

# Naïve Bayes

Prof. Jefferson T. Oliva

Aprendizado de Máquina e Reconhecimento de Padrões (AM28CP)  
Engenharia de Computação  
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)  
Campus Pato Branco

- Eventos dependentes e Independentes
- Permutabilidade
- Teorema de Bayes
- Classificador Naïve Bayes

- Muitos problemas de classificação não são determinísticos
  - Relação entre atributos preditivos e classe é probabilística
  - Caso os dados possuem muito ruído (ou incerteza), a mesma entrada pode ser classificada de maneiras diferentes dependendo do modelo ou do conjunto de dados utilizado
  - Algumas informações importantes não são capturadas pelos atributos preditivos usados
    - Conjunto de atributos com limitações
    - Problemas na representação dos dados
    - Fatores externos

- Exemplo: prever se uma pessoa terá alguma doença cardíaca
  - Atributos preditivos
    - Peso
    - Exercícios frequentes
  - Ignorar outros eventos
    - Bebida
    - Tabagismo
    - Estresse
    - Fatores genéticos
    - ...

## Eventos dependentes e Independentes

# Eventos dependentes e Independentes

## Eventos dependentes

- Suponha uma caixa com duas bolas brancas e 3 pretas
- Em um hipotético experimento, considere a remoção aleatória de uma bola de uma determinada cor, com representação de Bernoulli ( $X_1$ )
  - $X_1 = 0$ : caso a bola retirada seja branca
  - $X_1 = 1$ : caso a bola retirada seja preta
- Pela abordagem clássica, a probabilidade de ser retirada uma bola de determinada cor é:
  - Branca

$$P(X_1 = 0) = \frac{2}{5}$$

- Preta

$$P(X_1 = 1) = \frac{3}{5}$$

# Eventos dependentes e Independentes

## Eventos dependentes

- Após a primeira retirada, e sem reposição, caso seja retirada mais uma bola, qual seria a probabilidade de a segunda bola ser branca?
  - A probabilidade da segunda retirada ( $X_2$ ) é condicionada ao resultado da primeira
    - Se a primeira bola retirada for branca (restando 1 branca e 3 pretas), a probabilidade é  $\frac{1}{4}$
    - Caso a primeira bola seja preta (restando duas brancas e duas pretas), então a probabilidade é  $\frac{2}{4}$
- A probabilidade do evento B ser condicionada ao evento A é representada por  $P(B|A)$ 
  - $P(X_2 = 0|X_1 = 0) = \frac{1}{4}$
  - $P(X_2 = 0|X_1 = 1) = \frac{2}{4}$
  - O evento  $X_2$  é dependente do evento  $X_1$

# Eventos dependentes e Independentes

## Probabilidade conjunta

- A probabilidade conjunta dos eventos  $A$  e  $B$  é expressa pela regra do produto:

$$P(B \cap A) = P(B|A)P(A)$$

- A probabilidade conjunta também pode ser representada por  $P(B \cap A) = P(B, A)$



# Eventos dependentes e Independentes

## Eventos independentes

- Considere um experimento, o lançamento de uma moeda honesta e a observância da face virada para cima
- Para isso, considere a representação Bernoulli das seguintes ocorrências
  - $X_1 = 0$ : caso o resultado do lançamento seja coroa
  - $X_1 = 1$ : caso o resultado do lançamento seja cara
- Em um lançamento honesto, teríamos as seguintes probabilidades
  - $P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$
  - $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$

# Eventos dependentes e Independentes

## Eventos independentes

- Em seguida, a moeda é lançada novamente e o resultado representado por  $X_2$
- A probabilidade da ocorrência de cara no segundo lançamento também é igual a  $P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$
- Neste caso, o evento  $X_2$  é independente de  $X_1$ , e, temos a seguinte regra do produto

$$P(X_2, X_1) = P(X_2|X_1)P(X_1)$$

ou

$$P(X_2, X_1) = P(X_2)P(X_1)$$

## Permutabilidade

- Propriedade da alteração no ordenamento de realizações em uma sequência de eventos sem que a probabilidade conjunta seja alterada
- Considere o lançamento de 5 moedas não viciadas, com representação semelhante à apresentada anteriormente, sendo observado o seguinte resultado  $(1, 0, 1, 1, 0)$ , isto é, (cara, coroa, cara, cara, coroa)
- Os lançamentos são independentes e que a probabilidade conjunta desse evento é:
$$P(1, 0, 1, 1, 0) = P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 0) \times P(X_3 = 1) \times P(X_4 = 1) \times P(X_5 = 0) = \frac{1}{2^5}$$
- Nessa situação, caso fosse observado o evento  $(1, 1, 1, 0, 0)$ , a probabilidade não seria alterada

