# Méréselmélet házi feladat 2025

A házi feladat a becsléselmélet, a multiszinuszos méréstechnika, a modellillesztés, az adaptív eljárások és a Kalman szűrés témaköreihez kapcsolódik. A feladat névre szólóan paraméterezett, a hozzárendelések a mellékelt táblázatban találhatók. A feladat megoldásához célszerűen a MATLAB (Lásd az ajánlott irodalmakat [1], [2], [3], [4]!) használatát ajánljuk, de bármilyen, hasonló célú programrendszer alkalmazása megengedett.

## Becsléselméleti feladatok

*Első lépésként egy kísérletezésre alkalmas környezetet hozunk létre. Ebben a környezetben mi állítjuk be az „ismeretlen” aktuális értékét, azaz amit meg fogunk mérni, de mivel a mérési csatorna bizonytalansággal terhelt, ezt a bizonytalanságot is modellezni fogjuk, így amit megmérünk ugyancsak bizonytalan (torzítással és/vagy zavarással terhelt) lesz, így aztán sosem leszünk képesek teljesen pontosan (mért érték≠valódi/”elméleti” érték) mérni.*

1. Készítsen jelgenerátort, amely alkalmas az $u(t) = Asin(2\pi f_0 t) + Bcos(2\pi f_0 t) + C$ időfüggvényű jel mintáinak előállítására. A frekvencia értéket teljesen pontosnak tekintjük, de $A$, $B$ és $C$ beállítása nem egészen az. A bizonytalanságot azzal fejezzük ki, hogy $A$, $B$ és $C$ értékeit Gauss eloszlású valószínűségi változók reprezentációjának tekintjük, és előzetes tapasztalataink birtokában $\mu_A, \mu_B$ és $\mu_C$ várható értékkel, valamint $\boldsymbol{C_{aa}}$ kovariancia mátrixszal jellemezzük!

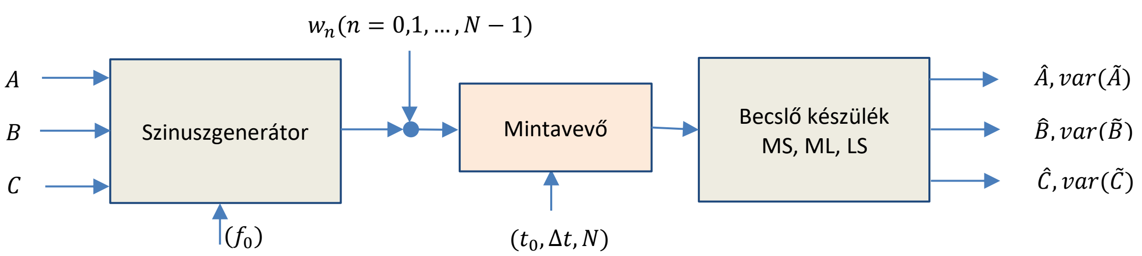
$$\boldsymbol{C_{aa}} = \sigma_a^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix},$$

   Itt $\boldsymbol{a} = [A \quad B \quad C]^T$, azaz $\boldsymbol{a}$ az ismeretlen paraméterekből képzett paramétervektor. Az a tény, hogy a kovariancia mátrix főátlón kívüli elemei nullától különböznek azt jelzi, hogy a paraméterek bizonytalansága nem független egymástól.

   Ezeknek a körülményeknek megfelelően állítsa elő ezen valószínűségi változók egy konkrét reprezentációját (azaz egy konkrét értékét), és ennek feltételezésével működtesse a generátort. Vegyen mintákat a generátor jeléből a $t = t_0 + n\Delta t$ időpontokban ($n = 0,1, \dots, N-1$)! Sajnos a mintavételezett értékek sem teljesen pontosak, amit előzetes tapasztalataink birtokában a mintavétel során a generátor kimeneti jeléhez adódó $w(t)$ nagyságú, Gauss eloszlást $N(\boldsymbol{0}, \sigma_w^2 \boldsymbol{I})$ követő megfigyelési-zaj értékekkel írunk le!

   Ezeket a $\boldsymbol{w} = [w_0 \quad w_1 \quad \cdots \quad w_{N-1}]^T$ vektorba rendezzük, azaz $\boldsymbol{w}$ az ismeretlen zajértékekből képzett megfigyelési-zaj vektor.

