det tilladt at bruge den som en brøk.

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

Ganger med dx

$$dy = -2ydx$$

Dividerer med y, og husker at $y \neq 0$

$$\frac{1}{y}dy = -2dx \qquad y \neq 0$$

Tager integralet på begge sider

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y}dy &= \int -2dx \qquad y \neq 0 \\ \ln|y| &= -2x + c_1 \qquad y \neq 0 \end{aligned}$$

bruger e^x på begge sider

$$\begin{aligned} e^{\ln|y|} &= e^{-2x+c_1} \qquad y \neq 0 \\ |y| &= c \cdot e^{-2x} \qquad c = e^{c_1} \qquad y \neq 0 \end{aligned}$$

Da begyndelsesværdien har y-koordinat større end 0, fås:

$$y(x) = c \cdot e^{-2x} \qquad y > 0$$

Begyndelsesværdien indsættes

$$\begin{aligned} y(0) &= c \cdot e^{-2 \cdot 0} = 4 \\ c \cdot e^0 &= 4 \\ c &= 4 \end{aligned}$$

Dermed er løsningen:

$$y(x) = 4 \cdot e^{-2x}$$

13.2.5. Eksistens og entydighed. Vi samler vores analyse af ligningen $y' = ay$ i følgende sætning:

Sætning 13.11. *Differentialligningen:*

$$y' = a \cdot y, \quad a \neq 0$$

Har løsningerne:

$$y(x) = c \cdot e^{ax}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Ethvert begyndelsesværdiproblem har én og kun en løsning.

Differentialligningen har en ligevægtstilstand, når $y = 0$, og der er to tilfælde:

(1) *Hvis $a > 0$, så er ligevægtstilstanden ustabil.*
(2) *Hvis $a < 0$, så er ligevægtstilstanden stabil.*

Vi vil lave endnu et bevis, der ikke anvender separation af de variable. I forhold til beviser giver separation en lang række enkelt tilfælde man skal forholde sig til. Dette skyldes den numeriske værdi, der ofte kommer ved separationsmetode.

I stedet vil vi anvende en anden metode, hvor vi anvender en såkaldt *integrerende faktor*. Hele ideen er at få vores differentialligning til at ligne produktregnereglen.

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Bevis. Vi viser kun den første del af sætningen. Vi omskriver differentialligningen:

$$\begin{aligned} y' &= ay \\ y' - ay &= 0 \end{aligned}$$

Dette kunne næsten ligne produktregnereglen, men der mangler noget. Hvis vi ganger med e^{-ax} og husker, at den differentieres til: $-ae^{-ax}$. Så bliver det tydeligere:

$$y' \cdot e^{-ax} - ay \cdot e^{-ax} = 0 \cdot e^{-ax}$$

Vi flytter lidt rundt:

$$y' \cdot e^{-ax} + y \cdot \left(-ae^{-ax}\right) = 0$$

Vi sammenligner med produktregnereglen:

$$\underbrace{y'}_{f'(x)} \underbrace{e^{-ax}}_{g(x)} + \underbrace{y}_{f(x)} \underbrace{\left(-ae^{-ax}\right)}_{g'(x)} = 0$$

Vi anvender produktregnereglen baglæns:

$$\Big(\underbrace{y}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{-ax}}_{g(x)}\Big)' = 0$$

Fra monotonisætningen punkt 3, så findes der en konstant c, så:

$$y \cdot e^{-ax} = c$$

Ganger med e^{ax}

$$\begin{aligned} y \cdot e^{-ax} \cdot e^{ax} &= ce^{ax} \\ y \cdot e^{0} &= ce^{ax} \\ y &= ce^{ax} \end{aligned}$$

□

Bemærkning 13.12. Det vi har vist, er det, der kaldes *eksistens og entydighed*. Eksistens er blot, at vi har påvist eksistensen af en løsning til differentialligningen. Entydighed er, at vi har vist, at der findes udelukkende én funktion, som er løsning med en bestemt begyndelsesværdi. Det kommer sig af, at det integral vi har benyttet, netop udelukker andre typer af løsninger, og da konstanten c er entydigt bestemt af (x_0, y_0), så findes der vitterligt kun en løsning.

13.2.6. Fremgangsmåde for andre differentialligninger. I det oven stående har vi introduceret en række begreber og metoder til at behandle en bestemt differentialligning. Vi vil i de følgende afsnit, hvor vi behandler forskellige differentialligninger benytte følgende fremgangsmåde:

(1) Opskrive og give eksempler på differentialligningen.
(2) Lave en kvalitativ analyse, og bestemme eventuelle ligevægtstilstande.
(3) Løse ligningen. Enten med separation af variable eller en anden metode.
(4) Vise, at vi kan løse alle begyndelsesværdiproblemer.

De næste to afsnit handler om differentialligninger generelt og metoden separation af de variable. Hvorefter vi genoptager analysen af forskellige differentialligninger.

13.3. Definitionen af differentialligninger, notation og typer

I det foregående har vi beskrevet en konkret differentialligning, men vi vil godt give en definition af, hvad der menes med en differentialligning.

Definition 13.13. En (ordinær) *differentialligning* er et udtryk

$$y' = \mathcal{F}(y, x) \tag{13.7}$$

Hvor y er en ukendt funktion med afledte y', x er en variabel, der typisk angiver tid, og $\mathcal{F}$ er et udtryk bestående af regneoperationer på y og x.

Et *begyndelsesværdiproblem* er en differentialligning, samt et punkt (x_0, y_0) på løsningens graf:

$$y' = \mathcal{F}(y, x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{13.8}$$

En *løsning* til en differentialligning er en funktion y, der opfylder differentialligningen, og løser begyndelsesværdiproblemet. En sådan løsning kaldes *partikulær*. Hvis en løsning løser alle begyndelsesværdiproblemer kaldes den *fuldstændig*.

Bemærkning 13.14. I det overstående har vi ikke forholdt os til differentialligninger, hvor andenafledte indgår – det vil sige, y''. Sådanne ligninger kaldes andenordensligninger. Så vi har kun defineret førsteordensligninger. Det viser sig, at alle højere-ordens-ligninger kan reduceres til et system af førsteordensligninger. Hvorfor definitionen kan genbruges, når blot y', y, x, x_0 og y_0 erstattes med vektorer.

Bemærkning 13.15. I definitionen har vi ikke krævet noget af $\mathcal{F}$, men før vi kan være sikre på, at der findes en løsning til et begyndelsesværdiproblem, så bør vi kræve, at $\mathcal{F}$ er differentiabel i begge variable, og at de afledte er kontinuerte. Hvor lidt man kan slippe afsted med at kræve, er noget, der undersøgt, men vi skal ikke bekymre os videre om det.

13.3.1. Notation. Der findes en del måder at opskrive differentialligninger på:

$$\begin{aligned} y' &= ay \\ \frac{dy}{dx} &= ay \\ f'(x) &= a \cdot f(x) \\ \dot{x} &= ax \\ u_x &= au \\ \frac{d}{dt}x(t) &= a \cdot x(t) \end{aligned}$$

Af alle disse måder at skrive den samme ligning på, er det kun de to øverste notationer er rigtig vigtige. Notation nummer to: $\frac{dy}{dx}$ skal læses som et samlet symbol, hvor det tælleren angiver funktionens navn i dette tilfælde y. Nævneren angiver variablens navn i dette tilfælde x.

