

Introdução à Predição de Séries Temporais

Prof. Jefferson T. Oliva

Reconhecimento de Padrões (RC18EE)

Engenharia de Computação

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação (PPGEEC)

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Campus Pato Branco



- Séries Temporais
- Comparação de Séries Temporais
- Redução de Dimensionalidade
- Predição de Séries Temporais
- Avaliação de Modelos de Predição de Séries Temporais

Introdução

- Diversos fenômenos podem ser observados e representados ao longo do tempo, tais como:
 - Sinais biológicos (e.g. batimentos cardíacos)
 - Negócios (e.g. demanda de produtos)
 - Sensoriamento (e.g. monitoramento sísmico)
 - Entre outros
- A análise desses dados tem diversas aplicações, tais como:
 - Compreensão do comportamento temporal
 - Classificação do comportamento temporal
 - Detecção de novidades
 - Predição

- Os dados temporais são analisados em diversos campos:
 - Engenharia
 - Governo
 - Mercado financeiro
 - Meteorologia
 - Negócios
 - Saúde
- Esses dados são representados por **séries temporais**

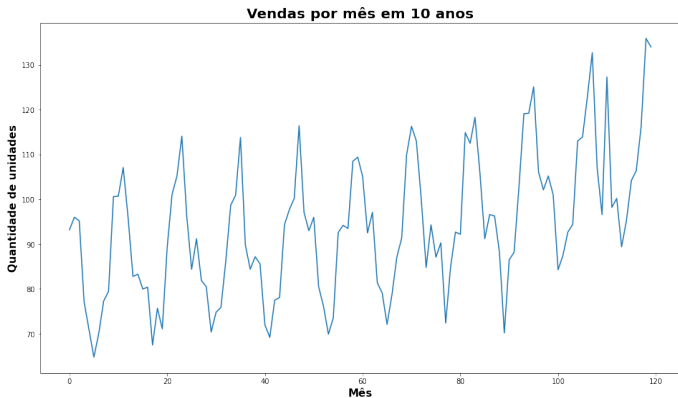
Séries Temporais

Séries Temporais

- Uma série temporal é um conjunto de observações ordenadas no tempo
 - $S = \{S_0, S_1, S_2, \dots, S_n\}$, onde $S_t \in \mathbb{R}$ representa uma observação S_i em um instante de tempo i
- Uma série temporal pode ser:
 - Contínua: os dados são coletados de forma ininterrupta, isto é, continuamente no tempo
 - Discreta: os dados são obtidos em tempos específicos, ou seja, com interrupções
 - Uma série temporal discreta, geralmente, é um segmento de uma série temporal contínua

Séries Temporais

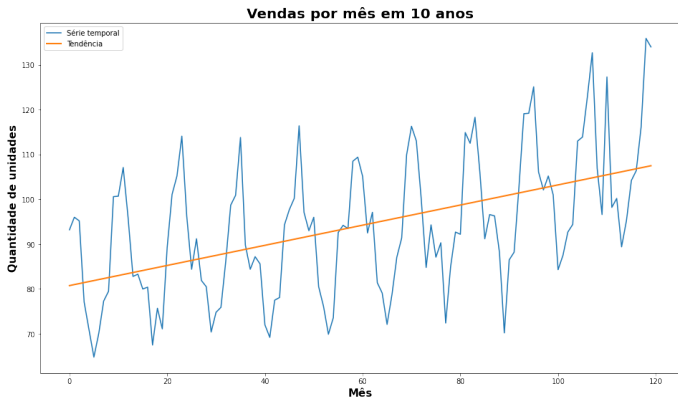
- Exemplo de série temporal



- Uma série temporal também pode ser representada pelos seguintes componentes:
 - Tendência: movimentos regulares desenvolvidos em intervalo de tempo
 - Esse componente possui comportamento unidirecional (crescente ou decrescente)
 - Sazonalidade: possui movimentos periódicos similares e ocorre de forma regular em um período fixo
 - São denominados como padrões
 - Resíduo: movimentos que não pertencentes à sazonalidade e à tendência
 - Comportamento aleatório ou irregular
 - Geralmente são considerados ruídos

