6.2- ESPAÇO VETORIAL EUCLIDIANO

Def.: É um espaço vetorial real, de dimensão finita, no qual está definido um produto interno.

6.3- MÓDULO DE UM VETOR

Def.: Dado um vetor v de um espaço vetorial euclidiano V, *módulo*, *norma* ou *comprimento* de v é o número real não-negativo, indicado por $|v|$ e definido por:

$$|v| = \sqrt{v.v}$$

6.3.1- **Propriedades**: Seja V um espaço vetorial de um vetor

1- $|v| \geq 0$, $\forall\, v \in V$ e $|v| = 0$, se somente se, $v = 0$
2- $|\alpha v| = |\alpha||v|$, $\forall\, v \in V$, $\forall\, \alpha \in IR$

De fato: $|\alpha v| = \sqrt{(\alpha v)(\alpha v)} = \sqrt{\alpha^2(v.v)} = |\alpha|\sqrt{v.v} = |\alpha||v|$

3- $|u.v| \leq |u||v|$, $\forall\, u, v \in V$ (Desigualdade de *Schwarz* ou Inequação de *Cauchy-Shwarz*)

Se $u = 0$ ou $v = 0$, vale a igualdade $|u.v| = |u||v|$, se não $\forall\, \alpha \in IR$, vale a desigualdade: $(u + \alpha v)\,(u + \alpha v) \geq 0$ pela propriedade 4 de produto interno.

Aplicando a distributiva, vem

$$u.u + u.\alpha v + \alpha v.u + \alpha^2 v.v \geq 0$$
$$u.u + 2u.\alpha v + \alpha^2 v.v \geq 0$$
$$|v|^2\alpha^2 + 2(u.v)\alpha + |u|^2 \geq 0$$

Temos então um trinômio do 2° grau em α que deve ser positivo para qualquer α. Como o coeficiente $|v|^2 \neq 0$, então para garantir que a desigualdade seja positiva o discriminante deve ser negativo, assim

$$\Delta = 4(u.v)^2 - 4.\ |v|^2.|u|^2 \leq 0$$

daí vem, $(u.v)^2 \leq |u|^2\,.\,|v|^2$

considerando a raiz quadrada positiva de ambos os membros, temos:

$$|u.v| \leq |u|.|v|$$

4- $|u+v| \leq |u| + |v|$, $\forall$ u, $v \in V$ (Desigualdade Triangular)

De fato: $|u+v| = \sqrt{(u+v).(u+v)} = \sqrt{u.u + 2(u.v) + v.v} = |u|^2 + 2(u.v) + |v|^2 = |u+v|^2$

Como $u.v \leq |u.v| \leq |u||v|$

Logo, $|u+v| \leq |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$
daí, $|u+v|^2 \leq (|u| + |v|)^2$
ou, $|u+v| \leq |u| + |v|$

6.4- DISTÂNCIA ENTRE DOIS VETORES

Def.: Dados dois vetores u e v, a *distância* entre eles, é o número real representado por d(u, v) e definido por:

$$d(u, v) = |u - v|$$

6.5- VETOR UNITÁRIO

Def.: Se $|v| = 1$, então o vetor v é um vetor unitário, nesse caso diz-se que v está normalizado.

Todo vetor não- nulo $v \in V$ pode ser normalizado, para isso basta fazer $u = \dfrac{v}{|v|}$.

Exemplo: Considere o espaço $V = IR^3$ com produto interno $v_1.v_2 = 3x_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2$, sendo $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Dado o vetor $v = (-2, 1, 2) \in IR^3$, calcule:

a) $|v|$ com relação ao produto interno dado e normalize v;

b) $|v|$ com relação ao produto interno usual e normalize v.

6.6- ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES

Def.: Sejam u e v vetores não-nulos de um espaço vetorial euclidiano V. O ângulo θ entre u e v é dado por

$$cos\ \theta = \frac{u.v}{|u||v|}$$

De fato: Da Desigualdade de Schwarz, temos

$$|u.v| \leq |u||v|$$

que pode ser escrita como $\dfrac{|u.v|}{|u||v|} \leq 1$

ou, $\left|\dfrac{u.v}{|u||v|}\right| \leq 1$

o que implica, $-1 \leq \dfrac{u.v}{|u||v|} \leq 1$

portanto, existe um ângulo θ entre 0 e π radianos tal que $cos\ \theta = \dfrac{u.v}{|u||v|}$.

Exemplos:

1- Seja o produto interno usual no IR^3 e IR^4. Determinar o ângulo entre os seguintes pares de vetores:

a) $u = (2, 1, -5)$ e $v = (5, 0, 2)$

b) $u = (1, -1, 2, 3)$ e $v = (2, 0, 1, -2)$

2- Seja $V = M(2, 2)$, as matrizes quadradas de ordem 2 reais e o produto interno dado pela expressão $\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right\rangle = ae + 2bf + 3cg + dh$, calcule o ângulo entre as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ segundo esse produto interno.

3- Seja V um espaço vetorial euclidiano e $u, v \in V$. Determinar o cosseno do ângulo entre os vetores u e v sabendo que $|u| = 3$, $|v| = 7$ e $|u + v| = 4\sqrt{5}$.

4- Considere, no IR^2, o produto interno definido por $v_1.v_2 = 3x_1x_2 + y_1y_2$, sendo $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$. Em relação a esse produto interno, determine um vetor tal que:

$|v| = 4$, $v.u = 10$ e $u = (1, -2)$.

Exercícios

1- Considere o seguinte produto interno P_2: $p.q = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$, sendo $p = a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $q = b_2x^2 + b_1x + b_0$. Dados os vetores $p_1 = x^2 - 2x + 3$, $p_2 = 3x - 4$ e $p_3 = 1 - x^2$, calcule:

a) $p_1 . p_2$ b) $|p_1| . |p_3|$ c) $|p_1 + p_2|$ d) $p_2/|p_2|$ e) cosseno do ângulo entre $p_2 . p_3$

2- Seja $V = M(2, 2)$, a seguinte fórmula $u.v = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$ define um produto interno nesse espaço. Dados os vetores $u=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine $|u + v|$ e o ângulo entre u e v.

RESPOSTAS

1-a) – 18; b) $\sqrt{14}$ e $\sqrt{2}$; c) $\sqrt{3}$; d) $(3x/5) - (4/5)$; e) $\cos\theta = -2\sqrt{2}/5$. 6- a) $\sqrt{21}$; b) $\theta = \arccos 4/\sqrt{42}$.