Morfologia Matemática

Prof. Jefferson T. Oliva
jeffersonoliva@utfpr.edu.br

Processamento de Imagens
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

Sumário

- Operações Morfológicas
- Algoritmos Morfológicos Básicos
- Operações Morfológicas em Tons de Cinza

Introdução

- A palavra morfologia denota um ramo da biologia que lida com a forma e a estrutura de animais e plantas

- A morfologia matemática serve como ferramenta para extrair componentes da imagem (estrutura e forma) que são úteis para a descrição e representação
  - Pode ser aplicada no pré- e pós-processamento de imagens

- Transformadas morfológicas são geralmente aplicadas em imagens binárias e são baseadas nas formas
  - Sua aplicação pode ser estendida para imagens em tonalidades de cinza

- A operação morfológica é focada na estrutura geométrica dos objetos da imagem

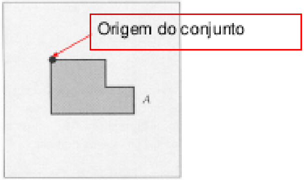
Operações Morfológicas

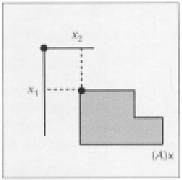
- Uma imagem binária pode ser completamente descrita pelo conjunto de todos seus pixeis pretos ou brancos
- Os conjuntos desses pixeis são membros do espaço bidimensional de números inteiros Z^2
    - Cada elemento é definido pelas coordenadas (x, y), também denominadas componentes
- Para imagens em escalas de cinza, os conjuntos estão em Z^3, sendo dois componentes para coordenadas e um para a tonalidade de cinza

- Sejam A e B conjuntos de Z^2, com componentes:
  - $a = (a_1, a_2)$
  - $b = (b_1, b_2)$
- Considere também:
  - $x = (x_1, x_2)$

- Translação de A por x

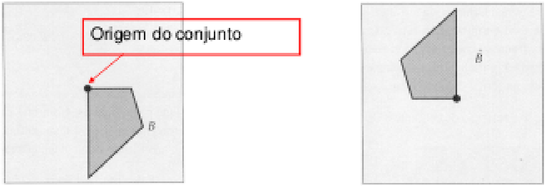
$$(A)_x = \{c \mid c = a + x, \quad para\ a \in A\}$$





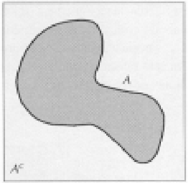
- Reflexão de B

$$\hat{B} = \{x \mid x = -b, \quad para\ b \in B\}$$



- Complemento do conjunto A

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}$$

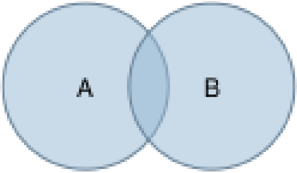


- Interseção de A e B: compõe o conjunto de pixeis pertencentes a ambos conjuntos

$$A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

- União de A e B: compõe o conjunto de pixeis pertencentes a A ou B

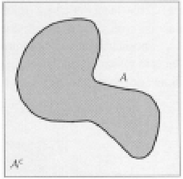
$$A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

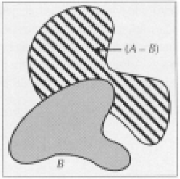


Operações Morfológicas
Definições Básicas

- Diferença entre dois conjuntos A e B: conjunto de pixeis que pertence a um, mas ão ao outro

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\} = A \cap B^c$$





- Comandos *numpy* (Python) para realizar operações apresentadas até o momento
  - Complemento: *np.bitwise_not(A)* ou $\sim A$
  - Interseção: *np.bitwise_and(A, B)*
  - União: *np.bitwise_or(A, B)*
  - Diferença: *np.bitwise_and(A, ∼B)*

- Uma operação morfológica binária é determinada a partir da vizinhança examinada ao redor do ponto central
- Essa vizinhança é definida por um conjunto bem definido B, chamado de elemento estruturante
- Exemplos de operações morfológicas
  - Erosão
  - Dilatação
  - Abertura
  - Fechamento

