



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA



Autômato com Pilha

Prof. Yandre Maldonado e Gomes da Costa



Autômato com Pilha

- Autômato com Pilha - AP
 - São formalismos (máquinas) capazes de reconhecer as Linguagens Livres de Contexto;
 - Maior poder que os Autômatos Finitos, pois possuem um “espaço de armazenamento” extra que é utilizado durante o processamento de uma cadeia;
 - Possui uma pilha que caracteriza uma memória auxiliar onde pode-se inserir e remover informações;
 - Mesmo poder de reconhecimento das GLC's;



Autômato com Pilha

- Exemplo de LLC: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
- Um AF não é capaz de reconhecer este tipo de linguagem devido à sua incapacidade de “recordar” (memorizar) informação sobre a cadeia analisada;
- Autômatos com Pilha (AP) possuem uma pilha para armazenar informação, adicionando poder aos AF's.



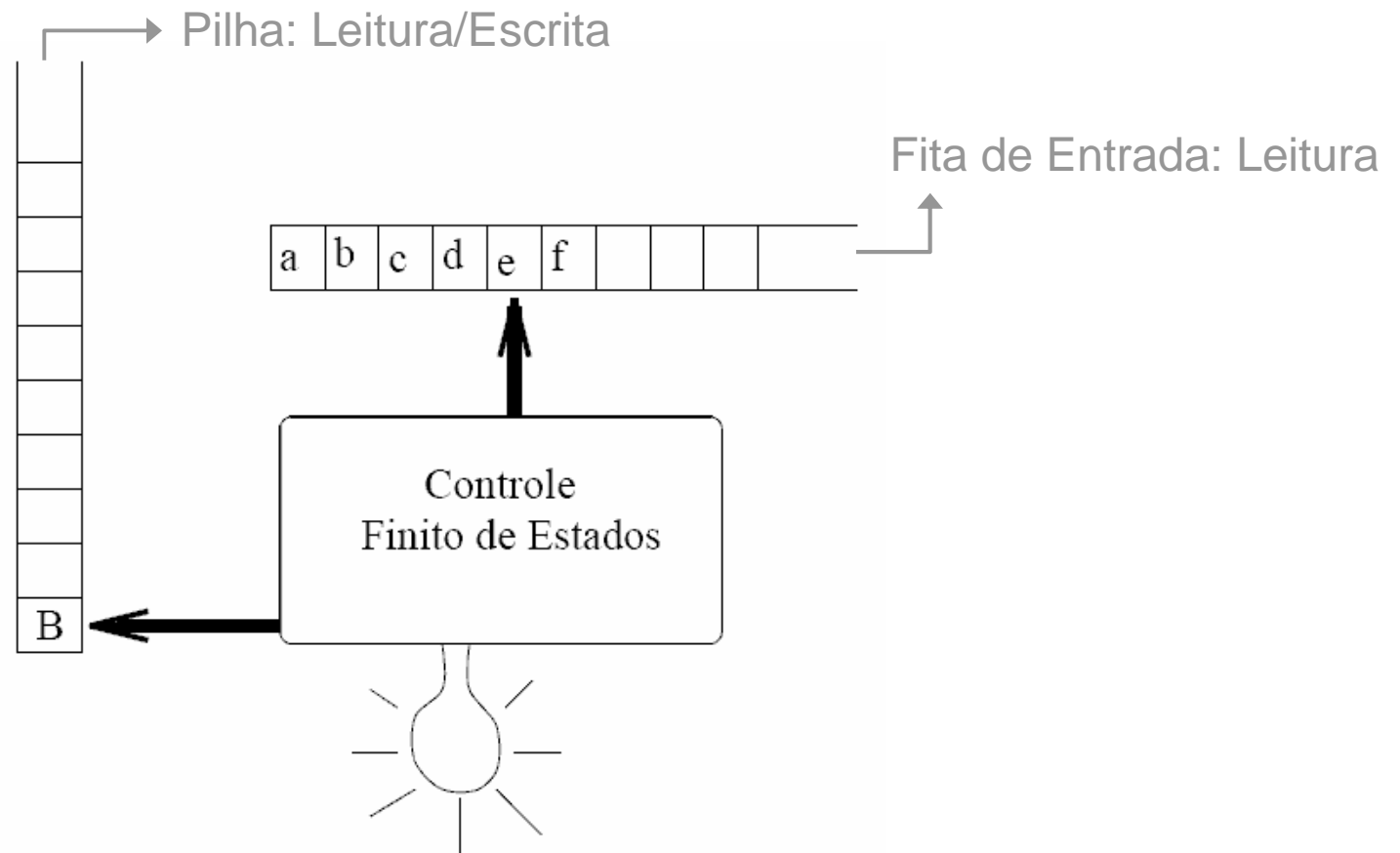
Autômato com Pilha

○ Definição:

- AP é uma sextupla $\langle \Sigma, \Gamma, S, S_0, \delta, B \rangle$, onde:
 - Σ é o alfabeto de entrada do AP;
 - Γ é o alfabeto da pilha;
 - S é o conjunto finito não vazio de estados do AP;
 - S_0 é o estado inicial, $S_0 \in S$;
 - δ é a função de transição de estados,
 $\delta: S \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \rightarrow$ conjunto de subconjuntos finitos de $S \times \Gamma^*$
 - B é o símbolo da base da pilha, $B \in \Gamma$.



Autômato com Pilha



Abstração de um AP como reconhecedor de cadeias (DELAMARO, 1998).



Autômato com Pilha

- Ao contrário da fita de entrada, a pilha pode ser lida e alterada durante um processamento;
- O autômato verifica o conteúdo do topo da pilha, retira-o e substitui por uma cadeia $\alpha \in \Gamma^*$.
 - Se $\alpha = A$, e $A \in \Gamma$, então o símbolo do topo é substituído por A e a cabeça de leitura escrita continua posicionada no mesmo lugar;
 - Se $\alpha = A_1A_2...A_n$, $n>1$ então o símbolo do topo da pilha é retirado, sendo A_n colocado em seu lugar, A_{n-1} na posição seguinte, e assim por diante. A cabeça é deslocada para a posição ocupada por A_1 que é então o novo topo da pilha;
 - Se $\alpha = \lambda$ então o símbolo do topo da pilha é retirado, fazendo a pilha decrescer.



Autômato com Pilha

- A função de transição δ , é função do estado corrente, da letra corrente na fita de entrada e do símbolo no topo da pilha;
- Além disso, esta função determina não só o próximo estado que o AP assume, mas também como o topo da pilha deve ser substituído;
- O AP inicia sua operação num estado inicial especial denotado por S_0 e com um único símbolo na pilha, denotado por B.



Autômato com Pilha

- A configuração de um AP é dada por uma tripla $\langle s, x, \alpha \rangle$ onde s é o estado corrente, x é a cadeia da fita que falta ser processada e α é o conteúdo da pilha, com o topo no início de α ;
- O AP anda ou move-se de uma configuração para outra através da aplicação de uma função de transição.



Autômato com Pilha

- Se o AP está na configuração $\langle s, ay, A\beta \rangle$ e temos que $\delta(s, a, A) = \langle t, \gamma \rangle$, então o AP move-se para a configuração $\langle t, y, \gamma\beta \rangle$ e denota-se $\langle s, ay, A\beta \rangle \vdash \langle t, y, \gamma\beta \rangle$.
- Se o AP move-se de uma configuração $\langle s_1, x_1, \alpha_1 \rangle$ para uma configuração $\langle s_2, x_2, \alpha_2 \rangle$ por meio de um número finito de movimentos, denotamos
$$\langle s_1, x_1, \alpha_1 \rangle \vdash^* \langle s_2, x_2, \alpha_2 \rangle$$
- Se o valor de δ para uma determinada configuração for \emptyset o AP pára.



Autômato com Pilha

- Note que, segundo esta definição, AP's não possuem estados finais como os AF's;
- Assim, uma cadeia x é aceita se, ao chegar ao final do processamento da mesma, a pilha estiver vazia, independentemente do estado em que o AP se encontra;



Autômato com Pilha

- Formalmente temos:
 - Dado o AP $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, S_0, \delta, B \rangle$ e a cadeia x sobre Σ , diz-se que x é aceita por P sse existe $s \in S$ tal que $\langle S_0, x, B \rangle \vdash^* \langle s, \lambda, \lambda \rangle$. Caso contrário, x é rejeitada.
 - Dado o AP $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, S_0, \delta, B \rangle$, a linguagem $L(P)$ definida por P é $\{x \in \Sigma^* \mid \exists s \in S \exists \langle S_0, x, B \rangle \vdash^* \langle s, \lambda, \lambda \rangle\}$