   Mindezek előre bocsátásával a feladat tehát $t = 0$ időpontban indítani egy ismert $f_0$ frekvenciájú, egyenkomponenst is tartalmazó, véletlen paraméterek által meghatározott szinusz jelet, amihez a megfigyelés során véletlen zaj adódik, majd az ebből vett mintákra alapozva végrehajtani az alábbi ábra szerinti mérési eljárást. A véletlen paraméterek a $\rho$ értékével, a megadott módon korreláltak (max. 3 pont).




   *Ezzel előállt egy kísérletezésre alkalmas, szimulált környezet. Most kivételesen ismerni fogjuk a megmérendő értékeket, hiszen mi generáljuk őket, így lehetőségünk lesz a mérési* *eljárásaink megfelelőségének ilyen szintű vizsgálatára is. A valóságban persze ez nincs így!*

2. A rendelkezésre álló információk felhasználásával alkalmazza az MS becslési eljárást az $A$, $B$ és $C$ paraméterek becslőinek, valamint a becslési hiba kovarianciájának és a becslés esetleges (feltételes) torzításának meghatározására[1]! Adja meg a becsléshez felhasznált összefüggéseket! Végezze el a mérést – a megadott paraméterek mellett – $N = 5, 10, 100$, azaz összesen 3 különböző mintaszámú regisztrátum esetére[2] először úgy, hogy a minták a jel egy teljes periódusából származnak, majd pedig úgy, hogy a teljes periódus egy tizedéből! Adja meg az összes vizsgált esetre

   a) a tényleges és a becsült értékeket és az eltérésüket,
   b) a becslés torzítását és
   c) a becsült értékek kovarianciáját (kovariancia mátrixát)!

   Az eredményeket vesse össze a mérési bizonytalanságot okozó megfigyelési zaj paramétereivel! Az eredmények mennyiben felelnek meg előzetes várakozásainak (max. 4 pont)?

3. Az 1. feladatban generált véletlen jelparaméter- és zaj-értékeket használva végezze el a paraméterek becslését a maximum likelihood (ML) becslőt alkalmazva is $N$ mind a 3 értéke és a mintavételi idő mindkét értéke mellett! Vesse össze a kapott eredményeket az előző pontban kapottakkal, és indokolja az esetleges eltéréseket (max. 3 pont)!

4. Az 1. feladatban generált véletlen jelparaméter- és zaj-értékeket használva végezze el a paraméterek becslését a legkisebb négyzetes hibájú (LS) becslőt alkalmazva is $N$ mind a 3 értéke és a mintavételi idő mindkét értéke mellett! Vesse össze a kapott eredményeket az előző pontokban kapottakkal, és indokolja az esetleges eltéréseket! Adjon minőségjellemzőt is (max. 3 pont)!

5. Megmértük az $u(t) = Asin(2\pi f_0 t) + Bcos(2\pi f_0 t) + C$ időfüggvényű jel ismeretlen paramétereit, azaz megadtuk ezek becslőjét és a becslés minőségjellemzőjét különféle paraméterbeállítások esetére. A továbbiakban szeretnénk ezt a jelet $u(t) = Dsin(2\pi f_0 t + \varphi) + C$ formában (is) jellemezni. A mérés eredményeinek felhasználásával adja meg $D$ és $\varphi$ becslőjét és a hozzátartozó minőségjellemző elvi minimumát a vizsgált valamennyi esetre (max. 3 pont)!

*Ügyeljen arra, hogy a numerikus eredmények összehasonlíthatósága érdekében a 2-4. feladatok esetében ugyanazt az adatsorozatot dolgozza fel, azaz az A, B és C véletlen értékeket, valamint az additív megfigyelési zaj $N = 100$ mintáját is csak egyszer generálja, és ebből használjon fel szükség szerinti számút!*

**Multiszinuszos méréstechnika**

*Önmagában energia leadására képtelen, passzív objektumok mérésénél gerjesztés alkalmazása elkerülhetetlen. A frekvenciatartománybeli vizsgálatoknál gyakran használunk szélessávú („fehér") zaj gerjesztéseket, de újabban terjed a multiszinuszos méréstechnika is. Ebben a házi feladatban ennek alkalmazásával ismerkedünk meg. Első lépésként – itt is – a kísérletezésre alkalmas környezetet hozzuk létre. Készítünk egy multiszinuszos jel*

---

[1] Egy ilyen feladat megfogalmazása egyáltalán nem ördögtől való: ilyenkor valójában egy szinusz-jelet illesztünk a mért jelhez. Ennek számos alkalmazása van az energetikai rendszerek vizsgálatától kezdve az A/D átalakítók teszteléséig bezárólag. Ez utóbbi esetben az A/D átalakító bemenetére több egészszámú periódusból álló szinusz-jelet vezetünk, majd a digitális kimenet értékeiből hisztogramot készítünk, és abból következtetünk a kódátmenetekhez tartozó tényleges kódváltási szintekre. Ahhoz, hogy ezt kellő pontossággal meg tudjuk tenni, kellő pontossággal ismernünk kell az A/D átalakító bemenetére vezetett szinusz-jel paramétereit. Mivel az torzítások és zavarások következtében bizonytalansággal terhelt, ezért el kell végeznünk a szinusz-illesztési feladatot.

