

**Parametrik Belirsizlikleri olan Sistemlerin Kontrolü**  
**Belirsiz sistem analizi ve Dayanıklı Kontrol**  
**2017-05-24**

**Fetullah ATAŞ**

## Contents

<b>1</b>	<b>Giriş</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>İnterval Polinomlar ve Kharitonov Teoremi</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Affine Katsayılar: Kenar Teoremi</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Haritalama Teoremi (Mapping Theorem)</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Belirsiz Sistemlerin Gösterimi</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Belirsiz Modellerin Oluşturulması ve Kullanılması</b>	<b>7</b>
6.1	Belirsiz Gerçek Parametreler . . . . .	9
6.2	Belirsiz Araba Modelleri . . . . .	9
6.3	Kapalı Çevrim Belirsiz Model . . . . .	10
6.4	En Kötü Durum Performansı Analizi . . . . .	10

## 1 Giriş

Bu raporda, Matlab kullanılarak belirsiz sistemlerin gösterimleri, analizleri ve bu sistemlerin Dayanıklı kontrolü çalışma konusu olmuştur. Matlab'te Robust Control Toolbox paketi içinde yer alan komutların bu işlemleri basit ve anlaşılır bir şekilde gerçekleştirdiği uygulanarak görülmüştür. Bu Çalışmada sıralanan konular şu şekildedir: belirsiz sistem gösterimlerinin tanımı, belirsiz sistem analizi ve dayanıklı kontrolör tasarımı.

## 2 İnterval Polinomlar ve Kharitonov Teoremi

Sistemlerin transfer fonksiyonu bir karakteristik polinom denkleminde düşünülürse ve bu polinomdaki  $s$  değişkeninin önündeki katsayılar belli bir aralık değerinde yer alabiliyorsa bu tür sistemlere interval katsayılı karakteristik denklem denir. Bu tür durumlar sistemleri oldukça belirsiz kılabilmektedir. Bu durumda sistemin stabil olup olmadığı konusunda sistematik bir yaklaşıma ihtiyaç doğmuştur. Tam da bu noktada *Kharitonovteoremi* stabilite teoremi rol almaktadır. Kharitonov Teoremi karakteristik polinom denkleminin değer aralıkları olan katsayılarında sistemin stabil olduğu durumları incelemektedir. Kharitonov teoremine göre denklem.1'de yer alan polinomal karakteristik denkleminin stabil olacağı tek durum figüre.1'de verilen Kharitonov melodisini sağladığı durumdur.

$$P(s, A) = p(a, s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots a_ns^n | aAa_n > 0 \quad (1)$$

yukarıda verilen denklemlerin bütünü Kharitonov Polinomları diye adlandırılır.

Figure 1: Kharitonov Melodisi

$$\begin{aligned} p^{+-}(s) &= a_0^+ + a_1^-s + a_2^-s^2 + a_3^+s^3 + a_4^+s^4 + \dots \\ p^{++}(s) &= a_0^+ + a_1^+s + a_2^-s^2 + a_3^-s^3 + a_4^+s^4 + \dots \\ p^{-+}(s) &= a_0^- + a_1^+s + a_2^+s^2 + a_3^-s^3 + a_4^-s^4 + \dots \\ p^{--}(s) &= a_0^- + a_1^-s + a_2^+s^2 + a_3^+s^3 + a_4^-s^4 + \dots \end{aligned}$$

katsayıların üstünde yer alan artı ve eksi işaretleri, katsayıların değer aralıklarının minimum ve maximum olduğu değerleri belirtmektedir.

## 3 Affine Katsayılar: Kenar Teoremi

Kharitonov stabilite kriterinden sonraki adımda kararlılık incelemesinde Kenar teoremi yer almaktadır.

$$P(s, Q) = p(s, q_1, q_2, \Delta\Delta\Delta, q_l = P_O(S)q_iP_i(S)|q_i[q_i^-; q_i^+], i = 1, 2, \dots, \$ \quad (2)$$

Bu polinomda, katsayılar belirsiz parametre vektörü  $q$ 'ye lineer olarak bağlıdır. Daha doğru bir ifade ile, ek olarak sabit katsayıların olması sonucunda bu ilişki affine bağlılık olarak tanımlanır. her bir katsayı denkleminde yer alan forma sahiptir.

