알고리즘 hw2

21500706 지성민

1번 문제 :

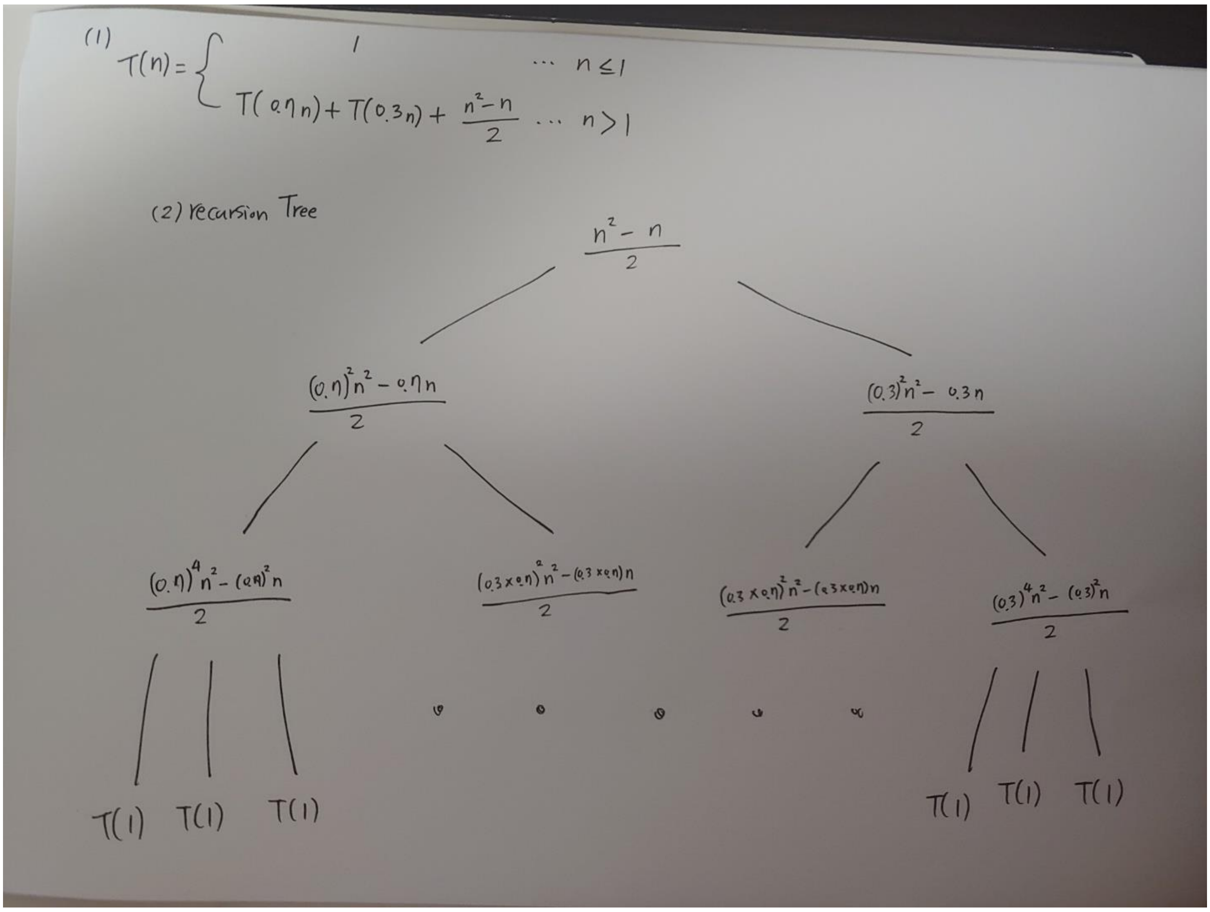
(a) : Determine the recurrence equation (T(n)) for function 'alg( )'

답 :

(1)
$$T(n) = \begin{cases} 1 & \cdots \; n \le 1 \\ T(0.7n) + T(0.3n) + \dfrac{n^2 - n}{2} & \cdots \; n > 1 \end{cases}$$

(b) : Draw recursion tree for above equation.

답: :



(c) : Express time complexity of T(n) in 'Theta' notation

답: :

(1) height를 구하기 위해 recursion Tree에서

가장 긴 경로를 쫓아가보면

$1 \rightarrow 0.7n \rightarrow (0.7)^2 n \rightarrow (0.7)^3 n \rightarrow \cdots \rightarrow 1$ 이 된다.

그러면 $(0.7)^h n = 1$ 이라는 결론이 나온다.