[2] A mintavételek számának növelésével csak az additív zaj hatása mérsékelhető, az "ismeretlen" paraméterekről többlet-információhoz nem jutunk.

*előállítására alkalmas generátort, majd egy ilyen jelek analízisére alkalmas jelanalizátort. Ezeknek az eszközöknek a konstrukcióját a tárgy második részében több szempontból is megtámogatjuk, de ezekre az ismeretekre az alkalmazásuk során közvetlenül nem lesz szükség.*

6. Állítson elő $u(n), n = 0, 1, \ldots$ diszkrét értéksorozatot multiszinusz generátor „segítségével", mégpedig úgy, hogy a diszkrét jel $M = 100$ harmonikus komponensből álljon, az egyes harmonikus komponensek amplitúdója egységnyi, kezdőfázisa véletlen, és a sorozat várható értéke pedig 1 legyen! A multiszinusz generátort a jegyzet 46. ábrának megfelelően készítse el! (Ezzel azt is gyakorolni fogja, hogy miként kell komplex számokkal, ill. komplex értékű vektorokkal a MATLAB-ban dolgozni). Ügyeljen arra, hogy a generált jel a vizsgált frekvenciatartomány egészében megfelelő gerjesztést adjon (max. 2 pont)! Vizsgálja meg, hogy hogyan alakul a generált jel csúcsértéke, és hasonlítsa össze azzal az esettel, amikor a kezdőfázisok rendre nullák (max. 1 pont)!

7. Készítsen az előző pont szerinti generátor jelének, továbbá az ezzel a jellel gerjesztett rendszerek kimeneti jelének analizálására alkalmas, véges lépésben konvergáló, rekurzív multiszinusz analizátort, ugyancsak a 46. ábrán látható elrendezést követve, amely a bemenetére kapcsolt jelből képes kiszámítani az abban levő harmonikus komponensek amplitúdóját és fázisát[3]! A 6. pont szerinti jel és az analizátor által rekonstruált jel különbségét ábrázolva mutassa be, hogy a generátor-analizátor pár megfelelően működik (max. 3 pont)!

   *Mindenképpen az Ön által megírt generátor-analizátor programot használja, a frekvenciatartománybeli vizsgálatokra alkalmas MATLAB függvények használata legfeljebb önellenőrzést szolgáljon!*

8. Ez az $u(n)$ sorozat legyen a bemenőjele a modellezendő/adaptálandó rendszernek, melynek átviteli függvénye (vagylagosan)

$$\text{A:}\frac{(1-r)z^{-1}}{1+rz^{-4}},\ \text{B:}\ \frac{(1-r)z^{-1}}{1-rz^{-4}},\ \text{C:}\ \frac{(1-r)z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-rz^{-4})},\ \text{D:}\ \frac{(1-r)z^{-1}(1+z^{-2})}{2(1-rz^{-4})},\ \text{E:}\ \frac{(1-r)z^{-1}(1-z^{-1})}{2(1-rz^{-4})},\ \text{F:}\ \frac{(1-r)z^{-1}(1-z^{-2})}{2(1-rz^{-4})} \qquad (1)$$

   A multiszinusz analizátorral mérje meg a modellezendő/adaptálandó rendszer kimenőjelét, és a multiszinusz frekvenciákon – felhasználva a gerjesztés amplitúdójának és fázisának értékét – határozza meg az átvitel abszolút értékét és fázisát (max. 3 pont)!


