

Morfologia Matemática

Prof. Jefferson T. Oliva
jeffersonoliva@utfpr.edu.br

Processamento de Imagens
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco



This work is licensed under a Creative Commons “Attribution-ShareAlike 4.0 International” license.



- Operações Morfológicas
- Algoritmos Morfológicos Básicos
- Operações Morfológicas em Tons de Cinza

- A palavra morfologia denota um ramo da biologia que lida com a forma e a estrutura de animais e plantas
- A morfologia matemática serve como ferramenta para extrair componentes da imagem (estrutura e forma) que são úteis para a descrição e representação
 - Pode ser aplicada no pré- e pós-processamento de imagens
- Transformadas morfológicas são geralmente aplicadas em imagens binárias e são baseadas nas formas
 - Sua aplicação pode ser estendida para imagens em tonalidades de cinza
- A operação morfológica é focada na estrutura geométrica dos objetos da imagem

Operações Morfológicas

- Uma imagem binária pode ser completamente descrita pelo conjunto de todos seus pixels pretos ou brancos
- Os conjuntos desses pixels são membros do espaço bidimensional de números inteiros Z^2
 - Cada elemento é definido pelas coordenadas (x, y) , também denominadas componentes
- Para imagens em escalas de cinza, os conjuntos estão em Z^3 , sendo dois componentes para coordenadas e um para a tonalidade de cinza

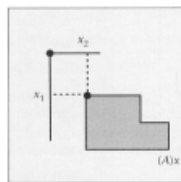
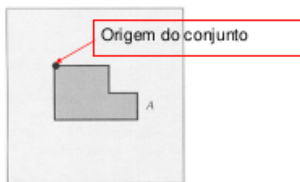
Operações Morfológicas

Definições Básicas

- Sejam A e B conjuntos de Z^2 , com componentes:
 - $a = (a_1, a_2)$
 - $b = (b_1, b_2)$
- Considere também:
 - $x = (x_1, x_2)$

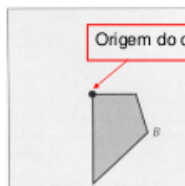
- Translação de A por x

$$(A)_x = \{c \mid c = a + x, \text{ para } a \in A\}$$

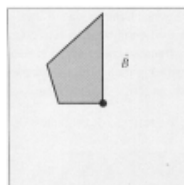


- Reflexão de B

$$\hat{B} = \{x \mid x = -b, \text{ para } b \in B\}$$

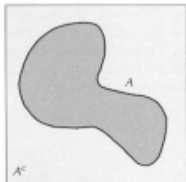


Origem do conjunto



- Complemento do conjunto A

$$A^c = \{x | x \notin A\}$$



Operações Morfológicas

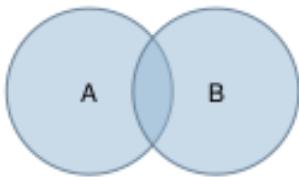
Definições Básicas

- Interseção de A e B : compõe o conjunto de pixels pertencentes a ambos conjuntos

$$A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

- União de A e B : compõe o conjunto de pixels pertencentes a A ou B

$$A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

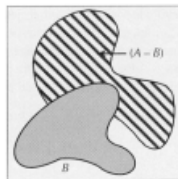
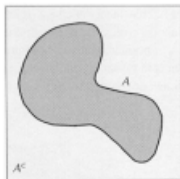


Operações Morfológicas

Definições Básicas

- Diferença entre dois conjuntos A e B : conjunto de pixels que pertence a um, mas não ao outro

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\} = A \cap B^c$$



- Comandos *numpy* (Python) para realizar operações apresentadas até o momento
 - Complemento: *np.bitwise_not(A)* ou $\sim A$
 - Interseção: *np.bitwise_and(A, B)*
 - União: *np.bitwise_or(A, B)*
 - Diferença: *np.bitwise_and(A, $\sim B$)*

Operações Morfológicas

Definições Básicas

- Uma operação morfológica binária é determinada a partir da vizinhança examinada ao redor do ponto central
- Essa vizinhança é definida por um conjunto bem definido B , chamado de elemento estruturante
- Exemplos de operações morfológicas
 - Erosão
 - Dilatação
 - Abertura
 - Fechamento

