Méréstelmélet – Házi feladat

Jedla Martin (DEC4F6)
jedlam02@gmail.com

2025. április 27.

1. Jelgenerátor készítése

A jelgenerátor feladata egy három paraméteres, szinuszos jel létrehozása Gauss-zajjal terhelve. A modell:

$$z(t) = A\sin(2\pi f_0 t) + B\cos(2\pi f_0 t) + C + w(t), \tag{1}$$

ahol:

- $A, B, C \sim \sigma_\mathbf{a}\mathbf{C}_\mathbf{aa}$
- $w(t) \sim \mathcal{N}(0,\, 0.1^2)$ fehér zaj
- $f_0 = 50\,\text{Hz}$ alapfrekvencia
- $f_s = 250, 500, 5000\,\text{Hz}$ mintavételi frekvencia egész periódusból való mintavétel esetén
- $f_s = 2.5, 5, 50\,\text{kHz}$ mintavételi frekvencia tized periódusból való mintavétel esetén

MATLAB implementáció

A kód struktúrája és főbb lépései:

```
% Paraméterek
% Paraméterek
mu_A = 1;
mu_B = 2;
mu_C = 1;

sigma_a = 0.1;
rho = 0.2;

t0 = 10e-3;
f0 = 50;
N = 5;

fs = 250;
```

```
dt = 1/fs;
t = (t0 + (0:N-1)*dt)';

sigma_w = 0.2;

% Kovariancia mátrix
Caa = sigma_a^2 * [1 rho rho^2; rho 1 rho; rho^2 rho 1];
Cww = sigma_w^2 * eye(length(t));

% Paramétervektor generálása
mu_a = [mu_A; mu_B; mu_C];
a = mvnrnd(mu_a, Caa)';
A = a(1);
B = a(2);
C = a(3);

% Zajvektor generálása
w = sigma_w * randn(size(t));

% A jel generálása
z_clean = A*sin(2*pi*f0*t) + B*cos(2*pi*f0*t) + C;
z = z_clean + w;
```

2. Minimális átlagos négyzetes hibájú (MS) becslő

A megfigyelés az alábbi lineáris egyenlettel írható fel:

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_{ww}) \tag{2}$$

ahol $\mathbf{z}$ a mért értékek, $\mathbf{C}_{ww}$ a zaj kovarianciája.

A posteriori becslés:

$$\hat{\mathbf{a}}_{\mathrm{MS}} = \boldsymbol{\mu}_a + \left(\mathbf{U}^T\mathbf{C}_{ww}^{-1}\mathbf{U} + \mathbf{C}_{aa}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{C}_{ww}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{U}\boldsymbol{\mu}_a) \tag{3}$$

ahol

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} sin(2\pi f_0\mathbf{t}) & cos(2\pi f_0\mathbf{t}) & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

A posteriori kovariancia:

$$\mathbf{C}_{aa|z} = \left(\mathbf{U}^T\mathbf{C}_{ww}^{-1}\mathbf{U} + \mathbf{C}_{aa}^{-1}\right)^{-1} \tag{5}$$

A becslés feltételes torzítása:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}(\mathbf{a}) = E\{\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{MS}}|\mathbf{a}\} - \mathbf{a} &= E\{\mu_{\mathbf{a|z}} + \mathbf{C_{aa|z}U^TC_{ww}^{-1}}(\mathbf{z} - \mathbf{U}\mu_{\mathbf{a}})\} - \mathbf{a} && (6)\\
&= \mu_{\mathbf{a|z}} + \mathbf{C_{aa|z}U^TC_{ww}^{-1}Ua} - \mathbf{C_{aa|z}U^TC_{w}^{-1}U}\mu_{\mathbf{a}} - \mathbf{a} && (7)\\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{C_{aa|z}U^TC_{ww}^{-1}U})\mu_{\mathbf{a|z}} + (\mathbf{C_{aa|z}U^TC_{ww}^{-1}U} - \mathbf{I})\mathbf{a} && (8)
\end{aligned}$$

ahol felhasználtam, hogy $E\{\mathbf{z}\} = \mathbf{U}\mathbf{a}$.

A felhasznált paraméterek:

$$\mu_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_a = 0.1, \qquad \sigma_w = 0.2 \qquad \rho = 0.2, \qquad t_0 = 10ms \tag{9}$$

Eredmények egész periódus mintavételezése esetén:

$$N = 5, fs = 250 \text{ Hz}: \tag{10}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1.0925 \\ 2.0185 \\ 0.9983 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{MS}} = \begin{pmatrix} 1.0630 \\ 2.0228 \\ 1.0892 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{MS}} = \begin{pmatrix} 0.0295 \\ -0.0043 \\ -0.0909 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -0.0564 \\ -0.0073 \\ 0.0018 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{aa|z}} = \begin{pmatrix} 6.0939 \times 10^{-3} & 7.5149 \times 10^{-4} & 6.8318 \times 10^{-5} \\ 7.5149 \times 10^{-4} & 6.0120 \times 10^{-3} & 5.4654 \times 10^{-4} \\ 6.8318 \times 10^{-5} & 5.4654 \times 10^{-4} & 4.4133 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$N = 10, fs = 500 \text{ Hz}: \tag{13}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1.0240 \\ 1.9372 \\ 0.9236 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{MS}} = \begin{pmatrix} 1.0152 \\ 1.9915 \\ 0.9105 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{MS}} = \begin{pmatrix} 0.0087 \\ -0.0543 \\ 0.0131 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -0.0143 \\ 0.0250 \\ 0.0202 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{aa|z}} = \begin{pmatrix} 4.3995 \times 10^{-3} & 3.9489 \times 10^{-4} & 2.3229 \times 10^{-5} \\ 3.9489 \times 10^{-4} & 4.3438 \times 10^{-3} & 2.5552 \times 10^{-4} \\ 2.3229 \times 10^{-5} & 2.5552 \times 10^{-4} & 2.8386 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$N = 100, fs = 5 \text{ kHz}: \tag{16}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0.7808 \\ 1.7289 \\ 0.9536 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{MS}} = \begin{pmatrix} 0.8099 \\ 1.7454 \\ 0.9414 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{MS}} = \begin{pmatrix} -0.0292 \\ -0.0164 \\ 0.0122 \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0.0130 \\ 0.0177 \\ -0.0002 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{aa|z}} = \begin{pmatrix} 7.3864 \times 10^{-4} & 1.1330 \times 10^{-5} & 9.0641 \times 10^{-8} \\ 1.1330 \times 10^{-5} & 7.3646 \times 10^{-4} & 5.8917 \times 10^{-6} \\ 9.0641 \times 10^{-8} & 5.8917 \times 10^{-6} & 3.8405 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \tag{18}$$

Eredmények tized periódus mintavételezése esetén:

$$N = 5, fs = 2.5 \text{ kHz}: \tag{19}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0.9876 \\ 2.1435 \\ 1.1668 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{MS}} = \begin{pmatrix} 0.9711 \\ 1.9497 \\ 1.0539 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{MS}} = \begin{pmatrix} 0.0165 \\ 0.1938 \\ 0.1129 \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0.0056 \\ -0.1540 \\ -0.1561 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{aa|z}} = \begin{pmatrix} 9.0679 \times 10^{-3} & 7.4870 \times 10^{-4} & 1.6681 \times 10^{-3} \\ 7.4870 \times 10^{-4} & 7.3785 \times 10^{-3} & 4.6077 \times 10^{-3} \\ 1.6681 \times 10^{-3} & 4.6077 \times 10^{-3} & 7.4013 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$N = 10, fs = 5 \text{ kHz}: \tag{22}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1.0489 \\ 2.1112 \\ 1.0935 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{MS}} = \begin{pmatrix} 1.0261 \\ 2.0430 \\ 0.9605 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{MS}} = \begin{pmatrix} 0.0228 \\ 0.0682 \\ 0.1330 \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -0.0429 \\ -0.1016 \\ -0.1030 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{aa|z}} = \begin{pmatrix} 8.5732 \times 10^{-3} & 4.6686 \times 10^{-4} & 1.9998 \times 10^{-3} \\ 4.6686 \times 10^{-4} & 6.8928 \times 10^{-3} & 5.0925 \times 10^{-3} \\ 1.9998 \times 10^{-3} & 5.0925 \times 10^{-3} & 6.9066 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$N = 100, fs = 50\ \text{kHz}: \tag{25}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0.9245 \\ 2.1192 \\ 0.8561 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{MS}} = \begin{pmatrix} 1.0290 \\ 2.1148 \\ 0.8877 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{MS}} = \begin{pmatrix} -0.1045 \\ 0.0043 \\ -0.0316 \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0.0827 \\ 0.0011 \\ 0.0316 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{aa}|\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 5.4511 \times 10^{-3} & 7.2058 \times 10^{-4} & 2.2288 \times 10^{-3} \\ 7.2058 \times 10^{-4} & 6.1036 \times 10^{-3} & 5.7441 \times 10^{-3} \\ 2.2288 \times 10^{-3} & 5.7441 \times 10^{-3} & 6.2379 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \tag{27}$$

MATLAB implementáció

```
% Paraméterek felírása
U = [sin(2*pi*f0*t), cos(2*pi*f0*t), ones(length(t),1)];

% MS becslő
a_MS = mu_a + inv(U'*inv(Cww)*U + ...
    inv(Caa)) * U'*inv(Cww) * (z - U*mu_a);

% MS becslő torzítása
b_a_MS = (eye(3) - inv(U'*inv(Cww)*U + ...
    inv(Caa)) * U'*inv(Cww)*U) * mu_a + ...
    (inv(U'*inv(Cww)*U + inv(Caa)) * U'*inv(Cww)*U - eye(3)) * a;

% MS becslő kovarianciája
Caaz_MS = inv(U'*inv(Cww)*U + inv(Caa));
```

3. Maximum-likelihood (ML) becslő

Mivel a megfigyelési zaj Gauss-eloszlású, így Gauss-Markov (GM) becslőt alkalmazok. A megfigyelési modell:

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_{ww}) \tag{28}$$

A likelihood függvény:

$$f(\mathbf{z}|\mathbf{a}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\mathbf{C}_{ww}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a})^T \mathbf{C}_{ww}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a})\right) \tag{29}$$

A becslő a csatornakarakterisztika maximumhelyének választjuk. Ekkor:

$$\hat{\mathbf{a}}_{\mathrm{ML}} = \left(\mathbf{U}^T \mathbf{C}_{ww}^{-1} \mathbf{U}\right)^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C}_{ww}^{-1} \mathbf{z} \tag{30}$$

A kovariancia mátrix:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{aa}|\mathbf{z}} = (\mathbf{U}^T \mathbf{C}_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \tag{31}$$

A Gauss–Markov becslő torzítatlan, ezért bármilyen N érték esetén a becslés torzítása zérus.

A használt paraméterek megegyeznek a (9) egyenletben megadottakkal, és az értékek az előző feladat során generált mintákból származnak.

