Maravillas topológicas en Dinámica compleja

Dr. Jefferson King Dávalos y Dr. Rodrigo Robles Montero[1]

[1]Facultad de Ciencias, UNAM.

Junio, 2025.

Los inicios...

"A history of complex dynamics", D. Alexander (1994)

"En 1917, Pierre Fatou y Gaston Julia anunciaron una serie de resultados sobre la iteración de funciones racionales de variable compleja en los *Comptes rendus* de la Academia de Ciencias Francesa. Eran la punta del iceberg. En 1918, Julia publicó un tratado fascinante sobre el tema, fue seguido en 1919 por un estudio igual de sobresaliente de Fatou. Estos trabajos forman los fundamentos del estudio contemporáneo de la dinámica compleja."

Algunas definiciones dinámicas

- Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua.
- Dado $x \in X$, definimos:

1. Su ***órbita hacia adelante*** como $\mathrm{Orb}^+(x) := \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_0, x_1 := f(x_0), x_2 := f^2(x_0), \dots\}$.
2. Su ***órbita hacia atrás*** como $\mathrm{Orb}^-(x) := \{f^{-n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Su ***órbita*** como $\mathrm{Orb}(x) := \mathrm{Orb}^+(x) \cup \mathrm{Orb}^-(x) = \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.
4. Un ***punto fijo*** $\Leftrightarrow f(x) = x$.
5. Una ***órbita periódica de período*** $p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f^p(x) = x$ *con* p *el mínimo natural que cumple esta igualdad.*

Algunas definiciones dinámicas

- Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua.
- Dado $x \in X$, definimos:

1. Su ***órbita hacia adelante*** como $\mathrm{Orb}^+(x) := \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_0, x_1 := f(x_0), x_2 := f^2(x_0), \ldots\}$.
2. Su ***órbita hacia atrás*** como $\mathrm{Orb}^-(x) := \{f^{-n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Su ***órbita*** como $\mathrm{Orb}(x) := \mathrm{Orb}^+(x) \cup \mathrm{Orb}^-(x) = \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.
4. Un ***punto fijo*** $\Leftrightarrow f(x) = x$.
5. Una ***órbita periódica de período*** $p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f^p(x) = x$ *con* p *el mínimo natural que cumple esta igualdad.*

Algunas definiciones dinámicas

- Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua.
- Dado $x \in X$, definimos:

1. Su ***órbita hacia adelante*** como $\mathrm{Orb}^+(x) := \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_0, x_1 := f(x_0), x_2 := f^2(x_0), \ldots\}$.
2. Su ***órbita hacia atrás*** como $\mathrm{Orb}^-(x) := \{f^{-n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Su ***órbita*** como $\mathrm{Orb}(x) := \mathrm{Orb}^+(x) \cup \mathrm{Orb}^-(x) = \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.
4. Un ***punto fijo*** $\Leftrightarrow f(x) = x$.
5. Una ***órbita periódica de período*** $p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f^p(x) = x$ *con* p *el mínimo natural que cumple esta igualdad.*

Dicotomía básica de la dinámica (idea intuitiva)

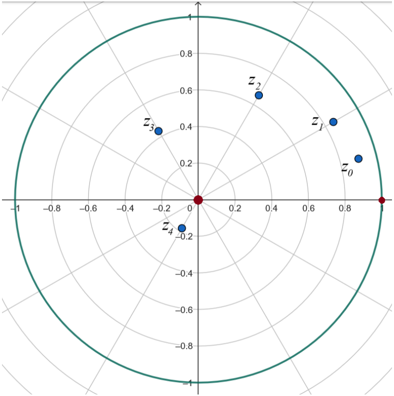
- Si para cualesquiera dos puntos x, y en un conjunto sus órbitas permanecen *cercanas*, entonces tenemos un *comportamiento estable.*
- *Si no, el comportamiento dinámico es inestable, tenemos incertidumbre, tenemos* ***¡Caos!***

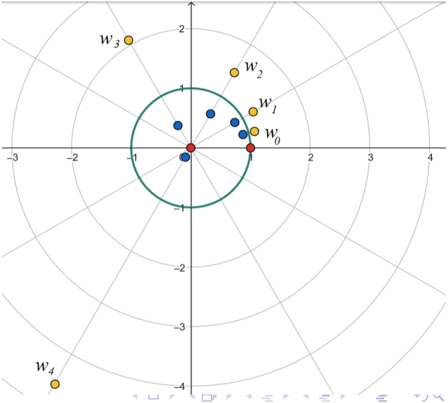
Dicotomía básica de la dinámica (idea intuitiva)

- Si para cualesquiera dos puntos x, y en un conjunto sus órbitas permanecen *cercanas*, entonces tenemos un *comportamiento estable.*
- *Si no, el comportamiento dinámico es inestable, tenemos incertidumbre, tenemos* ***¡Caos!***

Ejemplo: $f(z) = z^2$

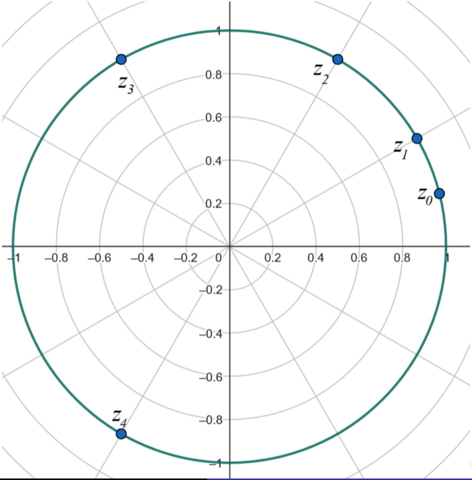
Nótese que $\{f^n(z)\} = \{z^{2^n}\}$.
Cuando $|z| < 1$, las iteraciones tienden a 0.
Cuando $|z| > 1$, tienden a ∞.
(Ejemplos con $z_0 = 0{,}9e^{i\frac{\pi}{12}}$ y $w_0 = 1{,}1e^{i\frac{\pi}{12}}$)





Ejemplo: $f(z) = z^2$

Si $|z| = 1$, las iteraciones se quedan siempre en la circunferencia unitaria.
(Ejemplo con $z_0 = e^{i\frac{\pi}{12}}$)



Ejemplo: $f(z) = z^2$

Las órbitas periódicas son densas en el círculo unitario

Entonces, $f^p(z) = z^{2^p} = z \Leftrightarrow$
$z\left(z^{2^p-1} - 1\right) = 0$
Si $z \neq 0$, entonces $z^{2^{p-1}} = 1$.
Es decir, z es una raíz 2^{p-1}−ésima de 1.

Por tanto, los puntos periódicos en el disco unitario son vértices de polígonos regulares de 2^{p-1} lados con $p \in \mathbb{N}$.

En consecuencia, el conjunto de tales puntos periódicos es denso en $\mathbb{S}^1$.

