Sorpresas topológicas que nos regalan los Sistemas Dinámicos Discretos (SDD)

Dr. Jefferson Edwin King Dávalos [1]

[1]Facultad de Ciencias, UNAM.

Septiembre, 2025.

Índice

Dinámica de funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Ejemplos famosos:

- La herradura de Smale
- El solenoide
- Difeomorfismos de Anosov (en el ¿toro?)
- Atracto de Henon

Aquí aparecen en general fenómenos dinámicos que no suceden en funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$o de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

Por ejemplo:

- La existencia de "variedades estables" y "variedades inestables".
- (Y muchos otros)

Veremos un ejemplo particular, no tan famoso, pero muy ilustrativo.

Generalidades

Sea X un espacio métrico y $f : X \to X$ continua. De acuerdo con R. L. Devaney, f es caótica en X si

- f es topológicamente transitiva en X
- $Per\, f$ es denso en X
- f es sensible a las condiciones iniciales

NOTA: Se demostró que las primeras dos condiciones implican la tercera. Eso nos ayudará.

Una familia de funciones en $\mathbb{R}^2$

Sea $F_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ definida por

$$F_a(x, y) = \left(x^2 - y^2 + 2a_1 x + 2a_2 y, 2xy + 2a_2 x - 2a_1 y\right)$$

o, usando números complejos,

$$F_a(z) = z^2 + 2a\bar{z}, \; a = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}.$$

OBS. Si $a \neq 0$, F_a no es holomorfa.
Nos interesa analizar un miembro particular de esta familia: el caso $a = 1$.

El lema de contracción

Sea X un espacio métrico. Una función $f : X \to X$ es una contracción si existe r con $0 < r < 1$, tal que para todo par de puntos x, y en X se tiene que

$$d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq r d\left(x, y\right).$$

Lema de contracción

Sea X un espacio métrico completo. Si $f : X \to X$ es una contracción, entonces f tiene un único punto fijo, digamos $x_0 \in X$, tal que para todo $x \in X$ se tiene que $\lim_{n \to \infty} f^n\left(x\right) = x_0$.

Si X es completo y $f : X \to X$, la órbita de todo punto $x \in X$ converge al punto fijo x_0. Así, la dinámica de f es muy sencilla.

Puntos críticos y valores críticos

En general, para F_a la derivada (matriz Jacobiana) es

$$DF_a(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 2a_1 & -2y + 2a_2 \\ 2y + 2a_2 & 2x - 2a_1 \end{pmatrix}$$

y su determinante (determinante Jacobiano) es

$$det\, DF_a(x,y) = 4\left[\left(x^2 + y^2\right) - \left(a_1^2 + a_2^2\right)\right] = 4\left(|z|^2 - |a|^2\right).$$

El conjunto de puntos críticos es, por lo tanto, una circunferencia de radio $|a|$ con centro en el origen.
A la imagen, bajo F_a, de este conjunto de puntos críticos se le llama el conjunto de valores críticos.
Es fácil comprobar que este último conjunto es una hipocicloide de tres picos.
Ilustraremos estos conjuntos en el caso que nos interesa: $a = 1$.

El caso $a = 1$

Regresando a la familia de funciones F_a, a F_1 la denotamos simplemente por F, que está dada por

$$F(x, y) = \left(x^2 - y^2 - 2x, 2xy + 2y\right)$$

o bien,

$$F(z) = z^2 - 2\bar{z}.$$

Geométricamente, a $a \in \mathbb{C}$ la función primero duplica su argumento y eleva su módulo al cuadrado; después, refleja a z por el eje real (obteniendo $\bar{z}$), lo duplica y lo refleja a través del origen para obtener $-2\bar{z}$. Finalmente suma ambos resultados.

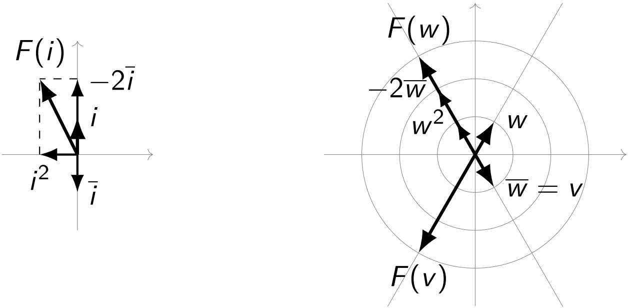


Figura: $F(z)$ para algunos $z \in \mathbb{C}$.

.

