Tratamento de Incertezas

Raciocínio Probabilístico

Raciocínio Probabilístico

- O Raciocínio Probabilístico é talvez o mais antigo que trata com mecanismos de incerteza. A teoria da probabilidade oferece uma maneira quantitativa de codificar incertezas.
- Apóia-se em informações probabilísticas sobre fatos de um domínio e chega a uma conclusão a respeito de um novo fato, conclusão esta, que fica associada a uma probabilidade.
  - Possui uma semântica clara
  - Probabilidades podem ser obtidas a partir de dados.
  - Permite incorporar novas evidências facilmente.

Raciocínio Probabilístico

- Frequentistas x Bayesianos
  - Quando se fala de probabilidade neste contexto, não se faz referência a números, e sim, a um tipo de raciocínio.
- Exemplo:
  – "A chance de que um paciente portador da doença D apresente no futuro próximo o sintoma S é p".
  - A verdade desta afirmação não é o valor preciso de p, mas um valor de crença do médico.

Fundamentos

- **Experimento Aleatório**
  - Um experimento aleatório, E, é um experimento em que o resultado não pode ser predito, mesmo que seja repetido várias vezes e nas mesmas condições.
  - Experimentos:
    - E1: “Arremesso de moeda”.
    - E2: “Arremesso de 2 moedas”.
    - E3: “Arremesso de dado”.
    - E4: “Retirar uma bola de uma urna contendo bolas numeradas de 1 a 100”.
  - Variáveis aleatórias:
    - E1: “Face da moeda para cima”.
    - E2: “Faces de 2 moedas para cima”.
    - E3: “Face do dado para cima”.
    - E4: “Número da bola”

Fundamentos

- **Espaço amostral**
  - É o conjunto de todos os valores que a variável aleatória pode assumir.
  - Exemplos de espaços amostrais:
    - E1: {cara, coroa}
    - E2:{(cara,cara), (cara,coroa), (coroa,cara),(coroa,coroa)} ou E2:{(cara,cara),(cara,coroa),(coroa,coroa) }(se a ordem não é relevante)
    - E3: {1, 2, 3, 4, 5, 6}
    - E4: {1, 2, ..., 100}
  - Classificação dos Espaços Amostrais
    - Discreto x Contínuo
    - Finito x Infinito

Fundamentos

- **Eventos**
  - Um evento é um subconjunto do espaço amostral.
- Exemplos:
  - E1: "Jogar uma moeda três vezes e observar quantas vezes aparece cara e quantas vezes aparece coroa".
  - Evento: "Aparecer 2 caras (k) e uma coroa (c) em qualquer ordem".

    Subconjunto: {(kkc), (kck), (ckk)}
  - E2: "Jogar um dado e observar o número na face de cima".
  - Evento: "Número é par".

    Subconjunto: {2,4,6}

Fundamentos

- **Variável Aleatória**
  - É aquela que assume valores num espaço amostral e para a qual está determinada a probabilidade de ocorrência de cada um dos elementos do espaço amostral.
  - Se o espaço amostral for contínuo, é necessário conhecer a função distribuição de probabilidade para caracterizar a variável aleatória.
  - Se o espaço amostral for discreto, é necessário conhecer a função massa de probabilidade para caracterizar a variável aleatória.

Fundamentos

- **Probabilidade**
  - Pr[A] = É a medida da **chance** de um evento A ocorrer.
  - Probabilidade como Frequência Relativa:
    - Sequência de repetições do experimento sob idênticas condições
    - fn = número de ocorrências de A nas primeiras n repetições.
    - fn/n = fração dos experimentos em que A ocorre nas primeiras n repetições. Quando n cresce, esta fração tende a se estabilizar.
    - Se o espaço amostral consiste de N elementos igualmente prováveis e o evento A corresponde a um subconjunto de r elementos do espaço amostral, então a probabilidade de ocorrer A é dada por: Pr[A] = r / N

Fundamentos

- **Probabilidade**
  - Exemplo: Uma urna contém 10 bolas numeradas de 0 a 9. Num experimento é preciso selecionar uma bola da urna e anotar seu número. Deseja-se encontrar a probabilidade dos eventos:

    A = "número da bola é 5"

    B = "número da bola é ímpar"

    C = "número da bola é múltiplo de 3"
  - O espaço amostral é $S=\{0,1,\ldots,9\}$ e os resultados correspondentes aos eventos acima são:

    $A=\{5\}$ $B=\{1,3,5,7,9\}$ $C=\{3,6,9\}$
  - Se for suposto que os resultados são equiprováveis, então:

    $Pr[A]= Pr[5] = 1/10$

    $Pr[B]=Pr[1]+Pr[3]+Pr[5]+Pr[7]+Pr[9] = 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 = 5/10.$

    $Pr[C]=Pr[3]+Pr[6]+Pr[9] = 1/10 + 1/10 + 1/10 = 3/10.$

Fundamentos

- **Probabilidade Conjunta**
  - Fornece a probabilidade de dois ou mais eventos ocorrerem simultaneamente.
  - Ao se jogar uma moeda duas vezes, temos os eventos:

    A={Obter cara (k) na primeira jogada} -> Pr[A] = 1/2
    B={Obter cara (k) na segunda jogada também} -> Pr[B]=1/2

  - Logo,

    $Pr[AB] = Pr[A]Pr[B] = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

  - Atenção!!!
    - Pr[AB]=Pr[A]Pr[B]
  - Só é válida se os eventos forem independentes, como no exemplo anterior.

Fundamentos

- **Probabilidade A Priori**
  - A probabilidade a priori, também chamada de probabilidade incondicional, de um evento é a probabilidade atribuída a um evento na ausência de conhecimento que suporte a sua ocorrência ou ausência, isto é, a probabilidade do evento anterior a qualquer evidência.
  - A probabilidade a priori é simbolizada por Pr[evento].

- **Probabilidade Posterior**
  - A probabilidade posterior (após o fato), também chamada **probabilidade condicional**, de um evento é a probabilidade de um evento dada alguma evidência.
  - A probabilidade posterior é simbolizada por

R[evento | evidência].

Fundamentos

- **Probabilidade Condicional**
  - Eventos cujas ocorrências estão interligadas. A ocorrência de um deles afeta a probabilidade de ocorrência do outro.
  - Exemplo: Escolher aleatoriamente uma palavra num dicionário.
    - Evento A: A letra u aparece na palavra;
    - Evento B: A letra q aparece na palavra.
    - Se sabemos que B ocorre, a nossa estimativa da probabilidade de ocorrência de A é alterada.

Fundamentos

- **Probabilidade Condicional**
  - Definição: Probabilidade Condicional de A dado B (i.e., Probabilidade Condicional de ocorrer A, dado que sabemos que B ocorre).
    - $Pr[A|B]=Pr[A \cap B]/Pr[B]$, com $Pr[B] \neq 0$
  - $Pr[A|B]$ é a probabilidade de $A \cap B$ relativamente a probabilidade de B.
  - Eventos INDEPENDENTES:
    - $Pr[A|B]=Pr[A] \Leftrightarrow Pr[A \cap B]=Pr[A]Pr[B]$
    - Ocorrência de B não afeta a probabilidade de A.

Fundamentos

- **Probabilidade Condicional**
  - A probabilidade condicional responde questões do tipo:
    - "Dado que ocorreu o evento A, qual a probabilidade de ocorrer o evento B?"
  - Por exemplo:
    - Qual a probabilidade de um paciente estar com cárie, dado que ele está com dor de dente?
    - Qual a probabilidade de chover, dado que o céu está completamente nublado?

Fundamentos

- **Probabilidade Condicional**
  - Um experimento consiste em jogar um dado uma vez.
    - Sejam os eventos:
      - A: "Número na face é 6"
      - B: "Número na face é maior que 4"
    - O dado foi jogado, qual a probabilidade de ocorrer evento A (sair 6), sabendo que o evento B ocorreu?
    - $Pr[A|B] = Pr[AB] / Pr[B]$

      $= 1/6 \ / \ 1/3$

      $= 1/2$

Raciocínio Probabilístico

- Teorema de Bayes:
  - Seja:
    - Pr[A|B] a probabilidade de que a hipótese A seja verdadeira dada a evidência B.
    - Pr[B|A] a probabilidade que a evidência B será observada se a hipótese A for verdadeira.
    - Pr[A] a probabilidade "a priori" que a hipótese A é verdadeira na ausência de qualquer evidência específica.
    - Pr[B] a probabilidade "a priori" que a evidência B é verdadeira na ausência de qualquer evidência específica.