- Denotada por $A \ominus B$, a erosão é uma transformação morfológica que combina dois conjuntos usando vetores de subtração

$$A \ominus B = \{z | (B)_z \subseteq A\}$$

- onde
 - A e B são conjuntos de Z^2 (imagens binárias)
 - A : imagem operada
 - B : elemento estruturante
 - Sua forma define como ocorrerá a erosão
 - $(B)_x$: translação de B por $z = (z_1, z_2)$

$$(B)_x = \{x | x = b + z \text{ para } b \in B\}$$

- Aplicação: remoção de componentes



Operações Morfológicas

Erosão

- Dada a imagem A e dado o elemento estruturante B , calcular $A \ominus B$

$$A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$



$$B = \{(0,0), (0,1)\}$$



- B_x quando posicionado e centrado no pixel x de A deve estar totalmente contido em A
 - Nesse caso, dizemos que o pixel é relevante



$$A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$



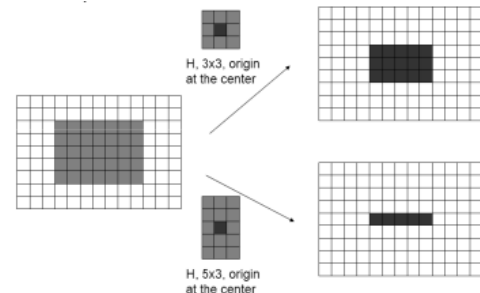
$$B = \{(0,0), (0,1)\}$$

a	B	a + b	
(1,1)	+[(0,0), (0,1)]	= [(1,1), (1,2)]	→ (1,1) ∈ A ⊖ B
(1,2)	+[(0,0), (0,1)]	= [(1,2), (1,3)]	→ (1,2) ∉ A ⊖ B
(2,1)	+[(0,0), (0,1)]	= [(2,1), (2,2)]	→ (2,1) ∈ A ⊖ B
(2,2)	+[(0,0), (0,1)]	= [(2,2), (2,3)]	→ (2,2) ∉ A ⊖ B



$$A \ominus B$$

- Dado a imagem A e o elemento estruturante B , calcular $A \ominus B$



- Efeitos da erosão:
 - Redução de partículas
 - Eliminação de componentes menores que o elemento estruturante
 - Aumento de buracos
 - Possibilidade de separação de componentes conectados



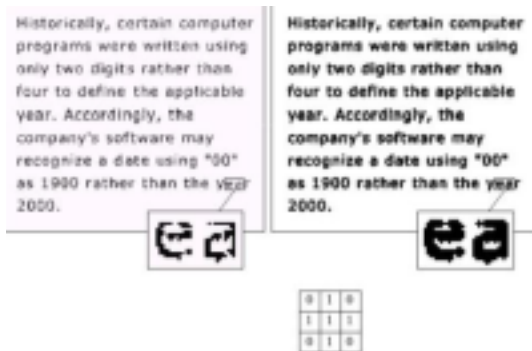
- Dada por $A \oplus B$, a dilatação combina dois conjuntos por meio de adição vetorial

$$A \oplus B = \{z | [(\hat{B})_z \cap A] \subseteq A\}$$

- onde
 - A e B são conjuntos de Z^2 (imagens binárias)
 - A : imagem operada
 - B : elemento estruturante
 - Sua forma define como ocorrerá a dilatação
 - $(\hat{B})_z$: reflexão de B e translação por $z = (z_1, z_2)$

$$(\hat{B})_z = \{x | x = -b + z \text{ para } b \in B\}$$

- Aplicação: preenchimento de espaço (gap fillign)