En este caso $(a = 1)$ la derivada es

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2 & -2x \\ 2y & 2x+2 \end{pmatrix}$$

y su determinante es

$$det\, DF_a(x,y) = 4\left[\left(x^2+y^2\right)-1\right] = 4\left(|z|^2-1\right)$$

por lo que el conjunto de puntos críticos es ka circunferencia unitaria $C = \{z \in \mathbb{C} |\, |z| = 1\}$, que podemos parametrizar (en notación compleja) como $e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$.
En consecuencia, el conjunto de valores críticos está dado por

$$F\left(e^{i\theta}\right) = e^{i2\theta} - 2e^{-i\theta}$$

que es una hipocicloide de 3 picos.

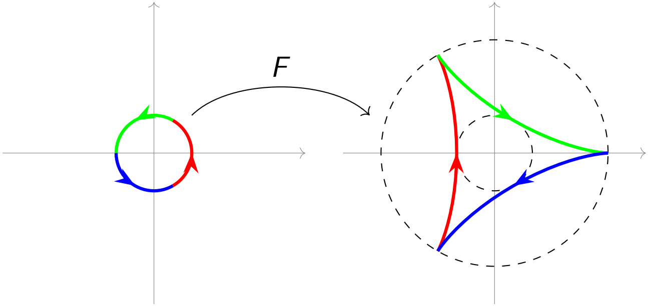


Figura: Conjuntos de puntos críticos (*izquierda*) y de valores críticos (*derecha*}) de F.

Llamando Λ al conjunto de valores críticos, es decir, $\Lambda = \left\{ z = e^{i2\theta} - 2e^{-i\theta} | \theta \in [0, 2\pi] \right\}$ es fácil comprobar que la imagen inversa de Λ consta de 2 curvas: la circunferencia C y la hipocicloide Λ.

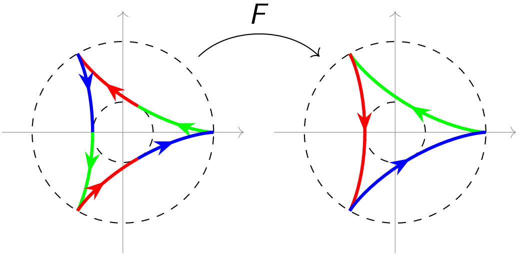


Figura: $F(\Lambda) = \Lambda$ (recorrida dos veces).

Ejercicio: comprobar que $F(\Lambda) = \Lambda$.

El conjunto $A(F)$ de puntos atrapados y la cuenca de atracción de ∞.

Por definición, $A(F) = \{z \in \mathbb{C} | orb(z, F) \text{ es acotada}\}$.
Observando que Λ es una curva simple cerrada, por el teorema de Jordan ésta divide al plano en dos regiones: una rodeada por Λ (que está "dentro" de Λ) y otra exterior a Λ (que queda "fuera" de Λ) .
Λ es la frontera común a ambas regiones.
A la región interior a Λ la denotaremos por $\mathcal{K}$ y a la exterior por $\mathcal{L}$.
A la cuenca de atracción de ∞, es decir, al conjunto $\{z \in \mathbb{C} | orb(z, F) \to \infty\}$ la denotamos por $A_\infty(A)$.

Teorema

$A(F) = \mathcal{K} \cup \Lambda$ Y $A_\infty = \mathcal{L}$.

Dinámica de F en la cuenca de atracción de ∞

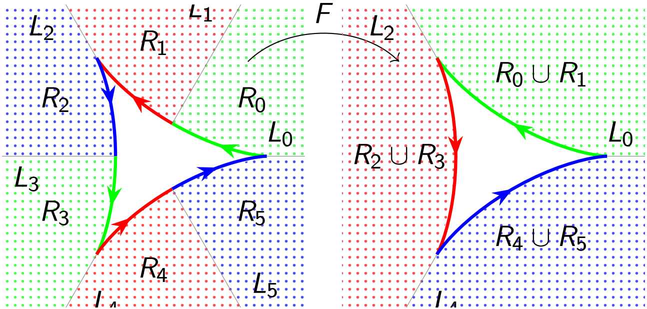


Figura: $F(\Lambda \cup \mathcal{L}) = \Lambda \cup L$

Teorema

En $\mathcal{L} = A_\infty(F)$, la dinámica de F es esencialmente la misma que (es decir, es conjugada) la función $f(z) = z^2$ fuera del disco unitario.