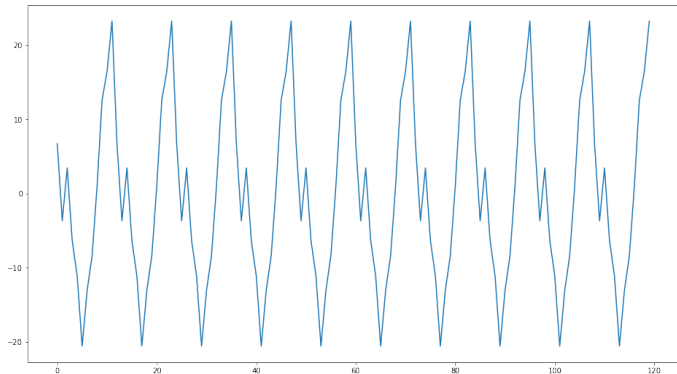
Séries Temporais

- Tendência



Séries Temporais

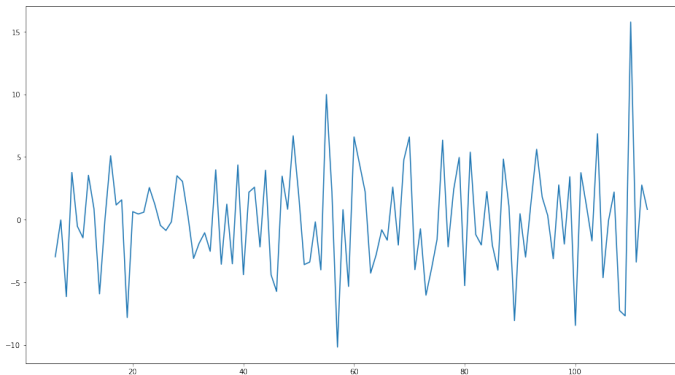
- Sazonalidade



Séries Temporais

- Resíduo

- Exemplo: ruído branco (sinal aleatório), que contém valores aleatórios



Séries Temporais

- Um componente de série temporal no instante t pode ser representado por meio da seguinte equação:
 - $S_t = X_t + Y_t + Z_t$
 - X : tendência
 - Y : sazonalidade
 - Z : resíduo

- Estacionariedade

- Uma série temporal é estacionária se os seus dados oscilam em uma média e variância constantes, ou seja, o comportamento da série não é alterado no decorrer do tempo
- Em algumas aplicações, a propriedade de estacionariedade é indispensável
- Caso a série temporal não seja estacionária, pode ser aplicada a função denominada primeira diferença para torná-la estacionária:

$$S'_t = S_t - S_{t-1}$$

- Alguns testes estatísticos foram propostos para verificar se uma série temporal é estacionária ou não
 - Exemplo: teste de Dickley-Fuller

Séries Temporais

- Séries temporais também podem ser utilizadas em processos relacionados à mineração de dados
 - Agrupamento: definição de grupos de séries temporais de acordo com grau de semelhança
 - Classificação: determinação o grupo em que a série temporal pertence
 - Regressão: relação entre variáveis e predição de valores de séries temporais
 - Regras de associação: descoberta de relações relevantes em bases dados e geração de regras de associação a partir de padrões relevantes de séries temporais

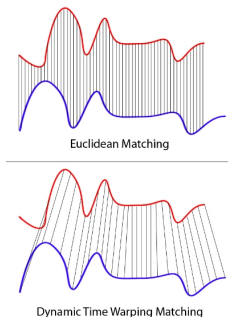
Comparação de Séries Temporais

Comparação de Séries Temporais

- Uma das tarefas fundamentais para o processamento de séries temporais é a determinação de critérios para determinar quão similar são esses dados
- Diversas medidas de similaridade podem ser aplicadas em séries temporais, tais como:
 - Distância euclidiana
 - Distância de Manhattan
 - Distância de Minkowski (norma L_p)
 - *Dynamic time warping* (DTW)

Comparação de Séries Temporais

- *Dynamic time warping* (DTW)
 - Utilizado para mensurar a semelhança entre séries temporais independentemente do tamanho e da variação do tempo
 - É realizada uma busca do melhor alinhamento ponto-a-ponto entre séries temporais