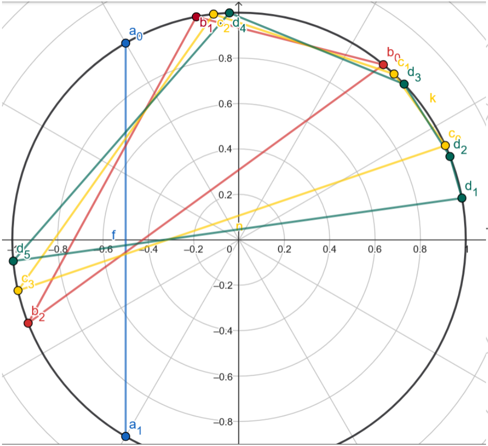
Ejemplo: $f(z) = z^2$

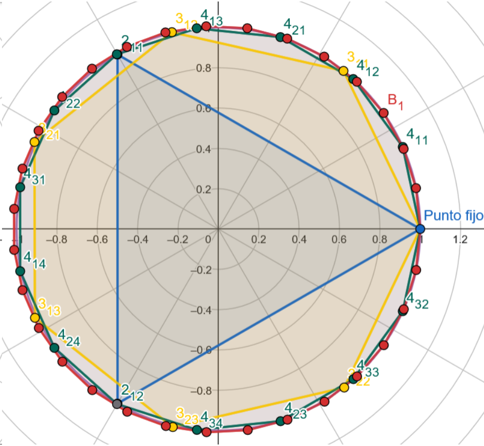
Usando DeMoivre, si $z = \cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta)$,
$z^{2^p} = z \Leftrightarrow 2^p\theta = \theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Por tanto,

$$\theta = \frac{k}{2^p - 1}2\pi.$$

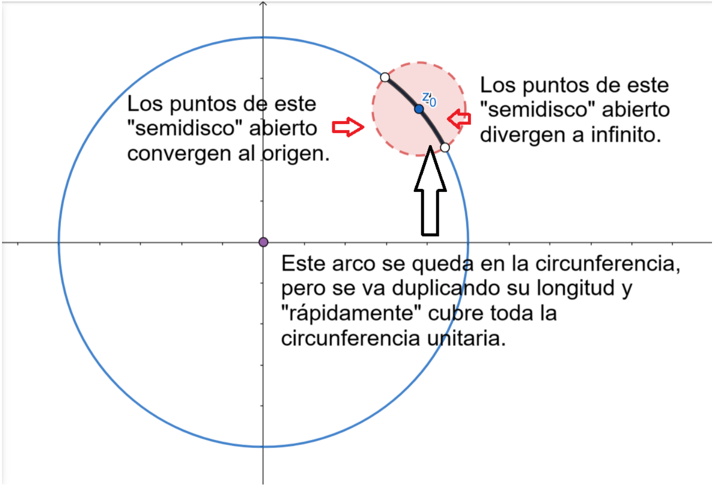
Ejemplo: (sólo aparecen las órbitas de período $= p$)
$p = 2 : \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.
$p = 3 : \left\{\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}\right\}, \left\{\frac{6\pi}{7}, \frac{12\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}\right\}$.
$p = 4 :$
$\left\{\frac{2\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}, \frac{8\pi}{15}, \frac{16\pi}{15}\right\}, \left\{\frac{6\pi}{15}, \frac{12\pi}{15}, \frac{24\pi}{15}, \frac{18\pi}{15}\right\}, \left\{\frac{14\pi}{15}, \frac{28\pi}{15}, \frac{26\pi}{15}, \frac{22\pi}{15}\right\}$.
$p = 5 : \left\{\frac{2\pi}{31}, \frac{4\pi}{31}, \frac{8\pi}{31}, \frac{16\pi}{31}, \frac{31\pi}{31}\right\}, \left\{\frac{6\pi}{31}, \frac{12\pi}{31}, \frac{24\pi}{31}, \frac{48\pi}{31}, \frac{34\pi}{31}\right\}$,
$\left\{\frac{10\pi}{31}, \frac{20\pi}{31}, \frac{40\pi}{31}, \frac{18\pi}{31}, \frac{36\pi}{31}\right\}, \left\{\frac{14\pi}{31}, \frac{28\pi}{31}, \frac{56\pi}{31}, \frac{50\pi}{31}, \frac{38\pi}{31}\right\}$,
$\left\{\frac{22\pi}{31}, \frac{44\pi}{31}, \frac{26\pi}{31}, \frac{52\pi}{31}, \frac{104\pi}{31}\right\}, \left\{\frac{30\pi}{31}, \frac{60\pi}{31}, \frac{58\pi}{31}, \frac{54\pi}{31}, \frac{46\pi}{31}\right\}$.

Ejemplo: $f(z) = z^2$





Todos los puntos periódicos son muy repulsores.



En cualquier disco alrededor de z_0 se destruye toda posibilidad de que las iteraciones sean convergentes a algo.

Dinámica de z^2 en la circunferencia unitaria

Además, en la circunferencia unitaria hay:

1.) Órbitas densas.
2.) Órbitas preperiódicas.
3.) Órbitas infinitas, pero no densas.

- Todavía más, los conjuntos de puntos:
- $\{z \in \mathbb{C} | \text{su órbita es densa}\}$ es denso en $\mathbb{S}^1$.
- $\{z \in \mathbb{C} | \text{su órbita es preperiódica}\}$ es denso en $\mathbb{S}^1$.
- ¡¡Muchas cosas pueden pasar!!

Dinámica de z^2 en la circunferencia unitaria

Además, en la circunferencia unitaria hay:

1.) Órbitas densas.
2.) Órbitas preperiódicas.
3.) Órbitas infinitas, pero no densas.

- Todavía más, los conjuntos de puntos:
- $\{z \in \mathbb{C} | \text{su órbita es densa}\}$ es denso en $\mathbb{S}^1$.
- $\{z \in \mathbb{C} | \text{su órbita es preperiódica}\}$ es denso en $\mathbb{S}^1$.
- ¡¡Muchas cosas pueden pasar!!

Dinámica de z^2 en la circunferencia unitaria

Además, en la circunferencia unitaria hay:

1.) Órbitas densas.
2.) Órbitas preperiódicas.
3.) Órbitas infinitas, pero no densas.

- Todavía más, los conjuntos de puntos:
- $\{z \in \mathbb{C} | \text{su órbita es densa}\}$ es denso en $\mathbb{S}^1$.
- $\{z \in \mathbb{C} | \text{su órbita es preperiódica}\}$ es denso en $\mathbb{S}^1$.
- ¡¡Muchas cosas pueden pasar!!

Dinámica de z^2 en $\mathbb{C}$ o en $\hat{\mathbb{C}}$

Conclusión:

El plano complejo $\mathbb{C}$ (o la esfera de de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$) se divide en dos conjuntos ajenos, complementarios, distinguidos por el hecho de que las correspondientes dinámicas son muy, muy distintas.

1.) En el conjunto *"estable"* $\{|z| < 1\} \cup \{|z| > 1\}$ hay convergencia uniforme a una función.
2.) En el conjunto *"inestable"* $\{|z| = 1\}$ no la hay.

