INE5403

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA PARA A COMPUTAÇÃO

PROF. DANIEL S. FREITAS

UFSC - CTC - INE

5 - RELAÇÕES

5.1) Relações e Dígrafos

5.2) Propriedades de Relações

5.3) Relações de Equivalência

5.4) Manipulação de Relações

5.5) Fecho de Relações (transitivo)

FECHO TRANSITIVO

- Construção com várias interpretações e muitas aplicações importantes.

- Suponha que R é uma relação sobre um conjunto A e que R não é transitiva.
  - O **fecho transitivo** de R é simplesmente a relação de conectividade R^∞.

PROPRIEDADES DA TRANSITIVIDADE

- Vimos que, geometricamente, a transitividade por ser descrita como:
  - se a e c estão conectados por um caminho de tamanho 2 em R, também o estão por um caminho de tamanho 1
  - ou: se $a\ R^2\ c$, então $a\ R\ c$
    - ou seja: $R^2 \subseteq R$ (como subconjuntos de $A \times A$)
- O Teorema a seguir generaliza esta caracterização geométrica da transitividade...

PROPRIEDADES DA TRANSITIVIDADE

- **Teorema:** Uma relação R é transitiva se e somente se satisfaz à seguinte propriedade:
  - Se existe um caminho de comprimento > 1 do vértice a para o b, também existe um caminho de comprimento 1 de a para b ($a\ R\ b$)
- Algebricamente: "R é transitiva sse $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$".
- **Prova:** indução sobre n.

FECHO TRANSITIVO

- **Teorema 1:** Seja R uma relação sobre um conjunto A. Então R^∞ é o fecho transitivo de R.

Prova (1/3):

- $a \; R^\infty \; b \quad \Leftrightarrow \quad$ existe um caminho em R de a para b
- Note que R^∞ é certamente transtitiva, pois:
  - se $a \; R^\infty \; b$ e $b \; R^\infty \; c$:
    - existem em R dois caminhos: $a \to b$ e $b \to c$
    - logo: existe um caminho de a para c em R
    - de modo que: $a \; R^\infty \; c$
- Falta mostrar que R^∞ é a menor relação transitiva que contém R $(\Rightarrow)$

FECHO TRANSITIVO

- **Teorema 1:** (R^∞ é o fecho transitivo de R.)

Prova (2/3):

- *(Ou seja, precisamos ainda mostrar que:*
  - *se:* S *é qualquer relação transitiva sobre* A *e:* se $R \subseteq S$
  - *então:* $R^\infty \subseteq S$*)*
- Propriedade da transitividade (teorema visto):
  - se S é transitiva, então $S^n \subseteq S$ para todo n
  - ("a e b conectados por caminho de comprimento $n \Rightarrow a\ S\ b$")
  - segue que: $S^\infty = \cup_{n=1}^{\infty} S^n \subseteq S$

FECHO TRANSITIVO

- **Teorema 1:** (R^∞ é o fecho transitivo de R.)

Prova (3/3):

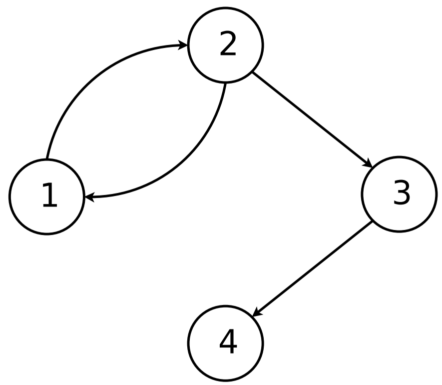
- *(Ou seja, precisamos ainda mostrar que:*
  - *se:* S é *qualquer relação transitiva sobre* A *e:* se $R \subseteq S$
  - *então:* $R^\infty \subseteq S$*)*
- Propriedade da transitividade (teorema visto):
  - se S é transitiva, então $S^n \subseteq S$ para todo n
  - ("a e b conectados por caminho de comprimento $n \Rightarrow a\ S\ b$")
  - segue que: $S^\infty = \cup_{n=1}^{\infty} S^n \subseteq S$
- Também é verdade que: se $R \subseteq S$, então $R^\infty \subseteq S^\infty$
  - pois: todo caminho em R também é um caminho em S
- Juntando tudo, vemos que:
  - se $R \subseteq S$ e se S é transitiva sobre A, então: $R^\infty \subseteq S^\infty \subseteq S$
  - ou seja, R^∞ é a menor de todas as relações transitivas que contêm R. $\square$

