6.7- VETORES ORTOGONAIS

Def.: Dois vetores u e v de um espaço vetorial euclidiano V são ortogonais se, e somente se $u.v = 0$, ou seja,

$$u \perp v \Leftrightarrow u.v = 0$$

Exemplo: Seja $V = IR^2$ um espaço vetorial euclidiano em relação ao produto interno $(x_1, y_1).(x_2, y_2) = x_1x_2 + 2y_1y_2$. Com relação a este produto interno verifique se os vetores $u = (-3, 2)$ e $v = (4, 3)$ são ortogonais:

6.8- CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

Def.: Seja V um espaço vetorial euclidiano. Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ é ortogonal se dois vetores quaisquer, distintos, são ortogonais, isto é, $v_i.v_j = 0$ para $i \neq j$.

Exemplo: Verifique se o conjunto $\{(1, 2, -3), (3, 0, 1), (1, -5, -3)\} \in IR^3$ é ortogonal com relação ao produto interno usual:

Teorema: Um conjunto ortogonal de vetores não-nulos A = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI.

De fato: Considerando a igualdade $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$.

Fazendo o produto interno de ambos os membros da igualdade por v_i, temos:

$(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n).v_i = 0.v_i$

ou

$a_1(v_1.v_i) + a_2(v_2.v_i) + \ldots + a_i(v_i.v_i) + \ldots + a_n(v_n.v_i) = 0$

Como A é ortogonal, $v_j.v_i = 0$ para $j \neq i$ e $v_i.v_i \neq 0$, pois $v_i \neq 0$. Então $a_i(v_i.v_i) = 0$ implica $a_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Logo A = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI.

6.9- BASE ORTOGONAL

Def.: Uma base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V é ortogonal se os seus vetores são dois a dois ortogonais.

Exemplo: O conjunto do exemplo anterior $\{(1, 2, -3), (3, 0, 1), (1, -5, -3)\}$ é uma base ortogonal do IR^3.

6.10- BASE ORTONORMAL

Def.: Uma base B = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de um espaço vetorial euclidiano V é ortonormal se B é ortogonal e se todos os seus vetores são unitários, isto é

$$v_i.v_j = \begin{cases} 0 & para\ i \neq j \\ 1 & para\ i = j \end{cases}$$

Exemplos: Em relação ao produto interno usual, verifique se os conjuntos abaixo formam uma base ortonormal.

a) B = {(1, 0), (0, 1)}

b) B = $\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$

c) B = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}

d) B = $\{u_1, u_2, u_3\}$, sendo $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $u_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ e $u_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

6.11- COEFICIENTES DE FOURIER

Bases ortogonais são importantes porque nos permite encontrar as coordenadas de um vetor qualquer em relação a elas através de um simples procedimento, que é o cálculo dos *Coeficientes de Fourier*.

Seja V um espaço vetorial euclidiano e base B = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ortogonal de V e w um vetor qualquer de V.

O cálculo das coordenadas de w em relação a B é feito da seguinte forma:

Sabemos que $w = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$, para determinar a i-ésima coordenada a_i, basta fazer o produto interno dos dois membros da igualdade por v_i.

Então $w.v_i = a_i(v_i.v_i)$ donde $a_i = \dfrac{w.v_i}{v_i.v_i}$. Esta coordenada é chamada *coeficiente de Fourier* de w em relação a v_i.

Exemplo: Seja $V = IR^2$ com produto interno usual e B = {(1, 1), (-1, 1)}. Verifique se B é uma base ortogonal e calcule$[(2, 3)]_B$.

Exercícios

1- Determinar o valor de m para que os vetores $u = (2, m, -3)$ e $v = (m - 1, 2, 4)$ sejam ortogonais em relação ao produto interno usual do IR^3.

2- Seja $V = IR^3$ e o produto interno $(x_1, y_1, z_1).(x_2, y_2, z_2) = 2x_1x_2 + 3y_1y_2 + z_1z_2$. Determine um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $u = (1, 2, 1)$ e $v = (1, 1, 1)$.

3- Construa, a partir do vetor $v_1 = (1, -2, 1)$, uma base ortogonal do IR^3 relativamente ao produto interno usual e obtenha, a partir dela uma base ortonormal.

4- O conjunto B = {(1, -1), (2, b)} é uma base ortogonal do IR^2 em relação ao produto interno $(x_1, y_1).(x_2, y_2) = 2x_1x_2 + y_1y_2$. Calcule o valor de b e determine, a partir de B, uma base ortonormal.

RESPOSTAS

1- $m = 7/2$. 2- $w = (1/\sqrt{6}, 0, -2/\sqrt{6})$. 3- B = {(1, -2, 1), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)} e B' = $\{(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}), (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\}$. 4- $b = 4$ e B' = $\{(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})\}$.