Universidad Mariano Gálvez de Guatemala
Facultad de Ingeniería, Matemática y Ciencias Físicas

9959 - INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN DIARIO MATUTINO, PORTALES 021 – Métodos Numéricos Sección "A" – Primer Ciclo Lic. Oseas Paredes	Segundo Parcial Variante : B Fecha: 02/06/2021 Tiempo: 90 minutos Salón: Virtual Horario: Lunes, miércoles y viernes (1ro y 3ro) de 8:35 a 10:05	Punteo: 35 puntos sobre 100.
Instrucciones Generales: A continuación, encontrará el documento con el primer examen parcial el cual deberá descargar, trabajar en el documento de WORD, adjuntando en este documento los procedimientos y respuestas. Si trabajó a mano, deberá de adjuntar las imágenes escaneadas en donde se pueda observar lo trabajado DE MANERA LEGIBLE. NO OLVIDE ADJUNTAR SU SOLVENCIA.	Vo. Bo.	

Nombre: **Jefferson Asdrubal Dávila Meda** Carné: **9959-19-14**

Considere la siguiente tabla obtenida a partir de mediciones efectuadas para el desplazamiento de un nano robot que sigue una trayectoria rectilínea. Use cifras significativas en su procedimiento.

Instante (s)	2.708	3.247	4.171	4.828	5.168	5.306	5.993	6.655	6.772	7.730
Posición (m)	0.197	0.198	0.168	0.131	0.111	0.103	0.065	0.038	0.034	0.012

Serie 1 – (15 de 35 puntos, 5 puntos c/u) - Instrucciones: Resuelva lo que se le indica. Deje constancia de su procedimiento.

1. Halle un modelo exponencial, logarítmico o polinómico que se ajuste a la data hasta en un 99.0% o más (*Ayuda*: construya un modelo polinómico que deje la posición como variable dependiente del tiempo, en el eje de las ordenadas. Luego haga un back-testing a fin de calcular el ruido y estimar el error cuadrático medio no mayor de un 5.00% en la estimación de su modelo) (5 pts.)

Respuesta:
El modelo que mejor se ajusta a la data fue el modelo polinómico de grado 3 con un nivel de confianza del 99.999%

- $s(t) = 0.0033t^3 - 0.0515t^2 + 0.2144t - 0.0687$
- $R^2 = 99.999\%$

El error cuadrático medio que se obtuvo fue menor al 5% solicitado en el ejercicio y fue de 0.012%

		Error Cuadratico:		0.012%
Instante (s)	**Posicion (m)**	**sk(t)**	ε	ε^2
2.708	0.197	0.200	-0.003	7.646E-06
3.247	0.198	0.197	0.001	2.903E-07
4.171	0.168	0.169	-0.001	1.135E-06
4.828	0.131	0.137	-0.006	4.041E-05
5.168	0.111	0.119	-0.008	6.953E-05
5.306	0.103	0.112	-0.009	8.026E-05
5.993	0.065	0.077	-0.012	1.400E-04
6.655	0.038	0.050	-0.012	1.416E-04
6.772	0.034	0.046	-0.012	1.510E-04
7.73	0.012	0.036	-0.024	5.558E-04

2. En base al modelo anterior encuentre la función velocidad que dependa del tiempo y complete la tabla agregando una fila que tenga la velocidad del nano robot (en m/s). Dé un nivel de confianza de su estimación. (*Ayuda*: si deriva el modelo anterior respecto de t ¿qué obtendrá?) (5 pt.)

- $v(t) = \frac{ds_k}{dt} = 3(0.0033t^2) - 2(0.0515t) + 0.2144$
- $R^2 = 99.999\%$

Respuesta:

El nivel de confianza es de 99.999% y al derivar respecto a t, se puede observar que se obtuvieron resultados negativos, lo que da a entender que el nano robot se encuentra en bajada y los positivos indican que el nano robot se encuentra en subida en los intervalos de tiempo.