Eredmények egész periódus mintavételezése esetén:

$$N = 5, fs = 250 \text{ Hz}: \tag{32}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1.0925 \\ 2.0185 \\ 0.9983 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{GM}} = \begin{pmatrix} 1.1603 \\ 2.0115 \\ 1.1598 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{GM}} = \begin{pmatrix} -0.0678 \\ 0.0070 \\ -0.1614 \end{pmatrix} \tag{33}$$

$$\mathbf{C_{aa|z}} = \begin{pmatrix} 1.6000 \times 10^{-2} & 5.9117 \times 10^{-18} & -4.5475 \times 10^{-19} \\ 6.8212 \times 10^{-18} & 1.6000 \times 10^{-2} & 2.8422 \times 10^{-18} \\ -4.5475 \times 10^{-19} & 2.8422 \times 10^{-18} & 8.000 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$N = 10, fs = 500 \text{ Hz}: \tag{35}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1.0240 \\ 1.9372 \\ 0.9236 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{GM}} = \begin{pmatrix} 1.0294 \\ 1.9964 \\ 0.8739 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{GM}} = \begin{pmatrix} -0.0054 \\ -0.0593 \\ 0.0497 \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$\mathbf{C_{aa|z}} = \begin{pmatrix} 8.0000 \times 10^{-3} & 1.6814 \times 10^{-18} & 9.6634 \times 10^{-19} \\ 1.8759 \times 10^{-18} & 8.0000 \times 10^{-3} & 1.8190 \times 10^{-18} \\ 9.9408 \times 10^{-19} & 1.8087 \times 10^{-18} & 4.0000 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \tag{37}$$

$$N = 100, fs = 5 \text{ kHz}: \tag{38}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0.7808 \\ 1.7289 \\ 0.9536 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{GM}} = \begin{pmatrix} 0.7983 \\ 1.7274 \\ 0.9410 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{GM}} = \begin{pmatrix} -0.0176 \\ 0.0015 \\ 0.0126 \end{pmatrix} \tag{39}$$

$$\mathbf{C_{aa|z}} = \begin{pmatrix} 8.0000 \times 10^{-4} & 9.2078 \times 10^{-20} & 4.3769 \times 10^{-20} \\ 1.1001 \times 10^{-19} & 8.0000 \times 10^{-4} & 4.7748 \times 10^{-20} \\ 7.8542 \times 10^{-20} & 6.6438 \times 10^{-20} & 4.0000 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \tag{40}$$

Eredmények tized periódus mintavételezése esetén:

$$N = 5, fs = 2.5 \text{ kHz}: \tag{41}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0.9876 \\ 2.1435 \\ 1.1668 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{GM}} = \begin{pmatrix} 4.1392 \\ 14.7225 \\ 14.0597 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{GM}} = \begin{pmatrix} -3.1516 \\ -12.5791 \\ -12.8929 \end{pmatrix} \tag{42}$$

$$\mathbf{C_{aa|z}} = \begin{pmatrix} 3.1096 & 11.1068 & 11.3500 \\ 11.1068 & 43.5162 & 44.2052 \\ 11.3500 & 44.2052 & 44.9295 \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$N = 10, fs = 5 \text{ kHz}: \tag{44}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1.0489 \\ 2.1112 \\ 1.0935 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{GM}} = \begin{pmatrix} 2.8112 \\ 8.0206 \\ 7.0777 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{GM}} = \begin{pmatrix} -1.7623 \\ -5.9094 \\ -5.9842 \end{pmatrix} \tag{45}$$

$$\mathbf{C_{aa|z}} = \begin{pmatrix} 1.6494 & 5.2463 & 5.4091 \\ 5.2463 & 18.1831 & 18.6181 \\ 5.4091 & 18.6181 & 19.0777 \end{pmatrix} \tag{46}$$

$$N = 100, fs = 50\text{ kHz}: \tag{47}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0.9245 \\ 2.1192 \\ 0.8561 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{GM}} = \begin{pmatrix} 0.8873 \\ 1.8259 \\ 0.5689 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{GM}} = \begin{pmatrix} 0.0372 \\ 0.2932 \\ 0.2872 \end{pmatrix} \tag{48}$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{aa}|\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 0.1868 & 0.5427 & 0.5644 \\ 0.5427 & 1.7006 & 1.7559 \\ 0.5644 & 1.7559 & 1.8146 \end{pmatrix} \tag{49}$$

MATLAB implementáció

```
% ML becslő
a_ML = inv(U'*inv(Cww)*U) * U'*inv(Cww)*z;

% ML becslő torzítása
b_a_ML = zeros(3,1);

% ML becslő kovarianciája
Caaz_ML = inv(U'*inv(Cww)*U);
```

4. Legkisebb négyzetes hibájú (LS) becslő

A legkisebb négyzetek módszere (LS) minimális előzetes információt feltételez: nem ismerjük sem a paraméterek ($\mathbf{C}_{aa}$), sem a zaj szórását ($\mathbf{C}_{ww}$). A modell továbbra is lineáris:

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{w} \tag{50}$$

A becslőt a négyzetes hiba minimalizálásával kapjuk:

$$\hat{\mathbf{a}}_{\text{LS}} = \left(\mathbf{U}^T\mathbf{U}\right)^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{z} \tag{51}$$

A négyzetes hiba:

$$J(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{z}^T(\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{LS}}) \tag{52}$$

A becslő torzítatlan, így a torzítás minden N érték esetén zérus marad.

A használt paraméterek megegyeznek a (9) egyenletben megadottakkal, és az értékek az előző feladat során generált mintákból származnak.

Eredmények egész periódus mintavételezése esetén:

$$N = 5, fs = 250\text{ Hz}: \tag{53}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1.0925 \\ 2.0185 \\ 0.9983 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{LS}} = \begin{pmatrix} 1.1603 \\ 2.0115 \\ 1.1598 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{LS}} = \begin{pmatrix} -0.0678 \\ 0.0070 \\ -0.1614 \end{pmatrix} \tag{54}$$

$$J(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) = 0.0074 \tag{55}$$

$$N = 10, fs = 500 \text{ Hz}: \tag{56}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1.0240 \\ 1.9372 \\ 0.9236 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{LS}} = \begin{pmatrix} 1.0294 \\ 1.9964 \\ 0.8739 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{LS}} = \begin{pmatrix} -0.0054 \\ -0.0593 \\ 0.0497 \end{pmatrix} \tag{57}$$

$$J(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) = 0.6026 \tag{58}$$

$$N = 100, fs = 5 \text{ kHz}: \tag{59}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0.7808 \\ 1.7289 \\ 0.9536 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{LS}} = \begin{pmatrix} 0.7983 \\ 1.7274 \\ 0.9410 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{LS}} = \begin{pmatrix} -0.0176 \\ 0.0015 \\ 0.0126 \end{pmatrix} \tag{60}$$

$$J(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) = 3.5018 \tag{61}$$

Eredmények tized periódus mintavételezése esetén:

$$N = 5, fs = 2.5 \text{ kHz}: \tag{62}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0.9876 \\ 2.1435 \\ 1.1668 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{LS}} = \begin{pmatrix} 4.1392 \\ 14.7225 \\ 14.0597 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{LS}} = \begin{pmatrix} -3.1516 \\ -12.5791 \\ -12.8929 \end{pmatrix} \tag{63}$$

$$J(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) = 0.0542 \tag{64}$$

$$N = 10, fs = 5 \text{ kHz}: \tag{65}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1.0489 \\ 2.1112 \\ 1.0935 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{LS}} = \begin{pmatrix} 2.8112 \\ 8.0206 \\ 7.0777 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{LS}} = \begin{pmatrix} -1.7623 \\ -5.9094 \\ -5.9842 \end{pmatrix} \tag{66}$$

$$J(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) = 0.4763 \tag{67}$$

$$N = 100, fs = 50 \text{ kHz}: \tag{68}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0.9245 \\ 2.1192 \\ 0.8561 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{LS}} = \begin{pmatrix} 0.8873 \\ 1.8259 \\ 0.5689 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{LS}} = \begin{pmatrix} 0.0372 \\ 0.2932 \\ 0.2872 \end{pmatrix} \tag{69}$$

$$J(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) = 4.1866 \tag{70}$$

MATLAB implementáció

```
% LS becslő
a_LS = inv(U'*U) * U'*z;

% LS becslő torzítása
b_a_LS = zeros(3,1);

% LS becslő négyzetes hibája
Jaaz_LS = z'*(z-U*a_LS);
```

5. A jel más formában való jellemzése

A jelet most

$$u(t) = D\sin(2\pi f_0\mathbf{t} + \phi) + C \tag{71}$$

formában kell jellemezni. Ekkor:

$$D = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{72}$$

$$\phi = \arctan\frac{B}{A} \tag{73}$$

$$var(\hat{D}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial D}{\partial A} & \frac{\partial D}{\partial B} \end{pmatrix} \mathbf{C_{aa}} \begin{pmatrix} \frac{\partial D}{\partial A} & \frac{\partial D}{\partial B} \end{pmatrix}^T \tag{74}$$

$$var(\hat{\phi}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial A} & \frac{\partial \phi}{\partial B} \end{pmatrix} \mathbf{C_{aa}} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial A} & \frac{\partial \phi}{\partial B} \end{pmatrix}^T \tag{75}$$

A parciális deriváltak kiszámolva:

$$\frac{\partial D}{\partial A} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad \frac{\partial D}{\partial B} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{76}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial A} = \frac{-B}{A^2 + B^2}, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial B} = \frac{A}{A^2 + B^2} \tag{77}$$

A Jacobi-mátrix kiszámolása:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(D,\phi)}{\partial(A,B,C)} = \begin{pmatrix} \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} & \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} & 0 \\ \frac{-B}{A^2+B^2} & \frac{A}{A^2+B^2} & 0 \end{pmatrix} \tag{78}$$

Ebből D és ϕ kovarianciájának az alsó határa:

$$\mathbf{C}_{(D,\phi)(D,\phi)} = \mathbf{J}\mathbf{I_a}^{-1}\mathbf{J}^T \tag{79}$$

Az eredeti valószínűségi sűrűségfüggvény:

$$f(\mathbf{z};\mathbf{a}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^{N/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}(\mathbf{z}-\mathbf{Ua})^T(\mathbf{z}-\mathbf{Ua})} \tag{80}$$

A log-likelihood:

$$\ln f(\mathbf{z};\mathbf{a}) = -\frac{N}{2}\ln(2\pi\sigma_w^2) - \frac{1}{2\sigma_w^2}(\mathbf{z}-\mathbf{Ua})^T(\mathbf{z}-\mathbf{Ua}) \tag{81}$$

A második deriváltat:

$$\frac{\partial^2}{\partial^2\mathbf{a}}\ln f(\mathbf{z};\mathbf{a}) = -\frac{1}{\sigma_w^2}\mathbf{U}^T\mathbf{U} \tag{82}$$

A Fisher-információs mátrix definíció szerint:

$$\mathbf{I}(\mathbf{a}) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial^2\mathbf{a}}\ln f(\mathbf{z};\mathbf{a})\right] = \frac{1}{\sigma_w^2}\mathbf{U}^T\mathbf{U} \tag{83}$$

ahol

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N-1}\sin^2(\omega t_n) & \sum_{n=0}^{N-1}\sin(\omega t_n)\cos(\omega t_n) & \sum_{n=0}^{N-1}\sin(\omega t_n) \\ \sum_{n=0}^{N-1}\sin(\omega t_n)\cos(\omega t_n) & \sum_{n=0}^{N-1}\cos^2(\omega t_n) & \sum_{n=0}^{N-1}\cos(\omega t_n) \\ \sum_{n=0}^{N-1}\sin(\omega t_n) & \sum_{n=0}^{N-1}\cos(\omega t_n) & N \end{pmatrix} \tag{84}$$

Ha egész periódusnyi jelet mintavételezünk, akkor ez tovább egyszerűsödik:

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{N}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix} \tag{85}$$

Ekkor a Fisher-információs mátrix inverze:

$$\mathbf{I_a}^{-1} = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{N} \end{bmatrix} \tag{86}$$

D és ϕ varianciájának minimuma:

$$\mathbf{C}_{(D,\phi)(D,\phi)} = \mathbf{J}\mathbf{I_a}^{-1}\mathbf{J}^T = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_w^2}{N} \\ \frac{2\sigma_w^2}{ND^2} \end{pmatrix} \tag{87}$$

A használt paraméterek megegyeznek a (9) egyenletben megadottakkal, és az értékek az előző feladat során generált mintákból származnak.

