

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 5 – metody aproksymacji

Celem zadania piątego jest zaimplementowanie metody aproksymacji opartej o wielomiany Legendre'a.

Opis rozwiązania

1. Użytkownik wybiera funkcję, którą chce aproksymować, wprowadzając odpowiednią liczbę. Funkcję tę oznaczmy jako $f(x)$, początek i koniec przedziału aproksymacji, stopień wielomianu aproksymacji i ilość węzłów, do obliczenia całki.
2. Program generuje 1000 równo odległych punktów x w przedziale od a do b i oblicza wartości wybranej funkcji $f(x)$ w tych punktach.
3. Na podstawie tych punktów, program dopasowuje wielomian Legendre'a o wybranym stopniu n do wartości funkcji. Wielomian Legendre'a oznaczmy jako $P(x)$.
4. Program generuje wykres wybranej funkcji $f(x)$ i dopasowanego wielomianu $P(x)$.
5. Program oblicza błąd aproksymacji pomiędzy oryginalną funkcją a dopasowanym wielomianem. Błąd ten jest obliczany jako pierwiastek kwadratowy z całki kwadratu różnicy między funkcją a wielomianem na wybranym przedziale (tzw. błąd średniokwadratowy), czyli:

$$\sqrt{\int_a^b (f(x) - P(x))^2, dx}$$

Całka jest obliczana za pomocą metody Simpsona:

$$\frac{h}{3} [f(a) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + f(b)]$$

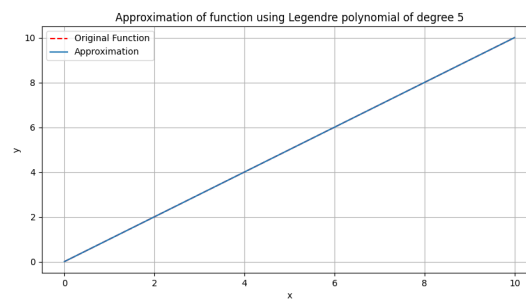
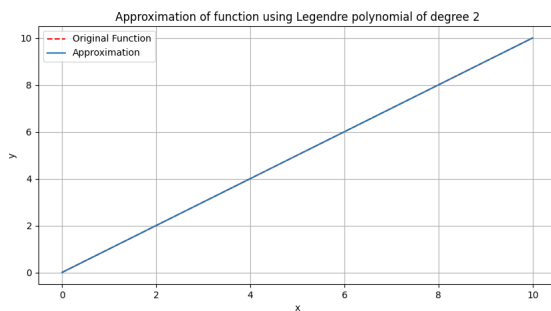
gdzie x_i to węzły, h to odstęp między węzłami, a n to liczba węzłów.

6. Program wyświetla błąd aproksymacji.

Wyniki:

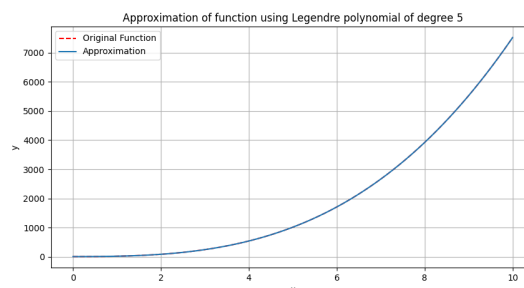
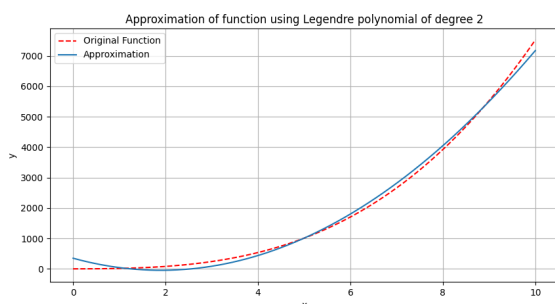
Dla funkcji: $|x|$

Stopień wielomianu	2	5
Ilość węzłów	3	3
Błąd aproksymacji	7.832997394602942e-15	6.983490114906499e-14