# Permutabilidade

- A ordem da ocorrências dos resultados cara não altera a probabilidade conjunta, desde que seja a mesma quantidade de resultados de “sucesso”
- A independência de uma sequência de eventos garante a permutabilidade da mesma
- A independência não é condição necessária para a permutabilidade, apenas suficiente
  - Ainda que uma sequência não seja formada por eventos independente, é possível que sejam permutáveis
- Considere a mesma representação do exemplo da caixa com bolas apresentado anteriormente para o caso da retirada de 5 bolas sem reposição
  - Como visto, esses eventos não são independentes, pois a probabilidade de um determinado evento na sequência, depende do resultado observado nos eventos anteriores

- Dessa forma, vamos verificar se o evento  $(1,0,1,1,0)$  é permutável

- Inicialmente, vamos calcular a probabilidade  $P(1, 0, 1, 1, 0)$

$$P(1, 0, 1, 1, 0) = P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 0|X_1 = 1) \times P(X_3 = 1|X_2 = 0, X_1 = 1) \times P(X_4 = 1|X_3 = 1, X_2 = 0, X_1 = 1) \times P(X_5 = 0|X_4 = 1, X_3 = 1, X_2 = 0, X_1 = 1)$$

$$P(1, 0, 1, 1, 0) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{10}$$

- Cálculo da propriedade  $P(1, 1, 1, 0, 0)$

$$P(1, 1, 1, 0, 0) = P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1|X_1 = 1) \times P(X_3 = 1|X_2 = 1, X_1 = 1) \times P(X_4 = 0|X_3 = 1, X_2 = 1, X_1 = 1) \times P(X_5 = 0|X_4 = 0, X_3 = 1, X_2 = 1, X_1 = 1)$$

$$P(1, 1, 1, 0, 0) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{10}$$

## Teorema de Bayes

# Teorema de Bayes

- Considerando os eventos  $A$  e  $B$  permutáveis, o termo  $P(A \cap B)$  é igual a  $P(B \cap A)$  e, dessa forma, pode ser escrita como

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- A probabilidade  $P(A)$  é denominada probabilidade a priori
  - Informação sobre o evento  $A$  antes que se soubesse algo sobre o evento  $B$
- Quando se tem conhecimento sobre  $B$ , a probabilidade relacionada ao evento  $A$  deve ser atualizada pela probabilidade do evento  $B$ 
  - A probabilidade  $P(A|B)$  é agora denominada probabilidade a posteriori



- Sejam dois eventos  $A$  e  $B$ 
  - $A$ : atributo alvo (presença de doença)
    - Possíveis valores: presença ou ausência
  - $B$ : atributo preditivo (resultado do exame)
    - Possíveis valores: positivo ou negativo
  - $P(A)$ : probabilidade do evento  $A$  (presença da doença) ocorrer
  - $P(B)$ : probabilidade do evento  $B$  (exame positivo) ocorrer

# Teorema de Bayes

- Probabilidade a priori pode ser estimada pela frequência

Paciente	Exame	Doença
001	positivo	presente
002	negativo	presente
003	negativo	ausente
004	positivo	presente
005	positivo	ausente
006	positivo	presente
007	negativo	ausente
008	negativo	presente
009	positivo	ausente
010	positivo	presente

- $P(\textit{negativo}) = ?$
- $P(\textit{positivo}) = ?$
- $P(\textit{presente}) = ?$
- $P(\textit{ausente}) = ?$

# Teorema de Bayes

- Probabilidade a priori pode ser estimada pela frequência

Paciente	Exame	Doença
001	positivo	presente
002	negativo	presente
003	negativo	ausente
004	positivo	presente
005	positivo	ausente
006	positivo	presente
007	negativo	ausente
008	negativo	presente
009	positivo	ausente
010	positivo	presente

- $P(\text{negativo}) = 0,4$
- $P(\text{positivo}) = 0,6$
- $P(\text{presente}) = 0,6$
- $P(\text{ausente}) = 0,4$