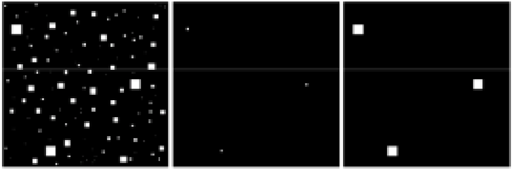
- Denotada por $A \ominus B$, a erosão é uma transformação morfológica que combina dois conjuntos usando vetores de subtração

$$A \ominus B = \{z | (B)_z \subseteq A\}$$

- onde
  - A e B são conjuntos de Z^2 (imagens binárias)
  - A: imagem operada
  - B: elemento estruturante
    - Sua forma define como ocorrerá a erosão
  - $(B)_x$: translação de B por $z = (z_1, z_2)$

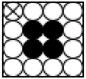
$$(B)_x = \{x | x = b + z \text{ para } b \in B\}$$

- Aplicação: remoção de componentes



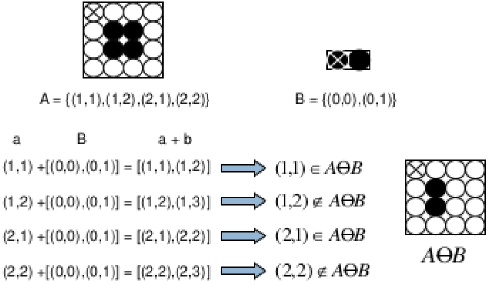
- Dada a imagem A e dado o elemento estruturante B, calcular $A \ominus B$

$A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

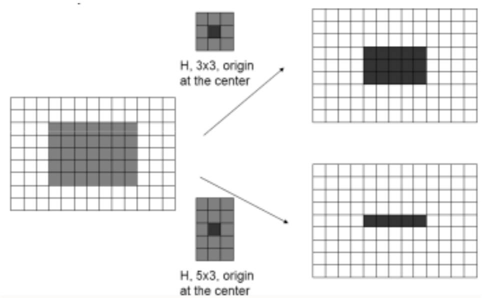


$B = \{(0,0),(0,1)\}$

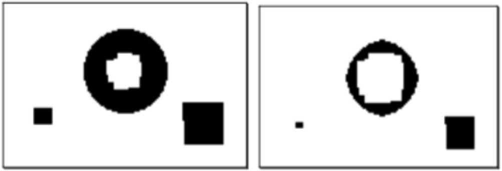
- B_x quando posicionado e centrado no pixel x de A deve estar totalmente contido em A
  - Nesse caso, dizemos que o pixel é relevante



- Dado a imagem A e o elemento estruturante B, calcular $A \ominus B$



- Efeitos da erosão:
  - Redução de partículas
  - Eliminação de componentes menores que o elemento estruturante
  - Aumento de buracos
  - Possibilidade de separação de componentes conectados



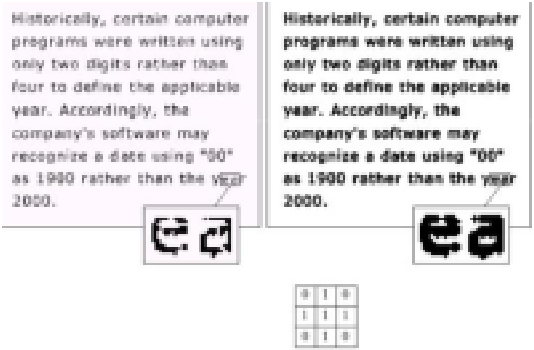
- Dada por $A \oplus B$, a dilatação combina dois conjuntos por meio de adição vetorial

$$A \oplus B = \{z | [(\hat{B})_z \cap A] \subseteq A\}$$

- onde
  - A e B são conjuntos de Z^2 (imagens binárias)
  - A: imagem operada
  - B: elemento estruturante
    - Sua forma define como ocorrerá a dilatação
  - $(\hat{B})_z$: reflexão de B e translação por $z = (z_1, z_2)$

$$(\hat{B})_z = \{x | x = -b + z \text{ para } b \in B\}$$

- Aplicação: preenchimento de espaço (**gap fillign**)

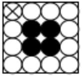


- Dada a imagem A e dado o elemento estruturante B, $A \oplus B$

- Dada a imagem A e dado o elemento estruturante B, $A \oplus B$

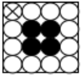
$$A \oplus B = \{A + [(0,0)]\} \cup \{A + [(0,1)]\}$$

A = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)}



{A + [(0,0)]} = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)}

(1,1) + (0,0) = (1,1)
(1,2) + (0,0) = (1,2)
(2,1) + (0,0) = (2,1)
(2,2) + (0,0) = (2,2)

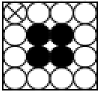


A translação de qualquer pixel por (0,0) não altera sua posição

- Dada a imagem A e dado o elemento estruturante B, $A \oplus B$

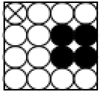
$$A \oplus B = \{A + [(0,0)]\} \cup \{A + [(0,1)]\}$$

A = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)}



{A + [(0,1)]} = {(1,2),(2,2),(1,3),(2,3)}

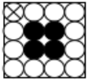
(1,1) + (0,1) = (1,2)
(1,2) + (0,1) = (1,3)
(2,1) + (0,1) = (2,2)
(2,2) + (0,1) = (2,3)



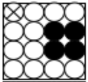
- Dada a imagem A e dado o elemento estruturante B, $A \oplus B$

$$A \oplus B = \{A + [(0,0)]\} \cup \{A + [(0,1)]\}$$

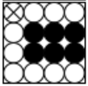
$\{A + [(0,0)]\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

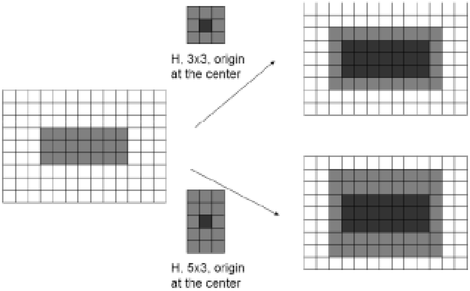


$\{A + [(0,1)]\} = \{(1,2),(2,2),(1,3),(2,3)\}$

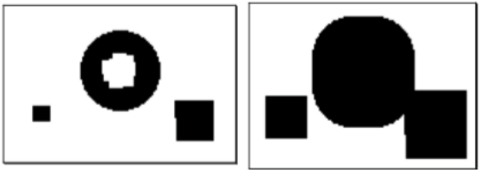


$A \oplus B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$




H. 3x3, origin
at the center
H. 5x3, origin
at the center

- Efeitos da dilatação
  - Aumento de partículas
  - Preenchimento de buracos
  - Conexão de componentes próximos



- Abertura: executa a erosão seguida pela dilatação utilizando o mesmo elemento estruturante
  - A erosão é aplicada com a finalidade de eliminação de pixeis indesejados
  - A dilatação é utilizada para a redução dos possíveis efeitos indesejáveis da erosão, como perda de informações relevantes
- Fechamento: executa a operação de dilatação, e seguida, erosão
  - A dilatação pode ser aplicada para o preenchimento de pequenas lacunas em imagens
  - A operação de erosão tem o propósito de amenizar o principal efeito negativo da dilatação: possibilidade de geração de pequenos grupos de pixeis indesejados

- A abertura elimina pequenos componentes e suaviza o contorno

- A abertura de uma imagem A pelo elemento estruturante B, representada por $A \circ B$, é definida como

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

- Efeitos da abertura
  - Não devolve, de forma geral, o conjunto inicial
  - Separa componentes
  - Elimina pequenos componentes
  - O conjunto aberto é mais regular que o conjunto inicial, mas menos rico em detalhes

- O fechamento fecha pequenos buracos e conecta componentes
- O fechamento de uma imagem A pelo elemento estruturante B, representado por $A \bullet B$, é definido como

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

- Efeitos do fechamento
  - Preenche buracos no interior dos componentes, inferior em tamanho em relação ao elemento estruturante
  - Conecta componentes próximos
  - O conjunto fechado é mais regular que o conjunto inicial, mas menos rico em detalhes

- Exemplo de abertura em uma imagem com ruído
  - Aplicando uma erosão, o ruído é eliminado mas os traços da digital são afinados
  - Com a abertura, reconstruímos grande parte dos traços, dos quais, alguns foram desconectados

$A \ominus B$ $\quad$ $(A \ominus B) \oplus B = A \circ B$

- Exemplo de fechamento
  - Grande parte dos traços são reconectados sem mudanças na estrutura dos mesmo

