**Ортогонални Сигнали. Обобщен ред на Фурие.**

Ортогонални сигнали – 2 сигнала, u v, са ортогонални, ако тяхното скаларно произведение и взаимната им енергия са равни на 0(1.1), т.е. те са независими.

1.1 (u,v) = ∞∫-∞ u(t)v(t)dt =0 изразява приликата м/у първият и вторият сигнал

Ортогоналните сигнали се използват при анализ на сложни сигнали или синтез на система от сигнали.При анализа се извършва разлагане на един сложен сигнал на сума от по-прости и независими сигнали, а при синтеза се създава с-ма от сигнали, като с това се осигурява по-голяма достоверност на информацията.

(u,v) = |u||v|.cosФ = 0

В многомерното пространство на сигналите може да се разгледа система за ортогонални сигнали. В този случай за всяка една(която и да е) двойка сигнали трябва да е изпълнено условието за ортогоналност.

{u1,u2,u3…un} --🡪 [t1,t2] - набор на базовите функции

(ui , ,uj) = Km, за i=j, 0, za i !=j. Km е число съответстващо на собствената Енергия на сигнала.

Кm=Eu при i=j =>Ui=Uj, тогава (Ui,Ui) = ∞∫-∞u2(t)dt.

При Km=1 (Ui,Uj)= {1 , при i=j ;

0, при i≠j} (3) ортогонален базис

Обобщен ред на Фурие - Разглеждаме {U1,U2,...,Un}, която отговаря на (3) и е ортогонален базис. Един сложен сигнал S(t) се представя като линейна комбинация от прости сигнали.

S(t)= ∑ ∞i=0 Ci.li; li->вектори{U1,U2,...,Un}

S(t)= ∑ ∞i=1 Ci.Ui(t) - обобщен ред на Фурие.

При решаване на конкретни задачи, S(t) и U(t) са зададени и се търсят коефициентите С = ? като i=1,2,3,4…n За решението използваме базисната функция Un(t)

S(t)= ∑ ∞i=1 Ci.Ui(t) /\*Uk(t)

t2∫t1Uk(t)S(t) dt = ∑ ∞i=1 Ci t2∫t1Ui(t).Uk(t)dt

Тъй като сигналите са ортогонални – ще остане само членът с номер i=k (U:Uk != 0)

Ck= t2∫t1Uk(t)S(t) dt /  t2∫t1Uk(t)2 dt

Ако системата е ортогонална е изпълнено условие (3) => Ck= t2∫t1Uk(t)S(t) dt

**Апроксимиране на периодичен сигнал чрез тригонометричен ред на Фурие. Равенство на Парсевал.**

S(t) = S(t+nT) , n=1,2,... T-период на повторение Т = 1/f

S(t) = A\*sin nwt = A\*coswt, w=2πf = 2π/T

Смисълът е да се представи един периодичен сигнал само ч/з ф-циите sinwt и coswt, който са базови ортогонални функции Uk(t) от Обобщен Ред на Фурие. Условието е ф-цията, която описва сигнала s(t) да отговаря на условието на Дирихле:

-S(t) да е непрекъсната или с краен брой точки на прекъсване от I-ти род за разглеждания краен интервал∞∫-∞S(t)dt (има краен брой точки).

S(t) = a0/2 + ∑ ∞n=1 an.cos nwt + bn sin nwt - Пълна форма на реда на Фурие. а0, аn, bn - коеф. в реда на Фурие.

а0=2/Т Т/2∫-Т/2S(t)dt - описва постоянната съставка на сигнала.

аn=2/ Т Т/2∫-Т/2 S(t)cos nwt dt - определя четните съставки от реда на Фурие

bn=2/Т Т Т/2∫-Т/2S(t)sin nwt dt - определя нечетните съставки.

S(t) = a0/2 + ∑ ∞n=1 Аn.cos(nwt + φn) - кратка форма на реда на Фурие

Аn=sqrt(an2+bn2) - определя ампл.-честотния спектър на сигнала

φn=аrctg bn/an - определя фазово-честотния спектър на сигнала.