FECHO TRANSITIVO

- Vemos que R^∞ tem diversas interpretações:
  - de um ponto de vista geométrico, é a relação de conectividade
    - especifica quais os vértices que estão conectados (por caminhos) a outros
  - de um ponto de vista algébrico, R^∞ é o fecho transitivo de R
    - papel importante na teoria de relações de equivalência e na teoria de certas linguagens

FECHO TRANSITIVO

- **Exemplo 1 (1/3):** Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 1)\}$. Ache o fecho transitivo de R.
  - **Método 1:** geometricamente, pelo dígrafo de R:



  - já que R^∞ é o fecho transitivo, computamos todos os caminhos:
    - a partir do vértice 1, temos caminhos para: 2, 3, 4 e 1
    - a partir do vértice 2, temos caminhos para: 2, 1, 3 e 4
    - o único outro caminho é aquele que vai do vértice 3 para o 4
  - assim: $R^\infty = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

FECHO TRANSITIVO

- **Exemplo 1 (2/3):** Fecho transitivo de $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(2,1)\}$:
  - **Método 2:** algebricamente, computando potências da matriz de R:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (M_R)^2_{\odot} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(M_R)^3_{\odot} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (M_R)^4_{\odot} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

FECHO TRANSITIVO

- **Exemplo 1 (3/3):** Fecho transitivo de $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(2,1)\}$:
  - **Método 2:** algebricamente, computando potências da matriz de R:
    - notamos que $(M_R)^n_\odot$ se iguala a: $\begin{cases} (M_R)^2_\odot\,, & \text{se } n \text{ é par} \\ (M_R)^3_\odot\,, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$
    - portanto:

$$M_{R^\infty} = M_R \vee (M_R)^2_\odot \vee (M_R)^3_\odot = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \square$$

FECHO TRANSITIVO

- No exemplo anterior, note que não foi preciso considerar todas as potências R^n para obter R^∞.
- O teorema a seguir mostra que isto é verdade sempre que A é finito...

FECHO TRANSITIVO

- **Teorema 2:** Seja A um conjunto com $|A| = n$, e seja R uma relação sobre A. Então:

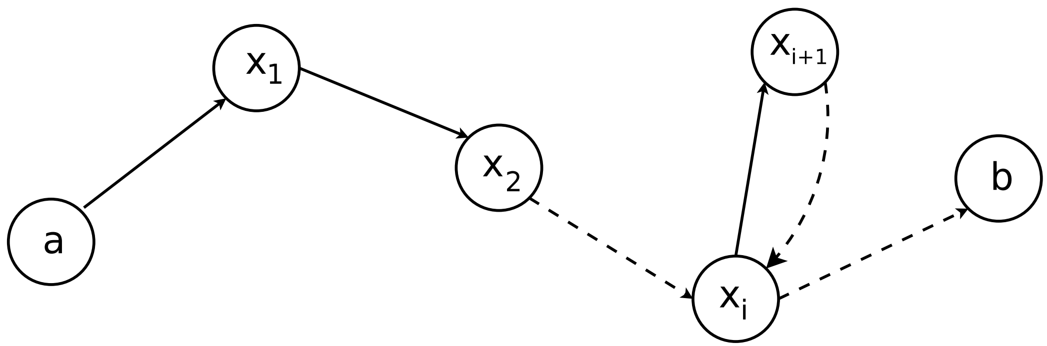
$$R^\infty = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n.$$

  - *"Potências de R maiores do que n não são necessárias para computar R^∞".*

Prova (1/2): sejam $a, b \in A$:

- suponha que $a, x_1, x_2, \ldots, x_m, b$ é um caminho de a para b em R
  - ou seja: $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_m, b)$ estão todos em R
- se x_i e x_j são o mesmo vértice (seja $i < j$), o caminho pode ser dividido em 3:

  [um caminho de a para x_i] + [um de x_i para x_j] + [um de x_j para b]
- o caminho do meio é um ciclo, pois $x_i = x_j$:
  - deixando-o fora e unindo os outros, temos um caminho mais curto de a até b:



FECHO TRANSITIVO

- **Teorema 2:** Potências de R maiores do que n não são necessárias p/ computar R^{∞}.