A Gauss–Markov (GM) becslő és a legkisebb négyzetes (LS) becslő eredményeinek hasonlósága annak köszönhető, hogy a generált zaj varianciája alacsony értékű volt. A két becslő közötti fő különbség, hogy az LS becslő nem veszi figyelembe a csatornakarakterisztikát sem. Mivel a zaj szintje kicsi, a becslésre gyakorolt hatása is kicsi.

Az eredmények MS becslő használata és egész periódus mintavételezése esetén:

$$N = 5: \quad \begin{aligned} \hat{D} &= 2.2851, \quad C_{D|z} = 0.0066 \\ \phi &= 1.0870, \quad C_{\phi|z} = 0.0010 \end{aligned} \tag{88}$$

$$N = 10: \quad \begin{aligned} \hat{D} &= 2.2353, \quad C_{D|z} = 0.0047 \\ \phi &= 1.0993, \quad C_{\phi|z} = 8.1425 \times 10^{-4} \end{aligned} \tag{89}$$

$$N = 100: \quad \begin{aligned} \hat{D} &= 1.9241, \quad C_{D|z} = 7.4550 \times 10^{-4} \\ \phi &= 1.1363, \quad C_{\phi|z} = 1.9707 \times 10^{-4} \end{aligned} \tag{90}$$

Az eredmények ML becslő használata és egész periódus mintavételezése esetén:

$$N = 5: \quad \begin{aligned} \hat{D} &= 2.3222, \quad C_{D|z} = 0.0160 \\ \phi &= 1.0476, \quad C_{\phi|z} = 0.0030 \end{aligned} \tag{91}$$

$$N = 10: \quad \begin{aligned} \hat{D} &= 2.2462, \quad C_{D|z} = 0.0080 \\ \phi &= 1.0947, \quad C_{\phi|z} = 0.0016 \end{aligned} \tag{92}$$

$$N = 100: \quad \begin{aligned} \hat{D} &= 1.9030, \quad C_{D|z} = 8 \times 10^{-4} \\ \phi &= 1.1379, \quad C_{\phi|z} = 2.2091 \times 10^{-4} \end{aligned} \tag{93}$$

Az eredmények LS becslő használata és egész periódus mintavételezése esetén:

$$N = 5: \quad \begin{aligned} \hat{D} &= 2.3222 \\ \phi &= 1.0476 \end{aligned} \tag{94}$$

$$N = 10: \quad \begin{aligned} \hat{D} &= 2.2462 \\ \phi &= 1.0947 \end{aligned} \tag{95}$$

$$N = 100: \quad \begin{aligned} \hat{D} &= 1.9030 \\ \phi &= 1.1379 \end{aligned} \tag{96}$$

Az eredmények MS becslő használata és tized periódus mintavételezése esetén:

$$N = 5: \quad \begin{aligned} \hat{D} &= 2.1781, \quad C_{D|z} = 0.0083 \\ \phi &= 1.1087, \quad C_{\phi|z} = 0.0017 \end{aligned} \tag{97}$$

$$N = 10: \quad \begin{aligned} \hat{D} &= 2.2861, \quad C_{D|z} = 0.0076 \\ \phi &= 1.1054, \quad C_{\phi|z} = 0.0015 \end{aligned} \tag{98}$$

$$N = 100: \quad \begin{aligned} \hat{D} &= 2.3519, \quad C_{D|z} = 0.0065 \\ \phi &= 1.1180, \quad C_{\phi|z} = 9.0558 \times 10^{-4} \end{aligned} \tag{99}$$

Az eredmények ML becslő használata és tized periódus mintavételezése esetén:

$$N = 5: \quad \begin{aligned} \hat{D} &= 15.2933, \quad C_{D|z} = 46.3441 \\ \phi &= 1.2967, \quad C_{\phi|z} = 0.0012 \end{aligned} \tag{100}$$

$$N = 10: \quad \begin{aligned} \hat{D} &= 8.4990, \quad C_{D|z} = 19.6495 \\ \phi &= 1.2337, \quad C_{\phi|z} = 0.0025 \end{aligned} \tag{101}$$

$$N = 100: \quad \begin{aligned} \hat{D} &= 2.0301, \quad C_{D|z} = 1.8381 \\ \phi &= 1.1184, \quad C_{\phi|z} = 0.0120 \end{aligned} \tag{102}$$

Az eredmények LS becslő használata és tized periódus mintavételezése esetén:

$$N = 5: \quad \begin{aligned} \hat{D} &= 15.2933 \\ \phi &= 1.2967 \end{aligned} \tag{103}$$

$$N = 10: \quad \begin{aligned} \hat{D} &= 8.4990 \\ \phi &= 1.2337 \end{aligned} \tag{104}$$

$$N = 100: \quad \begin{aligned} \hat{D} &= 2.0301 \\ \phi &= 1.1184 \end{aligned} \tag{105}$$

MATLAB implementáció

```
% MS becslőből
D_hat_MS = sqrt(a_MS(1)^2 + a_MS(2)^2);
phi_hat_MS = atan2(a_MS(2), a_MS(1));

% Parciális deriváltak
dD_dA_MS = a_MS(1) / D_hat_MS;
dD_dB_MS = a_MS(2) / D_hat_MS;
```

```
dphi_dA_MS = -a_MS(2) / D_hat_MS^2;
dphi_dB_MS = a_MS(1) / D_hat_MS^2;

% Részmátrix Caa a becsült kovariancia mátrixból
C_AB_MS = Caaz_MS(1:2, 1:2);

var_D_MS = [dD_dA_MS, dD_dB_MS] * C_AB_MS * [dD_dA_MS; dD_dB_MS];
var_phi_MS = [dphi_dA_MS, dphi_dB_MS] * C_AB_MS * [dphi_dA_MS; dphi_dB_MS];

% ML becslőből
D_hat_ML = sqrt(a_ML(1)^2 + a_ML(2)^2);
phi_hat_ML = atan2(a_ML(2), a_ML(1));

% Parciális deriváltak
dD_dA_ML = a_ML(1) / D_hat_ML;
dD_dB_ML = a_ML(2) / D_hat_ML;

dphi_dA_ML = -a_ML(2) / D_hat_ML^2;
dphi_dB_ML = a_ML(1) / D_hat_ML^2;

% Részmátrix Caa a becsült kovariancia mátrixból
C_AB_ML = Caaz_ML(1:2, 1:2);

var_D_ML = [dD_dA_ML, dD_dB_ML] * C_AB_ML * [dD_dA_ML; dD_dB_ML];
var_phi_ML = [dphi_dA_ML, dphi_dB_ML] * C_AB_ML * [dphi_dA_ML; dphi_dB_ML];

% LS becslőből
D_hat_LS = sqrt(a_LS(1)^2 + a_LS(2)^2);
phi_hat_LS = atan2(a_LS(2), a_LS(1));

% Parciális deriváltak
dD_dA_LS = a_LS(1) / D_hat_LS;
dD_dB_LS = a_LS(2) / D_hat_LS;

dphi_dA_LS = -a_LS(2) / D_hat_LS^2;
dphi_dB_LS = a_LS(1) / D_hat_LS^2;
```

Tapasztalatok

- **Jelgenerálás és mintavételezés**:
  - A szinuszos jel generálása során a Gauss-zaj hozzáadása jelentősen befolyásolja a becslések pontosságát
  - Az egész perióduson történő mintavételezés lényegesen pontosabb eredményeket ad, mint a tized periódus mintavételezése
- **Becslési módszerek összehasonlítása**:

- A Bayes-becslő (MS) bizonyult a legpontosabbnak, mivel kihasználja az előzetes statisztikai információkat
- A Maximum Likelihood (ML) becslő közepes pontosságot mutatott, különösen alacsony zajszint mellett
- A Legkisebb Négyzetek (LS) módszere a legkevésbé volt pontos, főleg kevés minta esetén
- A tized periódus mintavételezés drasztikusan rontotta mindhárom becslő pontosságát

- **Konvergencia viselkedés**:
  - A mintaszám növelése javítja a becslések pontosságát
  - 100 mintánál már mindhárom módszer elfogadható pontosságot mutatott egész periódus mintavételezés esetén
  - A becslések szórása a mintaszám növelésével csökken

6. Multiszinuszos generátor készítése

A feladat előírása szerint a multiszinuszos jel csúcsértékét véletlen és nulla fázis esetén is vizsgálni kellett. A következő táblázat néhány példaértéket mutat:

$$\hat{u}_1 = 34.6218, \qquad \hat{u}_1\Big|_{\phi=0} = 201 \tag{106}$$
$$\hat{u}_2 = 30.2065, \qquad \hat{u}_2\Big|_{\phi=0} = 201 \tag{107}$$
$$\hat{u}_3 = 36.2027, \qquad \hat{u}_3\Big|_{\phi=0} = 201 \tag{108}$$

$\phi = 0$ esetén lesz egy olyan időpillanat, amikor valamennyi szinusz egyszerre éri el a saját maximális értékét. Mivel minden szinusz maximuma 1, és összesen 201 komponens van, az eredő jel ebben a pillanatban 201 értéket vesz fel, azaz $\hat{u} = 201$.