Andre muligheder kan være $\frac{dN}{dt}$. Her hedder funktionen N, og variablen hedder t.

13.3.2. Typer af differentialligninger. Differentiallinger kan inddeles i forskellige kategorier. Hvis der ikke er en variabel i ligning – for eksempel ingen x – så kaldes ligningen *tidsuafhængig* eller *autonom*. Hvis der derimod optræder en variabel, så kaldes de for *tidsafhængige* eller *ikke autonome*.

Og så bliver det lidt mærkeligt. Hvis differentialligningen er en *proportionalitet*, så kaldes ligningen for *homogen lineær*. Og hvis ligningen ligner en lineær sammenhæng, så kaldes den for *inhomogen lineær*. Hvis ligningen ikke nogle af de to former for lineær kaldes den for *ikke lineær*.

Tabellen neden for indeholder de hovedtyper, der optræder i formelsamlingen.

Ligning	Lineær homogen	Lineær inhomogen	Ikke lineær
Tidsuafhængige			
Autonome			
$y' = ay$	✓		
$y' = b - ay$		✓	
$y' = a \cdot y \cdot (M - y)$			✓
Tidsafhængige			
Ikke autonome			
$y' + a(x)y = b(x)$		✓	

13.4. Ligningen $y' = b - ay$

Den anden ligning, vi vil behandle, er ligningen:

$$y' = b - ay, \qquad b \neq 0 \tag{13.9}$$

Her forudsætter vi, at b ikke er nul, da vi ellers vil få ligningen $y' = -ay$, som er næsten identisk med den ligning vi allerede lige har behandlet. Vi begynder med et eksempel:

Eksempel 13.16. En kop kaffe bliver skænket, og er $80°C$ varm. Straks begynder kaffen at afgive varme til omgivelserne. Men kaffen kan aldrig blive koldere end stuetemperatur $T_0 = 20°C$. Derfor er den hastighed, temperaturen T aftager med *proportional* med forskellen mellem stuetemperaturen og temperaturen på kaffen:

$$\frac{dT}{dx} = k(T_0 - T)$$

Her er k vores proportionalitetskonstant, T_0 er stuetemperaturen, og T er kaffens temperatur. Symbolet $\frac{dT}{dx}$ angiver væksthastigheden i f.eks. $°C$ pr. minut. Formlen kaldes *Newtons afkølingslov* (uden udstråling).

Umiddelbart ligner vores eksempel ikke formel 13.9, men hvis vi ganger k ind i parentesen, kan man se ligheden:

$$\frac{dT}{dx} = k(T_0 - T)$$
$$\frac{dT}{dx} = kT_0 - kT$$

Så hvis vi sætter $b = kT_0$, og $a = k$, så har vores formel 13.9.

Den generelle løsning for differentialligning 13.9 er givet ved:

$$y(x) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$$

Hvis vi antager, at $k = 0,7$, så har vi følgende differentialligning:

$$\frac{dT}{dx} = 0,7(20 - T)$$

Eller:

$$\frac{dT}{dx} = 14 - 0,7T$$

Hvis vi indsætter i løsningsformlen, så får vi:

$$T(x) = \frac{14}{0,7} + c \cdot e^{-0,7x}$$
$$T(x) = 20 + c \cdot e^{-0,7x}$$

Vi har begyndelsesværdien $T(0) = 80$:

$$T(0) = 20 + c \cdot e^{-0,7 \cdot 0} = 80$$
$$20 + c \cdot e^{0} = 80$$
$$c = 60$$

Dermed er løsningen:

$$T(x) = 20 + 60e^{-0,7x}$$

Yderligere kan vi se, at den generelle løsning til $\frac{dT}{dx} = k(T_0 - T)$ er $T(x) = T_0 + c \cdot e^{-kx}$.

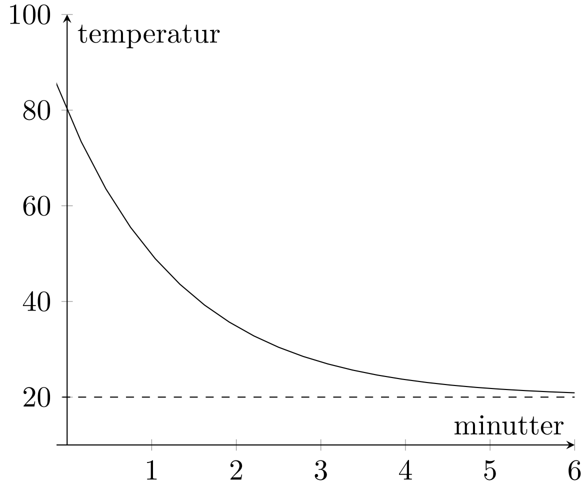
En graf for T ser sådan ud som på figur 13.3.

13.4.1. Undersøgelse af løsning. Vi har ovenover hævdet, at løsningen til $y' = b - ay$ er givet ved $y(x) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$. Det vil vi nu undersøge om er sandt.

Vi begynder med at differentiere y:

$$y'(x) = \left(\frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}\right)' = c \cdot (-a) \cdot e^{-ax} = -ac \cdot e^{-ax}$$

Nu kan vi indsætte i ligningen:



Figur 13.3. Graf for $T(x) = 20 + 60 \cdot e^{-0{,}7x}$. Stiplet linje svare til ligevægtstilstand $y' = 0$

$$
\begin{aligned}
y' &= b - ay \\
\underbrace{-ac \cdot e^{-ax}}_{y'} &= b - a \cdot \underbrace{\left(\frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}\right)}_{y}
\end{aligned}
$$

Ganger ind i parentesen:

$$
\begin{aligned}
-ac \cdot e^{-ax} &= b - \frac{-ab}{a} - a \cdot c \cdot e^{-ax} \\
-ac \cdot e^{-ax} &= b - b - ac \cdot e^{-ax} \\
-ac \cdot e^{-ax} &= -ac \cdot e^{-ax} \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Dermed har vi vist, at vores påståede løsning faktisk er en løsning. Vi kan nu formulerer en sætning:

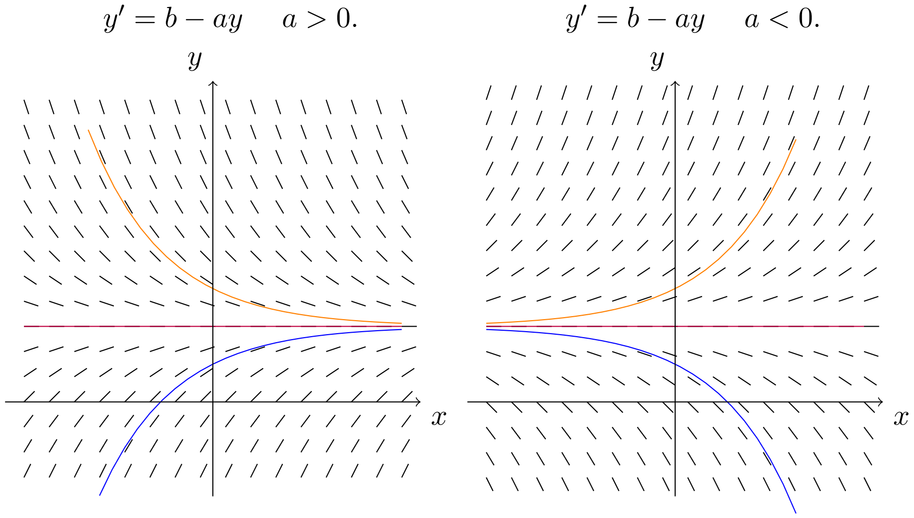
Sætning 13.17. *Funktionen:*

$$y(x) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$$

Er en løsning til differentialligningen:

$$y' = b - ay$$

Bemærkning 13.18. Læg igen mærke til at vi blot påstår, at vi har fundet en løsning ikke at vi har fundet alle løsninger.