- *¡Esta división fundamental del plano o la esfera sucede siempre para toda función holomorfa!*
- Este es un descubrimiento *también* fundamental de Fatou y Julia.

Dinámica de z^2 en $\mathbb{C}$ o en $\hat{\mathbb{C}}$

Conclusión:

El plano complejo $\mathbb{C}$ (o la esfera de de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$) se divide en dos conjuntos ajenos, complementarios, distinguidos por el hecho de que las correspondientes dinámicas son muy, muy distintas.

1.) En el conjunto *"estable"* $\{|z| < 1\} \cup \{|z| > 1\}$ hay convergencia uniforme a una función.
2.) En el conjunto *"inestable"* $\{|z| = 1\}$ no la hay.

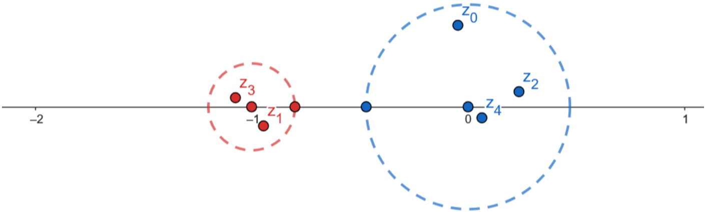
- *¡Esta división fundamental del plano o la esfera sucede siempre para toda función holomorfa!*
- Este es un descubrimiento *también* fundamental de Fatou y Julia.

Dinámica de $z^2 - 1$ en $\mathbb{C}$

- Sea z_0 el punto inicial, entonces $z_1 = z_0^2 - 1$, $z_2 = z_1^2 - 1 = (z_0^2 - 1)^2 - 1$,etc.
- Si $z_0 = 0$, tenemos una órbita de período 2

$$0 \mapsto -1 \mapsto 0 \mapsto -1 \mapsto \cdots$$

¿Cuáles son los *"prisioneros"*, los que *"escapan"* y la *"frontera"*?



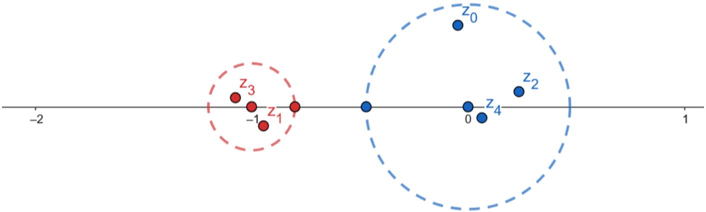
- $\{-1, 0\}$ es una órbita de período 2 *atractora*.

Dinámica de $z^2 - 1$ en $\mathbb{C}$

- Sea z_0 el punto inicial, entonces $z_1 = z_0^2 - 1$, $z_2 = z_1^2 - 1 = (z_0^2 - 1)^2 - 1$,etc.
- Si $z_0 = 0$, tenemos una órbita de período 2

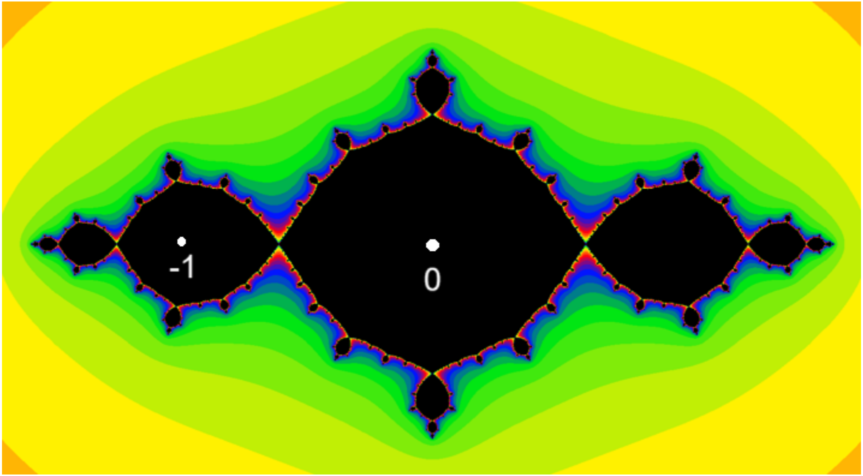
$$0 \mapsto -1 \mapsto 0 \mapsto -1 \mapsto \cdots$$

¿Cuáles son los *"prisioneros"*, los que *"escapan"* y la *"frontera"*?



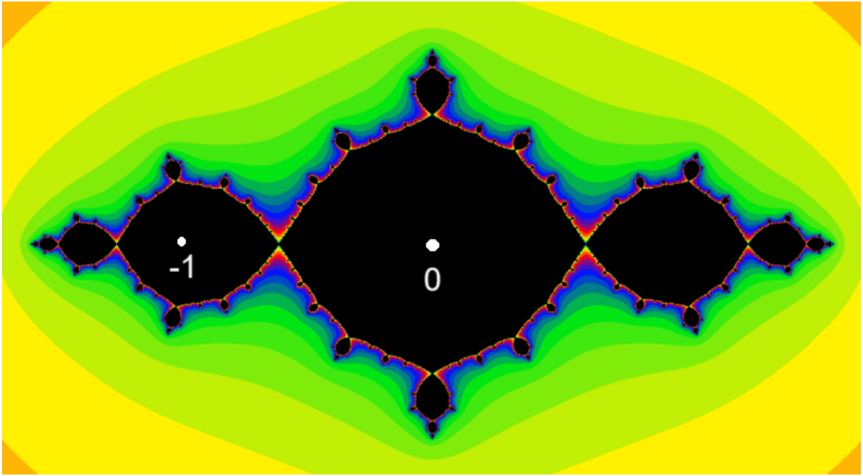
- $\{-1, 0\}$ es una órbita de período 2 *atractora*.

- ¡La ***frontera***!



- Pedir convergencia uniforme en $\{f^n(z)\}$ es muy rígido, necesitamos flexibilidad para la órbita de período 2 atractora.

- ¡La ***frontera***!



- Pedir convergencia uniforme en $\{f^n(z)\}$ es muy rígido, necesitamos flexibilidad para la órbita de período 2 atractora.

Aparece Montel e introduce el concepto de normalidad

Definición moderna:

Una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas definidas en una región U contenida en $\mathbb{C}$ o en $\hat{\mathbb{C}}$ es ***normal*** $\Leftrightarrow$ toda sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ contiene una subsucesión $\{f_{k_n}\}$ que converge uniformemente a una función f en todo compacto $K \subseteq U$.

También se dice que f es ***normal en un punto*** z_0 si existe una vecindad U de z_0 en la que se cumple la anterior definición.

Y ***no es normal*** en z_0 si en toda vecindad de U no se cumple la anterior definición.

Aparece Montel e introduce el concepto de normalidad

Definición moderna:

Una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas definidas en una región U contenida en $\mathbb{C}$ o en $\hat{\mathbb{C}}$ es ***normal*** $\Leftrightarrow$ toda sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ contiene una subsucesión $\{f_{k_n}\}$ que converge uniformemente a una función f en todo compacto $K \subseteq U$.