MATLAB implementáció

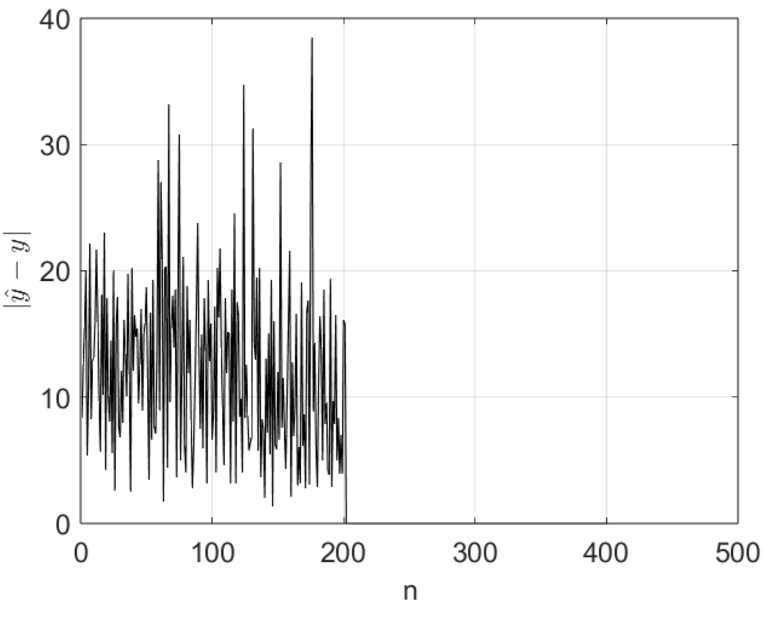
```
% Paraméterek megadása
M = 100;
bazis_meret=2*M+1;
N = 401;
n = 0:N-1;
x = ones(bazis_meret,1);

% Véletlen fázis, 0 a várható értéke
phi = 2*pi*rand(bazis_meret,1);

% Frekvenciák
theta = 2*pi*(0:bazis_meret-1)'/(bazis_meret);

% A jel generálása
c = exp(1i*(theta*n + repmat(phi, [1,N])));
```

```
u = sum(x.*c, 1);

% 0 fázis esetén
c_test = exp(1i*(theta*n));
u_test = sum(x.*c_test);

% Csúcsérték
u_max = max(abs(u));
u_test_max = max(abs(u_test));
```

Tapasztalatok

- **Fázis hatása a csúcsértékre**:
  - A véletlen fázisú esetben a jel csúcsértéke jelentősen kisebb (30-36 körüli értékek), mivel a szinuszos komponenseknek nem lesz egyszerre csúcsértéke
  - Nullafázisú esetben minden komponens egyszerre éri el maximumát, így a csúcsérték pontosan a komponensek számával (201) egyezik meg

7. Multiszinusz analizátor készítése



1. ábra. A multiszinusz generátor és a multiszinusz analizátor kimenetének különbsége

MATLAB implementáció

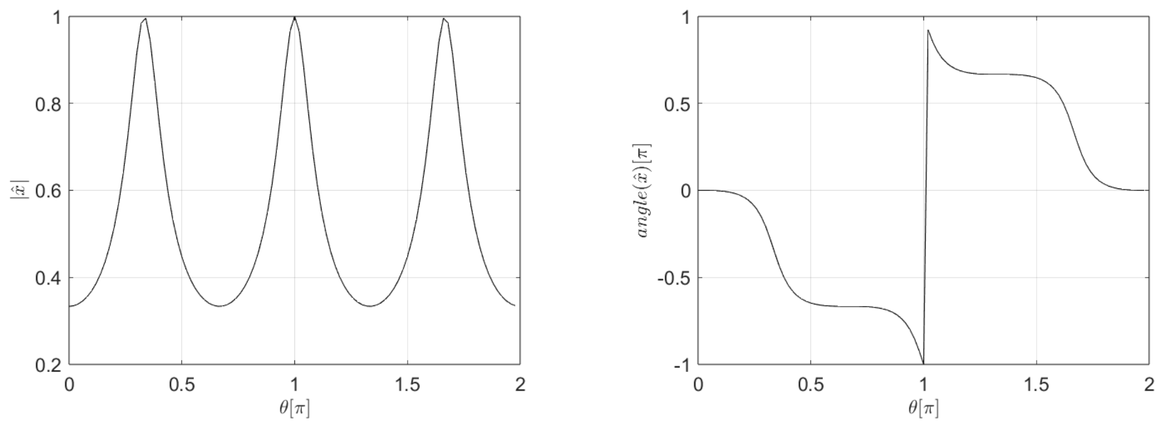
```
% g generálása
% g generálása
g = 1/bazis_meret * exp(-1i*(theta*n + repmat(phi, [1,N])));
```

```
% Az integrátorok kezdeti állapota
x_hat = zeros(bazis_meret,1);

% A kimenet
y_hat = zeros(1, length(u));

for n = 1:N
    y_hat(n) = sum(x_hat.*c(:,n));
    input = u(n) - y_hat(n);
    x_hat = x_hat + input*g(:,n);
end

figure;
plot(abs(y_hat-u), Color='black');
grid on;
xlabel('n');
ylabel('$$|\hat{y}-y|$$', 'Interpreter', 'latex');
fontsize(14,"points");
```

Tapasztalatok

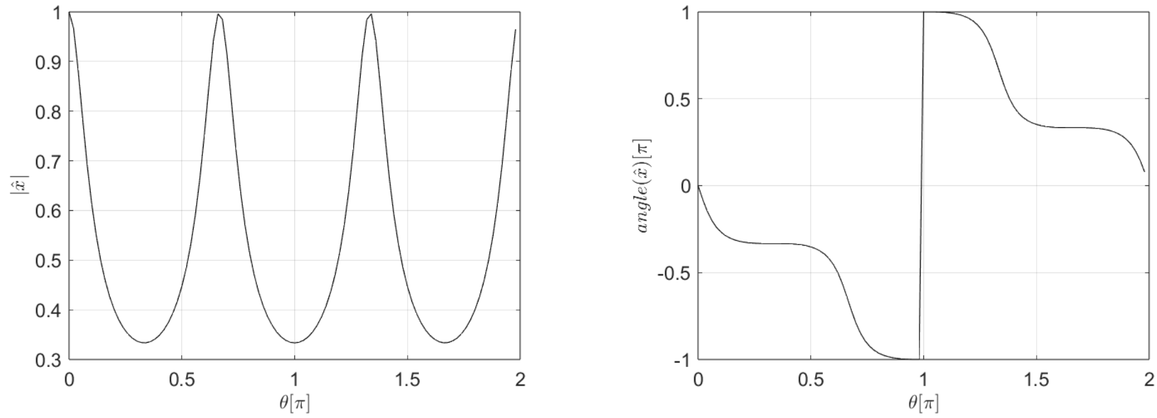
- **Konvergencia viselkedés**:
  - A rendszer 201 minta után éri el a konvergenciát, ami pontosan megfelel a komponensek számának (2M+1=201)

8. Különböző átviteli függvények meghatározása multiszinusz analizátorral



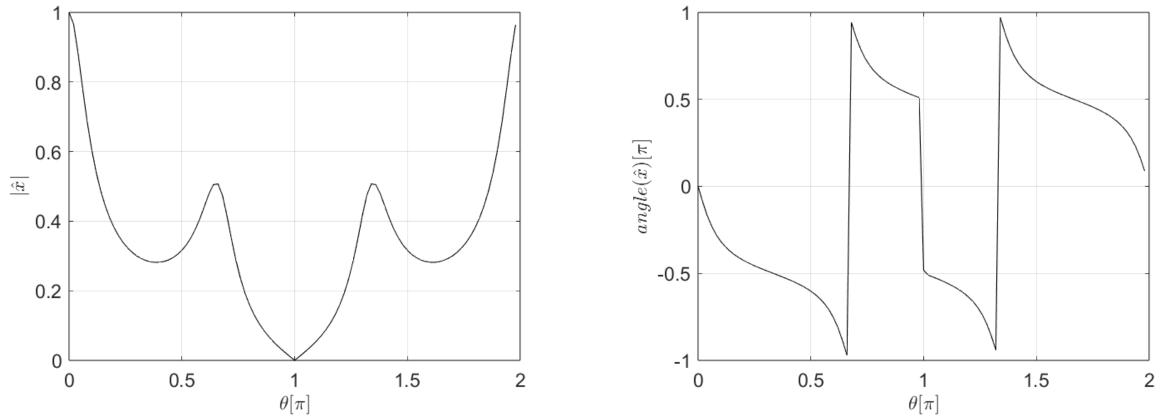
(a) Amplitúdó　　(b) Fázis

2. ábra. Az A rendszer amplitúdó és fázismenete az adott multiszinusz frekvenciákon



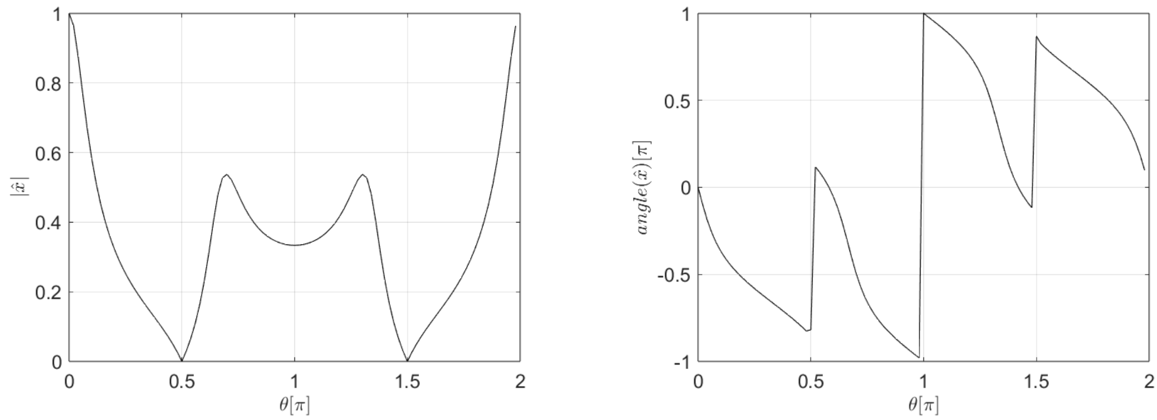
(a) Amplitúdó (b) Fázis

3. ábra. A B rendszer amplitúdó és fázismenete az adott multiszinusz frekvenciákon



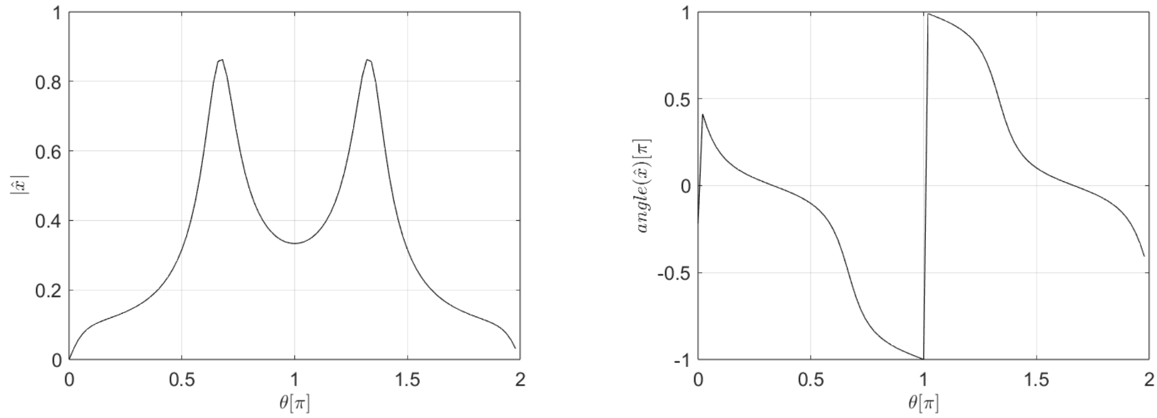
(a) Amplitúdó (b) Fázis

4. ábra. A C rendszer amplitúdó és fázismenete az adott multiszinusz frekvenciákon



