

Parametrik Belirsizlikleri olan Sistemlerin Kontrolü
Dayanıklı Kontrol Sistemlerine Genel Bakış
2017-05-24

Fetullah ATAŞ

Contents

1	Parametrik Belirsizlikler	2
2	Giriş	2
3	Transfer Fonksiyonu, State-space ve Time-domain gösterimleri	3
4	Laplace Transformu ve Transfer Fonksiyonu ile ilişkisi	5
5	Dayanıklı Kontrol Sistemlerinde Geribesleme ve Yararları	6
6	Hassaslık ve Tamamlayıcı Hassaslık	7
7	Sonuç	10

1 Parametrik Belirsizlikler

Karmaşık belirsizlikler genellikle yüksek frekans aralığında meydana gelir ve aşağıdakileri içerebilir: Modellenmemiş gecikmeler (zaman gecikmesi), parazitik bağlanma, histerez ve diğer lineer olmayan sistemler. Bununla birlikte, birçok endüstriyel kontrol sisteminde dinamik bozulmalar aynı zamanda bileşen özelliklerinin hatalı tanımlanması, Sistem bileşenleri üzerinde yıpranmış etkiler veya işletme noktalarının kayması. Bu belirsizlikler belirli sistemlerin varyasyonları ile temsil edilebilir. Düşük frekans aralığı performansına "parametrik belirsizlikler" denir.

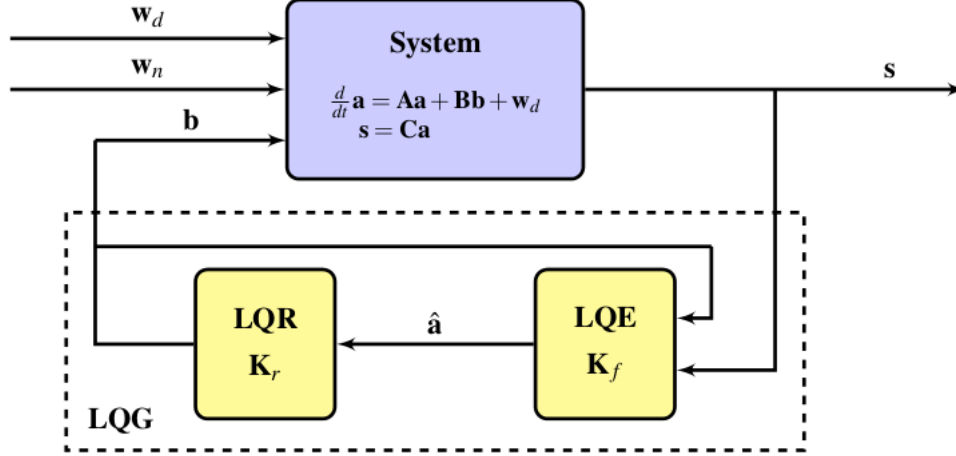
2 Giriş

Dayanıklı kontrol sistemlerinin anlaşılabilmesi için optimal kontrol methodunun irdelenmesi gerekmektedir. Optimal kontrol için geliştirilmiş grafik diyagramı şekil-1'de verilmiştir. Şekil-1'de ki diyagramda State-space gösterimi ile ifade edilen lineer sistemin state vektörü a ile gösterilmiştir. w_n ve w_d sırasıyla sisteme dışardan giren gürültü ve bozucu etkidir. LQR regülatörünün istenen biçimde kontrol girişi üretebilmesi için tüm statelerin geribeslemesi LQR bloğuna beslenmelidir. Bu noktada Estimator bloğu olarak LQE(Linear Quadratic Estimator) eklenmiştir. Birçok uygulamada bu bloğun içeriği genişletilmiş Kalman Filtresi(EKF) olarak karşımıza çıkar. J. Doyle 1978 yılında yayımladığı makalesinde LQG tabanlı kontrol sistemlerinin garanti edilebilir stabilite sınırlarını incelemiştir. Doyle çalışmasının sonucunda kontrol edilen sistemin stabil olmasının sistemin dayanıklı olacağını garanti etmeyeceğini kanıtlamıştır. Doyle'un bu çalışmasında sonra kontrol teorisi alanında yapılan çalışmaların önemli bir kısmı dayanıklı kontrol ile ilgili olmuştur. Dayanıklı kontrol sistemleri gerçek dünya uygulamalarının belirsizliklerine iyi cevap vermesi ve güvenilir olması sayesinde uygulamada geniş bir alan bulabilmiştir. Dayanıklılık kontrol sistemlerinde performans ile birlikte iyi bir ölçüt aracıdır. Bir sistemin performansı genellikle sistemin cevap hızı ile ölçülürken Dayanıklılığı, sisteme dışardan etkiyen bozucu etkilere olan hassasiyeti ile ölçülür.

