Árvores AVL

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados 2 (AE43CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

DAINF
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE INFORMÁTICA
CÂMPUS PATO BRANCO

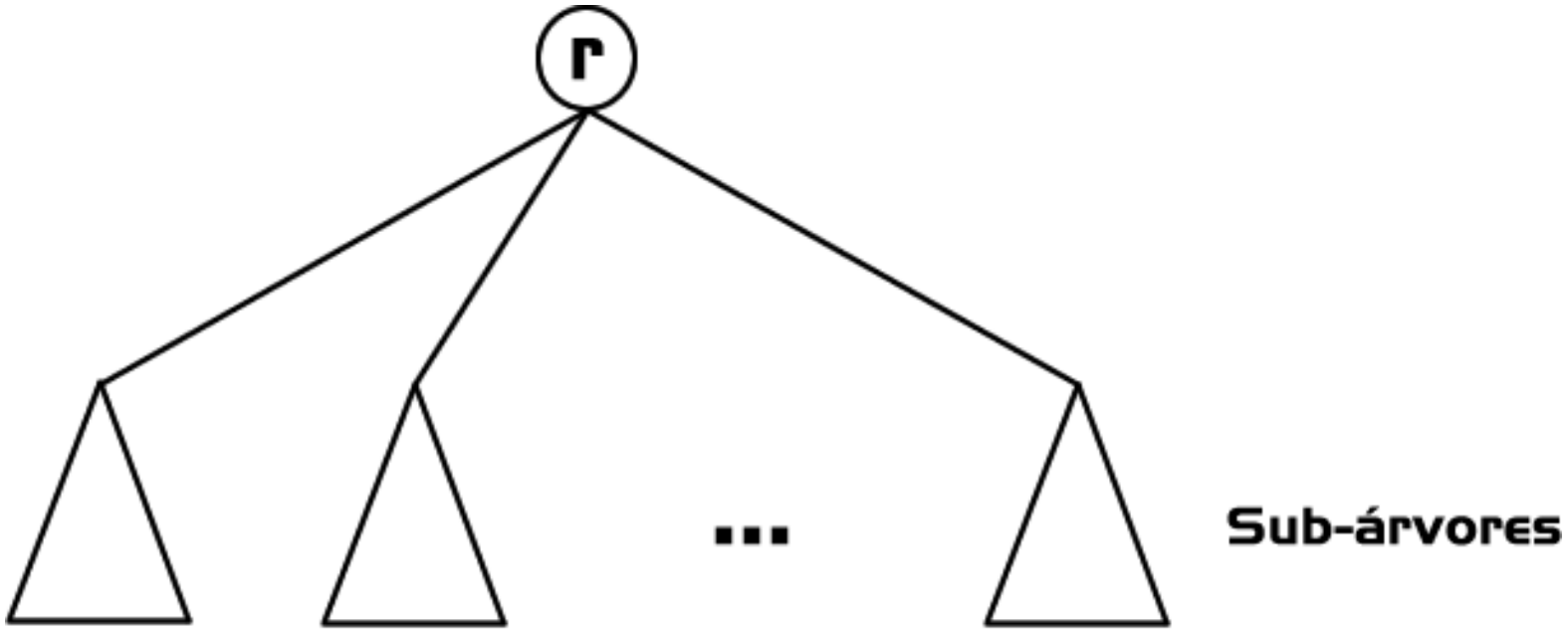
UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Sumário

- Balanceamento
- Árvores AVL
  - Fator de balanceamento
  - Rotações
  - Operações

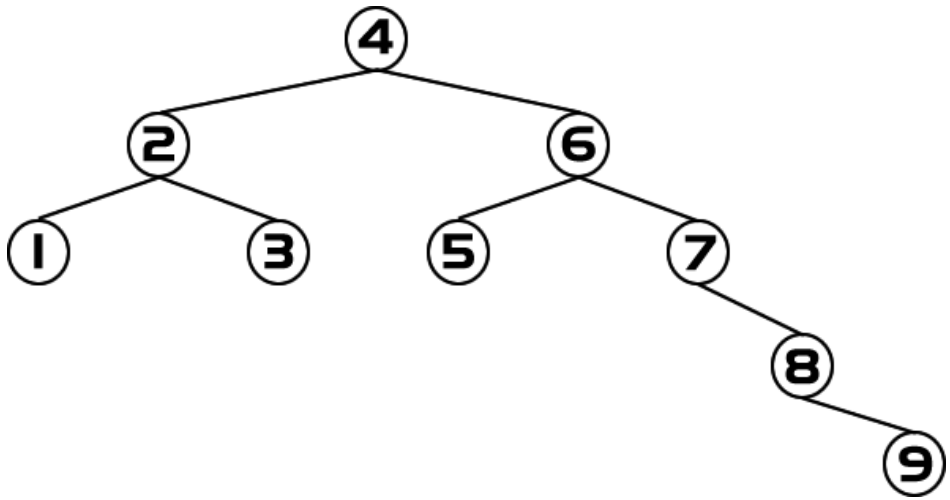
Considerações Iniciais

- Árvore



Considerações Iniciais

- As árvores binárias de busca (pesquisa) são projetadas para um acesso rápido à informação
  - Idealmente a árvore deve ser razoavelmente equilibrada
- Tempo de busca é de $O(\log n)$ para uma árvore balanceada
- Sucessivas inserções de itens podem acarretar no aumento da complexidade de tempo para $O(n)$



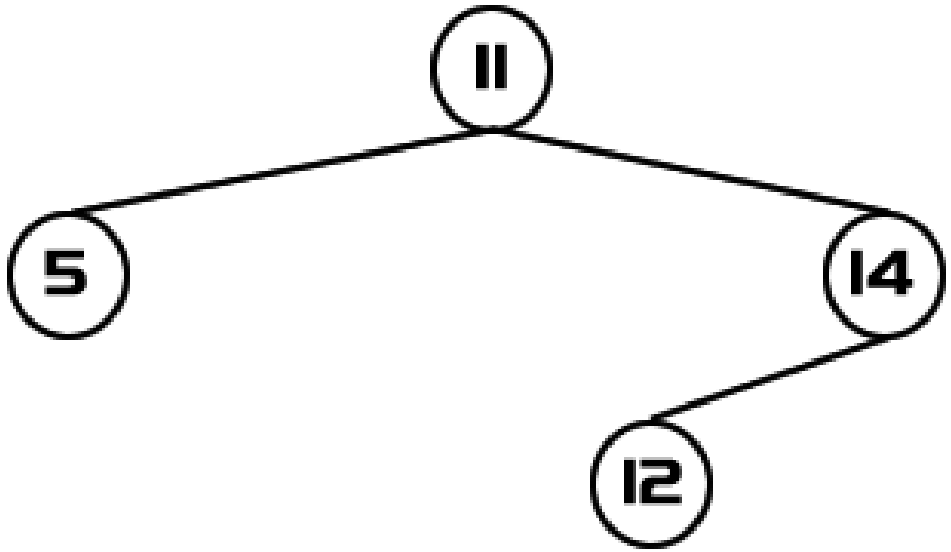
Sumário

Balanceamento

- Árvores binárias de busca balanceadas minimizam o número de comparações em comparação com o pior caso ($O(n)$)
  - A altura da árvore é mantida baixa (por volta de $O(\log n)$) após sucessivas inserções
  - Uma árvore de altura h pode conter, no máximo, $2^{h+1} - 1$ elementos
  - A diferença de altura das sub-árvores direita e esquerda deve ser no máximo um (para uma árvore AVL)
- A manutenção de árvores de busca balanceadas é considerada uma tarefa complexa