Operações Morfológicas

Dilatação

- Dada a imagem A e dado o elemento estruturante B , $A \oplus B$

$$A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$



$$B = \{(0,0), (0,1)\}$$



Operações Morfológicas

Dilatação

- Dada a imagem A e dado o elemento estruturante B , $A \oplus B$

$$A \oplus B = \{A + [(0,0)]\} \cup \{A + [(0,1)]\}$$

$$A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$



$$\{A + [(0,0)]\} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

$$(1,1) + (0,0) = (1,1)$$

$$(1,2) + (0,0) = (1,2)$$

$$(2,1) + (0,0) = (2,1)$$

$$(2,2) + (0,0) = (2,2)$$



A translação de qualquer pixel por $(0,0)$ não altera sua posição

- Dada a imagem A e dado o elemento estruturante B , $A \oplus B$

$$A \oplus B = \{A + [(0,0)]\} \cup \{A + [(0,1)]\}$$

$$A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$



$$\{A + [(0,1)]\} = \{(1,2), (2,2), (1,3), (2,3)\}$$

$(1,1) + (0,1) = (1,2)$
$(1,2) + (0,1) = (1,3)$
$(2,1) + (0,1) = (2,2)$
$(2,2) + (0,1) = (2,3)$



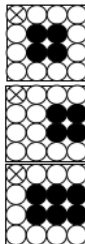
- Dada a imagem A e dado o elemento estruturante B , $A \oplus B$

$$A \oplus B = \{A + [(0,0)]\} \cup \{A + [(0,1)]\}$$

$$\{A + [(0,0)]\} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

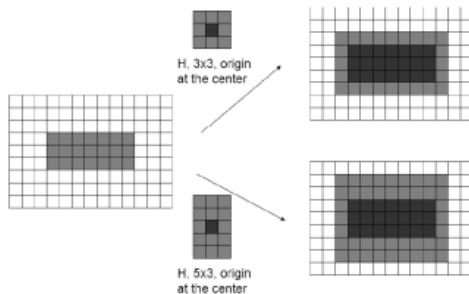
$$\{A + [(0,1)]\} = \{(1,2), (2,2), (1,3), (2,3)\}$$

$$A \oplus B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$$



Operações Morfológicas

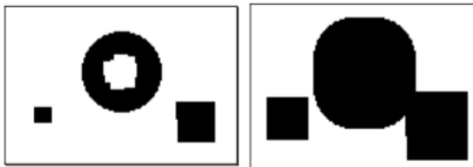
Dilatação



Operações Morfológicas

Dilatação

- Efeitos da dilatação
 - Aumento de partículas
 - Preenchimento de buracos
 - Conexão de componentes próximos



Operações Morfológicas

Abertura e fechamento

- Abertura: executa a erosão seguida pela dilatação utilizando o mesmo elemento estruturante
 - A erosão é aplicada com a finalidade de eliminação de pixels indesejados
 - A dilatação é utilizada para a redução dos possíveis efeitos indesejáveis da erosão, como perda de informações relevantes
- Fechamento: executa a operação de dilatação, e seguida, erosão
 - A dilatação pode ser aplicada para o preenchimento de pequenas lacunas em imagens
 - A operação de erosão tem o propósito de amenizar o principal efeito negativo da dilatação: possibilidade de geração de pequenos grupos de pixels indesejados

Operações Morfológicas

Abertura e fechamento

- A abertura elimina pequenos componentes e suaviza o contorno
- A abertura de uma imagem A pelo elemento estruturante B , representada por $A \circ B$, é definida como

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$



- Efeitos da abertura
 - Não devolve, de forma geral, o conjunto inicial
 - Separa componentes
 - Elimina pequenos componentes
 - O conjunto aberto é mais regular que o conjunto inicial, mas menos rico em detalhes

Operações Morfológicas

Abertura e fechamento

- O fechamento fecha pequenos buracos e conecta componentes
- O fechamento de uma imagem A pelo elemento estruturante B , representado por $A \bullet B$, é definido como

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$



- Efeitos do fechamento
 - Preenche buracos no interior dos componentes, inferior em tamanho em relação ao elemento estruturante
 - Conecta componentes próximos
 - O conjunto fechado é mais regular que o conjunto inicial, mas menos rico em detalhes

Operações Morfológicas

Abertura e fechamento

- Exemplo de abertura em uma imagem com ruído
 - Aplicando uma erosão, o ruído é eliminado mas os traços da digital são afinados
 - Com a abertura, reconstruímos grande parte dos traços, dos quais, alguns foram desconectados



$$A \ominus B$$



$$(A \ominus B) \oplus B = A \circ B$$

Operações Morfológicas

Abertura e fechamento

- Exemplo de fechamento
 - Grande parte dos traços são reconectados sem mudanças na estrutura dos mesmo