    - $Pr[A|B]=Pr[A,B]/Pr[B]$
    - $Pr[B|A]=Pr[B,A]/Pr[A]$

    Como $Pr[A,B]=Pr[B,A]$

    - $Pr[A|B]=Pr[B|A] * Pr[A]/Pr[B]$

Raciocínio Probabilístico

- Teorema de Bayes:
  - Se A_1, A_2, ..., e A_K são eventos mutuamente exclusivos, dos quais um deve ocorrer, então a regra de Bayes pode ser generalizada para:
  - $Pr[A|\ B]=Pr[B|\ A]*Pr[A]/\sum^{k}_{n=0}Pr[B|A_n]*Pr[A_n]$

Raciocínio Probabilístico

- Exemplo Introdutório:
  - Imagine que você é um homem que tem em mãos um exame de sangue (seu) que diz: soropositivo para HIV.
  - Passa pela sua cabeça a imagem do médico a dizer: "você tem uma chance de 999/1000 de morrer em menos de uma década (ou, uma chance em mil de estar saudável). Eu realmente sinto muito."
  - De onde ele tirou isso? Da seguinte estatística: o exame de HIV gera 1 resultado falso positivo para cada 1 mil amostras de sangue. Para entender o erro do médico, vamos a Bayes. Definir o espaço amostral:

A) verdadeiros positivos

B) falsos positivos

C) verdadeiros negativos

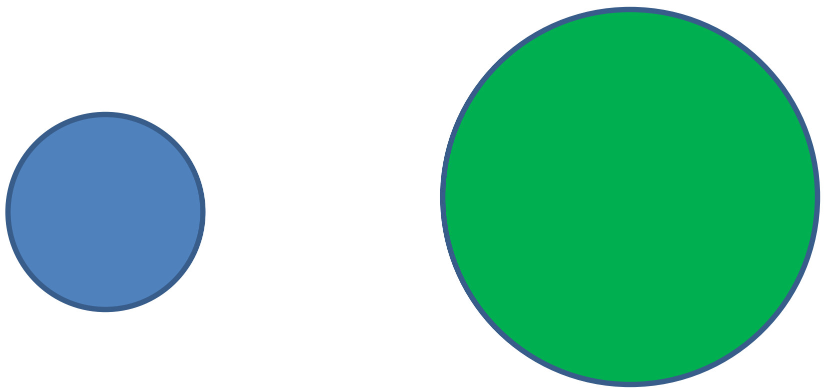
D) falsos negativos

Raciocínio Probabilístico

- Exemplo Introdutório:
  - Ah sim, você não é um homem qualquer. Você é branco, norte-americano, heterossexual e não usuário de drogas injetáveis. Vamos seguir a seguinte estatística: 1 de cada 10 mil homens com essas características está infectado. Vamos tratar de uma população de 10 mil então.
  - Sendo a taxa de falsos negativos próxima de zero, 1 pessoa de cada 10 mil tem um verdadeiro positivo. Como a taxa de falsos positivos é, segundo o médico, 1/1000, haverá 10 outros casos de falsos positivos. Os outros 9.989 homens apresentarão exames negativos.
  - Que resultados são "favoráveis" no espaço amostral? Os positivos, A e B. Queremos saber se somos falsos ou verdadeiros positivos. Acabamos com 10 pessoas falso positivos e 1 verdadeiro positivo. Em outras palavras, 1 pessoa em 11 está de fato infectada. Ou ainda, chance de 10/11 de ser falso positivo.