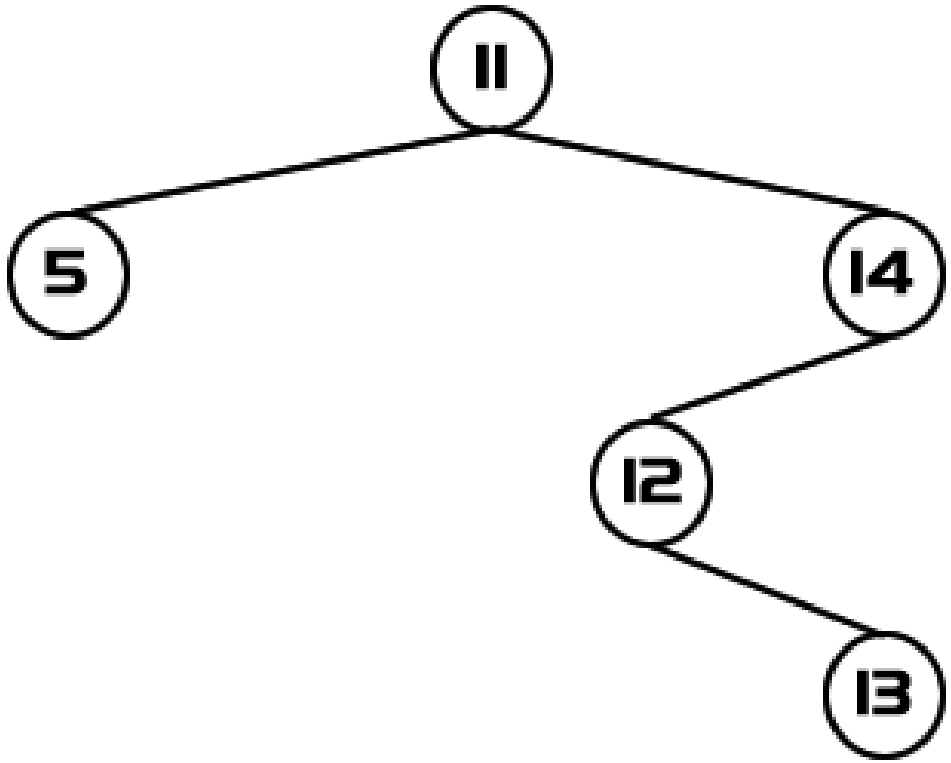
Balanceamento

- Árvore balanceada



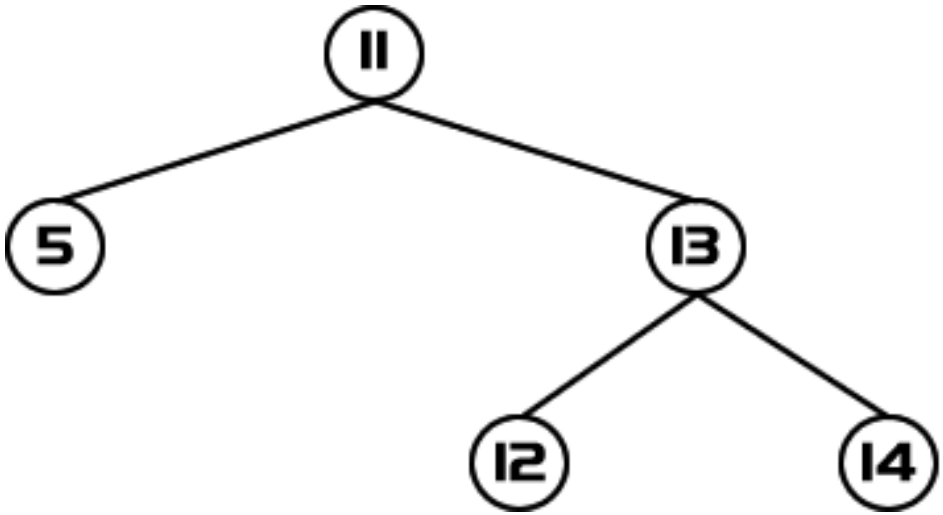
Balanceamento

- Inserção do item 13 torna a árvore desbalanceada



Balanceamento

- Árvore rebalanceada



Balanceamento

- Exemplos de tipos de árvores binárias balanceadas:
  - Árvores AVL
  - Árvores vermelha-preta (rubro-negra)

Árvores AVL

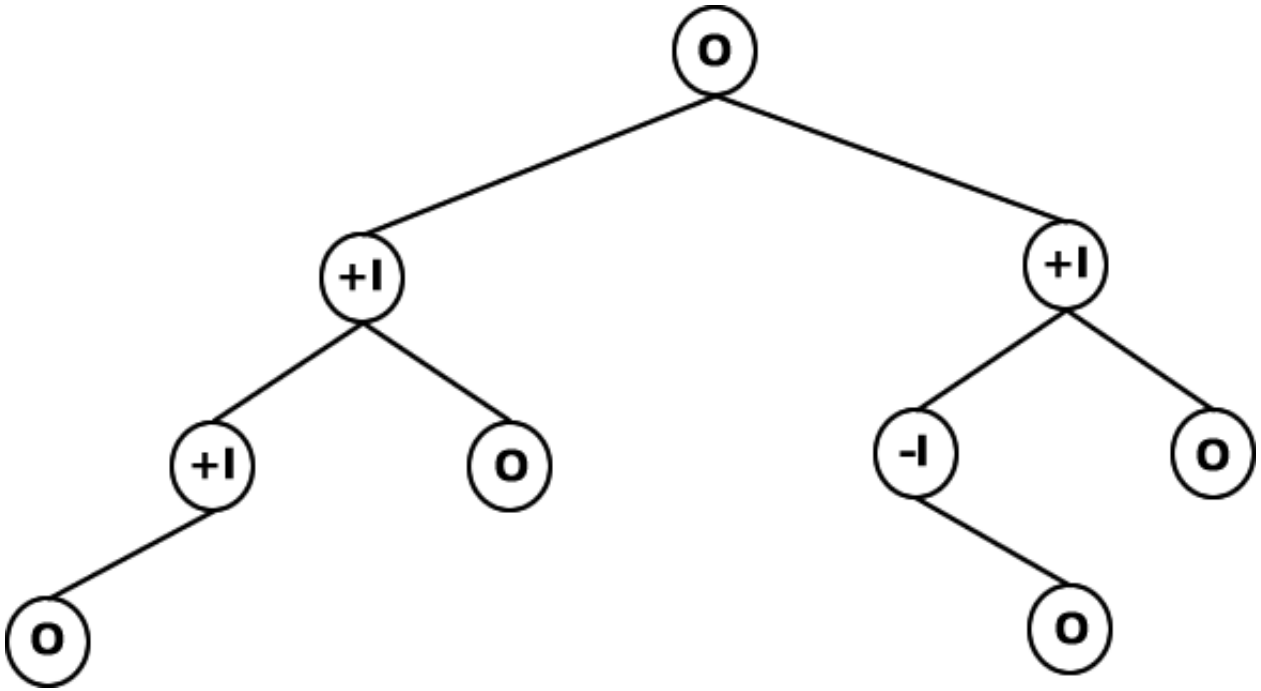
Árvores AVL

- Adelson, Velsky e Landis (1962)
- Árvore de altura balanceada
- As operações de busca, inserção e remoção podem ser realizadas a um custo de tempo $O(\log n)$
- Uma árvore vazia é uma árvore AVL

- Dada pela diferença de altura entre as sub-árvores esquerda (h_e) e direita (h_d)
  - $h_e - h_d$
- Em uma Árvore AVL, cada sub-árvore deve ter altura equilibrada (de acordo com o fator de balanceamento)

- Cada nó de uma árvore AVL deve ter um valor de fator de balanceamento
  - -1: a altura da sub-árvore direita é maior que a da esquerda
  - 0: a altura das sub-árvores direita e esquerda são iguais
  - +1: a altura da sub-árvore esquerda é maior que a da direita
- Em uma operação de inserção ou remoção, caso uma sub-árvore fique com altura menor que -1 ou maior que +1, a árvore deve ser rebalanceada

- Exemplo de árvore balanceada com fator de balanceamento em cada nó



- *Left-left* (LL)
- *Right-right* (RR)
- *Left-right* (LR)
- *Right-left* (RL)

- Exemplo (quando os elementos são *strings*, levaremos em conta a sua ordem alfabética)
  - Inserção do item *maio*
    - Inicialmente, a árvore está vazia e após a inserção, o balanceamento é mantido

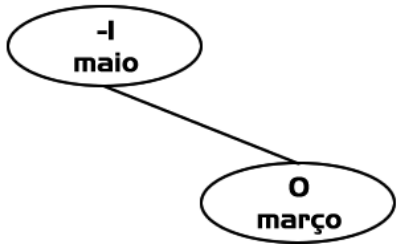
Após a inserção

Após o rebalanceamento

Sem necessidade de rebalanceamento

- Exemplo
  - Inserção do item *março*
    - Na ordem alfabética, *março* vem depois de *maio*, já que *mar* é maior que *mai*, ou seja, o novo item é adicionado à direita de *maio*
    - Após a inserção, a árvore ainda é mantida balanceada

Após a inserção

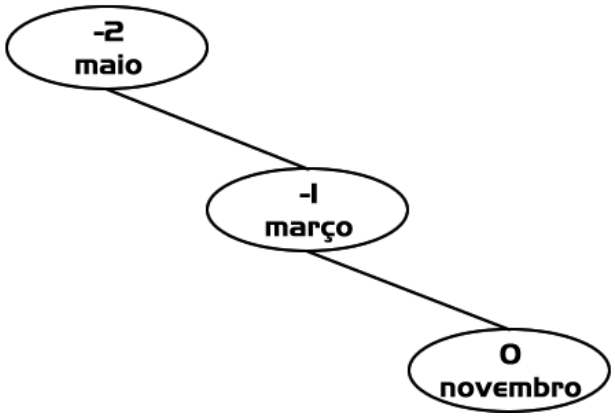


Após o rebalanceamento

Sem necessidade de rebalanceamento

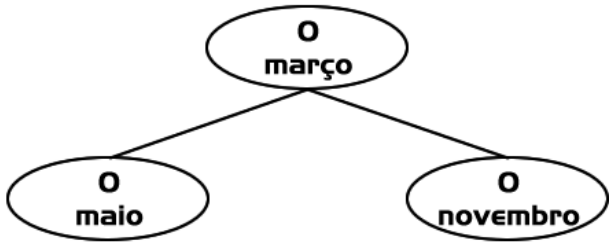
- Exemplo
  - Inserção do item *novembro*
    - Na ordem alfabética, o item deve ser adicionado à direita de *março*
    - A árvore fica desbalanceada, já que o nó *maio* possui fator de balanceamento < -1
    - Como o sinal do nó desbalanceado é negativo, algum tipo de rotação à direita (R) deve ser feita
    - A raiz da sub-árvore direta do nó *maio* também possui fator de balanceamento negativo
    - A rotação que deve ser aplicada é a RR

Após a inserção



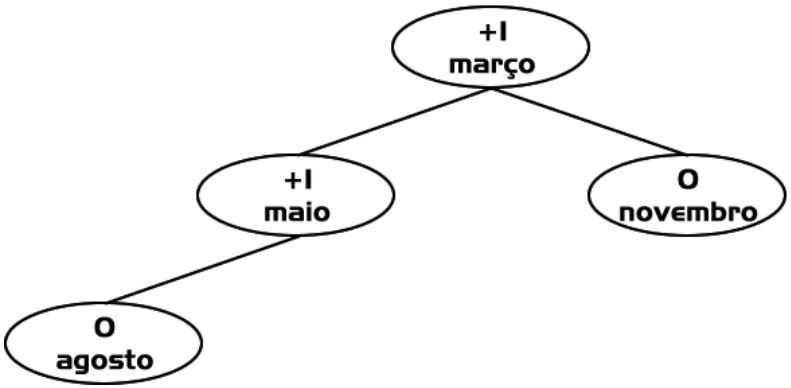
RR

Após o rebalanceamento



- Exemplo
  - Inserção do item agosto
    - Como *a* é menor *m*, então agosto é inserido à esquerda do item maio
    - Após a inserção, a árvore ainda é mantida balanceada