Doyle'a göre bir sistemin performansı çok iyi seviyede iken dayanıklılığı çok kötü olabilir. Bu noktada iki ölçütün birbirinden bağımsız olduğu ortaya çıkmaktadır. Şekil-1'de ki grafiğe geri dönersek, s ile gösterilen sensör verisi yani sistemin çıkışı herhangi bir estimation bloğuna gerek kalmadan state a 'a eşit olduğu kabul edilirse bu durumda LQR regülatörü kesinlikle dayanıklı olacaktır. Daha sade bir ifade ile Denklem.1 sağlandığı zaman sistem dayanıklıdır.

$$s = \bar{a} \quad (1)$$

Figure 1: Optimal kontrol blok diyagramı



3 Transfer Fonksiyonu, State-space ve Time-domain gösterimleri

Bir fiziksel olayın yada sistemin matematiksel olarak modellenebilmesi için sistemde yer alan dinamiklerin gözetilerek statelerin zamana göre değişimlerini gösteren denklemler yazılır. Bu denklemler sistemin kontrol girişini, sensör verilerini (çıkış) ve statelerini içerir. Bu denklemlerin en bilindik formları bu konu başlığında zikredilen gösterimlerle temsil edilebilir. State-space gösterimi lineer sistemlerin kontrolü için çok sık kullanılır. Time-domain gösteriminde genellikle sistemin cevabı ölçülürken kullanılır. Sistemin cevabını içeren fazla veri elde varsa time-domain gösterimi kullanılır. Frekans-domaini ise sistemin transfer fonksiyonu gösterimi için kullanılan bir uzaydır. Bir sistem için bu üç farklı uzayda ki gösterimler tamamen denktir. Yapılacak işleme göre çalışılacak uzayın belirlenmesi önemli bir husustur. Dayanıklı kontrol kavramının özelliklerinden bahsedeceğimiz zaman çok sıklıkla transfer fonksiyonu kullanmamız gerekecektir. Bu husustan dolayı bu kısımda da çok transfer fonksiyonu gösterimi üzerinde durulacaktır. Transfer fonksiyonu en genel ifade ile sistem çıkışının sistem girişine oranı ile ifade edilir. Transfer fonksiyonuna göre örneğin sistemin girişine sinüs dalgası uygulanırsa çıkışta yine bir sinüs dalgası elde edilecektir. Fakat bu sinüs dalgasının salınım büyüklüğü ve faz açısı sistem dinamiklerine bağlı olarak girişten farklı olacaktır.

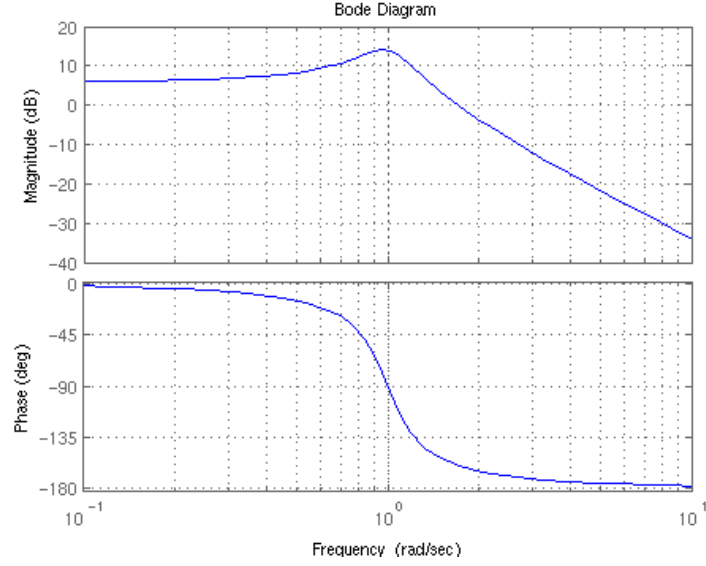
$$output = A * \sin(\omega * t + \phi) \quad (2)$$

Figure-2'de gösterilen kontrol sisteminin çıkışı $A * \sin(\omega * t + \phi)$ olarak verilirse A ve ϕ 'nin kompleks eksenlerdeki grafiği figure-3'tekine benzer olacaktır. Buna bode plot denir. Sistemin frekans cevabı bu grafiklerden yorumlanabilir.