Raciocínio Probabilístico

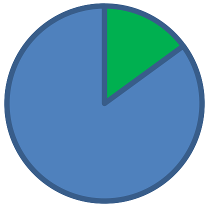
- Exemplo Introdutório:
  - Em uma cidade existem duas companhias de taxis, os azuis e os verdes. 15% das taxis são azuis e 85% dos taxis são verdes.
  - Em um acidente noturno, uma testemunha assegurou ter visto um taxi azul envolvido no acidente.
  - Experimentos conduzidos pela polícia atestaram que esta testemunha era capaz de acertar a cor de um taxi sob as mesmas condições de iluminação em 80% das vezes.
  - De que cor era o taxi envolvido no acidente?

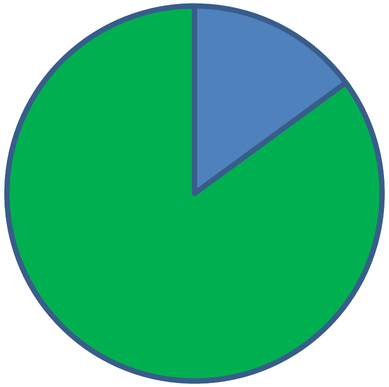


De cada 100 taxis, 15 são azuis e 85 são verdes.

Raciocínio Probabilístico

- Exemplo Introdutório:
  - Em uma cidade existem duas companhias de taxis, os azuis e os verdes. 15% das taxis são azuis e 85% dos taxis são verdes.
  - Em um acidente noturno, uma testemunha assegurou ter visto um taxi azul envolvido no acidente.
  - Experimentos conduzidos pela polícia atestaram que esta testemunha era capaz de acertar a cor de um taxi sob as mesmas condições de iluminação em 80% das vezes.
  - De que cor era o taxi envolvido no acidente?





De cada 100 taxis, 15 – (20%) são azuis e vistos azuis
e 85 – (20%) são verdes e vistos como verdes. Mas 20% dos 85 são verdes
mas vistos como azuis e 20% dos 15 são azuis mas vistos como verdes.

Raciocínio Probabilístico

- Exemplo Introdutório:
  - Em uma cidade existem duas companhias de taxis, os azuis e os verdes. 15% das taxis são azuis e 85% dos taxis são verdes.
  - Em um acidente noturno, uma testemunha assegurou ter visto um taxi azul envolvido no acidente.
  - Experimentos conduzidos pela polícia atestaram que esta testemunha era capaz de acertar a cor de um taxi sob as mesmas condições de iluminação em 80% das vezes.
  - De que cor era o taxi envolvido no acidente?

A	VA	
Verdade	Verdade	15*0.8=12
Verdade	Falso	15*0.2=3
Falso	Verdade	85*0.2=17
Falso	Falso	85*0.8=68

$|\text{Azul}|=15$ $|\text{Visto Azul}|=29$ $|\text{Azul} \cap \text{Visto Azul}|=12$

$|\text{Verde}|=85$ $|\text{Visto Verde}|=71$ $|\text{Verde} \cap \text{Visto Verde}|=68$

Raciocínio Probabilístico

- Exemplo Introdutório
  - Pr[A|B] = Pr[AB] / Pr[B]
    - A : Taxi é azul
    - B : Taxi foi visto azul

	Visto Azul	Visto Verde	Total
Azul	12	3	15
Verde	17	68	85
Total	29	71	100

- Pr[A|B] = Pr[AB] / Pr[B]
  = 12/29
  = 0,413

Raciocínio Probabilístico

- Aplicando o Teorema de Bayes no Problema dos Taxis:
  - A = hipótese = taxi envolvido no acidente ser REALMENTE azul;
  - B = evidência = a testemunha ver um taxi de cor azul.
  - Pr[B|A] = percentagem das vezes em que a testemunha viu um taxi azul e o taxi era REALMENTE azul = 80%
  - Pr[A] = probabilidade a priori. Percentagem das vezes em que um taxi é azul = 15%.
  - Pr[B] = probabilidade a priori. Percentagem das vezes que a testemunha vê um taxi azul = 12 + 17 = 29%.