Actuación de F en el conjunto prisionero $A(F) = \mathcal{K} \cup \Lambda$

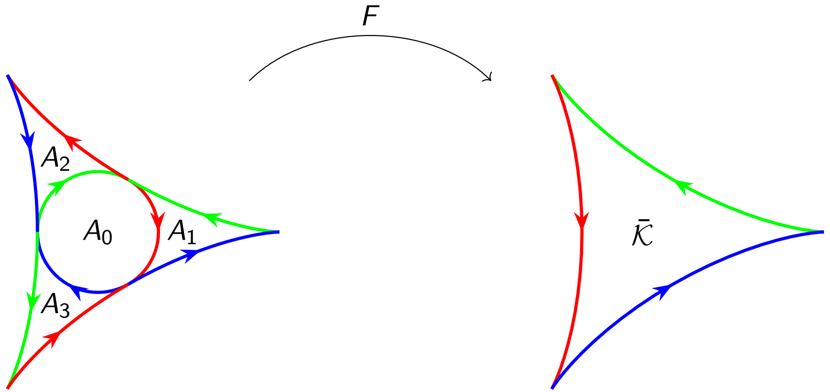


Figura: $F(A_j) = \bar{\mathcal{K}}$ para cada $j = 0, 1, 2, 3.$

Un modelo geométrico de la dinámica de Fen

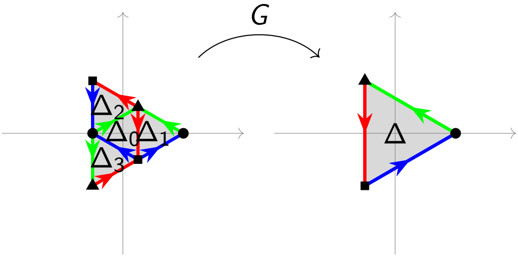


Figura: El aspecto de $\bar{\mathcal{K}}$ si las curvas fueran segmentos de recta.

El triángulo equilátero Δestá descrito como sigue:

$$\Delta = \left\{ (x, y) \,|\, x \in [-1, 2] \ \text{ y } \ \frac{\sqrt{3}}{3}(x-2) \leq y \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2) \right\}.$$

Los 4 triángulos Δ_i, $i = 0, 1, 2, 3$ se pueden describir de manera parecida.

Podemos imaginar la acción de $G : \Delta \to \Delta$ como indica el siguiente esquema:

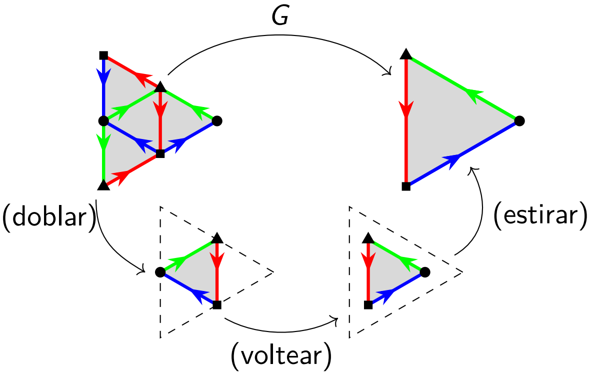


Figura: La función G en tres pasos: doblar, voltear y estirar.

Los pasos de la función G: doblar, voltear y estirar.

Teorema

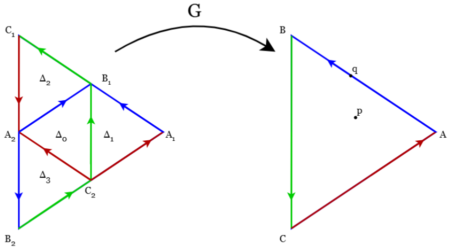
La función F en $A(F) = \Lambda \cup \mathcal{K}$ es conjugada con la función G en el triángulo equilátero Δ.

Con este teorema vemos que para entender la dinámica de F en el conjunto prisionero basta con entender la de G en el triángulo Δ.

Dinámica de G en Δ

Geométricamente podemos observar lo siguiente: (ver fig.6)

1. Cada $p \in \text{int } \Delta$ tiene 4 preimágenes, una en el interior de cada Δ_i, $i = 0, 1, 2, 3$.
2. $q \in (\partial\Delta - \{\text{vértices}\})$ tiene 3 preimágenes en la unión de $\partial\Delta$ con las fronteras de los Δ_i.
3. Cada vértice de Δ tiene 2 preimágenes en $\partial\Delta$.