Autômato com Pilha

- Exemplo de AP para a LLC $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$:

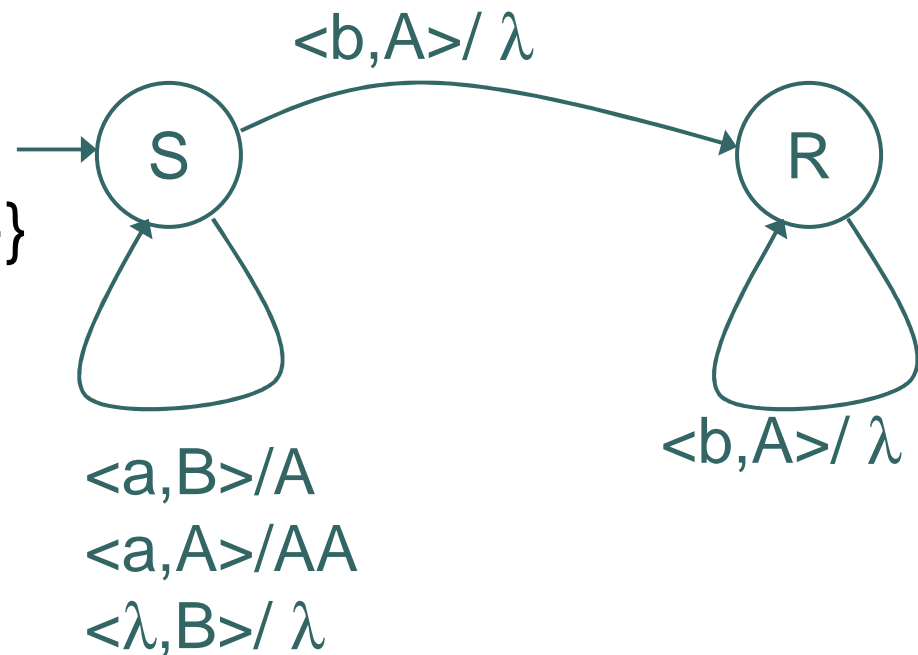
$$\delta(S, a, B) = \{ \langle S, A \rangle \}$$

$$\delta(S, a, A) = \{ \langle S, AA \rangle \}$$

$$\delta(S, b, A) = \{ \langle R, \lambda \rangle \}$$

$$\delta(R, b, A) = \{ \langle R, \lambda \rangle \}$$

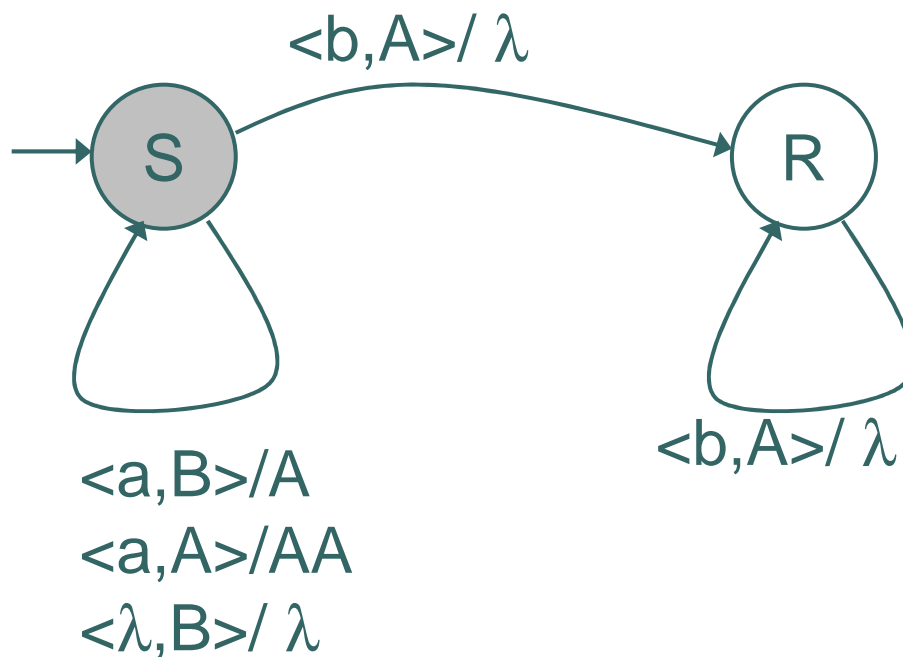
$$\delta(S, \lambda, B) = \{ \langle S, \lambda \rangle \}$$





Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aaabbb

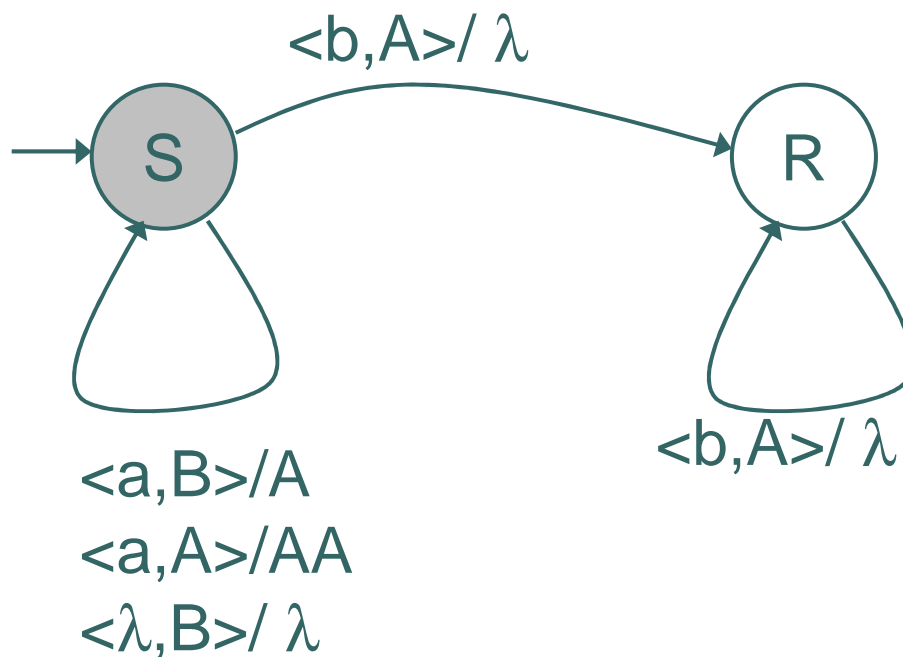


PILHA



Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aaabbbb

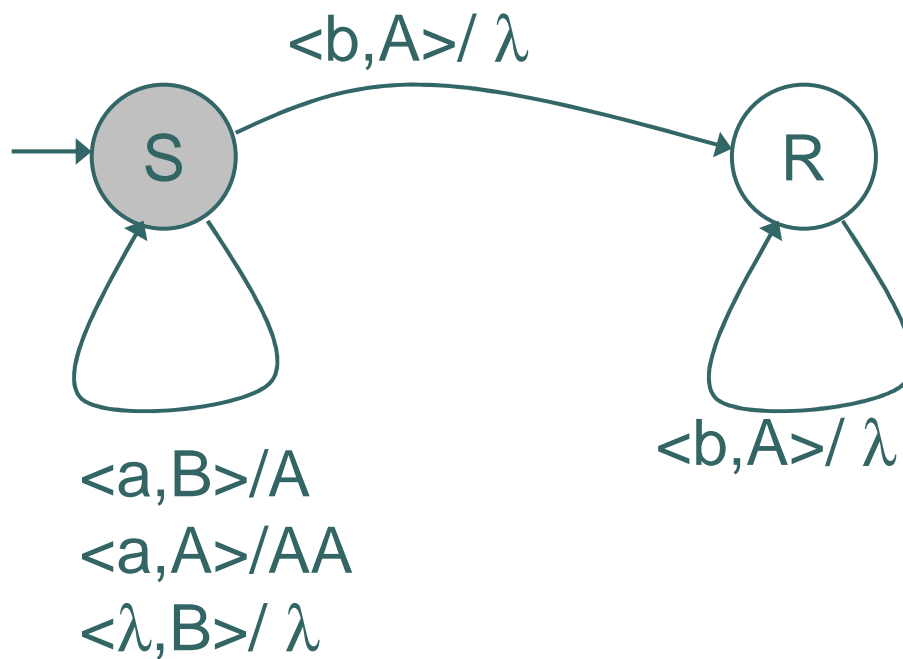


PILHA



Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aaabbb

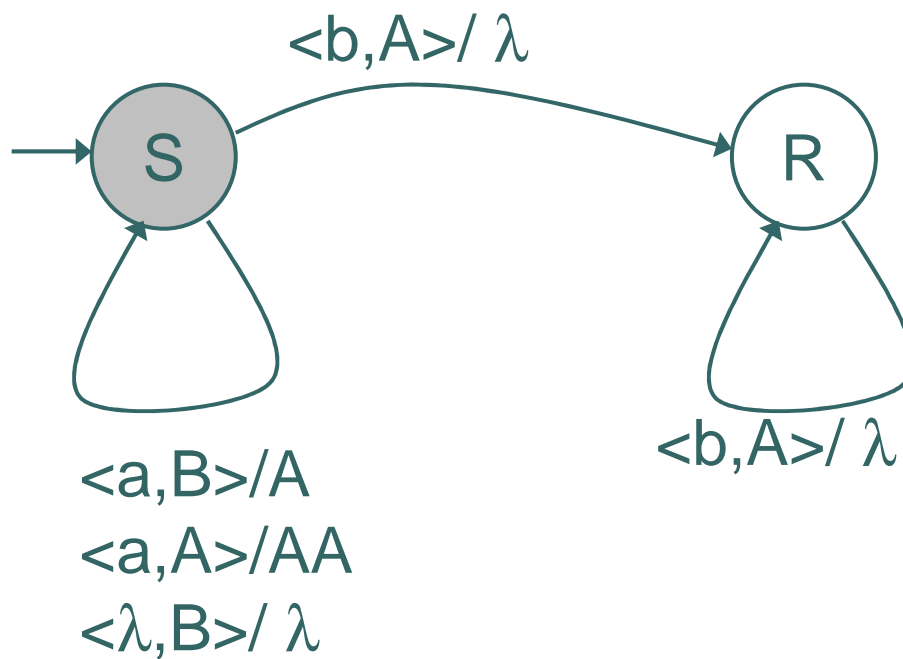


PILHA



Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aaabbb

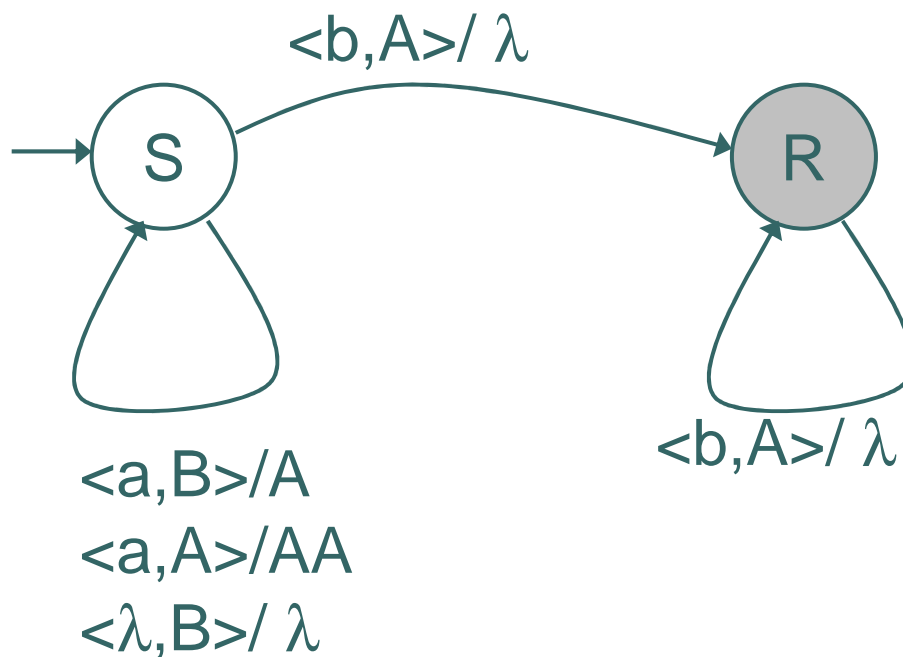


