

Técnicas de Desenvolvimento de Algoritmos (parte 1)

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados 2 (AE43CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

- Paradigmas de Projeto de Algoritmos
- Força-Bruta
 - Backtracking
 - Branch-and-bound
 - Exemplos
- Método Guloso
 - Implementação de algoritmos gulosos
 - Estratégia gulosa
 - Exemplos

Paradigmas de Projeto de Algoritmos

- O projeto de algoritmos requer abordagens adequadas:
 - Dependendo da forma de tratamento do problema, o algoritmo pode ter desempenho ineficiente
 - Em certos casos, o algoritmo pode não conseguir resolver o problema em tempo viável
- Algoritmos polinomiais vs. exponenciais
- Problemas tratáveis vs. intratáveis
- P vs. NP
- Algoritmos recursivos vs. não-recursivos

- Para projetar um algoritmo eficiente, é fundamental a preocupação com a sua complexidade
- Exemplo: sequência de Fibonacci
 - 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

$$F(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

- Dado o valor de n , queremos obter o n -ésimo elemento da sequência

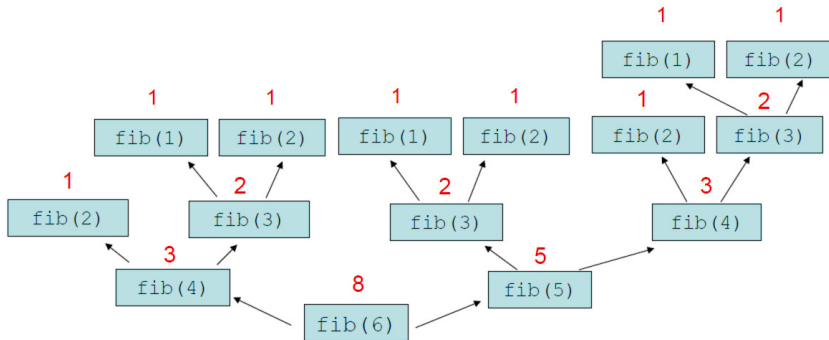
- Exemplo: sequência de Fibonacci

```
long fib(int n){  
    if (n <= 0)  
        return 0;  
    else if (n == 1)  
        return 1;  
    else  
        return fib(n - 1) + fib(n - 2);  
}
```

- A complexidade dessa solução é na ordem de $O(2^n)$, tanto para tempo quanto para espaço
- Para $n = 100$, o algoritmo levaria muito tempo para executar 2^{100} operações

Paradigmas de Projeto de Algoritmos

- Pilha de recursão para $\text{fib}(6)$



- Outra implementação da sequência de Fibonacci

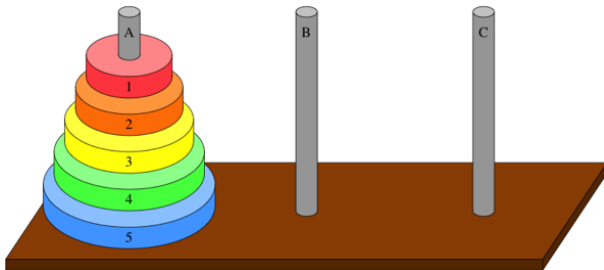
```
long fib2(int n){
    int i, atual = 1;
    int p = 0; // penúltimo
    int u = 1; // último

    if (n <= 0) return 0;

    for (i = 2; i <= n; i++){
        atual = p + u;
        p = u;
        u = atual;
    }
    return atual;
}
```

- A complexidade de tempo: $O(n)$
- A complexidade de espaço: $\Theta(1)$

- Exemplo: torre de Hanói



- Dado três torres (A , B e C) e n discos de diâmetros diferentes
- O disco de menor diâmetro sempre deve estar em cima do disco de maior diâmetro
- Problema: como colocar todos os discos na torre C , utilizando a torre intermediária B , sem inverter a ordem dos diâmetros em nenhuma torre?