Figur 13.4. Linjeelement diagrammer for $y' = b - ay$ med løsningskurver.

13.4.2. Kvalitativ analyse. Det er muligt, at lave en kvalitativ analyse af vores differentialligning $y' = b - ay$. På figur 13.4 har vi tegnet to linjeelementdiagrammer. Til venstre har vi situationen, hvor $a > 0$. Her ser der ud til at være en vandret funktion $f(x) = k$, som de to andre løsninger nærmer sig. Situationen minder om tilfældet med $y' = ay$, dog i det tilfælde var $a < 0$. Grunden til, at vi har $a > 0$ i vores situation, er, at vi har et minus i selve ligningen. Ellers er forskellen, at den stabile ligevægtstilstand for flyttet op fra x-aksen.

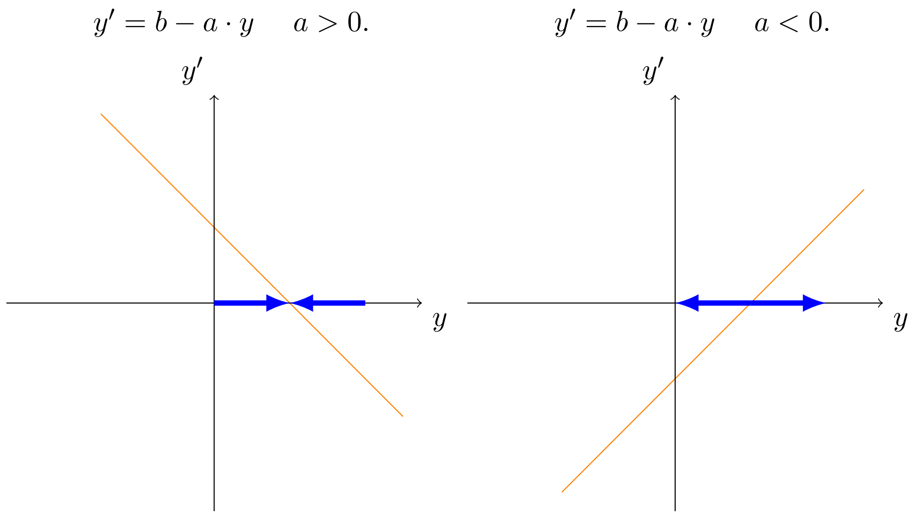
Til højre har vi situationen, hvor $a < 0$, her har vi også en ligevægtstilstand ved $y = k$. Her ser tilstanden ud til at være ustabil.

I anvendelser vil det oftest være det venstre tilfælde, der er interessant. I det blå tilfælde svare det til at have et loft på funktionen og i det gule tilfælde svare til det til at have en mindst mulig værdi for løsningen.

Vi kan lave et fasediagram for ligningen $y' = b - ay$. Vi skal først løse $y' = 0$.

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ b - ay &= 0 \\ b &= ay \\ y &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Vi kan nu tegne $y - y'$-plottet for vores ligning – se figur 13.5. Til venstre har vi situationen $a > 0$. Når $y > \frac{b}{a}$, så er $y < 0$, dermed er y aftagende.



Figur 13.5. Fasediagram for $y' = b - ay$. Til venstre ses en stabil ligevægt og til højre ses en ustabil ligevægt.

Når $y < \frac{b}{a}$, så er $y' > 0$, og y er voksende. Dermed er løsningerne til ligningen aftagende, når de har en begyndelsesværdi over $\frac{b}{a}$, og voksende hvis begyndelsesværdien er under. Så ligevægtstilstanden i $y = \frac{b}{a}$ er stabil.

Til højre har vi tilfældet, hvor $a < 0$. Når $y > \frac{b}{a}$, så er $y' > 0$, og y er voksende. Når $y < \frac{b}{a}$, så er $y' < 0$, og y er aftagende. Her er ligevægtstilstanden ustabil.

13.4.3. Separation af de variable. Vores differentialligning $y' = b - ay$ kan også løses ved separation af de variable.

Vi begynder med at sætte a uden for en parentes: $y' = a\left(\frac{b}{a} - y\right)$. Hvis $y \neq \frac{b}{a}$, så kan vi dividere over:

$$\frac{1}{\frac{b}{a} - y} \cdot y' = a$$

Nu skal vi finde en stamfunktion til $\frac{1}{\frac{b}{a}-y}$. En sådan er $-\ln\left(\frac{b}{a} - y\right)$, da:

$$\left(-\ln\left(\frac{b}{a} - y\right)\right)' = -\frac{1}{\frac{b}{a} - y} \cdot (-y') = \frac{1}{\frac{b}{a} - y} \cdot y'$$

Vi kan nu fortsætte som sædvanligt.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\frac{b}{a} - y} \cdot y' &= a \qquad y \neq \frac{b}{a} \\
\int \frac{1}{\frac{b}{a} - y} \cdot y' dx &= \int a dx \\
-\ln\left|\frac{b}{a} - y\right| + c_1 &= ax + c_2 \\
\ln\left|\frac{b}{a} - y\right| &= -ax + c_3 \qquad c_3 = c_1 - c_2 \\
\left|\frac{b}{y} - y\right| &= c_4 e^{-ax} \qquad c_4 = e^{c_3} \\
\frac{b}{a} - y &= \pm c_4 e^{-ax} \\
y &= \frac{b}{a} \mp c_4 e^{-ax} \\
y(x) &= \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax} \qquad c = \mp c_4
\end{aligned}$$

Eksempel 13.19. Vores ligning fra indledningen: $\frac{dT}{dx} = 0,7(20 - T)$ lader sig også løse ved separation af de variable. Her vil vi igen anvende udtrykket $\frac{dT}{dx}$ som var det en brøk. Vores begyndelsesværdi er igen $(0, 80)$.

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dx} &= 0,7(20 - T) \\
\frac{1}{20 - T} \frac{dT}{dx} &= 0,7 \qquad T \neq 20 \\
\frac{1}{20 - T} dT &= 0,7dx \\
\int \frac{1}{20 - T} dT &= \int 0,7dx \\
-\ln|20 - T| &= 0,7x + c_1 \\
\ln|20 - T| &= -0,7x - c_1 \\
|20 - T| &= e^{-0,7x - c_1}
\end{aligned}$$

Da $T(0) = 80$ er $20 - T < 0$ og vi vælger den negative løsning:

$$\begin{aligned}
20 - T &= -c \cdot e^{-0,7x} \qquad c = e^{-c_1} \\
T(x) &= 20 + c \cdot e^{0,7x}
\end{aligned}$$

Konstanten c beregnes på samme måde som tidligere.