También se dice que f es ***normal en un punto*** z_0 si existe una vecindad U de z_0 en la que se cumple la anterior definición.

Y ***no es normal*** en z_0 si en toda vecindad de U no se cumple la anterior definición.

Conjuntos de Fatou $\mathcal{F}(f)$ y de Julia $\mathcal{J}(f)$

Definición

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$(ó $\hat{\mathbb{C}}$) una función holomorfa no cte., definimos:
*1.) El **conjunto de Fatou** $\mathcal{F}(f)$ como el dominio donde la familia de iteraciones $\{f^n\}$ es normal.*
*2.) El **conjunto de Julia** $\mathcal{J}(f)$ como el dominio donde la familia de iteraciones $\{f^n\}$no es normal, i.e., el complemento de $\mathcal{F}(f)$.*

El conjunto de Fatou es nuestro conjunto *estable.*
Y el conjunto de Julia es nuestro conjunto *inestable.*

Por su misma definición:
$\mathcal{J}(f)$ es cerrado y $\mathcal{F}(f)$ es abierto.

Conjuntos de Fatou $\mathcal{F}(f)$ y de Julia $\mathcal{J}(f)$

Propiedades de $\mathcal{J}(f)$

1.) $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$ y $\mathcal{J}(f)$ es perfecto.
2.) $\mathcal{J}(f)$ es completamente invariante.
3.) $\mathcal{J}(f^n) = \mathcal{J}(f)$.
4.) Si z_0 es un repulsor periódico $\Rightarrow z_0 \in \mathcal{J}(f)$.
Más aún, $\mathcal{J}(f)$ es la cerradura del conjunto de órbitas periódicas repulsoras.
5.) Si $\text{int}(\mathcal{J}(f)) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{J}(f) = \hat{\mathbb{C}}$.

Conjuntos de Fatou $\mathcal{F}(f)$ y de Julia $\mathcal{J}(f)$

Propiedades de $\mathcal{F}(f)$

1.) $\mathcal{F}(f)$ es completamente invariante.
2.) $\mathcal{F}(f^n) = \mathcal{F}(f)$.
3.) Si z_0 es punto periódico atractor $\Rightarrow z_0 \in \mathcal{F}(f)$.
Más aún, toda la *"cuenca de atracción"* de z_0 está contenida en $\mathcal{F}(f)$.
4.) Para toda f racional en la cuenca de atracción siempre hay un punto crítico.

Apéndice

Teorema

Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ holomorfa. Si z_0 es un punto periódico repulsor, entonces $z_0 \in J(f)$.

Demostración: Suponemos que $f(z_0) = z_0$.

- Supongamos que $\{f^n\}$ es normal en alguna vecindad U de z_0. Como $f^n(z_0) = z_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Las iteraciones f^n no convergen a ∞ en U.
- Por la normalidad, alguna subsución $\{f^{n_k}\}$ de $\{f^n\}$ converge uniformemente en compactos contenidos en U a una función g (holomorfa) definida en U. Por lo tanto, $\left\{\left(f^{n_k}\right)'(z_0)\right\}$ converge a $g'(z_0)$.
- Pero como z_0 es repulsor, $|f'(z_0)| = \lambda > 1$, y por lo tanto $\left|\left(f^{n_k}\right)'(z_0)\right| = \lambda^{n_k}$ tiende a ∞. *¡Contradicción!*

Conjuntos de Fatou $\mathcal{F}(f)$ y de Julia $\mathcal{J}(f)$

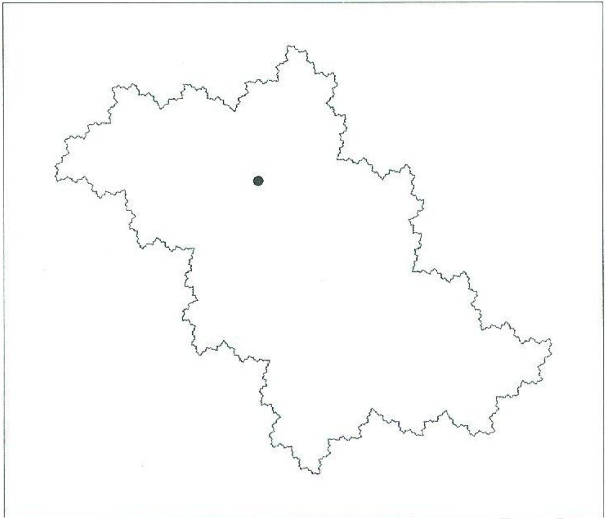
¡Asombroso que pudieran ver tan lejos sin poder ver nada en realidad!

"*A history of complex dynamics*", D. Alexander (1994)

"Ejemplos de conjuntos perfectos totalmente disconexos, curvas sin tangentes y curvas con una infinidad de puntos dobles ya existían en la literatura de la época (1917), pero solían ser construídos por un proceso detallado y artificial. Además, a muchos matemáticos franceses les perturbaba la existencia de tales objetos y no sólo los veían como antinaturales, sino que a veces ridiculizaban a quienes los estudiaban."

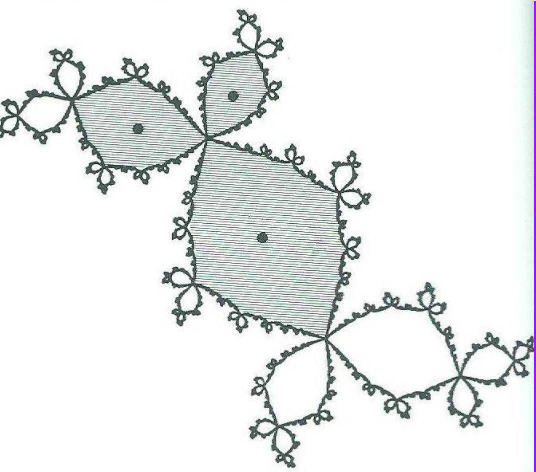
La familia $z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$