- Exemplo: torre de Hanói
 - Inicialmente, todos discos deve estar na torre A
 - Se há solução para n discos, então há solução para $n - 1$ discos
 - No caso trivial de $n = 1$, a solução é simples
 - A solução para n discos é realizada em termos de $n - 1$

```
void hanoi(char de, char para, char meio, int
n){
    if (n <= 1)
        printf("Disco %d:  %c => %c\n", n, de, para);
    else{
        hanoi(de, meio, para, n - 1);
        printf("Disco %d:  %c => %c\n", n, de, para);
        hanoi(meio, para, de, n - 1);
    }
}
```

- Complexidade do algoritmo *Hanoi*
 - O número mínimo de "movimentos" para conseguir transferir todos os discos da primeira estaca à terceira é $2^n - 1$, sendo n o número de discos. Logo: $O(2^n)$
 - Para solucionar um Hanói de 5 discos, são necessários 31 movimentos
 - Hanói de 7 discos: 127 movimentos
 - Hanói de 15 discos: 32.767 movimentos
 - Hanói de 32 discos: 4.294.967.295 movimentos
 - Hanói de 64 discos: 18.446.744.073.709.551.615 movimentos!

- Exemplo: problema do caixeiro viajante (PCV)

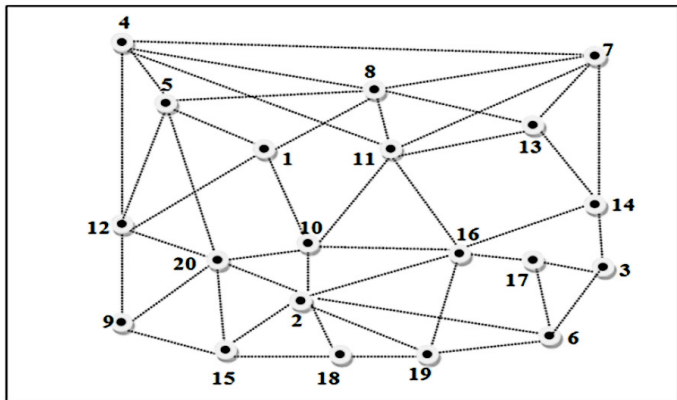


Figura 1 - Instância do PCV para 20 cidades

- Exemplo: problema do caixeiro viajante
 - Espaço de busca é um conjunto de permutação das n cidades
 - Cada permutação das n cidades caracteriza-se como uma lista ordenada que define a sequência das cidades a serem visitadas
 - A solução ótima é uma permutação que corresponda a uma *tour* (ou passeio) de caminho mínimo
 - Cada *tour* pode ser representada de $2n$ maneiras diferentes (para um modelo simétrico)
 - Considerando-se que há $n!$ formas de permutar n números, o tamanho do espaço de busca é $|S| = \frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$
 - Logo, a complexidade é $O(n!)$

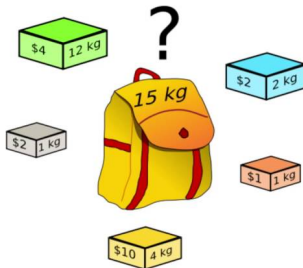
- Exemplos de outros problemas
 - Satisfatibilidade booleana
 - Oito rainhas
 - Passeio do cavalo
 - Árvore geradora mínima
 - Caminhos mínimos
 - ...

- Métodos (Paradigmas) de desenvolvimento de algoritmos:
 - Força-bruta
 - Método guloso
 - Divisão e conquista
 - Programação dinâmica
 - *Backtracking**
 - *Branch and bound**

Força-Bruta

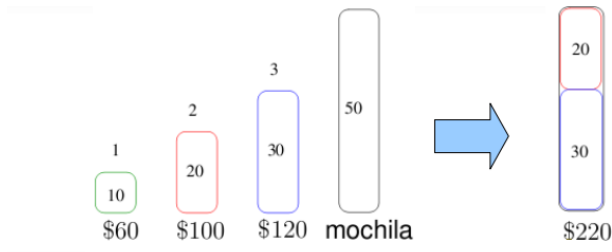
- Também conhecida como "busca exaustiva" e "tentativa e erro"
- É a estratégia mais trivial e intuitiva para a solução de problemas
- Essa abordagem enumera todas as combinações possíveis de soluções
 - No final, é escolhida uma solução, se houver, que satisfaça o problema
 - A melhor solução é escolhida
- Entretanto, algoritmos força-bruta comumente possuem custo computacional alto
 - Muitas vezes exponenciais (e.g. $O(2^n)$)

- Exemplo: problema da mochila



- Dada uma mochila que admite um determinado peso (b) e n objetos com peso p_i e custo c_i
- Objetivo: selecionar um subconjunto de objetos que caibam dentro da mochila de forma que o valor total dos objetos sejam maximizado