			Error Cuadratico:		0.012%	
PRUEBA NORMALIDAD JARQUE-BERA	Instante (s)	Posicion (m)	sk(t)	ε	ε^2	$v(t) = \frac{ds_k}{dt}$
VERDADERO	2.708	0.197	0.200	-0.003	7.646E-06	0.0081
	3.247	0.198	0.197	0.001	2.903E-07	-0.0157
	4.171	0.168	0.169	-0.001	1.135E-06	-0.0430
	4.828	0.131	0.137	-0.006	4.041E-05	-0.0521
	5.168	0.111	0.119	-0.008	6.953E-05	-0.0535
	5.306	0.103	0.112	-0.009	8.026E-05	-0.0534
	5.993	0.065	0.077	-0.012	1.400E-04	-0.0473
	6.655	0.038	0.050	-0.012	1.416E-04	-0.0326
	6.772	0.034	0.046	-0.012	1.510E-04	-0.0291
	7.73	0.012	0.036	-0.024	5.558E-04	0.0098

3. Halle el instante en el que partió el nano robot del reposo hasta una precisión del 0.001 (*Ayuda*: Halle las raíces del modelo del inciso anterior. Use el método de Newton-Raphson.) (5 pts.)

$$v(t) = 0.0033t^3 - 0.0515t^2 + 0.2144t - 0.0687$$

$$\therefore \frac{dv}{dt}(t) = 3(0.0033t^2) - 2(0.0515t) + 0.2144$$

Utilizando el método de Newton-Raphson se obtuvieron las siguientes raíces:

		n	x_{n+1}	x_n	$f(x_n)$	$\frac{df}{dx}(x_n)$	$\varepsilon =$	0.001
$a_2 =$	0.010	0	0.543	1	0.121	0.2654	0	
$a_1 =$	-0.103	1	-0.134	0.543	0.161	0.238251469	0	
$a_0 =$	0.2144	2	-1.288	-0.134	0.228	0.198013236	0	
		3	-4.095	-1.288	0.363	0.129489393	0	
		4	17.439	-4.095	0.802	-0.037254753	0	
		80	7.546	7.547	0.001	0.654306766	1	
		81	7.544	7.546	0.001	0.654220788	1	
		82	7.543	7.544	0.001	0.6541409	1	
		83	7.542	7.543	0.001	0.654066667	1	

Respuesta:
En este caso se obtuvo que la raíz es de $\boldsymbol{t = 7.546s}$, con una eficiente de $n = 80$ y un nivel de confianza del 99.999%

De igual manera:

		n	x_{n+1}	x_n	$f(x_n)$	$\frac{df}{dx}(x_n)$	$\varepsilon =$	0.001
$a_2 =$	0.010	0	7.035	7	-0.022	0.6218	0	
$a_1 =$	-0.103	1	7.067	7.035	-0.020	0.623853876	0	
$a_0 =$	0.2144	2	7.098	7.067	-0.019	0.625782659	0	
		3	7.126	7.098	-0.018	0.627592671	0	
		4	7.153	7.126	-0.017	0.629290091	0	
		45	7.507	7.506	-0.001	0.651836067	1	
		46	7.509	7.507	-0.001	0.65192421	1	
		47	7.510	7.509	-0.001	0.652006173	1	
		48	7.511	7.510	-0.001	0.652082386	1	

Respuesta:
En este caso se obtuvo que la raíz es de $\boldsymbol{t = 7.506s}$, con una eficiente de $n = 45$ y un nivel de confianza del 99.999%

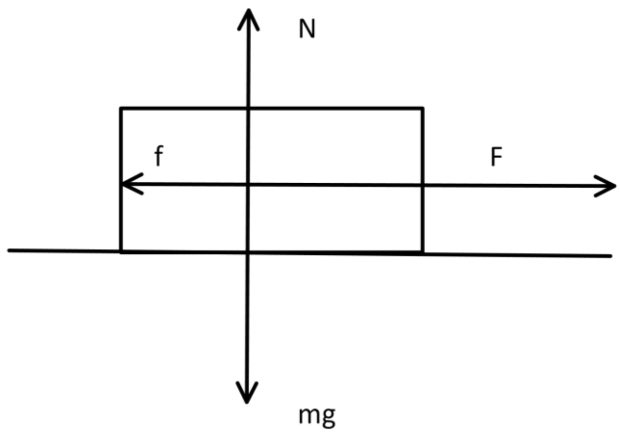
Serie 2 – (10 de 35 puntos / 5 puntos c/u) - Instrucciones: Realice lo que a continuación se le pide. Deje constancia de su procedimiento.