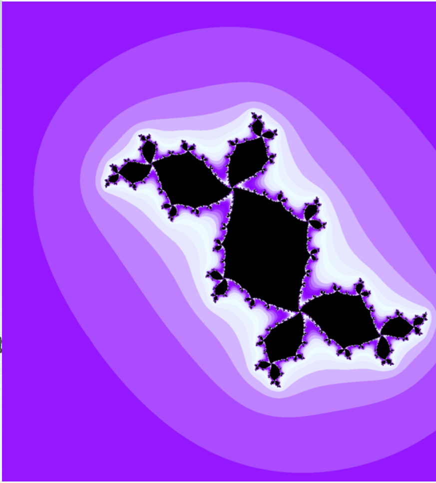
$c = -0{,}12375 + 0{,}56508$



La familia $z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$

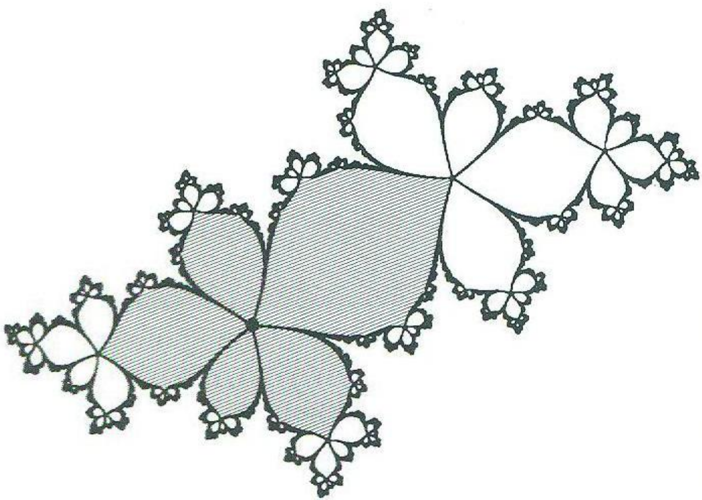
Período 3 atractor, $c = -0{,}122 + 0{,}745i$.





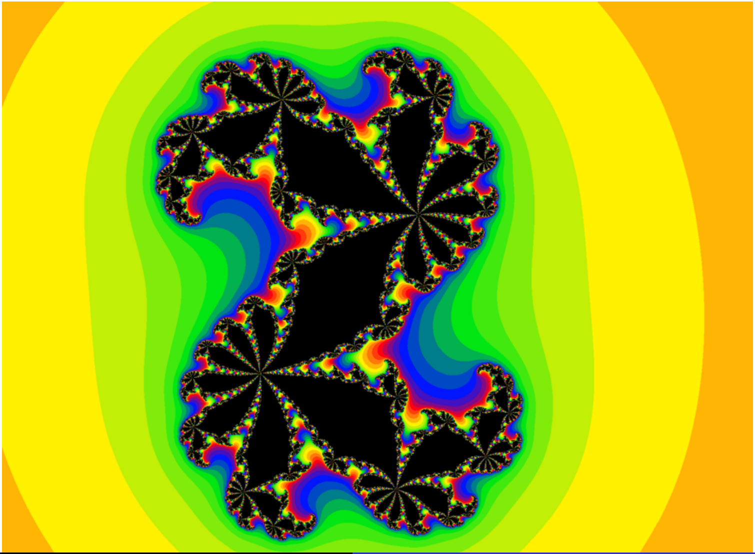
La familia $z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$

Período 5 atractor.



La familia $z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$

Período 8 atractor, $c = 0{,}360284 + 0{,}100376i$.

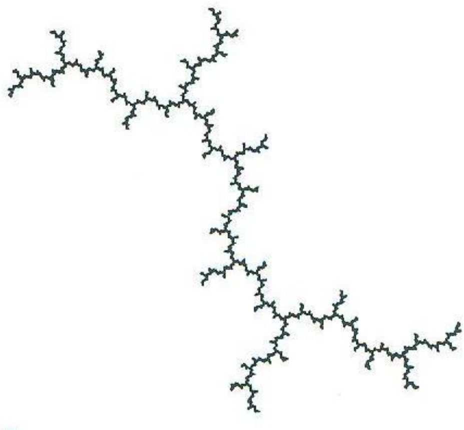


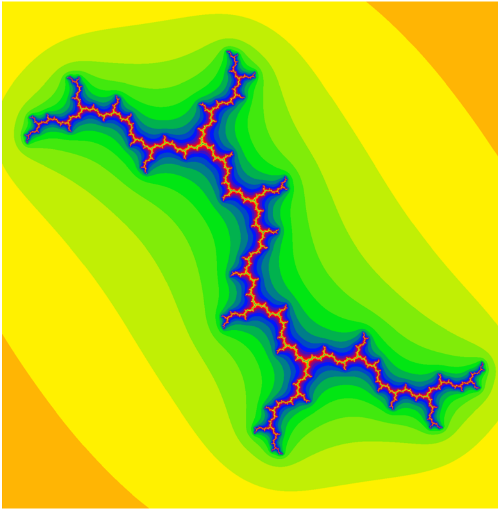
La familia $z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$

Período 11 atractor.

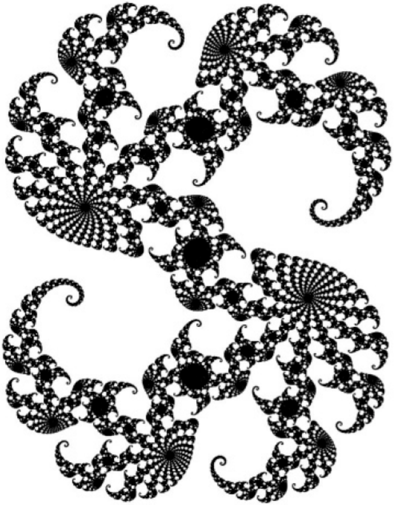
La familia $z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$

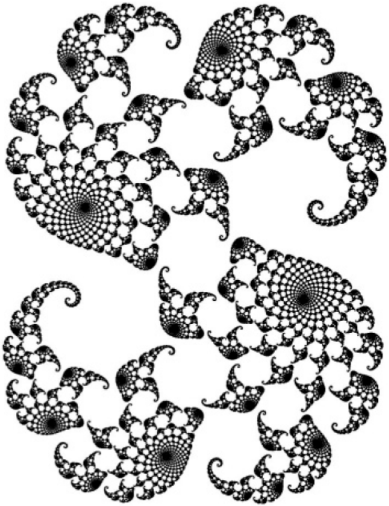
$c = i$



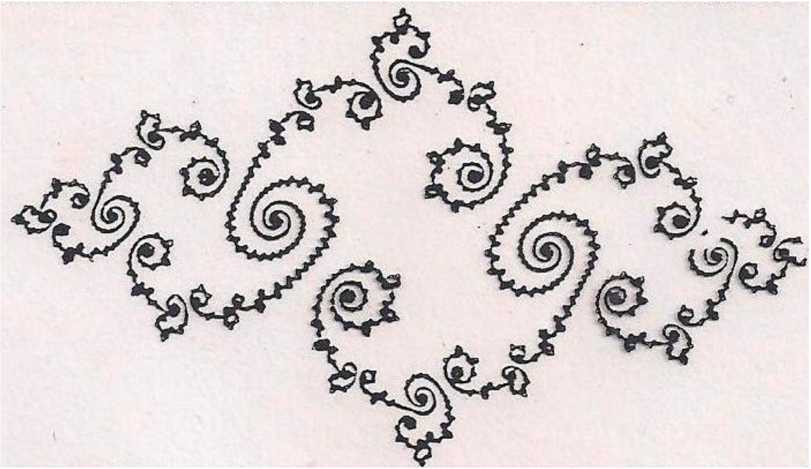


La familia $z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$





La familia $z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$



Conjuntos de Fatou $\mathcal{F}(f)$ y de Julia $\mathcal{J}(f)$

"*A history of complex dynamics*", D. Alexander (1994)

"Quizás, como una réplica a tales sentimientos, Fatou y Julia aportaron varias construcciones de estos tipos de conjuntos y curvas, y el hecho de que ocurrieran tan frecuentemente como fronteras del conjunto de Fatou ofreció evidencia convincente que tales objetos no eran antinaturales de modo alguno."