13.4.4. Eksistens og entydighed. Vi er nu i stand til at bevise:

Sætning 13.20. *Differentialligningen:*

$$y' = b - ay, \qquad a, b \neq 0$$

Har løsningerne:

$$y(x) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Ethvert begyndelsesværdiproblem har én og kun en løsning. Differentialligningen har en ligevægtstilstand, $y = \frac{b}{a}$*, der er to tilælde:*

(1) *Hvis* $a > 0$*, så er ligevægtstilstanden stabil.*
(2) *Hvis* $a < 0$*, så er ligevægtstilstanden ustabil.*

Påstandene om ligevægtstilstandene har vi vist i det foregående afsnit. Så vil vil bevis, at alle løsninger har det angivne udseende, og vi vil bevise udsagnet om begyndelsesværdiproblemet. Vi bemærker, at vi ikke vil benytte metoden separation af de variable. Vi vil i stedet igen benytte metoden med integrerende faktor.

Bevis. Vi omskriver vores ligning:

$$\begin{aligned} y' &= b - ay \\ y' + ay &= b \end{aligned}$$

Vi vil nu gange igennem med e^{ax}, for at få ligningen til at ligne produktregnereglen på venstre side.

$$\begin{aligned} y' + ay &= b \\ y' \cdot e^{ax} + y \cdot ae^{ax} &= b \cdot e^{ax} \\ (y \cdot e^{ax})' &= be^{ax} \end{aligned}$$

Vi tager stamfunktionen på begge sider:

$$\begin{aligned} \int (y \cdot e^{ax})' \, dx &= \int be^{ax} dx \\ y \cdot e^{ax} + c_1 &= \frac{b}{a} e^{ax} + c_2 \end{aligned}$$

Vi samler integrationskonstanterne:

$$y \cdot e^{ax} = \frac{b}{a} e^{ax} + c$$

Vi ganger igennem med e^{-ax}:

$$
\begin{aligned}
y \cdot e^{ax} \cdot e^{-ax} &= \frac{b}{a} e^{ax} \cdot e^{-ax} + ce^{-ax} \\
y \cdot e^{0} &= \frac{b}{a} e^{0} + ce^{-ax} \\
y &= \frac{b}{a} + ce^{-ax}
\end{aligned}
$$

Dermed har vi fundet vores løsning.

Antag, at vi har begyndelsesværdien (x_0, y_0). Vi viser, at c er entydigt bestemt af dette punkt.

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \frac{b}{a} + c \cdot e^{ax_0} \\
y_0 - \frac{b}{a} &= c \cdot e^{-ax_0} \\
\frac{y_0 - \frac{b}{a}}{e^{-ax_0}} &= c
\end{aligned}
$$

Dermed har ethvert begyndelsesværdiproblem (x_0, y_0) én og kun en løsning, hvor

$$
c = \frac{y_0 - \frac{b}{a}}{e^{-ax_0}}.
$$

□

13.5. Den Logistiske ligning $y' = ay(M - y)$

I dette afsnit vil vi behandle den logistiske differentialligning

$$
y' = ay \cdot (M - y) \qquad a \neq 0 \qquad M > 0
$$

Denne differentialligning er den første ligning, hvor der er flere ligevægtstilstande. Og så er den en ikke-lineær ligning. I definitionen af ligningen har vi krævet, at $M > 0$, hvilket strengt taget ikke er nødvendigt. Men de situationer, der giver mening i virkeligheden, der er M altid positiv.

Bemærkning 13.21. Undertiden støder man på ligningen:

$$
y' = y(b - ay).
$$

Denne ligning har dog en form, der meget sjældent finder anvendelse ud i virkeligheden, hvorfor vi forbigå den her. Ligningen kan laves om til standardligningen ved at sætte a uden for en parentes. Dermed er $M = \frac{b}{a}$.

Eksempel 13.22. Et eksempel på en situation, der kan modelleres med en logistisk ligning er rygtespredning. Antag, at vi har en skole med 600 elever. En dag er der en elev, der starter et rygte. Det vil sige, til at begynde med kender én elev rygtet. Vi antager også, at rygtet er af en sådan karakter, at de andre elever vil sprede det.

Til at begynde med går udbredelsen af rygtet hurtigt, da ingen undtagen én kender rygtet. Men som tiden går vil flere og flere være bekendt med rygtet, og der vil gå længere og længere tid mellem, at de støder på en som ikke kender rygtet. Når alle 600 elever kender rygtet stopper processen.

Dermed afhænger hastigheden rygtet spredes med af antallet af personer, der kender rygtet og antallet af personer, der endnu ikke har hørt rygtet.

Vi indfører nogle betegnelser: Antallet af personer, der har hørt rygtet betegnes med y. Antallet af personer, der maksimalt kan komme til at kende rygtet betegnes med M. Dermed er hastigheden for rygteudbredelsen y', målt i antal personer pr. time *proportional* med antallet, der kender rygtet y og antallet, der endnu ikke kender rygtet $M - y$. Vi kalder *proportionalitetskonstanten* for a. Ligningen bliver:

$$y' = a \cdot y \cdot (M - y)$$

Hvis vi antager, at $a = 0,0007$, så får vi ligningen:

$$y' = 0,0007 \cdot y \cdot (600 - y)$$

Den generelle løsningsformel for den logistiske ligning er:

$$y(x) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-aMx}} \tag{13.10}$$

Vi indsætter vores værdier, og får:

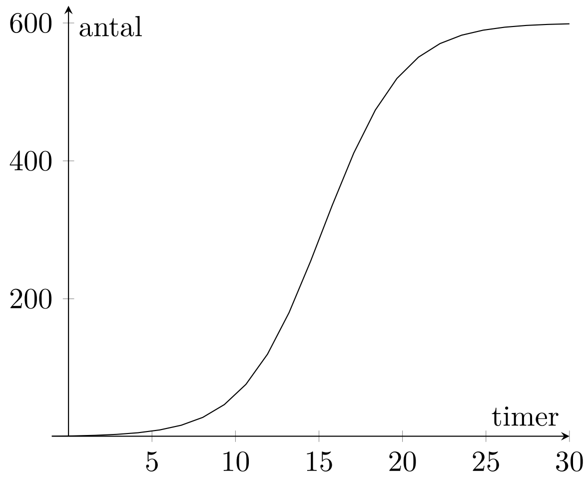
$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{600}{1 + c \cdot e^{-0,0007 \cdot 600 \cdot x}} \\ y(x) &= \frac{600}{1 + c \cdot e^{-0,42 \cdot x}} \end{aligned}$$

Nu mangler vi at bestemme c. Men vi ved, at til at begynde med var der 1 person, der kender rygtet, så vi løser $y(0) = 1$:

$$\begin{aligned} y(0) = \frac{600}{1 + c \cdot e^{-0,42 \cdot 0}} &= 1 \\ \frac{600}{1 + c \cdot e^{0}} &= 1 \\ \frac{600}{1 + c} &= 1 \\ 600 &= 1 + c \\ c &= 599 \end{aligned}$$

Dermed bliver vores løsning:

$$y(x) = \frac{600}{1 + 599 \cdot e^{-0,42 \cdot x}}$$



Figur 13.6. Graf for $y(x) = \frac{600}{1+599e^{-0,42\cdot x}}$. Bemærk, at grafen flader ud ved omkring $y = 600$, og at det tager over 24 timer før det maksimale antal nås.