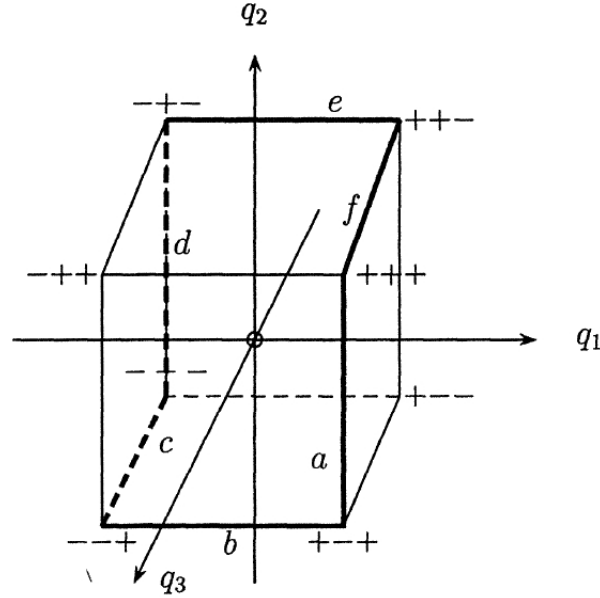
$$a_i = a_0^i + h_i q_1 + h_i q_2 + \dots + f_{li} q_l, i = 0, 1, \dots, n \quad (3)$$

$q_i$  parametresi ise  $l$  boyutlu bir kutu içerisinde farklılık gösterir.

$$q_i[q_i^-, q_i^+], i = 1, 2, \dots, l \quad (4)$$

Figür.2'de verilen grafikte 3 farklı parametreye sahip bir sistem için kararlılık in-

Figure 2: 3 parametrelili bir sistem için kenar değerleri



celemesinin uzayı verilmiştir. Bu türde belirsiz parametre  $q$ 'nin affine katsayıya sahip olan sistemlerin kararlılık analizi için Kenar Teoremi kullanılmaktadır.

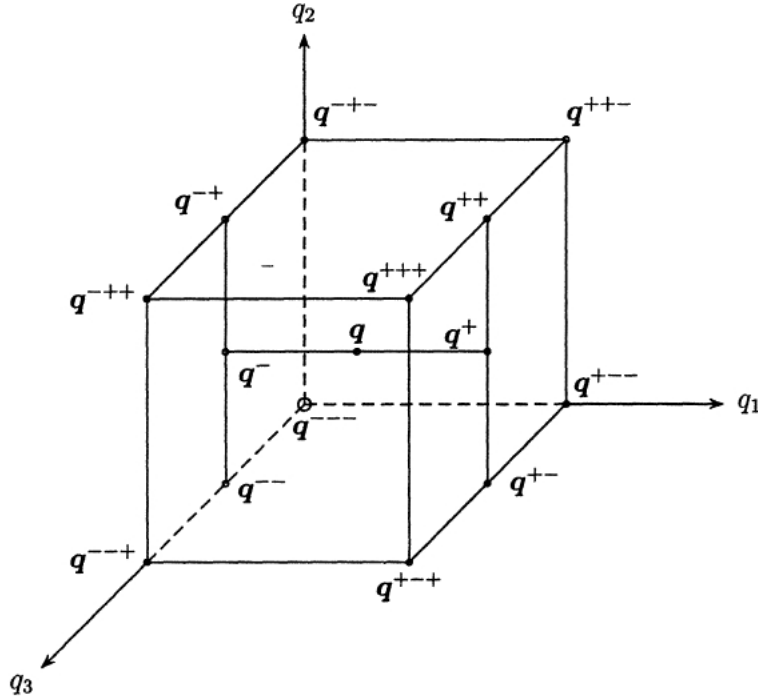
Kenar Teoremine göre bu tür bir sistemin kararlı olmasını sağlayan tek şey elde edilen kutunun kenarlarında sistemin kararlı olmasıdır. Örneğin figür.2'de verilen 3 parametrelili sistemin kararlılık incelemesi için  $a-f$  aralığındaki kenarlar üzerinde sistemin kararlı olması beklenmektedir. Bu durumun sağlanmaması halinde verilen sistem kararsızdır.