PILHA



Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aaabbb

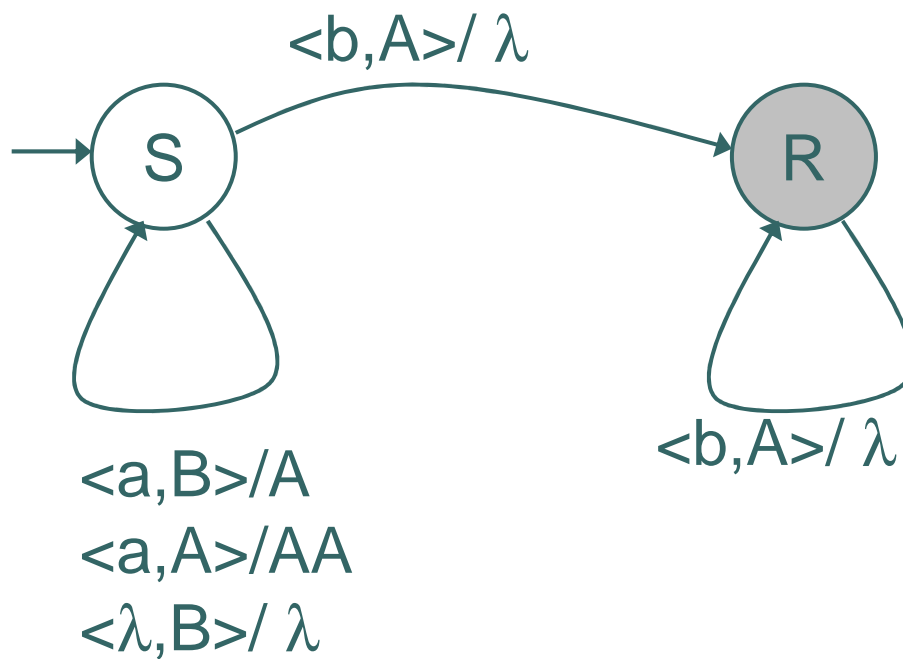


PILHA



Autômato com Pilha

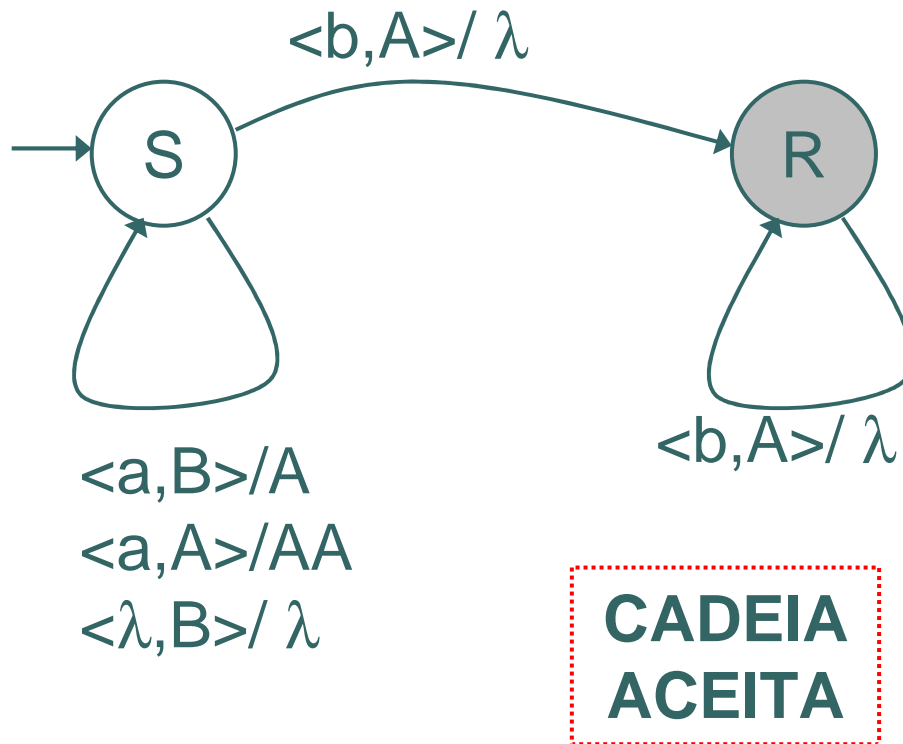
- Exemplo: processamento da cadeia aaabbb