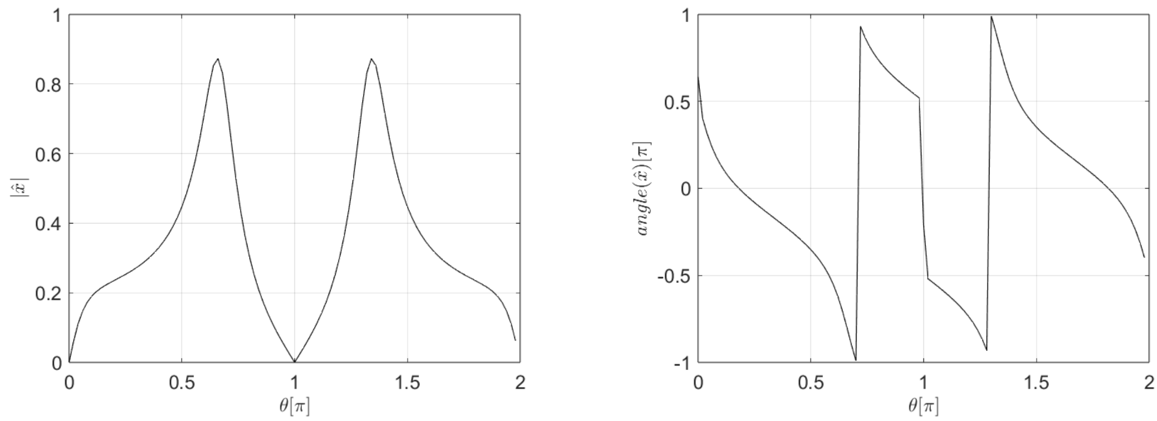
(a) Amplitúdó (b) Fázis

5. ábra. A D rendszer amplitúdó és fázismenete az adott multiszinusz frekvenciákon



(a) Amplitúdó (b) Fázis

6. ábra. Az E rendszer amplitúdó és fázismenete az adott multiszinusz frekvenciákon



(a) Amplitúdó (b) Fázis

7. ábra. Az F rendszer amplitúdó és fázismenete az adott multiszinusz frekvenciákon

MATLAB implementáció

```
function y = A(u,r)
% A: [ (1 - r)z^(-1) ] / [ 1 + rz^(-4) ]
% u: gerjesztés, r: paraméter, y: kimenet
% y(n)=-ry(n-4)+(1-r)u(n-1)
    y=zeros(1, length(u));
    yBuf=zeros(1,3);
    for n=2:length(u)
        y(n)=-r*yBuf(3)+(1-r)*u(n-1);
        yBuf=[y(n) yBuf(1:end-1)];
    end
end

function y = B(u,r)
% B: [ (1 - r)z^(-1) ] / [ 1 - rz^(-4) ]
% u: gerjesztés, r: paraméter, y: kimenet
```

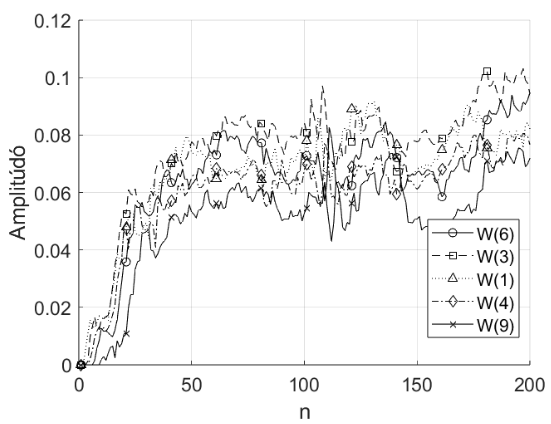
```
% y(n)=ry(n-4)+(1-r)u(n-1)
    y=zeros(1, length(u));
    yBuf=zeros(1,3);
    for n=2:length(u)
        y(n)=r*yBuf(3)+(1-r)*u(n-1);
        yBuf=[y(n) yBuf(1:end-1)];
    end
end

function y = C(u,r)
% C: [ (1 - r)z^(-1)(1 + z^(-1) ] / [ 2(1 + rz^(-4)) ]
% u: gerjesztés, r: paraméter, y: kimenet
% y(n)=ry(n-4)+1/2*(1-r)u(n-1)+1/2*(1-r)u(n-2)
    y=zeros(1, length(u));
    yBuf=zeros(1,3);
    uBuf=0;
    for n=2:length(u)
        y(n)=r*yBuf(3)+1/2*(1-r)*u(n-1)+1/2*(1-r)*uBuf;
        yBuf=[y(n) yBuf(1:end-1)];
        uBuf=u(n-1);
    end
end

function y = D(u,r)
% D: [ (1 - r)z^(-1)(1 + z^(-2) ] / [ 2(1 + rz^(-4)) ]
% u: gerjesztés, r: paraméter, y: kimenet
% y(n)=ry(n-4)+1/2*(1-r)u(n-1)+1/2*(1-r)u(n-3)
    y=zeros(1, length(u));
    yBuf=zeros(1,3);
    uBuf=zeros(1,2);
    for n=2:length(u)
        y(n)=r*yBuf(3)+1/2*(1-r)*u(n-1)+1/2*(1-r)*uBuf(2);
        yBuf=[y(n) yBuf(1:end-1)];
        uBuf=[u(n-1) uBuf(1)];
    end
end

function y = E(u,r)
% E: [ (1 - r)z^(-1)(1 - z^(-1) ] / [ 2(1 + rz^(-4)) ]
% u: gerjesztés, r: paraméter, y: kimenet
% y(n)=ry(n-4)+1/2*(1-r)u(n-1)-1/2*(1-r)u(n-2)
    y=zeros(1, length(u));
    yBuf=zeros(1,3);
    uBuf=0;
    for n=2:length(u)
        y(n)=r*yBuf(3)+1/2*(1-r)*u(n-1)-1/2*(1-r)*uBuf;
        yBuf=[y(n) yBuf(1:end-1)];
        uBuf=u(n-1);
```

```
    end
end

function y = F(u,r)
% F: [ (1 - r)z^(-1)(1 - z^(-2) ] / [ 2(1 + rz^(-4)) ]
% u: gerjesztés, r: paraméter, y: kimenet
% y(n)=ry(n-4)+1/2*(1-r)u(n-1)-1/2*(1-r)u(n-3)
    y=zeros(1, length(u));
    yBuf=zeros(1,3);
    uBuf=zeros(1,2);
    for n=2:length(u)
        y(n)=r*yBuf(3)+1/2*(1-r)*u(n-1)-1/2*(1-r)*uBuf(2);
        yBuf=[y(n) yBuf(1:end-1)];
        uBuf=[u(n-1) uBuf(1)];
    end
end

% Paraméterek
r = 0.83;
system = @ D;

% Kimenet generálása
y = system(u, r);

% A kimenet
y_hat = zeros(1, length(u));

% Az integrátorok kezdeti állapota
x_hat = zeros(bazis_meret,1);

for n = 1:N
    y_hat(n) = sum(x_hat.*c(:,n));
    input = y(n) - y_hat(n);
    x_hat = x_hat + input*g(:,n);
end

th = 2*pi/length(x_hat)*(0:length(x_hat)-1);
figure;
plot(th/pi, abs(x_hat), Color='black');
grid on;
xlabel('$$\theta [\pi]$$', 'Interpreter','latex');
ylabel('$$|\hat{x}|$$', 'Interpreter', 'latex');
fontsize(14,"points");

figure;
plot(th/pi, angle(x_hat)/pi, Color='black');
grid on;
xlabel('$$\theta [\pi]$$', 'Interpreter','latex');
```

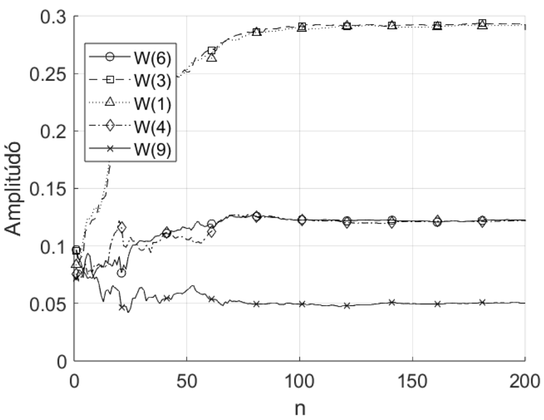
```
ylabel('$$angle(\hat{x}) [\pi]$$', 'Interpreter', 'latex');
fontsize(14,"points");
```

9. Lineáris kombinátor megvalósítása

A lineáris kombinátor paramétereiként $P = 15$ és $\mu = 0.0001$ értékeket választottam. A μ paramétert úgy állítottam be, hogy elegendően kicsi legyen a rendszer konvergenciájának biztosításához, viszont az általam generált bemeneti jel mintaszámához képest megfelelő időn belül konvergáljon. A megfigyelt rendszer a D rendszer volt, $r = 0.83$ paraméterértékkel.



(a) A W vektor 5 legnagyobb abszolút értékű tagja



(b) A W vektor 5 legnagyobb abszolút értékű tagja, miután a megfigyelt rendszer r paramétere felére csökken

8. ábra. A D rendszert megfigyelő lineáris kombinátor

A rendszer mértani sorba fejtése és összehasonlítása a lineáris kombinátor eredményével

$$D(z) = \frac{(1-r)z^{-1}(1+z^{-2})}{2(1-rz^{-4})} \tag{109}$$

A nevezőben lévő tagot mértani sorba fejtve ($|rz^{-4}| < 1$):

$$\frac{1}{1-rz^{-4}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n z^{-4n} \tag{110}$$

Ezt visszahelyettesítve $D(z)$-be:

$$D(z) = \frac{1-r}{2} z^{-1}(1+z^{-2}) \sum_{n=0}^{\infty} r^n z^{-4n} \tag{111}$$

A szorzást elvégezve:

$$D(z) = \frac{1-r}{2} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(z^{-1-4n} + z^{-3-4n}\right) \tag{112}$$

Végül két külön mértani sort kapunk:

$$D(z) = \frac{1-r}{2}\sum_{n=0}^{\infty} r^n z^{-1-4n} + \frac{1-r}{2}\sum_{n=0}^{\infty} r^n z^{-3-4n} \tag{113}$$

n	LMS komplex súly	Ideális súly
1	$0.0969 + 0.0210i$	0.085
2	$0.0125 + 0.0003i$	0
3	$0.0955 - 0.0032i$	0.085
4	$0.0819 - 0.0075i$	0
5	$0.0251 - 0.0141i$	0.07055
6	$0.0907 - 0.0159i$	0
7	$0.0710 - 0.0080i$	0.07055
8	$0.0237 - 0.0113i$	0
9	$0.0747 + 0.0087i$	0.05856
10	$0.0574 - 0.0013i$	0
11	$0.0215 + 0.0054i$	0.05856
12	$0.0536 + 0.0114i$	0
13	$0.0367 - 0.0004i$	0.04860
14	$0.0150 + 0.0266i$	0
15	$0.0408 + 0.0014i$	0.04860