1. Encuentre el instante en el que el nano robot quedará en reposo hasta con una precisión del 0.001 (*Ayuda*: Halle otra de las raíces del modelo del inciso 2 de la serie anterior tal que tenga sentido su resultado. Use el método de Newton-Raphson.) (5 pts.)

Respuesta:
El último instante en el que el nano robot queda en reposo fue en $\boldsymbol{t = 7.506s}$.

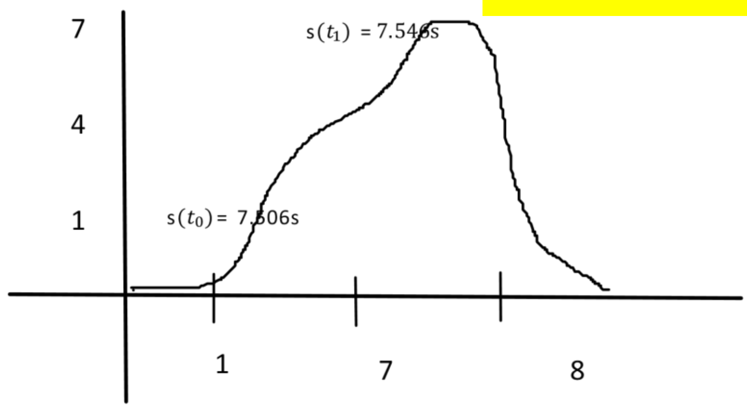
2. Si el nano robot tiene una masa de $2.0345 \times 10^{-12} Kg$ y si la fuerza de fricción media que debe vencer en su trayectoria es de $2.7172 \times 10^{-10} N$ encuentre la energía mínima necesaria que debe poseer para desplazarse desde el instante en que partió del reposo hasta que agote su energía. Recuerde que el trabajo mecánico se define como $W = \int_{x_0}^{x} F dx$, donde F es la fuerza necesaria para mover el objeto. Use el método de Romberg para n=6 (*ayuda*: Primero debe calcular la función aceleración, es decir, la derivada de la función velocidad ya encontrada, luego hacer uso de la segunda ley de Newton. Haga un diagrama de cuerpo libre para hallar la fuerza necesaria para vencer la fricción y mantener el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Finalmente calcule la posición en los instantes en que parte hasta que para agotando su combustible, luego efectúe la integración respecto de la posición). (5 pts.)

$$\sum F = ma$$



$$\therefore F = ma + f$$

v(t)



$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{x_4 - x_0}{90}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$$

$$x_0 = 2.70442\text{E} - 10$$
$$x_4 = 2.7045\text{E} - 10$$

$x_0 =$	2.70442E-10
$x_1 =$	2.7172E-10
$x_2 =$	2.7172E-10
$x_3 =$	2.7172E-10
$x_4 =$	2.7045E-10

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2.7045\text{E} - 10 - 2.70442\text{E} - 10}{90}$$

$$[7f(2.70442\text{E} - 10) + 32f(2.7172E - 10) + 12f(2.7172E - 10) + 32f(2.7172E - 10) + 7f(2.7045\text{E} - 10)]$$
$$= -3.51326\text{E} - 26$$

Respuesta:
El nano robot pierde energía al desplazarse, la energía que pierde es de $-3.51326\text{E} - 26\ Nm$

<u>Serie 3 – (10 de 25 puntos / 5 puntos c/u) - Instrucciones:</u> Resuelva lo que se le indica. Deje constancia de su procedimiento.