Fonte: <https://www.sflscientific.com/data-science-blog/2016/6/3/dynamic-time-warping-time-series-analysis-ii>

Comparação de Séries Temporais

- *Dynamic time warping* (DTW)

- Dada duas séries temporais $S1$ e $S2$ de tamanho $n1$ e $n2$, respectivamente, o DTW é aplicado nas seguintes etapas:
 - 1 Geração de uma matriz $n1 \times n2$ de distância (e.g. euclidiana)
 - 2 Busca pela rota W que minimize o custo de distância entre duas séries temporais

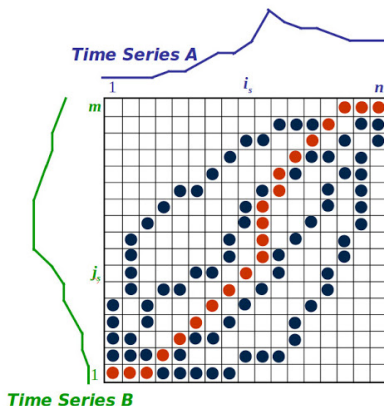
$$W = \{W_1, W_2, \dots, W_L\} \quad (1)$$

$$DTW = \min_W \left\{ \frac{1}{L} * \sqrt{\sum_{i=1}^L W_i} \right\} \quad (2)$$

onde L é o tamanho da rota e $\max(n1, n2) \leq L \leq n1 + n2 - 1$

Comparação de Séries Temporais

- *Dynamic time warping* (DTW)
 - Exemplo de matriz de distâncias, onde os pontos de cor vermelha pertencem à solução ótima



Fonte: <http://ros-developer.com/2017/11/17/>

Redução de Dimensionalidade

Redução de Dimensionalidade

- Séries temporais são comumente caracterizadas pela sua alta dimensionalidade
- Grande quantidade de dados pode acarretar em custo elevado para armazenamento e processamento
- Séries temporais com alta dimensionalidade é um dos grandes obstáculos para a eficiência de vários algoritmos
- A redução da dimensionalidade das séries temporais pode ser desejável em várias aplicações
 - Por mais que os dados temporais sejam simplificados, a complexidade da análise é reduzida e as principais características são mantidas

Redução de Dimensionalidade

- As principais vantagens da redução de dimensionalidade de séries temporais são:
 - Redução do tempo para o processamento dos dados
 - Diminuição das dimensões irrelevantes e redundantes
 - Possibilidade de Melhora no desempenho na detecção de padrões
- Diversos métodos de redução de dimensionalidade foram propostos, dos quais, o *piecewise aggregate approximation* (PAA) é um dos mais conhecidos
 - Várias outras técnicas são baseadas em PAA

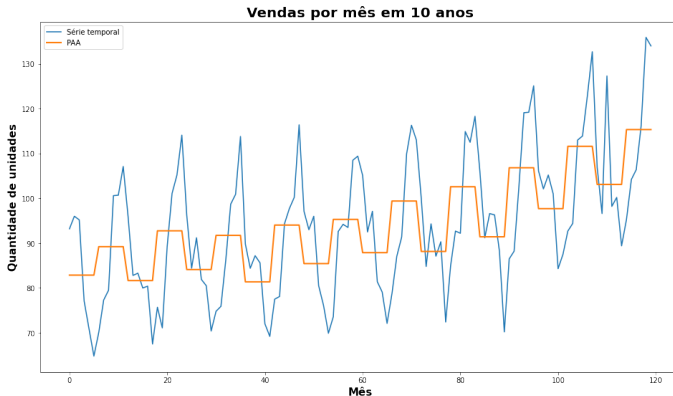
Redução de Dimensionalidade

- *Piecewise aggregate approximation* (PAA)
 - Reduz a dimensionalidade de uma série temporal de tamanho n para uma outra equivalente de tamanho n'
 - O método reduz a dimensionalidade por meio da separação da série temporal em segmentos de mesmo tamanho
 - Em cada segmento é calculada a média aritmética

$$S'_i = \frac{n'}{n} \sum_{j=\frac{n}{n'}*(i-1)+1}^{\frac{n}{n'}*i} S_j \quad (3)$$