Figure 2: Basit açık çevrim kontrol sistemi



Figure 3: Sistemin frekans cevabı(Bode Plot)



Transfer fonksiyonu gösterimi ile sistemin dayanıklılığı, sistemin değişik yapılarıdaki gürültü ve bozucu etkilere cevabı test edilebilir. Bu özelliklerden dolayı transfer fonksiyonu gösterimi bir sistemin dayanıklılık incelemesi için çok önemlidir.

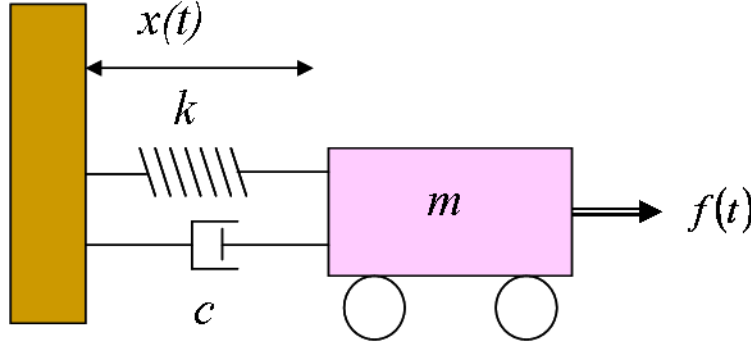
4 Laplace Transformu ve Transfer Fonksiyonu ile ilişkisi

Laplace Transformu Fourier transformunun bir türeği olarak karşımıza çıkar. Laplace transformu Fourier transformundan farklı olarak eksponansiyel olan fanksiyonları sönümlemesiyle bilinir. Time-domaindeki bir $f(t)$ fonksiyonunun s-domainindeki karşılığı Denkleme.3'te verilmiştir.

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (3)$$

Laplace transformu ve transfer fonksiyonu ile ilişkilendirilmesi açısından bir örneğin ele alınması işleri daha anlaşılır yapacaktır. Bu bağlamda figüre-4'te gösterilen, arkasında yay ve damper elemanları bulunan arabanın dinamikleri yazılacaktır. Laplace transformu kullanılarak sistemin giriş ve çıkışını bir-biri ile ilişkilendiren transfer fonksiyonu elde edilecektir. Sistem denklemleri yazılmadan önce bu sistemin girişinin $f(t)$ kuvveti, sisteminin çıkışı ise arabanın pozisyonu $x(t)$ olduğu bilinmelidir. Newton'un ikinci yasası kullanılarak

Figure 4: Arabanın serbest cisim diyagramı



denklem.4'teki eşitlik elde edilebilir.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (4)$$

Denklem.4'teki eşitlik $s - domain$ 'de yazılırsa;