Considere el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} (1-3i)x_1 - 2ix_2 + (-2+5i)x_3 + (1-i)x_4 = i \\ (1+i)x_1 + \sqrt{2}x_2 + \left(1+i\sqrt{3}\right)x_3 + ix_4 = \sqrt{5} \\ -ix_1 + x_2 + (2-i)x_3 - \sqrt{3}x_4 = 1-i \\ x_1 + (1-i)x_2 + x_3 + 2x_4 = 1+i \end{cases}$$

1. Use el método de Gauss-Seidel para calcular el vector solución del anterior sistema. Mida la eficiencia de este método (5 pts.)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1-3i & -2i & -2+5i & 1-i & i \\ 1+i & \sqrt{2} & 1+i\sqrt{3} & i & \sqrt{5} \\ -i & 1 & 2-i & -\sqrt{3} & 1-i \\ 1 & 1-i & 1 & 2 & 1+i \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\xrightarrow{\substack{(1+i)F_1-(1-3i)F_2; \\ -iF_1-(1-3i)F_3}}}_{1F_1-(1-3i)F_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1-3i & -2i & -2+5i & 1-i & i \\ 0 & 3.73709+2.66766i & -15.8476+2.28004i & 0 & 10.2437+7.3123i \\ 0 & 1.7642 + 2.39656i & 0 & 6.42477+4.58621i & -13.5362 - 30.2146i \\ 0 & -3.47515 & -2.40828+3.37373i & 0 & 58.9037-33.3372i \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\xrightarrow{\substack{(-2i)F_2-(3.73709+2.66766i)F_1; \\ (1.7642 + 2.39656i)F_2-(3.73709+2.66766i)F_3}}}_{-3.47515F_2-(3.73709+2.66766i)F_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5.49849-16.00599i & 0 & -2.53586-17.6257i & 0 & -38.10557+53.3816i \\ 0 & 3.73709+2.66766i & -15.84760+2.28003i & 0 & 10.24371+7.31230i \\ 0 & 0 & -33.4227-33.9574i & -11.77551-34.27828i & -29.4685+186.4757i \\ 0 & 0 & 73.07292-14.10698i & 0 & -344.6605-57.9622i \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\xrightarrow{\substack{-2.53586-17.6257iF_3-(-33.4227-33.9574i)F_1; \\ -15.84760+2.28003iF_3-(-33.4227-33.9574i)F_2}}}_{73.07292-14.10698iF_3-(-33.4227-33.9574i)F_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 359.747373-721.6793i & 0 & 0 & -574.3179+294.4767i & 275.20+536.7227i \\ 0 & 34.3171+216.0630i & 0 & 264.76959+516.38012i & 135.90044-2430.13636i \\ 0 & 0 & -33.42276-33.9574i & -11.77551-34.27828i & -29.4685+186.4757i \\ 0 & 0 & 0 & -1344.0347-2338.6975i & -9074.006+401.003i \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\xrightarrow{\substack{-574.3179+294.4767iF_4-(-1344.0347-2338.6975i)F_1; \\ 264.76959+516.38012iF_4-(-1344.0347-2338.6975i)F_2}}}_{-11.77551-34.27828iF_4-(-1344.0347-2338.6975i)F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2171302-128621i & 0 & 0 & 0 & 4207942-1537403i \\ 0 & -459182+370653i & 0 & 0 & 3256417-7527820i \\ 0 & 0 & 34494-123805i & 0 & -355120+488031i \\ 0 & 0 & 0 & -1344-2338i & -9074+401.003i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{1/2171302-128621iF_1;-1/-459182+370653iF_2; \\ 1/134494-123805iF_3;-1/-1344-2338iF_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1.9729924650330279423116053295-0.5911815068453745158905121 5706i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -12.306436651080836952587560518+6.4601623736814000054096140957i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4.3995635255757923331998426875-1.6425623168613192603970674099i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1.5472858751319362724530037667-2.9907244807501038863506437337i \end{array}\right)$$

$$x_1 = 1.9729924650330279423116053295 - 0.5911815068453745158905121 5706i$$
$$x_2 = -12.306436651080836952587560518 + 6.4601623736814000054096140957i$$
$$x_3 = -4.3995635255757923331998426875 - 1.6425623168613192603970674099i$$
$$x_4 = 1.5472858751319362724530037667 - 2.9907244807501038863506437337i$$

- **La solución única del sistema está dada por el siguiente vector:**

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9729924650330279423116053295-0.5911815068453745158905121 5706i \\ -12.306436651080836952587560518+6.4601623736814000054096140957i \\ -4.3995635255757923331998426875-1.6425623168613192603970674099i \\ 1.5472858751319362724530037667-2.9907244807501038863506437337i \end{pmatrix}}$$

- **La eficiencia del método de Gauss-Jordan-Sidel es de 5 para calcular los vectores solución**

2. Resuelva el mismo sistema usando el método de Gauss-Jordan de la matriz inversa. Mida la eficiencia de este método. (5 pts.)