La familia $f_c(z) = z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$

Los conjuntos de Julia en esta familia vienen en dos presentaciones: Conexos o totalmente disconexos (Conjunto de Cantor)

¿De qué depende?

De la órbita del punto crítico 0.

Teorema

1.) $\mathcal{J}_c$ es conexo $\Leftrightarrow$ la órbita de 0 está acotada.
2.) $\mathcal{J}_c$ es un conjunto de Cantor $\Leftrightarrow$ la órbita de 0 tiende a ∞.

El conjunto de Mandelbrot

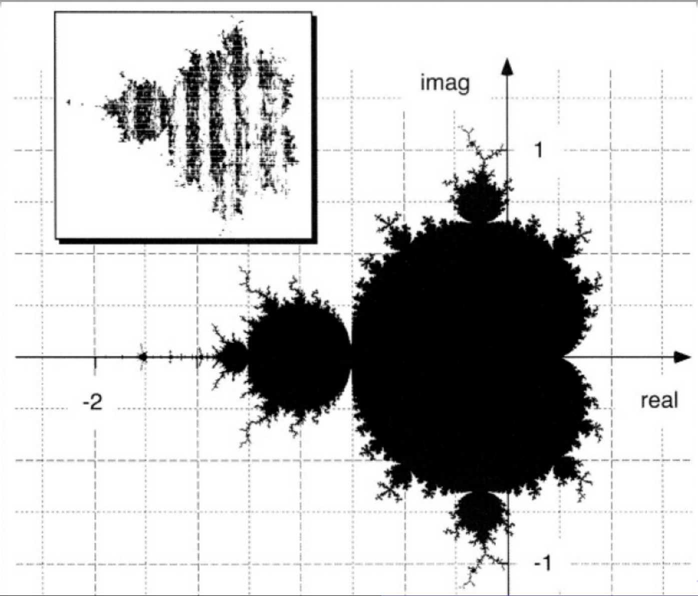
$$\text{Sea } \mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} |\text{ la órbita de 0 bajo } f_c \text{ es acotada}\}$$
$$\overset{\text{Teo}}{=} \{c \in \mathbb{C} | J_c \text{ es conexo}\}.$$

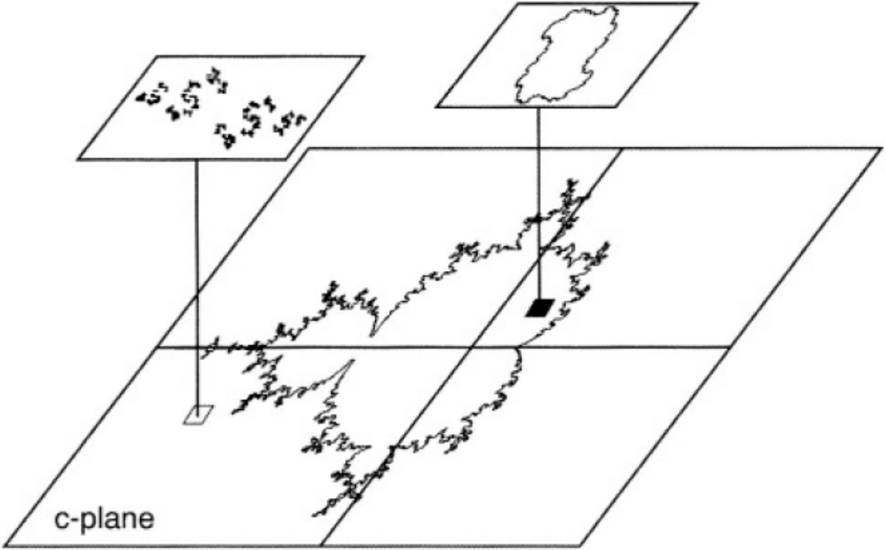
Hacia 1980 -gracias al desarrollo la computación- Benoit Mandelbrot presentó al mundo unas “primeras” imágenes del conjunto M.

¡Se produjo el ***BOOM*** del estudio de SDDH y del conjunto $\mathcal{M}$ en especial!

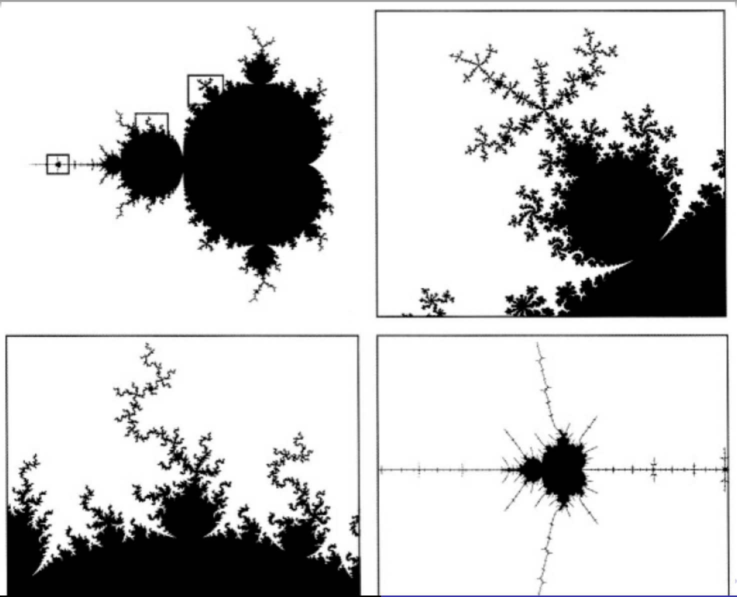
El trabajo pionero de Douady y Hubbard desentrañó (casi) todos los misterios de este increíble conjunto.

