Sorpresas topológicas que nos regalan los Sistemas Dinámicos Discretos (SDD)

Dr. Jefferson Edwin King Dávalos [1]

[1]Facultad de Ciencias, UNAM.

Octubre, 2025.

Índice

Un sistema dinámico discreto requiere dos ingredientes : un espacio métrico X y una función continua $f : X \to X$.
Dado $x \in X$, la órbita de x bajo f la denotamos por $o(x,f)$ y está dada por la sucesión

$$x, f(x), f^2(x), \dots f^n(x), \dots$$

donde $f^1 = f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$ y $f^0 = id$.
El problema básico es, para cualquier $x \in X$ (o en algún subconjunto de X) determinar o descubrir qué sucede *a la larga* con la órbita de x bajo f, es decir, qué ocurre con la sucesión $o(x,f)$ cuando $n \to \infty$.

Pero más importante aún, es el siguiente problema fundamental: si x, y son puntos *cercanos* ¿sus correspondiente órbitas permanecen *cercanas* también, o de alguna manera *se separan*?
Veremos que si ocurre lo primero, si las órbitas permanecen cercanas, el comportamiento lo podemos catalogar como *estable*, mientras que si ocurre lo segundo, que se separan, el comportamiento se vuelve *impredecible* o *inestable*.

Otras definiciones

1. $x_0 \in X$ es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$.
2. Si para alguna $n \in \mathbb{N}$ sucede que $f^n(x_0) = x_0$, x_0 es un punto periódico de f. Además, si n es el primer natural para el que esto sucede, decimos que x_0 es un punto periódico de periodo n.
3. Como sucesión, y haciendo $x_n = f^n(x_0)$, una órbita de un punto x_0 de periodo n se ve así:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_0, x_{n+1} = x_1, \ldots$$

Es decir:

$$x_m = x_k \iff m \equiv k \ \ mod(n).$$

Como conjunto, la órbita de un punto periódico de periodo n es finita:

$$o(x_0, f) = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}.$$

Otras definiciones

1. $x_0 \in X$ es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$.
2. Si para alguna $n \in \mathbb{N}$ sucede que $f^n(x_0) = x_0$, x_0 es un punto periódico de f. Además, si n es el primer natural para el que esto sucede, decimos que x_0 es un punto periódico de periodo n.
3. Como sucesión, y haciendo $x_n = f^n(x_0)$, una órbita de un punto x_0 de periodo n se ve así:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_0, x_{n+1} = x_1, \ldots$$

Es decir:

$$x_m = x_k \iff m \equiv k \ \ mod(n).$$

Como conjunto, la órbita de un punto periódico de periodo n es finita:

$$o(x_0, f) = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}.$$

Otras definiciones

1. $x_0 \in X$ es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$.
2. Si para alguna $n \in \mathbb{N}$ sucede que $f^n(x_0) = x_0$, x_0 es un punto periódico de f. Además, si n es el primer natural para el que esto sucede, decimos que x_0 es un punto periódico de periodo n.
3. Como sucesión, y haciendo $x_n = f^n(x_0)$, una órbita de un punto x_0 de periodo n se ve así:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_0, x_{n+1} = x_1, \ldots$$

Es decir:

$$x_m = x_k \iff m \equiv k \mod(n).$$

Como conjunto, la órbita de un punto periódico de periodo n es finita:

$$o(x_0, f) = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}.$$

EJERCICIO: Si x_o es un punto periódico de periodo n, entonces:

- $f^k(x_0) = x_0 \Longleftrightarrow k$ es múltiplo de n.
- $y \in o(x_0, f) \Rightarrow y$ es un punto periódico de periodo n.

Sobre la importancia de los puntos fijos

- Proposición 1. Sea $f : X \to X$ continua y $y_0 \in X$ tal que la órbita de x_0 converge a y_0, es decir, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = y_0$. Entonces y_0 es un punto fijo de f.
- Demostración: Como f es continua,

$$f(y_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)\right) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = y_0.$$

Sobre la importancia de los puntos fijos

- Proposición 1. Sea $f : X \to X$ continua y $y_0 \in X$ tal que la órbita de x_0 converge a y_0, es decir, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = y_0$. Entonces y_0 es un punto fijo de f.
- Demostración: Como f es continua,

$$f(y_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)\right) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = y_0.$$

Primera sesión: Dinámica de funciones $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

Definición (Atractores y repulsores)

Supongamos que A es un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : A \to A$ es continua en A.
$x_0 \in A$ es un punto fijo atractor si existe un intervalo abierto (a,b), $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$f((a,b) \cap A) \subset (a,b) \cap A$$

y para todo $x \in (a,b) \cap A$ se tiene $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$.
Y es un punto fijo repulsor si existe (a,b) con $x_0 \in (a,b)$ tal que para cada $x \in (a,b) \cap A$, $x \neq x_0$, existe $n = n(x) \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \notin (a,b) \cap A$.