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1-3i & -2i & -2+5i & 1-i \\ 1+i & \sqrt{2} & 1+i\sqrt{3} & i \\ -i & 1 & 2-i & -\sqrt{3} \\ 1 & 1-i & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} i \\ \sqrt{5} \\ 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3i & -2i & -2+5i & 1-i \\ 1+i & \sqrt{2} & 1+i\sqrt{3} & i \\ -i & 1 & 2-i & -\sqrt{3} \\ 1 & 1-i & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i \\ \sqrt{5} \\ 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1-3i & -2i & -2+5i & 1-i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+i & \sqrt{2} & 1+i\sqrt{3} & i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -i & 1 & 2-i & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1-i & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\begin{array}{c} (1+i)F_1-(1-3i)F_2; \\ -iF_1-(1-3i)F_3; \\ 1F_1-(1-3i)F_4 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1-3i & -2i & -2+5i & 1-i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.73709+2.66766i & -15.8476+2.28004i & 0 & 0 & -3-21415i & 0 & 0 \\ 0 & 1.7642 + 2.39656i & 0 & 6.42477+4.58621i & 2.15479-1.58623i & 0 & -3-21415i & 0 \\ 0 & -3.47515 & -2.40828+3.37373i & 0 & 3.12457i & 0 & 0 & -3-21415i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\begin{array}{c} -2i-(3.73709+2.66766i)F_1; \\ 1.7642+2.39656iF_2-(3.73709+2.66766i)F_3; \\ -3.47515F_2-(3.73709+2.66766i)F_4; \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -5.49849-16.00599i & 0 & -2.53586-17.6257i & 0 & -3.7371-2.6676i & 2.3817-3.3366i & 0 & 0 \\ 0 & 3.73709+2.66766i & -15.84760+2.28003i & 0 & 0 & -3-2.1415i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -33.4227-33.9574i & -11.77551-34.27828i & -12.2842+0.1796i & -0.1603-10.9677i & 5.4984+16.0059i & 0 \\ 0 & 0 & 73.07292-14.10698i & 0 & 8.3353-11.6768i & 10.4254+7.442i & 0 & 5.4984+16.0059i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\begin{array}{c} (-2.53586-17.6257i)F_3-(-33.4227-33.9574i)F_1; \\ (-15.84760+2.28003i)F_3-(-33.4227-33.9574i)F_2; \\ (73.07292-14.10698i)F_3-(-33.4227-33.9574i)F_4; \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 359.747373-721.6793i & 0 & 0 & -574.3179+294.4767i & -2.13E-14-2.84E-14i & 3.5527E-15i & 268.17-137.5i & 0 \\ 0 & 34.3171+216.0630i & 0 & 264.76959+516.38012i & 194.2663-30.8552i & -2.8421E-14i & -123.632-241.119i & 0 \\ 0 & 0 & -33.42276-33.9574i & -11.77551-34.27828i & -12.2842+0.1796i & -0.1603-10.967i & 5.4984+16.0059i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1344.0347-2338.6975i & -220.006+79.1928i & -70.705-196.428i & 627.587+1092.037i & -359.747+721.67i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\begin{array}{c} (-574.3179+294.4767i)F_4-(-1344.0347-2338.6975i)F_1; \\ 264.76959+516.38012iF_4-(-1344.0347-2338.6975i)F_2; \\ (-11.77551-34.27828i)F_4-(-1344.0347-2338.6975i)F_3; \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2171302-128621i & 0 & 0 & 0 & 103032-110268i & 98451+91991i & 0 & -5908-520410i \\ 0 & -459182+370653i & 0 & 0 & 234117+320220i & 82710-88519i & -5.8E-11+1.2E-10i & -467911+5312i \\ 0 & 0 & 34494-123805i & 0 & -11625-21878i & 19534-10379i & 7.2E-12-7.2E-12i & 28974+3833i \\ 0 & 0 & 0 & -1344-2338i & -220.006+79.1928i & -705868i-1964282i & 627+1092i & -359.74+721.6i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\begin{array}{c} (1/2171302-128621i)F_1;(-1/-459182+370653i)F_2; \\ (1/34494-123805i)F_3; \\ (-1/-1344-2338i)F_4; \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 5.02E-2-4.7E-2i & 4.2E-2+4.4E-2i & 0 & 1.14E-2.0.2389i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3.2E-2-0.6714i & -0.2032+2.8686i & 2E-16-9E-17i & 0.6226+0.4910i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.1397-0.1328i & 0.1185+0.1247i & 6.9E-17+3.9E-17i & 3.15E-2+0.225i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.01518-0.0853i & 7.6E-2+1.3E-2i & -0.466942786+5.5E-17 & -0.165-0.2489i \end{array}\right)$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.02E-2-4.7E-2i & 4.2E-2+4.4E-2i & 0 & 1.14E-2-0.2389i \\ 3.2E-2-0.6714i & -0.2032+2.8686i & 2E-16-9E-17i & 0.6226+0.4910i \\ 0.1397-0.1328i & 0.1185+0.1247i & 6.9E-17+3.9E-17i & 3.18E-2+0.225i \\ 0.01518-0.0853i & 7.6E-2+1.3E-2i & -0.466942786+5.5E-17 & -0.165-0.2489i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ \sqrt{5} \\ 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1.97299246503302860844542010 45-0.591181506845373627712092456 93i \\ -12.3064366510808405053012393 18+6.46016237368140178176645349 59i \\ -4.39956352557579322137826238 76-1.64256231686132014857548711 01i \\ 1.54728587513193827085444809 2-2.99072448075010299817222403 36i \end{pmatrix}$$

