Sorpresas topológicas que nos regalan los Sistemas Dinámicos Discretos (SDD)

Dr. Jefferson Edwin King Dávalos [1]

[1]Facultad de Ciencias, UNAM.

Septiembre, 2025.

Índice

1. Generalidades
2. Primera sesión: Dinámica de funciones $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$
    - Jeff King
3. El conjunto de Mandelbrot

Un sistema dinámico discreto requiere dos ingredientes : un espacio métrico X y una función continua $f : X \to X$.
Dado $x \in X$, la órbita de x bajo f la denotamos por $o(x, f)$ y está dada por la sucesión

$$x, f(x), f^2(x), \ldots f^n(x), \ldots$$

donde $f^1 = f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$ y $f^0 = id$.
El problema básico es, para cualquier $x \in X$ (o en algún subconjunto de X) determinar o descubrir qué sucede *a la larga* con la órbita de x bajo f, es decir, qué ocurre con la sucesión $o(x, f)$ cuando $n \to \infty$.

Pero más importante aún, es el siguiente problema fundamental: si x, y son puntos *cercanos* ¿sus correspondiente órbitas permanecen *cercanas* también, o de alguna manera *se separan*?
Veremos que si ocurre lo primero, si las órbitas permanecen cercanas, el comportamiento lo podemos catalogar como *estable*, mientras que si ocurre lo segundo, que se separan, el comportamiento se vuelve *impredecible* o *inestable*.

Otras definiciones

1. $x_0 \in X$ es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$.
2. Si para alguna $n \in \mathbb{N}$ sucede que $f^n(x_0) = x_0$, x_0 es un punto periódico de f. Además, si n es el primer natural para el que esto sucede, decimos que x_0 es un punto periódico de periodo n.
3. Como sucesión, y haciendo $x_n = f^n(x_0)$, una órbita de un punto x_0 de periodo n se ve así:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_0, x_{n+1} = x_1, \ldots$$

Es decir:

$$x_m = x_k \iff m \equiv k \mod(n).$$

Como conjunto, la órbita de un punto periódico de periodo n es finita:

$$o(x_0, f) = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}.$$

Otras definiciones

1. $x_0 \in X$ es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$.
2. Si para alguna $n \in \mathbb{N}$ sucede que $f^n(x_0) = x_0$, x_0 es un punto periódico de f. Además, si n es el primer natural para el que esto sucede, decimos que x_0 es un punto periódico de periodo n.
3. Como sucesión, y haciendo $x_n = f^n(x_0)$, una órbita de un punto x_0 de periodo n se ve así:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_0, x_{n+1} = x_1, \ldots$$

Es decir:

$$x_m = x_k \iff m \equiv k \mod(n).$$

Como conjunto, la órbita de un punto periódico de periodo n es finita:

$$o(x_0, f) = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}.$$

Otras definiciones

1. $x_0 \in X$ es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$.
2. Si para alguna $n \in \mathbb{N}$ sucede que $f^n(x_0) = x_0$, x_0 es un punto periódico de f. Además, si n es el primer natural para el que esto sucede, decimos que x_0 es un punto periódico de periodo n.
3. Como sucesión, y haciendo $x_n = f^n(x_0)$, una órbita de un punto x_0 de periodo n se ve así:

   $$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_0, x_{n+1} = x_1, \ldots$$

   Es decir:

   $$x_m = x_k \iff m \equiv k \ \ mod(n).$$

   Como conjunto, la órbita de un punto periódico de periodo n es finita:

   $$o(x_0, f) = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}.$$

EJERCICIO: Si x_o es un punto periódico de periodo n, entonces:

- $f^k(x_0) = x_0 \Longleftrightarrow k$ es múltiplo de n.
- $y \in o(x_0, f) \Rightarrow y$ es un punto periódico de periodo n.