   *Itt is az Ön által megírt programot használja, és ügyeljen arra, hogy a fázismenet (előjelváltást eredményező zérushelyektől eltekintve) folytonos!*

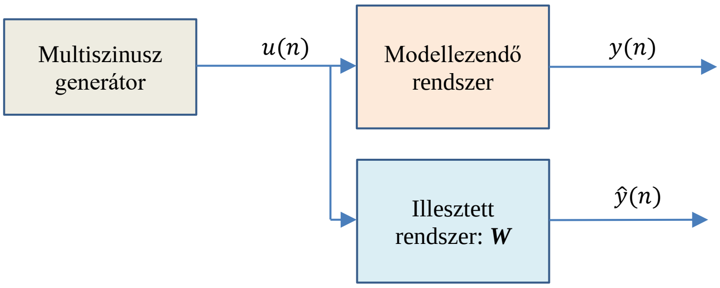
   *Ugye az átvitelt állandósult állapotban mérjük! Ehhez a rendszer kimenetét el kell odáig juttatni. Az ehhez szükséges időt a rendszer súlyfüggvényének vizsgálatával tudjuk meghatározni. Hozzon erre vonatkozó döntést! Hány lépés után ítélte úgy, hogy a rendszer kimenőjele elérte az állandósult állapotát? Ezek után olvassa le a generátor bemenetén aktuálisan érvényes multiszinusz amplitúdó és fázis értékeket, indítsa el a rendszer kimenetére csatlakozó analizátort, majd a konvergenciához szükséges számú lépés megtétele után olvassa le az analizátor kimeneti csatornáin megjelenő értékek abszolút értékét és fázisát!*

[3] A fázis meghatározásánál különös körültekintéssel járjon el: a fázis többértékű függvény, ugyanakkor a rendszerátvitelek fázisa – legalábbis szakaszosan – folytonos.

**Modellillesztés, adaptív eljárások**

9. Az „ismeretlen” rendszert lineáris kombinátorral igyekszünk modellezni. Ennek kimenőjele

$$\hat{y}(n) = w_1 u(n-1) + w_2 u(n-2) + \ldots + w_P u(n-P). \quad (2)$$




Juttassa el a modellezendő/adaptálandó rendszert az állandósult állapotáig, majd ezt követően végezzen megfigyeléseket! Alkalmazza a 8. feladat rendszerére az LMS eljárást:

$$\boldsymbol{W}(n+1) = \boldsymbol{W}(n) + 2\mu e(n)\boldsymbol{X}(n).$$

A lineáris kombinátor súlytényezőiből alkotott állóvektort $\boldsymbol{W}$, a regressziós vektort $\boldsymbol{X}$ jelölje! A paraméterek nulla kezdeti értékéből indulva futtassa az algoritmust a paraméterek állandósulásáig, azaz a (közelítő) megoldás megtalálásáig. Ezt követően, ezeket a paramétereket kiindulási értéknek megtartva, $r$ értékét csökkentse a felére, majd folytassa a futtatást az új megoldás megtalálásáig. A bátorsági/konvergencia tényezőt Ön válassza meg! Indokolja választását! Rajzolja ki az együtthatók alakulását az iterációs lépések függvényében (konvergencia diagram[4]) (max. 4 pont)!

Fejtse mértani sorba az (1) átviteli függvényt! Táblázatos formában vesse össze a sorfejtett alak és a lineáris kombinátor együtthatóit az (1) átviteli függvényű rendszer súlyfüggvényével $r$ mindkét értékére (max. 2 pont)!

10. Végezze el a modellillesztést mindkét átviteli függvényre ($r$ és $r/2$ esetek) az

$$\hat{y}(n) = a_1 u(n-1) + a_2 u(n-2) + a_3 u(n-3) - b_1 \hat{y}(n-1) - b_2 \hat{y}(n-2) - b_3 \hat{y}(n-3) - b_4 \hat{y}(n-4)$$

alakú, végtelen impulzusválaszú modell alkalmazásával is! Az illesztés során a véges impulzusválaszú problémára visszavezetés módszerét (*equation-error formulation*) alkalmazza! Rajzolja ki az együtthatók alakulását az iterációs lépések függvényében (konvergencia diagram) (max. 3 pont)!

11. Készítsen az (1) átviteli függvényű rendszerhez állapotváltozós leírást! Ehhez ne használjon MATLAB függvényt, hogy közvetlenül lássa milyen struktúrát valósít meg! Alkossa meg a rendszer állapotainak becslésére alkalmas Kalman prediktor programját! A megfigyelési zajt és a rendszer zajt úgy generálja, hogy azok Gauss eloszlású fehér zajok legyenek $\boldsymbol{R}(n) = \sigma_n^2 \boldsymbol{I}$ és $\boldsymbol{Q}(n) = \sigma_w^2 \boldsymbol{I}$ , kovariancia mátrixokkal. A $\sigma_n$ szórást úgy állítsa be, hogy megfigyelt jelet terhelő additív zaj szórása a bemeneti jel csúcsértékének 2%-a legyen! A $\sigma_w$ szórást először nullára, majd pedig egy Ön által megválasztott értékre állítsa be úgy, hogy az eredményekben a rendszerzaj hatása egyértelműen látható legyen! A 6. pont szerinti bemenőjel alkalmazása mellett – a vizsgált rendszer állandósult állapotának elérését követően – futtassa a prediktort mindkét esetre (mindegyiken belül két alesetre: $r$ *és* $r/2$ esetek), és ábrázolja grafikusan a hibarendszer állapotváltozóinak és a $trace\boldsymbol{P}(n)$ értékének alakulását a prediktor állandósult állapotának eléréséig terjedően! Ne