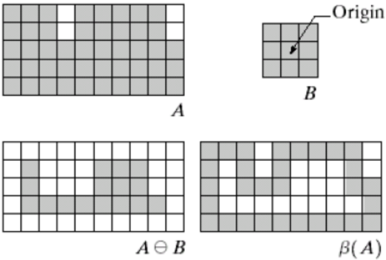
Algoritmos Morfológicos Básicos

Algoritmos Morfológicos Básicos

- Em imagens binárias, a principal aplicação de morfologia é a extração de componentes da imagem que sejam úteis na representação e na descrição de formas, tais como:
  - Extração de fronteiras
  - Preenchimento de regiões
  - Componentes conectados
  - Esqueletização

- A fronteira de uma imagem A é obtida por meio da erosão de A por B, e posterior subtração dessa erosão do próprio A

$$\beta(A) = A - (A \ominus B)$$

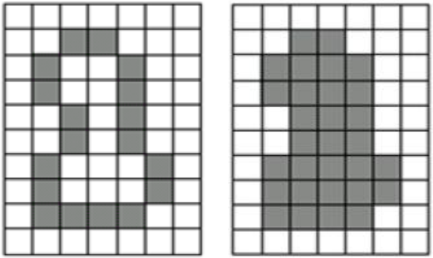


- Exemplo

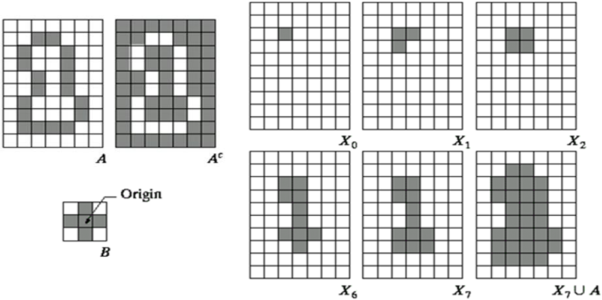
- Como utilizamos uma operação de erosão, temos as borda internas da forma

- O mesmo pode ser feito com uma operação de dilatação
  - Bordas internas: $\beta(A) = A - (A \ominus B)$
  - Bordas externas: $\beta(A) = (A \oplus B) - A$

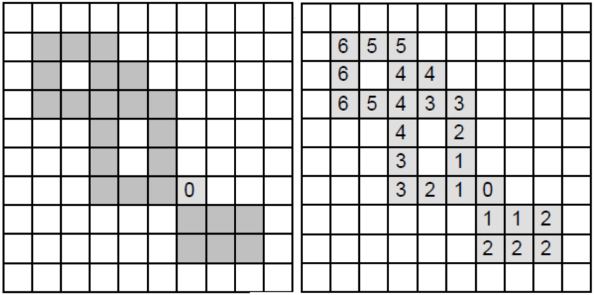
- A partir de um ponto dentro da uma região definida por uma borda/fronteira, esse algoritmo busca preencher completamente a região até a borda



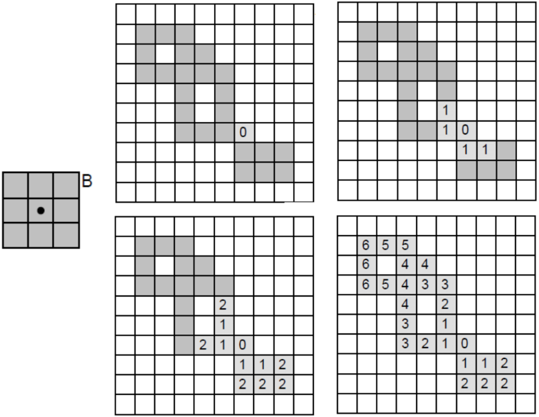
- $X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$
  - onde:
    - X_k: ponto dentro da fronteira
    - B: elemento estruturante
    - A^c: complemento de A
  - Essa equação é aplicada repetidamente até que X_k seja igual a X_{k-1}
  - Por fim, o resultado é unido com a fronteira original


A
A^c
Origin
B
X_0
X_1
X_2
X_6
X_7
$X_7 \cup A$

- A partir de um ponto p dentro de um componente conectado Y, esse algoritmo encontra todos os elementos de Y



- $X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A$, para $k = 1, 2, 3, ...$
  - onde:
    - X_k: ponto dentro da fronteira
    - B: elemento estruturante
  - Essa equação é aplicada repetidamente até que X_k seja igual a X_{k-1}