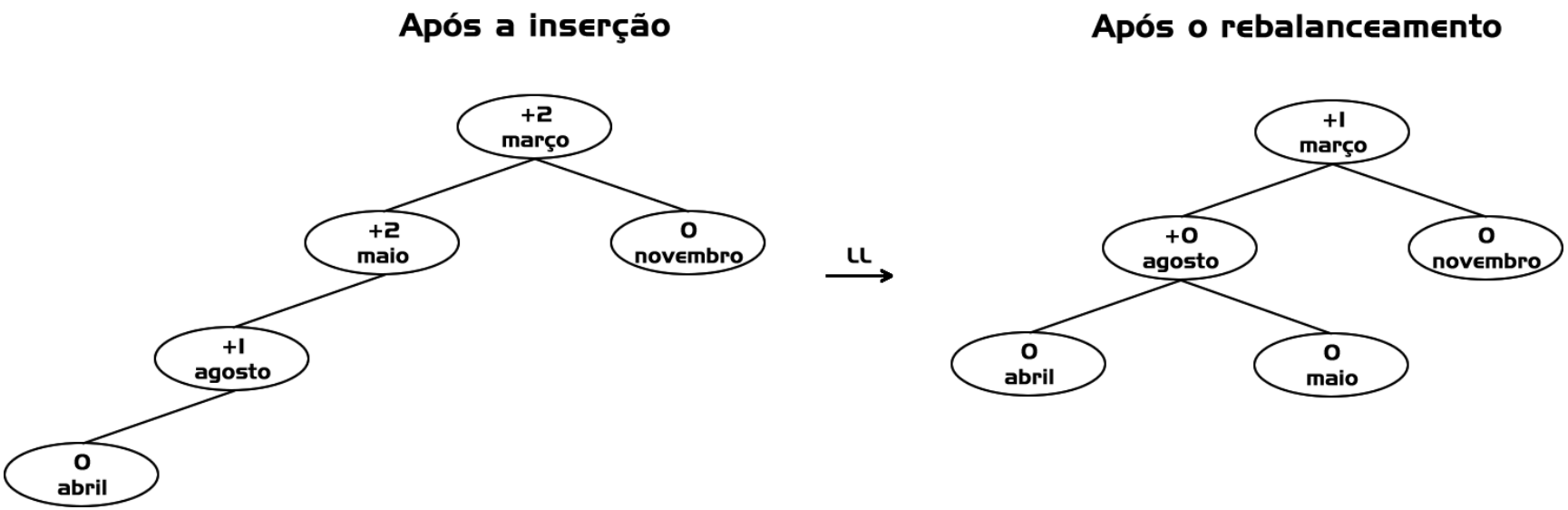
Após a inserção



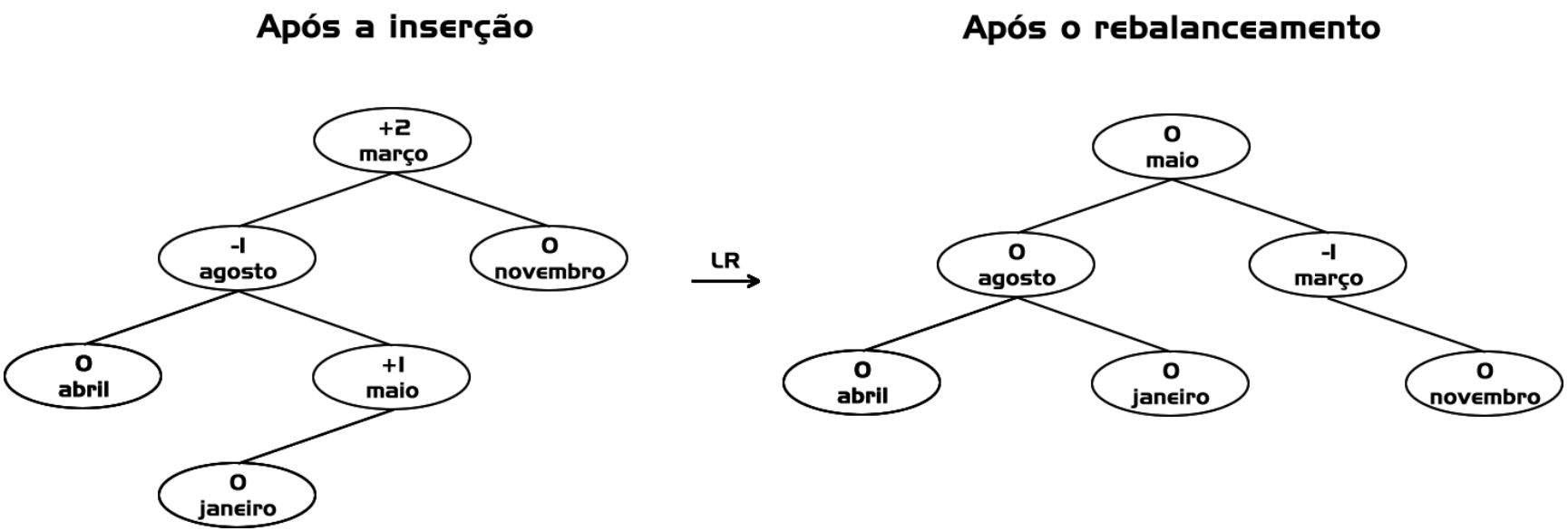
Após o rebalanceamento

Sem necessidade de rebalanceamento

- Exemplo
  - Inserção do item abril
    - Como *ab* é menor *ag*, então *abril* é inserido à esquerda do item *agosto*
    - Após a inserção, a árvore fica desbalanceada no nó *maio*, cujo fator de balanceamento é positivo, indicando que deve ser feita uma rotação à esquerda (L)
    - A raiz da sub-árvore esquerda do nó *maio* também possui fator de balanceamento positivo
    - A rotação que deve ser aplicada é a LL

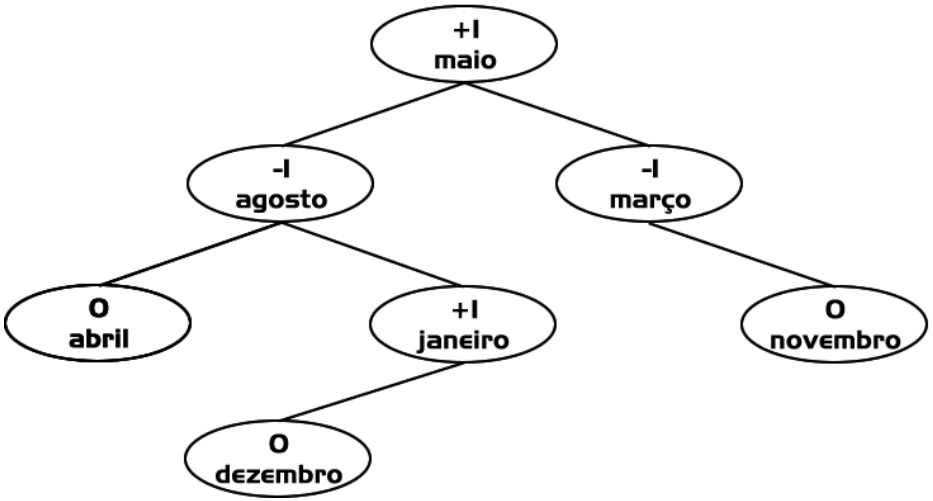


- Exemplo
  - Inserção do item *janeiro*
    - Como *j* é menor que *m* e maior que *a*, então *janeiro* de ser inserido ao lado esquerdo de *maio*
    - Com a inserção, árvore fica desbalanceada por causa do nó *março*, que possui fator de balanceamento $> +1$, ou seja, deve ser realizada alguma rotação à esquerda
    - A raiz subárvore esquerda de *março* possui fator de balanceamento negativo
    - A rotação que deve ser aplicada é a LR



- Exemplo
  - Inserção do item *dezembro*
    - Como *d* é maior que *a* e menor que *j*, então o novo item deve ser inserida ao lado esquerdo de *janeiro*
    - Após a inserção, a árvore é mantida balanceada

Após a inserção

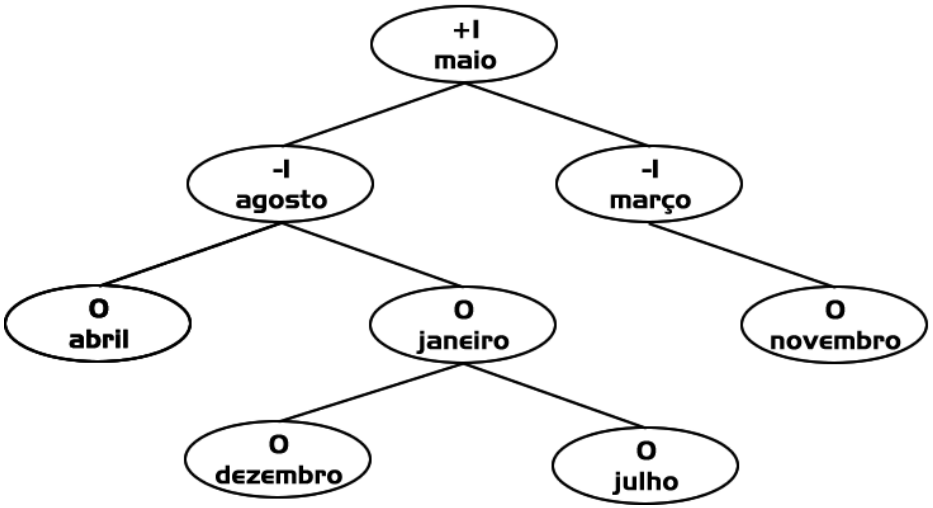


Após o rebalanceamento

Sem necessidade de rebalanceamento

- Exemplo
  - Inserção do item *julho*
    - Como *ju* é maior que *ja*, então o novo item deve ser inserida ao lado direito de *janeiro*
    - Após a inserção, a árvore é mantida balanceada