Dinámica de G en Δ

Geométricamente (e intuitivamente) de la fig. 6 inferimos también que:

4. G es un homeomorfismo de Δ_i en Δ que multiplica por 2 cada lado de cada Δ_i, $i = 0, 1, 2, 3$.

En consecuencia, hay 4 inversas, cada una de Δ en Δ_i que contrae, multiplicando por $\frac{1}{2}$ cada lado de Δ.
Es decir, cada una de estas inversas es una contracción.
Conclusión: G tiene 4 puntos fijos p_i con $p_i \in \Delta_i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Demostración de la conclusión

Demostración

Para cada $i = 0, 1, 2, 3$, $G : \Delta_i \to \Delta$ es un polimorfismo y por lo tanto tiene inversa continua $G_i^{-1} : \Delta \to \Delta_i$.
G^{-1} es una contracción -con factor $r = \frac{1}{2}$- de Δ en Δ_i y por lo tanto, existe un único punto fijo $p_i \in \Delta$ tal que $G_i^{-1}(p_i) = p_i$.
De aquí se sigue que $G(p_i) = p_i$.
Continuamos con este proceso: tomamos ahora las imágenes inversas, bajo G, de cada Δ_i.
Obtenemos 4^2 triángulos pequeños, 4 por cada Δ_i.

(cont.)

Para i fija, llamamos Δ_{0i}, Δ_{1i}, Δ_{2i} y Δ_{3i} a las correspondientes imágenes de Δ_i (bajo G).
Resulta, entonces, que $\Delta_{ji} \subset \Delta_j$ y $G(\Delta_{ij}) = \Delta_i$, o bien, $G^2(\Delta_{ji}) = \Delta$.
G^2 es un homeomorfismo de Δ_{ji} en Δ y por consiguiente, la inversa de G^2 que va de Δ a Δ_{ji} es una contracción (por un factor $\frac{1}{2^2}$).
En consecuencia, en cada Δ_{ij} hay un punto fijo bajo G^2, y por lo tanto hay un punto de periodo 2.
¡*Per G* es denso en Δ!

(cont.)

Continuando así: Para cada $n \in \mathbb{N} \ldots$
Tomando imágenes inversas de orden n de Δ obtenemos una subdivisión de Δ en 4^n triángulos equiláteros

$$\Delta_{w_1 \ldots w_n}, \; w_i \in \{0, 1, 2, 3\}, \; i = 1, \ldots, n,$$

tales que

$$\Delta_{w_1 \ldots w_{n-1}} = \bigcup_{w_n=0}^{3} \Delta_{w_0 \ldots w_n},$$

$$\begin{aligned} G\left(\Delta_{w_1 w_2 \ldots w_n}\right) &= \Delta_{w_2 \ldots w_n} \\ G^2\left(\Delta_{w_1 w_2 \ldots w_n}\right) &= \Delta_{w_3 \ldots w_n} \\ &\vdots \\ G^n\left(\Delta_{w_1 w_2 \ldots w_n}\right) &= \Delta \end{aligned}$$

(cont.)

Nótese que

$$\text{Lado de } \Delta_{w_1 \ldots w_n} = \frac{l}{2^n} \qquad (l = \text{lado de } \Delta)$$

$$\text{Área de } \Delta_{w_1 \ldots w_n} = \frac{a}{4^n} \qquad (a = \text{área de } \Delta)$$

Por lo tanto:

¡¡Per G es denso en Δ*!!*

NOTA: Se puede comprobar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $p \in \Delta$ de periodo n y todos estos puntos periódicos son repulsores.

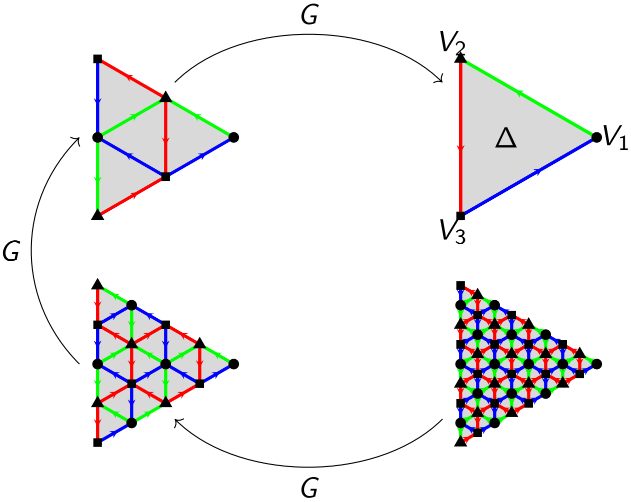


Figura: Imágenes inversas bajo la función G.

¡FIN!