Redução de Dimensionalidade

- *Piecewise aggregate approximation (PAA)*
 - Exemplo de série temporal e o respectivo resultado da aplicação do PAA



Predição de Séries Temporais

Predição de Séries Temporais

- Métodos para construção de modelos preditivos a partir de séries temporais podem ser divididos em:
 - Paramétricos: esses métodos assumem que uma série temporal pode ser descrita utilizando um conjunto limitado de parâmetros (e.g. média, desvio-padrão)
 - Não-paramétricos: os parâmetros são estimados sem a consideração de que a série temporal tem alguma estrutura particular
- Exemplos de métodos paramétricos: modelo autorregressivo, médias móveis, ARMA (*autoregressive-moving-average*), ARIMA (*autoregressive integrated moving average*)
- Exemplos de métodos não-paramétricos: máquina de vetores de suporte, redes neurais artificiais, vizinhos mais próximos

Predição de Séries Temporais

- Modelo autorregressivo (AR)

- A partir de um instante t , esse modelo especifica que a saída depende linearmente dos valores anteriores
 - Por exemplo, em um modelo autorregressivo de ordem 1 ($p = 1$), o valor de S_t depende de S_{t-1}
- Um modelo autorregressivo de ordem p , ou $AR(p)$, pode ser definido pela seguinte equação:

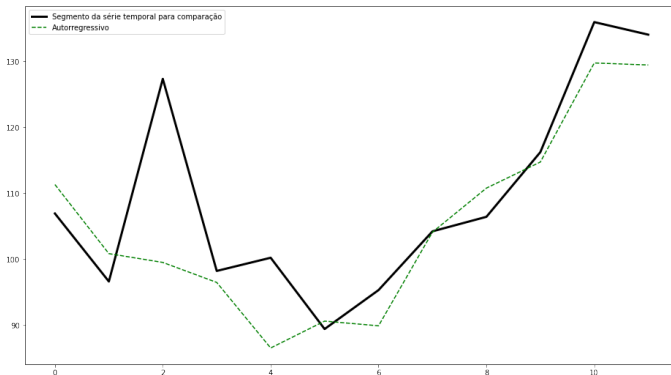
$$S_t = c + \epsilon_t + \sum_{i=1}^p (S_{t-i} * \varphi_i)$$

onde c é uma constante, ϵ é um número aleatório (representação do ruído branco), e φ_i é o i -ésimo parâmetro

Predição de Séries Temporais

- Modelo autorregressivo

- Comparação entre um segmento da série temporal e o resultado de predição pelo modelo autorregressivo



Predição de Séries Temporais

- Médias móveis simples (MM)

- Esse modelo utiliza os q últimos dados da série temporal para a predição do próximo valor
- O valor de q também define a ordem do modelo, que pode ser definido por $MM(q)$
- Um modelo de médias móveis simples pode ser definido pela seguinte equação:

$$S_t = \frac{1}{q} \sum_{i=t-q}^{t-1} S_i$$

Predição de Séries Temporais

- Médias móveis simples (MA – *moving average*)
 - Outra equação para a construção de modelos por médias móveis simples:

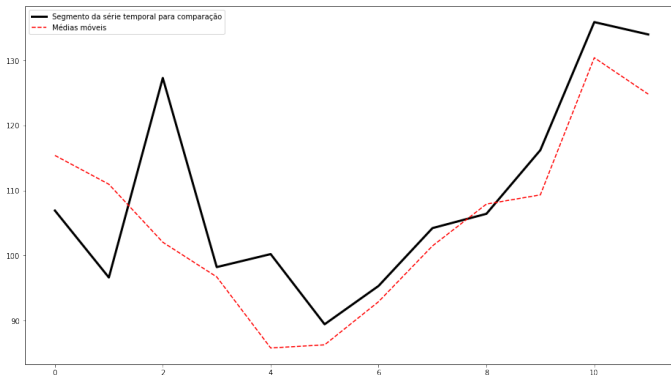
$$S_t = \mu + \epsilon_t + \sum_{i=1}^q (\epsilon_{t-i} * \theta_i)$$

onde μ é o valor esperado (geralmente é atribuído um valor igual a zero) de X_t e θ é o i -ésimo parâmetro do modelo