Sobre la importancia de los puntos fijos

- Proposición 1. Sea $f : X \to X$ continua y $y_0 \in X$ tal que la órbita de x_0 converge a y_0, es decir, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = y_0$. Entonces y_0 es un punto fijo de f.
- Demostración: Como f es continua,

$$f(y_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)\right) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = y_0.$$

Sobre la importancia de los puntos fijos

- Proposición 1. Sea $f : X \to X$ continua y $y_0 \in X$ tal que la órbita de x_0 converge a y_0, es decir, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = y_0$. Entonces y_0 es un punto fijo de f.
- Demostración: Como f es continua,

$$f(y_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)\right) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = y_0.$$

Definición (Atractores y repulsores)

Supongamos que A es un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : A \to A$ es continua en A.
$x_0 \in A$ es un punto fijo atractor si existe un intervalo abierto (a,b), $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$f\left((a,b) \cap A\right) \subset (a,b) \cap A$$

y para todo $x \in (a,b) \cap A$ se tiene $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$.
Y es un punto fijo repulsor si existe (a,b) con $x_0 \in (a,b)$ tal que para cada $x \in (a,b) \cap A$, $x \neq x_0$, existe $n = n(x) \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \notin (a,b) \cap A$.

- Proposición 2. Sea $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = x_0$. Supongamos que f es derivable en x_0.
  - Si $|f'(x_0) < 1|$,entonces x_0 es un punto fijo atractor.
  - Si $|f'(x_0) > 1|$,entonces x_0 es un punto fijo repulsor.
- Demostración: Como $|f\,'(x_0)| < 1$ y $f(x_0) = x_0$, tenemos que

$$\left|\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < 1.$$

- Por lo tanto, para x en una vecindad (pequeña) de x_0, se cumple que

$$\left|\frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < 1$$

- Proposición 2. Sea $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = x_0$. Supongamos que f es derivable en x_0.
  - Si $|f'(x_0) < 1|$,entonces x_0 es un punto fijo atractor.
  - Si $|f'(x_0) > 1|$,entonces x_0 es un punto fijo repulsor.
- Demostración: Como $|f\,'(x_0)| < 1$ y $f(x_0) = x_0$, tenemos que

$$\left|\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < 1.$$

- Por lo tanto, para x en una vecindad (pequeña) de x_0, se cumple que

$$\left|\frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < 1$$

- Proposición 2. Sea $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = x_0$. Supongamos que f es derivable en x_0.
  - Si $|f'(x_0) < 1|$,entonces x_0 es un punto fijo atractor.
  - Si $|f'(x_0) > 1|$,entonces x_0 es un punto fijo repulsor.
- Demostración: Como $|f\,'(x_0)| < 1$ y $f(x_0) = x_0$, tenemos que

$$\left|\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < 1.$$

- Por lo tanto, para x en una vecindad (pequeña) de x_0, se cumple que

$$\left|\frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < 1$$

- Existe c con $0 < c < 1$ tal que

$$\left|\frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < c < 1$$

y, por lo tanto, $|f(x) - x_0| < c\,|x - x_0|$.

- Aplicando f de nuevo:

$$|f^2(x_0) - f(x_0)| = |f^2(x_0) - x_0| < c\,|f(x) - x_0| < c^2\,|x - x_0|.$$

- Análogamente, para $n \in \mathbb{N}$:

$$|f^n(x_0) - f(x_0)| < c^n\,|x - x_0|,$$

y el resultado se sigue.

- Existe c con $0 < c < 1$ tal que

$$\left|\frac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < c < 1$$

  y, por lo tanto, $|f(x) - x_0| < c\,|x - x_0|$.

- Aplicando f de nuevo:

$$|f^2(x_0) - f(x_0)| = |f^2(x_0) - x_0| < c\,|f(x) - x_0| < c^2\,|x - x_0|.$$

- Análogamente, para $n \in \mathbb{N}$:

$$|f^n(x_0) - f(x_0)| < c^n\,|x - x_0|,$$

  y el resultado se sigue.

- Existe c con $0 < c < 1$ tal que

$$\left| \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} \right| < c < 1$$

y, por lo tanto, $|f(x) - x_0| < c\,|x - x_0|$.

- Aplicando f de nuevo:

$$|f^2(x_0) - f(x_0)| = |f^2(x_0) - x_0| < c\,|f(x) - x_0| < c^2\,|x - x_0|.$$

- Análogamente, para $n \in \mathbb{N}$:

$$|f^n(x_0) - f(x_0)| < c^n\,|x - x_0|,$$

y el resultado se sigue.

$*$ Para el caso $|f\,'(x_0)| > 1$, se obtiene c tal que $|f\,'(x_0)| > c > 1$ y el resto de la demostración es *similar*.
$**$ Analizar el caso $|f\,'(x_0) = 1|$ se deja al lector.