Dilatação



Fechamento

Algoritmos Morfológicos Básicos

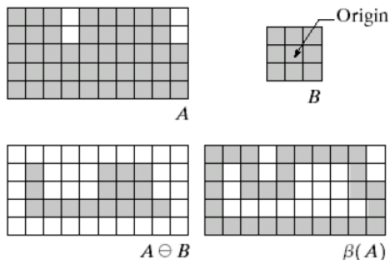
- Em imagens binárias, a principal aplicação de morfologia é a extração de componentes da imagem que sejam úteis na representação e na descrição de formas, tais como:
 - Extração de fronteiras
 - Preenchimento de regiões
 - Componentes conectados
 - Esqueletização

Algoritmos Morfológicos Básicos

Extração de fronteiras

- A fronteira de uma imagem A é obtida por meio da erosão de A por B , e posterior subtração dessa erosão do próprio A

$$\beta(A) = A - (A \ominus B)$$



Algoritmos Morfológicos Básicos

Extração de fronteiras

- Exemplo



Algoritmos Morfológicos Básicos

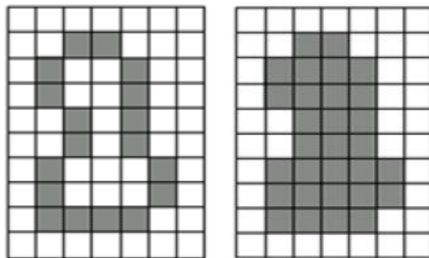
Extração de fronteiras

- Como utilizamos uma operação de erosão, temos as borda internas da forma
- O mesmo pode ser feito com uma operação de dilatação
 - Bordas internas: $\beta(A) = A - (A \ominus B)$
 - Bordas externas: $\beta(A) = (A \oplus B) - A$

Algoritmos Morfológicos Básicos

Preenchimento de regiões

- A partir de um ponto dentro de uma região definida por uma borda/fronteira, esse algoritmo busca preencher completamente a região até a borda



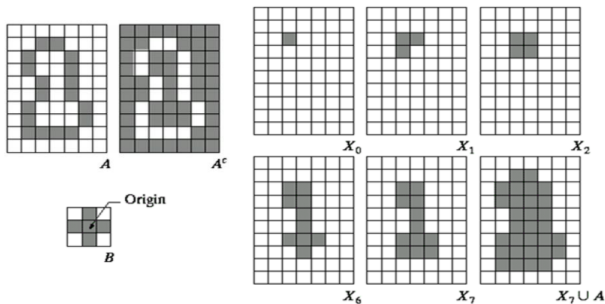
Algoritmos Morfológicos Básicos

Preenchimento de regiões

- $X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c$, para $k = 1, 2, 3, \dots$
 - onde:
 - X_k : ponto dentro da fronteira
 - B : elemento estruturante
 - A^c : complemento de A
 - Essa equação é aplicada repetidamente até que X_k seja igual a X_{k-1}
 - Por fim, o resultado é unido com a fronteira original

Algoritmos Morfológicos Básicos

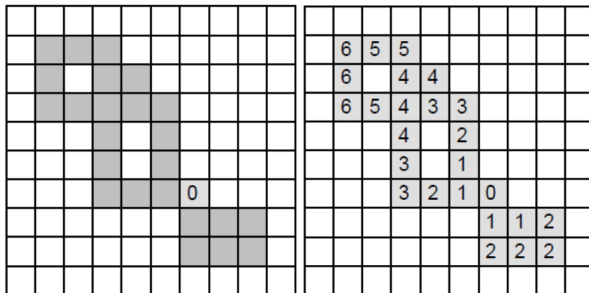
Preenchimento de regiões



Algoritmos Morfológicos Básicos

Extração de componentes conectados

- A partir de um ponto p dentro de um componente conectado Y , esse algoritmo encontra todos os elementos de Y



