

INE5403

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA PARA A COMPUTAÇÃO

PROF. DANIEL S. FREITAS

UFSC - CTC - INE

1 - LÓGICA E MÉTODOS DE PROVA

1.1) Lógica Proposicional

1.2) Lógica de Primeira Ordem

1.3) Métodos de Prova

PREDICADOS E QUANTIFICADORES

- Servem para declarações da forma:
 - “ $x > 3$ ”
 - “ $x = y + 3$ ”
 - “ $x + y = z$ ”
- Não são V nem F enquanto os valores das variáveis **não forem especificados**.
- Discutiremos modos de produzir **proposições** a partir destas **declarações**.

PREDICADOS

- A declaração “ x é maior do que 3” tem duas partes:
 - a variável x (= “sujeito”)
 - “é maior do que 3” (= “predicado”)
- O predicado é uma **propriedade** que o sujeito da declaração pode ter.
- Podemos denotar “ x é maior do que 3” por $P(x)$:
 - P é o **predicado**
 - x é a **variável**
- Diz-se também que $P(x)$ é o valor da **função proposicional** P em x .
 - Uma vez que um valor tenha sido atribuído a x , $P(x)$ se torna uma proposição e tem um valor verdade.

PREDICADOS

🔴 **Exemplo:** seja $P(x)$ a declaração “ $x > 3$ ”. Quais são os valores verdade de $P(4)$ e $P(2)$?

🟢 $P(4)$, que é “ $4 > 3$ ”, é V

🟢 $P(2)$, que é “ $2 > 3$ ”, é F

PREDICADOS

- Também podemos ter declarações **com mais de uma variável**.
- **Exemplo:** “ $x = y + 3$ ”.
 - Pode ser denotado por $Q(x, y)$
 - Quando se atribui valores para x e para y , $Q(x, y)$ passa a ter um valor verdade.

PREDICADOS

- **Exemplo:** Seja $Q(x, y)$ a declaração “ $x = y + 3$ ”. Quais são os valores verdade de $Q(1, 2)$ e $Q(3, 0)$?
- Similarmente, $R(x, y, z)$ pode ser “ $x + y = z$ ”.
- **Exemplo:** quais os valores verdade de $R(1, 2, 3)$ e $R(0, 0, 1)$?

PREDICADOS

- Em geral, uma declaração envolvendo as n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n pode ser denotada por:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- que é o valor da função proposicional P para a tupla:
 (x_1, x_2, \dots, x_n)
- P também é chamado de **predicado**

QUANTIFICADORES

- Quando se atribui valores a **todas as variáveis** em uma função proposicional, a declaração resultante se torna uma **proposição** com um valor verdade determinado.
- Mas existe uma **outra forma** de criar uma proposição a partir de uma função proposicional:
 - a **quantificação**
- Discutiremos quantificação **universal** e quantificação **existencial**.

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

- Muitas declarações afirmam que uma propriedade é V ou F para todos os valores de uma variável **em um domínio em particular**
 - ou seja, em um **universo de discurso** ou **domínio**
- Tal declaração é expressa com um **quantificador universal**:
 - estabelece que $P(x)$ é **V para todos os valores de x** no universo de discurso
 - é **o universo de discurso** que especifica os possíveis valores da variável x .

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

- A **quantificação universal** de $P(x)$ é a proposição:
 - “ $P(x)$ é V para todos os valores de x no universo de discurso.”
- Denotada por: $\forall x P(x)$
 - \forall é o quantificador universal
 - “para todo x , $P(x)$ ”
 - “para todos os x , $P(x)$ ”

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

- **Exemplo:** Seja $P(x)$ dado por “ $x + 1 > x$ ”.
- Qual o valor verdade da quantificação $\forall x P(x)$, sendo que o universo de discurso consiste de **todos os nros reais**?
- **Resposta:**
- como $P(x)$ é V para todos os nros reais x , a quantificação $\forall x P(x)$ é V

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

- **Exemplo:** Seja $Q(x)$ a declaração “ $x < 2$ ”.
 - Qual o valor verdade da quantificação $\forall x Q(x)$?
 - O universo de discurso consiste de todos os nros reais.
- **Resposta:**
 - $Q(x)$ não é verdade **para todo** nro real x
 - $Q(3)$, por exemplo, é F
 - Portanto: $\forall x Q(x)$ é F

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

- Quando **todos** os elementos do universo de discurso **podem ser listados**:
 - por exemplo: x_1, x_2, \dots, x_n
- Segue que a quantificação universal é o **mesmo que a conjunção**:
 - $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n)$
 - a qual é V sse:

$P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$ são todos V

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

● **Exemplo:** qual o valor verdade de $\forall x P(x)$, onde:

● $P(x)$ é “ $x^2 < 10$ ”

● o universo de discurso são os inteiros não maiores do que 4?