*АЧФ – функционалната зависимост на амлитудата от честотата(амплитудна честотна спектрална диаграма)*

*АЧФ – функционалната зависимост на фазата от честотата(фазово честотна спектрална диаграма)*

**Особености на АЧС и ФЧС:**

1)Периодичния сигнал се представя чрез безброй хармонични съставки с амплитуди An и фази φn, разположени по оста на честотата през интервал Δw=w=2π/T

2)Когато Т↑, w↓ и спектралните линии се сгъстяват и обратното, когато Т↓, w↑ спектралните линии се раздалечават.

3)Спектралните диаграми на АЧС и ФЧС показват, че спектърът на периодичните сигнали е прекъснат (дискретен) т.е. на всяка честота отговаря определена А и Ф

4)След определен брой честотни съставки амплитудите и фазите стават пренебрежимо малки, т.е. редът от безкраен се превръща в краен.

5)Спектърът обхваща условно две области:

-ниско честотна - тя представя информативна/основната част от сигнала

-високо честотна - тя представя специфичните особености на сигнала/фронтове,шумове/.

**Свойства на реда на Фурие:**

1)Ако + и - стойности на ф-цията S(t) за един период описват еднакви площи, то а0=0;

2)Ако S(t) е четна функция, bn=0; т.е. S(-t)

3)Ако S(t) е нечетна функция, an=0; -S(-t)

4)Транслирането на ф-цията по абсцисната ос(x) изменя само фазата на сигнала и само ФЧС;

5) Транслирането на ф-цията само по ординатната ос(y) изменя постоянната съставка, но не оказва влияние в/у амплитудите и фазите на отделните спектрални съставки;

6) Ако S(t) може да се представи като сума от по-прости сигнали, то an и bn са суми от коефициентите на съставните сигнали.

Разпределение на мощностите в спектъра на периодични сигнал:

Рср.=1/Т Т∫0S2(t)dt. Ако се замести S(t) с кратката форма на реда на Фурие се получава Рср.=(а02/4).1/2 ∑ ∞n=1 Аn2.

Pcp(средната мощност). на периодичния сигнал е равна на сумата от Рср. на всички хармонични и мощността на постоянната съставка.Средната мощност не зависи от първоначалната фаза на съставките.

**Комплексна форма на реда на Фурие.Спектър на непериодичен сигнал.**

Използва се, защото често системите се описват с функции на комплексни променливи.

Изчисленията са удобни, но по-бавни в сравнение с други методи. Представяме S(t) като сума от система ортонормирани функции като използваме обобщения ред на Фурие.

S(t)=∑ ∞n=-∞ C"n fn(t)

fn={ ...e[-2jwt],e[-jwt],1,e[jwt],e[2jwt],...}

S(t)= ∑ ∞n=-∞ C’ejnwt - комплексна форма на реда на Фурие.

C’ = 1/T Т/2∫-Т/2 S(t) e-jnwt dt - компл. Амплитуда на харм.съставки.

C’ = |C’| ejфn = Cn(cosфn - jsinфn) = an - jbn

|C’| = Cn = sqrt(an2 + bn2) комплс ампл. Честотен спектър( АЧС).

Фn = - arctg(bn/an) компл. Фазово честотен спектър ( ФЧС).

**Особености на спектр. диаграма на компл. ред на Фурие:**

1)Лявата част на диаграмата съдържа отрицателни честоти, които нямат физически смисъл;

2)Сn=An\*2 => An=Cn/2;

3) АЧС и ФЧС са дискретни тоест на честотата отговаря определена амплитуда и фаза.