$n = \left(\frac{10}{7}\right)^h \rightarrow \underline{h = \log_{10/7} n}$

(2) level별 sum

root node $\rightarrow \dfrac{n^2 - n}{2}$

second node $\rightarrow \dfrac{((0.7)^2+(0.3)^2)n^2 - n}{2}$

Third node $\rightarrow \dfrac{((0.7)^4+(0.3)^4)n^2 + 2(0.3\times 0.7)n^2 - (0.7)^2 - (0.3)^2 n - 2(0.3\times 0.7)n}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{((0.7)^2+(0.3)^2)^2 n^2 - (0.7+0.3)^2 n}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{((0.7)^2+(0.3)^2)^2 n^2 - n}{2}$

이것으로 level sum의 규칙은 $\dfrac{((0.7)^2+(0.3)^2)^h n^2 - n}{2}$ 임을 알 수 있고,

$(0.7)^2+(0.3)^2 = 0.58$,

$h = \log_{10/7} n$ 이므로 $0.58^h = 0.58^{\log_{10/7} n} = n^{\log_{10/7}(0.58)}$

따라서 맨 밑단의 sum은 $\Theta\left(n^{\log_{10/7}(0.58)}\right)$ 이라고 할 수 있다.

이제 각 Level sum을 더해보면

$$\underbrace{\frac{n^2-n}{2} + \frac{((0.7)^2+(0.3)^2)^1 n^2-n}{2} + \frac{((0.7)^2+(0.3)^2)^2 n^2-n}{2} + \cdots + \frac{((0.7)^2+(0.3)^2)^{\log_{10/7} n-1} n^2-n}{2}} + \Theta\left(n^{\log_{10/7}(0.58)}\right)$$

$h-1$

이 된다.

이 부분은 등비수열의 합 공식에 따라.

$$= \sum_{i=0}^{\log_{10/7} n-1} \frac{((0.7)^2+(0.3)^2)^i n^2-n}{2} + \Theta\left(n^{\log_{10/7}(0.58)}\right)$$

* $((0.7)^2+(0.3)^2) = 0.58$

$$= \frac{1-(0.58)^{\log_{10/7} n}}{\underbrace{1-0.58}_{=0.42}} \times \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\cdot\log_{10/7} n + \Theta\left(n^{\log_{10/7}(0.58)}\right)$$

$$= \frac{50}{21}\left(1-(0.58)^{\log_{10/7} n}\right)n^2 - \log_{10/7} n\cdot\frac{n}{2} + \Theta\left(n^{\log_{10/7}(0.58)}\right)$$

$$= \frac{50}{21}n^2 - \frac{50}{21}\underline{(0.58)^{\log_{10/7} n}}\cdot n^2 - \log_{10/7} n\cdot\frac{n}{2} + \Theta\left(n^{\log_{10/7}(0.58)}\right)$$

$n^{\log_{10/7}(0.58)}$ 로 바꿔 쓸 수 있는데 이것은 0보다는 크지만 1보다는 작다.
그래서 이렇게 써줄수도 있다.

$$< \frac{50}{21}n^2 - \log_{10/7} n\cdot\frac{n}{2} + \Theta\left(n^{\log_{10/7}(0.58)}\right)$$

$\Rightarrow$ 원수에서 $\frac{50}{21}(0.58)^{\log_{10/7} n}\cdot n^2$ 을 뺀 것보다 원래 수가 더 클것이므로

$$= O(n^2)$$

$\boxed{T(n) = \Theta(n^2)}$ since

$T(n) \geq= n^2$

2번 문제 : Use the master theorem method to give tight asymptotic bounds for the following recurrences.

(1) $\mathrm{T(n)} = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + \mathrm{n}^2$

풀이 :

(a) $T(n) = 9T(n/3) + n^2$

$a=9$, $b=3$ $\longrightarrow$ $\underline{n^{\log_b a} = n^2}$ and $\underline{f(n) = n^2}$ 이 된다.

두 식은 같은 order 이기 때문에

Master theorem 의 Case 2에 속하게 되고,

$\therefore$ $\underline{T(n) = \Theta(n^2 \lg n)}$ 이 된다.

(2) $\mathrm{T(n)} = 3\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{n}}{9}\right) + n$

풀이 :

(b) $T(n) = 3T(n/9) + n$

$a=3$, $b=9$ $\longrightarrow$ $n^{\log_b a} = n^{\log_9 3} = n^{\frac{1}{2}}$ and $f(n) = n$ 이다.

이때 $f(n) = \Omega(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ for $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 이 되는데,

$a f(n/b) \le c f(n)$ 을 만족하는지 보면,

$3\left(\frac{n}{9}\right) \le cn$ $\rightarrow$ $\frac{n}{3} \le cn$, 이 식을 만족하는 C는 존재한다.

따라서 master theorem의 Case 3에 속하게 되고, $\boxed{T(n) = \Theta(n)}$ 이 된다.