- Exemplo: problema da mochila
 - Solução ótima para um conjunto de entrada



- Implementação do algoritmo mochila

```
static int mochila_fb(int c[], int p[], int n, int b, int
i, int max){
    int c1, c2;
    if (i >= n)
        return b < 0 ? 0 : max;
    else{
        c1 = mochila_fb(c, p, n, b, i + 1, max);
        c2 = mochila_fb(c, p, n, b - p[i], i + 1, max + c[i]);
        return c1 > c2 ? c1 : c2;
    }
}

int mochila(int c[], int p[], int n, int b){
    return mochila_fb(c, p, n, b, 0, 0);
}
```

- Complexidade de tempo e de espaço: $O(2^n)$

- Apesar do custo computacional alto, em alguns problemas pode ser necessária a obtenção de todas as soluções possíveis
 - Detecção de padrões
 - Para amenizar o custo da força-bruta, para a enumeração de todas as soluções podem ser utilizadas as abordagens *backtracking* ou *branch-and-bound*
- Vantagens:
 - Simples implementação
 - Solução ótima
- Principal desvantagem:
 - Custo computacional pode ser proibitivo

Método Guloso

- Algoritmos gulosos são tipicamente usados para resolver problemas de otimização



- Um algoritmo guloso escolhe, em cada iteração, o objeto mais apetitoso que vê pela frente
- O objeto selecionado passa a fazer parte da solução do problema
- As decisões são tomadas com base em informações disponíveis na iteração corrente, desconsiderando as consequências futuras
- Nunca reconsidera uma solução, independentemente das consequências
- Pode não produzir a melhor solução

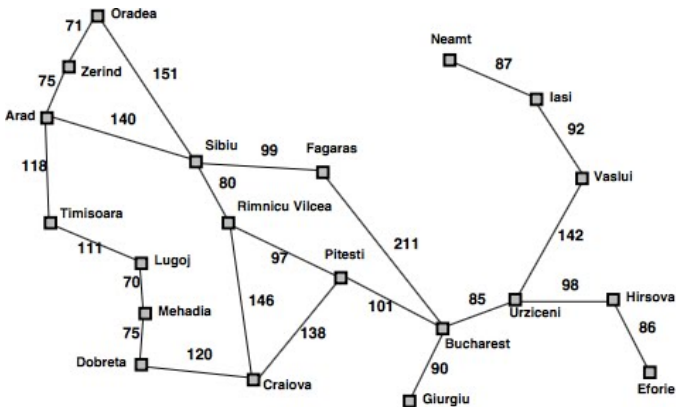
- Objetivo de um algoritmo guloso pode ser:
 - Minimizar
 - Maximizar

Método Guloso

Implementação de algoritmos gulosos

- Construir por etapas (iteração) uma solução ótima
- Em cada iteração:
 - Selecione um elemento conforme uma função gulosa (o melhor local)
 - Marque-o para não considerá-lo novamente nos próximos estágios
 - Examine o elemento selecionado quanto sua viabilidade
 - Decida a sua participação ou não na solução
- No final, verifique se a solução foi encontrada

- Exemplo: encontrar o caminho mais curto entre duas cidades



Método Guloso

Implementação de algoritmos gulosos

- Um dos "segredos" dos algoritmos gulosos é a forma da ordenação/organização do conjunto de entrada
- Algoritmos gulosos são utilizados para resolver problemas de otimização que funcionem através de uma sequência de passos

Método Guloso

Exemplos

- Problema do troco
- Problema da mochila
- Seleção de atividades

Método Guloso

Exemplos: problema do troco

- Imagine que você trabalha no caixa de um supermercado
 - Após o pagamento da compra pelo cliente, você deve entregar o troco em moedas
 - Você gosta dessas moedas e quer entregar o menor número de moedas possíveis
- Objetivo: selecionar a menor quantidade possível de moedas para um troco de valor N



Método Guloso

Exemplos: problema do troco

- **Descrição:** seja $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $e_1 > e_2 > \dots > e_n$, um conjunto de n denominações de moedas (ou cédulas), e M um valor positivo que representa o troco
- **Problema:** fornecer o montante M com o menor número de moedas
- **Sequência de decisões:** escolher r_1 , depois r_2 , ...
 - $r_i = j$, tal que $e_j \leq M$ e $e_{j-1} > M$

