

INE5403 - Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

2) Fundamentos

2.1) Conjuntos e Sub-conjuntos

2.2) Números Inteiros

2.3) Funções

2.4) Seqüências e Somas

2.5) Crescimento de Funções

Seqüências

- Uma seqüência é uma estrutura ordenada usada para representar lista ordenada de elementos.

Def.: uma **seqüência** é uma função de um subconjunto dos inteiros, $\{0,1,2,\dots\}$ ou $\{1,2,3,\dots\}$ para um conjunto S .

- a_n é a imagem do inteiro n
- a_n é um termo da seqüência
- Usamos a notação $\{a_n\}$ para denotar a seqüência
- Note que a_n representa um termo da seqüência $\{a_n\}$

Seqüências

- Descrevemos seqüências listando os seus termos em ordem crescente do índice.
- Exemplo: considere a seqüência $\{a_n\}$, onde:

$$a_n = 1/n$$

- A lista dos termos desta seqüência, ou seja:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

- Começa com:

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$$

Seqüências

- Exemplo: uma **progressão aritmética** é uma seqüência da forma:
 - $a, a+d, a+2d, \dots, a+nd$
 - Ex.: $\{s_n\}$, onde $s_n = -1 + 4n$
 - a lista de termos $s_0, s_1, s_2, s_3, \dots$ começa com:
 $-1, 3, 7, 11, \dots$

Seqüências

- Exemplo: uma **progressão geométrica** é uma seqüência da forma:
 - a, ar, ar^2, \dots, ar^n
 - Ex.: $\{c_n\}$, onde $c_n = 3 \cdot 4^n$
 - a lista de termos $c_1, c_2, c_3, c_4, \dots$ começa com:
12, 48, 192, 768, ...

Seqüências

- Seqüências finitas do tipo a_1, a_2, \dots, a_n são muito usadas na Ciência da Computação
 - Também são chamadas de **strings**
 - O **comprimento** de uma string é o seu nro de termos
- Exemplo: a seqüência abcd é uma string de comprimento 4.

Seqüências especiais

- Problema: encontrar uma **fórmula** (regra geral) para a **construção dos termos** de uma seqüência.
 - Às vezes, apenas alguns termos são conhecidos (são solução de algum problema).
 - Como identificar a seqüência?
- Os primeiros termos **não definem** a seqüência inteira:
 - existem infinitas seqüências que começam com os **mesmos termos iniciais**
 - mas eles podem ajudar a montar uma **conjectura** sobre a identidade da seqüência

Seqüências especiais

- Ao tentar deduzir uma regra de formação, busca-se um **padrão** nos primeiros termos.
- Pode-se também tentar determinar **como** um termo é produzido a partir dos que o precedem.

Seqüências especiais

- Algumas questões úteis:
 - O mesmo valor **reaparece**?
 - Há termos obtidos a partir dos anteriores pela **adição de uma qtde fixa**?
 - ou de uma qtde que dependa da posição?
 - Há termos obtidos a partir dos anteriores pela **multiplicação por um valor fixo**?
 - Há termos obtidos a partir de uma **combinação dos anteriores**?
 - Há algum termo que **se repete**?

Seqüências especiais

- **Exemplo:** encontre fórmulas para a seqüência cujos 1ros termos são dados por: $1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16$
- **Resposta:**
 - os denominadores são potências de 2
 - opção possível: $a_n = 1/2^{n-1}$
 - ou: PG com $a=1$ e $r=1/2$

Seqüências especiais

- **Exemplo:** encontre fórmulas para as seqüências cujos 1ros termos são dados por: 1,3,5,7,9
- **Resposta:**
 - cada termo obtido pela adição de 2 ao anterior
 - opção possível: $a_n = 2n - 1$
 - ou: PA com $a = 1$ e $d = 2$

Seqüências especiais

- **Exemplo:** encontre fórmulas para as seqüências cujos 1ros termos são dados por: 1,-1,1,-1,1
- **Resposta:**
 - os termos alternam entre 1 e -1
 - opção possível: $a_n = (-1)^{n+1}$
 - ou: PG com $a=1$ e $r=-1$

Formas de construção

- **Exemplo:** como se pode produzir uma seqüência cujos 10 primeiros termos são dados por 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4?
 - o 1 aparece uma vez
 - o 2 aparece duas vezes,...
 - Possível regra de formação: “o inteiro n aparece exatamente n vezes”

Formas de construção

- **Exemplo:** como se pode produzir uma seqüência cujos 10 primeiros termos são dados por 5,11,17,23,29,35,41,47,53,59?
- **Resposta:**
 - cada um dos 10 primeiros termos é obtido pela **adição de 6 ao anterior**
 - possível regra de formação: “o n-ésimo termo pode ser produzido começando-se com 5 e adicionando-se 6 por n-1 vezes”
 - ou seja: o n-ésimo termo é $5 + 6(n-1) = 6n - 1$

Formas de construção

- Outra técnica: comparar os termos da seqüência de interesse com os termos de uma seqüência bem conhecida, como:
 - termos de uma PA, PG
 - quadrados perfeitos
 - cubos perfeitos

Seqüências úteis

n-ésimo termo	primeiros 10 termos
n^2	1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,...
n^3	1,8,27,64,125,216,343,512,729,1000,...
n^4	1,16,81,256,625,1296,2401,4096,6561,10000,...
2^n	2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024,...
3^n	3,9,27,81,243,729,2187,6561,19683,59049,...
$n!$	1,2,6,24,120,720,5040,40320,362880,3628800...