# Teorema de Bayes

- As frequências a priori são fáceis de serem estimadas
  - $P(B)$ : probabilidade do resultado do exame ser positivo
  - $P(A)$ : probabilidade do paciente estar doente (doença presente)
  - $P(B|A)$ : probabilidade do resultado do exame ser positivo dado que o paciente está doente
- A probabilidade posteriori é considerada difícil de ser estimada
  - $P(A|B)$ : probabilidade do paciente estar doente dado que seu exame deu positivo
  - O Teorema de Bayes tenta estimar esse tipo de probabilidade

# Teorema de Bayes

- Teorema de Bayes permite o cálculo da probabilidade a posteriori de um evento
  - $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$
- $posteriori = \frac{priori \times verosimilhança}{evidência}$ 
  - Priori -  $P(H)$ : probabilidade de uma hipótese ser verdade antes da coleta dos dados
  - Verosimilhança -  $P(D|H)$ : probabilidade de coleta desses dados quando a hipótese ser verdadeira
  - Evidência -  $P(D)$ : probabilidade de coletar esses dados sob todas as hipóteses possíveis
  - Posteriori -  $P(H|D)$ : probabilidade da hipótese ser verdadeira dado o conjunto de dados coletados

$$P(H|D) = \frac{P(D|H) \times P(H)}{P(D)}$$

## Classificador Naïve Bayes

# Classificador Naïve Bayes

- Todos os classificadores naïve Bayes (NB) assumem que o valor de uma característica particular é independente do valor de qualquer outra característica, dada a variável de classe
  - Uma fruta pode ser considerada uma laranja se a mesma for laranjada, redonda e ter diâmetro aproximadamente de 10 cm
  - O classificador NB considera que cada uma dessas características contribui independentemente para a probabilidade de que essa fruta seja uma laranja, independentemente de quaisquer correlações possíveis entre as características de cor, forma e diâmetro
- Em diversas aplicações, a estimativa de parâmetros para modelos NB utiliza o método da máxima verossimilhança
  - Em outras palavras, podemos trabalhar com o modelo NB sem considerarmos a probabilidade Bayesiana ou usar qualquer método Bayesiano

# Classificador Naïve Bayes

- NB é um modelo de probabilidade condicional
  - Dada uma instância de problema a ser classificada, representada por um vetor  $x$  representando  $n$  características independentes
    - A seguinte instância de probabilidades é atribuída:

$$p(C_k | x_1, \dots, x_n)$$

- Com o teorema de Bayes, a probabilidade condicional pode ser decomposta na seguinte equação

$$p(C_k | x) = \frac{p(C_k)p(x|C_k)}{p(x)}$$



- O numerador é equivalente ao modelo de probabilidade conjunta

$$p(C_k|x_1, \dots, x_n)$$

- Uso da regra da cadeia para aplicações repetidas da definição de probabilidade condicional

$$\begin{aligned} p(C_k|x_1, \dots, x_n) &= p(x_1, \dots, x_n, C_k) = \\ p(x_1|x_2, \dots, x_n, C_k)p(x_2, \dots, x_n, C_k) &= \\ p(x_1|x_2, \dots, x_n, C_k)p(x_2|x_3, \dots, x_n, C_k)p(x_3, \dots, x_n, C_k) &= \dots = \\ p(x_1, \dots, x_n, C_k)p(x_2|x_3, \dots, x_n, C_k) \dots p(x_{n-1}|x_n, \dots, x_n, C_k)p(C_k) \end{aligned}$$

# Classificador Naïve Bayes

- As suposições de independência condicional "naïves" (ingênuas) são consideradas
  - Suponha que todas as características  $x$  não mutualmente independentes, condicionais à classe  $C_k$

$$\begin{aligned} p(C_k | x_1, \dots, x_n) &\propto p(C_k, x_1, \dots, x_n) \\ &\propto p(C_k) p(x_1 | C_k) p(x_2 | C_k) p(x_3 | C_k) \cdots \\ &\propto p(C_k) \prod_{i=1}^n p(x_i | C_k), \end{aligned}$$

$$P(B | A_1, \dots, A_n) = \frac{P(B) \cdot \prod_{i=1}^n P(A_i | B)}{\prod_{i=1}^n P(A_i)}$$

$$\hat{y} = \operatorname{argmax}_{k \in \{1, \dots, K\}} p(C_k) \prod_{i=1}^n p(x_i | C_k).$$

