



**INSTITUTO FEDERAL**  
Rio Grande do Sul

# Probabilidade e Estatística

## Medidas de tendência central

Prof. Ruana Máira Schneider  
Ruana.Schneider@farroupilha.ifrs.edu.br



# Medidas de tendência central

As medidas de **tendência central** ou **medidas de posição** mostram o valor em torno do qual se agrupam as observações (resume um conjunto de dados).

- Médias
- Mediana
- Moda



**Média aritmética simples:** é a divisão da soma de todos os valores pela quantidade de dados:

$$\bar{x} = \frac{\text{ soma de todos os valores } }{\text{ quantidade de valores } }$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ ou } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

**Exemplo:** Calcule a média entre os valores

3    6    9    12    14    15    17    20

Resposta: 12



## 2) Calcule a média entre os valores

14	12	13	11	12	13	16	14	14	15	17	14	11
13	14	15	13	12	14	13	14	13	15	16	12	12

No Excel (exemplo):

somar todos os valores e dividir por “contavalores”

Ex: =SOMA(A1:A10) : CONTA.VALORES(A1:A10)

Ou

=MÉDIA(A1:A10)



**Pergunta:** como você faria para calcular a média aritmética dos valores apresentados em uma tabela da frequência por categoria?

Operações fechadas por dia	Frequências absolutas	Frequências relativas %
11	2	7,69%
12	5	19,23%
13	6	23,08%
14	7	26,92%
15	3	11,54%
16	2	7,69%
17	1	3,85%
Total	26	100,00%



# ATIVIDADE 1

Utilize os dados e a tabela 1 (**DADOS DISCRETOS**) construídos nas aulas anteriores

-Calcular a **média** (apenas dados discretos) utilizando a tabela e em seguida verificar o valor calculando a média utilizando o Rol



**Média Ponderada:** neste tipo de média os dados possuem pesos diferentes.

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i}{\sum_{i=1}^n P_i}$$

$x_i$  = Dado;

$P_i$  = Pesos;





**Exemplo:** Um aluno obteve as seguintes notas em uma disciplina:

Prova 1: 6,0;

Prova 2: 3,0;

Trabalho: 10,0;

Trabalho: 8,0;

Sabendo que os pesos são respectivamente: 5, 4, 2 e 1, calcule a média final



# Média aritmética “ponderada” para dados agrupados em classes de frequência

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n (PM_i \cdot F_i)}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

— $PM_i$  é o ponto médio de cada classes

Resposta:  $610/20 = 30,5$

Classe	$F_i$	$PM_i$	$F_i \cdot PM_i$
0  -- 10	2		
10  -- 20	1		
20  -- 30	5		
30  -- 40	8		
40  -- 50	4		

Se os dados originais agrupados em classe da tabela anterior fossem:

{8, 6, 14, 21, 24, 28, 22, 22, 31, 33, 33, 36, 37, 38, 38, 39, 42, 45, 46, 49}

a média seria a mesma ?

- verifique se satisfaz a tabela
- verifique se a média seria a mesma



# ATIVIDADE 2

Utilize os dados e a tabela 2 (**DADOS CONTÍNUOS**) construídos nas aulas anteriores

-Calcular a média utilizando a tabela por classes e em seguida verificar o valor calculando a média utilizando o Rol



# Média Harmônica

É o inverso dos inversos.

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

A principal utilização prática é em problemas que envolvem obtenção de velocidades ou tempos médios, por exemplo.

**Exemplo:** calcular a média aritmética e a harmônica de um aluno que obteve notas 8, 4 e 6.



# Aplicação (média harmônica) : Velocidade média

**Problema:** Um veículo realizou o trajeto de ida e volta entre as cidades A e B. Na ida ele desenvolveu uma velocidade média de 80 km/h, na volta a velocidade média desenvolvida foi de 120 km/h. Qual a velocidade média para realizar todo o percurso de ida e volta?



## Média geométrica:

Usada sobretudo em situações onde se queira analisar um certo padrão ou razão de crescimento.

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

**Exemplo:** calcule a média geométrica de 8, 4 e 6.



**Aplicação:** Um investimento rende no primeiro ano 5%, no segundo ano 7% e no terceiro ano 8%. Qual o rendimento médio desse investimento?

Fatores de crescimento:

- 1.º ano: fator de crescimento de 1,05
- 2.º ano: fator de crescimento de 1,07
- 3.º ano: fator de crescimento de 1,08

$$M_g = \sqrt[3]{1,05 * 1,07 * 1,08} = 1,0632$$

Rendimento médio : 0,0632 ou seja 6,32%





# Mediana:

É o valor que ocupa a posição central do Rol (dados ordenados) na ordem crescente ou decrescente

Exemplo:

3,2   3,3   3,4   **3,4**   3,4   3,5   3,6

Mediana: 3,4

OBS: A mediana é considerada uma medida separatriz, pelo fato de separar o rol em duas partes iguais. Muito usada em “Box Plot”, é linha central da caixa