- Pr[A|B] = 0.8 * 0.15 / 0.29 = 0.413 ~ 41%

Raciocínio Probabilístico

- Outro Exemplo:
  - Um médico sabe que meningite causa dor no pescoço em 50% dos casos. Ele sabe que a probabilidade a priori de um paciente ter meningite (M) é 1/50000 e a probabilidade a priori de qualquer paciente ter uma dor no pescoço (S) é 1/20.
  - Tem-se que:
    - $Pr[S|M] = 1/2$
    - $Pr[M] = 1/50000$
    - $Pr[S] = 1/20$
  - Um paciente chega ao consultório com dor no pescoço. Qual a probabilidade dele estar com meningite – $Pr[M|S]$?
    - $Pr[M|S] = Pr[S|M]Pr[M] / Pr[S] = 1/2 * 1/50000 / 1/20 = 0.0002$

Raciocínio Probabilístico

- Outro Exemplo:
  - Ou seja, é esperado que apenas 1 em 5000 pacientes com torcicolo tenha meningite.

Raciocínio Probabilístico

- Teorema de Bayes
  - O que é importante no Teorema de Bayes é que os valores no lado direito da equação para Pr[d|s] podem ser facilmente obtidos, pelo menos quando comparamos com o lado esquerdo da equação.
  - É muito mais fácil determinar o número de pacientes com meningite que tem dor no pescoço, do que determinar a percentagem entre aqueles que sofrem de dor no pescoço e tem meningite.

  - Quando consideramos cada doença e cada sintoma isoladamente, temos mxn medidas para coletar e integrar (na realidade são mxn probabilidades posteriores mais m+n probabilidades a priori).

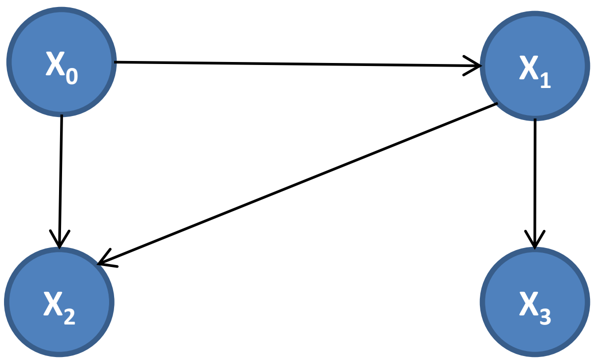
Redes Bayesianas

- Como representar o conhecimento em sistemas inteligentes que utilizam o raciocínio probabilístico?

  Uma alternativa é usar Redes Bayesianas!!
- Rede Bayesiana é uma ferramenta gráfica para raciocínio e representação de conhecimento frente a incertezas.
- Ela é uma representação compacta da distribuição de probabilidades conjuntas do universo do problema.
- Formalmente, é um grafo acíclico direcionado Os nós (também chamados de variáveis) são os eventos que queremos modelar.

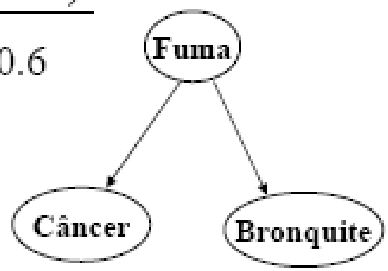
Redes Bayesianas

- Os arcos ligando os nós indicam a presença de um dependência entre eles.
- Cada nó possui uma tabela de probabilidades, dizendo as chances de ocorrer o evento representado por ele (inclusive probabilidade condicional).



Redes Bayesianas

P(F=s)	P(F=n)
0.4	0.6



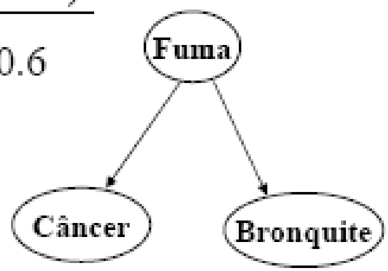
F	P(C=s)	P(C=n)
s	0.7	0.3
n	0.1	0.9

F	P(B=s)	P(B=n)
s	0.8	0.2
n	0.3	0.7

- Qual a probabilidade de alguém ter câncer, sabendo que ela fuma? Pr[C|F] = 0.7
- Qual a probabilidade de alguém ter bronquite, dado que ela fuma? Pr[B|F] = 0.8
- Qual a porcentagem de pessoas que fumam? Pr[F] = 0.4

Redes Bayesianas

P(F=s)	P(F=n)
0.4	0.6



F	P(C=s)	P(C=n)
s	0.7	0.3
n	0.1	0.9

F	P(B=s)	P(B=n)
s	0.8	0.2
n	0.3	0.7

- Sabendo que uma pessoa está com câncer, qual o probabilidade desta pessoa ser fumante?