**Спектър на непрериодични сигнали се разглежда при следните условия:**

**Схеми за периодичен и непериодичен:**

1)Непер. сигнал се получава от периодичен, ако допуснем, че Т->∞;

2)Интервалът м/у двете дискретни честоти Δw=w=2п/Т, при Т->∞става w(непрекъснат);

3)1/Т при Т->∞---> dw/п;

4)С‘n -> dC;

-T/2 до T/2 -> -∞ до ∞

dC=1/п [∞∫-∞S(t).e-jwt dt]dw

S’(w)= ∞∫-∞S(t).e-jwt dt - право преобразуване на Фурие. (ППФ) То описва спектралната ф-ция на сигнала. [V/Hz]

S(t)= 1/2п ∞∫-∞ S’(t).еjwt dw - обратно преобразуване на Фурие. (OПФ)

|S’| = sqrt(Sre(w)2 + Sim(w)2) (*АЧС*).

Ф(w) = - arctg(Sim(w)/ Sre (w)) ( *ФЗЧ*).

ППФ и ОПФ позволяват да се установи връзка м/у спектъра и продължителността на сигнала. Сигнали с ограничена продължителност имат неограничен спектър и обратно.

**Корелационни функции на сигналите. Свойства**

Correlation – съотношение – търсим връзка между сигналите (във времето)

Връзката между стойностите на сигналите в различни моменти от времето се оценява количествено чрез корелационните функци.

Авто корелационни функции АКФ (Autocorrelation function)

АКФ на аналогови сигнали

С АКФ се оценява връзката (корелацията) между един сигнал S(t) с крайна продължителност и неговото копие S(t - τ) отместено от времето със закъснение τ.

Ѱ(τ) = (1.1) -> за аналогов периодичен сигнал

Ѱ(τ) = (1.2) -> за аналогов непериодичен сигнал

При τ =0

Ѱ(τ) = = -> за периодичен сигнал средната мощност на сигнала

Ѱ(τ) = = Е -> АКФ при непериодичен сигнал има смисъл по енергията на сигнала

Кореломер –

АКФ на дискретни сигнали -> ДАКФ

S(t) -> S(kT)

τ -> nT n – цяло число – показва броя на дискретните като определят отместването

S(t – τ) -> S[ (k-n)T ]  
 -> ∑

Ѱ(nT) = (1.3) -> ДАКФ на периодичен сигнал

Ѱ(nT) = (1.4) -> ДАКФ на непериодичен сигнал

Основни параметри на АКФ

а) коефициент на корелация -> R(τ); наричан още нормирана АКФ

R(τ) =

=

R() ≈ 0 -> сигналите са некорелирани (нямат връзка помежду си)

R() ≈ 1 -> сигналите са силно корелирани (нямат връзка помежду си)

R() е число и с удобна мярка за сравняване на АКФ на един сигнал и неговото копие.

б) интервал на корелация - – за който коеф. на корелация R() = 0.05 0.1

Времето на корелация е от съществено значение при дискретизация на случайни сигнали във връзка с тяхната цифрова обработка.

Интервал на дискретизация

Ако не е изпълнено, отделните дискрети на сигнала са независими (некорелирани) и възстановяването му е невъзможно.

Свойства на АКФ

АКФ е четно по отношение на

Началната стойност на АКФ е нейната максимална стойност

Ѱ(0) = (E) за непериодични

за периодични

АКФ на периодичните сигнали и също периодична функция, но с аргумент . Използва се при защита от шумове като АКФ на шума клони към 0. Т.е. с времето сигнала и шума стават некорелирани.

Ако един периодичен сигнал е сума от множество съставки неговата АКФ е сума от АКФ на отделните съставки

На даден сигнал отговаря напълно определена АКФ, но обратното не е вярно, т.е. по АКФ не можем да възстановим сигнал.

За определяне на един сигнал е необходимо да познаваме АЧС И ФЧС, а АКФ има връзка само с АЧС => могат да съществуват различни сигнали с една и съща АКФ.

ВКФ – взаимно корелационна функция – тя показва връзката между два сигнала, изместени във времето с τ

() = (2.1) -> ВКФ за периодични сигнали – сигналите да имат един и същ период!!!