Método Guloso

Exemplos: problema do troco

- Seja $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, e M , um valor positivo que representa o troco
- Algoritmo, supondo que E esteja ordenado de forma decrescente
 - No passo i , escolher $r_i = j$, tal que $e_j \leq M$ e $e_{j-1} > M$
 - Dividir M por e_j
 - No próximo passo, utilizar o resto da divisão ($M \% e_j$)
 - Aplicar esse processo até o troco ser zerado (resto de divisão for zero) ou todas as moedas terem sido percorridas

Método Guloso

Exemplos: problema do troco

- Suponha que um valor de 450 deve ser devolvido como troco:
 - Será que a estratégia gulosa apresentada funciona para o conjunto de moedas $E = \{100, 50, 25, 10, 5, 1\}$? Caso positivo, a resposta é ótima?
 - Será que a estratégia gulosa apresentada funciona para o conjunto de moedas $E = \{300, 250, 100, 1\}$? Caso positivo, a resposta é ótima?

Método Guloso

Exemplos: problema do troco

- Suponha que um valor de 450 deve ser devolvido como troco:
 - Será que a estratégia gulosa apresentada funciona para o conjunto de moedas $E = \{100, 50, 25, 10, 5, 1\}$? Caso positivo, a resposta é ótima?
 - A estratégia, além de funcionar, retorna uma solução ótima: cinco (quatro moedas de 100 e uma de 50)
 - Será que a estratégia gulosa apresentada funciona para o conjunto de moedas $E = \{300, 250, 100, 1\}$? Caso positivo, a resposta é ótima?
 - A estratégia funciona (encontra uma solução), mas não retorna uma solução ótima: 52 moedas (1 moeda de 300, uma de 100 e 50 de 1)
- Dependendo do câmbio (e.g. real), a solução gulosa é ótima

Método Guloso

Exemplos: problema do troco

- Algoritmo
 - Ordene o valor das moedas de forma decrescente
 - Começando com a primeira moeda ($i = 0$), divida o valor do troco pelo valor da moeda i (caso o valor do troco seja maior que o da moeda)
 - Adicione a parte inteira da divisão no conjunto da solução
 - Utilize o resto da divisão na próxima iteração

- Implementação do algoritmo troco mínimo

```
// Supõe-se que o vetor moedas esteja ordenado
int qtd_moedas(int moedas[], int n, int troco){
    int i, n_moedas = 0;
    for (i = 0; i < n && troco > 0; i++){
        // atualizar a quantidade de moedas de troco
        n_moedas += troco / moedas[i];
        // atualizar o valor do troco faltante
        troco = troco % moedas[i];
    }
    if (troco == 0)
        return n_moedas; // solução encontrada
    else
        return -1; // solução não encontrada
}
```

- Complexidade de tempo: $O(n)$
- Complexidade de espaço (espaço extra): $\Theta(1)$

Método Guloso

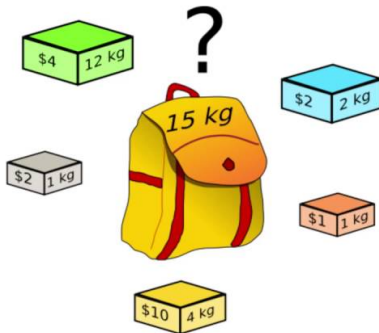
Exemplos: problema do troco

- Exercício: adapte o algoritmo anterior para retornar o conjunto de moedas utilizadas para o troco. Por exemplo, para $moedas = \{100, 50, 10, 5, 1\}$ e $troco = 450$ deve ser retornada a seguinte sequência: $\{100, 100, 100, 100, 50\}$.

Método Guloso

Exemplos: problema da mochila

- Dados
 - Uma mochila que admite um determinado peso
 - Um conjunto de objetos, sendo cada com um valor e um peso



Método Guloso

Exemplos: problema da mochila

- Objetivo: selecionar um subconjunto de objetos que caibam dentro da mochila de forma que o valor total dos objetos seja maximizado
- O problema da mochila é dividido em dois subproblemas distintos
 - Mochila fracionária: os objetos podem ser particionados de forma proporcional
 - Mochila binária: os objetos não podem ser particionados

Método Guloso

Exemplos: problema da mochila fracionária

- A entrada pode ser ordenada por valor/peso
- Solução gulosa é ótima
- Algoritmo
 - Ordene os itens por valor/peso de forma decrescente
 - Começando com o primeiro objeto ($i = 0$), coloque o máximo do mesmo que estiver disponível e for possível
 - Se a mochila ainda não estiver cheia, passe para o próximo item