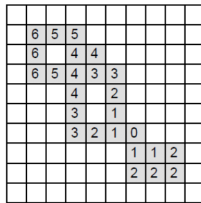
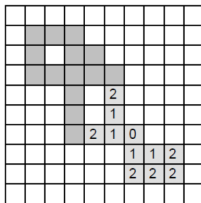
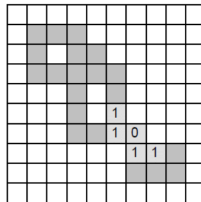
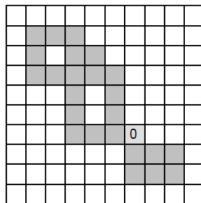
Algoritmos Morfológicos Básicos

Extração de componentes conectados

- $X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A$, para $k = 1, 2, 3, \dots$
 - onde:
 - X_k : ponto dentro da fronteira
 - B : elemento estruturante
 - Essa equação é aplicada repetidamente até que X_k seja igual a X_{k-1}

Algoritmos Morfológicos Básicos

Extração de componentes conectados



Algoritmos Morfológicos Básicos

Esqueletização

- O esqueleto de uma imagem é uma versão afinada da mesma
- Equidistante das bordas
- Algumas características são mais fáceis de ser encontradas no esqueleto, como direção, pontos de curvatura, etc



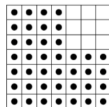
- Tabela de operações usada na construção do esqueleto

Erosão	Abertura	Diferenças
A	$A \circ B$	$A - (A \circ B)$
$A \ominus B$	$(A \ominus B) \circ B$	$(A \ominus B) - ((A \ominus B) \circ B)$
$A \ominus 2B$	$(A \ominus 2B) \circ B$	$(A \ominus 2B) - ((A \ominus 2B) \circ B)$
$A \ominus 3B$	$(A \ominus 3B) \circ B$	$(A \ominus 3B) - ((A \ominus 3B) \circ B)$
\vdots	\vdots	\vdots
$A \ominus kB$	$(A \ominus kB) \circ B$	$(A \ominus kB) - ((A \ominus kB) \circ B)$

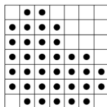
- Sequência de k erosões com o mesmo elemento estruturante $A \ominus kB$
- O processo acaba quando $(A \ominus B) \circ B = \emptyset$
- O esqueleto é a união de todas as diferenças

Algoritmos Morfológicos Básicos

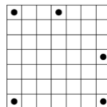
Esqueletização



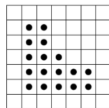
A



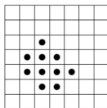
$A \circ B$



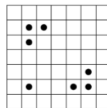
$A - (A \circ B)$



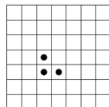
$A \ominus B$



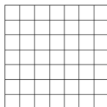
$(A \ominus B) \circ B$



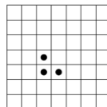
$(A \ominus B) - ((A \ominus B) \circ B)$



$A \circ 2B$



$(A \circ 2B) \circ B$



$(A \circ 2B) - ((A \circ 2B) \circ B)$



Operações Morfológicas em Tons de Cinza

- Dilatação em nível de cinza

$$(f \oplus b)(s, t) = \max\{(s - x, t - y) + b(x, y) | (s - x, t - y) \in D_f; (x, y) \in D_b\}$$

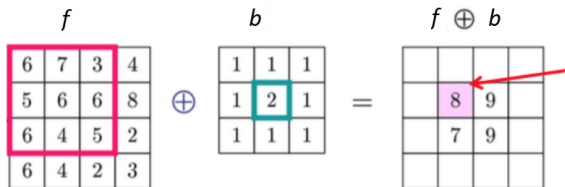
- onde:

- $s - x$ e $t - y$: parâmetros de deslocamento
- D_f : domínio de f (imagem em escala de cinza)
- D_b : domínio de b (componente estruturante)
- Efeito geral na imagem (depende dos valores em b)
 - Imagem resultante tende a ser mais clara que a de entrada
 - Detalhes escuros são reduzidos ou eliminados