1. táblázat. Eredmények $r = 0.83$ esetén

n	LMS komplex súly	Ideális súly
1	$0.2932 + 0.0009i$	0.2925
2	$0.0008 + 0.0003i$	0
3	$0.2927 + 0.0002i$	0.2925
4	$0.1215 - 0.0006i$	0.1214
5	$0.0009 - 0.0008i$	0
6	$0.1218 - 0.0012i$	0.1214
7	$0.0503 - 0.0006i$	0.0504
8	$0.0006 - 0.0007i$	0
9	$0.0507 + 0.0006i$	0.0504
10	$0.0210 - 0.0008i$	0.0209
11	$0.0006 + 0.0006i$	0
12	$0.0207 + 0.0008i$	0.0209
13	$0.0081 - 0.0000i$	0.0087
14	$0.0014 + 0.0026i$	0
15	$0.0089 - 0.0003i$	0.0087

2. táblázat. Eredmények $r = 0.415$ esetén

MATLAB implementáció

```
% Paraméterek
```

```
mu = 0.0001;
P = 15;

% Regressziós vektor
X = zeros(P,1);

% Súlytényezők
W = zeros(P,1);
W_buf = zeros(P, ceil(N/2));

y_reg = zeros(1, ceil(N/2));

for n = 1:ceil(N/2)
    y_reg(n) = W'*X;
    e = conj(y(n) - y_reg(n));
    W = W + 2*mu*e*X;
    X = [u(n); X(1:end-1)];
    W_buf(:,n) = W;
end


[~, W_maxI] = maxk(W, 5);
W_buf_top5 = abs(W_buf(W_maxI, :));

line_styles = {'-', '--', ':', '-.', '-'};
markers = {'o', 's', '^', 'd', 'x'};

figure;
hold on;
for i = 1:5
    plot(W_buf_top5(i,:), ...
        'LineStyle', line_styles{i}, ...
        'Marker', markers{i}, ...
        'MarkerIndices', 1:20:N/2, ...
        'Color', 'black');
end
hold off;
fontsize(14,"points");
xlabel('n');
ylabel('Amplitúdó');
legend("W("+string(W_maxI)+")", 'Location', 'best');
xlim([0, bazis_meret-1]);
grid on;


% r felére csökkentése
r = r/2;
y = system(u,r);
```

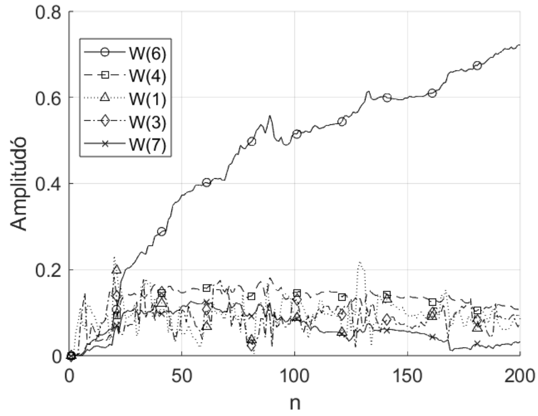
```
y_reg = zeros(1, floor(N/2));

for n = 1:floor(N/2)
    y_reg(n) = W'*X;
    e = conj(y(n) - y_reg(n));
    W = W + 2*mu*e*X;
    X = [u(n+ceil(N/2)); X(1:end-1)];
    W_buf(:,n) = W;
end

W_buf_top5 = abs(W_buf(W_maxI, :));

line_styles = {'-', '--', ':', '-.', '-'};
markers = {'o', 's', '^', 'd', 'x'};

figure;
hold on;
for i = 1:5
    plot(W_buf_top5(i,:), ...
        'LineStyle', line_styles{i}, ...
        'Marker', markers{i}, ...
        'MarkerIndices', 1:20:N/2, ...
        'Color', 'black');
end
hold off;
fontsize(14,"points");

xlabel('n');
ylabel('Amplitúdó');
legend("W("+string(W_maxI)+")", 'Location', 'best');
xlim([0, bazis_meret-1]);
grid on;
```

Tapasztalatok

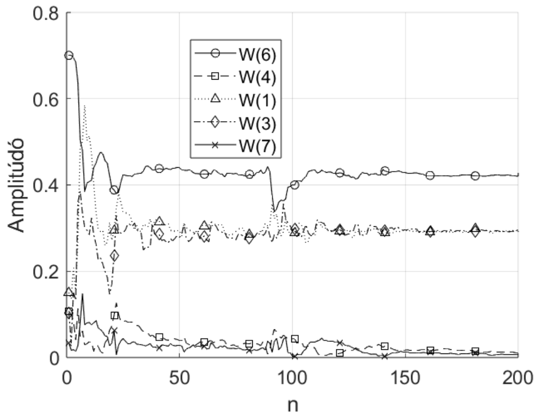
- **Konvergencia viselkedés**:
  - A μ=0.0001 paraméterérték megfelelő volt (a konvergencia sebessége és stabilitása tekintetében)
  - Kisebb μ értékek túlságosan lassú konvergenciát eredményeztek
  - Nagyobb μ értékek esetén instabilitás lépett fel
- **Paraméterváltozás hatása**:
  - Az új paraméterhez való alkalmazkodás egy korábbi paraméterkészletről sokkal kevesebb konvergencia időt igényelt, mintha a nulla paraméterkészletről indítanám

- **Együtthatók pontossága**:
  - Az LMS algoritmussal kapott súlyok és az elméleti értékek között jó egyezés figyelhető meg

10. Másik átviteli függvényre való modellillesztés



(a) A W vektor 5 legnagyobb abszolút értékű tagja



(b) A W vektor 5 legnagyobb abszolút értékű tagja, miután a megfigyelt rendszer r paramétere felére csökken

9. ábra. A D rendszert megfigyelő lineáris kombinátor

MATLAB implementáció

```
r = 0.83;
y = system(u,r);

mu = 0.001;
P = 7;

% Regressziós vektor
X = zeros(P,1);

% Súlytényezők
W = zeros(P,1);
W_buf = zeros(P, ceil(N/2));

y_reg = zeros(1, ceil(N/2));

for n = 1:ceil(N/2)
    y_reg(n) = W'*X;
    e = conj(y(n) - y_reg(n));
    W = W + 2*mu*e*X;
    X = [u(n); X(1:2); y(n); X(4:end-1)];
    W_buf(:,n) = W;
```

```
end

[~, W_maxI] = maxk(W, 5);
W_buf_top5 = abs(W_buf(W_maxI, :));


line_styles = {'-', '--', ':', '-.', '-'};
markers = {'o', 's', '^', 'd', 'x'};

figure;
hold on;
for i = 1:5
    plot(W_buf_top5(i,:), ...
        'LineStyle', line_styles{i}, ...
        'Marker', markers{i}, ...
        'MarkerIndices', 1:20:N/2, ...
        'Color', 'black');
end
hold off;
fontsize(14,"points");
xlabel('n');
ylabel('Amplitúdó');
legend("W("+string(W_maxI)+")", 'Location', 'best');
xlim([0, bazis_meret-1]);
grid on;

% r felére csökkentése
r = r/2;
y = system(u,r);

y_reg = zeros(1, floor(N/2));


for n = 1:floor(N/2)
    y_reg(n) = W'*X;
    e = conj(y(n) - y_reg(n));
    W = W + 2*mu*e*X;
    X = [u(n+ceil(N/2)); X(1:2); y(n+ceil(N/2)); X(4:end-1)];
    W_buf(:,n) = W;
end

W_buf_top5 = abs(W_buf(W_maxI, :));

line_styles = {'-', '--', ':', '-.', '-'};
markers = {'o', 's', '^', 'd', 'x'};

figure;
hold on;
```

```
for i = 1:5
    plot(W_buf_top5(i,:), ...
        'LineStyle', line_styles{i}, ...
        'Marker', markers{i}, ...
        'MarkerIndices', 1:20:N/2, ...
        'Color', 'black');
end
hold off;
fontsize(14,"points");
xlabel('n');
ylabel('Amplitúdó');
legend("W("+string(W_maxI)+")", 'Location', 'best');
xlim([0, bazis_meret-1]);
grid on;
```

Tapasztalatok

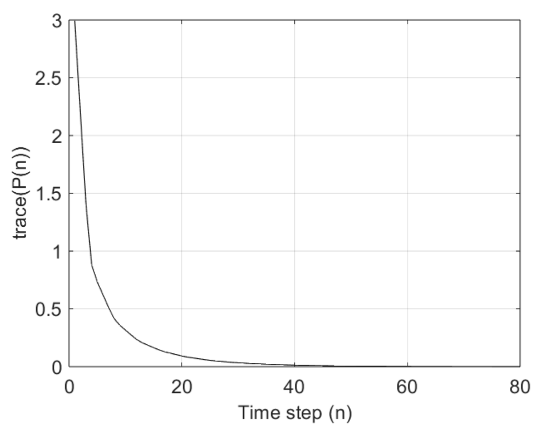
- **Paraméterváltozás hatása**:
  - Az r paraméter csökkentésekor az adaptáció gyorsabb volt, mint az FIR esetben

11. Kalman prediktor

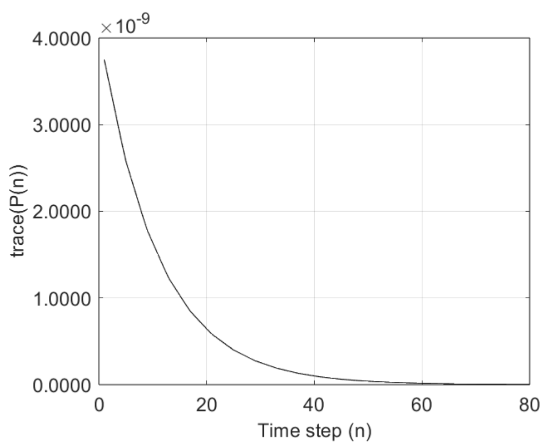
A D rendszer állapotváltozós leírása:

$$\mathbf{x}(n+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & r \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(n) + \begin{pmatrix} (1-r)/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(n) \tag{114}$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(n) \tag{115}$$