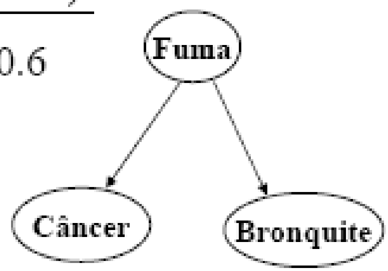
Pr[F|C]=Pr[C|F].Pr[F] / (Pr[C|F.Pr[F] + Pr[C|nF].Pr[nF]

= 0,7.0,4 / (0,7.0,4+0,1.0,6) = 0,28/0,34

= 0,823 -> 82% de ser fumante

Redes Bayesianas

P(F=s)	P(F=n)
0.4	0.6



F	P(C=s)	P(C=n)
s	0.7	0.3
n	0.1	0.9

F	P(B=s)	P(B=n)
s	0.8	0.2
n	0.3	0.7

- Sabendo que uma pessoa está com bronquite, qual o probabilidade desta pessoa ter câncer?

$$Pr[C|B]= Pr[C|F].Pr[F|B] + Pr[C|nF].Pr[nF|B]$$

$$Pr[F|B]=Pr[B|F].Pr[F] / (Pr[B|F].Pr[F] + Pr[B|nF].Pr[nF])$$

$$=0,8.0,4 / (0,8.0,4 + 0,3.0,6) = 0,64$$

Redes Bayesianas

- Sabendo que uma pessoa está com bronquite, qual o probabilidade desta pessoa ter câncer?

  Pr[C|B]= Pr[C|F].Pr[F|B] + Pr[C|nF].Pr[nF|B]

  Pr[F|B]=Pr[B|F].Pr[F] / (Pr[B|F].Pr[F] + Pr[B|nF].Pr[nF])