## 4 Haritalama Teoremi (Mapping Teorem)

Çoklu doğrusal polinom aileleri Frekanslı gridlemenin negatif olmayan frekansların bir alt kümesini sınırlandırabilen, yararlı bir yeterli kararlılık koşulu verir. Haritalama teoremi, değer kümesinin konveks gövdesinin basit bir tanımını verir. Çok

çizgili katsayı fonksiyonlarına sahip bir polinomun  $P(jw, Q)$  değer kümesinin konveks gövdesi,  $Q$ 'nun köşelerinin izdüşümlerinin konveks gövdesidir. Örnek.1:

Figure 3: İzdüşüm Noktaları



Aşağıda verilen karakteristik denklemi ele alalım:

$$p(s, q_1, q_2) = 3 + 2s + (0.25 + 2q_1 + 2q_2)s^2 + 0.5(q_1 + q_2)s^3 + q_1q_2s^4 \quad (5)$$

$q_i \in [1;5]$ ,  $i=1,2$ . Bu durumda vertex polinomları  $s=j$  için aşağıdaki formu almaktadır:

$$p^{--} = p(j, q_1^-, q_2^-) = -0.25 + j \quad (6)$$

$$p^{-+} = p(j, q_1^-, q_2^+) = -4.25 - j \quad (7)$$

$$p^{++} = p(j, q_1^+, q_2^+) = 7.75 - 3j \quad (8)$$

$$p^{+-} = p(j, q_1^+, q_2^-) = -4.25 - j \quad (9)$$

Verilen denklemlerden 6-8 denklemlerin ve 7-9'da verilen denklemlerin eşit olduğu görülmektedir. Aslında bu durum Kenar tereminde verilen kutunun kenarlarının izdüşümü olduğunu imat etmektedir. Bu polinomun kararlılık incelemesi  $Q$  domainini aralıklara bölerek iki alt domain üzerinde devam edecektir. Bu iki sub

somain  $Q_1$  ve  $Q_2$  ve normal formdaki  $Q$  domaini figure.4'te verilmiştir. Verilen sistemin kararlı olması için  $Q_1$  ve  $Q_2$  domainlerinin ikisi içinde kararlı olması gerekmektedir.