La eficiencia del método de Gauss-Jordan-Sidel de la matriz inversa es de 6 para calcular los vectores solución.

$$
\begin{aligned}
(1-3i)&(1.9729924650330286084454201045-0.59118150684537362771209245693i)\\
&-2i(-12.306436651080840505301239318+6.4601623736814017817664534959i)\\
&+(-2+5i)(-4.3995635255757932213782623876-1.6425623168613201485754871101i)\\
&+(1-i)(1.5472858751319382708544448092-2.9907244807501029981722240336i)=\boldsymbol{i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1+i)&(1.9729924650330286084454201045-0.59118150684537362771209245693i)\\
&+\sqrt{2}(-12.306436651080840505301239318+6.4601623736814017817664534959i)\\
&+\left(1+i\sqrt{3}\right)(-4.3995635255757932213782623876-1.6425623168613201485754871101i)\\
&+i(1.5472858751319382708544448092-2.9907244807501029981722240336i)=\boldsymbol{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-i&(1.9729924650330286084454201045-0.59118150684537362771209245693i)\\
&+(-12.306436651080840505301239318+6.4601623736814017817664534959i)\\
&+(2-i)(-4.3995635255757932213782623876-1.6425623168613201485754871101i)\\
&-\sqrt{3}(1.5472858751319382708544448092-2.9907244807501029981722240336i)=\boldsymbol{1-i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1.9729924650330286084454201045-0.59118150684537362771209245693i)\\
&+(1-i)(-12.306436651080840505301239318+6.4601623736814017817664534959i)\\
&+(-4.3995635255757932213782623876-1.6425623168613201485754871101i)\\
&+2(1.5472858751319382708544448092-2.9907244807501029981722240336i)=\boldsymbol{1+i}
\end{aligned}
$$

"Si una rosa de amor tú has guardado bien en tu corazón.
Si a un Dios supremo y justo has elevado tu humilde oración.
Si con la copa alzada cantas un día tu alabanza a la vida, no has vivido en vano."
(Omar Khayam. Poeta, Astrónomo y Matemático persa)