2.6- MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Def.: Seja uma transformação linear T: $V \to W$, B = $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V e B' = $\{w_1, \ldots, w_n\}$ uma base de W. Então $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ são vetores de W e portanto

$$\begin{array}{c} T(v_1) = a_{11}w_1 + \ldots + a_{m1}w_m \\ \vdots \\ T(v_n) = a_{1n}w_1 + \ldots + a_{mn}w_m \end{array}$$

A transposta da matriz de coeficientes deste sistema, denotada por $[T]_{B'}^{B}$ é chamada matriz de T em relação às bases B e B'.

$$[T]_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ T(v_1)_B & & T(v_n)_B \end{array}$$

Observe que T passa a ser a aplicação linear associada à matriz A e as bases B e B', isto é $T = T_A$.

Exemplos:

1- Sejam T: $IR^3 \to IR^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$, B = {(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)} e B'= {(1, 3), (1, 4)}. Procure $[T]_{B'}^{B}$.

2- Seja T a transformação linear do exemplo 1 e sejam B = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} e B'= {(1, 0), (0, 1)}. Procure $[T]_{B'}^{B}$.

3- Dadas as bases B= {(1, 1), (0, 1)}. do IR^2 e B' = {(0, 3, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 1)} do IR^3, encontre a transformação linear T: $IR^2 \to IR^3$ cuja matriz é $[T]_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

2.7- OPERAÇÕES COM TRANSFORMAÇÕES LINEARES

2.7.1- Adição

Sejam as transformações lineares T_1: $V \to W$ e T_2: $V \to W$. A soma das transformações lineares T_1 e T_2 é a transformação linear dada por

$$T_1 + T_2: V \to W, \text{ tal que } (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v), \ \forall v \in V.$$

Se B' e B são bases de V e W, respectivamente, então $[T_1 + T_2]_{B'}^{B} = [T_1]_{B'}^{B} + [T_2]_{B'}^{B}$.

2.7.2- Multiplicação por escalar

Sejam a transformação linear T: $V \to W$ e $\alpha \in IR$. O produto de T pelo escalar α é a transformação linear dada por

$$\alpha T: V \to W, \text{ tal que } (\alpha T)(v) = \alpha T(v), \ \forall v \in V.$$

Se B' e B são bases de V e W, respectivamente, então $[\alpha T]_{B'}^{B} = \alpha [T]_{B'}^{B}$.

2.7.3- Composição

Sejam as transformações lineares T_1: $V \to W$ e T_2: $W \to U$. A aplicação composta de T_1 com T_2 é a transformação linear dada por

$$T_2 \circ T_1: V \to U, \text{ tal que } (T_2 \circ T_1)(v) = T_2(T_1(v)), \ \forall v \in V.$$

Se A, B e C são bases de V, W e U, respectivamente, então $[T_2 + T_1]_{C}^{A} = [T_2]_{C}^{B} \times [T_1]_{B}^{A}$.

Exemplos:

1- Sejam T_1: $IR^2 \to IR^3$ e T_2: $IR^2 \to IR^3$ transformações lineares definidas por $T_1(x, y) = (x + 2y, 2x - y, x)$ e $T_2(x, y) = (-x, y, x + y)$. Determine:

a) $T_1 + T_2$
b) $3T_1 - 2T_2$
c) a matriz canônica de $3T_1 - 2T_2$ e mostre que: $[3T_1 - 2T_2] = 3[T_1] - 2[T_2]$.

2- Sejam S e T operadores lineares no IR^2 definidos por $S(x, y) = (2x, y)$ e $T(x, y) = (x, x - y)$. Determine:

a) $S \circ T$

b) $T \circ S$

c) $S \circ S$

d) $T \circ T$

Exercícios

1- Seja a transformação linear T: $IR^3 \to IR^2$ definida por T(x, y, z) = ($2x - y + z$, $3x + y - 2z$). Considere as bases B = {(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)} e B' = {(2, 1), (5, 3)}.

a) Determinar $[T]_{B'}^{B}$.
b) Se v = (3, -4, 2) (coordenadas em relação à base canônica do IR^3), calcular $T(v)_B$.

2- Considere a transformação do exercício anterior com a mesma base B e B' = {(1, 0), (0, 1)}.

a) Determinar $[T]_{B'}^{B}$.
b) Se v = (3, -4, 2), calcular $T(v)_B$ utilizando a matriz encontrada.

3- Seja ainda a mesma transformação linear do exercício anterior. Sejam as bases canônicas do IR^3 e do IR^2, B = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} e B' = {(1, 0), (0, 1)}.

a) Determinar $[T]_{B'}^{B}$.
b) Se v = (3, -4, 2), calcular $T(v)_B$ utilizando a matriz encontrada.

4- Dado o exemplo abaixo, encontre a matriz canônica das transformações abaixo:

Ex.: T: $IR^2 \to IR^3$, T(x, y) = ($3x - 2y$, $4x + y$, x).

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) T: $IR^2 \to IR^2$, T(x, y) = (x, $-y$).
b) T: $IR^3 \to IR$, T(x, y, z) = $4x - y$.

5- Dadas as bases B = {(1, 1), (1, 0)} do IR^2 e B' = {(1, 2, 0), (1, 0, -1), (1, -1, 3)} do IR^3, determinar a transformação linear T: $IR^2 \to IR^3$ cuja matriz é:

$$[T]_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

RESPOSTAS

1- a) $[T]_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$; b) $T(v)_B = \begin{bmatrix} 31 \\ -10 \end{bmatrix}$. 2- a) $[T]_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$; b) $T(v)_B = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}$. 3- a) $[T]_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; b) $T(v)_B = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}$. 4- a) [T] = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; b) [4 -1 0]. 5- T($x$, y) = ($x + y$, $-3x + 8y$, $11x - 15y$).