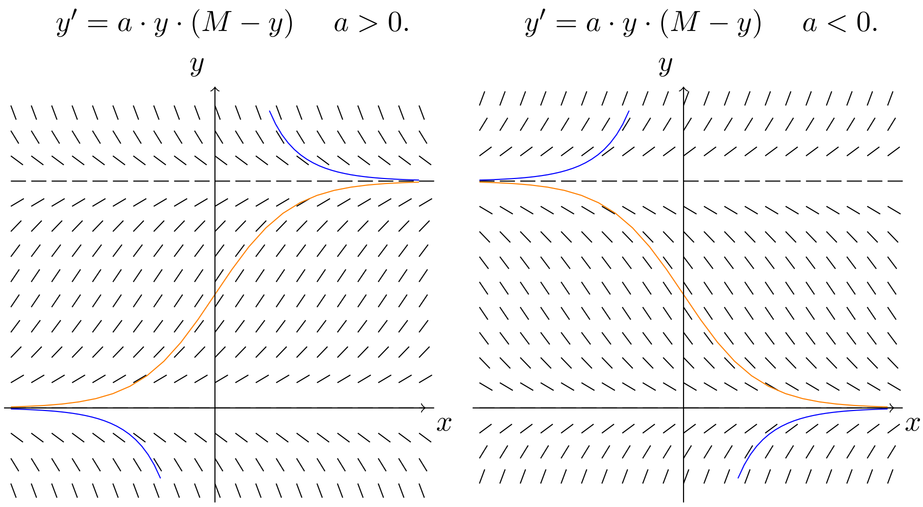
En graf for løsningen kan se på figure 13.6.

Der er en særlig egenskab ved logistiske funktioner. Den største vævksthastighed kan findes ved at se på andenaksen. Nemlig, ved at finde $\frac{M}{2}$. Førstekoordinatet kan så findes ved at aflæse grafen eller løse ligningen $y(x) = \frac{M}{2}$. Det sidste vil vi gøre:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{M}{2} \\
\frac{600}{2} &= \frac{600}{1 + 599 \cdot e^{-0,42\cdot x}} \\
\left(1 + 599 \cdot e^{-0,42\cdot x}\right) \cdot 300 &= 600 \\
1 + 599 \cdot e^{-0,42\cdot x} &= 2 \\
599 \cdot e^{-0,42\cdot x} &= 2 - 1 \\
e^{-0,42\cdot x} &= \frac{1}{599}
\end{aligned}$$

Bruger den naturlige logaritme på begge sider

$$\begin{aligned}
-0,42\dot{x} &= \ln\left(\frac{1}{599}\right) \\
x &= \frac{\ln\left(\frac{1}{599}\right)}{-0,42} = \frac{-\ln(599)}{0,42} = \frac{\ln(599)}{0,42} \\
x &\approx 15,23
\end{aligned}$$



Figur 13.7. Linjeelementdiagrammer for ligningerne $y' = ay(M - y)$. Tilfældet $a > 0$ til venstre har en voksende central graf, mens tilfældet til højre $a < 0$ har en aftagende central graf.

Det vil sige, at når der er gået 15,23 timer, så når hastigheden sit højeste. Faktisk får vi en formel for x givet:

$$x = \frac{\ln(c)}{a}$$

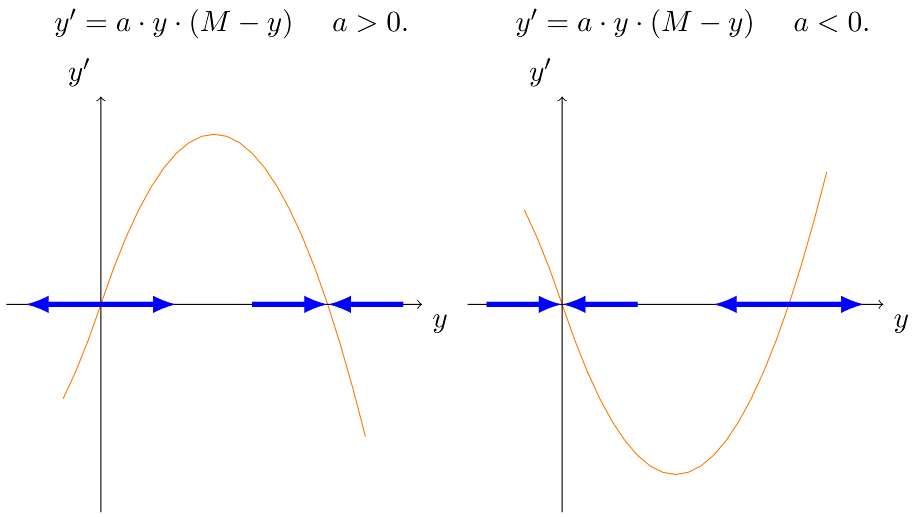
13.5.1. Kvalitativ analyse. Vi vil nu lave en kvalitativ analyse af den logistiske differentialligning.

Vi begynder med, at se på linjeelementdiagrammerne for ligningen. På figur 13.7 kan vi se to diagrammer. Til venstre har vi situationen $a > 0$, hvilket er den oftest forekommende. Der er en gul løsningskurve, der løber mellem to lilla vandrette linjer, som er vores ligevægtstilstande. Den blå grad svare til en løsning, begyndelsesværdien ligger uden for intervallet $[0; M]$ på andenaksen. Ligevægtstilstanden $y = 0$ ser ud til at være ustabil og ligevægtstilstanden $y = k \neq 0$, ser ud til at være stabil.

Modsat ser det ud til højre. Her er den gule graf aftagende og de to ligevægtstilstande har byttet om på om de er stabile eller ej. Der stadig en blå graf, der ligger uden for intervallet $[0; M]$ på andenaksen.

Vi kan nu begynde selve analysen. Vi sætter $y' = 0$, og løser den ligning vi får frem.

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ 0 &= a \cdot y \cdot (M - y) \end{aligned}$$



Figur 13.8. Fasediagrammer for $y' = ay(M - y)$. Til venstre situationen hvor $a > 0$, til højre situationen $a < 0$.

Fra nulreglen:

$$
\begin{aligned}
a \cdot y &= 0 \qquad & M - y &= 0 \\
y &= 0 \qquad & y &= M
\end{aligned}
$$

Med andre ord, så har vi to ligevægtstilstande. En når $y =$, og en når $y = M$. Før vi kan sige noget om stabiliteten af ligevægtstilstandene, må vi se på selve differentialligningen. Vi ganger ind i parentesen og får:

$$
\begin{aligned}
y' &= ay(M - y) \\
y' &= aMy - ay^2
\end{aligned}
$$

Det vil sige, at differentialligningen er et andengradspolynomium i variablen y. Så hvis vi plotter et $y - y'$-diagram, bør vi forvente at se parabler.