() = (2.2) –> ВКФ за непериодични сигнали

ДВКФ на периодичен сигнал:

= (2.3)

= (2.4)

Коеф на ВКФ - () =

Свойства на ВКФ

ВКФ не винаги е четна функция

ВКФ не е задължително max при – това зависи от конкретните сигнали

При ВКФ – взаимна средна мощност на два периодични сигнала или взаимната енергия на двата непериодични сигнала – това определя

При размяна на местата на и се получават различни корелационни функции

*ВКФ на два периодични сигнала с еднаква честота но с различна фаза е също периодична функция на*

*Когато 2 периодични хармонични сигнала са с кратни честоти те се ортогонални и следователно тяхната ВКФ = 0, тоест те са некорелирали.*

**Взаимна спектрална плътност. Теорема на Релей**

**Взаимна спектрална плътност** – чрез нея се съди за степента на взаимодействието и сигналите в енергийно отношение и в определена част от спектъра. Ще разгледаме 2 сигнала – u(t) и v(t).Във времевата област тяхното количествено взаимодействие се определя от скаларното им произведение.

 (1) –> скаларно произведение

За разглеждането им в честотната област използване обратното преобразуване на Фурие.

 (2)

Заместваме 2 в 1 и се получава



Вторият интеграл изразява спектралната функция на сигнала , но при отрицателен аргумент, т.е:

 (4) -> обобщена формула на Релей

() = Re []

(u,v) = (5) Теорема на Релей

W (ω) – взаимна спектрална плътност на двата сигнала и е свързана с разпределението на енергиите им. Нарича се още взаимен енергиен спектър.

Колкото по-слабо е препокриването им на спектрите на двата сигнала, т.е W (ω) = min , толкова по-добре се различават двата сигнала.

**Енергиен спектър**

u(t) = v(t) -> съвпадат => са идентични



 (6) -> равенство на Релей

(ω) – показва разпределението на енергията в спектъра на сигнала и се нарича енергиен спектър.

[(ω)] -> [амплитуда/честота] -> [V/Hz]

[(ω)] -> [/честота] -> [/Hz]

Енергиен спектър - Чрез използване на енергийния спектър отпада информацията за фазата на сигналите и това е удобство при разглеждане на случайни сигнали.

**Връзка между корелационната** функция **и енергийния спектър на сигнала**

*Ако това е изпълнено тогава в спектралната област на S(u)*

*Тук…*

. .

=

**(1) -> връзката между корелационната функция и енергийния спектър на сигнала.**

**= (2) -> връзка между енергийния спектър и корелационната функция**

Теорема на Винер-Хинчин

Важни свойства:

Тъй като енергийният спектър има връзка с корелационната функция, то на различни по форма сигнали имащи еднакви амплитудно честотни спектри съответстват еднакви корелационни функции.

Колкото по-широк е спектъра на сигнала, толкова по-малък е интервалът на корелация, което е равностойно на свиване на сигнала и копието между времето и обратно - на голям интервал на корелация съответства по-тесен спектър на сигнала.

**Динамично представяне на сигналите. Конволюция**

Динамичното представяне на сигналите е свързано с разглеждането им във времето като сума от елементарни сигнали, които възникват последователно. Чрез динамичното представяне се проследяват бързите измененията на сигнала и взаимодействието им върху дискретни и непрекъснати системи.

За тази цел се използват няколко елементарни сигнала (тестови)

Единичната функция τ(t) – единичен скок (функция на Хевисайд)

Тя е непрекъсната функция във времето и затова не може да се реализира, тъй като напреженията не нарастват със скок в реалните ел. системи, поради наличието на реактивни елементи.

δ(t) – единичен импулс, функция на Дирак

δ(t) =

площта на единичния импулс

δ(t - ) =

Неговата височина е безкрайно голяма, а широчината е безкрайно малка. Площта ме у = 1.

При грубо приближение единичния импулс се характеризира с безкрайно малка широчина и безкрайно голяма височина.

При наблюдение чрез осцилоскоп, бързото изменение на сигналите се реализира чрез поредици от такива импулси. В реалния случай продължителността трябва да бъде много малко в сравнение периода на повторение.