Figure 4: Belirsiz Parametre domainleri

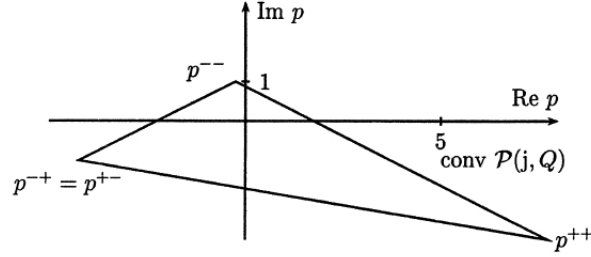


Fig. 5.16: Convex hull of the value set for  $s = j$

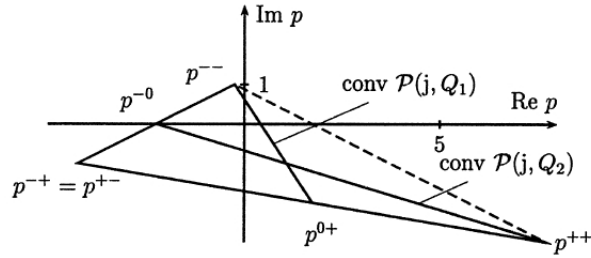


Fig. 5.17: Convex hulls of the value sets after the first partitioning step

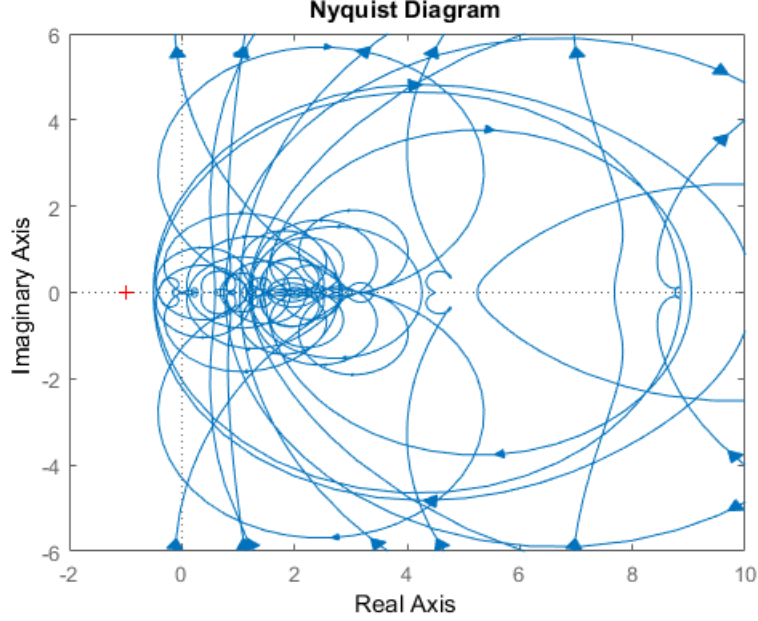
## 5 Belirsiz Sistemlerin Gösterimi

- Yaklaşık olarak bilinen veya değişken değerleri olan model parametreleri
- İhmal edilmiş veya kötü bilinen dinamikler, örneğin yüksek frekanslı dinamikler
- Çalışma koşullarındaki değişiklikler
- Doğrusal Olmayan Davranışların Doğrusal Yaklaşımı
- Ölçülen verilerden tanımlanan bir modeldeki tahmin hataları

Yukarıda listelenen kavramlar dolayısıyla sistemlerin dinamikleri belirsiz bir hal alabilir. Sistemin Nominal dinamikleri, belirsiz parametreler veya ihmal edilmiş dinamikler gibi belirsiz unsurlarla birleştirilerek detaylı belirsiz sistemler MATLAB ortamında inşa edilebilir. Sistemin her bir unsurundaki belirsizlik seviyesi nicelenerek, modelin genel doğruluğu ve değişkenliği elde edilebilir. Daha

sonra her belirsiz ögenin performansı nasıl etkilendiğini analiz edebilir ve belirsiz öge değerlerinin en kötü durum kombinasyonları tanımlanabilir. Figure-1’de

Figure 5: Dinamik Sistemin Belirsiz Elementine Ait Nyquist Diyagramı



gösterilen grafikte belirsiz sistem dinamiğine ait bir elementin Nyquist diyagramı verilmiştir. Bu diyagramda elemente ait olabilecek, 30 farklı cevap çizdirilmiştir.

State-space gösteri ile elde edilmiş dinamik sistemler için state-space matrislerinde bulunana elementlerin belirsizlikleri belirsiz matrisler oluşturularak temsil edilebilir. Örneğin aşağıda verilen Matlab kodu State-space gösterimine ait Jacobian matrisi oluşturacaktır.

```
a = ureal('a',3);
b = ureal('b',10,'Percentage',20);
A = [ -a    1/b    0
       b    a+1/b  0
       0     0     1 ]
```

Yukarda verilen  $a$  ve  $b$  değişkenleri A matrisi içinde bulunan belirtsiz parametreleri temsil etmektedir.  $a$  parametresi  $[-1,1]$  aralığı kadar belirsiz olabilmekte ve  $b$  parametresi ise kendi değerinin  $[-b/100,+b/100]$  kadarı belirsiz olabilmektedir.