- Naïve Bayes é um algoritmo que utiliza o Teorema de Bayes com a hipótese de independência de atributos
- Por que estimar independência entre atributos  $A_1, \dots, A_n$ ?
  - Estimar probabilidades conjuntas  $P(A_1, A_2, \dots, A_n)$  e  $P(A_1, A_2, \dots, A_n|B)$  demandaria uma quantidade mínima de exemplos de cada combinação possível de valores de  $A_1, \dots, A_n$
  - Impraticável, especialmente para quantidades elevadas de atributos!
- Apesar da hipótese ser quase sempre violada, o método (Naïve Bayes) se mostra bastante competitivo na prática

# Classificador Naïve Bayes

Outlook ( $A_1$ )			Temperature ( $A_2$ )			Humidity ( $A_3$ )			Windy ( $A_4$ )			Play (B)	
Yes	No		Yes	No		Yes	No		Yes	No		Yes	No
Sunny	2	3	Hot	2	2	High	3	4	False	6	2	9	5
Overcast	4	0	Mild	4	2	Normal	6	1	True	3	3		
Rainy	3	2	Cool	3	1								
Sunny	2/9	3/5	Hot	2/9	2/5	High	3/9	4/5	False	6/9	2/5	9/14	5/14
Overcast	4/9	0/5	Mild	4/9	2/5	Normal	6/9	1/5	True	3/9	3/5		
Rainy	3/9	2/5	Cool	3/9	1/5								

$$P(B | A_1, \dots, A_n) = \frac{P(B) \cdot \prod_{i=1}^n P(A_i | B)}{\prod_{i=1}^n P(A_i)}$$

Outlook	Temp	Humidity	Windy	Play
Sunny	Hot	High	False	No
Sunny	Hot	High	True	No
Overcast	Hot	High	False	Yes
Rainy	Mild	High	False	Yes
Rainy	Cool	Normal	False	Yes
Rainy	Cool	Normal	True	No
Overcast	Cool	Normal	True	Yes
Sunny	Mild	High	False	No
Sunny	Cool	Normal	False	Yes
Rainy	Mild	Normal	False	Yes
Sunny	Mild	Normal	True	Yes
Overcast	Mild	High	True	Yes
Overcast	Hot	Normal	False	Yes
Rainy	Mild	High	True	No

# Classificador Naïve Bayes

Outlook (A <sub>1</sub> )			Temperature (A <sub>2</sub> )			Humidity (A <sub>3</sub> )			Windy (A <sub>4</sub> )			Play (B)	
Yes No			Yes No			Yes No			Yes No			Yes	No
Sunny			2	3		Hot			2	2		9 5	
Overcast			4	0		Mild			4	2			
Rainy			3	2		Cool			3	1			
Sunny			2/9	3/5		Hot			2/9	2/5		9/14 5/14	
Overcast			4/9	0/5		Mild			4/9	2/5			
Rainy			3/9	2/5		Cool			3/9	1/5			

Outlook	Temp.	Humidity	Windy	Play
Sunny	Cool	High	True	???

$$P(\text{Yes}|\text{Sunny, Cool, High, True}) = (2/9 \times 3/9 \times 3/9 \times 3/9 \times 9/14) / P(\text{Sunny, Cool, High, True})$$

$$P(\text{No}|\text{Sunny, Cool, High, True}) = (3/5 \times 1/5 \times 4/5 \times 3/5 \times 5/14) / P(\text{Sunny, Cool, High, True})$$

$$P(\text{Yes}|\text{Sunny, Cool, High, True}) = \mathbf{0.0053} / P(\text{Sunny, Cool, High, True})$$

$$P(\text{No}|\text{Sunny, Cool, High, True}) = \mathbf{0.0206} / P(\text{Sunny, Cool, High, True})$$

➡ Play = No

$$\hat{y} = \underset{k \in \{1, \dots, K\}}{\operatorname{argmax}} p(C_k) \prod_{i=1}^n p(x_i | C_k).$$