Дискретен единичен импулс – функция на Кронекер. δ(n) – единичен отчет

δ(n) =

δ(n-m) =

-> площ на дискретен единичен импулс

Дискретният сигнал S(n) може да се представи като сума от показаните 4 дискрета изразени чрез единичния импулс.

S(n) = S(0). δ(n) + S(1). δ(n-1) + S(2). δ(n-2) + S(3). δ(n-3)

n=-3

S(-3). δ(n+3)

S(n) = δ(n-m) – конволюция на сигнала с единичния импулс от дискретен вид.

Единичният импулс или филтриращо свойство; той отделя съответната дискретна стойност на сигнала по оста на времето.

При непрекъснати сигнали

S(t)

m – номер на съответния импулс

h = S(m) – височина

b = m – ширина на импулса

B = S(m). – площ на всеки импулс

Ще представим S(n) като сума от всички импулси:

S(n) =

∑ -> S;

n

m

S(t) = (2) – конволюция на сигнала с единичен импулс от непрекъснат вид.

Конволюция за дискретен тип – бележи се с

**13. *Амплитудна модулация.Спектри на сигнали с Амплитудна модулация(АМ)***

Същност на процеса модулация- нелинеен процес, при който параметрите на някакъв високочестотен сигнал се изменят в зависимост от някакъв нискочестотен сигнал (управляващ) сигнал, който е носител на информация. Чрез модулирането се пренася спектъра на управляващия сигнал в областта на високите честоти. Благодарение на това се създават повече канали за връзка и информационният сигнал се предава на големи разстояния с малки загуби. Устройствата, които преобразуват сигналите се наричат модулатори.

В мястото на приемането се извършва обратно преобразуване- демодулация и се получава управляващият сигнал. В реален случай полученият след демодулацията сигнал не съответства на първоначалният, а съдържа незначителни изкривявания и смущения.

Същност на процеса амплитудна модулация- Непрекъсната амплитудна модулация се характеризира с изменение на амплитудата на високочестотния сигнал в зависимост от амплитудата на управляващия нискочестотен сигнал.

Математически модел на амплитудно модулирания сигнал.

(t)= [1+m (t)] cos(t + ) (1)

(t)= cos(t + )- хармонично трептене

(t)- управляващ сигнал

(t)- cos(Ωt + )- хармонично трептене

(t)= [1+m cos(Ωt + )] cos(t + ) (2)

m =  *=* ≤ 1

m- коефициент на амплитудна модулация.

Типични стойности за m: 0,3; 0,5; 0,8

m = 1 – дълбока модулация ; m > 1 – премодулация

Амплитудна модулация при , - хармонично трептене

Графиката е при симетрично изменение.

- коефициент на модулация при горната част

- коефициент на модулация при долната част

(t) = cos(t +)– произволен представен в ред на Фурие

(t)= [1+ cos(t +)] (3)

m = ; (k=1,2……n) m- парциален коефициент на модулация

Спектри на сигнали с амплитудна модулация

Управляващият сигнал е с просто хармонично трептене

=0, =0

cosα.cosβ = [ cos(α-β) + cos(α+β)]

(t)= cost + cos(t + ) + cos(t - )

Уравнение за спектъра на амплитудно модулираните сигнали

Δ B= - ( ) = 2

Управляващ е сложен сигнал

>> ….

<< .…

Честотата на модулирания сигнал изчезва и на нейно място се получават 2 странични честоти, когато управляващия сигнал е просто хармонично трептене или 2 странични ленти.

13. **Енергийни съотношения при сигнали с амплитудна модулация. Разновидности на амплитудна модулация.**

Енергийни съотношения при сигнали с АМ- мощността при АМ е от съществено значение за изчисляване на генераторите, модулаторите и останалите устройства в техническата система с цел повишаване на надеждност и намаляване на експлоатационните разходи на съответните системи.

= Период на управляващ сигнал

= ; >>; <<

За един период

= (1+mcost)

m =0 Няма модулация

= = Режим на мълчание

m=1; cost = 1

=4=

m=1; cost =- 1

=0=

-> се изменя от (0 - 4)

2. За един период на управляващия сигнал

=

2.1) при m=1, = 1.5

2.2) при m=0, =

2. Разновидности на АМ във връзка с използването на по-тесен честотен обхват и подобряване на енергийните показатели се използват разновидности на АМ.