- Essa equação é utilizada na implementação dos dois próximos métodos de predição

Predição de Séries Temporais

- Médias móveis simples (MA – *moving average*)
 - Comparação entre um segmento da série temporal e o resultado de predição pelo modelo médias móveis



Predição de Séries Temporais

- ARMA (*autoregressive-moving-average*)
 - Modelo auto-regressivo de médias móveis
 - Esse modelo consiste na combinação entre autorregressão e médias móveis
 - Desse modo, ARMA é composto por dois parâmetros: p (ordem da autorregressão) e q (ordem da médias móveis)
 - O modelo ARMA de ordem p e q , ou $ARMA(p, q)$ pode ser definido pela seguinte equação:

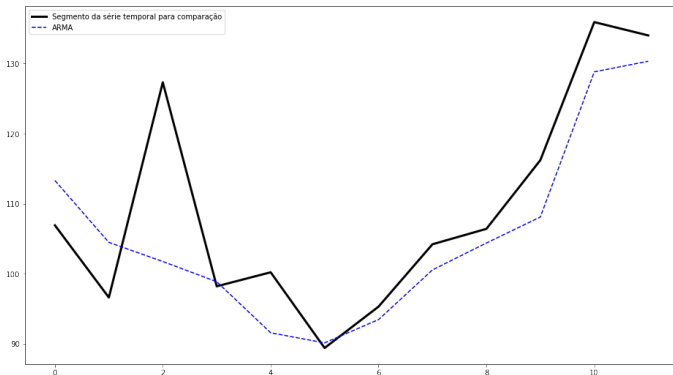
$$S_t = c + \epsilon_t + \sum_{i=1}^p (S_{t-i} * \varphi_i) + \sum_{i=1}^q (\epsilon_{t-i} * \theta_i)$$

Predição de Séries Temporais

- ARMA (*autoregressive-moving-average*)
 - Para $ARMA(p, q)$, temos as seguintes relações:
 - $ARMA(p, 0) = AR(p)$
 - $ARMA(0, q) = MM(q)$
 - No ARMA, os componentes AR e MM se complementam para a geração de um modelo preditivo
 - A principal vantagem do ARMA é a possibilidade de geração de modelos ajustáveis à série temporal utilizando menor quantidade de parâmetros em relação aos métodos AR e MM

Predição de Séries Temporais

- ARMA (*autoregressive-moving-average*)
 - Comparação entre um segmento da série temporal e o resultado de predição pelo modelo ARIMA



Predição de Séries Temporais

- ARIMA (*autoregressive integrated moving average*)
 - Modelo auto-regressivo integrado de médias móveis
 - Generalização do modelo ARMA
 - Um modelo ARIMA é resultado da combinação entre autorregressão de ordem p , integração (operação de diferenciação sucessiva) de ordem d , médias móveis de ordem q
 - Exemplo operação de integração de ordem d :
$$I_t(d) = (S_t - S_{t-1}) - (S_{t-1} - S_{t-2}) - \dots - (S_{t-d+1} - S_{t-d})$$
 - Desse modo, um modelo $ARIMA(p, q, d)$ pode ser estimado pela seguinte equação:

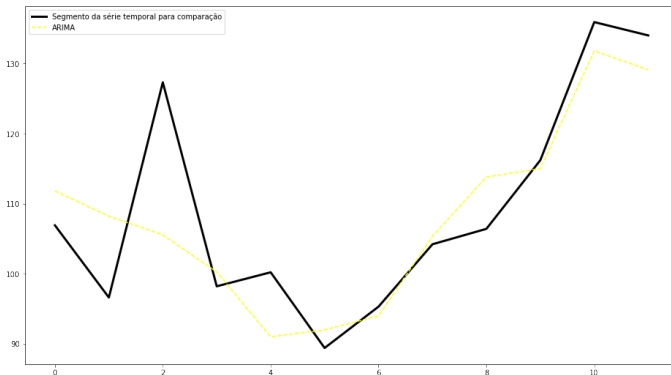
$$S_t = c + \epsilon_t + \sum_{i=1}^p (I_{t-i}(d) * \varphi_i) + \sum_{i=1}^q (\epsilon_{t-i} * \theta_i)$$