Ejemplo: LA TIENDA

Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$

Falta agregar imagen HMJK página 26

Ejercicio: Comprobar que

1. $x < 0 \Rightarrow o(x, T)$ es una sucesión decreciente y $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = -\infty$.
2. $x > 1 \Rightarrow T(x) < 0$ y, por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = -\infty$.
3. $x \in [0,1] \Rightarrow T(x) \in [0,1]$ y, por lo tanto, $T^n(x) \in [0,1]\ \forall n \in \mathbb{N}$.

De (3) concluimos que la dinámica interesante esta en [0,1].

Resolviendo $T(x) = x$ hallamos que los puntos fijos son $x_0 = 0$ y $x_1 = \frac{2}{3}$. Como $T'(x_0) = 2$ y $T'(x_1) = -2$, son repulsores.
figura 2.9 pagina 22 HJ

Interludio 1: El paradigma del panadero

Figuras faltantes y explicación.
¡¡La tienda hace como el panadero!!

Regresando a la tienda

Viendo la gráfica de T^2 es evidente que hay dos puntos de periodo dos y ambos son repulsores.
Figuras de T$\widehat{\ }$2 en HJ

Es fácil darnos una idea de cómo es, en general, la gráfica de T^n; por ejemplo, he aquí la de T^3:

figura de T3

¡Más aún: es fácil obtener una fórmula para $T^n(x)$!

Fórmula para $T^n(x)$

- Partimos el intervalo $[0,1]$en 2^n *pequeños* intervalos de longitud $\frac{1}{2^n}$ cada uno de ellos: $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$ con $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$.
- En cada uno de ellos la gráfica de T^n es un segmento de recta de pendiente 2^n, si l es par, y de pendiente $-(2^n)$ si l es impar.
- En consecuencia, en cada uno de estos intervalos T^n es un homeomorfismo (lineal) del intervalo en $[0,1]$.

Fórmula para $T^n(x)$

- Partimos el intervalo $[0,1]$en 2^n *pequeños* intervalos de longitud $\frac{1}{2^n}$ cada uno de ellos: $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$ con $l \in \{0,1,2,\ldots,2^n-1\}$.
- En cada uno de ellos la gráfica de T^n es un segmento de recta de pendiente 2^n, si l es par, y de pendiente $-(2^n)$ si l es impar.
- En consecuencia, en cada uno de estos intervalos T^n es un homeomorfismo (lineal) del intervalo en $[0,1]$.

Fórmula para $T^n(x)$

- Partimos el intervalo $[0,1]$en 2^n *pequeños* intervalos de longitud $\frac{1}{2^n}$ cada uno de ellos: $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$ con $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$.
- En cada uno de ellos la gráfica de T^n es un segmento de recta de pendiente 2^n, si l es par, y de pendiente $-(2^n)$ si l es impar.
- En consecuencia, en cada uno de estos intervalos T^n es un homeomorfismo (lineal) del intervalo en $[0,1]$.

Fórmula para $T^n(x)$

En conclusión, en $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$ la fórmula para obtener $T^n(x)$ está dada por

$$T^n(x) = (entero) + (-1)^l 2^n x = \mu + (-1)^l 2^n x.$$

Se deja como ejercicio comprobar esta fórmula por inducción. Una consecuencia inmediata es que si $r \in \mathbb{Q}$, entonces $T^n(r) \in \mathbb{Q}$, y si x es irracional, $T^n(x)$ es irracional también. Por lo tanto, $T^n(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ y $T^n(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Interludio 2: Transitividad topológica y órbitas densas

Definición (transitividad topológica)

f es topológicamente transitiva (TT) en X si para todo par de conjuntos abiertos no vacíos de X, digamos U y V, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$

De esta manera si U y V son como en la definición, habrá algún punto de U que *llega* hasta V bajo alguna iteración de f.
En particular veremos que la tienda es TT.

Las órbitas densas sí existen

Recordatorio: Sea X un espacio métrico.Un conjunto $A \subset X$ es denso en X si para todo $x \in X$ y para toda vecindad V de x, existe $a \in A$ tal que $a \in V$.
Es decir, A es denso en X si $\bar{A} = X$.

Usando un resultado conocido como el teorema de Baire se demuestra lo siguiente:

Teorema

Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua y transitiva. Entonces, existe $x_0 \in X$ tal que la órbita de x_0 es densa en X.