Após a inserção

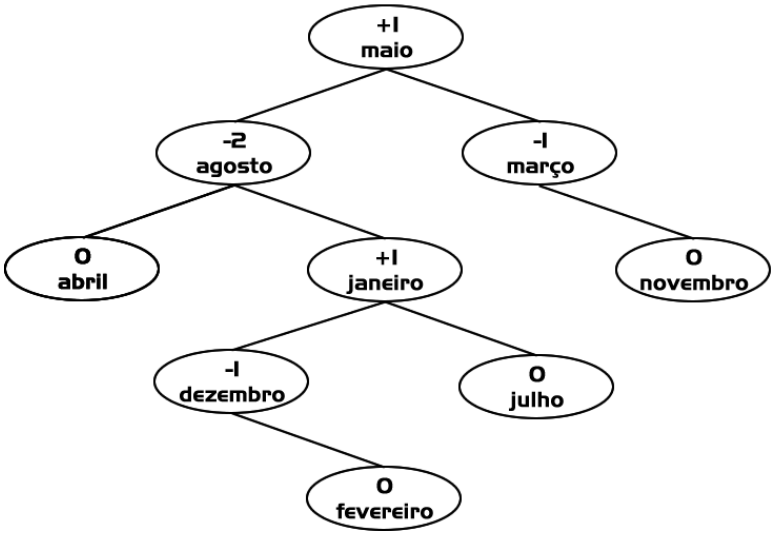


Após o rebalanceamento

Sem necessidade de rebalanceamento

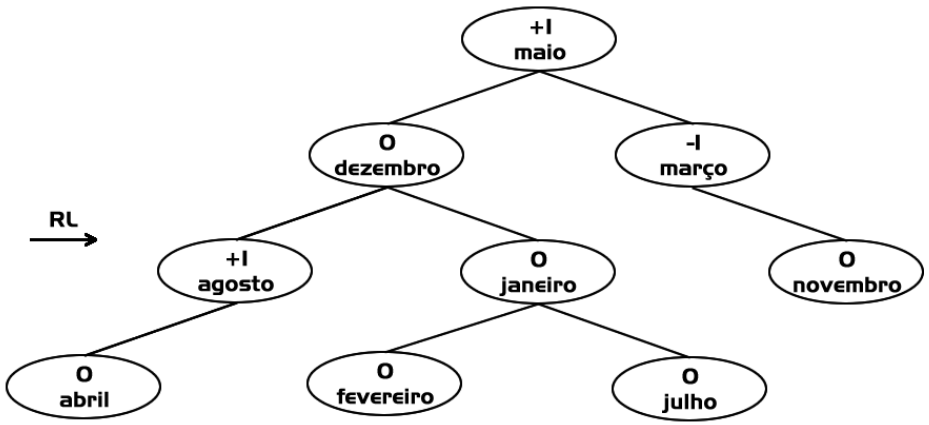
- Exemplo
  - Inserção do item *fevereiro*
    - Como *f* é menor que *j* e maior que *d*, então *fevereiro* de ser inserido ao lado esquerdo direito de *dezembro*
    - Com a inserção, árvore fica desbalanceada por causa do nó *agosto*, que possui fator de balanceamento < -1, ou seja, deve ser realizada alguma rotação à direita
    - A raiz subárvore direita de *agosto* possui fator de balanceamento positivo
    - A rotação que deve ser aplicada é a RL

Após a inserção



RL

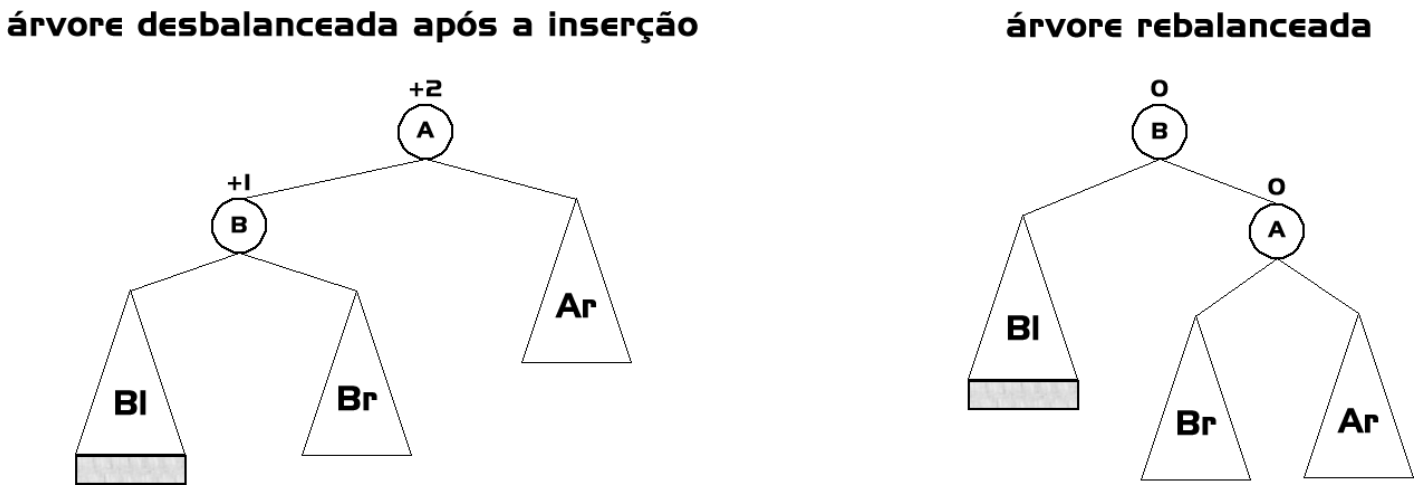
Após o rebalanceamento



- Estrutura de dados para a representação de uma árvore AVL:

```
typedef struct Pointer{
   int item;
   int bf;
   struct Pointer* right;
   struct Pointer* left;
}Node;
```

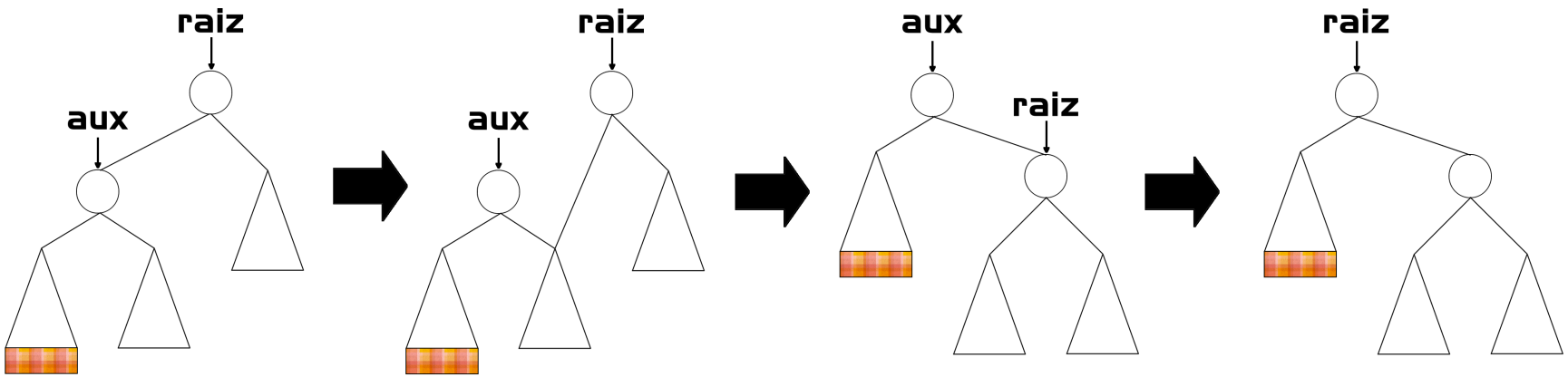
- Rotação LL



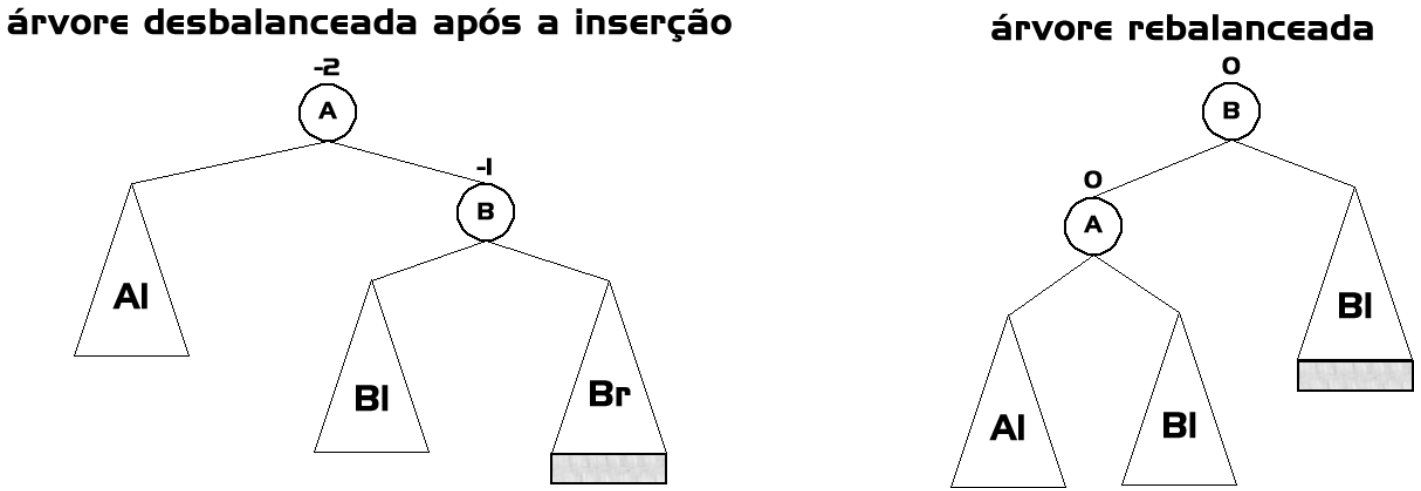
- Legenda:
  - Círculo: representa um nó
  - Triângulo: representa uma sub-árvore equilibrada
    - Nos exemplos ilustrados para as rotações **LL** e **RR**, cada sub-árvore possui a mesma altura
  - Retângulo: representa o aumento da altura de uma sub-árvore (inclusão de um novo nó)

- Rotação LL

```
Node *aux = raiz->left;
raiz->left = aux->right;
aux->right = raiz;
raiz = aux;
```