● **Resposta:**

● como $P(4)$ é F, segue que $\forall x P(x)$ é F

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

- **Exemplo:** o que significa a declaração $\forall x T(x)$, se:
 - $T(x)$ é “ x tem pai e mãe”
 - o universo de discurso consiste de todas as pessoas?

- **Resposta:**
 - esta declaração pode ser traduzida por:
“toda pessoa tem pai e mãe”
 - a qual é V

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

- Especificar o universo de discurso é importante quando se usa quantificadores.
- O valor verdade de uma declaração quantificada frequentemente depende de **quais elementos** estão neste universo de discurso.

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

- **Exemplo:** Qual é o valor verdade de $\forall x (x^2 \geq x)$ se:
 - o universo de discurso consiste de todos os nros **reais**?
 - o UD consiste de todos os nros **inteiros**?

- **Resposta:**

- note que $x^2 \geq x$ sse $x \cdot (x - 1) \geq 0$
- ou seja: sse $x \leq 0$ ou $x \geq 1$
- logo:
 - $\forall x (x^2 \geq x)$ é **F** se o UD consiste dos reais
 - mas é **V** se o UD consiste dos inteiros

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

- Note que, para mostrar que uma declaração da forma $\forall x P(x)$ é F:
 - só é preciso encontrar **um valor** de x no UD para o qual $P(x)$ é F
 - este valor é chamado de **contra-exemplo** da declaração $\forall x P(x)$

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

- **Exemplo:** Seja $P(x)$ dado por $x^2 > 0$.
 - Para mostrar que a declaração $\forall x P(x)$ é F, onde o UD consiste dos inteiros, é só mostrar **um** contra-exemplo.
 - Vemos que $x = 0$ é um contra-exemplo, uma vez que $x^2 = 0$ quando $x = 0$.
- Buscar contra-exemplos para declarações quantificadas universalmente é uma atividade importante no estudo da matemática.

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

- Muitas declarações matemáticas estabelecem que existe um elemento com uma certa propriedade.
- Tais declarações são expressas usando quantificação existencial.
- Forma-se uma proposição que é V se e somente se $P(x)$ é V para pelo menos um valor de x no universo de discurso.

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

- A quantificação existencial de $P(x)$ é a proposição:
 - “existe um elemento x no universo de discurso tal que $P(x)$ é V”
 - usa-se a notação: $\exists x P(x)$
- \exists é o quantificador existencial
 - significa:
 - “**existe um** x tal que $P(x)$ ”
 - “**existe pelo menos um** x tal que $P(x)$ ”
 - “**para algum** x , $P(x)$ ”

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

- **Exemplo:** Seja $P(x)$ a declaração “ $x > 3$ ”.
- Qual é o valor verdade da quantificação $\exists x P(x)$?
- O UD consiste de todos os números reais.
- **Resposta:**
- “ $x > 3$ ” para, por exemplo, $x = 4$
- logo: $\exists x P(x)$ é V

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

- **Exemplo:** Seja $Q(x)$ a declaração “ $x = x + 1$ ”.
 - Qual é o valor verdade da quantificação $\exists x Q(x)$?
 - O UD consiste de todos os números reais.
- **Resposta:**
 - uma vez que $Q(x)$ é F **para todos** os nros reais, a quantificação existencial $\exists x Q(x)$ é F

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

- Quando todos os elementos do universo de discurso podem ser listados:
 - por exemplo: x_1, x_2, \dots, x_n
- segue que a quantificação existencial é o mesmo que a disjunção:
 - $P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n)$
 - a qual é V sse **pelo menos um** entre $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$ for V

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

● **Exemplo:** Qual o valor verdade de $\exists x P(x)$, onde:

- $P(x)$ é a declaração “ $x^2 > 10$ ”
- o UD consiste dos inteiros positivos não maiores do que 4?

● **Resposta:**

- Como o UD é $\{1, 2, 3, 4\}$, a proposição $\exists x P(x)$ é o mesmo que a disjunção:

$$P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$$

- Como $P(4)$ é V, segue que $\exists x P(x)$ é V

QUANTIFICADORES - RESUMO

Declaração	Quando é V?	Quando é F?
$\forall x P(x)$	$P(x)$ é V para todo x	Existe um x para o qual $P(x)$ é F
$\exists x P(x)$	Existe um x para o qual $P(x)$ é V	$P(x)$ é F para todo x

“LIGANDO” VARIÁVEIS

- Quando:
 - um quantificador **é usado** sobre a variável x
 - ou: quando **atribuímos um valor** a esta variáveldizemos que esta ocorrência da variável está **ligada** (ou “amarrada”).
- Uma ocorrência de variável que não está ligada a um quantificador ou fixa em um valor particular é chamada de **livre**.