DE REGRESO A LA TIENDA

Teorema

La tienda es topológicamente transitiva

Demostración:
Observación: Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$,tenemos que $T^n \left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] = [0,1]$.
Sean U, V abiertos no vacíos en $[0,1]$, y sea (a,b), con $a < b$, un intervalo contenido en U.
Tomamos n *suficientemente grande* tal que, para alguna l, $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] \subset (a,b)$.
Entonces $T^n(a,b) = [0,1]$ y, en consecuencia, $T^n(U) = [0,1]$.Por lo tanto $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Corolario

Existe $x_0 \in [0,1]$ tal que la órbita de x_0 es densa en $[0,1]$.

OTRAS PROPIEDADES DE LA TIENDA

Teorema

Per T es denso en $[0,1]$, es decir, $\overline{Per\ T} = [0,1]$.

Demostración: Usaremos dos hechos: uno es que *un conjunto denso en $[a,b]$ es infinito,* y otro es la siguiente consecuencia del teorema del valor intermedio:

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $[a,b] \subset f([a,b])$, entonces f tiene un punto fijo en $[a,b]$.

Tomemos ahora cualquier intervalo $(a,b) \subset [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] \subset (a,b)$

Ejemplo: $f(z) = z^2$

Nótese que $\{f^n(z)\} = \{z^{2^n}\}$.
Cuando $|z| < 1$, las iteraciones tienden a 0.
Cuando $|z| > 1$, tienden a ∞.
(Ejemplos con $z_0 = 0{,}9e^{i\frac{\pi}{12}}$ y $w_0 = 1{,}1e^{i\frac{\pi}{12}}$)

Ejemplo: $f(z) = z^2$

Si $|z| = 1$, las iteraciones se quedan siempre en la circunferencia unitaria.
(Ejemplo con $z_0 = e^{i\frac{\pi}{12}}$)

Ejemplo: $f(z) = z^2$

Las órbitas periódicas son densas en el círculo unitario

Entonces, $f^p(z) = z^{2^p} = z \Leftrightarrow$
$z\left(z^{2^p-1} - 1\right) = 0$
Si $z \neq 0$, entonces $z^{2^{p-1}} = 1$.
Es decir, z es una raíz $2^{p-1}-$ésima de 1.

Por tanto, los puntos periódicos en el disco unitario son vértices de polígonos regulares de 2^{p-1} lados con $p \in \mathbb{N}$.

En consecuencia, el conjunto de tales puntos periódicos es denso en $\mathbb{S}^1$.

Ejemplo: $f(z) = z^2$

Usando DeMoivre, si $z = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$,
$z^{2^p} = z \Leftrightarrow 2^p\theta = \theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Por tanto,

$$\theta = \frac{k}{2^p - 1}2\pi.$$

Ejemplo: (sólo aparecen las órbitas de período $= p$)

$p = 2 : \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

$p = 3 : \left\{\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}\right\}, \left\{\frac{6\pi}{7}, \frac{12\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}\right\}$.

$p = 4 :$
$\left\{\frac{2\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}, \frac{8\pi}{15}, \frac{16\pi}{15}\right\}, \left\{\frac{6\pi}{15}, \frac{12\pi}{15}, \frac{24\pi}{15}, \frac{18\pi}{15}\right\}, \left\{\frac{14\pi}{15}, \frac{28\pi}{15}, \frac{26\pi}{15}, \frac{22\pi}{15}\right\}$.

$p = 5 : \left\{\frac{2\pi}{31}, \frac{4\pi}{31}, \frac{8\pi}{31}, \frac{16\pi}{31}, \frac{31\pi}{31}\right\}, \left\{\frac{6\pi}{31}, \frac{12\pi}{31}, \frac{24\pi}{31}, \frac{48\pi}{31}, \frac{34\pi}{31}\right\},$
$\left\{\frac{10\pi}{31}, \frac{20\pi}{31}, \frac{40\pi}{31}, \frac{18\pi}{31}, \frac{36\pi}{31}\right\}, \left\{\frac{14\pi}{31}, \frac{28\pi}{31}, \frac{56\pi}{31}, \frac{50\pi}{31}, \frac{38\pi}{31}\right\},$
$\left\{\frac{22\pi}{31}, \frac{44\pi}{31}, \frac{26\pi}{31}, \frac{52\pi}{31}, \frac{104\pi}{31}\right\}, \left\{\frac{30\pi}{31}, \frac{60\pi}{31}, \frac{58\pi}{31}, \frac{54\pi}{31}, \frac{46\pi}{31}\right\}$.