- Proposición 2. Sea $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = x_0$. Supongamos que f es derivable en x_0.
  - Si $|f'(x_0) < 1|$,entonces x_0 es un punto fijo atractor.
  - Si $|f'(x_0) > 1|$,entonces x_0 es un punto fijo repulsor.
- Demostración: Como $|f\,'(x_0)| < 1$ y $f(x_0) = x_0$, tenemos que

$$\left|\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < 1.$$

- Por lo tanto, para x en una vecindad (pequeña) de x_0, se cumple que

$$\left|\frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < 1$$

- Proposición 2. Sea $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = x_0$. Supongamos que f es derivable en x_0.
  - Si $|f'(x_0) < 1|$,entonces x_0 es un punto fijo atractor.
  - Si $|f'(x_0) > 1|$,entonces x_0 es un punto fijo repulsor.
- Demostración: Como $|f\,\acute{}(x_0)| < 1$ y $f(x_0) = x_0$, tenemos que

$$\left|\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < 1.$$

- Por lo tanto, para x en una vecindad (pequeña) de x_0, se cumple que

$$\left|\frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < 1$$

- Proposición 2. Sea $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = x_0$. Supongamos que f es derivable en x_0.
  - Si $|f'(x_0) < 1|$,entonces x_0 es un punto fijo atractor.
  - Si $|f'(x_0) > 1|$,entonces x_0 es un punto fijo repulsor.
- Demostración: Como $|f\,\acute{}(x_0)| < 1$ y $f(x_0) = x_0$, tenemos que

$$\left|\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < 1.$$

- Por lo tanto, para x en una vecindad (pequeña) de x_0, se cumple que

$$\left|\frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < 1$$

- Existe c con $0 < c < 1$ tal que

$$\left| \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} \right| < c < 1$$

y, por lo tanto, $|f(x) - x_0| < c\,|x - x_0|$.

- Aplicando f de nuevo:

$$|f^2(x_0) - f(x_0)| = |f^2(x_0) - x_0| < c\,|f(x) - x_0| < c^2\,|x - x_0|.$$

- Análogamente, para $n \in \mathbb{N}$:

$$|f^n(x_0) - f(x_0)| < c^n\,|x - x_0|,$$

y el resultado se sigue.

- Existe c con $0 < c < 1$ tal que

$$\left|\frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < c < 1$$

y, por lo tanto, $|f(x) - x_0| < c\,|x - x_0|$.

- Aplicando f de nuevo:

$$|f^2(x_0) - f(x_0)| = |f^2(x_0) - x_0| < c\,|f(x) - x_0| < c^2\,|x - x_0|.$$

- Análogamente, para $n \in \mathbb{N}$:

$$|f^n(x_0) - f(x_0)| < c^n\,|x - x_0|,$$

y el resultado se sigue.

- Existe c con $0 < c < 1$ tal que

$$\left| \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} \right| < c < 1$$

y, por lo tanto, $|f(x) - x_0| < c\,|x - x_0|$.

- Aplicando f de nuevo:

$$|f^2(x_0) - f(x_0)| = |f^2(x_0) - x_0| < c\,|f(x) - x_0| < c^2\,|x - x_0|.$$

- Análogamente, para $n \in \mathbb{N}$:

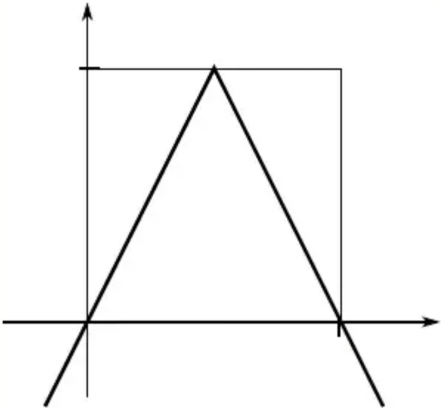
$$|f^n(x_0) - f(x_0)| < c^n\,|x - x_0|,$$

y el resultado se sigue.