Belirsiz parametrelerden matrislerin oluşturulması ile sistemlerin state-space gösterimleri edilebilir. Buna örnek olarak gösterilebilecek bir sistemin step response diyagramı figüre'de gösterilmiştir. Figüre.2'de gösterilen diyagramda sistemin 20 farklı parametre ile step response grafikleri üstüste bindirilmiştir. Diyagramdan yorumlanabileceği üzere alınan step response çizgileri sistem parametrelerinin nominal değerleri etrafında toplanmıştır.

```
p1 = ureal('p1',10,'Percentage',50);
p2 = ureal('p2',3,'PlusMinus',[-.5 1.2]);
p3 = ureal('p3',0);
A = [-p1 p2; 0 -p1];
B = [-p2; p2+p3];
C = [1 0; 1 1-p3];
D = [0; 0];
sys = ss(A,B,C,D)
manysys = usample(sys,20);
size(manysys)
stepplot(manysys)
```

Kodun ilk kısmında parametrelerin belirsizlik değerleri ve oranları belirtilmiştir. Örneğin  $p1$ 'in nominal değeri 10 değer aralığı ise  $[5,15]$  arasındadır. Benzer biçimde belirsiz parametreler olan  $p2$  ve  $p3$  tanımlanmıştır. Daha sonra sistemin state-space modelini oluşturan  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ve  $D$  matrisleri tanımlanmıştır. Sonraki kısımda bu sistemden 20 örnek oluşturulup oluşturulan herbir sistemin step response diyagramı oluşturulmuştur.

## 6 Belirsiz Modellerin Oluşturulması ve Kullanılması

Bu bölüm Figüre'te yera alan yay-kütle araba sistemi üzerinden ele alınacaktır. Figüre'de verilen sistemde bir yayla bağlanmış iki sürtünmesiz arabadan oluşmaktadır. Yayın çekme katsayısı  $k$  ile verilmiştir. Kontrol girişi soldaki arabaya uygulanan  $u_1$  kuvvetidir. Kontrol edilecek çıkış ise sağdaki arabanın  $y_1$  konumudur. Geribildirim denetimi şu şekildedir:

$$u_1 = C(s)(r - y_1) \quad (10)$$

Buna ek olarak üçlü bir lead kompensator şu şekilde verilmiştir:

$$C(s) = \frac{100(s+1)^3}{(0.001s+1)^3} \quad (11)$$

Lead Kompensator matlab kodu formuna aşağıda verildiği gibi girilmiştir:

```
s = zpk('s');
C = 100*ss((s+1)/(.001*s+1))^3;
```



Figure 6: Belirsiz sistemin Step Response Diyagramı

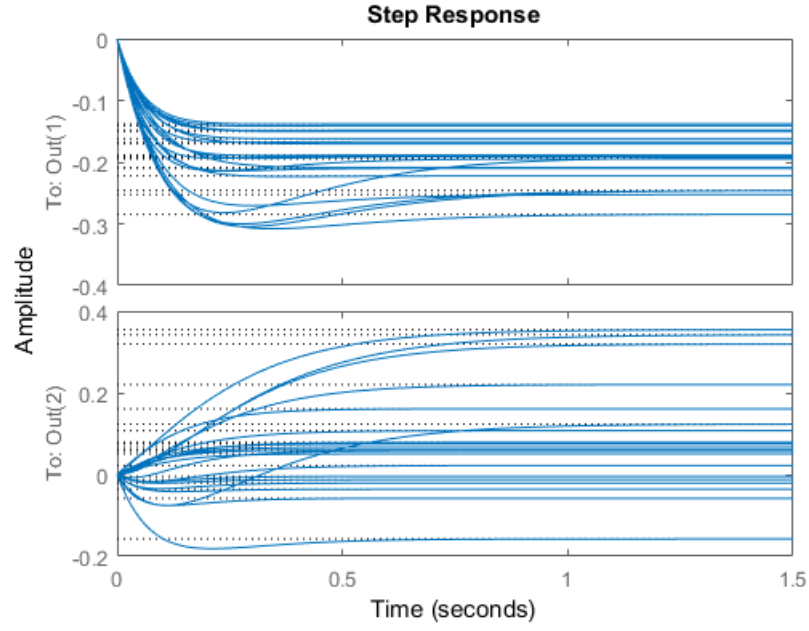
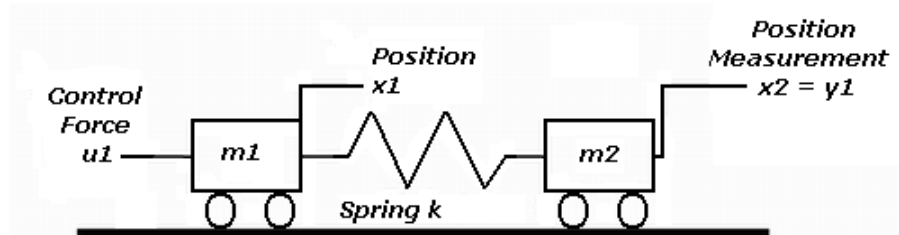
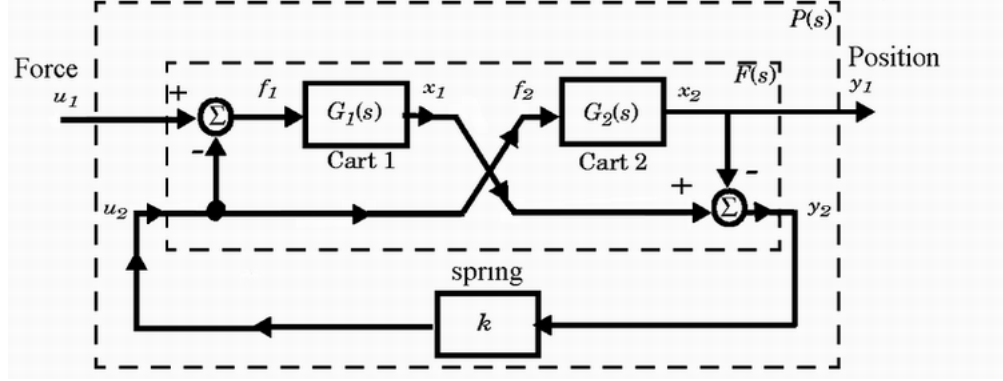