Ejemplo: $f(z) = z^2$

Todos los puntos periódicos son muy repulsores.

En cualquier disco alrededor de z_0 se destruye toda posibilidad de que las iteraciones sean convergentes a algo.

Dinámica de z^2 en la circunferencia unitaria

Además, en la circunferencia unitaria hay:

1.) Órbitas densas.
2.) Órbitas preperiódicas.
3.) Órbitas infinitas, pero no densas.

- Todavía más, los conjuntos de puntos:
- $\{z \in \mathbb{C} | \text{su órbita es densa}\}$ es denso en $\mathbb{S}^1$.
- $\{z \in \mathbb{C} | \text{su órbita es preperiódica}\}$ es denso en $\mathbb{S}^1$.
- ¡¡Muchas cosas pueden pasar!!

Dinámica de z^2 en la circunferencia unitaria

Además, en la circunferencia unitaria hay:

1.) Órbitas densas.
2.) Órbitas preperiódicas.
3.) Órbitas infinitas, pero no densas.

- Todavía más, los conjuntos de puntos:
- $\{z \in \mathbb{C} | \text{su órbita es densa}\}$ es denso en $\mathbb{S}^1$.
- $\{z \in \mathbb{C} | \text{su órbita es preperiódica}\}$ es denso en $\mathbb{S}^1$.
- ¡¡Muchas cosas pueden pasar!!

Dinámica de z^2 en la circunferencia unitaria

Además, en la circunferencia unitaria hay:

1.) Órbitas densas.
2.) Órbitas preperiódicas.
3.) Órbitas infinitas, pero no densas.

- Todavía más, los conjuntos de puntos:
- $\{z \in \mathbb{C} | \text{su órbita es densa}\}$ es denso en $\mathbb{S}^1$.
- $\{z \in \mathbb{C} | \text{su órbita es preperiódica}\}$ es denso en $\mathbb{S}^1$.
- ¡¡Muchas cosas pueden pasar!!

Dinámica de z^2 en $\mathbb{C}$ o en $\hat{\mathbb{C}}$

Conclusión:

El plano complejo $\mathbb{C}$ (o la esfera de de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$) se divide en dos conjuntos ajenos, complementarios, distinguidos por el hecho de que las correspondientes dinámicas son muy, muy distintas.

1.) En el conjunto *"estable"* $\{|z| < 1\} \cup \{|z| > 1\}$ hay convergencia uniforme a una función.
2.) En el conjunto *"inestable"* $\{|z| = 1\}$ no la hay.

- *¡Esta división fundamental del plano o la esfera sucede siempre para toda función holomorfa!*
- Este es un descubrimiento *también* fundamental de Fatou y Julia.

Dinámica de z^2 en $\mathbb{C}$ o en $\hat{\mathbb{C}}$

Conclusión:

El plano complejo $\mathbb{C}$ (o la esfera de de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$) se divide en dos conjuntos ajenos, complementarios, distinguidos por el hecho de que las correspondientes dinámicas son muy, muy distintas.

1.) En el conjunto *"estable"* $\{|z| < 1\} \cup \{|z| > 1\}$ hay convergencia uniforme a una función.
2.) En el conjunto *"inestable"* $\{|z| = 1\}$ no la hay.

- *¡Esta división fundamental del plano o la esfera sucede siempre para toda función holomorfa!*
- Este es un descubrimiento *también* fundamental de Fatou y Julia.

Dinámica de $z^2 - 1$ en $\mathbb{C}$

- Sea z_0 el punto inicial, entonces $z_1 = z_0^2 - 1$, $z_2 = z_1^2 - 1 = (z_0^2 - 1)^2 - 1$,etc.
- Si $z_0 = 0$, tenemos una órbita de período 2

$$0 \mapsto -1 \mapsto 0 \mapsto -1 \mapsto \cdots$$

¿Cuáles son los *"prisioneros"*, los que *"escapan"* y la *"frontera"*?