**Se quantidade de dados é ímpar:** existe um único valor central.

**Se quantidade de dados é par:** a mediana é a média simples entre os dois valores centrais:

4   6   8   9   9   12

$$\text{Mediana: } \frac{8+9}{2} = 8,5$$



**Exemplo:** determine a mediana

a) { 18 ,4,38, 29, 30, 21, 23, 12}

b) { 2, 4,7, 3, 6 , 5, 1, 6, 8}



**Pergunta:** como você faria para encontrar a mediana de um conjunto de dados apresentados somente em forma de tabela de frequência (por categoria):

Operações fechadas por dia	Frequências absolutas	Frequências relativas %
11	2	7,69%
12	5	19,23%
13	6	23,08%
14	7	26,92%
15	3	11,54%
16	2	7,69%
17	1	3,85%
Total	26	100,00%



# Frequência acumulada

Operações fechadas por dia	Frequências acumuladas	
	Absolutas	Relativas %
11	2	7,69%
12	7	26,92%
13	13	50,00%
14	20	76,92%
15	23	88,46%
16	25	96,15%
17	26	100,00%

Mediana: 13,5 ??

Ordene os dados e verifique.



Abra uma planilha no Excel, digite os valores e verifique (exemplo usuários no Moodle)

14	12	13	11	12	13	16	14	14	15	17	14	11
13	14	15	13	12	14	13	14	13	15	16	12	12

Função do Excel para Mediana (exemplo):  
`=MED(A1:A10)`



# ATIVIDADE 3

Utilize os dados e a tabela 1 (**DADOS DISCRETOS**) construídos nas aulas anteriores

-Calcular a **mediana** (dados discretos) utilizando a tabela e em seguida verificar o valor calculando a média utilizando o Rol





# Mediana para dados e tabela por classes

Existem duas formas de calcular:

**1º método: (interpolada)** Calcular a frequência acumulada e identificar a classe que possui a mediana. Essa classe servirá de base para aplicação da fórmula:

$$Md = I_i + \frac{(\frac{n}{2} - F_{ant})}{F_i} \cdot h$$

onde:  $I_i$  = limite inferior da classe mediana

$h$  = amplitude de classe

$n$  = tamanho da amostra

$F_{ant}$  = frequência **acumulada** anterior a classe mediana

$F_i$  = frequência simples da classe mediana





## Exemplo: 1º método (mediana interpolada)

Classe	$F_i$	$F_{ac}$
0  -- 10	2	2
10  -- 20	1	3
20  -- 30	5	8
30  -- 40	8	16
40  -- 50	4	20

$$I_i = 30 \quad h = 10 \quad n = 20 \quad F_{ant} = 8 \quad F_i = 8$$

$$Md = I_i + \frac{(\frac{n}{2} - F_{ant})}{F_i} \cdot h = 30 + \frac{(\frac{20}{2} - 8)}{8} \cdot 10 = 32,5$$



**2º método:** utilizando o ponto médio de classe onde se observa a mediana.

$$\text{Ponto médio da classe: PM} = \frac{\text{limite superior} + \text{limite inferior}}{2}$$

Classe	Fi	Fac
0  -- 10	2	2
10  -- 20	1	3
20  -- 30	5	8
30  -- 40	8	16
40  -- 50	4	20

Ponto médio da classe que contém a mediana: ,  $(30+40)/2 = 35$

# ATIVIDADE 4

Utilize os dados e a tabela 2 (**DADOS CONTÍNUOS**) construídos nas aulas anteriores

-Calcular a **mediana** utilizando a tabela por classes e em seguida verificar o valor calculando a média utilizando o Rol



**MODA:** é o valor que ocorre com maior frequência.

Exemplo:

$\{ 2, 4, 7, 5, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 6, 8, 2 \}$

Moda: 2



**Conjunto amodal:** Não existe valor que aparece mais que outro;

$\{ 2, 4, 7, 3, 5, 1, 6, 8 \}$

**Conjunto bimodal:** dois valores aparecem com a mesma frequência (maior):

$\{ 2, 4, 2, 3, 5, 8, 6, 8 \}$

**Conjunto trimodal:** três valores como moda

$\{ 2, 4, 2, 3, 5, 8, 6, 5, 8 \}$



**Conjunto multimodal:** mais de três valores aparecem com a mesma frequência em relação aos outros:

$\{ 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 9 \}$



**Pergunta:** como obter a moda a partir de uma tabela de frequência por categorias?

Operações fechadas por dia	Frequências absolutas	Frequências relativas %
11	2	7,69%
12	5	19,23%
13	6	23,08%
14	7	26,92%
15	3	11,54%
16	2	7,69%
17	1	3,85%
Total	26	100,00%



Teste: Abra uma planilha no Excel, digite os valores e verifique

14	12	13	11	12	13	16	14	14	15	17	14	11
13	14	15	13	12	14	13	14	13	15	16	12	12

Função do Excel para Moda (exemplo):  
`=MODA(A1:A10)`





# ATIVIDADE 5

Utilize os dados e a tabela 1 (**DADOS DISCRETOS**) construídos nas aulas anteriores

-Calcular a **moda** (dados discretos) utilizando a tabela e em seguida verificar o valor calculando a média utilizando o Rol



# Moda para dados e tabela por classes

Existem algumas fórmulas que calculam a moda.