$*$ Para el caso $|f'(x_0)| > 1$, se obtiene c tal que $|f'(x_0)| > c > 1$ y el resto de la demostración es *similar*.
$**$ Analizar el caso $|f'(x_0) = 1|$ se deja al lector.

Ejemplo: LA TIENDA

Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$



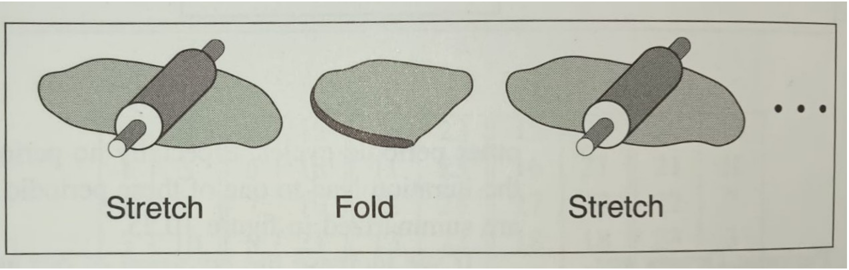
Ejercicio: Comprobar que

1. $x < 0 \Rightarrow o(x, T)$ es una sucesión decreciente y $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = -\infty$.
2. $x > 1 \Rightarrow T(x) < 0$ y, por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = -\infty$.
3. $x \in [0,1] \Rightarrow T(x) \in [0,1]$ y, por lo tanto, $T^n(x) \in [0,1]\ \forall n \in \mathbb{N}$.

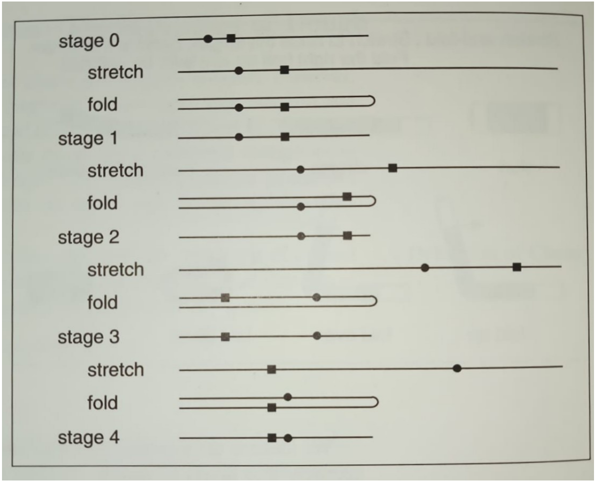
De (3) concluimos que la dinámica interesante esta en [0,1].

Resolviendo $T(x) = x$ hallamos que los puntos fijos son $x_0 = 0$ y $x_1 = \frac{2}{3}$. Como $T'(x_0) = 2$ y $T'(x_1) = -2$, son repulsores.

Interludio 1: El paradigma del panadero

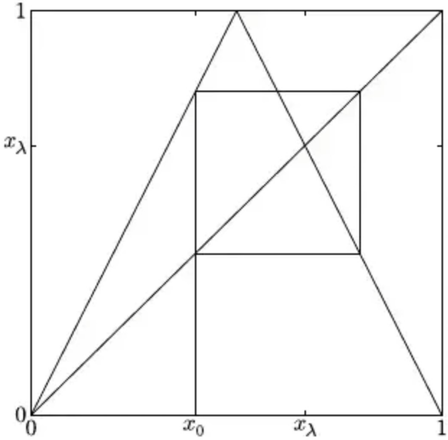


¡¡La tienda hace como el panadero!!

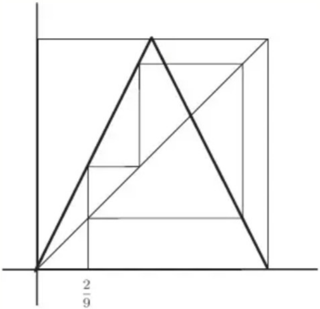

stage 0
stretch
fold
stage 1
stretch
fold
stage 2
stretch
fold
stage 3
stretch
fold
stage 4

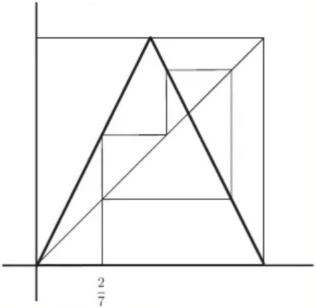
Regresando a la tienda

Aquí se muestra un órbita de periodo 2:

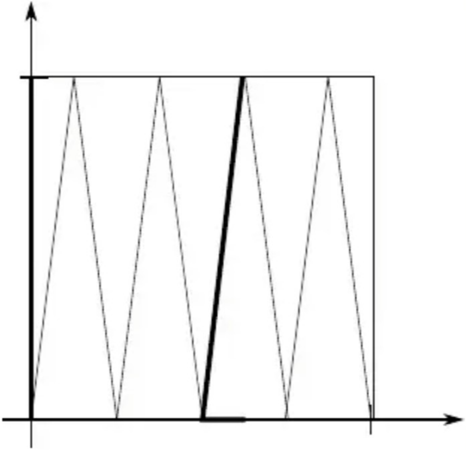


He aquí dos órbitas de periodo 3:





Es fácil darnos una idea de cómo es, en general, la gráfica de T^n; por ejemplo, he aquí la de T^3:



¡Más aún: es fácil obtener una fórmula para $T^n(x)$!

Fórmula para $T^n(x)$

- Partimos el intervalo $[0,1]$en 2^n *pequeños* intervalos de longitud $\frac{1}{2^n}$ cada uno de ellos: $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$ con $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$.
- En cada uno de ellos la gráfica de T^n es un segmento de recta de pendiente 2^n, si l es par, y de pendiente $-(2^n)$ si l es impar.
- En consecuencia, en cada uno de estos intervalos T^n es un homeomorfismo (lineal) del intervalo en $[0,1]$.

Fórmula para $T^n(x)$

- Partimos el intervalo $[0,1]$en 2^n *pequeños* intervalos de longitud $\frac{1}{2^n}$ cada uno de ellos: $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$ con $l \in \{0,1,2,\ldots,2^n-1\}$.
- En cada uno de ellos la gráfica de T^n es un segmento de recta de pendiente 2^n, si l es par, y de pendiente $-(2^n)$ si l es impar.
- En consecuencia, en cada uno de estos intervalos T^n es un homeomorfismo (lineal) del intervalo en $[0,1]$.

Fórmula para $T^n(x)$

- Partimos el intervalo $[0,1]$en 2^n *pequeños* intervalos de longitud $\frac{1}{2^n}$ cada uno de ellos: $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$ con $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$.
- En cada uno de ellos la gráfica de T^n es un segmento de recta de pendiente 2^n, si l es par, y de pendiente $-(2^n)$ si l es impar.
- En consecuencia, en cada uno de estos intervalos T^n es un homeomorfismo (lineal) del intervalo en $[0,1]$.

Fórmula para $T^n(x)$

- En conclusión, en $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$ la fórmula para obtener $T^n(x)$ está dada por

$$T^n(x) = (entero) + (-1)^l 2^n x = \mu + (-1)^l 2^n x.$$

- Una consecuencia inmediata es que si $r \in \mathbb{Q}$, entonces $T^n(r) \in \mathbb{Q}$, y si x es irracional, $T^n(x)$ es irracional también. Por lo tanto, $T^n(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ y $T^n(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Fórmula para $T^n(x)$

- En conclusión, en $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$ la fórmula para obtener $T^n(x)$ está dada por

$$T^n(x) = (entero) + (-1)^l 2^n x = \mu + (-1)^l 2^n x.$$

- Una consecuencia inmediata es que si $r \in \mathbb{Q}$, entonces $T^n(r) \in \mathbb{Q}$, y si x es irracional, $T^n(x)$ es irracional también. Por lo tanto, $T^n(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ y $T^n(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Interludio 2: Transitividad topológica y órbitas densas

Definición (transitividad topológica)

f es topológicamente transitiva (TT) en X si para todo par de conjuntos abiertos no vacíos de X, digamos U y V, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$

Las órbitas densas sí existen

Recordatorio: Sea X un espacio métrico.Un conjunto $A \subset X$ es denso en X si para todo $x \in X$ y para toda vecindad V de x, existe $a \in A$ tal que $a \in V$.
Es decir, A es denso en X si $\bar{A} = X$.

Usando el teorema de Baire se demuestra lo siguiente:

Teorema

Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua y transitiva. Entonces, existe $x_0 \in X$ tal que la órbita de x_0 es densa en X.