LIGANDO VARIÁVEIS

- Todas as **variáveis** que ocorrem em uma função proposicional **devem estar ligadas**, para que ela seja considerada uma **proposição**.
 - Isto pode ser feito com uma combinação de:
 - quantificadores universais
 - quantificadores existenciais
 - atribuições de valores

LIGANDO VARIÁVEIS

- A parte de uma expressão lógica à qual um quantificador é aplicado é o seu **escopo**.
- Uma variável é **livre** se estiver **fora do escopo** de todos os quantificadores na fórmula que a especifica.

LIGANDO VARIÁVEIS

- **Exemplo:** na declaração $\exists x Q(x, y)$:
 - a variável x **está ligada** à quantificação $\exists x$
 - mas a variável y **está livre**:
 - não está ligada a nenhum quantificador
 - nenhum valor lhe está sendo atribuído.

LIGANDO VARIÁVEIS

● **Exemplo:** na declaração $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x R(x)$:

- Todas as variáveis estão ligadas.
- O escopo do primeiro quantificador, $\exists x$, é a expressão:
$$P(x) \wedge Q(x)$$
- O escopo do quantificador “ $\forall x$ ” é $R(x)$
- Note que esta expressão pode ser escrita como:

$$\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall y R(y)$$

LIGANDO VARIÁVEIS

- Observe que é comum usar a **mesma letra** para representar variáveis ligadas a **diferentes quantificadores**
 - desde que os seus **escopos não se sobreponham**.

NEGAÇÕES

- **Exemplo:** Considere a sentença:
 - “Todo aluno nesta sala já fez um curso de Cálculo”
- Trata-se de uma quantificação universal: $\forall x P(x)$
 - onde $P(x)$ é “ x já cursou Cálculo”
- A **negação desta sentença** é a declaração:
 - “**Não é verdade que** todo aluno nesta sala já tenha feito um curso de Cálculo”
 - Note que isto é equivalente a:
 - “**Existe algum** estudante em sala que não cursou Cálculo”
 - ou seja: $\exists x \neg P(x)$

NEGAÇÕES

- Este exemplo **ilustra** a seguinte equivalência:

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

NEGAÇÕES

- **Exemplo:** Agora queremos negar:
 - “Existe um estudante nesta sala que já cursou Cálculo”
- Trata-se de uma quantificação existencial: $\exists x Q(x)$
 - onde $Q(x)$ é “ x já cursou Cálculo”
- A **negação desta declaração** é:
 - “**Não é verdade que** exista nesta sala um estudante que já tenha cursado Cálculo”
 - O que é equivalente a:
 - “**Todo** estudante desta sala ainda não cursou Cálculo”
 - ou seja: $\forall x \neg Q(x)$

NEGAÇÕES

- Este exemplo **ilustra** a seguinte equivalência:

$$\neg \exists x Q(x) \equiv \forall x \neg Q(x)$$

NEGAÇÕES - RESUMO

Negação	Declaração Equivalente	Quando é V?	Quando é F?
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	Para todo x , $P(x)$ é F	Existe um x para o qual $P(x)$ é V
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	Existe um x para o qual $P(x)$ é F	Para todo x , $P(x)$ é V

NEGAÇÕES

● **Exemplo:** Qual é a negação de: “Existe um político honesto”?

● Seja $H(x)$: “ x é honesto”

● Então a declaração acima é: $\exists x H(x)$

● onde o UD consiste de todos os políticos

● A negação disto é: $\neg \exists x H(x)$

● a qual é equivalente a: $\forall x \neg H(x)$

● a qual pode ser expressa como:

- “Todos os políticos não são honestos”
- ou: “Todos os políticos são desonestos”

NEGAÇÕES

- **Exemplo:** Qual é a negação de: “Todos os americanos comem hambúrguers”?
- Seja $C(x)$: “ x come hambúrguers”
- Então a declaração acima é: $\forall x C(x)$
 - onde o UD consiste de todos os americanos
- A negação disto é: $\neg \forall x C(x)$
 - que é equivalente a: $\exists x \neg C(x)$
 - que pode ser expressa como:
 - “Alguns americanos não comem hambúrguers”
 - ou: “Existe **pelo menos um** americano que não come hambúrguers”