Predição de Séries Temporais

- ARIMA (*autoregressive integrated moving average*)
 - Para $ARIMA(p, d, q)$, temos as seguintes relações:
 - $ARIMA(p, 0, 0) = AR(p)$
 - $ARIMA(0, d, 0) = I(d)$
 - $ARIMA(0, 0, q) = MM(q)$
 - $ARIMA(p, 0, q) = ARMA(p, q)$
 - É importante ressaltar que $AR(p)$, $MM(q)$ e $ARMA(p, q)$ são apropriados para séries temporais estacionárias
 - Para lidar com séries não estacionárias, no ARIMA é utilizado um procedimento de integração para assegurar a propriedade de estacionariedade dos dados temporais

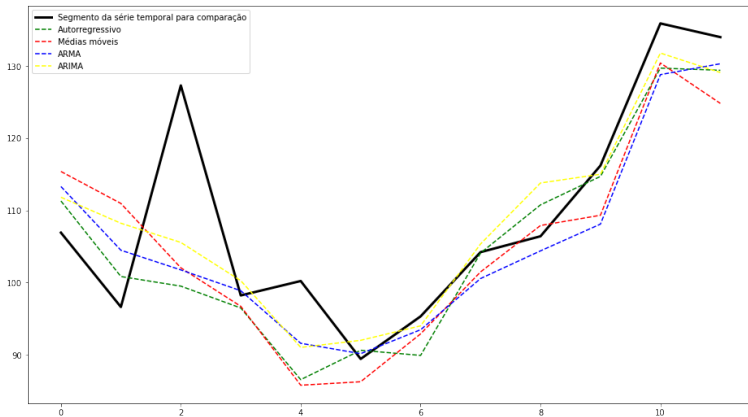
Predição de Séries Temporais

- ARIMA (*autoregressive integrated moving average*)
 - Comparação entre um segmento da série temporal e o resultado de predição pelo modelo ARIMA



Predição de Séries Temporais

- Comparações entre um segmento de série temporal e resultados de modelos preditivos



Avaliação de Modelos de Predição de Séries Temporais

Avaliação de Modelos de Predição de Séries Temporais

- Diversas medidas são utilizadas para a avaliação de modelos de predição de séries temporais
- Exemplos de métricas:
 - Erro quadrático médio (EQM)

$$EQM = \frac{1}{N} \sum_i^N (\bar{Y}_i - Y_i)^2$$

- Raiz quadrada do EQM (*root-mean-square error* – RMSE)

$$RMSE = \sqrt{EQM}$$

- Erro médio absoluto (EMA)

$$EMA = \frac{1}{N} \sum_i^N (\bar{Y}_i - Y_i)$$

onde Y_i é o i -ésimo dado temporal, \bar{Y}_i é o i -ésimo resultado da predição e N é a quantidade de dados utilizados na predição

Avaliação de Modelos de Predição de Séries Temporais

- Os exemplos de medidas apresentados no slide anterior também são comumente utilizadas para a avaliação de modelos construídos para problemas de regressão
- Para a avaliação de modelos de predição de séries temporais, também pode ser aplicada a validação cruzada

Avaliação de Modelos de Predição de Séries Temporais

Validação Cruzada em Séries Temporais

- Na validação cruzada, os dados são divididos em conjuntos de teste e de treinamento
 - O k -fold, por exemplo, divide o conjunto de dados em k conjuntos, sendo um para teste e os $k - 1$ restantes para treinamento do modelo em um processo que é repetido k vezes
 - Ilustração de um exemplo para $k = 10$ (*10-fold cross-validation*)



Avaliação de Modelos de Predição de Séries Temporais

Validação Cruzada em Séries Temporais

- Entretanto, durante a aplicação da validação cruzada, geralmente não é considerada a ordem dos dados, os quais são amostrados aleatoriamente em conjuntos de teste e de treinamento
 - Essa abordagem não recomendada para algumas aplicações em dados temporais, como a predição de séries temporais
- As séries temporais não devem ter os seus valores amostrados aleatoriamente, pois não faria sentido para a predição de valores futuros, que é dependente de séries históricas (dados sequenciais)
- Em outras palavras, para a predição de valores futuros, há a dependência temporal entre os dados