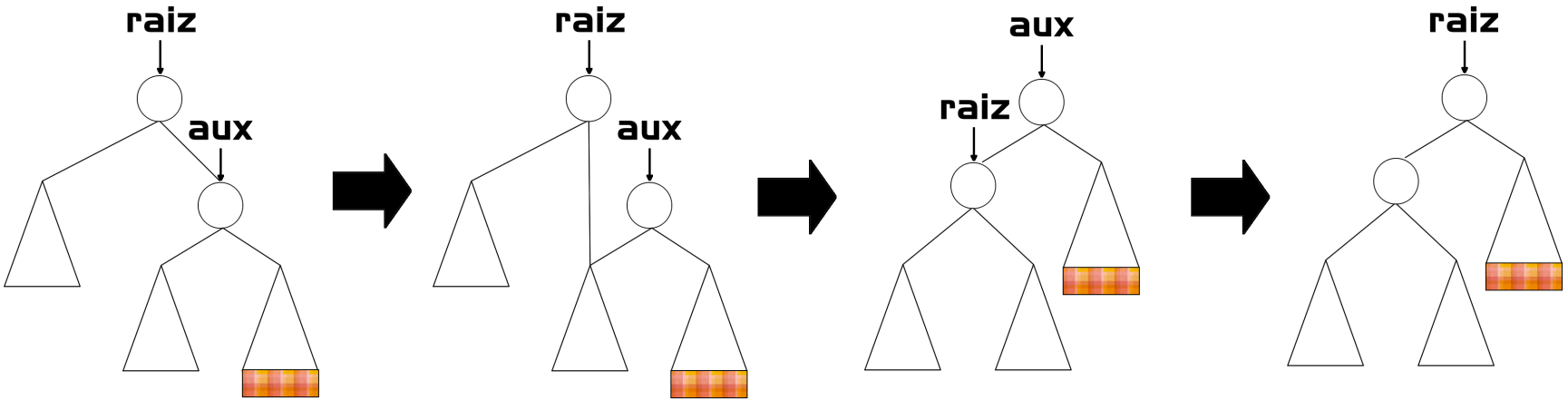


- Rotação RR

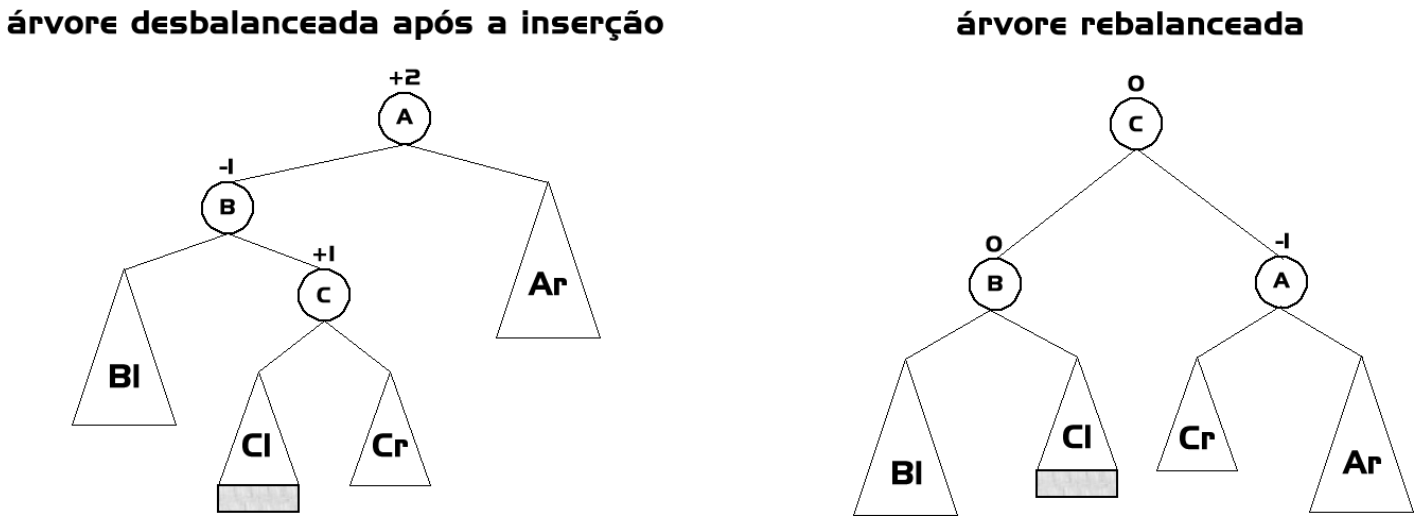

árvore desbalanceada após a inserção
-2
A
-1
B
Al
Bl
Br
árvore rebalanceada
0
B
0
A
Bl
Al
Bl

- Rotação RR

```
Node *aux = raiz->right;
raiz->right = aux->left;
aux->left = raiz;
raiz = aux;
```

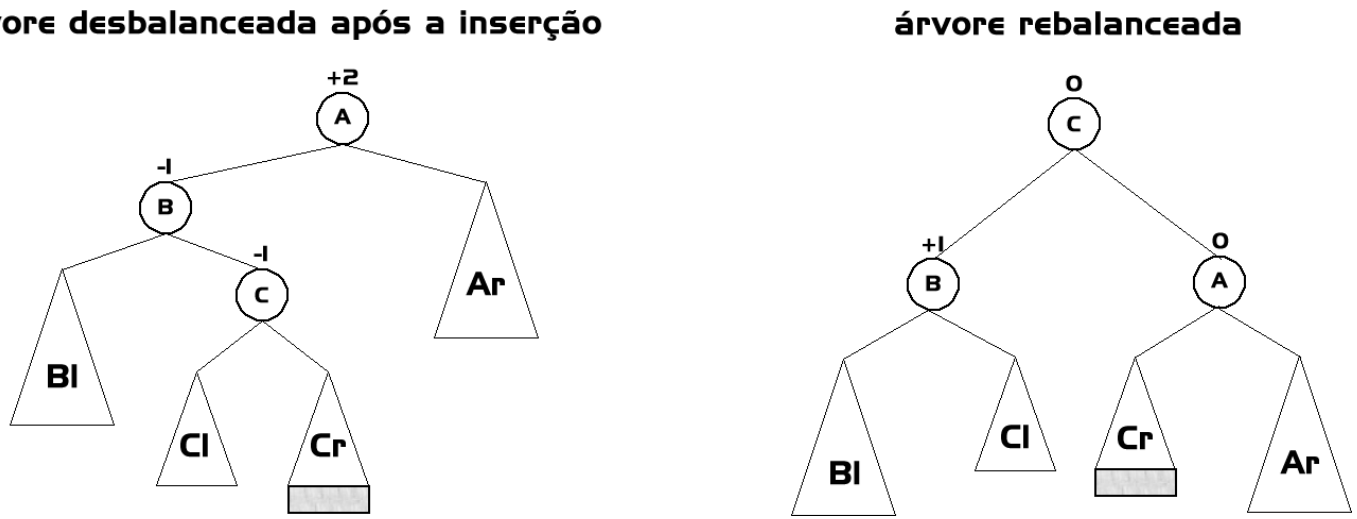


- Rotação LR: caso 1



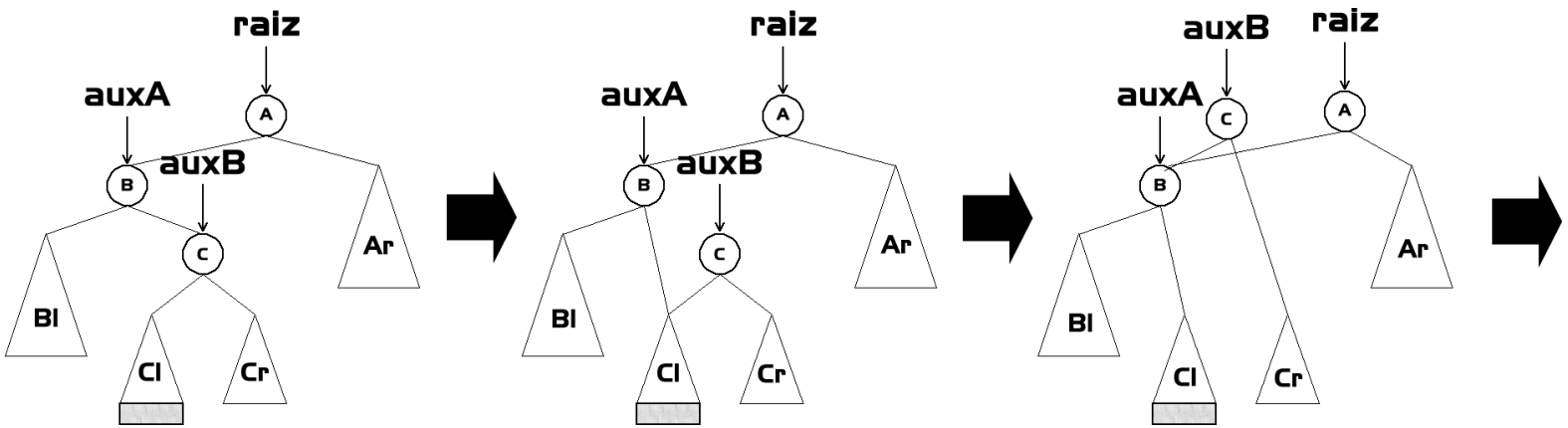
- Legenda:
  - Círculo e retângulo possuem o mesmo significado em relação aos exemplos de rotações LL e RR
  - Triângulos: representa uma sub-árvore equilibrada
    - A e B: pode-se dizer que possuem o mesmo significado em relação aos exemplos de rotações LL e RR
    - C: sub-árvore equilibrada, mas com altura brevemente menor (diferença de uma unidade) em relação às sub-árvores A e B
    - No exemplo acima, C é a raiz da sub-árvore Br