$$mX(s)s^2 - X(0).s - \dot{X}(0) + cX(s)s - X(0) + kX(s) = F(s) \quad (5)$$

$$mX(s)s^2 + cX(s)s + kX(s) = F(s) \quad (6)$$

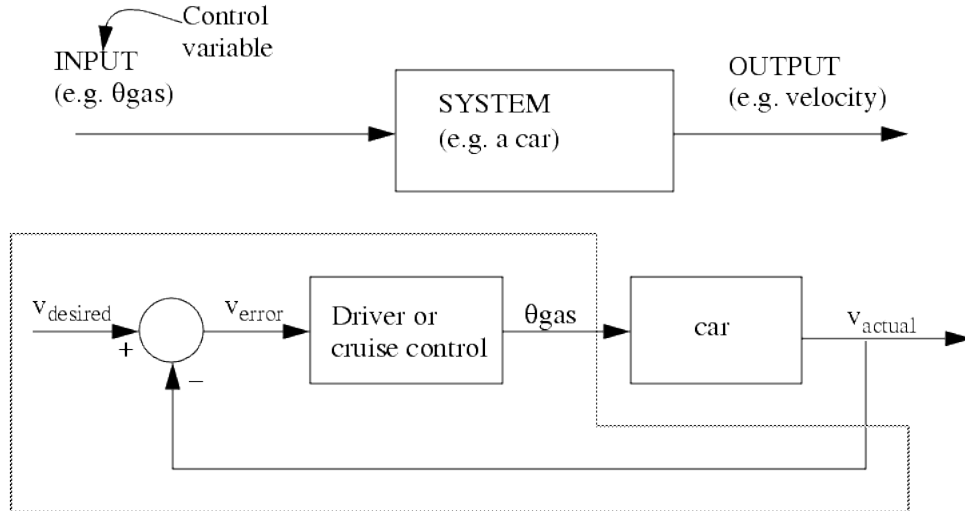
böylece Laplace transformu kullanılarak Denklem.5 elde edilir. Burada verilen $X(0)$ ve $\dot{X}(0)$ başlangıç değerleri olarak adlandırılır (initial condition). Bu örnek için bunların sıfır olduğu kabul edilirse daha sade bir ifade olan denklem.6 elde edilir. Daha önceki kısımda transfer fonksiyonu $G(s)$ 'in sistem çıkışının sistem girişine oranı olduğunu belirtmiştik. Şimdi bu ifadeyi kullanarak figüre-4'te verilen araba sistemi için transfer fonksiyonunun $\frac{X(s)}{F(s)}$ 'e eşit olacağını söyleyebiliriz. Bu durumda transfer fonksiyonu denklem.7'de verilmiştir. Bu kısımda dayanıklı kontrol sistemlerinin analizi için önemli bir gösterim olan transfer fonksiyonu ele alınmış olup genel özellikleri ve elde edilişi anlatılmıştır.

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (7)$$

5 Dayanıklı Kontrol Sistemlerinde Geribesleme ve Yararları

Kontrol sistemlerinde geribeslemeli modeller neredeyse her zaman açık çevrim sistemlere oranla daha iyi işlev sağlar başka bir deyişle geribeslemeli sistemlerdeki hata oranı açık çevrim sistemlere nazarla çok düşüktür. Böyle olmasının nedeni geribeslemeli kontrol sistemlerin modelde bulunması muhtemel olan *parametrik belirsizlikler ve bozucu etkilere* dinamik cevabıdır. Geribeslemeli kontrol sistemlerinin parametrik belirsizlikleri olan bir model ile örnekleyerek daha iyi analiz edebiliriz. Bu bağlamda otonom otomobillerin hız kontrolünü sağlayan Cruise Kontrol örneği üzerinde duracağız. Cruise kontrol için figüre verilen parametreler

Figure 5: Cruise Control blok diyagramı



treler; $v_{desired}$, v_{error} , θ_{gas} ve v_{actual} sırasıyla referans giriş, hız hatası, gaz pedalı açısı ve gerçek hızı temsil etmektedir. Sisteme etkiyebilecek olası bozucu etki veya parametrik belirsizlik d ile temsil edilmiştir. Kontrolör bloğu K , sistem ise P ile temsil edilmektedir. Figürün üst kısmında bulunan açıkçevrim kontrol sistemi benzer biçimde gaz pedalı açısının kontrolü ile istenen hızın elde edilmesini ima etmektedir. Geribesleme kontrol sistemi için aşağıdaki denklemler verilmiştir.

$$\theta_{gas} = K v_{error} \quad (8)$$

$$\theta_{gas} = K v_{error} = K(v_{desired} - v_{actual}) \quad (9)$$

$$v_{actual} = P\theta_{gas} = PKv_{desired} - PKv_{actual} + d \quad (10)$$

$$(1 + PK)v_{actual} = PKv_{desired} + d \quad (11)$$

$$v_{actual} = \frac{PK}{(1 + PK)}v_{desired} + \frac{1}{(1 + PK)}d \quad (12)$$

Denklem.12'den açıkça anlaşılmaktadır ki otomobilin gerçek hızının istenen hıza ulaşması için denklemin sağ tarafında $v_{desired}$ 'ın önünde yer alan $\frac{PK}{(1+PK)}$ ifadesi 1'e yakınsamalı aynı zamanda parametrik belirsizlik veya bozucu etki olarak temsil edilen d 'nin önündeki $+\frac{1}{(1+PK)}$ ifadesi 0'a yakınsamalıdır. tüm bu denilenlerden Denklem 13 ve 14 ortaya konabilir.