Figure 7: Yay-Kütle Araba Sistemi



Yay-kütle araba sistemine ait blok diyagramı figure.4'te verilmiştir.

Figure 8: Sistem için Blokk Diyagramı



## 6.1 Belirsiz Gerçek Parametreler

Arabaları kontrol etme problemi, yayın sabiti  $k$  ve araba kütlelerinin  $m_1$ ,  $m_2$  değerlerinin sadece yüzde 20 doğrulukla bilinmesinden dolayı karmaşıktır:  $k = 1.0 \pm \%20$ ,  $m_1 = 1.0 \pm \%20$  ve  $m_2 = 1.0 \pm \%20$ . Bu değişkenliği yakalamak için, üre fonksiyonunu kullanarak üç belirsiz gerçek parametre oluşturacağız:

```
k = ureal('k',1,'percent',20);
m1 = ureal('m1',1,'percent',20);
m2 = ureal('m2',1,'percent',20);
```

## 6.2 Belirsiz Araba Modelleri

Araba modellerinin Laplace domainindeki transfer fonksiyonu Newton'un ikinci hareket kanunu kullanılarak aşağıdaki gibi gösterilir:

$$G_1(s) = \frac{1}{m_1 s^2} \quad (12)$$

$$G_2(s) = \frac{1}{m_2 s^2} \quad (13)$$

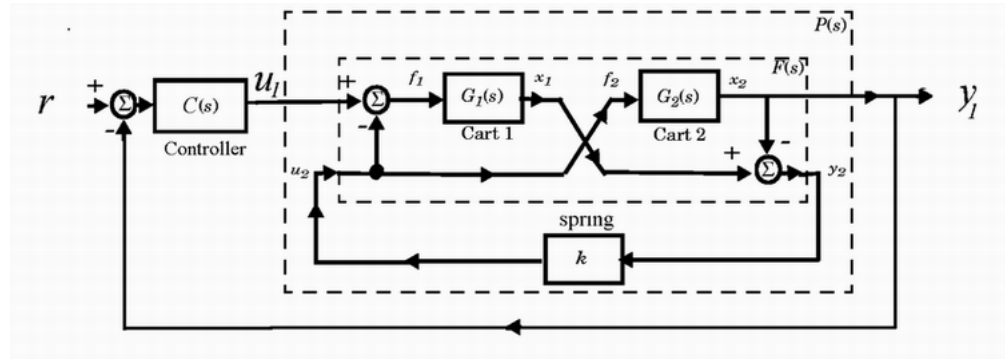
### 6.3 Kapalı Çevrim Belirsiz Model

Önce, yukarıda gösterilen blok diyagrama karşılık gelen bir sistem modeli  $P$  oluşturacağız ( $P$ ,  $u_1$  ile  $y_1$ 'i bir birine map eder):

