INE 5409 : 3ª PROVA : 2010-1 : PROF. JÚLIO

1] a) O QUE É A COMPOSIÇÃO NA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA? POR QUE SE USA A COMPOSIÇÃO EM ALGUNS MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA E NÃO EM TODOS? JUSTIFIQUE PARA OS QUATRO MÉTODOS;

b) NA APROXIMAÇÃO POR AJUSTAMENTO VIA MÍNIMOS QUADRADOS O QUE É O COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO r^2? POR QUE SE USA O r^2 E NÃO A $\sum_{k=1}^{m} d_k^2$ NESTA METODOLOGIA?

c) NA APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES $y=f(x)$ COM EXPRESSÃO CONHECIDA E $x \in [a,b]$ POR QUE PADRONIZA-SE O DOMÍNIO $[a,b]$ PARA $[-1;1]$? QUAL É O CUSTO ADICIONAL DESTA PADRONIZAÇÃO EM CADA USO DA $g(t)$ COMO APROXIMADORA DA $y=f(x)$?

d) MOSTRE COMO PODEM SER OBTIDOS VALORES DA FUNÇÃO $z=x^y$, $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}$, USANDO A APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES COM EXPRESSÃO CONHECIDA E A UMA VARIÁVEL INDEPENDENTE.

2] PARA A FUNÇÃO $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt \overset{\text{TAYLOR}}{=} x - \dfrac{x^3}{1!\,3} + \dfrac{x^5}{2!\,5} - \dfrac{x^7}{3!\,7} + \dfrac{x^9}{4!\,9} - \cdots$, $x \in [-1;1]$:

i) OBTENHA O SEU APROXIMADOR DE PADÉ $R_{32}(x)$;

ii) AVALIE A QUALIDADE DO $R_{32}(x)$ COMPARANDO-O COM O APROXIMADOR DE TAYLOR DE GRAU $n=5$ E COM O DE TCHEBYSHEV $\bar{p}_3(x) = \dfrac{x(93-20x^2)}{96}$. (OBS: $f(1)=\int_0^1 e^{-t^2}dt = 0{,}7474\ldots$).

3] PARA A FUNÇÃO $f(x)=e^{\cos x}$, $x\in[-1;1]$ ELABORE UM ALGORITMO QUE OBTENHA NA PRECISÃO $\varepsilon=10^{-10}$ OS DOIS PRIMEIROS COEFICIENTES ($=b_0$ e b_1) DA SUA SÉRIE DE TCHEBYSHEV $f(x)=\dfrac{b_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty} b_i T_i(x)$. USE O INTEGRADOR DE GAUSS-TCHEBYSHEV.

4] CONSIDERANDO DISPONÍVEL O PROCEDIMENTO MINQPOL, O QUAL AJUSTA UMA BASE DE DADOS $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{m}$ A UMA POLINOMIAL $p_n(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, ELABORE UM ALGORITMO COMPLETO PARA AJUSTAR ESTA BASE A UMA FUNÇÃO DO TIPO $g(x)=\dfrac{b}{e^{a+bx}}$.

TAYLOR $\Rightarrow f(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)x}{1!}+\dfrac{f''(0)x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{n+1!}$, $= R_n(x)$ e $\xi\in(0;x)$.

SÉRIE TCHEBYSHEV $\Rightarrow f(x)=\dfrac{b_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty} b_i T_i(x)$, ONDE $b_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\dfrac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $b_i=\dfrac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\dfrac{f(x)T_i(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

GAUSS-TCHEBYSHEV $\Rightarrow I=\int_{-1}^{1}\dfrac{g(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \simeq \sum_{j=1}^{m} a_j\, g(x_j)$, ONDE $a_j=\dfrac{\pi}{m}$ e $x_j=\cos\left[\dfrac{(2j-1)\pi}{2m}\right]$, $j=1,\ldots,m$

$[a;b] \sim [-1;1] \Rightarrow x=\dfrac{b-a}{2}t+\dfrac{b+a}{2}$, $t\in[-1;1]$.

PADÉ: $R_{nm}(x)=\dfrac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{1+b_1x+\cdots+b_mx^m}$

$$(**)\quad \begin{bmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \cdots & c_n \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \cdots & c_{n+1} \\ c_{n-m+3} & c_{n-m+4} & \cdots & c_{n+2} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+m-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ b_{m-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{n+1} \\ -c_{n+2} \\ -c_{n+3} \\ \vdots \\ -c_{n+m} \end{bmatrix}$$

$$(*)\begin{cases} a_0=c_0 \\ a_1=c_1+b_1c_0 \\ a_2=c_2+b_1c_1+b_2c_0 \\ \vdots \\ a_n=c_n+b_1c_{n-1}+\cdots+b_nc_0 \end{cases}$$

POL. DE TCHEBYSHEV
$$\begin{cases} T_0(x)=1 \\ T_1(x)=x \\ T_2(x)=2x^2-1 \\ \vdots \\ T_{i+1}(x)=2x\,T_i(x)-T_{i-1}(x). \end{cases}$$

AJUSTE $\Rightarrow r^2=\dfrac{\sum[g(x_k)-y_M]^2}{\sum[y_k-y_M]^2}$, $y_M=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{y_k}{n}$. $\sum_{k=1}^{n} d_k^2=\sum_{k=1}^{n}[g(x_k)-y_k]^2$