Formas de construção

- **Exemplo:** Deduza uma fórmula simples para a_n se os 10 1ros termos da seqüência $\{a_n\}$ são 1,7,25,79,241,727,2185,6559,19681,59047.
- **Resposta:** as diferenças entre termos consecutivos não indicam nenhum padrão...
 - Razão entre termos consecutivos:
 - embora variável, fica próxima de 3
 - suspeita: fórmula envolvendo 3^n
 - comparando com a seqüência $\{3^n\}$:
 - n-ésimo termo = 2 a menos do correspondente
 - ou seja: $a_n = 3^n - 2$

Formas de construção

- Neil Sloane:
 - Enciclopédia da Seqüências de inteiros
 - Coleção de mais de 8000 seqüências na Internet
 - Também tem um programa que busca na enciclopédia quais as seqüências que combinam com termos iniciais fornecidos..

Seqüências

- **Exercício** (seleção para a google): encontre a **próxima linha** da seqüência abaixo:

1
1 1
2 1
1 2 1 1

Somas

- Notação usada para expressar a soma dos termos:

$$a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$$

- a partir da sequência $\{a_n\}$:

$$\sum_{j=m}^n a_j$$

- Note que a escolha da letra “j” como índice é arbitrária

Somas

- Exemplo: A soma dos 100 primeiros termos da seqüência $\{a_n\}$, onde $a_n = 1/n$, para $n=1,2,3,\dots$ é dada por:

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

Somas

- Exemplo: qual o valor de $\sum_{j=1}^5 j^2$?

– Solução: temos

$$\sum_{j=1}^5 j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Deslocamento do índice

- Útil quando duas somas precisam ser adicionadas, mas os seus **índices não combinam**.
- Importante fazer as mudanças apropriadas no somando.
- **Exemplo:** Suponha que tenhamos a soma: $\sum_{j=1}^5 j^2$
 - mas precisamos que o índice vá de 0 a 4, em vez de 1 a 5
 - para isto, fazemos $k=j-1$
 - o termo j^2 se torna $(k+1)^2$

$$\sum_{j=1}^5 j^2 = \sum_{k=0}^4 (k+1)^2 = 55$$

Somas **duplas**

- Aparecem em muitos contextos.
 - Por exemplo: na análise de loops “aninhados” em programas
- Exemplo: $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 ij$
- Para avaliar a soma dupla, expanda a soma interna e então compute a externa:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 ij &= \sum_{i=1}^4 (i + 2i + 3i) = \\ &= \sum_{i=1}^4 6i = \\ &= 6 + 12 + 18 + 24 = 60\end{aligned}$$

Somas completas

- Pode-se usar esta notação para adicionar todos os valores de uma função ou termos de um conjunto indexado.
- Ou seja, escreve-se:

$$\sum_{s \in S} f(s)$$

- para representar a soma dos valores $f(s)$, para todos os membros s de S .

Somas completas

- Exemplo: qual o valor de $\sum_{s \in \{0,2,4\}} s$?

– Solução:

$$\sum_{s \in \{0,2,4\}} s = 0 + 2 + 4 = 6$$

Somas conhecidas

- Certas somas aparecem repetidamente ao longo da matemática discreta.
- Útil ter uma coleção de fórmulas para estas somas.
- Há muitas maneiras de provar/obter estas somas.
 - Mas note que todas elas podem ser provadas por indução matemática.

Algumas fórmulas de somas úteis

<u>Soma</u>	<u>Forma fechada</u>
$\sum_{k=0}^n ar^k, (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}, (r \neq 1)$
$\sum_{k=1}^n k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^n k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^n k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, x < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, x < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

Uso das somas conhecidas

- Exemplo: Encontre $\sum_{k=50}^{100} k^2$

- Solução:

- primeiro note que: $\sum_{k=50}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2 - \sum_{k=1}^{49} k^2$

- então, usando a fórmula para $\Sigma (k^2)$ da tabela, obtemos:

$$\sum_{k=50}^{100} k^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - \frac{49 \cdot 50 \cdot 99}{6} = 297925$$

Uso das somas conhecidas

- Exemplo: Seja x um nro real com $|x| < 1$. Ache $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
- Solução: pela primeira fórmula da tabela, com $a=1$ e $r=x$, obtemos:

$$\sum_{n=0}^k x^n = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$$

- Então, já que $|x| < 1$, x^{k+1} se aproxima de zero quando k tende a infinito.

– portanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} = \frac{-1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x}$$