El conjunto de Mandelbrot

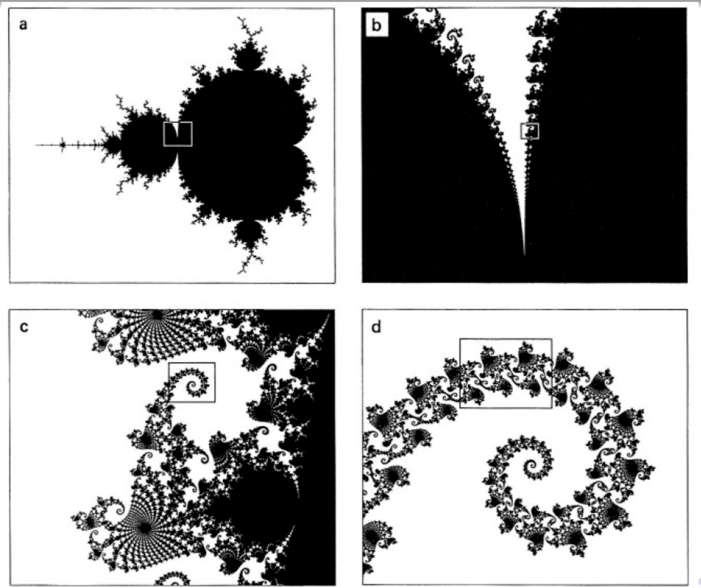



c-plane

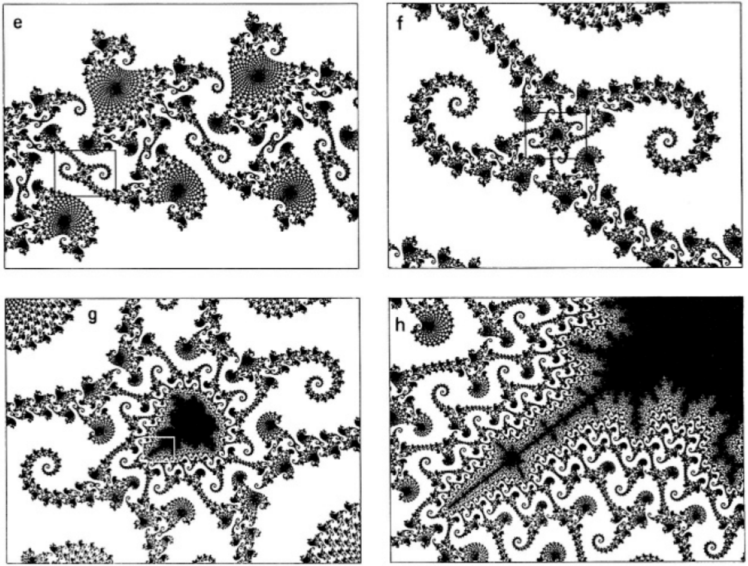
Paseo por el Mandelbrot



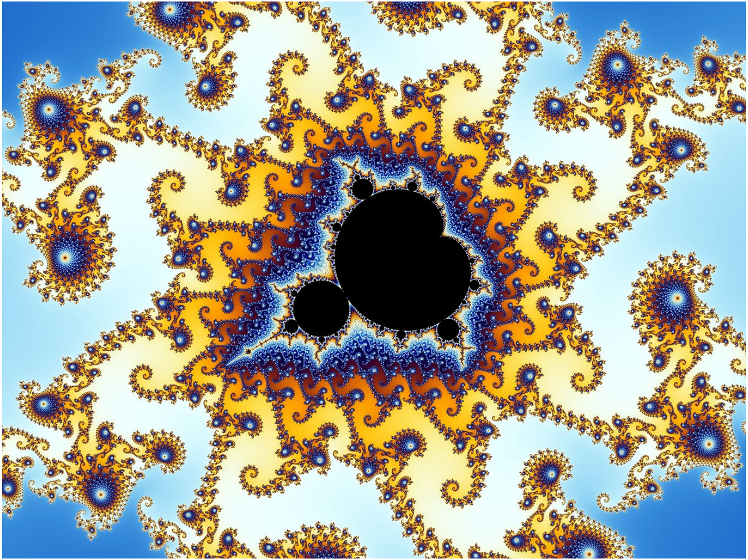
Paseo por el Mandelbrot



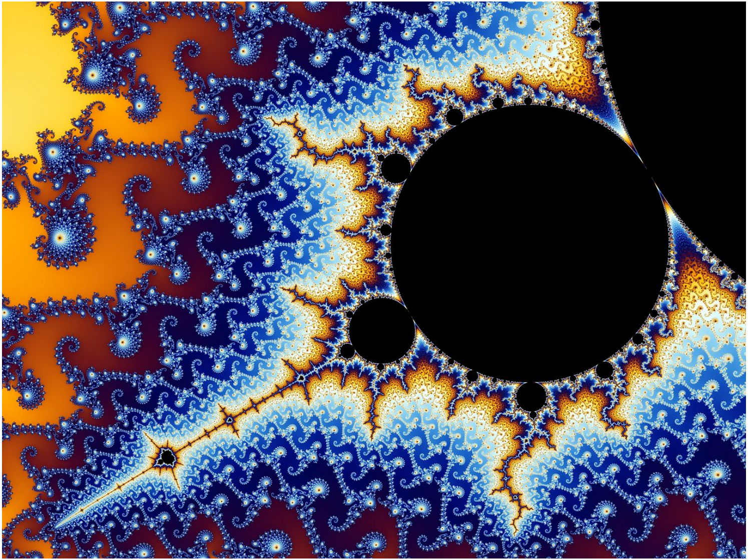
Paseo por el Mandelbrot



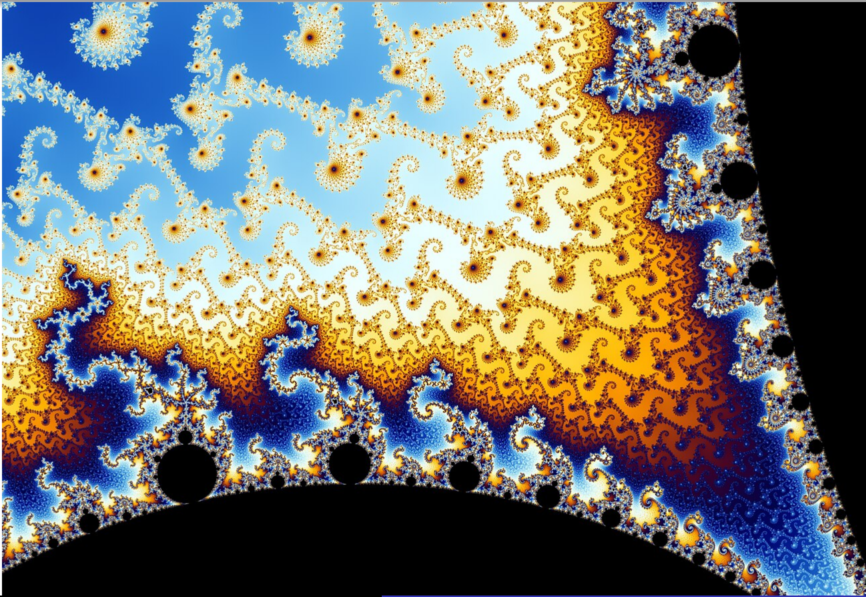
Paseo por el Mandelbrot



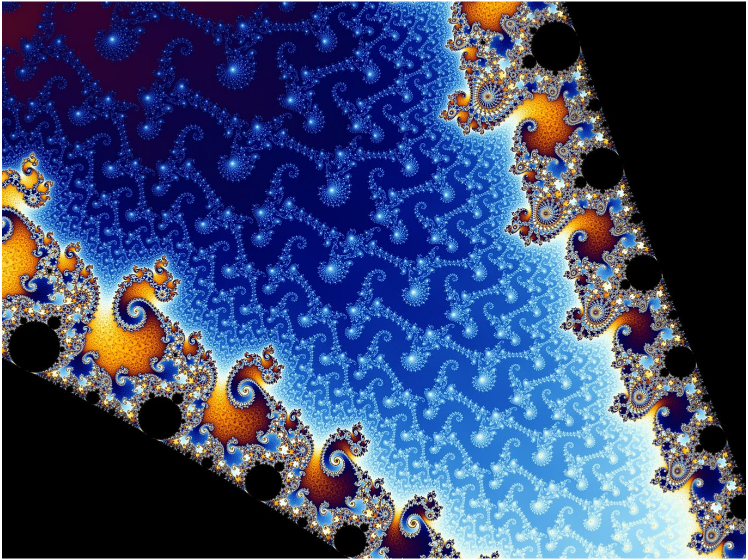
Paseo por el Mandelbrot



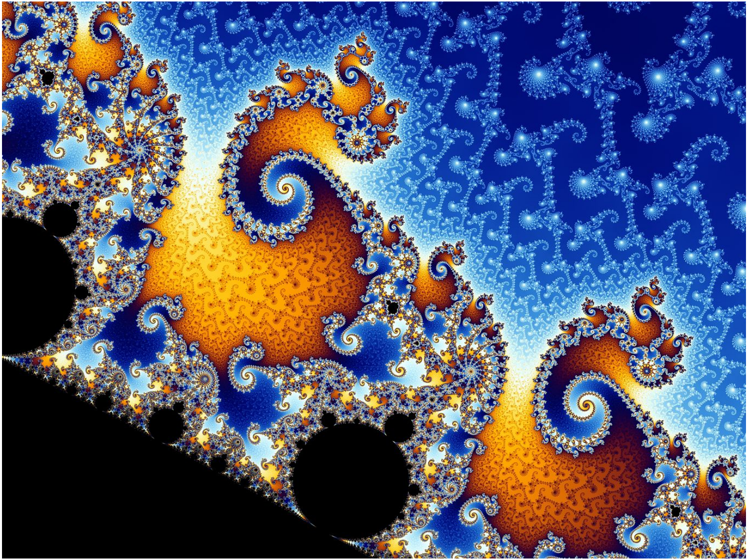
Paseo por el Mandelbrot



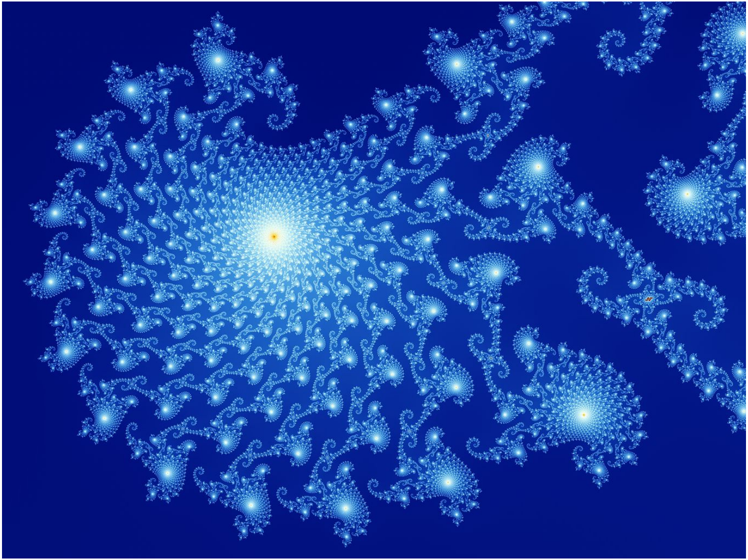