Método Guloso

Exemplos: problema da mochila fracionária

- Exemplo



Método Guloso

Exemplos: problema da mochila fracionária

- Exemplo



- O algoritmo guloso retorna solução ótima para o problema da mochila fracionária

Método Guloso

Exemplos: problema da mochila fracionária

- Implementação do algoritmo mochila fracionária

```
int mochila_g(int peso[], int custo[], int n, int
capacidade){
    int i = 0;
    float valor = 0;
    while ((i < n) && (peso[i] <= capacidade)){
        valor += custo[i];
        capacidade -= peso[i];        i++;
    }
    if ((capacidade > 0) && (i < n))
        valor += (capacidade / peso[i]) * custo[i];

    return valor;
}
```

- Complexidade de tempo: $O(n)$
- Complexidade de espaço (espaço extra): $\Theta(1)$

Método Guloso

Exemplos: problema da mochila binária

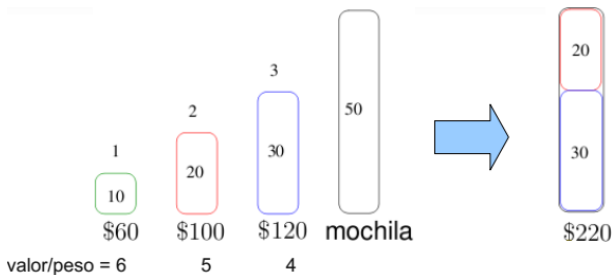
- Exemplo



Método Guloso

Exemplos: problema da mochila binária

- Solução ótima do exemplo



- O algoritmo guloso pode não gerar uma solução ótima para o problema da mochila binária

Método Guloso

Exemplos: seleção de atividades

- Diversas atividades podem requerer o uso de um mesmo recurso
- Considerando aula como exemplo:
 - Cada atividade (aula) tem um horário de início e um horário de fim
 - Só existe uma sala disponível
 - Duas aulas não podem ser ministradas na mesma sala ao mesmo tempo

Método Guloso

Exemplos: seleção de atividades

- Exemplo para 11 atividades e 14 unidades de tempo

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															

Método Guloso

Exemplos: seleção de atividades

- Considerando aula como exemplo:
 - Objetivo: selecionar um conjunto máximo de atividades compatíveis
 - Sem sobreposição de tempo
 - Criação do maior grupo de atividades sem sobreposição de tempo

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															

Método Guloso

Exemplos: seleção de atividades

- Como fazer a seleção de atividades?
 - Estratégia 1: selecionar as atividades que começam primeiro

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															

- Solução não ótima

Método Guloso

Exemplos: seleção de atividades

- Como fazer a seleção de atividades?
 - Estratégia 2: selecionar as atividades que são executadas em menos tempo

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															

- Solução não ótima

Método Guloso

Exemplos: seleção de atividades

- Como fazer a seleção de atividades?
 - Estratégia 3: escolher as atividades que terminam primeiro

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															

- Solução ótima

Método Guloso

Exemplos: seleção de atividades

- Algoritmo guloso
 - Receber a lista de atividades ordenadas pelo horário de término
 - Em cada iteração, checar se a atividade atual é compatível
 - Caso a atividade seja compatível, adicione-a no conjunto solução
- **Exercício:** implemente uma solução gulosa para o problema de seleção de atividades. A função deverá receber como entrada: vetor de horário de início, vetor de horário de término, tamanho dos vetores (obs.: os vetores poderão ser de números inteiros, em vez de itens no formato hh:mm). Como saída, a função deverá retornar a quantidade de atividades alocadas.

- Outros problemas podem ser resolvidos por meio de algoritmos gulosos
 - Árvore de Huffman
 - Árvore geradora mínima
 - Busca gulosa
 - ...

Considerações Finais

- Vantagens:
 - Simples implementação
 - Rápida execução
- Desvantagens:
 - Pode não gerar soluções ótimas
 - Pode entrar em *loop* infinito



Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L.; Clifford, S.
Algoritmos: teoria e prática.
Elsevier, 2012.



Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S.
Computer Algorithms.
Computer Science Press, 1998.



Szwarcfiter, J.; Markenzon, L.
Estruturas de Dados e Seus Algoritmos.
LTC, 2010.



Ziviani, N.
Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.
Thomson, 2007.