$$\frac{PK}{(1 + PK)} \approx 1 \quad (13)$$

$$\frac{1}{(1 + PK)} \approx 0 \quad (14)$$

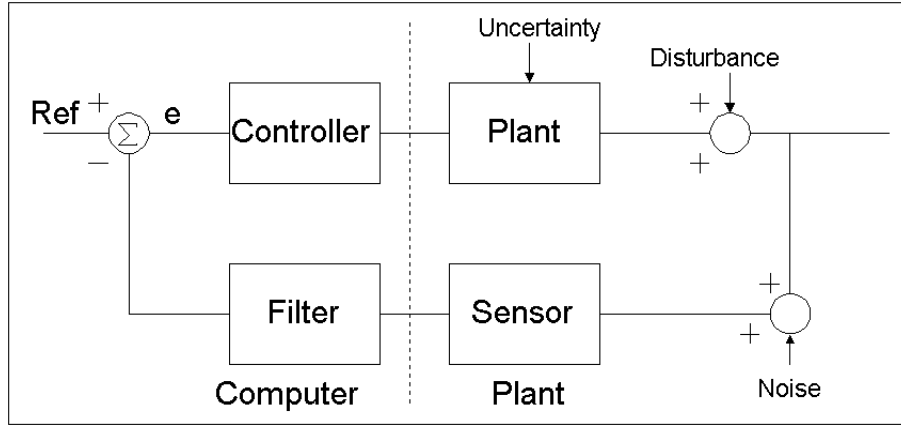
Denklem.13 ve Denklem.14'ün doğruluğunu yakınsayacak olan kontrol parametresi Propotional kontrol dediğimiz bir katsayıdır. Genellikle K 'nın büyük değerleri bu denklemleri sağlayacaktır. Örneğin K 'nın 100 alınması bu denklemleri istenen değerlere yakınsayacaktır. Bu kısımda geribeslemeli kontrol sistemlerinin parametrik belirsizlikleri veya bozucu etkileri olan sistemler için faydalarından bahsedilmiştir. Bu analizin daha somut olması açısından klasik cruise kontrol problemi üzerinde durulmuştur. Nihayetinde geribeslemeli olan kontrol sisteminde kontrol parametresinin uygun seçilmesi sayesinde otomobilin gerçek hızının istenen hızı gelmesi , dışardan olabilecek bozucu etki ve parametrik belirsizliklere rağmen sağlanmıştır. Bu bakımdan geribeslemelin parametrik belirsizlikleri olan sistemler açısından önemi ortaya çıkmıştır.

6 Hassaslık ve Tamamlayıcı Hassaslık

Hassaslık ve tamamlayıcı hassaslık sistemimizde olan parametrik belirsizliklerin, bozucu etkiler ve sensör gürültüsünün sistem çıkışını ne derece etkileyeceğini

söyler. Bu durum çevrim transfer fonksiyonu ile temsil edilir. Parametrik belirsizlikleri olan sistemlerin işlevlerinin istenen biçimde yerine getirebilmesi için hassasiyet kriterinin analizine ihtiyaç vardır. Bu kısımda bir sistemde hassasiyetin hangi ölçütlere bağlı olduğu, sistem hassasiyetinin nasıl ayarlanabileceği üzerinde durulacaktır. Figüre.6' da verilen blok diyagramında parametrik belirsizlikleri ve bozucu etkileri olan bir sistemin geribeslemeli kontrol şeması verilmiştir. Bu sistem için denklemler ilerleyen kısımda verilmiştir. Bu denklemlerden Hassasiyet ve tamamlayıcı hassasiyet kavramlarının, sistem çıkışı ile yakından ilgili olduğu görülmektedir. Figüre.6'da verilen sistemde geribeslemenin hede-

Figure 6: parametrik belirsizlik ve bozucu etkiye sahip kontrol sistemi



flediği ölçütler şu şekilde sıralanabilir. Stabilité, Parametrik belirsizlik kompanzasyonu, bozucu etkilerin yok edilmesi ve son olarak sensör gürültüsünün zayıflatılması. Bu sistem için e hatayı, y sistem çıkışını, r referans sinyalini, d bozucu etkileri, n sensör gürültüsünü temsil etmektedir. Verilen kontrol sistemi için çevrim transfer fonksiyonu $L = CP$ 'dir. C kontrolör için transfer fonksiyonu, P ise fiziksel sistem için transfer fonksiyonudur. Kontrol sisteminin başlıca denklemleri şu şekildedir;

$$e = r - y - n \quad (15)$$

$$u = Ce = C(r - y - n) \quad (16)$$

$$Iy = Pu + P_d d = PC(r - y - n) \quad (17)$$

$$y = (I + PC)^{-1} PCr + (I + PC)^{-1} P_d d - (I + PC)^{-1} PCn \quad (18)$$

Denklem.18'de $P_d d$ bozucu etki transfer fonksiyonu önünde yer alan ifade sistemin hassasiyet fonksiyonu S , r referans sinyalinin önünde yer alan ifade ise sistemin tamamlayıcı hassasiyet fonksiyonu T 'ye eşittir.