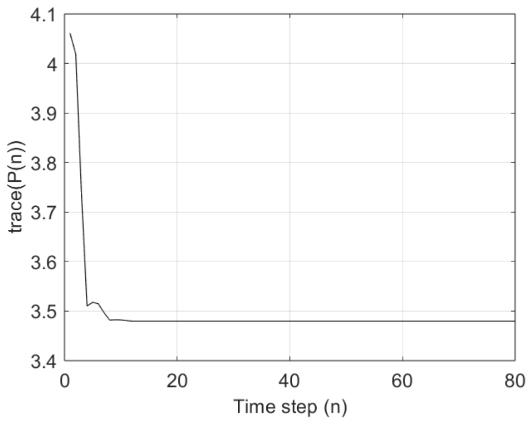


(a) A Kalman prediktor hibatagja a D rendszer r paramétere esetén

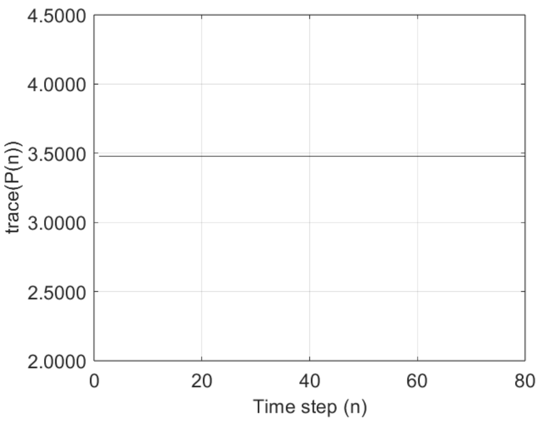


(b) A Kalman prediktor hibatagja a D rendszer r paramétere esetén $r/2$ paraméterére változás esetén

10. ábra. Kalman prediktor a D rendszer alapján ($\sigma_w = 0$)



(a) A Kalman prediktor hibatagja a D rendszer r paramétere esetén



(b) A Kalman prediktor hibatagja a D rendszer r paramétere esetén $r/2$ paraméterére változás esetén

11. ábra. Kalman prediktor a D rendszer alapján ($\sigma_w = 0.5$)

MATLAB implementáció

```
% Eredeti értékek visszaállítása
r = r*2;
y = system(u,r);

N_new = round(N/5);

sigma_n = u_max*0.02;
% sigma_w = 0;
sigma_w = 0.5;

% Kovariancia mártix
R = sigma_n^2;
Q = sigma_w^2 * eye(4);

% Az állapotváltozós leírás mátrixainak meghatározása
A = [0, 0, 0, r; 1, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0; 0, 0, 1, 0];
B = [(1-r)/2; 0; 0; 0];
C = [0, 0, 1, 0];
D = 0;

x_hat = zeros(4,1);
P = eye(4);
trace_P = zeros(4,N);

for n = 1:ceil(N/2)
    e = y(n) - C * x_hat;

    % 2. Kalman-nyereség (G) frissítése
    G = A * P * C' * inv(C * P * C' + R);
```

```
    % 3. Állapotbecslés frissítése
    x_hat = A * x_hat + G * e;

    % 4. Hibakovariancia (P) frissítése
    P = (A - G * C) * P * A' + Q;

    trace_P(n) = trace(P);
end

figure;
plot(trace_P(1:N_new), Color='black');
grid on;
xlabel('Time step (n)');
ylabel('trace(P(n))');
fontsize(14,"points");

% r felére csökkentés
r = r/2;
y = system(u,r);

for n = 1:floor(N/2)
    e = y(n+ceil(N/2)) - C * x_hat;

    % 2. Kalman-nyereség (G) frissítése
    G = A * P * C' * inv(C * P * C' + R);

    % 3. Állapotbecslés frissítése
    x_hat = A * x_hat + G * e;

    % 4. Hibakovariancia (P) frissítése
    P = (A - G * C) * P * A' + Q;

    trace_P(n+ceil(N/2)) = trace(P);
end

figure;
plot(trace_P(ceil(N/2) : N/2+N_new), Color='black');
grid on;
xlabel('Time step (n)');
ylabel('trace(P(n))');
fontsize(14,"points");
ax = gca;
ax.YAxis.TickLabelFormat = '%.4f';
```

Tapasztalatok

- **Zaj hatása**:

- A nagyobb zajszint mellett a hibakovariancia nyoma magasabb szinten stabilizálódik
- A zajos körülmények között a szűrő "bizonytalanabbá" válik, ami a nagyobb hibakovarianciában nyilvánul meg