Prova (2/2):

- Agora seja $a, x_1, x_2, \ldots, x_k, b$ o caminho mais curto de a para b:
  - se $a \neq b$, todos os vértices são distintos
    - (caso contrário, sempre se pode encontrar um caminho mais curto)
    - portanto, o comprimento deste caminho é $\leq n - 1$ (pois $|A| = n$)
  - se $a = b$, os vértices $a, x_1, x_2, \ldots, x_k$ são distintos
    - então o comprimento deste caminho é no máximo n
- ou seja, se $a\ R^{\infty}\ b$, então:
  - $a\ R^k\ b$, para algum k (onde $1 \leq k \leq n$)
- Portanto: $R^{\infty} = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$ $\square$

FECHO TRANSITIVO

- Ambos os métodos usados no exemplo 1 apresentam dificuldades:
  - método gráfico:
    - impraticável para conjuntos e relações grandes
    - não pode ser automatizado
  - método matricial:
    - suficientemente sistemático para ser resolvido por um computador
    - mas ineficiente: custo proibitivo para matrizes grandes
- Método mais eficiente para computar fechos transitivos:
  - algoritmo de Warshall...

O ALGORITMO DE WARSHALL (1/8)

- Seja R uma relação sobre um conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.
- Se $x_1, x_2, \ldots, x_m$ é um caminho em R, então:
  - todo vértice $\neq x_1$ e $\neq x_m$ é um **vértice interno** do caminho
- Para $1 \leq k \leq n$, definimos a seguinte **matriz Booleana** W_k:
  - W_k tem um 1 na posição i, j sse:
    - existe um caminho de a_i para a_j
    - cujos vértices internos (se existirem) vêm de $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$

O Algoritmo de Warshall (2/8)

- Seja R uma relação sobre um conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.
- Se $x_1, x_2, \ldots, x_m$ é um caminho em R, então:
  - todo vértice $\neq x_1$ e $\neq x_m$ é um **vértice interno** do caminho
- Para $1 \leq k \leq n$, definimos a seguinte **matriz Booleana** W_k:
  - W_k tem um 1 na posição i, j sse:
    - existe um caminho de a_i para a_j
    - cujos vértices internos (se existirem) vêm de $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$
- Já que todo vértice deve vir do conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, segue que:
  - a matriz W_n tem um 1 na posição i, j sse:
    - algum caminho em R conecta a_i a a_j
  - ou seja: $W_n = M_{R^\infty}$

O ALGORITMO DE WARSHALL (3/8)

- Se definimos W_0 como M_R, teremos uma seqüência $W_0, W_1, \ldots, W_n$
  - cujo primeiro termo é M_R
  - e o último é M_{R^∞}

- A seguir, veremos como computar cada matriz W_k a partir da sua antecessora W_{k-1} :
  - o que permitirá começar com a matriz de R
  - e avançar passo-a-passo
    - até que, em n passos, alcançaremos a matriz de R^∞.

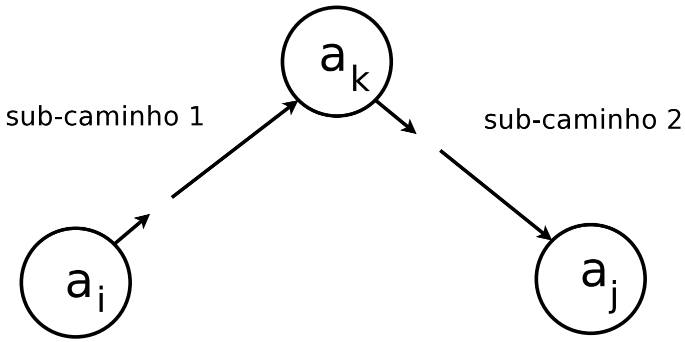
- *Note que as matrizes W_k são diferentes das potências da matriz M_R*
  - *esta diferença resulta em uma economia considerável de passos na computação do fecho transitivo de R...*

O ALGORITMO DE WARSHALL (4/8)

- Suponha que $W_k = [t_{ij}]$ e que $W_{k-1} = [s_{ij}]$.
- Se $t_{ij} = 1$, então deve haver um caminho de a_i para a_j
  - cujos vértices internos vêm de $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$
- Se o vértice a_k não é interno deste caminho, então todos os vértices internos virão, na verdade, de $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$
  - e, neste caso: $s_{ij} = 1$

O ALGORITMO DE WARSHALL (5/8)

- Agora, se a_k é um vértice interno do caminho, a situação é:



- Como na prova do Teor 2, podemos assumir que todos os vértices internos são distintos.
- Logo, a_k aparece apenas uma vez no caminho
  - daí: todos os vértices internos dos subcaminhos 1 e 2 devem vir de $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$
  - o que significa que: $s_{ik} = 1$ e $s_{kj} = 1$

O ALGORITMO DE WARSHALL (6/8)

- Resumindo, sendo $W_k = [t_{ij}]$ e $W_{k-1} = [s_{ij}]$, temos que:

  $t_{ij} = 1$ se e somente se:

  (1) $s_{ij} = 1$, ou:

  (2) $s_{ik} = 1$ e $s_{kj} = 1$.