B
0
1
1 0
1 1
2
1
2 1 0
1 1 2
2 2 2
6 5 5
6 4 4
6 5 4 3 3
4 2
3 1
3 2 1 0
1 1 2
2 2 2

- O esqueleto de uma imagem é uma versão afinada da mesma
- Equidistante das bordas
- Algumas características são mais fáceis de ser encontradas no esqueleto, como direção, pontos de curvatura, etc

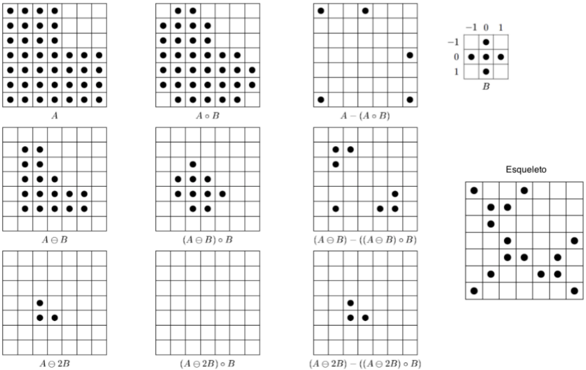
- Tabela de operações usada na construção do esqueleto

Erosão	Abertura	Diferenças
A	$A \circ B$	$A - (A \circ B)$
$A \ominus B$	$(A \ominus B) \circ B$	$(A \ominus B) - ((A \ominus B) \circ B)$
$A \ominus 2B$	$(A \ominus 2B) \circ B$	$(A \ominus 2B) - ((A \ominus 2B) \circ B)$
$A \ominus 3B$	$(A \ominus 3B) \circ B$	$(A \ominus 3B) - ((A \ominus 3B) \circ B)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A \ominus kB$	$(A \ominus kB) \circ B$	$(A \ominus kB) - ((A \ominus kB) \circ B)$

- Sequência de k erosões com o mesmo elemento estruturante $A \ominus kB$

- O processo acaba quando $(A \ominus B) \circ B = \emptyset$

- O esqueleto é a união de todas as diferenças



A
A ∘ B
A − (A ∘ B)
−1 0 1
−1
0
1
B
A ⊖ B
(A ⊖ B) ∘ B
(A ⊖ B) − ((A ⊖ B) ∘ B)
Esqueleto
A ⊖ 2B
(A ⊖ 2B) ∘ B
(A ⊖ 2B) − ((A ⊖ 2B) ∘ B)

Operações Morfológicas em Tons de Cinza

- Dilatação em nível de cinza

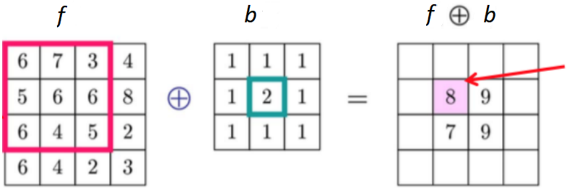
$$(f \oplus b)(s,t) = \max\{(s-x, t-y) + b(x,y) | (s-x), \\ (t-y) \in D_f; (x,y) \in D_b\}$$

- onde:
  - $s - x$ e $t - y$: parâmetros de deslocamento
  - D_f: domínio de f (imagem em escala de cinza)
  - D_b: domínio de b (componente estruturante)
- Efeito geral na imagem (depende dos valores em b)
  - Imagem resultante tende a ser mais clara que a de entrada
  - Detalhes escuros são reduzidos ou eliminados

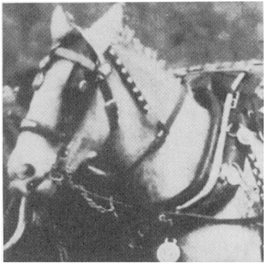
- Algoritmo de dilatação
  1. Posiciona-se a origem do elemento estruturante sobre o primeiro pixel da imagem a ser dilatada
  2. Calcula-se a soma de cada par correspondente de valores de pixeis do elemento estruturante e a imagem
  3. Acha-se o valor máximo de todas essas somas, e armazena-se o pixel correspondente na imagem de saída para este valor, na posição da origem
  4. Repete-se este processo para cada pixel da imagem a ser dilatada

