ÁLGEBRA LINEAR

1- ESPAÇOS VETORIAIS

1.1- VETORES NO PLANO

Def.: São segmentos de reta orientados com ponto inicial na origem.

Vetores no plano são determinados exclusivamente pelo seu ponto final, pois o ponto inicial é fixo na origem. Assim, para cada ponto do plano $P(x_1, x_2)$, está associado um único vetor $v = \overrightarrow{OP}$.

O vetor $\overrightarrow{OP}$ pode ser representado pela notação $v = (x_1, x_2)$ ou pela matriz-coluna $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e a origem do plano estará associada ao vetor nulo, ou seja, $v = (0, 0)$.

Ex.:

1.1.1- Vetor Oposto

Def.: É o vetor que tem mesmo módulo, a mesma direção, porém sentido contrário ao de v. O vetor oposto é representado por $-v$.

Ex.:

1.1.2- Vetor Unitário

Def.: Um vetor v é unitário se $|v| = 1$.

1.1.3- Vetores Colineares

Def.: Dois vetores u e v são colineares se tiverem a mesma direção.

Ex.:

1.1.4- Vetores Coplanares

Def.: São vetores não-nulos que pertencem a um mesmo plano α.

Ex.:

1.2- O ESPAÇO IR^n

O espaço de dimensão n (ou espaço n-dimensional) é constituído pelo conjunto de todas as n-uplas (listas com n elementos) ordenadas de números reais, ou seja,

$$IR^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) / x_i \in IR\}$$

No espaço IR^n temos que quádruplas de números (x_1, x_2, x_3, x_4) são vistas como pontos ou vetores no espaço IR^4 de quarta dimensão. A quíntupla (2, -1, 3, 5, 4) pode ser interpretada como um ponto ou um vetor no espaço IR^5 de dimensão 5 e assim por diante.

Embora se perca a visão geométrica em espaços com dimensão acima de 3, a maneira de se trabalhar nesses espaços é a mesma utilizada nos espaços IR^2 e IR^3.

Exemplo: Seja $u = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ dois vetores do IR^n e α um escalar, defini-se:

a) $u = v \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$.
b) $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.
c) $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \ldots, \alpha x_n)$.
d) $u \cdot v = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n)$.
e) $|u| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

A representação de um vetor no IR^n também pode ser feita com a notação matricial:

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Como pode ser visto nos itens b e c do exemplo acima, no IR^n estam definidas as operações de adição e multiplicação por escalar, tais que para quaisquer u, v, $w \in IR^n$ e α, $\beta \in IR$ as propriedades abaixo podem ser verificadas.

a) Propriedades da Adição:

i) $u + v = v + u$
ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$
iii) $u + 0 = u$, onde $0 = (0, 0, 0, \ldots, 0) \in IR^n$ representa o vetor nulo
iv) $u + (-u) = 0$, onde $-u$ representa o vetor oposto de u, tal que $-u \in IR^n$

b) Propriedades da Multiplicação por escalar:

i) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
ii) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
iii) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta v)$
iv) $1.u = u$

1.3- ESPAÇOS VETORIAIS

Def.: Um *espaço vetorial real* (ou espaço vetorial sobre *IR*) é um conjunto *V*, não vazio, onde estam definidas duas operações: soma e multiplicação por escalar, isto é:

I) $\forall\ u, v \in V, u + v \in V$
II) $\forall\ \alpha \in IR$ e $\forall\ u \in V, \alpha u \in V$

e para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in IR$ as propriedades abaixo sejam satisfeitas.

a) Propriedades da Soma:

i) $u + v = v + u$
ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$
iii) $v + 0 = v$, onde 0 representa o vetor nulo
iv) $v + (-v) = 0$, onde $-v$ representa o vetor oposto de v, tal que $-v \in V$

b) Propriedades da Multiplicação por escalar:

i) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
ii) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
iii) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
iv) $1.v = v$

Os elementos do espaço vetorial *V* são chamados vetores, independentemente de sua natureza.

Exemplos:

1- $V = IR^3 =$

2- $V = IR^n =$

2.1.- Para $n = 5$, temos $V = IR^5 =$

2.2- Dados $u = (1, 0, 2, -3, 4)$ e $v = (0, 1, 1, -2, 5)$, calcule $u - 2v$:

3- $V = IR^{\infty} =$

4- Seja V = M(m, n), o conjunto das matrizes reais $m \times n$ com as mesmas propriedades de soma e produto por escalar, então

V = M(2, 2) =.

5- Seja $P_n = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n;\ a_i \in IR\}$, o conjunto dos polinômios com coeficientes reais, de grau menor ou igual a n (incluindo zero), sendo válidas as operações soma de polinômios e multiplicação por números reais, então para

$n = 2 = P_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2\}$ e $Q_2 = \{b_0 + b_1x + b_2x^2\}$ temos:

6- Seja $F(IR)$, o conjunto de todas as funções reais sendo válidas as operações de soma e multiplicação por escalar, então para $f(x) \in F(IR)$, $g(x) \in F(IR)$ e $\alpha \in IR$, temos:

1.3.1- Propriedades dos Espaços Vetoriais

i) Existe um único vetor nulo em V (elemento neutro da adição).
ii) Cada vetor $v \in V$ admite apenas um simétrico $(-v) \in V$.
iii) Para quaisquer $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$, então $u = v$.
iv) Qualquer que seja $v \in V$, tem-se $-(-v) = v$, isto é o oposto de $-v$ é v.
v) Quaisquer que sejam $u, v \in V$, existe um e somente um $x \in V$ tal que $u + x = v$, sendo $x = v - u$.
vi) Qualquer que seja $v \in V$, tem-se: $0.v = 0$.
vii) Qualquer que seja $\lambda \in IR$, tem-se: $\lambda.0 = 0$.
viii) $\lambda.v = 0$ implica $\lambda = 0$ ou $v = 0$.
ix) Qualquer que seja $v \in V$, tem-se $(-1)\ v = -v$.
x) Qualquer que sejam $v \in V$ e $\lambda \in IR$, tem-se: $(-\lambda)v = \lambda(-v) = -(\lambda v)$