$$L = PC \quad (19)$$

$$S = (I + PC)^{-1} \quad (20)$$

$$T = (I + PC)^{-1}L \quad (21)$$

Dikkat çeken bir husus ise S ve T fonksiyonlarının toplamı SISO sistemler için daima 1, MIMO sistemler için daima identity matrisi I 'ya eşittir.

$$S + T = I \quad (22)$$

Son durumda oluşan sistem çıkışı denklemi şu şekilde olacaktır;

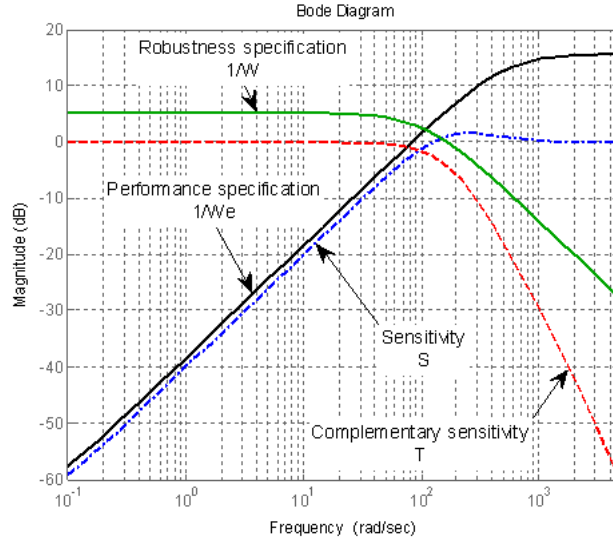
$$y = Tr + SP_d d - Tn \quad (23)$$

Bu denklem, aynı zamanda sistemdeki hata e cinsinden de ifade edilebilir;

$$e = Sr - SP_d d + Tn \quad (24)$$

Bu sistem için tasarlanacak kontrolörün e 'yi mümkün olduğunca küçük seviyelerde tutması gereklidir. Hatanın küçük tutlması yani sistem çıkışının referans sinyaline çok yakın olması küçük frekanslarda mümkündür. Fakat yüksek frekanslarda hata payını düşük olması ve referans sinyalinin takibi zordur. Figure.7'de yer alan grafikte S ve T fonksiyonlarının frekans domaininde cevapları, birbiri ile ilişkisi ve dayanıklılık üzerindeki etkileri verilmiştir. S fonksiyonunun sistem

Figure 7: S ve T fonksiyonlarının frekans cevabı



dayanıklılığı üzerinde ki önemini ve ilişkisini belirtmiştik. Grafikten de görüleceği üzere yeşil renk ile gösterilen dayanıklılık sınırı doğrudan S fonksiyonuna paraleldir. Burda önemli bir husus, S fonksiyonunun peak değerinin fazla olması sistem dayanıklılığı için kötü bir etki olmasıdır. Dolayısıyla kontrol katsayısı C 'nin seçilirken, S fonksiyonu üzerindeki etkisi unutulmamalıdır.

7 Sonuç

Bu çalışmada dayanıklı kontrol üzerinde genel bir bakış ile dayanıklı sistemlerin kontrolü ve analizi irdelenmiştir. Bu çalışmanın amacı dayanıklı kontrol hakkında genel bir fikir kazandırmak olmuştur. Dolayısıyla başlıklar altında toplanan konular çok detaylı ve teoremlere dayandırılarak anlatılmamıştır. Dayanıklı kontrol sistemlerinin anlaşılması açısından yapılan bu çalışma bir tantım niteliğinde olmuştur.

References

- [1] Taming Nonlinear Dynamics and Turbulence Machine Learning Control – Thomas Duriez, Steven L. Brunton, Bernd R. Noack
- [2] Long-time uncertainty propagation using generalized polynomial chaos and flow map composition, D. M. Luchtenburg, S. L. Brunton, and C. W. Rowley. Journal of Computational Physics 274: 783-802, 2014.
- [3] Wolfram Research, Inc., *Mathematica, Version 11.1*, Champaign, IL (2017).
- [4] Zhou, K., J. C. Doyle and K. Glover (1996). Robust and Optimal Control. Prentice-Hall