Függelék

F.1. *hf.m*:

```
clear; close all;

%% Becsléselméleti feladatok - 1. feladat

% Paraméterek
mu_A = 1;
mu_B = 2;
mu_C = 1;

sigma_a = 0.1;
rho = 0.2;

t0 = 10e-3;
f0 = 50;
N = 5;

fs = 250;
dt = 1/fs;
t = (t0 + (0:N-1)*dt)';

sigma_w = 0.2;

% Kovariancia mátrix
Caa = sigma_a^2 * [1 rho rho^2; rho 1 rho; rho^2 rho 1];
Cww = sigma_w^2 * eye(length(t));

% Paraméterverktor generálása
mu_a = [mu_A; mu_B; mu_C];
a = mvnrnd(mu_a, Caa)';
A = a(1);
B = a(2);
C = a(3);

% Zajvektor generálása
w = sigma_w * randn(size(t));

% A jel generálása
z_clean = A*sin(2*pi*f0*t) + B*cos(2*pi*f0*t) + C;
z = z_clean + w;

%% 2. feladat

% Paraméterek felírása
U = [sin(2*pi*f0*t), cos(2*pi*f0*t), ones(length(t),1)];
```

```
% MS becslő
a_MS = mu_a + inv(U'*inv(Cww)*U + ...
    inv(Caa)) * U'*inv(Cww) * (z - U*mu_a);

% MS becslő torzítása
b_a_MS = (eye(3) - inv(U'*inv(Cww)*U + ...
    inv(Caa)) * U'*inv(Cww)*U) * mu_a + ...
    (inv(U'*inv(Cww)*U + inv(Caa)) * U'*inv(Cww)*U - eye(3)) * a;

% MS becslő kovarianciája
Caaz_MS = inv(U'*inv(Cww)*U + inv(Caa));

%% 3. feladat

% ML becslő
a_ML = inv(U'*inv(Cww)*U) * U'*inv(Cww)*z;

% ML becslő torzítása
b_a_ML = zeros(3,1);

% ML becslő kovarianciája
Caaz_ML = inv(U'*inv(Cww)*U);

%% 4. feladat

% LS becslő
a_LS = inv(U'*U) * U'*z;

% LS becslő torzítása
b_a_LS = zeros(3,1);

% LS becslő négyzetes hibája
Jaaz_LS = z'*(z-U*a_LS);

%% 5. feladat
% MS becslőből
D_hat_MS = sqrt(a_MS(1)^2 + a_MS(2)^2);
phi_hat_MS = atan2(a_MS(2), a_MS(1));

% Parciális deriváltak
dD_dA_MS = a_MS(1) / D_hat_MS;
dD_dB_MS = a_MS(2) / D_hat_MS;

dphi_dA_MS = -a_MS(2) / D_hat_MS^2;
dphi_dB_MS = a_MS(1) / D_hat_MS^2;

% Részmátrix Caa a becsült kovariancia mátrixból
C_AB_MS = Caaz_MS(1:2, 1:2);
```

```
var_D_MS = [dD_dA_MS, dD_dB_MS] * C_AB_MS * [dD_dA_MS; dD_dB_MS];
var_phi_MS = [dphi_dA_MS, dphi_dB_MS] * C_AB_MS * [dphi_dA_MS; dphi_dB_MS];

% ML becslőből
D_hat_ML = sqrt(a_ML(1)^2 + a_ML(2)^2);
phi_hat_ML = atan2(a_ML(2), a_ML(1));

% Parciális deriváltak
dD_dA_ML = a_ML(1) / D_hat_ML;
dD_dB_ML = a_ML(2) / D_hat_ML;

dphi_dA_ML = -a_ML(2) / D_hat_ML^2;
dphi_dB_ML = a_ML(1) / D_hat_ML^2;

% Részmátrix Caa a becsült kovariancia mátrixból
C_AB_ML = Caaz_ML(1:2, 1:2);

var_D_ML = [dD_dA_ML, dD_dB_ML] * C_AB_ML * [dD_dA_ML; dD_dB_ML];
var_phi_ML = [dphi_dA_ML, dphi_dB_ML] * C_AB_ML * [dphi_dA_ML; dphi_dB_ML];

% LS becslőből
D_hat_LS = sqrt(a_LS(1)^2 + a_LS(2)^2);
phi_hat_LS = atan2(a_LS(2), a_LS(1));

% Parciális deriváltak
dD_dA_LS = a_LS(1) / D_hat_LS;
dD_dB_LS = a_LS(2) / D_hat_LS;

dphi_dA_LS = -a_LS(2) / D_hat_LS^2;
dphi_dB_LS = a_LS(1) / D_hat_LS^2;

% % Részmátrix Caa a becsült kovariancia mátrixból
% C_AB_LS = Jaaz_LS(1:2, 1:2);
%
% var_D_LS = [dD_dA_LS, dD_dB_LS] * C_AB_LS * [dD_dA_LS; dD_dB_LS];
% var_phi_LS = [dphi_dA_LS, dphi_dB_LS] * C_AB_LS * [dphi_dA_LS; dphi_dB_LS];


%% Multiszinuszos méréstechnika - 6. feladat

% Paraméterek megadása
M = 100;
bazis_meret=2*M+1;
N = 401;
n = 0:N-1;
x = ones(bazis_meret,1);
```

```
% Véletlen fázis, 0 a várható értéke
phi = 2*pi*rand(bazis_meret,1);

% Frekvenciák
theta = 2*pi*(0:bazis_meret-1)'/(bazis_meret);

% A jel generálása
c = exp(1i*(theta*n + repmat(phi, [1,N])));
u = sum(x.*c, 1);

% 0 fázis esetén
c_test = exp(1i*(theta*n));
u_test = sum(x.*c_test);

% Csúcsérték
u_max = max(abs(u));
u_test_max = max(abs(u_test));

%% 7. feladat

% g generálása
g = 1/bazis_meret * exp(-1i*(theta*n + repmat(phi, [1,N])));

% Az integrátorok kezdeti állapota
x_hat = zeros(bazis_meret,1);

% A kimenet
y_hat = zeros(1, length(u));

for n = 1:N
    y_hat(n) = sum(x_hat.*c(:,n));
    input = u(n) - y_hat(n);
    x_hat = x_hat + input*g(:,n);
end

figure;
plot(abs(y_hat-u), Color='black');
grid on;
xlabel('n');
ylabel('$$|\hat{y}-y|$$', 'Interpreter', 'latex');
fontsize(14,"points");


%% 8. feladat

% Paraméterek
r = 0.83;
system = @ D;
```

```
% Kimenet generálása
y = system(u, r);

% A kimenet
y_hat = zeros(1, length(u));

% Az integrátorok kezdeti állapota
x_hat = zeros(bazis_meret,1);

for n = 1:N
    y_hat(n) = sum(x_hat.*c(:,n));
    input = y(n) - y_hat(n);
    x_hat = x_hat + input*g(:,n);
end

th = 2*pi/length(x_hat)*(0:length(x_hat)-1);
figure;
plot(th/pi, abs(x_hat), Color='black');
grid on;
xlabel('$$\theta [\pi]$$', 'Interpreter','latex');
ylabel('$$|\hat{x}|$$', 'Interpreter', 'latex');
fontsize(14,"points");

figure;
plot(th/pi, angle(x_hat)/pi, Color='black');
grid on;
xlabel('$$\theta [\pi]$$', 'Interpreter','latex');
ylabel('$$angle(\hat{x}) [\pi]$$', 'Interpreter', 'latex');
fontsize(14,"points");

%% Modellillesztés, adaptív eljárások - 9. feladat

% Paraméterek
mu = 0.0001;
P = 15;

% Regressziós vektor
X = zeros(P,1);

% Súlytényezők
W = zeros(P,1);
W_buf = zeros(P, ceil(N/2));

y_reg = zeros(1, ceil(N/2));

for n = 1:ceil(N/2)
    y_reg(n) = W'*X;
```

```
    e = conj(y(n) - y_reg(n));
    W = W + 2*mu*e*X;
    X = [u(n); X(1:end-1)];
    W_buf(:,n) = W;
end


[~, W_maxI] = maxk(W, 5);
W_buf_top5 = abs(W_buf(W_maxI, :));

line_styles = {'-', '--', ':', '-.', '-'};
markers = {'o', 's', '^', 'd', 'x'};

figure;
hold on;
for i = 1:5
    plot(W_buf_top5(i,:), ...
        'LineStyle', line_styles{i}, ...
        'Marker', markers{i}, ...
        'MarkerIndices', 1:20:N/2, ...
        'Color', 'black');
end
hold off;
fontsize(14,"points");
xlabel('n');
ylabel('Amplitúdó');
legend("W("+string(W_maxI)+")", 'Location', 'best');
xlim([0, bazis_meret-1]);
grid on;


% r felére csökkentése
r = r/2;
y = system(u,r);

W_buf = zeros(P, floor(N/2));

y_reg = zeros(1, floor(N/2));

for n = 1:floor(N/2)
    y_reg(n) = W'*X;
    e = conj(y(n) - y_reg(n));
    W = W + 2*mu*e*X;
    X = [u(n+ceil(N/2)); X(1:end-1)];
    W_buf(:,n) = W;
end

W_buf_top5 = abs(W_buf(W_maxI, :));
```

```
line_styles = {'-', '--', ':', '-.', '-'};
markers = {'o', 's', '^', 'd', 'x'};

figure;
hold on;
for i = 1:5
    plot(W_buf_top5(i,:), ...
        'LineStyle', line_styles{i}, ...
        'Marker', markers{i}, ...
        'MarkerIndices', 1:20:N/2, ...
        'Color', 'black');
end
hold off;
fontsize(14,"points");
xlabel('n');
ylabel('Amplitúdó');
legend("W("+string(W_maxI)+")", 'Location', 'best');
xlim([0, bazis_meret-1]);
grid on;

%% 10. feladat
r = 0.83;
y = system(u,r);

mu = 0.001;
P = 7;

% Regressziós vektor
X = zeros(P,1);

% Súlytényezők
W = zeros(P,1);
W_buf = zeros(P, ceil(N/2));

y_reg = zeros(1, ceil(N/2));

for n = 1:ceil(N/2)
    y_reg(n) = W'*X;
    e = conj(y(n) - y_reg(n));
    W = W + 2*mu*e*X;
    X = [u(n); X(1:2); y(n); X(4:end-1)];
    W_buf(:,n) = W;
end

[~, W_maxI] = maxk(W, 5);
W_buf_top5 = abs(W_buf(W_maxI, :));
```

```
line_styles = {'-', '--', ':', '-.', '-'};
markers = {'o', 's', '^', 'd', 'x'};

figure;
hold on;
for i = 1:5
    plot(W_buf_top5(i,:), ...
        'LineStyle', line_styles{i}, ...
        'Marker', markers{i}, ...
        'MarkerIndices', 1:20:N/2, ...
        'Color', 'black');
end
hold off;
fontsize(14,"points");
xlabel('n');
ylabel('Amplitúdó');
legend("W("+string(W_maxI)+")", 'Location', 'best');
xlim([0, bazis_meret-1]);
grid on;

% r felére csökkentése
r = r/2;
y = system(u,r);

y_reg = zeros(1, floor(N/2));


for n = 1:floor(N/2)
    y_reg(n) = W'*X;
    e = conj(y(n) - y_reg(n));
    W = W + 2*mu*e*X;
    X = [u(n+ceil(N/2)); X(1:2); y(n+ceil(N/2)); X(4:end-1)];
    W_buf(:,n) = W;
end

W_buf_top5 = abs(W_buf(W_maxI, :));

line_styles = {'-', '--', ':', '-.', '-'};
markers = {'o', 's', '^', 'd', 'x'};

figure;
hold on;
for i = 1:5
    plot(W_buf_top5(i,:), ...
        'LineStyle', line_styles{i}, ...
        'Marker', markers{i}, ...
        'MarkerIndices', 1:20:N/2, ...
```

```
        'Color', 'black');
end
hold off;
fontsize(14,"points");
xlabel('n');
ylabel('Amplitúdó');
legend("W("+string(W_maxI)+")", 'Location', 'best');
xlim([0, bazis_meret-1]);
grid on;

%% 11. feladat
% Eredeti értékek visszaállítása
r = r*2;
y = system(u,r);

N_new = round(N/5);

sigma_n = u_max*0.02;
% sigma_w = 0;
sigma_w = 0.5;

% Kovariancia mártix
R = sigma_n^2;
Q = sigma_w^2 * eye(4);

% Az állapotváltozós leírás mátrixainak meghatározása
A = [0, 0, 0, r; 1, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0; 0, 0, 1, 0];
B = [(1-r)/2; 0; 0; 0];
C = [0, 0, 1, 0];
D = 0;

x_hat = zeros(4,1);
P = eye(4);
trace_P = zeros(4,N);

for n = 1:ceil(N/2)
    e = y(n) - C * x_hat;

    % 2. Kalman-nyereség (G) frissítése
    G = A * P * C' * inv(C * P * C' + R);

    % 3. Állapotbecslés frissítése
    x_hat = A * x_hat + G * e;

    % 4. Hibakovariancia (P) frissítése
    P = (A - G * C) * P * A' + Q;

    trace_P(n) = trace(P);
```

```
end

figure;
plot(trace_P(1:N_new), Color='black');
grid on;
xlabel('Time step (n)');
ylabel('trace(P(n))');
fontsize(14,"points");

% r felére csökkentés
r = r/2;
y = system(u,r);

for n = 1:floor(N/2)
    e = y(n+ceil(N/2)) - C * x_hat;

    % 2. Kalman-nyereség (G) frissítése
    G = A * P * C' * inv(C * P * C' + R);

    % 3. Állapotbecslés frissítése
    x_hat = A * x_hat + G * e;

    % 4. Hibakovariancia (P) frissítése
    P = (A - G * C) * P * A' + Q;

    trace_P(n+ceil(N/2)) = trace(P);
end

figure;
plot(trace_P(ceil(N/2) : N/2+N_new), Color='black');
grid on;
xlabel('Time step (n)');
ylabel('trace(P(n))');
fontsize(14,"points");
ax = gca;
ax.YAxis.TickLabelFormat = '%.4f';
```

F.2. *A.m*:

```
function y = A(u,r)
% A: [ (1 - r)z^(-1) ] / [ 1 + rz^(-4) ]
% u: gerjesztés, r: paraméter, y: kimenet
% y(n)=-ry(n-4)+(1-r)u(n-1)
    y=zeros(1, length(u));
    yBuf=zeros(1,3);
    for n=2:length(u)
        y(n)=-r*yBuf(3)+(1-r)*u(n-1);
        yBuf=[y(n) yBuf(1:end-1)];
```

```
    end
end
```

F.3. *B.m*:

```
function y = B(u,r)
% B: [ (1 - r)z^(-1) ] / [ 1 - rz^(-4) ]
% u: gerjesztés, r: paraméter, y: kimenet
% y(n)=ry(n-4)+(1-r)u(n-1)
    y=zeros(1, length(u));
    yBuf=zeros(1,3);
    for n=2:length(u)
        y(n)=r*yBuf(3)+(1-r)*u(n-1);
        yBuf=[y(n) yBuf(1:end-1)];
    end
end
```

F.4. *C.m*:

```
function y = C(u,r)
% C: [ (1 - r)z^(-1)(1 + z^(-1) ] / [ 2(1 + rz^(-4)) ]
% u: gerjesztés, r: paraméter, y: kimenet
% y(n)=ry(n-4)+1/2*(1-r)u(n-1)+1/2*(1-r)u(n-2)
    y=zeros(1, length(u));
    yBuf=zeros(1,3);
    uBuf=0;
    for n=2:length(u)
        y(n)=r*yBuf(3)+1/2*(1-r)*u(n-1)+1/2*(1-r)*uBuf;
        yBuf=[y(n) yBuf(1:end-1)];
        uBuf=u(n-1);
    end
end
```

F.5. *D.m*:

```
function y = D(u,r)
% D: [ (1 - r)z^(-1)(1 + z^(-2) ] / [ 2(1 + rz^(-4)) ]
% u: gerjesztés, r: paraméter, y: kimenet
% y(n)=ry(n-4)+1/2*(1-r)u(n-1)+1/2*(1-r)u(n-3)
    y=zeros(1, length(u));
    yBuf=zeros(1,3);
    uBuf=zeros(1,2);
    for n=2:length(u)
        y(n)=r*yBuf(3)+1/2*(1-r)*u(n-1)+1/2*(1-r)*uBuf(2);
        yBuf=[y(n) yBuf(1:end-1)];
        uBuf=[u(n-1) uBuf(1)];
    end
end
```

F.6. *E.m*:

```
function y = E(u,r)
% E: [ (1 - r)z^(-1)(1 - z^(-1) ] / [ 2(1 + rz^(-4)) ]
% u: gerjesztés, r: paraméter, y: kimenet
% y(n)=ry(n-4)+1/2*(1-r)u(n-1)-1/2*(1-r)u(n-2)
    y=zeros(1, length(u));
    yBuf=zeros(1,3);
    uBuf=0;
    for n=2:length(u)
        y(n)=r*yBuf(3)+1/2*(1-r)*u(n-1)-1/2*(1-r)*uBuf;
        yBuf=[y(n) yBuf(1:end-1)];
        uBuf=u(n-1);
    end
end
```

F.7. *F.m*:

```
function y = F(u,r)
% D: [ (1 - r)z^(-1)(1 - z^(-2) ] / [ 2(1 + rz^(-4)) ]
% u: gerjesztés, r: paraméter, y: kimenet
% y(n)=ry(n-4)+1/2*(1-r)u(n-1)-1/2*(1-r)u(n-3)
    y=zeros(1, length(u));
    yBuf=zeros(1,3);
    uBuf=zeros(1,2);
    for n=2:length(u)
        y(n)=r*yBuf(3)+1/2*(1-r)*u(n-1)-1/2*(1-r)*uBuf(2);
        yBuf=[y(n) yBuf(1:end-1)];
        uBuf=[u(n-1) uBuf(1)];
    end
end
```