O ALGORITMO DE WARSHALL (7/8)

- Resumindo, sendo $W_k = [t_{ij}]$ e $W_{k-1} = [s_{ij}]$, temos que:

  $t_{ij} = 1$ se e somente se:

  (1) $s_{ij} = 1,$ ou:

  (2) $s_{ik} = 1$ e $s_{kj} = 1.$

- Esta é a base para o algoritmo de Warshall:
  - (1) se W_{k-1} tem um 1 em i, j, W_k também vai ter
  - (2) um novo 1 pode ser inserido na posição i, j de W_k sse:
    - a coluna k de W_{k-1} tem um 1 na posição i, e:
    - a linha k de W_{k-1} tem um 1 na posição j

O ALGORITMO DE WARSHALL (8/8)

- Procedimento para computar W_k a partir de W_{k-1}:
  - **Passo 1:** Transferir para W_k todos os 1's que estão em W_{k-1}.
  - **Passo 2:** Listar:
    - as posições $p_1, p_2, \ldots$, na coluna k de W_{k-1} que valem 1
    - as posições $q_1, q_2, \ldots$, na linha k de W_{k-1} que valem 1
  - **Passo 3:** Colocar 1's em todas as posições p_i, q_j de W_k
    - se eles já não estiverem lá.

O ALGORITMO DE WARSHALL

- **Exemplo 2 (1/3):** Seja $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(2,1)\}$ sobre $A = \{1,2,3,4\}$:
  - Neste caso, $n = 4$ e:

$$W_0 = M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Primeiro, vamos encontrar W_1 ($\Rightarrow k = 1$):
    - W_0 tem 1's na posição 2 da coluna 1 e na posição 2 da linha 1
    - portanto, W_1 é simplesmente W_0 com um novo 1 na posição 2,2:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O ALGORITMO DE WARSHALL

- **Exemplo 2 (2/3):** Seja $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(2,1)\}$ sobre $A = \{1,2,3,4\}$:
  - W_1, por sua vez, tem 1's nas posições 1 e 2 da coluna 2 e 1, 2 e 3 da linha 2:
    - para obter W_2, devemos colocar 1's nas posições 1,1; 1,2; 1,3; 2,1; 2,2 e 2,3 da matriz W_1 (se já não estiverem lá):

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - A coluna 3 de W_2 tem 1's nas posições 1 e 2 e a linha 3 tem um 1 na posição 4:
    - logo, para obter W_3, devemos inserir 1's nas posições 1,4 e 2,4 de W_2:

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O ALGORITMO DE WARSHALL

- **Exemplo 2 (3/3):** $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(2,1)\}$ sobre $A = \{1,2,3,4\}$:
  - W_3 tem 1's nas posições 1, 2 e 3 da coluna 4 e não tem 1's na linha 4.
    - Logo, não há mais 1's a inserir e: $M_{R^\infty} = W_4 = W_3$ □
  - (Mesmo resultado obtido no exemplo 1.)

O ALGORITMO DE WARSHALL

- O procedimento ilustrado no exemplo anterior leva ao seguinte algoritmo para computar a matriz ("$FECHO$"), do fecho transitivo de uma relação R representada pela matriz $N \times N$ MAT:

- **Algoritmo** WARSHALL:

```
FECHO ← MAT
FOR K = 1 TO N
   FOR I = 1 TO N
      FOR J = 1 TO N
         FECHO[I,J] ← FECHO[I,J] ∨ (FECHO[I,K] ∧ FECHO[K,J])
```

O ALGORITMO DE WARSHALL

- Complexidade do algoritmo WARSHALL: n^3 passos
  - um passo = “um teste + uma atribuição”

- Nota: o cálculo pelas matrizes:

$$M_{R^\infty} = M_R \vee (M_R)^2_\odot \vee \cdots \vee (M_R)^n_\odot$$

  - exige $n-1$ produtos booleanos de matrizes $n \times n$
  - o que é feito em $(n-1).n^3$ passos
  - levando a uma complexidade de cerca de n^4 passos