# Classificador Naïve Bayes

## Problema da frequência zero

- O que acontece se um determinado valor de atributo não aparece na base de treinamento, mas aparece no exemplo de teste?
  - Por exemplo: "Outlook = Overcast" para classe "No"
    - Probabilidade correspondente será zero:  $P(Overcast|No) = 0$
    - Probabilidade a posteriori será também zero:  
 $P(No|Overcast, \dots)$
  - Não importa as probabilidades referentes aos demais atributos
  - Muito radical, especialmente considerando que a base de treinamento pode não ser totalmente representativa
    - Classes minoritárias com instâncias raras

# Classificador Naïve Bayes

## Problema da frequência zero

- Uma solução:
  - Adicionar unidades fictícias para cada combinação de valor-classe (estimador de Laplace)
    - Probabilidades zero não existirão
  - Exemplo:  
 $sunny = \frac{3+1}{5+3}$ ,  $overcast = \frac{0+1}{5+3}$  e  $rainy = \frac{2+1}{5+3}$
- Obs.: a inclusão de uma unidade fictícia deve ser adicionada para todas as classes para evitar viés nas probabilidades de apenas uma classe

# Classificador Naïve Bayes

## Problema da frequência zero

- Solução mais geral (Estimativa  $m$ ):

- Adição de múltiplas unidades fictícias para cada combinação de valor-classe

- Exemplo

$$sunny = \frac{3 + \frac{m}{3}}{5 + m}, \text{ overcast} = \frac{0 + \frac{m}{3}}{5 + m} \text{ e } rainy = \frac{2 + \frac{m}{3}}{5 + m}$$

- Solução ainda mais geral: substituir o termo  $\frac{1}{n}$  no numerador (onde  $n$  é quantidade de valores do atributo) por uma probabilidade  $p$  qualquer



# Classificador Naïve Bayes

## Valores ausentes

- Exclusão de exemplos com valores ausentes do conjunto de treinamento
- Ou considerar apenas os atributos sem valores ausentes

Outlook	Temp.	Humidity	Windy	Play
?	Cool	High	True	???

Verossimilhança para "Yes" =  $3/9 \times 3/9 \times 3/9 \times 9/14 = 0.0238$

Verossimilhança para "No" =  $1/5 \times 4/5 \times 3/5 \times 5/14 = 0.0343$

Probabilidade Estimada ("Yes") =  $0.0238 / (0.0238 + 0.0343) = 41\%$

Probabilidade Estimada ("No") =  $0.0343 / (0.0238 + 0.0343) = 59\%$

# Classificador Naïve Bayes

## Atributos numéricos

- Alternativa 1: discretização
- Alternativa 2: assumir ou estimar alguma função de densidade de probabilidade para estimar as probabilidades
  - Distribuição Gaussiana (normal)

$$p(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Exemplo

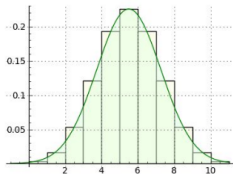
Outlook			Temperature		Humidity		Windy			Play	
Yes No			Yes	No	Yes	No	Yes	No		Yes	No
Sunny	2	3	64, 68,	65, 71,	65, 70,	70, 85,	False	6	2	9	5
Overcast	4	0	69, 70,	72, 80,	70, 75,	90, 91,	True	3	3		
Rainy	3	2	72, ...	85, ...	80, ...	95, ...					
Sunny	2/9	3/5	$\mu = 73$	$\mu = 75$	$\mu = 79$	$\mu = 86$	False	6/9	2/5	9/14	5/14
Overcast	4/9	0/5	$\sigma = 6.2$	$\sigma = 7.9$	$\sigma = 10.2$	$\sigma = 9.7$	True	3/9	3/5		
Rainy	3/9	2/5									

$$p(\text{temperature}|66, \text{yes}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 6,2^2}} \exp\left(-\frac{(66 - 73)^2}{2 \cdot 6,2^2}\right) = 0,0340$$

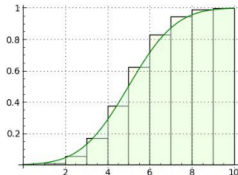
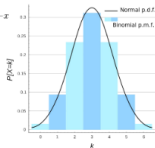
# Classificador Naïve Bayes

## Atributos numéricos

- A distribuição binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ , denotada  $B(n, p)$  é a distribuição de probabilidade discreta do número de sucessos em uma sequência de  $n$  experimentos independentes
  - Se  $n$  for grande o suficiente, então a assimetria da distribuição não é muito grande
  - Uma aproximação razoável é dada pela distribuição normal