På figur 13.8 kan vi se de to tilfælde $a > 0$ til venstre, og $a < 0$ til højre. Vi ser kun på den venstre situation. Når $y < 0$, så er $y' < 0$, og y er aftagende. Når $0 < y < M$ så er $y' > 0$, og y er voksende. Når $y > M$, så er $y' < 0$, og y er aftagende. Dermed er $y = 0$ en ustabil ligevægtstilstand, og $y = M$ en stabil ligevægtstilstand.

I det venstre fasediagram er der et toppunkt svarende til der, hvor væksthastigheden er størst. Hvilket kommer sig af, at vi har væksthastigheden op af andenaksen. Da toppunktet altid ligger midtvejs mellem de to nulpunkter $y = 0$ og $y = M$, så må det være når $y = \frac{M}{2}$, at det sker. Vi kan samle denne observation og nogle flere i følgende sætning.

Sætning 13.23. *Differentialligningen:*

$$y' = ay(M - y),$$

antager den største væksthastighed, når:

(1) $y = \frac{M}{2}$
(2) $x = \frac{\ln(c)}{a}$
(3) *og væksthastigheden er* $y' = \frac{aM^2}{4}$

Bevis. Vi har argumenteret for (1) oven over. Vi har lavet et taleksempel, som kan laves om til en udledning af (2). Så vi viser kun (3).

I differentialligningen indsættes $y = \frac{M}{2}$:

$$\begin{aligned}
y' &= ay(M - y) \\
y' &= a\frac{M}{2}\left(M - \frac{M}{2}\right) \\
y' &= a\left(\frac{M^2}{2} - \frac{M^2}{4}\right) \\
y' &= a\left(\frac{2M^2}{4} - \frac{M^2}{4}\right) \\
y' &= a\left(\frac{2M^2 - M^2}{4}\right) \\
y' &= \frac{aM^2}{4}
\end{aligned}$$

□

Af de tre ligninger er det normalt kun den første, der finder anvendelse til dagligt.

13.5.2. Eksistens og entydighed. Det er nu muligt at lave et bevis for eksistens og entydighed af løsningen til den logistiske differentialligning. Efter beviset vil vi sige noget om den løsning, der ikke har en begyndelsesværdi med andenkoordinat i intervallet $[0; M]$.

Sætning 13.24. *Differentialligningen:*

$$y' = ay(M - y), \qquad a \neq 0, \qquad M > 0$$

Har løsningerne:

$$y(x) = 0 \text{ eller } y(x) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-aMx}}, \qquad \begin{cases} x \in \mathbb{R} & \text{hvis } c \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\ln(-c)}{aM}\right\} & \text{hvis } c < 0 \end{cases}$$

Ethvert begyndelsesværdiproblem har én og kun en løsning.

Differentialligningen har to ligevægtstilstande, $y = 0$ *eller* $y = M$*, der er to tilfælde:*

(1) *Hvis $a > 0$:*
   (a) *Så er ligevægtstilstanden $y = 0$ ustabil.*
   (b) *Så er ligevægtstilstanden $y = M$ stabil.*
(2) *Hvis $a < 0$:*
   (a) *Så er ligevægtstilstanden $y = 0$ stabil.*
   (b) *Så er ligevægtstilstanden $y = M$ ustabil.*

Bevis. Vi vil lave et bevis med separation af de variable. Vi antager, at $y \neq 0$, og $y \neq M$.

$$y' = ay(M-y)$$
$$\frac{1}{y(M-y)}y' = a$$

Ganger med M

$$\frac{M}{y(M-y)}y' = aM$$

Lægger 0 til i tælleren på venstre side

$$\frac{M-y+y}{y(M-y)}y' = aM$$

Deler brøken op

$$\left(\frac{M-y}{y(M-y)} + \frac{y}{y(M-y)}\right)y' = aM$$
$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{M-y}\right)y' = aM$$
$$\frac{1}{y}y' + \frac{1}{M-y}y' = aM$$

Vi benytter, at $(-\ln(M-y))' = \frac{-1}{M-y} \cdot (-y') = \frac{1}{M-y}y'$. Vi integrerer:

$$\int \frac{1}{y}y'dx + \int \frac{1}{M-y}y'dx = \int aMdx$$
$$\ln|y| - \ln|M-y| = aMx + c_1$$
$$\ln\left|\frac{y}{M-y}\right| = aMx + c_1$$
$$e^{\ln\left|\frac{y}{M-y}\right|} = e^{aMx+c_1}$$
$$\left|\frac{y}{M-y}\right| = c_2 \cdot e^{aMx}, \qquad c_2 = e^{c_1} > 0$$

Der nu to tilfælde $\frac{y}{M-y} > 0$, og $\frac{y}{M-y} < 0$. Hvis $0 < y < M$ er brøken positiv. Hvis derimod $y < 0$ eller $y > M$, så er brøken negativ. Det giver to muligheder:

$$\frac{y}{M-y} = c_2 \cdot e^{aMx} \qquad\qquad \frac{y}{M-y} = -c_2 \cdot e^{aMx}$$

Der vælges en ny konstant $c_3 = \pm c_2 \neq 0$. Med andre ord $c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vi isolerer y:

$$\begin{aligned}
\frac{y}{M-y} &= c_3 \cdot e^{aMx} \\
\frac{y}{M-y} \cdot \frac{1}{c_3} e^{-aMx} &= c_3 \cdot e^{aMx} \cdot \frac{1}{c_3} e^{-aMx} \\
\frac{y}{M-y} \cdot c e^{-aMx} &= 1, \qquad c = \frac{1}{c_3} \\
\frac{M-y}{y} \cdot \frac{y}{M-y} \cdot c e^{-aMx} &= \frac{M-y}{y} \\
c e^{-aMx} &= \frac{M-y}{y} \\
c e^{-aMx} &= \frac{M}{y} - 1 \\
1 + c e^{-aMx} &= \frac{M}{y} \\
y \cdot \left(1 + c e^{-aMx}\right) &= M \\
y &= \frac{M}{1 + c e^{-aMx}}
\end{aligned}$$

Når $c > 0$, så er nævneren positiv, da det er et plusstykke med positive tal. Derimod, hvis $c < 0$ kan nævneren blive 0. Vi sætter nævneren lig med 0, og løser for x:

$$\begin{aligned}
1 + c \cdot e^{-aMx} &= 0 \\
c \cdot e^{-aMx} &= -1 \\
e^{-aMx} &= -\frac{1}{c}
\end{aligned}$$

Da $c < 0$, så er $-\frac{1}{c} > 0$, og vi kan bruge ln på begge sider

$$\begin{aligned}
\ln\left(e^{-aMx}\right) &= \ln\left(-\frac{1}{c}\right)\\
-aMx &= \ln\left(-\frac{1}{c}\right)\\
x &= \frac{\ln\left(-\frac{1}{c}\right)}{-aM}\\
x &= \frac{\ln(1) - \ln(-c)}{-aM}\\
x &= \frac{\ln(-c)}{aM}
\end{aligned}$$

Vi mangler, at vise entydighed af løsninger til begyndelsesværdiproblemer. Undervejs i udledningen oven for fik vi en ligning, vi kan bruge: $ce^{-aMx} = \frac{M-y}{y}$. Hvis vores begyndelsesværdi er (x_0, y_0), får vi:

$$\begin{aligned}
ce^{-aMx_0} &= \frac{M - y_0}{y_0}\\
ce^{-aMx_0}e^{aMx_0} &= \frac{M - y_0}{y_0}e^{aMx_0}\\
c &= \frac{M - y_0}{y_0}e^{aMx_0} \qquad (13.11)
\end{aligned}$$

Vi ser, at hvis $y = M$, så er $c = 0$. Hvilket fuldender beviset. □

13.6. Separation af de variable

Vi har i det ovenstående anvendt metoden separation af de variable en del gange, så formålet vil her være at samle op på teorien bag metoden.