Avaliação de Modelos de Predição de Séries Temporais

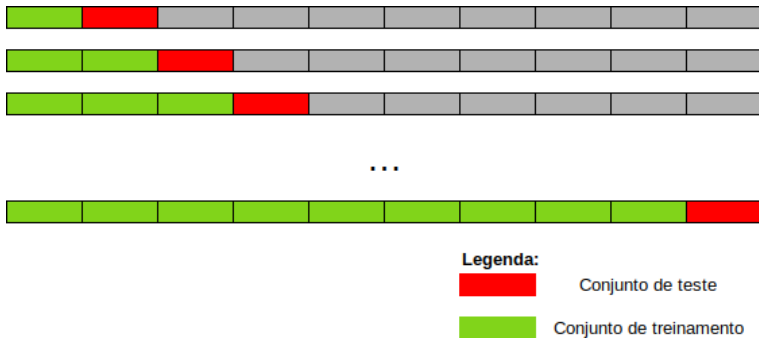
Validação Cruzada em Séries Temporais

- A validação cruzada pode ser aplicada em modelos de forma incremental
 - O conjunto de dados é dividido em k partições, mas mantendo a ordem temporal entre as observações
 - Na primeira etapa (iteração), o primeiro conjunto é utilizado para treinamento e o segundo, para teste
 - Na segunda etapa, os dois primeiros conjuntos são usados para treinamento e o terceiro, para teste
 - Na última etapa, os $k - 1$ primeiros conjuntos são utilizados para treinamento e o k -ésimo para teste

Avaliação de Modelos de Predição de Séries Temporais

Validação Cruzada em Séries Temporais

- Ilustração de exemplo validação cruzada de 10 *folds* para séries temporais



Avaliação de Modelos de Predição de Séries Temporais

Validação Cruzada em Séries Temporais

- Outras abordagens de validação cruzada também podem ser aplicadas em séries temporais
 - Por exemplo: validação cruzada "bloqueada" (*blocked cross-validation*)
 - O conjunto de dados é dividido em k *folds*, onde, para cada *fold*, uma porcentagem dos dados é utilizado para treinamento e o restante, para teste
 - No entanto, essa abordagem pode acarretar na discrepância ("leakage") de resultados

Referências I



C. Chatfield.

The analysis of time series: an introduction.
Boca Raton: Taylor & Francis, 2003.



D. C. Montgomery; C. L. Jennings; M. Kulahci.

Introduction to time series analysis and forecasting.
Nova Jérsei: John Wiley & Sons, 2015.



E. Galdino.

Análise e previsão de séries temporais.

Acesso em 11 de janeiro de 2021. Disponível em: https://www.cin.ufpe.br/~psgm/Series%20Temporais/Aula_01.pdf



G. E. P. Box, G. M. Jenkins.

Time series analysis: forecasting and control.
São Francisco: Holden-Day, 2015.

Referências II



J. T. Oliva.

Geração automática de laudos médicos para o diagnóstico de epilepsia por meio do processamento de eletroencefalogramas utilizando aprendizado de máquina.

Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.



P. A. Morettin; C. Toloi.

Análise de séries temporais: Modelos lineares univariados.
São Paulo, SP: Blucher, 2018.



P. J. Brockwell; R. A. Davis.

Introduction to time series and forecasting.
Nova Iorque: Springer-Verlag, 2002.



R. J. Hyndman.

Cross Validation for Time Series.

Disponível em: <https://robjhyndman.com/hyndsight/tscv/>, 2016.



S. Shrivastava.

Cross Validation in Time Series.

Disponível em: <https://medium.com/@soumyachess1496/cross-validation-in-time-series-566ae4981ce4>, 2020.

Apêndice

Predição de Séries Temporais

- Exemplo de definição de parâmetros: modelo autorregressivo
 - Os parâmetros podem ser definidos através de diversas abordagens
 - Por exemplo: mínimos quadrados na equação de Yule-Walker

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} \\ a_2 & a_1 & 1 & a_1 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

onde a_d é o coeficiente de autocorrelação com parâmetro de deslocamento d

- Para médias móveis, no ARIMA, os parâmetros também são ajustados por meio da regressão por mínimos quadrados