1.7- BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

Def.: Um conjunto B $=\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ é uma base do espaço vetorial V se:

I) B é LI;
II) B gera V.

Exemplos:

1- Sejam o conjunto de vetores $S = \{(1, 1), (1, -1)\}$ e o conjunto $T = \{(1, 1), (1, -1), (1,0)\}$,ambos geram o IR^2. Escreva os vetores dos conjuntos acima como combinação linear do vetor (2, 4).

2- Verifique se os conjuntos a abaixo são base do IR^2:

a) B = {(1, 1), (-1, 0)}.

b) B = {(1, 0), (0, 1)}.

c) B = {(1, 2), (2, 4)}.

d) B = {(1, 0), (0, 1), (3, 4)}.

e) B = {(2, -1)}.

3- Mostre que B = {(1, 2, 1), (-1, -3, 0)} não é uma base do IR^3.

4- Sejam os vetores e_1 = (1, 0, 0, ...,0), e_2 = (0, 1, 0, ...,0), ..., e_n = (0, 0, 0, ...,1) e um conjunto B = {e_1, e_2, ... e_n}. Mostre que B é uma base do IR^n.

5- Verifique se o conjunto B = {1, x, x^2, ..., x^n} é uma base do espaço vetorial P_n.

6- Dê a base canônica dos espaços vetoriais abaixo:

a) IR^4:

b) IR^3:

c) IR^2:

d) IR:

e) M(2, 2):

Teorema: Se B = {v_1, v_2, ..., v_n} for uma base de um espaço vetorial V, então qualquer conjunto com mais de n vetores será linearmente dependente.

Dem.: Seja B'= {w_1, w_2, ..., w_n} um conjunto qualquer de m vetores de V, com $m > n$.

Quero mostrar que B'é LD. Para isso, basta mostrar que existem escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ não todos nulos, tais que

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_m w_n = 0 \qquad (1)$$

Como B é uma base de V, cada vetor $w_i \in$ B' é uma combinação linear dos vetores de B, isto é existem números α_i, β_i, ..., δ_i tais que:

$$\begin{array}{c} w_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \\ w_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n \\ \vdots \\ w_m = \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \ldots + \delta_n v_n \end{array} \qquad (2)$$

Substiuindo (2) em (1), temos:

$$\lambda_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) + \lambda_2(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n) + \ldots + \lambda_m(\delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \ldots + \delta_n v_n) = 0$$

ou ordenando os termos convenientemente:

$$(\alpha_1\lambda_1 + \beta_1\lambda_2 + \ldots + \delta_1\lambda_m)v_1 + (\alpha_2\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \ldots + \delta_2\lambda_m)v_2 + \ldots + (\alpha_n\lambda_1 + \beta_n\lambda_2 + \ldots + \delta_n\lambda_m)v_n = 0$$

Tendo em vista que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LI, os coeficientes dessa combinação linear são nulos:

$$\begin{cases} \alpha_1\lambda_1 + \beta_1\lambda_2 + \ldots + \delta_1\lambda_m = 0 \\ \alpha_2\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \ldots + \delta_2\lambda_m = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n\lambda_1 + \beta_n\lambda_2 + \ldots + \delta_n\lambda_m = 0 \end{cases}$$

Esse sistema linear homogêneo possui m variáveis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ e n equações. Como $m > n$, existem soluções não-triviais, isto é, existe $\lambda_2 \neq 0$. Logo, B' = {w_1, w_2, ..., w_n} é LD.

Corolário: Duas bases quaisquer de um espaço vetorial têm o mesmo número de vetores.

Exemplos:

1- A base canônica do IR^3 tem três vetores. Logo, qualquer outra base do IR^3 terá também três vetores.

2- A base canônica de M(2, 2) tem quatro vetores. Portanto, toda base de M(2, 2) terá quatro vetores.

1.8- DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Def.: Se uma base S tem n vetores, então a dimensão de V é n, e escreve-se $dim\ (V) = n$, e nesse caso dizemos que V é de dimensão finita. Em particular, V é chamado como um *espaço vetorial n-dimensional* quando a base para V tem n vetores.

Exemplos:

1- $dim\ (IR^2) =$

2- $dim\ (IR^n) =$

3- dim M(2, 2) =

4- dim M(m, n) =

5- dim P_n =

6- dim {0} =

A dimensão de qualquer subespaço S do IR^3 só poderá ser 0, 1, 2 ou 3. Portanto, temos os seguintes casos:

I) dim S = 0, então S = {0} é a origem.
II) dim S = 1, então S é uma reta que passa pela origem.
III) dim S = 2, então S é um plano que passa pela origem.
IV) dim S = 3, então S é o próprio IR^3.

Teorema: Seja V um espaço vetorial. Qualquer conjunto de vetores LI em V é parte de uma base, isto é, pode ser completado até formar uma base de V.

Exemplo: Dados os vetores $v_1 = (1, -1, 1, 2)$ e $v_2 = (-1, 1, -1, 0)$. Complete o conjunto $\{v_1, v_2\}$ de modo a formar uma base do IR^4.