NEGAÇÕES

● **Exemplo:** A negação de “ $\forall x (x^2 > x)$ ”

● é a declaração: $\neg \forall x (x^2 > x)$

● que é equivalente a: $\exists x \neg (x^2 > x)$

● a qual pode ser reescrita como: $\exists x (x^2 \leq x)$

● *Note que o valor-verdade desta declaração depende do UD.*

NEGAÇÕES

● **Exemplo:** A negação de “ $\exists x (x^2 = 2)$ ”

● é a declaração: $\neg \exists x (x^2 = 2)$

● que é equivalente a: $\forall x \neg (x^2 = 2)$

● a qual pode ser reescrita como: $\forall x (x^2 \neq 2)$

● *Note que o valor-verdade desta declaração depende do UD.*

TRADUZINDO LINGUAGEM PARA LÓGICA

- Tarefa crucial em matemática, programação em lógica, IA, engenharia de software e outros.
- Esta tarefa é mais complexa quando envolve predicados e quantificadores:
 - pode haver **mais de um modo** de traduzir uma dada sentença.
- Não há “receita”: veremos **exemplos** para ilustrar o método.
 - Objetivo: produzir expressões **simples** e **úteis**.

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

● **Exemplo 1 (1/3):** Use lógica de predicados para expressar:
“Todo estudante nesta turma já estudou Cálculo”.

● **Solução:**

1. **reescrever** para facilitar identificação dos quantificadores:
“Para cada estudante nesta turma, este estudante já estudou Cálculo”
2. introduzir uma variável x :
“Para cada estudante x nesta turma, x já estudou Cálculo”
3. incluir o **predicado** $C(x)$: “ x já estudou Cálculo”
4. assim, assumindo que o UD consiste dos estudantes na turma:

$$\forall x C(x)$$

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

- Porém, existem **outras abordagens** corretas:
 - pode-se usar **UDs diferentes** e **outros predicados**
 - a abordagem escolhida **vai depender do raciocínio** que queremos desenvolver.

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

- **Exemplo 1 (2/3):** podemos estar interessados em focar em um grupo de pessoas maior do que a turma.
- Se o UD passar a ser “todas as pessoas”, teremos:
“Para cada pessoa x , se a pessoa x é um estudante desta turma, então x já estudou Cálculo”
- Então, definindo:
 $E(x)$: “a pessoa x está nesta turma”
- A sentença anterior fica:
 $\forall x (E(x) \rightarrow C(x))$
- **Nota:** neste caso, a sentença **não pode** ser expressa como:
 $\forall x (E(x) \wedge C(x))$
 - pois isto significaria: “**todas as pessoas** são estudantes nesta turma e já estudaram Cálculo” (!!)

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

● **Exemplo 1 (3/3):** podemos estar interessados na formação da turma em outros assuntos além do Cálculo.

● Neste caso, pode ser mais adequado usar o predicado:

$Q(x, y)$: “o estudante x já estudou a matéria y ”

● Teríamos que substituir $C(x)$ por $Q(x, \textit{calculo})$ nas abordagens anteriores:

$$\forall x Q(x, \textit{calculo})$$

$$\forall x (E(x) \rightarrow Q(x, \textit{calculo}))$$

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

- Note que existem **diferentes abordagens**.
- Devemos sempre adotar a **mais simples**, mas que seja **adequada** para o raciocínio subsequente.

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

- **Exemplo 2 (1/2):** Use predicados e quantificadores para expressar:
“**Algum** estudante nesta sala já foi a São Paulo.”.

- **Solução:**

- Esta sentença significa:
“Existe um estudante nesta sala com a propriedade de que este estudante já visitou SP.”
- Introduzindo uma variável x :
“Existe um estudante x nesta sala que possui a propriedade ' x já visitou SP'.”

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

🔴 **Exemplo 2 (2/2):** (“Algum estudante nesta sala já foi a São Paulo.”).

🔴 Supondo UD = “estudantes nesta sala”, obtemos: $\exists x S(x)$

🔴 Se o UD passar para “todas as pessoas”, a sentença fica:

“Existe uma pessoa x tendo a propriedade de que x é um estudante nesta sala e x já foi a SP.”

🟢 Definindo $E(x)$ como “ x é um estudante nesta sala”, obtemos:

$$\exists x (E(x) \wedge S(x))$$

🟢 Note que **não pode** ser: $\exists x (E(x) \rightarrow S(x))$

🟡 Para isto ser V, **bastaria ter alguém fora da sala.** (!!)