А) разновидност 1 - Балансна АМ (БАМ) (t)=cos(+)t + cos(-)t

ΔB = 2

Недостатък: необходимост от възстановяване на носещия сигнал в мястото на приемане което е свързано с трудности при синхронизация на генераторите в приемната и предавателната част.

Б) разновидност 2 – ЕЛАМ(еднолентова АМ) (SSB) (t)=cos(±)t +Ао\*coswot

ΔB =

Предимства: Намалява се консумираната мощност и широчината на използваната честотна лента два пъти

\* Предимства на АМ: \* Недостатъци на АМ:  
 - Лесна техническа реализация; - Ниска шумоустойчивост;

-Тясна честотна лента - Висока консумация на енергия

-ниско КПД

**Информация.Количество информация.Ентропия**

Думата информация се разбират всички сведения за събития, процеси, обекти, явления и прочие, които подлежат на пренасяне в пространството и времето. При по-общо тълкуване това е свойството на материалните обекти което се проявява в изменение на техните състояния, чрез отражение се предават от един на друг обект. Чрез информацията се управляват различни обекти.

Количество информация – придобива популярност през последните години във връзка с разширеното използване на информационните технологии и по-специално на цифровите системи. Единицата за количество информация е bit. Binary digit(двоична единица). Един бит информация се получава след като се узнае кое от две равновероятни събития е настъпило. Друга единица за количество информация е байт/килобит/мега/…. Количеството информация е положително число тъй като 0<=P1<=1 и логаритъмът е с отрицателен знак.

Априорна вероятност (P1)/апостериорна вероятност (P2). Прирастът на количествата информация I = P2/P1, в двоична единица I=log2 \* p2/p1

Ентропия – способността на един източник да създава информация. От прилочна гл.т. ентропията е средното количество информация на едно съобщение= Iср = n1I1+…+nkIk/N (N = n1+n2+……+nk)

Ентропията е равна на нула, ако едно от събитията е достоверно  
Ентропията е максимална при равно вероятни събития  
Когато събитията са с различни вероятности и сред тях няма достоверно събитие, Ентропията е > 0 и < от макс. Стойност.

***Математическо представяне на сигналите. Видове сигнали***

Математическо представяне на сигнали – обработката на сигналите е свързана с тяхното количествено представяне. Такова представяне е необходимо при оразмеряване на съответни системи за обработка, пренасяне и съхранения на информацията. Сигнала е физически процес, за неговото изучаване и изследване е необходимо да се направи математически модел. Това е функционална зависимост при която аргумент е времето. Представя се в аналитичен и графичен вид.

Особености на математическия модел:  
-позволява да се абстрахираме от конкретната природа на източника на сигнала;  
-описва най-съществените свойства на сигналите като игнорира второстепенните свойства и признаци  
-функциите, които описват сигналите, могат да приемат реални и комплексни стойности

Познаването на този модел дава възможност те да бъдат сравнявани помежду си. По този начин може да бъде направена тяхната класификация.

2.ВИДОВЕ СИГНАЛИ:  
А) едномерни и многомерни сигнали  
 -едномерните сигнали са тези които се представят с една функция на времето  
 -многомерните са съвкупност от едномерни сигнали

Б) детерминирани и случайни сигнали

Основават се на принципа възможно или невъзможно е точното им представяне в произволен момент от времето. При детерминираните сигнали математическия модел позволява да се направи такова предсказване, а при случайните – не. Приема се, че при реални условия, когато нивото на шума е много по-малко от нивото на полезния сигнал(с известна форма), сигнала е детерминиран.

В)аналогови и дискретни сигнали:

Функциите, които описват аналоговите сигнали са непрекъснати или с краен брой точки, а функциите които описват дискретните са прекъснати

Г)периодични и непериодични

П-сигнала се повтаря/НП-има определена дължина