Paseo por el Mandelbrot



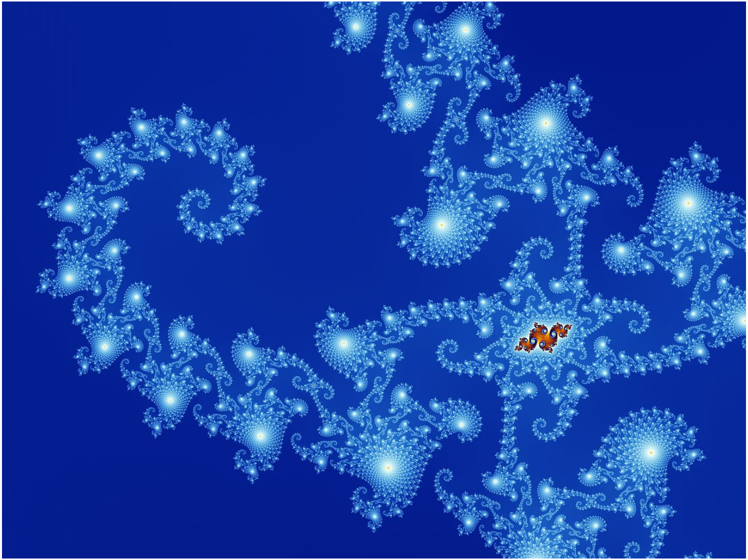
Paseo por el Mandelbrot



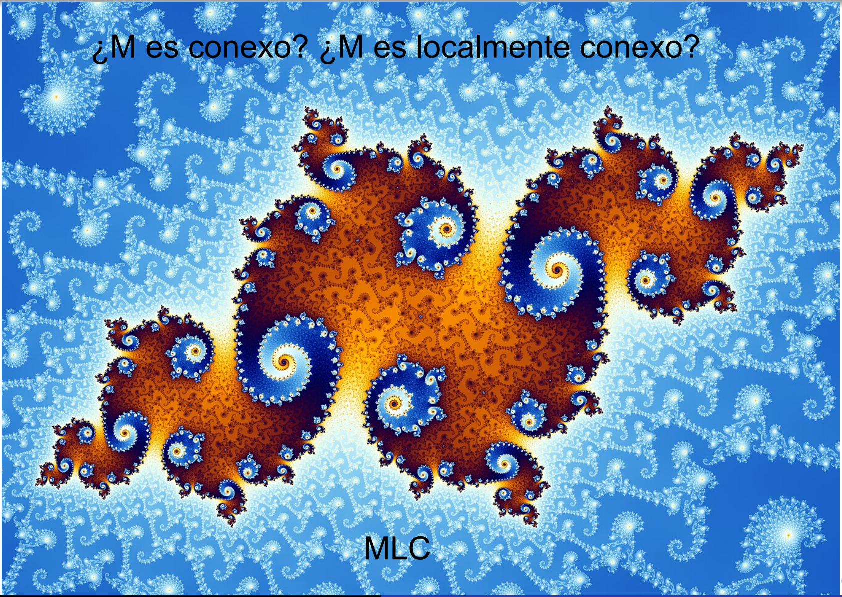
Paseo por el Mandelbrot



Paseo por el Mandelbrot



Paseo por el Mandelbrot



Bibliografía

- [*Alexander 1994*] D. S. Alexander, "A History of Complex Dynamics: From Schroder to Fatou and Julia", Vieweg, 1994.
- [*Devaney 1989*] R. L. Devaney, "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems" 2nd edition, Addison Wesley Publishing Company, Inc., 1989.

¡FIN!