Vi vil indfører to formel udtryk: $h(y)$ og $g(x)$. Her afhænger funktionen h kun af funktionen y, og funktionen g afhænger kun af den uafhængige variabel x. Vi kan nu definere hvad vi forstår ved en separabel differentialligning.

Definition 13.25. En differentialligning

$$y' = \mathcal{F}(y, x)$$

kaldes for *separabel*, hvis der findes funktioner h og g, så ligningen kan skrives på en af to følgende former:

$$y' = h(y) \cdot g(x) \qquad (13.12)$$

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)}, \qquad h(y) \neq 0 \qquad (13.13)$$

Bemærkning 13.26. Læg mærke til, at vi ikke kræver noget særligt af funktionerne h og g. Således kan en differentialligning godt være separabel uden, at der kan findes en løsning til ligningen. For eksempel, hvis funktionerne ikke er integrable.

Eksempel 13.27. For at se hvordan definitionen skal forstås, giver vi to eksempler. Det første er ligningen

$$y' = \sin(y) \cdot x^2$$

Her er $h(y) = \sin(y)$ og $g(x) = x^2$ de to funktioner, der udgør ligningen. Det er et eksempel på en ligning af typen 13.12. Det andet eksempel er

$$y' = \frac{x}{y^2 + 1}$$

Her er $g(x) = x$ og $h(y) = y^2 + 1$. Den sidste funktion er positiv, så betingelserne er overholdt. Her har vi et eksempel på en ligning af typen 13.13.

Et eksempel på en ikke separabel ligning er:

$$y' = \sin(y \cdot x)$$

Vi har udelukkende anvendt ligninger af typen 13.12, så vi giver et eksempel på en ligning, der er på typen 13.13.

Eksempel 13.28. Vi ser på ligningen

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Her antager vi, at y er en positiv funktion. Vi ganger y over:

$$y \cdot y' = x$$

Vi tager integralet på begge sider:

$$\begin{aligned}
\int y \cdot y' \; dx &= \int x \; dx \\
\frac{1}{2}y^2 + c_1 &= \frac{1}{2}x^2 + c_2 \\
y^2 &= x^2 + c_3, \qquad c_3 = c_2 - c_1 \\
y &= \pm\sqrt{x^2 + c_3}
\end{aligned}$$

Da vi antog, at y var en positiv funktion, har vi løsningen $y(x) = \sqrt{x^2 + c}$.

13.7. Ligningen $y' + a(x)y = b(x)$

Den sidste ligning vi ser på er en generalisering af ligningen $y' = b - ay$, her har vi blot funktioner i stedet for konstanter. Hvis vi skulle lave de undersøgelser vi har lavet for de andre ligninger med denne ny ligning, vil vi støde ind i, at det afhænger af funktionerne a og b. Vi vil dog bevise følgende:

Sætning 13.29. *Følgende differentialligning:*

$$y' + a(x) = b(x),$$

hvor y, a og b er funktioner med samme definitionsmængde, og hvor a og b er kontinuerte, har løsningerne:

$$y(x) = e^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x)}\ dx,$$

hvor A er stamfunktion til a.

Bevis. Da a og b er kontinuerte, har de stamfunktioner. Vi kalder stamfunktionen til a for A.

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Vi ganger med $e^{A(x)}$

$$y' \cdot e^{A(x)} + a(x) \cdot e^{A(x)} \cdot y = b(x) \cdot e^{A(x)}$$

Omvendt produktregneregel:

$$\begin{aligned}
\left(y \cdot e^{A(x)}\right)' &= b(x) \cdot e^{A(x)} \\
\int \left(y \cdot e^{A(x)}\right)'\ dx &= \int b(x) \cdot e^{A(x)}\ dx \\
y \cdot e^{A(x)} &= \int b(x) \cdot e^{A(x)}\ dx \\
y(x) &= e^{-A(x)} \int b(x) \cdot e^{A(x)}\ dx
\end{aligned}$$

□

Bemærkning 13.30. Hvis man slår op i en formelsamling kan man under tiden se følgende løsningsformel:

$$y(x) = e^{-A(x)} \int b(x) \cdot e^{A(x)}\ dx + c \cdot e^{-A(x)}$$

Forskellen ligger i om man opfatter integralet som noget, der har en løsning, hvor der hører en konstant til eller ej. For at vise, at den løsningsformel vi har giver det rigtige, så antag, at $b(x) \cdot e^{A(x)}$ har stamfunktionen $G(x) + c$, så vil vores løsning være:

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(G(x) + c \right).$$

Når $e^{-A(x)}$ ganges ind i parentesen vil vi få et led, der hedder: $c \cdot e^{-A(x)}$, hvilket viser, at de to formler er næsten identiske.

Del 4

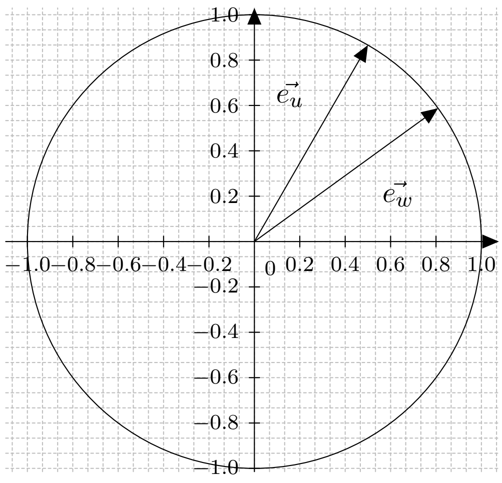
Bilag

Den logaritmiske sinusrelation

Vi ønsker at bevise følgende sinusrelation:

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Vi begynder med at se på to vektorer i enhedscirklen:



Vi har to vektorer: $\vec{e_u} = \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \end{pmatrix}$ og $\vec{e_w} = \begin{pmatrix} \cos(w) \\ \sin(w) \end{pmatrix}$, der begge har længden 1. Vi beregner determinanten mellem vektorerne. Først ved:

$$\begin{aligned}\det(\vec{e_w}, \vec{e_u}) &= |\vec{e_w}| \cdot |\vec{e_u}| \cdot \sin(u-w)\\ &= \sin(u-w)\end{aligned}$$

da længderne er 1, dernæst:

$$\begin{aligned}\det(\vec{e_w}, \vec{e_u}) &= \begin{vmatrix}\cos(w) & \cos(u)\\ \sin(w) & \sin(u)\end{vmatrix}\\ &= \cos(w)\sin(u) - \sin(w)\cos(u)\end{aligned}$$