DE REGRESO A LA TIENDA

Teorema

La tienda es topológicamente transitiva.

Demostración:

- Observación: Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$,tenemos que $T^n\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] = [0,1]$.
- Sean U, V abiertos no vacíos en $[0,1]$, y sea (a,b), con $a < b$, un intervalo contenido en U.
- Tomamos n *suficientemente grande* tal que, para alguna l, $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] \subset (a,b)$.
- Entonces $T^n(a,b) = [0,1]$ y, en consecuencia, $T^n(U) = [0,1]$.Por lo tanto $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Corolario

Existe $x_0 \in [0,1]$ tal que la órbita de x_0 es densa en $[0,1]$.

DE REGRESO A LA TIENDA

Teorema

La tienda es topológicamente transitiva.

Demostración:

- Observación: Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$,tenemos que $T^n\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] = [0, 1]$.
- Sean U, V abiertos no vacíos en $[0, 1]$, y sea (a, b), con $a < b$, un intervalo contenido en U.
- Tomamos *n suficientemente grande* tal que, para alguna l, $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] \subset (a, b)$.
- Entonces $T^n(a, b) = [0, 1]$ y, en consecuencia, $T^n(U) = [0, 1]$.Por lo tanto $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Corolario

Existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que la órbita de x_0 es densa en $[0, 1]$.

DE REGRESO A LA TIENDA

Teorema

La tienda es topológicamente transitiva.

Demostración:

- Observación: Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$,tenemos que $T^n \left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] = [0,1]$.
- Sean U, Vabiertos no vacíos en $[0,1]$, y sea (a, b), con $a < b$, un intervalo contenido en U.
- Tomamos n *suficientemente grande* tal que, para alguna l, $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] \subset (a, b)$.
- Entonces $T^n(a, b) = [0,1]$ y, en consecuencia, $T^n(U) = [0,1]$.Por lo tanto $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Corolario

Existe $x_0 \in [0,1]$ tal que la órbita de x_0 es densa en $[0,1]$.

DE REGRESO A LA TIENDA

Teorema

La tienda es topológicamente transitiva.

Demostración:

- Observación: Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$,tenemos que $T^n \left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] = [0,1]$.
- Sean U, Vabiertos no vacíos en $[0,1]$, y sea (a,b), con $a < b$, un intervalo contenido en U.
- Tomamos n *suficientemente grande* tal que, para alguna l, $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] \subset (a,b)$.
- Entonces $T^n(a,b) = [0,1]$ y, en consecuencia, $T^n(U) = [0,1]$.Por lo tanto $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Corolario

Existe $x_0 \in [0,1]$ tal que la órbita de x_0 es densa en $[0,1]$.

OTRAS PROPIEDADES DE LA TIENDA

Teorema

Per T es denso en $[0,1]$, es decir, $\overline{Per\ T} = [0,1]$.

Demostración:

- Usaremos la siguiente consecuencia del teorema del valor intermedio:

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $[a,b] \subset f([a,b])$, entonces f tiene un punto fijo en $[a,b]$.

- Tomemos ahora cualquier intervalo $(a,b) \subset [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] \subset (a,b)$ para algún l.
- Como $T^n\left(\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] = [0,1]\right)$ tenemos que existe un punto fijo p de T^n en $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$. Entonces $p \in (a,b)$ y se sigue que *Per T* es denso en $[0,1]$.

OTRAS PROPIEDADES DE LA TIENDA

Teorema

Per T es denso en $[0,1]$, es decir, $\overline{Per\ T} = [0,1]$.

Demostración:

- Usaremos la siguiente consecuencia del teorema del valor intermedio:

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $[a,b] \subset f([a,b])$, entonces f tiene un punto fijo en $[a,b]$.

- Tomemos ahora cualquier intervalo $(a,b) \subset [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] \subset (a,b)$ para algún l.
- Como $T^n\left(\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] = [0,1]\right)$ tenemos que existe un punto fijo p de T^n en $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$. Entonces $p \in (a,b)$ y se sigue que *Per T* es denso en $[0,1]$.

OTRAS PROPIEDADES DE LA TIENDA

Teorema

Per T es denso en $[0,1]$*, es decir,* $\overline{Per\ T} = [0,1]$.

Demostración:

- Usaremos la siguiente consecuencia del teorema del valor intermedio:

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es continua y* $[a,b] \subset f([a,b])$*, entonces f tiene un punto fijo en* $[a,b]$.