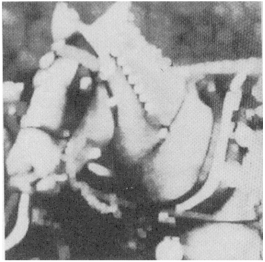
- Dilatação em nível de cinza

$$(f \oplus b)(s,t) = \max\{(s-x, t-y) + b(x,y) | (s-x), (t-y) \in D_f; (x,y) \in D_b\}$$



- Dilatação em nível de cinza (exemplo)





Operações Morfológicas em Tons de Cinza

- Operações morfológicas em imagens representadas em escalas de cinza
  - Similar à convolução 2D
  - A operação *max* substitui as somas da convolução e a adição os produtos da convolução
  - O elemento estruturante podem ser negativos
    - Os valores da imagem resultante devem ser normalizados
    - Valores negativos podem ser alterados para zero (*underflow*)
    - A imagem inteira poderia ter seus valores aumentados para que o menor valor de pixel fosse zero mantendo os valores relativos entre os pixeis

- Erosão em nível de cinza

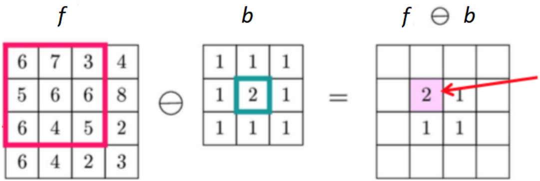
$$(f \ominus b)(s,t) = \max\{(s+x, t+y) - b(x,y) | (s+x), (t+y) \in D_f; (x,y) \in D_b\}$$

- Efeito geral na imagem (depende dos valores em b)
  - Imagem resultante tende a ser mais escura que a de entrada
  - Detalhes claros são reduzidos ou eliminados

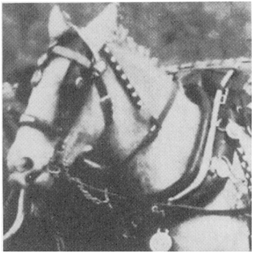
- Algoritmo de erosão
  1. Posiciona-se a origem do elemento estruturante sobre o primeiro pixel da imagem que sofre erosão
  2. Calcula-se a diferença de cada par correspondente de valores de pixeis do elemento estruturante e da imagem
  3. Acha-se o valor mínimo de todas essas diferenças, e armazena-se o pixel correspondente na imagem de saída para este valor
  4. Repete-se este processo para cada pixel da imagem que sofre erosão

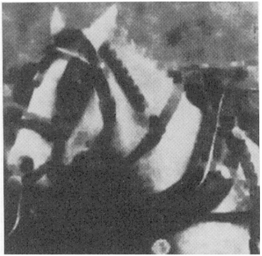
- Erosão em nível de cinza

$$(f \ominus b)(s,t) = \max\{(s+x, t+y) - b(x,y) | (s+x), \\ (t+y) \in D_f; (x,y) \in D_b\}$$



- Erosão em nível de cinza





Operações Morfológicas em Tons de Cinza

- Outros operadores
  - Abertura
  - Fechamento
  - Suavização morfológica
    - Abertura morfológica seguida de fechamento
    - Remoção ou atenuação tanto de artefatos claros como escuros ou ruídos
  - Transformada *top-hat*
    - Enfatiza o detalhe na presença de sombreamento
  - Etc

Referências I

- Gonzalez, R. C.; Woods R. E.
  Processamento de imagens digitais.
  Editora Blucher, 2000.
- Oliveira, L. E. S.
  Notas de aula – Morfologia Matemática.
  UFU. Uberlândia, MG, 2014.
- Prateek, J., Millan, E. D., e Vinivius, G.
  OpenCV by Example.
  Packt Publishing, 2016.
- Ren, T. I.
  Notas de aula – Processamento de Imagem Morfológica: morfologia matemática.
  UFPE. Recife, SP, 2024.

Referências II

Vieira, M. A. C.; Costa, A. C.
Notas de aula – Introdução à Visão Computacional: processamento morfológico.
USP. São Paulo, SP, 2024.

Villán, A. F.
Mastering OpenCV 4 with Python.
Packt Publishing, 2019.

Wiggers, K. L.
Notas de aula – Processamento de Imagens: morfologia matemática.
UTFPR. Pato Branco, PR, 2024.