**1. Moda bruta:** Ponto médio da classe modal

**2. Fórmula de Pearson:**

$$M_o = 3 \cdot M_d - 2 \cdot \bar{x}$$

Em que  $M_d$  é a mediana (interpolada) e  $\bar{x}$  é a média aritmética.



No exemplo anterior:

Classe	Fi	Fac
0  -- 10	2	2
10  -- 20	1	3
20  -- 30	5	8
<b>30  -- 40</b>	8	16
40  -- 50	4	20

$$M_d = 32,5 \text{ (1o método)} \quad \bar{x} = \frac{610}{20} = 30,5$$

$$M_o = 3.M_d - 2.\bar{x} = 3.32,5 - 2.30,5 = \mathbf{36,5}$$

### 3. Fórmula de **KING** (moda):

$$Mo_K = \text{linf} + \left[ h \cdot \left( \frac{F_{\text{post}}}{F_{\text{ant}} + F_{\text{post}}} \right) \right]$$

Em que

linf= limite inferior da classe modal

h= amplitude da classe modal

$F_{\text{post}}$ = frequência da classe posterior à modal



## • No exemplo anterior:

$$Mo_K = \text{linf} + \left[ h \cdot \left( \frac{F_{\text{post}}}{F_{\text{ant}} + F_{\text{post}}} \right) \right]$$

Em que

linf= 30

h= 10

$F_{\text{post}} = 4$

Classe	Fi	Fac
0  -- 10	2	2
10  -- 20	1	3
20  -- 30	5	8
30  -- 40	8	16
40  -- 50	4	20

## • No exemplo anterior:

$$\begin{aligned} Mo_K &= 30 + \left[ 10 \cdot \left( \frac{4}{5 + 4} \right) \right] \\ &= 30 + \frac{80}{9} = \frac{350}{9} = 34,44 \end{aligned}$$



## 4. Fórmula de Czuber

$$Mo_{CZ} = l_{inf} + \left[ h \cdot \left( \frac{F_{modal} - F_{ant}}{2F_{modal} - F_{ant} - F_{post}} \right) \right]$$

Em que

$l_{inf}$  = limite inferior da classe modal

$h$  = amplitude da classe modal

$F_{post}$  = frequência (abs) da classe posterior à modal

$F_{ant}$  = frequência (abs) da classe anterior à modal



## • No exemplo anterior:

$$Mo_{CZ} = l_{inf} + \left[ h \cdot \left( \frac{F_{modal} - F_{ant}}{2F_{modal} - F_{ant} - F_{post}} \right) \right]$$

Em que

$l_{inf} = 30$

$h = 10$

$F_{post} = 4$

Classe	Fi
0  -- 10	2
10  -- 20	1
20  -- 30	5
<b>30  -- 40</b>	8
40  -- 50	4



## No exemplo anterior:

$$Mo_{CZ} = l_{inf} + \left[ h \cdot \left( \frac{F_{modal} - F_{ant}}{2F_{modal} - F_{ant} - F_{post}} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} Mo_{CZ} &= 30 + \left[ 10 \cdot \left( \frac{8 - 5}{2 \cdot 8 - 5 - 4} \right) \right] \\ &= 30 + 10 \cdot \left( \frac{3}{7} \right) = 30 + \frac{30}{7} = \frac{210}{7} + \frac{30}{7} \\ &= 34.28 \end{aligned}$$



# Observações:

- 1) Para utilizar a moda de Pearson é necessário calcular média e mediana separadamente
- 2) A moda de King utiliza informações das classes adjacentes
- 3) A moda de Czuber utiliza informações das classes adjacentes E da classe modal. (mais aproximada da realidade)



# Comparando média, mediana e moda

Há vantagens e desvantagens no uso de cada medida de tendência:

- A média leva em conta cada elemento de um conjunto de dados Mas pode ser muito afetada por **valores discrepantes** (*outliers*).



**Exemplo:** Encontre a média, a mediana e a moda da amostra das idades dos alunos de uma turma mostradas a seguir.

20	20	20	20	20	20	21	21	21	21
22	22	22	23	23	23	23	24	24	65

Qual medida de tendência central melhor descreve esse conjunto de dados? Há *outliers*?



**Agora:** Remova o valor 65 do conjunto de dados e calcule as 3 medidas novamente e compare.

20	20	20	20	20	20	21	21	21	21
22	22	22	23	23	23	23	24	24	65

Como a ausência desse *outlier* muda cada uma das medidas?



# ATIVIDADE 6

Utilize os dados e a tabela 2 (**DADOS CONTÍNUOS**) construídos nas aulas anteriores

-Calcular a **moda (bruta, pearson, king e Czuber)** utilizando a tabela por classes e em seguida verificar o valor calculando a média utilizando o Rol

- Qual das modas calculadas mais se aproxima da verdadeira?



# Responda:

- Qual das modas calculadas mais se aproxima da verdadeira?
- Há outliers no seu conjunto de dados?
- Como você poderia verificar a existência de outliers sem ter acesso ao Rol ?