- Tomemos ahora cualquier intervalo $(a,b) \subset [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] \subset (a,b)$ para algún l.
- Como $T^n\left(\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] = [0,1]\right)$ tenemos que existe un punto fijo p de T^n en $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$. Entonces $p \in (a,b)$ y se sigue que *Per T* es denso en $[0,1]$.

CAOS - CAOS - CAOS - ...

Sea X un espacio métrico y $f : X \to X$ continua.

De acuerdo con la definición dada por R. L. devaney en 1985 (ver [Dev]), *una función $f : X \to X$ es caótica* si cumple lo siguiente:

1. f es *TT* en X.
2. El conjunto *Per T* es denso en X.
3. f es sensible a las condiciones iniciales (*definición pendiente*).

CAOS - CAOS - CAOS - ...

evaluations	without interrupt	with interrupt and restart
1	0.0397	0.0397
2	0.15407173	0.15407173
3	0.5450726260	0.5450726260
4	1.288978001	1.288978001
5	0.1715191421	0.1715191421
10	0.7229143012	0.7229143012
10	0.7229143012	restart with 0.722
15	1.270261775	1.257214733
20	0.5965292447	1.309731023
25	1.315587846	1.089173907
30	0.3742092321	1.333105032
100	0.7355620299	1.327362739

CAOS - CAOS - CAOS - ...

Tiempo después, un grupo de matemáticos (ver [Banks]) demostró que las condiciones 1 y 2 implican la 3; así que basta con que se cumplan 1 y 2 para que f sea una función caótica en el sentido de Devaney.
Entonces, hemos probado que:

Teorema

La función tienda es caótica en $[0,1]$*.*

Interludio 3: El teorema de Sharkovskii (I)

Sea A un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : A \to A$ continua.

Problema:

Si f tiene un punto periódico de periodo n y $n \neq m$, ¿será que f tiene también un punto de periodo m?

Teorema (Tien-Yen Li y James York [Li-York],1975)

Si una función continua $f : A \to A$ tiene un punto de periodo tres, entonces f tiene puntos periódicos de todos los periodos.

Teorema de Sharkovskii (II)

Más sorprendente aún es el siguiente teorema establecido en 1962 por el matemático ucraniano Oleksandr Sharkovskii:
Considérese a los números naturales ordenados, por el símbolo "$\triangleright$", de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l}
3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \cdots \\
2\cdot 3 \triangleright 2\cdot 5 \triangleright 2\cdot 7 \triangleright 2\cdot 9 \triangleright \cdots \\
2^2\cdot 3 \triangleright 2^2\cdot 5 \triangleright 2^2\cdot 7 \triangleright 2^2\cdot 9 \triangleright \cdots \\
2^3\cdot 3 \triangleright 2^3\cdot 5 \triangleright 2^3\cdot 7 \triangleright 2^3\cdot 9 \triangleright \cdots \\
\cdots \\
\cdots \triangleright 2^5 \triangleright 2^4 \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.
\end{array}$$

Tabla S

El símbolo $\triangleright$ significa lo siguiente :

$n \triangleright m \Longleftrightarrow m$ está en el mismo renglón que n pero a la derecha de éste, o en algún renglón abajo del que ocupa n.

La parte sustantiva del teorema de Sharkovskii (la que tiene relación con la pregunta planteada) es como sigue:

Sea A un intervalo en $\mathbb{R}$ y m y n números naturales. Si una función continua $f : A \to A$ tiene un punto de periodo n y $n \triangleright m$, entonces f tienen un punto de periodo m.

- Una consecuencia directa de este teorema es que si f tiene un punto de periodo 3, entonces tiene puntos de todos los periodos.
- Otra consecuencia directa es que:

La tienda tiene puntos periódicos de todos los periodos.

La parte sustantiva del teorema de Sharkovskii (la que tiene relación con la pregunta planteada) es como sigue:

Sea A un intervalo en $\mathbb{R}$ y m y n números naturales. Si una función continua $f : A \to A$ tiene un punto de periodo n y $n \triangleright m$, entonces f tienen un punto de periodo m.

- Una consecuencia directa de este teorema es que si f tiene un punto de periodo 3, entonces tiene puntos de todos los periodos.
- Otra consecuencia directa es que:

La tienda tiene puntos periódicos de todos los periodos.

INTERLUDIO 4: Conjugación topológica

Definición

Dos funciones $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ son conjugadas si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que para todo $x \in X$ se tiene que $h(f(x)) = g(h(x))$.