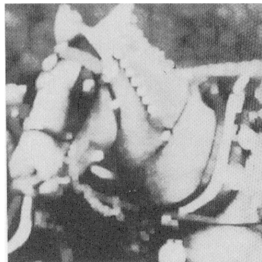
- Algoritmo de dilatação
 - 1 Posiciona-se a origem do elemento estruturante sobre o primeiro pixel da imagem a ser dilatada
 - 2 Calcula-se a soma de cada par correspondente de valores de pixels do elemento estruturante e a imagem
 - 3 Acha-se o valor máximo de todas essas somas, e armazena-se o pixel correspondente na imagem de saída para este valor, na posição da origem
 - 4 Repete-se este processo para cada pixel da imagem a ser dilatada

- Dilatação em nível de cinza

$$(f \oplus b)(s, t) = \max\{(s - x, t - y) + b(x, y) | (s - x, t - y) \in D_f; (x, y) \in D_b\}$$



- Dilatação em nível de cinza (exemplo)



Operações Morfológicas em Tons de Cinza

- Operações morfológicas em imagens representadas em escalas de cinza
 - Similar à convolução 2D
 - A operação *max* substitui as somas da convolução e a adição os produtos da convolução
 - O elemento estruturante podem ser negativos
 - Os valores da imagem resultante devem ser normalizados
 - Valores negativos podem ser alterados para zero (*underflow*)
 - A imagem inteira poderia ter seus valores aumentados para que o menor valor de pixel fosse zero mantendo os valores relativos entre os pixels

- Erosão em nível de cinza

$$(f \ominus b)(s, t) = \max\{(s + x, t + y) - b(x, y) | (s + x, t + y) \in D_f; (x, y) \in D_b\}$$

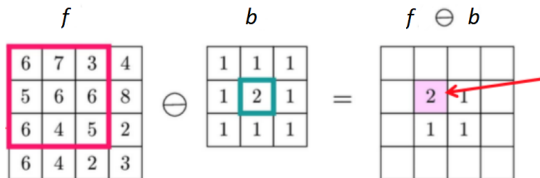
- Efeito geral na imagem (depende dos valores em b)
 - Imagem resultante tende a ser mais escura que a de entrada
 - Detalhes claros são reduzidos ou eliminados

- Algoritmo de erosão
 - 1 Posiciona-se a origem do elemento estruturante sobre o primeiro pixel da imagem que sofre erosão
 - 2 Calcula-se a diferença de cada par correspondente de valores de pixels do elemento estruturante e da imagem
 - 3 Acha-se o valor mínimo de todas essas diferenças, e armazena-se o pixel correspondente na imagem de saída para este valor
 - 4 Repete-se este processo para cada pixel da imagem que sofre erosão

Operações Morfológicas em Tons de Cinza

- Erosão em nível de cinza

$$(f \ominus b)(s, t) = \max\{(s + x, t + y) - b(x, y) \mid (s + x, t + y) \in D_f; (x, y) \in D_b\}$$



Operações Morfológicas em Tons de Cinza

- Erosão em nível de cinza



- Outros operadores
 - Abertura
 - Fechamento
 - Suavização morfológica
 - Abertura morfológica seguida de fechamento
 - Remoção ou atenuação tanto de artefatos claros como escuros ou ruídos
 - Transformada *top-hat*
 - Enfatiza o detalhe na presença de sombreamento
 - Etc



Gonzalez, R. C.; Woods R. E.
Processamento de imagens digitais.
Editora Blucher, 2000.



Oliveira, L. E. S.
Notas de aula – Morfologia Matemática.
UFU. Uberlândia, MG, 2014.



Prateek, J., Millan, E. D., e Vinivius, G.
OpenCV by Example.
Packt Publishing, 2016.



Ren, T. I.
Notas de aula – Processamento de Imagem Morfológica:
morfologia matemática.
UFPE. Recife, SP, 2024.



Vieira, M. A. C.; Costa, A. C.

Notas de aula – Introdução à Visão Computacional:
processamento morfológico.

USP. São Paulo, SP, 2024.



Villán, A. F.

Mastering OpenCV 4 with Python.

Packt Publishing, 2019.



Wiggers, K. L.

Notas de aula – Processamento de Imagens: morfologia
matemática.

UTFPR. Pato Branco, PR, 2024.