5.7- DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES SIMÉTRICOS

Sendo A a matriz canônica do operador T, isto é [T] = A, as matrizes A e D são semelhantes por representarem o mesmo operador T em bases diferentes. Logo, a relação entre matrizes semelhantes permite escrever:

$D = M^{-1}.A.M$

sendo M a matriz de mudança de base $[I]_A^D$.

Fazendo M como a matriz mudança da base dos autovetores do operador T, representada por P, para a base canônica C = $\{e_1, e_2, e_3\} \in IR^3$.

Como M = $[I]_C^P$ = $C^{-1}.P = I^{-1}.P = P$

A relação anterior escreve-se: $D = P^{-1}.A.P$

Diz-se nesse caso que a matriz P diagonaliza A, ou que P é a matriz diagonalizadora.

Exemplo: Determinar uma matriz P que diagonaliza A = $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ e calcular $P^{-1}.A.P$.

5.7.1- **Propriedades**:

1- A equação característica de uma matriz simétrica tem apenas raízes reais.

Fazendo a demonstração para o caso de uma matriz simétrica A de ordem 2, temos:

Seja a matriz A = $\begin{bmatrix} p & r \\ r & q \end{bmatrix}$

A equação característica de A é:

$\det(A - \lambda i) = \begin{bmatrix} p-\lambda & r \\ r & q-\lambda \end{bmatrix} = 0$

isto é, $(p - \lambda)(q - \lambda) - r^2 = 0$

$\Rightarrow pq - \lambda p - \lambda q + \lambda^2 - r^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - (p + q)\lambda + (pq - r^2)= 0$

O discriminante (Δ) dessa equação do 2° grau em λ é:

$(p + q)^2 - 4(pq - r^2) = p^2 + 2pq + q^2 - 4pq + 4r^2 = (p - q)^2 + 4r^2$

Tendo em vista que o valor de $\Delta > 0$, por ser uma soma de quadrados, logo as raízes da equação característica são reais e, portanto a matriz A possui dois autovalores.

2- Se T: $V \rightarrow V$ é um operador linear simétrico com autovalores distintos, então os autovetores são ortogonais.

De fato: Sejam λ_1 e λ_2 autovalores do operador simétrico T e $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Sejam ainda $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ e $T(v_2) = \lambda_2 v_2$. Precisamos mostrar que

$v_1.v_2 = 0$.

Sendo T um operador simétrico, pela propriedade de operador simétrico, vem:

$T(v_1).v_2 = v_1.T(v_2)$

$\Rightarrow \lambda_1 v_1.v_2 = v_1.\lambda_2 v_2$

$\Rightarrow \lambda_1(v_1.v_2) - \lambda_2(v_1.v_2) = 0$

ou, ainda $(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1.v_2) = 0$, como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ implica que $v_1.v_2 = 0$, ou seja, $v_1 \perp v_2$.

3- Sabe-se que A é diagonalizada pela matriz P dos autovetores de $D = P^{-1}.A.P$

No caso de A ser simétrica, pela propriedade anterior, P será base ortogonal, visando futuras aplicações, é conveniente que P, além de ortogonal, seja ortonormal, o que se obtém normalizando cada vetor.
Assim, os autovetores ortonormais de P formarão uma matriz ortogonal, e pela propriedade 5 de operador ortogonal, temos $P^{-1} = P^t$. Logo a relação fica:

$D = P^t.A.P$

Nesse caso, diz-se que P *diagonaliza* A *ortogonalmente*.

Exemplos:

1- Determinar uma matriz ortogonal P que diagonaliza a matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

2- Seja o operador linear simétrico T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ definido pela matriz A = $\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$.

Exercícios

1- Para cada uma das seguintes matrizes simétricas A, encontrar uma matriz ortogonal P, para a qual P^tAP seja diagonal.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

2- Determinar uma matriz P que diagonaliza A ortogonalmente e calcular $P^{-1}AP$.

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

RESPOSTAS

1- a) $P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$; b) $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$; c) $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$; d) $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. 2- a) $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $P^tAP = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; b) $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $P^tAP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; c) $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$, $P^tAP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.