Samlet får vi efter nogen omrokering:

$$\sin(u-w) = \sin(u)\cos(w) - \cos(u)\sin(w)$$

Da: $\cos(-x) = \cos(x)$ og $\sin(-x) = -\sin(x)$, kan vi udnytte at $+w = -(-w)$, og får:

$$\begin{aligned}\sin(u+w) = \sin(u-(-w)) &= \sin(u)\cos(-w) - \cos(u)\sin(-w)\\ &= \sin(u)\cos(w) + \cos(u)\sin(w)\end{aligned}$$

Dermed har vi også:

$$\sin(u+w) = \sin(u)\cos(w) + \cos(u)\sin(w)$$

Bemærkning A.1. På næsten samme måde som oven over kan man beregne prikproduktet mellem: $\vec{e_w}$ og $\vec{e_u}$. Og nå frem til:

$$\begin{aligned}\cos(u-w) &= \cos(u)\cos(w) + \sin(u)\sin(w)\\ \cos(u+w) &= \cos(u)\cos(w) - \sin(u)\sin(w)\end{aligned}$$

Vi kan nu komme frem til vores relation. Vi laver følgende beregning:

$$\begin{aligned}\sin(u+w) - \sin(u-w) &= \sin(u)\cos(w) + \cos(u)\sin(w) - (\sin(u)\cos(w) - \cos(u)\sin(w))\\ &= \sin(u)\cos(w) + \cos(u)\sin(w) - \sin(u)\cos(w) + \cos(u)\sin(w)\\ &= 2\cos(u)\sin(w)\end{aligned}$$

Det vil sige:

$$\sin(u+w) - \sin(u-w) = 2\cos(u)\sin(w)$$

Vi ønsker nu at erstatte $u+w$ med x og $u-w$ med y. Det betyder, at vi skal løse følgende ligningssystem for at kunne komme af med u og w:

$$\begin{aligned}u + w &= x\\ u - w &= y\end{aligned}$$

Vi trækker den nederste ligning fra den øverste:

$$\begin{aligned} u + w - (u - w) &= x - y \\ u + w - u + w &= x - y \\ 2w &= x - y \\ w &= \frac{x - y}{2} \end{aligned}$$

Ved at lægge de to ligninger sammen, kan vi få:

$$u = \frac{x + y}{2}$$

Dermed bliver:

$$\sin(u + w) - \sin(u - w) = 2\cos(u)\sin(w)$$

ved indsættelse til:

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x + y}{2}\right)\sin\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

Bemærkning A.2. Med samme fremgangsmåde kan det bevises at:

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x + y}{2}\right)\sin\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

Ikke-standardløsninger for den logistiske ligning

Vi vil analysere de løsninger, der ligger uden for området mellem 0 og M. Vi kan konkluderer, hvis $0 < y_0 < M$, så er $c > 0$, hvis $y_0 < 0$ eller $y_0 > M$ så er $c < 0$ og hvis $y_0 = M$, så er $c = 0$.

Hvis vores y_0 opfylder $y_0 < 0$ eller $y_0 > M$, kalder vi løsningerne for ikke standardløsninger. Det centrale for ikke standardløsningerne er, at der er en lodret linje givet ved:

$$\tilde{x} = \frac{\ln(-c)}{aM} = \frac{\ln\left(-\frac{1}{c}\right)}{-aM},$$

hvor løsningerne ikke er defineret. Vi vil forsøge at beskrive hvad der sker når løsningens graf kommer tæt på den lodrette linje. Vi ser på den generelle løsning og indsætter $\tilde{x} + h = \frac{\ln\left(-\frac{1}{c}\right)}{-aM} + h$. For at se hvad der sker når vi lader h gå mod nul.

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{M}{1+c\cdot e^{-aMx}} \\
y\left(\frac{\ln\left(-\frac{1}{c}\right)}{-aM}+h\right) &= \frac{M}{1+c\cdot e^{-aM\left(\frac{\ln\left(-\frac{1}{c}\right)}{-aM}+h\right)}} \\
y\left(\tilde{x}+h\right) &= \frac{M}{1+c\cdot e^{\ln\left(-\frac{1}{c}\right)-aMh}} \\
y\left(\tilde{x}+h\right) &= \frac{M}{1+c\cdot e^{\ln\left(-\frac{1}{c}\right)}\cdot e^{-aMh}} \\
y\left(\tilde{x}+h\right) &= \frac{M}{1+c\cdot\left(-\frac{1}{c}\right)\cdot e^{-aMh}} \\
y\left(\tilde{x}+h\right) &= \frac{M}{1-e^{-aMh}}
\end{aligned}
$$

I det følgende vil vi antage, at $a>0$. Det betyder at $-aM<0$ og der med er e^{-aMh} en aftagende eksponentialfunktion i variablen h. Vi begynder med at antage, at $h>0$. Hvis det er tilfældet er $e^{-aMh}<1$, og dermed er $0<1-e^{-aMh}<1$. Hvis M divideres med et positivt tal mindre end 1, så vil vi få et tal større end M. Det vil sige, $y(\tilde{x}+h)>M$, når $h>0$.

På den anden side, hvis $h<0$, så vil $e^{-aMh}>1$ og $1-e^{-aMh}<0$. Dermed vil M blive divideret med et negativt tal og $y(\tilde{x}+h)<0$.

Vi kan nu komme med en konklusion. Der gives kun en ikke standardløsning. hvis $a>0$, så er $y>M$ når $x>\tilde{x}$ og $y<0$, når $x<\tilde{x}$.

Vi mangler at undersøge hvad der sker når h går mod nul. Vi deler op i venstre og højre grænser. Uanset hvad, så har vi $\lim_{h\to 0} e^{-aMh}=1$. Det vil sige, at

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{M}{1-e^{-aMh}}=-\infty$$

Da $1-e^{-aMh}<0$ for alle $h<0$. Ligeledes har vi:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{M}{1-e^{-aMh}}=\infty$$

Da $1-e^{-aMh}>0$ for alle $h>0$. Denne diskussion samles i en sætning:

Sætning B.1. *Løsningerne til den logistiske differentialligning med begyndelsesværdi $y_0<0$ eller $y_0>M$ har definitionsmængde $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\ln(-c)}{aM}\}$. Den lodrette linje $\tilde{x}=\frac{\ln(-c)}{aM}$ er en asymptote til løsningernes graf. Der er to tilfælde:*

(1) *Hvis $a>0$:*

(a) *Så for alle* $x < \tilde{x}$*, så er* $y < 0$ *og*

$$\lim_{x \to \tilde{x}^-} y(x) = -\infty$$

(b) *Så for alle* $x > \tilde{x}$*, så er* $y > M$ *og*

$$\lim_{x \to \tilde{x}^+} y(x) = \infty$$

(2) *Hvis* $a < 0$*:*

(a) *Så for alle* $x < \tilde{x}$*, så er* $y > M$ *og*

$$\lim_{x \to \tilde{x}^-} y(x) = \infty$$

(b) *Så for alle* $x > \tilde{x}$*, så er* $y < 0$ *og*

$$\lim_{x \to \tilde{x}^+} y(x) = -\infty$$

Man bør gøre sig klart, at disse ikke standardløsninger, netop ikke er noget man støder på i anvendelser, hvorfor det ovenstående kan ses som en undersøgelse for sin egen skyld.

Indeks