Teorema: Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V que tem dimensão finita, então $dim\ U \leq dim\ V$ e $dim\ W \leq dim\ V$. Além disso,

$$dim\ (U + W) = dim\ U + dim\ W - dim\ (U \cap W)$$

Exemplo:Considere $V = \{(x, y, z) /\ x + y - z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) /\ x = y\}$. Determine $V + W$.

1.9- COMPONENTES DE UM VETOR

Def.: Seja B = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de um espaço vetorial *V*. Tomando $v \in V$ sendo: $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + . . . + \lambda_n v_n$. Os números $\lambda_1, \lambda_2, . . ., \lambda_n$ são chamadas *componentes* ou *coordenadas* de *v* em relação à base B e se representa por:

$$v_B = (\lambda_1, \lambda_2, . . ., \lambda_n) \text{ ou na notação matricial: } v_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

A *n-upla* ($\lambda_1, \lambda_2, . . ., \lambda_n$ é chamada de vetor-coordenada de *v* em relação à base B, e o vetor coluna $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ é chamado de matriz-coordenada de *v* em relação à base B.

Exemplo: Determinar o vetor coordenada de $v = (8, 6)$ em relação às seguintes bases do IR^2:

a) A = {(1, 0), (0, 1)} b) B = {(2, 0), (1, 3)} c) C = {(1, -3), (2, 4)}

1.10- MUDANÇA DE BASE

Em alguns problemas práticos existe a necessidade de se mudar a base e calcular as componentes de um vetor arbitrário correspondente a uma nova base. Em geral, nesse processo de resolução de problemas, aparecem matrizes complicadas (relacionadas as bases) e devemos simplificar as mesmas. Em um espaço vetorial, saber realizar mudanças de bases nos ajuda a simplificar certos problemas.

Uma vez obtida a matriz de mudança de base, representada por $[I]_B^{B'}$, pode-se encontrar as coordenadas de qualquer vetor *v* em relação à base B, multiplicando a matriz pelas coordenadas de *v* na base B' (supostamente conhecidas).

Exemplo: Sejam B = {(2, -1), (3, 4)} e B' = {(1, 0), (0, 1)} bases coordenadas do IR^2. Encontrar a matriz de mudança de base $[I]_B^{B'}$.

Exercícios

1- Sejam os vetores $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 1, 2)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$. Mostrar que o conjunto B = $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base do IR^3.

2- Considerando B = {(1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 1)} uma base do IR^3 dada no exercício anterior. Determinar:

a) o vetor-coordenada e a matriz-coordenada de $v = (5, 4, 2)$ em relação à base B do exercício anterior.
b) o vetor $v \in IR^3$ cujo vetor-coordenada em relação a B é $v_B = (2, -3, 4)$.

3- Considere os seguintes subespaços de IR^4: $S_1 = \{(a, b, c, d)/a + b + c = 0\}$ e $S_2 = \{(a, b, c, d)/a - 2b = 0 \text{ e } c = 3d\}$.

a) dim S_1 e uma base de S_1.
b) dim S_2 e uma base de S_2.

4- Seja S o subespaço vetorial de $P_2 = \{at^2 + bt + c/a, b, c \in IR\}$ gerado pelos vetores $v_1 = t^2 - 2t + 1$, $v_2 = t + 2$ e $v_3 = t^2 - 3t - 1$. Determinar:

a) Uma base de S e dim S.
b) Uma base de P_2 com a presença de v_1 e v_2.

5- Determinar uma base e a dimensão do espaço solução do sistema homogêneo

$$\begin{cases} x + 2y - 4z + 3t = 0 \\ x + 2y - 2z + 2t = 0 \\ 2x + 4z - 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

6- Determinar o vetor coordenada de $v = (6, 2)$ em relação às seguintes bases:

a) α = {(3, 0), (0, 2)}
b) β = {(1, 2), (2, 1)}
c) γ = {(1, 0), (0, 1)}
d) δ = {(0, 1), (1, 0)}

7- Sejam B = {(1, 0), (0, 1)} e B' = {(-1, 1), (1, 1)} bases coordenadas do IR^2. Encontrar a matriz de mudança de base $[I]_B^{B'}$ e as coordenadas do vetor $v = (3, -2)$ em relação a base B.

RESPOSTAS

2- a) $v_B = (5, -6, 1)$; b) $v = (2, 1, 4)$. 3- a) dim $S_1 = 3$ e B = {(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)}; b) dim $S_2 = 2$ e B = {(2, 1, 0, 0), (0, 0, 3, 1)}. 4- a) dim $S = 2$ e B = $\{v_1, v_2\}$; b) $\{t^2 - 2t + 1, t + 2, t^2\}$. 5- B = {(-2, 1, 0, 0), (-2, 0, 1, 2)}. 6- a) $v_\alpha = (2, 1)$; b) $v_\beta = (-2/3, 10/3)$; c) $v_\gamma = (3, 2)$; d) $v_\delta = (2, 6)$. 7- a) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.