- $\{-1, 0\}$ es una órbita de período 2 *atractora.*

Dinámica de $z^2 - 1$ en $\mathbb{C}$

- Sea z_0 el punto inicial, entonces $z_1 = z_0^2 - 1$, $z_2 = z_1^2 - 1 = (z_0^2 - 1)^2 - 1$,etc.
- Si $z_0 = 0$, tenemos una órbita de período 2

$$0 \mapsto -1 \mapsto 0 \mapsto -1 \mapsto \cdots$$

  ¿Cuáles son los *“prisioneros”*, los que *“escapan”* y la *“frontera”*?
- $\{-1, 0\}$ es una órbita de período 2 *atractora.*

- *¡La* ***frontera****!*
- Pedir convergencia uniforme en $\{f^n(z)\}$ es muy rígido, necesitamos flexibilidad para la órbita de período 2 atractora.

- *¡La **frontera**!*
- Pedir convergencia uniforme en $\{f^n(z)\}$ es muy rígido, necesitamos flexibilidad para la órbita de período 2 atractora.

Aparece Montel e introduce el concepto de normalidad

Definición moderna:

Una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas definidas en una región U contenida en $\mathbb{C}$ o en $\hat{\mathbb{C}}$ es ***normal*** $\Leftrightarrow$ toda sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ contiene una subsucesión $\{f_{k_n}\}$ que converge uniformemente a una función f en todo compacto $K \subseteq U$.

También se dice que f es ***normal en un punto*** z_0 si existe una vecindad U de z_0 en la que se cumple la anterior definición.

Y ***no es normal*** en z_0 si en toda vecindad de U no se cumple la anterior definición.

Aparece Montel e introduce el concepto de normalidad

Definición moderna:

Una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas definidas en una región U contenida en $\mathbb{C}$ o en $\hat{\mathbb{C}}$ es ***normal*** $\Leftrightarrow$ toda sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ contiene una subsucesión $\{f_{k_n}\}$ que converge uniformemente a una función f en todo compacto $K \subseteq U$.

También se dice que f es ***normal en un punto*** z_0 si existe una vecindad U de z_0 en la que se cumple la anterior definición.

Y ***no es normal*** en z_0 si en toda vecindad de U no se cumple la anterior definición.

Índice

1 Generalidades

2 Primera sesión: Dinámica de funciones $f : [0,1] \to \mathbb{R}$
- Jeff King

3 El conjunto de Mandelbrot

Conjuntos de Fatou $\mathcal{F}(f)$ y de Julia $\mathcal{J}(f)$

Definición

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$(ó $\hat{\mathbb{C}}$) una función holomorfa no cte., definimos:
1.) El ***conjunto de Fatou*** *$\mathcal{F}(f)$ como el dominio donde la familia de iteraciones $\{f^n\}$ es normal.*
2.) El ***conjunto de Julia*** *$\mathcal{J}(f)$ como el dominio donde la familia de iteraciones $\{f^n\}$no es normal, i.e., el complemento de $\mathcal{F}(f)$.*

El conjunto de Fatou es nuestro conjunto *estable.*
Y el conjunto de Julia es nuestro conjunto *inestable.*

Por su misma definición:
$\mathcal{J}(f)$ es cerrado y $\mathcal{F}(f)$ es abierto.

Conjuntos de Fatou $\mathcal{F}(f)$ y de Julia $\mathcal{J}(f)$

Propiedades de $\mathcal{J}(f)$

1.) $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$ y $\mathcal{J}(f)$ es perfecto.
2.) $\mathcal{J}(f)$ es completamente invariante.
3.) $\mathcal{J}(f^n) = \mathcal{J}(f)$.
4.) Si z_0 es un repulsor periódico $\Rightarrow z_0 \in \mathcal{J}(f)$.
Más aún, $\mathcal{J}(f)$ es la cerradura del conjunto de órbitas periódicas repulsoras.
5.) Si $\mathrm{int}(\mathcal{J}(f)) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{J}(f) = \hat{\mathbb{C}}$.

Conjuntos de Fatou $\mathcal{F}(f)$ y de Julia $\mathcal{J}(f)$

Propiedades de $\mathcal{F}(f)$

1.) $\mathcal{F}(f)$ es completamente invariante.
2.) $\mathcal{F}(f^n) = \mathcal{F}(f)$.
3.) Si z_0 es punto periódico atractor $\Rightarrow z_0 \in \mathcal{F}(f)$.
Más aún, toda la *"cuenca de atracción"* de z_0 está contenida en $\mathcal{F}(f)$.
4.) Para toda f racional en la cuenca de atracción siempre hay un punto crítico.