Esta condición puede expresarse también diciendo que $h \circ f \circ h^{-1} = g$.

Dos funciones conjugadas tienen esencialmente la misma dinámica: la transitividad, la densidad de puntos periódicos y, por lo tanto, el hecho de que una de ellas sea caótica, se preserva bajo conjugación.

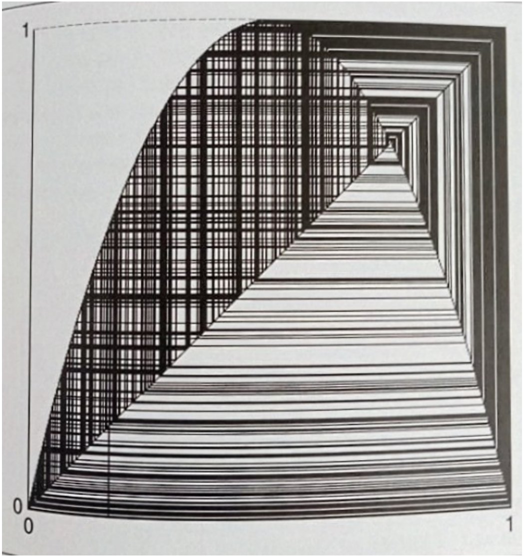
Teorema

La tienda y la función logística dada por

$$f(x) = 4x(1 - x)$$

son conjugadas.

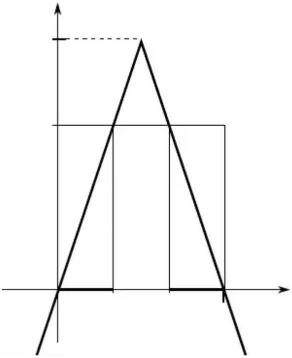
Ver [HJ] para una demostración.


1
0
0
1

Una tienda "más grande"

Nos interesa ahora la función

$$P(x) = \begin{cases} 3x, & x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - 3x, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



Definición

El conjunto de puntos atrapados o puntos prisioneros de una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el conjunto de todos los puntos cuya órbita es acotada.
Lo denotaremos como $J(f)$.
Es decir, $J(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, o(x, f) \text{ es acotada } \}$.

Observaciones

Es fácil comprobar lo siguiente:

- Sea $x < 0$, entonces $P(x) < x$ y, más aún, $P^n(x) = 3^n x$, $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} P^n(x) = -\infty$.
- Si $x > 1$, $P(x) < 0$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} P^n(x) = -\infty$.
- 0 y $\frac{3}{4}$ son los únicos puntos fijos de P, ambos repulsores. De hecho todas las órbitas periódicas de P son repulsoras.
- $x_0 = \frac{3}{28}$ es un punto periódico de periodo 3, por lo tanto, P tiene puntos periódicos de todos los periodos.

Dinámica de la función P

¿Cuál es el conjunto prisionero $J(P)$?

- Si $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{2}\right)$, entonces $P(x) > 1$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} P^n(x) = -\infty$. En consecuencia $J(P) \subset \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Hacemos $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.
- 0 y $\frac{3}{4}$ están en $J(P)$ y la órbita de $\frac{3}{28}$ necesariamente está en $J(P)$. De hecho $Per\ P \subset J(P)$.
- La imagen de $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ es $[0,1]$; por lo tanto existe un intervalo abierto en $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ cuya imagen es $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Este intervalo es $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, el tercio de enmedio de $\left[0, \frac{1}{3}\right]$. Algo similar sucede en $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

Dinámica de la función P

¿Cuál es el conjunto prisionero $J(P)$?

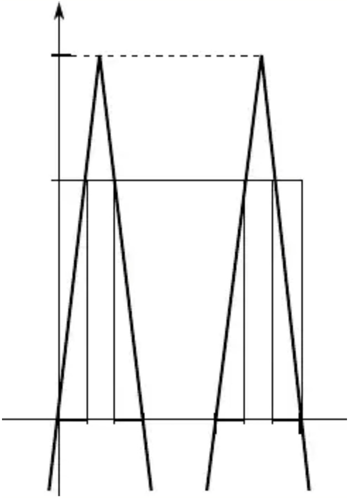
- Si $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{2}\right)$, entonces $P(x) > 1$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} P^n(x) = -\infty$. En consecuencia $J(P) \subset \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Hacemos $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.
- 0 y $\frac{3}{4}$ están en $J(P)$ y la órbita de $\frac{3}{28}$ necesariamente está en $J(P)$. De hecho *Per* $P \subset J(P)$.
- La imagen de $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ es $[0,1]$; por lo tanto existe un intervalo abierto en $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ cuya imagen es $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Este intervalo es $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, el tercio de enmedio de $\left[0, \frac{1}{3}\right]$. Algo similar sucede en $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

Dinámica de la función P

¿Cuál es el conjunto prisionero $J(P)$?

