Provas

Prof^a Jerusa Marchi

Departamento de Informática e Estatística

Universidade Federal de Santa Catarina

e-mail: jerusa@inf.ufsc.br

Provas

- O que é uma **Prova**?
  - Algo que demonstra que uma afirmação ou um fato é verdadeiro
  - Em matemática, prova = demonstração
    - A demonstração consiste na apresentação ou no particular arranjo dos argumentos que produzem a prova
    - Uma prova é uma forma de comunicação que visa convercer, a quem a leia, que uma afirmação segue a partir de outras e que se estas outras são verdadeiras, então aquela também deve ser

Alguns Conceitos Básicos

- **Definições**
  - descreve os objetos e as noções utilizadas
  - Exemplos:
    - Definição de Conjunto, Conjunto Vazio, Conjunto Unitário
  - Após definidos os objetos, são construídas asserções sobre suas propriedades

Alguns Conceitos Básicos

- **Prova**
  - Uma prova é uma sequência de argumentos logicamente coerentes que visam demonstrar que uma asserção é **verdadeira**
- **Teorema**
  - Asserção demonstrada verdadeira
- **Lema**
  - Um teorema que assiste a um outro de maior importância
- **Corolário**
  - Uma asserção cuja verdade decorre diretamente de um teorema

Provas

- Para não desanimar...
  - A construção de provas matemáticas nem sempre é fácil
  - Conhecer bem a asserção que se quer provar é fundamental
    - leia a asserção e certifique-se de tê-la entendido (notação e definições)
    - se necessário, divida a asserção nas partes que a compõem

$$\text{A sse B} \equiv \text{A se B e B se A}$$

    - teste a asserção para vários exemplos antes de tentar prová-la
    - teste a asserção visando encontrar algum contraexemplo

Construindo Provas

- **Provas por Indução**
  - Método:
    - mostrar que a afirmação é válida para 1 (base)
    - assumir que a afirmação é válida para n (hipótese)
    - mostrar que a afirmação é válida para $n+1$ (passo)
  - Baseia-se no método de geração dos números naturais: adicionar 1 e na regra de inferência Modus Ponens

$$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$

  - o ponto inicial pode ser qualquer número

Construindo Provas

- Exemplo: Prove que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n.(n+1)$

Prova:

Base:

$$1 = \frac{1}{2}1.(1+1)$$

Hipótese

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n.(n+1)$$

Construindo Provas

Passo

$$1+2+\cdots+n+(n+1) = [\frac{1}{2}\,n.(n+1)] + (n+1)$$

Logo

$$1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{1}{2}\,n^2 + n + \frac{1}{2}\,(2n+2)$$

e

$$1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{1}{2}\,(n^2+3n+2)$$

Portanto

$$1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{1}{2}\,(n+1).(n+2)$$

Ou seja

$$1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{1}{2}\,(n+1).((n+1)+1)$$

Como queríamos demonstrar.

Construindo Provas

- **Prova por Contradição**
  - Método:
    - Assume-se por hipótese que a proposição que se quer demonstrar é falsa, ou seja, a sua negação é verdadeira
    - Se disso deriva-se uma contradição, então não se pode assumir tal hipótese e, portanto a proposição é verdadeira

Construindo Provas

- Exemplo: Prove que $\sqrt{2}$ é irracional.
  Prova: Suponha que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, p e q inteiros. Suponha também que $\frac{p}{q}$ seja uma fração irredutível, isto é, nenhum número divide ambos p e q. Então, $p = \sqrt{2}q$, e $p^2 = 2q^2$. Logo, p^2 é par e p é portanto par também. Assim desde que $\frac{p}{q}$ é fração irredutível, q é impar. Mas se $p = 2r$, então $(2r)^2 = 2q^2$ e $4r^2 = 2q^2$. Portanto $2r^2 = q^2$, o que significa que q^2 é par e assim q é par. Contradição.

Construindo Provas

- **Prova por Construção**
  - Consiste em contruir a prova por meio de outras asserções verdadeiras

Construindo Provas

- Exemplo: Prove que $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

  Prova: Para construir esta prova, inicialmente tomemos $L = A - (B \cup C)$ e $R = (A - B) \cap (A - C)$. Se $L = R$ então (i)$L \subseteq R$ e (ii) $R \subseteq L$.

  (i) Se $x \in L$, então $x \in A$, mas $x \notin B$ e $x \notin C$. Logo, $x \in A - B$ e $x \in A - C$, sendo portanto um elemento de R. Então, $L \subseteq R$.

  (ii) Seja $x \in R$, então $x \in A - B$ e $x \in A - C$, sendo portanto, um elemento de A, mas não de B, nem de C. Logo, $x \in A$, mas $x \notin B \cup C$, logo $x \in L$. Portanto $R \subseteq L$.

  Como queríamos demonstrar.

Construindo Provas

- **Prova por Contraexemplo**
  - Para mostrar que uma proposição sobre alguma classe de objetos não é verdadeira, basta apenas apresentar um objeto para o qual falhe a propriedade
  - Consiste em encontrar um exemplo que demonstre a incorretude de um suposto teorema

Construindo Provas

- Exemplo: **Suposto teorema:** Para todo número x, se x é um número primo então x é ímpar.

  Contraexemplo: O inteiro 2 é um número primo, mas 2 é par.