Conjuntos de Fatou $\mathcal{F}(f)$ y de Julia $\mathcal{J}(f)$

¡Asombroso que pudieran ver tan lejos sin poder ver nada en realidad!

"*A history of complex dynamics*", D. Alexander (1994)

"Ejemplos de conjuntos perfectos totalmente disconexos, curvas sin tangentes y curvas con una infinidad de puntos dobles ya existían en la literatura de la época (1917), pero solían ser construídos por un proceso detallado y artificial. Además, a muchos matemáticos franceses les perturbaba la existencia de tales objetos y no sólo los veían como antinaturales, sino que a veces ridiculizaban a quienes los estudiaban."

La familia $z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$

$$c = -0{,}12375 + 0{,}56508$$

La familia $z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$

Período 3 atractor, $c = -0{,}122 + 0{,}745i$.

La familia $z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$

Período 5 atractor.

La familia $z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$

Período 8 atractor, $c = 0{,}360284 + 0{,}100376i$.

La familia $z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$

Período 11 atractor.

La familia $z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$

$c = i$

La familia $z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$

La familia $z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$

Conjuntos de Fatou $\mathcal{F}(f)$ y de Julia $\mathcal{J}(f)$

"*A history of complex dynamics*", D. Alexander (1994)

"Quizás, como una réplica a tales sentimientos, Fatou y Julia aportaron varias construcciones de estos tipos de conjuntos y curvas, y el hecho de que ocurrieran tan frecuentemente como fronteras del conjunto de Fatou ofreció evidencia convincente que tales objetos no eran antinaturales de modo alguno."

La familia $f_c(z) = z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$

Los conjuntos de Julia en esta familia vienen en dos presentaciones: Conexos o totalmente disconexos (Conjunto de Cantor)

¿De qué depende?

De la órbita del punto crítico 0.

Teorema

1.) $\mathcal{J}_c$ es conexo $\Leftrightarrow$ la órbita de 0 está acotada.
2.) $\mathcal{J}_c$ es un conjunto de Cantor $\Leftrightarrow$ la órbita de 0 tiende a ∞.

El conjunto de Mandelbrot

$$\text{Sea } \mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} |\text{ la órbita de 0 bajo } f_c \text{ es acotada}\}$$
$$\overset{\text{Teo}}{=} \{c \in \mathbb{C} | J_c \text{ es conexo}\}.$$

Hacia 1980 -gracias al desarrollo la computación- Benoit Mandelbrot presentó al mundo unas "primeras" imágenes del conjunto M.

¡Se produjo el ***BOOM*** del estudio de SDDH y del conjunto $\mathcal{M}$ en especial!

El trabajo pionero de Douady y Hubbard desentrañó (casi) todos los misterios de este increíble conjunto.

El conjunto de Mandelbrot

Paseo por el Mandelbrot

Paseo por el Mandelbrot

Paseo por el Mandelbrot

Paseo por el Mandelbrot

Paseo por el Mandelbrot

Paseo por el Mandelbrot

Paseo por el Mandelbrot

Paseo por el Mandelbrot

Paseo por el Mandelbrot

Paseo por el Mandelbrot

Paseo por el Mandelbrot

Apéndice

Teorema

Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ holomorfa. Si z_0 es un punto periódico repulsor, entonces $z_0 \in J(f)$.

Demostración: Suponemos que $f(z_0) = z_0$.

- Supongamos que $\{f^n\}$ es normal en alguna vecindad U de z_0. Como $f^n(z_0) = z_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Las iteraciones f^n no convergen a ∞ en U.
- Por la normalidad, alguna subsucesión $\{f^{n_k}\}$ de $\{f^n\}$ converge uniformemente en compactos contenidos en U a una función g (holomorfa) definida en U. Por lo tanto, $\left\{(f^{n_k})'(z_0)\right\}$ converge a $g'(z_0)$.
- Pero como z_0 es repulsor, $|f'(z_0)| = \lambda > 1$, y por lo tanto $\left|(f^{n_k})'(z_0)\right| = \lambda^{n_k}$ tiende a ∞. *¡Contradicción!*

Bibliografía

- [*Alexander 1994*] D. S. Alexander, "A History of Complex Dynamics: From Schroder to Fatou and Julia", Vieweg, 1994.
- [*Devaney 1989*] R. L. Devaney, “An Introduction to Chaotic Dynamical Systems” 2nd edition, Addison Wesley Publishing Company, Inc., 1989.

¡FIN!