  =0,8.0,4 / (0,8.0,4 + 0,3.0,6) = 0,64

  Pr[C|F]=0,7

  Pr[F|B]=0,64

  Pr[C|nF]=0,1

  Pr[nF|B]=0,36

  Pr[C|B] = 0,7.0,64 + 0,1.0,36 = 0,448 + 0,036

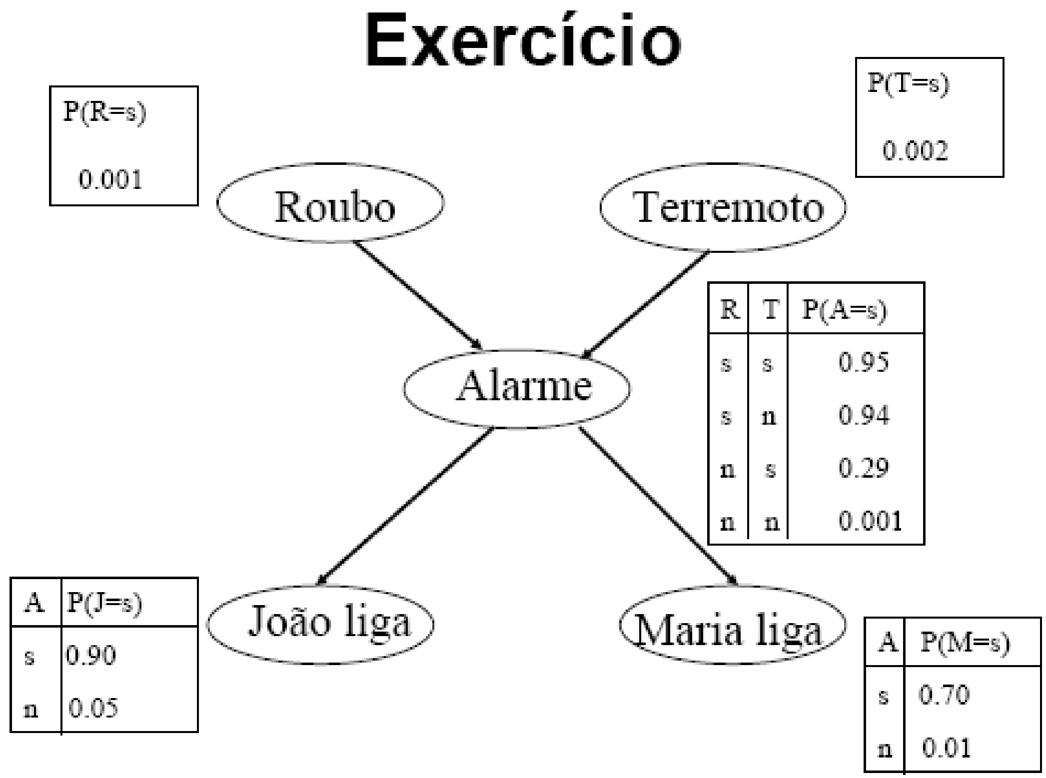
  = 0,484 -> 48,4%

Redes Bayesianas

- Outro Exemplo:
  - Você instalou um alarme contra roubos na sua casa, que dispara em caso de invasão.
  - Infelizmente, o alarme é sensível a terremotos
  - Quando o alarme disparar, seus 2 vizinhos, João e Maria, disseram que vão te ligar.
  - João as vezes confunde o alarme com a sirene do carro de bombeiros.
  - Maria ouve música num volume alto e nem sempre escuta o alarme
  - João te ligou.
  - Qual a probabilidade de estarem roubando sua casa???

Redes Bayesianas

- Outro Exemplo:



Raciocínio Probabilístico

- Hoje em dia se fala da probabilidade subjetiva.
- Ela trata com eventos que não tem uma base histórica sobre a qual se possa extrapolar.
- A probabilidade subjetiva é uma crença ou opinião expressa como uma probabilidade.
- Exemplo:
  - Em SE para diagnóstico médico, um evento poderia ser:
    - E = " O paciente está coberto com manchas vermelhas"
  - e a proposição é:
    - A = "O paciente tem sarampo".
  - A probabilidade condicional Pr[A | E] não é uma probabilidade no sentido clássico ou freqüencista.
  - Ela pode ser interpretada como o grau de crença que A é verdadeiro dado o evento E.

Raciocínio Probabilístico

- Atualmente existem shells para o desenvolvimento de Sistemas Especialistas com raciocínio probabilista, dentre eles tem-se o SPIRIT, o HUGIN e o NETICA.
- Dificuldades com o Método Bayesiano
  - A obtenção das probabilidades das hipóteses Hi e as condicionais Pr[Hi | e] é considerado uma tarefa difícil porque as pessoas não sabem estimar probabilidades. No entanto, as estimativas necessárias de probabilidade são feitas pelo especialista a partir de seu conhecimento e experiência no domínio pesquisado.
  - A base de conhecimento tem que ser completa. Isto é, todas as evidências relevantes às hipóteses consideradas devem estar explícitas na base de conhecimento.
  - Em probabilidade parte-se do fato que as evidências são independentes. Isto nem sempre é verdadeiro no caso das doenças, posto que alguns sintomas poderiam ser evidência de outros.

Raciocínio Probabilístico

- Exercícios:
  1. Suppose there are two full bowls of cookies. Bowl #1 has 10 chocolate chip and 30 plain cookies, while bowl #2 has 20 of each. Our friend Fred picks a bowl at random, and then picks a cookie at random. We may assume there is no reason to believe Fred treats one bowl differently from another, likewise for the cookies. The cookie turns out to be a plain one. How probable is it that Fred picked it out of Bowl #1?

  2. (desafio) The blue M&M was introduced in 1995. Before then, the color mix in a bag of plain M&Ms was (30% Brown, 20% Yellow, 20% Red, 10% Green, 10% Orange, 10% Tan). Afterward it was (24% Blue , 20% Green, 16% Orange, 14% Yellow, 13% Red, 13% Brown).

     A friend of mine has two bags of M&Ms, and he tells me that one is from 1994 and one from 1996. He won't tell me which is which, but he gives me one M&M from each bag. One is yellow and one is green. What is the probability that the yellow M&M came from the 1994 bag?