- Rotação LR: caso 2



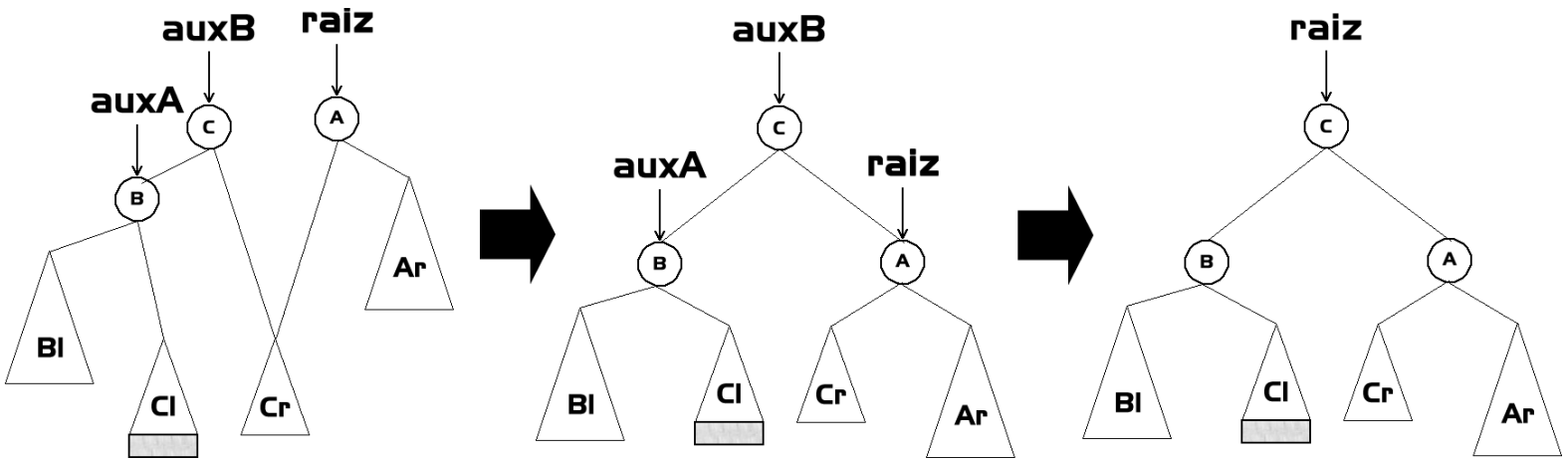
- Rotação LR

```
Node *auxA = raiz->left;
Node *auxB = auxA->right;
auxA->right = auxB->left;
auxB->left = auxA;
raiz->left = auxB->right;
auxB->right = raiz;
raiz = auxB;
```

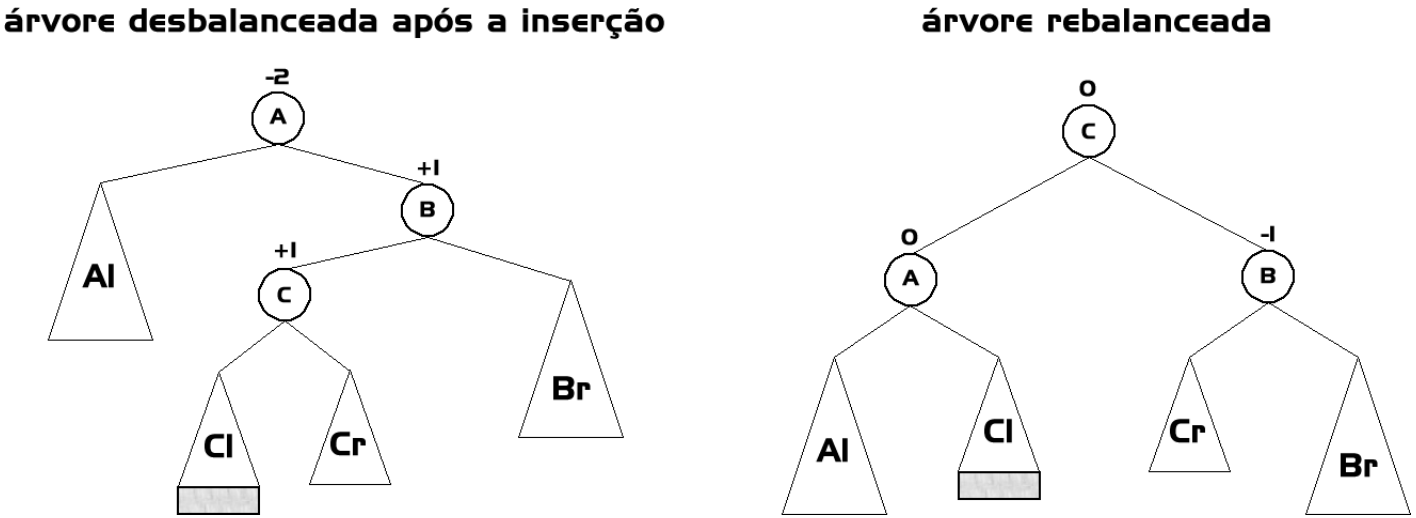


- Rotação LR

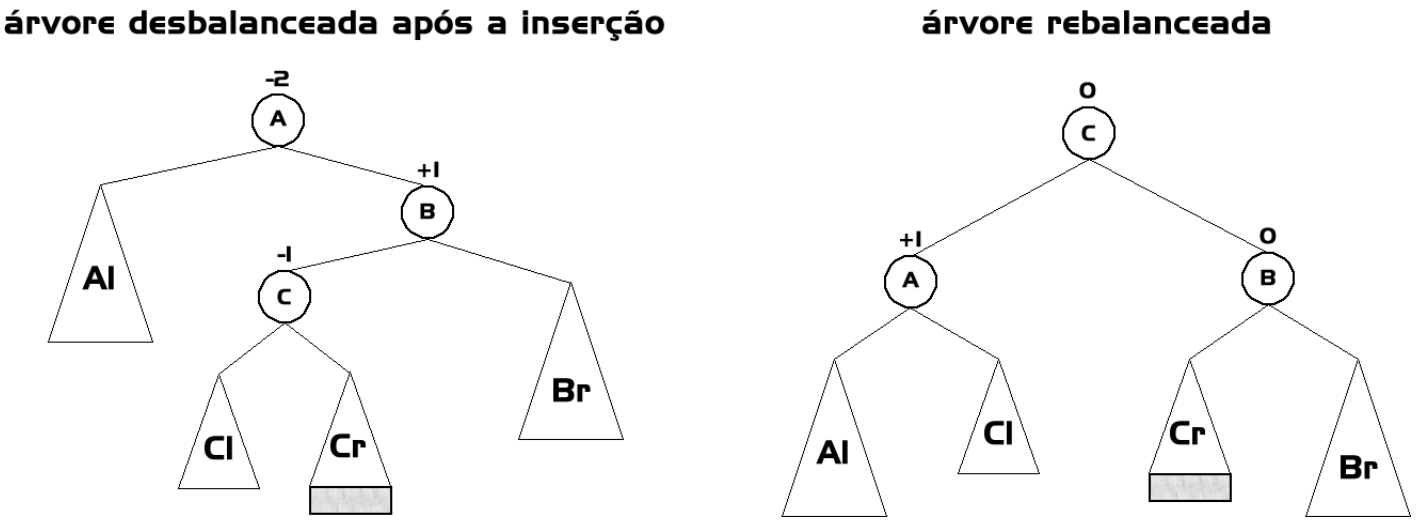
```
Node *auxA = raiz->left;
Node *auxB = auxA->right;
auxA->right = auxB->left;
auxB->left = auxA;
raiz->left = auxB->right;
auxB->right = raiz;
raiz = auxB;
```



- Rotação RL: caso 1

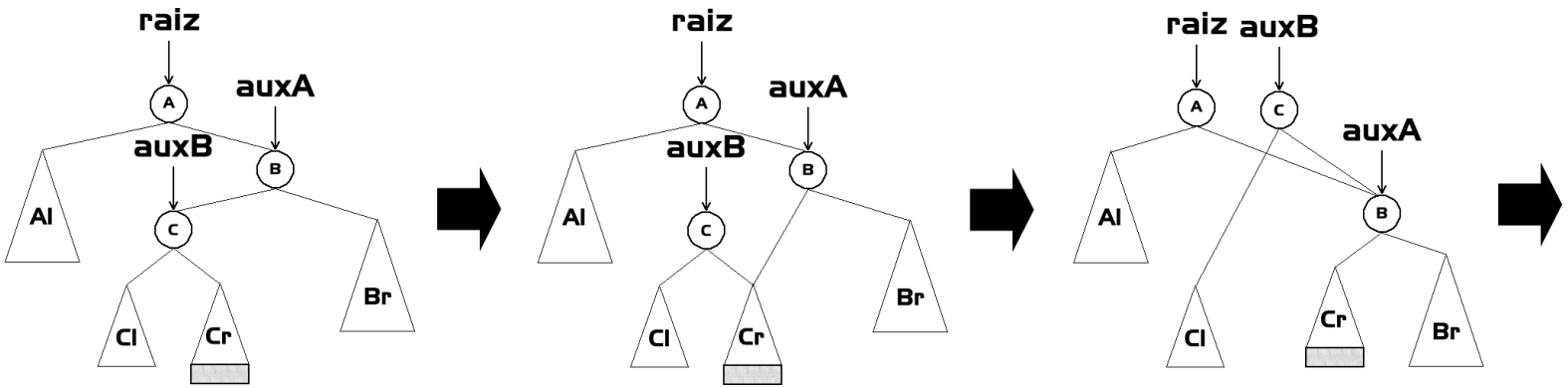


- Rotação RL: caso 2



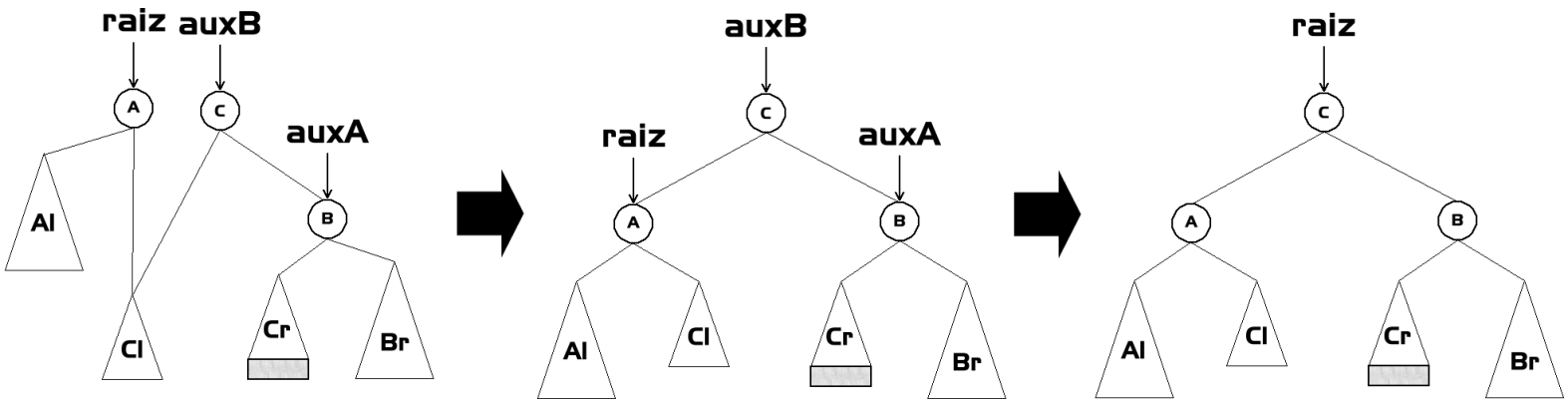
- Rotação RL

```
Node *auxA = raiz->right;
Node *auxB = auxA->left;
auxA->left = auxB->right;
auxB->right = auxA;
raiz->right = auxB->left;
auxB->left = raiz;
raiz = auxB;
```