- Si $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{2}\right)$, entonces $P(x) > 1$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} P^n(x) = -\infty$. En consecuencia $J(P) \subset \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Hacemos $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.
- 0 y $\frac{3}{4}$ están en $J(P)$ y la órbita de $\frac{3}{28}$ necesariamente está en $J(P)$. De hecho *Per* $P \subset J(P)$.
- La imagen de $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ es $[0, 1]$; por lo tanto existe un intervalo abierto en $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ cuya imagen es $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Este intervalo es $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, el tercio de enmedio de $\left[0, \frac{1}{3}\right]$. Algo similar sucede en $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

Veamos la gráfica de P^2:



- Las órbitas de los puntos de los "tercios de enmedio" mencionados se van a $-\infty$. Entonces $J(P) \subset \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] = C_2$.
- Continuando así, en la iteración P^n $(n > 3)$ quedan 2^n intervalos cerrados cuya unión contiene a $J(P)$. Las órbitas de los "tercios de enmedio" de los 2^{n-1} intervalos cerrados que quedaron en la iteración P^{n-1} se van a $-\infty$.
- Los 2^n intervalos que subsisten en la n-ésima iteración son exactamente los que quedan en el paso n de la construcción del conjunto de Cantor clásico.

- Llamando C_n a los 2^n intervalos que subsisten en la iteración P^n, tenemos que

$$J(P) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \mathcal{C} = \text{conjunto de cantor.}$$

- Por otro lado, si $x \in \mathcal{C}$, $P^n(x) \in C_n$ para todo n y por ello, $P^n(x) \in, [0,1]$. O sea que la órbita entera de x se queda en [0,1] y por lo tanto $x \in J(P)$. En consecuencia $J(P) = \mathcal{C}$.

¡¡$J(P)$ es el conjunto de Cantor!!

Introduciendo dinámica simbólica se demuestra que en $J(P)$, P es TT y $\overline{Per\ T} = \mathcal{C}$. En conclusión:

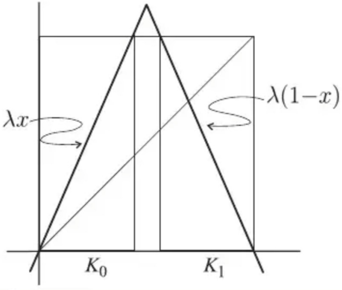
$$¡¡P \text{ es caótica en } J(P) = \mathcal{C}!!$$

La familia de las tiendas

Para $\lambda > 0$, sea $T_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$T_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & x \leq \frac{1}{2} \\ \lambda(1-x), & x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

La colección $\{ T_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, \lambda > 0 \}$ es la *familia de las tiendas.*



Elemento de la familia de las Tiendas con $\lambda > 2$.

Observaciones

- La altura máxima de T_λ se alcanza en $x = \frac{1}{2}$ y $T_\lambda(\frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{2}$.
- Si $\lambda > 2$ la altura máxima (el pico) es mayor que 1.
- Todas las tiendas T_λ (con $\lambda > 2$) son conjugadas entre sí. Por lo tanto, $J(T_\lambda)$ es un conjunto de Cantor y T_λ es caótica en $J(T_\lambda)$.

Bibliografía

- [Banks] Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G. y Stacey P., "On Devaney´s Definition of Chaos", Amer. Math. Montly **99** (1992).
- [*Dev*-FC] R. L. Devaney, "A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory And Experiment" 2nd edition, CRC Press, 2023.
- [*Dev*] R. L. Devaney, "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems" 2nd edition, Addison Wesley Publishing Company, Inc., 1989.
- [HJ] Mendez Lango, H., & King Davalos, J. E., "Sistemas dinámicos discretos", (2014).
- [Li-York] Li T.Y. y York J. A., "Period 3 implies chaos", Amer. Math. Montly **82** (1975)

HASTA MAÑANA...

¡Gracias!