[4] A konvergencia diagramot elegendő az öt legnagyobb abszolút értékű együttható esetére kirajzoltatni: célszerűen egyetlen diagramban, természetesen az együtthatót azonosító jelöléssel. Hasonló formában kérjük a konvergencia diagramot a többi részfeladatnál is.

feledkezzen meg $\boldsymbol{P}(0)$ alkalmas beállításáról és arról sem, hogy a vizsgált rendszer bemenőjelét a Kalman prediktor is megkapja (max. 6 pont)!

*A beadandó dokumentumban szerepeltesse a feladatok megoldása során kapott eredményeket (táblázatos, ill. grafikus formában), a szöveges indoklásokat és a szerzett tapasztalatokat, valamint a felhasznált/megírt MATLAB forráskódot. Kérjük a dokumentumon szerepeltesse nevét, Neptun-kódját és email elérhetőségét is. A tartalmi megfelelőség mellett törekedjen a dokumentum áttekinthetőségére és érthetőségére is!*

A feladatok megoldását elektronikusan, *pdf* formátumban, egyetlen fájlban, a https://hf.mit.bme.hu portál felületén kérjük.

A kiadás dátuma: **2025. február 26.** A beadási határidő**: 2025. április 30.**

A feladat elfogadásához szükséges minimális pontszám: **16** **Jó munkát!**

# A Méréselmélet házi feladat paraméterei

| **Neptun kód** | $\mu_A$ | $\mu_B$ | $\mu_C$ | $\sigma_a$ | $\sigma_w$ | $\rho$ | $t_0$ | $f_0$ | rendszer | $r$ | $P$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | | $ms$ | $Hz$ | | | |
| BF2VW5 | .5 | .5 | .5 | .1 | .1 | .1 | 5 | 40 | A | 0.80 | 17 |
| CC10P5 | 1 | 1 | 1 | .1 | .2 | .1 | 10 | 50 | B | 0.81 | 19 |
| D84PZN | 1 | -1 | 2 | .1 | .1 | .2 | 10 | 50 | C | 0.82 | 23 |
| DEC4F6 | 1 | 2 | 1 | .1 | .2 | .2 | 10 | 50 | D | 0.83 | 15 |
| EN0U9P | 2 | 1 | 1 | .2 | .3 | .3 | 5 | 50 | E | 0.84 | 17 |
| FRPI0M | 1 | -2 | 2 | .2 | .2 | .2 | 5 | 50 | F | 0.85 | 19 |
| FZI562 | 2 | 2 | 1 | .2 | .1 | .1 | 5 | 50 | A | 0.86 | 17 |
| G3QZUO | 2 | 1 | -2 | .3 | .1 | .1 | 5 | 50 | B | 0.87 | 19 |
| GLI8J4 | 2 | 2 | 2 | .1 | .3 | .3 | 1 | 40 | C | 0.88 | 21 |
| H5JLQ0 | .5 | -1 | 1 | .2 | .3 | .3 | 2 | 40 | D | 0.89 | 23 |
| HL1YQ4 | 1 | .5 | 1 | .3 | .1 | .1 | 3 | 40 | E | 0.90 | 25 |
| JJY0OG | 1 | 1 | .5 | .2 | .3 | .3 | 4 | 40 | F | 0.80 | 15 |
| JM08B3 | .5 | .5 | .5 | .1 | .1 | .1 | 5 | 40 | A | 0.81 | 17 |
| K82BHB | 2 | 2 | 1 | .2 | .1 | .1 | 5 | 40 | B | 0.82 | 19 |
| KUR6F9 | 2 | -1 | 2 | .3 | .1 | .1 | 5 | 40 | C | 0.83 | 21 |
| M35K2K | 0 | 1 | 1 | .1 | .1 | .1 | 10 | 50 | D | 0.84 | 23 |
| PEF9IY | 1 | 0 | 2 | .1 | .1 | .1 | 10 | 50 | E | 0.85 | 25 |