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

- **Exemplo 3 (1/3):** Use predicados e quantificadores para expressar:
“**Todo** estudante nesta sala já foi a SP ou ao Rio.”.

- **Solução:**

- Reescrevendo:

“Para todo x nesta sala, x tem a propriedade:
 x já visitou SP ou x já visitou o Rio.”

- nota: ou-inclusivo

- Daí, se UD=“estudantes em sala”, isto é expresso como:

$$\forall x (S(x) \vee R(x))$$

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

● **Exemplo 3 (2/3):** (“**Todo** estudante nesta sala já foi a SP ou ao Rio.”)

● **Solução:**

● Porém, se UD=“todas as pessoas”, isto fica:

“Para toda pessoa x , se x é um estudante nesta sala, então x já visitou SP ou x já visitou o RJ.”

● O que pode ser expresso como:

$$\forall x (E(x) \rightarrow (S(x) \vee R(x)))$$

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

● **Exemplo 3 (3/3):** (“**Todo** estudante nesta sala já foi a SP ou ao Rio.”)

● **Solução:**

- Podemos ainda usar um predicado duplo $V(x, y)$ representando “ x já visitou o estado y ”
- Neste caso:
 - $V(x, SP)$ seria o mesmo que $S(x)$
 - $V(x, RJ)$ seria o mesmo que $R(x)$
- Abordagem útil se estivéssemos trabalhando com muitas declarações envolvendo pessoas visitando diferentes estados.
 - Caso contrário, é melhor a forma mais simples...

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

● Exemplos extras (Lewis Carroll) 1 (1/2):

● Considere as declarações (“argumento”):

- “Todos os leões são ferozes.” (“premissa”)
- “Alguns leões não tomam café.” (“premissa”)
- “Algumas criaturas ferozes não tomam café.” (“conclusão”)

● Defina:

- $P(x)$ significa “ x é um leão”
- $Q(x)$ significa “ x é feroz”
- $R(x)$ significa “ x toma café”

● Questão: assumindo que o UD é “o conjunto de todas as criaturas”, expresse o argumento em lógica de predicados.

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

● Exemplos extras (Lewis Carroll) 1 (2/2):

● Podemos expressar as declarações como:

$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ (“Todos os leões são ferozes.”)

$\exists x (P(x) \wedge \neg R(x))$ (“Alguns leões não tomam café.”)

$\exists x (Q(x) \wedge \neg R(x))$ (“Algumas criaturas ferozes não tomam café”)

● Notas:

- a 2a declaração **não** pode ser:

$$\exists x (P(x) \rightarrow \neg R(x))$$

- a 3a declaração **não** pode ser:

$$\exists x (Q(x) \rightarrow \neg R(x))$$

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

● Exemplos extras (Lewis Carroll) 2 (1/2):

● Considere o *argumento*:

- “Todos os beija-flores são muito coloridos” (“premissa”)
- “Nenhum pássaro grande vive no mel” (“premissa”)
- “Pássaros que não vivem no mel são pobres em cores” (“premissa”)
- “Beija-flores são pequenos” (“conclusão”)

● Defina:

- $P(x)$ significa “ x é um beija-flor”
- $Q(x)$ significa “ x é grande”
- $R(x)$ significa “ x vive no mel”
- $S(x)$ significa “ x é muito colorido”

- Questão: assumindo que o UD é “o conjunto de todos os pássaros”, expresse o argumento em lógica de predicados.

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

● Exemplos extras (Lewis Carroll) 2 (2/2):

● Podemos expressar as declarações como:

$\forall x (P(x) \rightarrow S(x))$ (“Todos os beija-flores são muito coloridos”)

$\neg \exists x (Q(x) \wedge R(x))$ (“Nenhum pássaro grande vive no mel”)

$\forall x (\neg R(x) \rightarrow \neg S(x))$ (“Pássaros que não vivem no mel são pobres em cores”)

$\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ (“Beija-flores são pequenos”)

● Nota: estamos assumindo que:

● “pequeno” é o mesmo que “não grande”

● “pobre em cores” é o mesmo que “não muito coloridos”

PROGRAMAÇÃO EM LÓGICA

- Existem linguagens de programação projetadas para “raciocinar” utilizando as regras da Lógica de predicados.
- Exemplo: Prolog (“Programação em Lógica”)
 - Desenvolvido na França, na década de 70, por cientistas da computação que trabalhavam na área de Inteligência Artificial.

LÓGICA DE PRIMEIRA ORDEM

- Final deste item.
- **Dica:** fazer **exercícios** sobre Lógica de Primeira Ordem (predicados e quantificadores)...