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ G_1 \end{bmatrix} * [1, -1] + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} * [0, G_2] \quad (14)$$

Geri besleme kontrolü  $u_1 = C * (r - y_1)$ , aşağıda gösterildiği gibi  $P$  sistemini opere eder: Geribesleme fonksiyonunu, kapalı çevrim aktarımını  $r$ 'den  $y_1$ 'e

Figure 9: Kontrolör ve Sistem Blok Diyagramı



hesaplamak için kullanacağız.

$$L = P * C \quad (15)$$

Belirsiz kapalı çevrim aktarımını  $r$ 'den  $y_1$ 'e Matlab'te şu şekilde edilmiştir:

T = feedback(L,1)

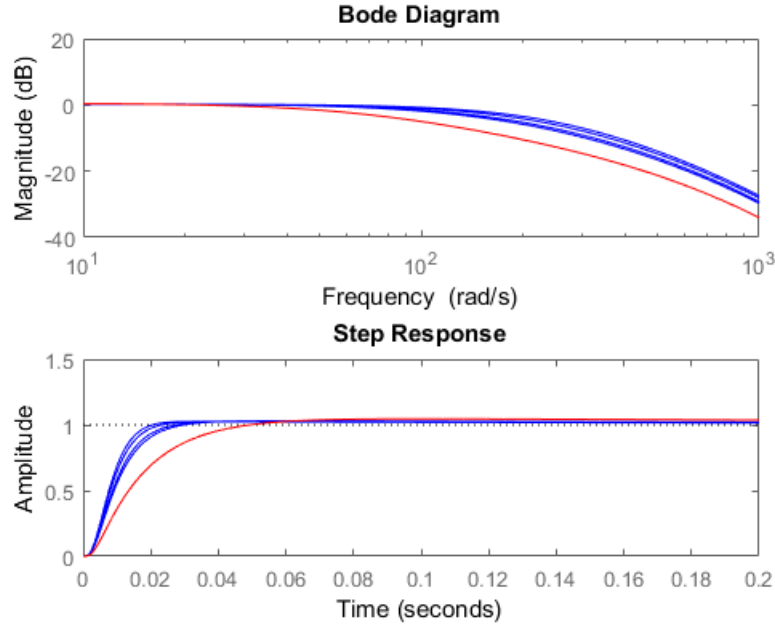
Sistemin nominal transfer fonksiyonu  $P_{nom}$  şu şekildedir:

$$P_{nom}(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 2)} \quad (16)$$

### 6.4 En Kötü Durum Performansı Analizi

Kapalı çevrimli aktarım  $T$  frekansı boyunca en yüksek kazanç Kapalı çevrim step response'daki aşma seviyesi ile ilişkilidir. Bu kazanç 1'e ne kadar yakınsa, aşma seviyesi o kadar az olur. Figüre.6'da gösterilen sistemin step response ve frekans diyagramları en kötü performans kırmızı renkli çizgiler ile belirtilmiştir. Mavi renkte gösterilen çizgiler belirsiz sistemden alınan rastgele örneklerdir. Diyagramlardan anlaşılabilceği gibi yay-araba sisteminin kontrolü için ortaya konan  $C$  lead kompansatorü sistem kontrolünü sağlamaktadır.

Figure 10: En Kötü Durum Performansı



## References

- [1] Robust control: Systems with uncertain physical parameters - J Ackermann
- [2] Taming Nonlinear Dynamics and Turbulence Machine Learning Control – Thomas Duriez, Steven L. Brunton, Bernd R. Noack
- [3] Long-time uncertainty propagation using generalized polynomial chaos and flow map composition, D. M. Luchtenburg, S. L. Brunton, and C. W. Rowley. Journal of Computational Physics 274: 783-802, 2014.
- [4] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 11.1, Champaign, IL (2017).
- [5] Zhou,K.,J.C.Doyle and K. Glover (1996).Robust and Optimal Control.Prentice-Hall