- Rotação RL

```
Node *auxA = raiz->right;
Node *auxB = auxA->left;
auxA->left = auxB->right;
auxB->right = auxA;
raiz->right = auxB->left;
auxB->left = raiz;
raiz = auxB;
```



- A inserção e a remoção de itens em árvores AVL são realizadas da mesma forma que em árvores binárias de busca apresentadas na aula anterior
  - A diferença é que pode ser necessário rebalanceamento da árvore após essas operações
- A operação de busca, inserção e remoção tem a complexidade de tempo $O(\log n)$
- Os códigos de inserção e de remoção em árvores AVL estão disponíveis em:
  `https://github.com/jefferson-oliva/material_grad`

Árvores AVL

Operações: inserção

```
Node rotateL(Node *raiz){
    Node *auxA = raiz->left, *auxB;

    if (auxA->fb == +1){ // Rotação LL
       raiz->left = auxA->right;
       auxA->right = raiz;
       raiz->fb = 0;
       raiz = auxA;
    }else{ Rotação RL, pois fb será negativo
       auxB = auxA->right;
       auxA->right = auxB->left;
       auxB->left = auxA;
       raiz->left = auxB->right;
       auxB->right = raiz;

       // Se a rotação LR foi para o caso 1
       if (auxB->fb == +1) raiz->fb = -1;
       else raiz->fb = 0;

       // Se a rotação LR foi para o caso 2
       if (auxB->fb == -1) auxA->fb = +1;
       else auxA->fb = 0;

       raiz = auxB;
    }
    return tree;
}
```

Árvores AVL

Operações: inserção

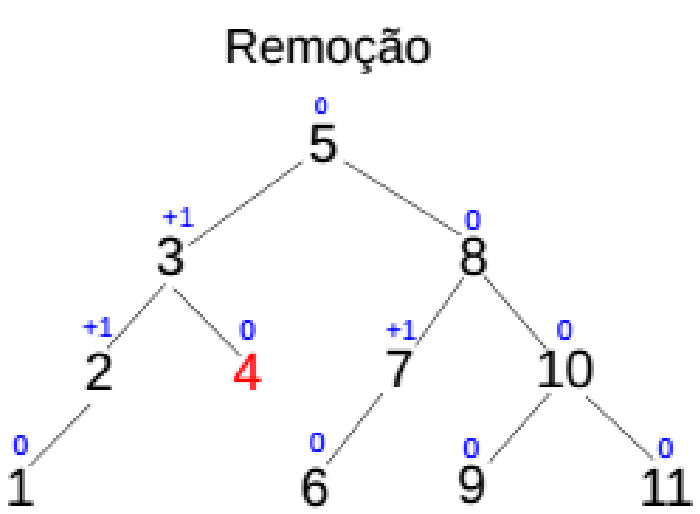
```
Node* rotateR(Node *raiz){
    Node *auxA = raiz->right, *auxB;

    if (auxA->fb == -1){ // Rotação RR
       raiz->right = auxA->left;
       auxA->left = raiz;
       raiz = auxA;
    }else{ // Rotação RL
       auxB = auxA->left;
       auxA->left = auxB->right;
       auxB->right = auxA;
       raiz->right = auxB->left;
       auxB->left = raiz;

       // Se a rotação RL foi para o caso 1
       if (auxB->fb == -1) raiz->fb = +1;
       else raiz->fb = 0;

       // Se a rotação RL foi para o caso 1
       if (auxB->fb == +1) auxA->fb = -1;
       else auxA->fb = 0;

       raiz = auxB;
    }
    return tree;
}
```

Árvores AVL

Operações: inserção

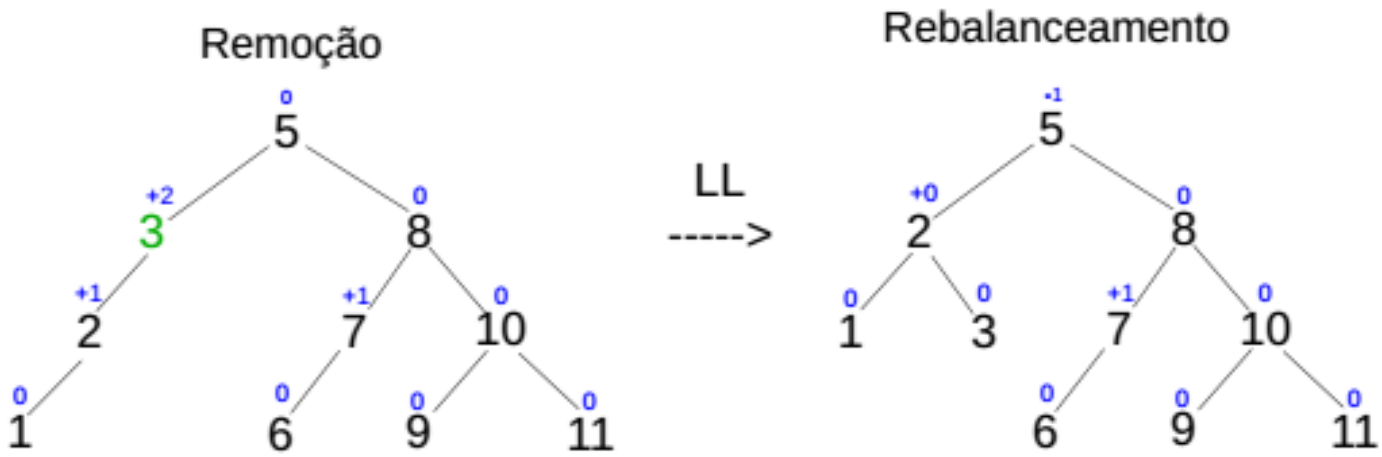
```
void inserir(Node* raiz, int value, int *grown){
    if(tree == NULL){
      tree = criar(value);
      *grown = 1;
    }else if (value < tree->item){
      tree->left = inserir(tree->left, value, grown);
      if (*grown){ // verificar se aumentou a árvore pelo lado esquerdo
        switch (tree->fb){
          case -1:  tree->fb = 0; *grown = 0; break;
          case 0:  tree->fb = +1; break
          case +1:  tree = rotateL(tree); tree->fb = 0; *grown = 0;
        }
      }
    }else if (value > tree->item){
      tree->right = inserir(tree->right, value, grown);
      if (*grown){
        switch (tree->fb){ // verificar se aumentou a árvore pelo lado direto
          case +1:  tree->fb = 0; *grown = 0; break;
          case 0:  tree->fb = -1; break;
          case -1:  tree = rotateR(tree); tree->fb = 0; *grown = 0;
        }
      }
    }
    return tree;
}
```