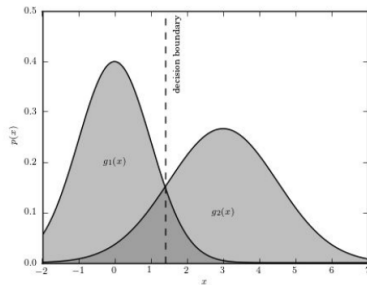
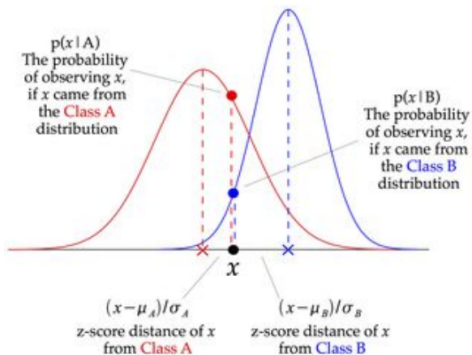


$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^n f(x) &= \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= (p + (1-p))^n \\ &= (1)^n \\ &= 1\end{aligned}$$



# Classificador Naïve Bayes

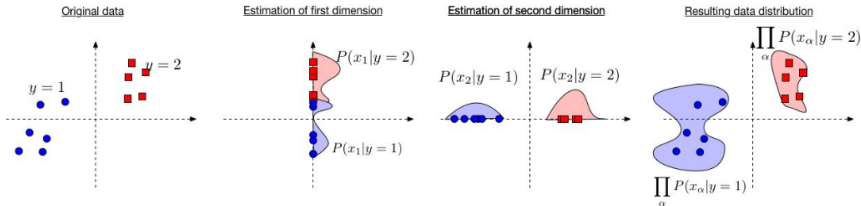
## Atributos numéricos



# Classificador Naïve Bayes

## Atributos numéricos

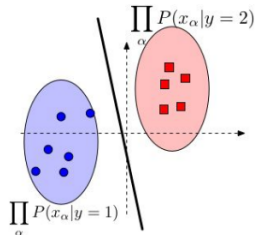
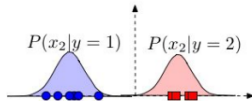
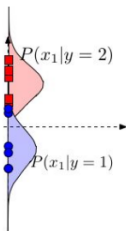
- Estimamos  $P(x|y)$  independentemente em cada dimensão (duas imagens do meio) e então obtemos uma estimativa da distribuição completa dos dados assumindo independência condicional (imagem mais à direita)



# Classificador Naïve Bayes

## Atributos numéricos

- Naïve Bayes leva a um limite de decisão linear em diversos casos
- Na figura abaixo,  $P(x|y)$  é gaussiano e  $\sigma$  é idêntico para todas as classes (mas pode diferir entre dimensões)
  - O limite dos elipsoides indica regiões de probabilidades iguais  $P(x|y)$
  - A linha de decisão vermelha indica o limite de decisão onde  $P(y = 1|x) = P(y = 2|x)$



# Classificador Naïve Bayes

- Características do classificador Naïve Bayes
  - Robusto a ruídos
    - Pouco impacto no cálculo das probabilidades
  - Robusto a atributos irrelevantes
    - Afetam pouco as probabilidades relativas entre classes
  - Capaz de classificar instâncias com valores ausentes
  - Assume que atributos são igualmente importantes
  - Desempenho pode ser afetado pela presença de atributos correlacionados



BISHOP, C. M.

*Pattern Recognition and Machine Learning.*

Springer, 2006.



DE CARVALHO, A. P. L. F.

Métodos probabilísticos. Aprendizado de Máquina.

*Slides.* Ciência de Computação e Matemática Computacional.

ICMC/USP, 2015.



CASANOVA, D.

Naïve Bayes. Aprendizado de Máquina.

*Slides.* Engenharia de Computação. Dainf/UTFPR, 2020.



DUDA, Richard O.; HART, Peter E.; STORK, David G.

*Pattern classification.*

2nd ed. New York, NY: J. Wiley & Sons, 2001.





RASCHKA, S.; MIRJALILI, V.  
*Python Machine Learning.*  
*Packt, 2017.*