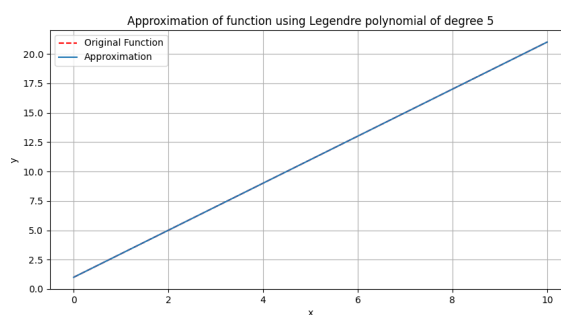
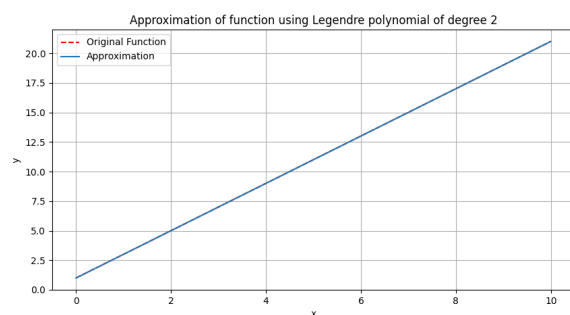
Dla funkcji: $3x^3 + 2x^2 + 5x + 7$

Stopień wielomianu	2	5
Ilość węzłów	3	3
Błąd aproksymacji	637.8152166591684	4.259237585419906e-11



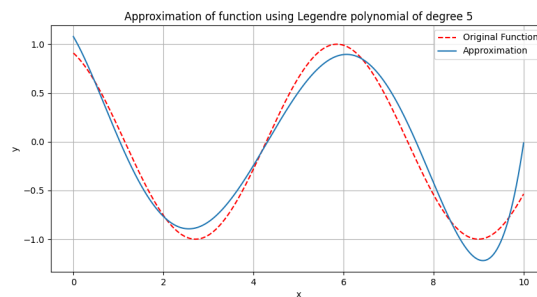
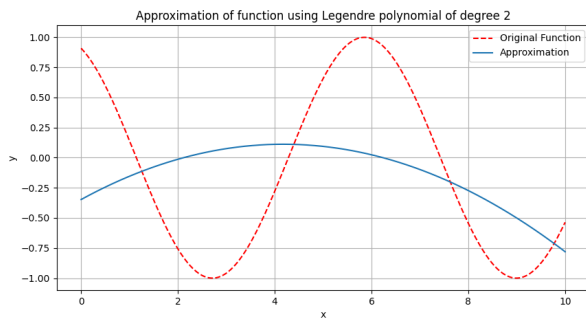
Dla funkcji: $2x + 1$

Stopień wielomianu	2	5
Ilość węzłów	3	3
Błąd aproksymacji	1.2836832864047902e-14	1.2736752435299845e-13



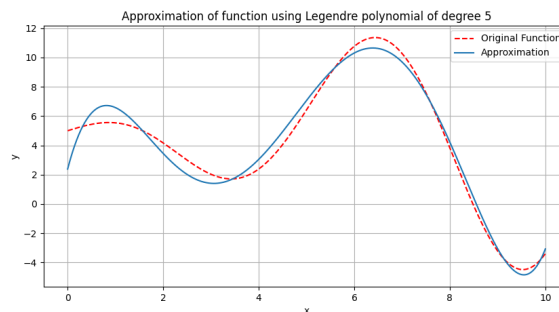
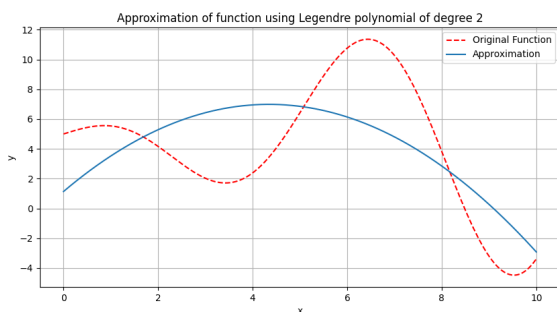
Dla funkcji: $\sin(2 + x)$

Stopień wielomianu	2	5
Ilość węzłów	3	3
Błąd aproksymacji	2.5858160574953413	0.649027705913656



Dla funkcji: $\cos(x) \cdot x + 5$

Stopień wielomianu	2	5
Ilość węzłów	2	5
Błąd aproksymacji	14.207028720665019	3.006093018154582



Wnioski

1. Stopień wielomianu aproksymującego ma duże znaczenie dla jakości aproksymacji.
2. Dla funkcji prostych (np. funkcji liniowych lub wartości bezwzględnej), niski stopień wielomianu może dawać bardzo precyzyjne wyniki.
3. Dla skomplikowanych funkcji (np. wielomianów wysokich stopni czy funkcji trygonometrycznych), wielomiany wyższych stopni dają lepszą aproksymację.
4. Natomiast dla funkcji $|x|$ i $2x + 1$, wielomiany niższego stopnia (2) były bardziej dokładne niż wielomiany stopnia 5.
5. Te wyniki pokazują, że stopień wielomianu aproksymującego powinien być dostosowany do charakterystyki aproksymowanej funkcji.