- Exemplo
  - Remoção do item 4

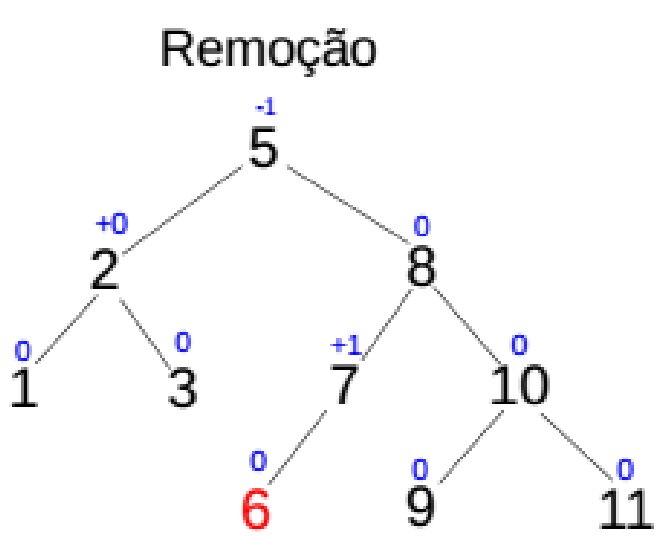


Rebalanceamento

- Exemplo
  - Remoção do item 4

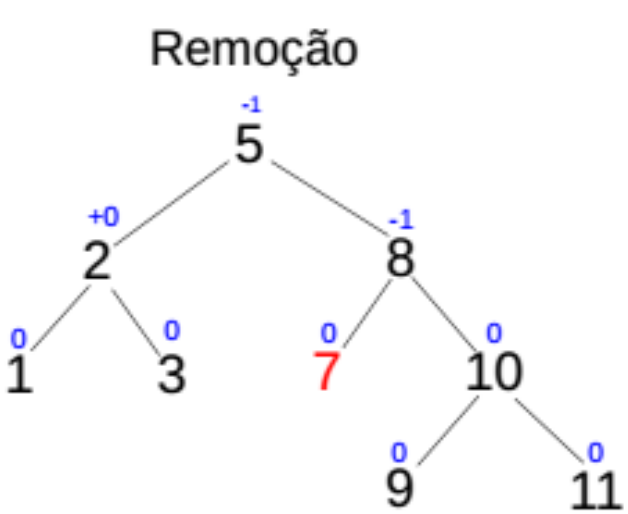


- Exemplo
  - Remoção do item 6



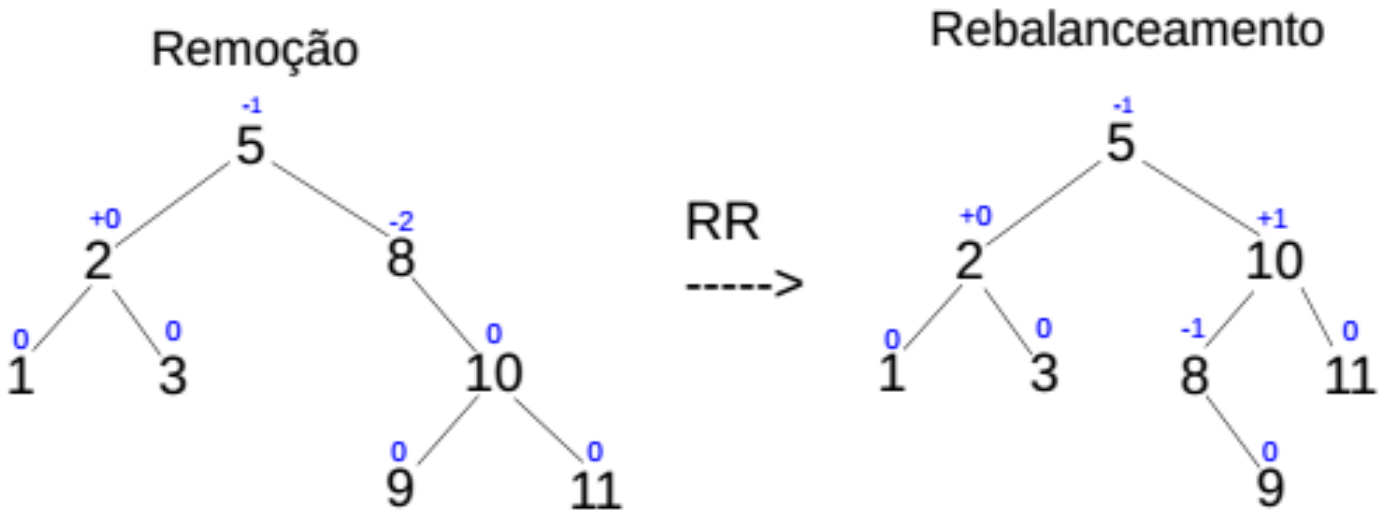
Rebalanceamento

- Exemplo
  - Remoção do item 7



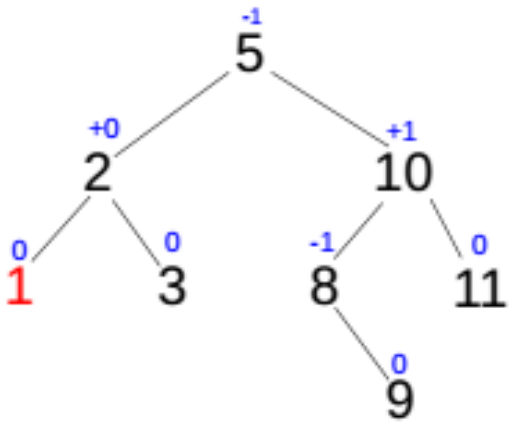
Rebalanceamento

- Exemplo
  - Remoção do item 7



- Exemplo
  - Remoção do item 1

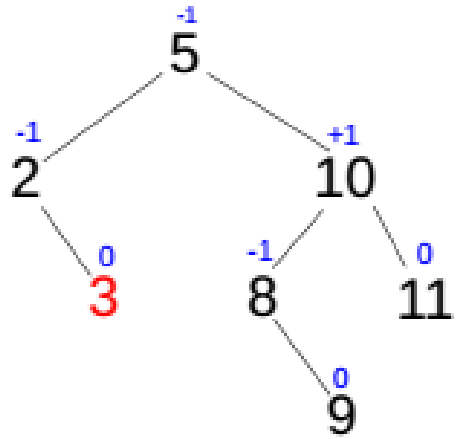
Remoção



Rebalanceamento

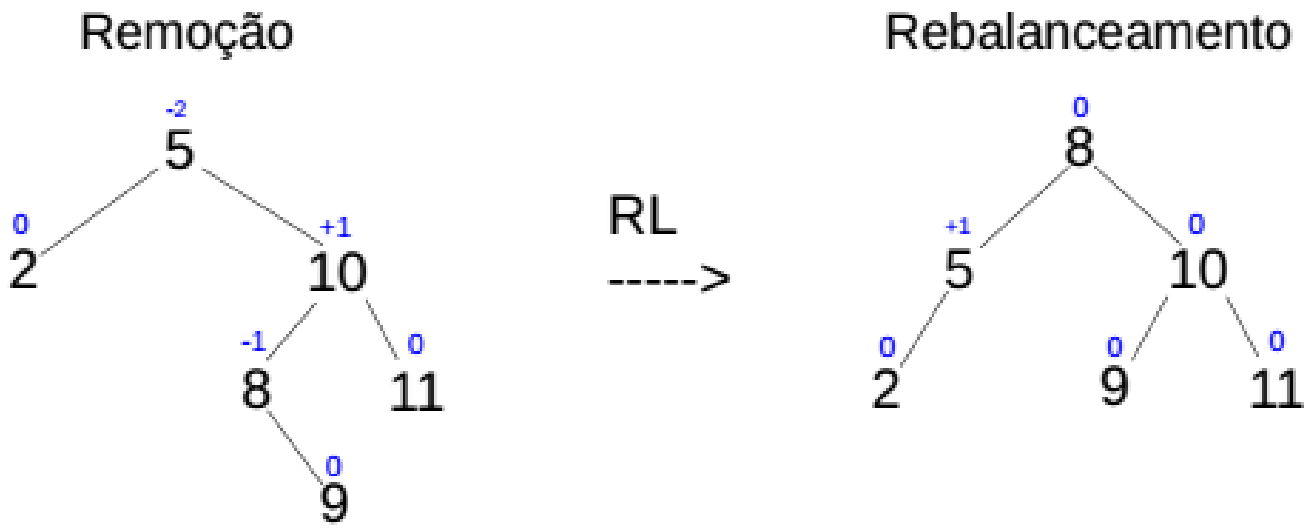
- Exemplo
  - Remoção do item 3

Remoção



Rebalanceamento

- Exemplo
  - Remoção do item 3



Árvores AVL

Operações: remoção

```
Node* rotateLRM(Node *tree, int *reduced){
    Node *auxA, *auxB;
    switch (tree->fb){
       case +1:  tree->fb = 0; break; // AVL balanceada
       case 0:  tree->fb = -1; *reduced = 0; break;// AVL balanceada
       case -1:
          auxA = tree->right;
          if (auxA->fb <= 0){ // rotação RR
             tree->right = auxA->left;
             auxA->left = tree;
             if(auxA->fb == 0){
                tree->fb = -1; auxA->fb = +1; *reduced = 0;
             }else
                tree->fb = auxA->fb = 0;
                tree = auxA;
          }else{ // Rotação RL
             auxB = auxA->left;
             auxA->left = auxB->right;
             auxB->right = auxA;
             tree->right = auxB->left;
             auxB->left = tree;
             if (auxB->fb == -1) tree->fb = +1; else tree->fb = 0;
             if (auxB->fb == +1) auxA->fb = -1; else auxA->fb = 0;
             tree = auxB;
             auxB->fb = 0;
          }
    }
    return tree;
}
```

Árvores AVL

Operações: remoção

```
Node* rotateRRM(Node *tree, int *reduced){
    Node *auxA, *auxB;
    switch (tree->fb){
       case -1:  tree->fb = 0; *reduced = 0; break;
       case 0:  tree->fb = 1; break;
       case +1:
          auxA = tree->left;
          if (auxA->fb >= 0){ // rotação LL
             tree->left = auxA->right;
             auxA->right = tree;
             if(auxA->fb == 0){
                tree->fb = +1; auxA->fb = -1; *reduced = 0;
             }else
                tree->fb = auxA->fb = 0;
                tree = auxA;
          }else{ // Rotação LR
             auxB = auxA->right;
             auxA->left = auxB->left;
             auxB->left = auxA;
             tree->left = auxB->right;
             auxB->right = tree;
             if (auxB->fb == +1) tree->fb = -1; else tree->fb = 0;
             if (auxB->fb == -1) auxA->fb = +1; else auxA->fb = 0;
             tree = auxB;
             auxB->fb = 0;
          }
    }
    return tree;
}
```

Árvores AVL

Operações: remoção

```
Node* remover(Node* tree, int valor, int *reduced){
    Node *aux, *auxP, *auxF;
    if (tree != NULL){
      if (valor < tree->item){
        tree->left = remover(tree->left, valor, reduced);
        if (*reduced) tree = rotateLRM(tree, reduced);
      }else if (valor > tree->item){
        tree->right = remover(tree->right, valor, reduced);
        if (*reduced) tree = rotateRRM(tree, reduced);
      }else{
        aux = tree;
        if (aux->left == NULL) tree = tree->right;
        else if (aux->right == NULL) tree = tree->left;
        else{
          auxF = auxP = aux->right;
          while (auxF->left != NULL){
            auxP = auxF; auxF = auxF->left;
          }
          if (auxP != auxF){
            auxP->left = auxF->right;
            auxF->left = aux->left;
          }
          auxF->right = aux->right;
          tree = auxF;
        }
        *reduced = 1;
        free(aux);
      }
    }
    return tree;
}
```

Referências I


Baranauskas, J. A.
Árvores AVL – Algoritmos e Estruturas de Dados I.
Slides. Ciência da Computação FFCLRP-USP, Ribeirão Preto, 2013.


Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C.
Introduction to Algorithms.
Third edition, The MIT Press, 2009.


Marin, L. O.
Árvores AVL. AE23CP – Algoritmos e Estrutura de Dados II.
Slides. Engenharia de Computação. Dainf/UTFPR/Pato Branco, 2017.


Szwarcfiter, J.; Markenzon, L.
Estruturas de Dados e Seus Algoritmos.
LTC, 1994.

Referências II


Tenenbaum, A.; Langsam, Y.
Estruturas de Dados usando C.
Pearson, 1995.


Ziviani, N.
Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.
Thomson, 2007.