PILHA

Autômato com Pilha

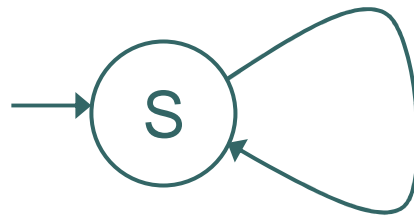
- Exemplo: processamento da cadeia aaabbb



PILHA

Autômato com Pilha

- AP para $\{x \in \{a,b\}^* \mid |x|_a = |x|_b\}$:



$\langle a, C \rangle / A$
 $\langle b, C \rangle / B$
 $\langle \lambda, C \rangle / \lambda$
 $\langle a, A \rangle / AA$
 $\langle b, A \rangle / \lambda$
 $\langle a, B \rangle / \lambda$
 $\langle b, B \rangle / BB$

- Está correto?

Autômato com Pilha

■ Um AP definitivo para $\{x \in \{a,b\}^* \mid |x|_a = |x|_b\}$:

$$\delta(S, a, C) = \{ \langle S, AC \rangle \}$$

$$\delta(S, b, C) = \{ \langle S, BC \rangle \}$$

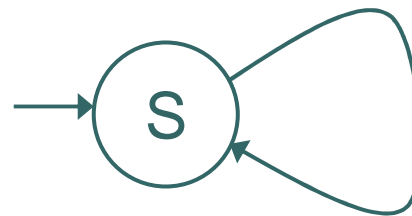
$$\delta(S, \lambda, C) = \{ \langle S, \lambda \rangle \}$$

$$\delta(S, a, A) = \{ \langle S, AA \rangle \}$$

$$\delta(S, b, A) = \{ \langle S, \lambda \rangle \}$$

$$\delta(S, a, B) = \{ \langle S, \lambda \rangle \}$$

$$\delta(S, b, B) = \{ \langle S, BB \rangle \}$$



$\langle a, C \rangle / AC$

$\langle b, C \rangle / BC$

$\langle \lambda, C \rangle / \lambda$

$\langle a, A \rangle / AA$

$\langle b, A \rangle / \lambda$

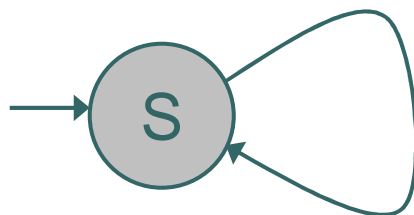
$\langle a, B \rangle / \lambda$

$\langle b, B \rangle / BB$



Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia **aaaabbabbb**



$\langle a, C \rangle / AC$
 $\langle b, C \rangle / BC$
 $\langle \lambda, C \rangle / \lambda$
 $\langle a, A \rangle / AA$
 $\langle b, A \rangle / \lambda$
 $\langle a, B \rangle / \lambda$
 $\langle b, B \rangle / BB$

BASE DA PILHA: C

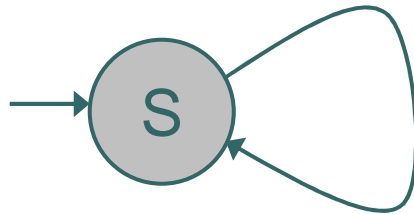


PILHA



Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia **aaaabbabbb**



$\langle a, C \rangle / AC$
 $\langle b, C \rangle / BC$
 $\langle \lambda, C \rangle / \lambda$
 $\langle a, A \rangle / AA$
 $\langle b, A \rangle / \lambda$
 $\langle a, B \rangle / \lambda$
 $\langle b, B \rangle / BB$

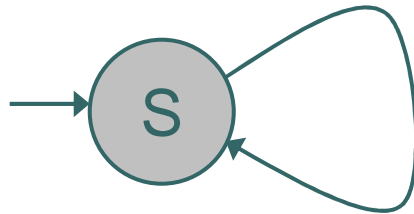


PILHA



Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia **aaaabbabbb**



$\langle a, C \rangle / AC$
 $\langle b, C \rangle / BC$
 $\langle \lambda, C \rangle / \lambda$
 $\langle a, A \rangle / AA$
 $\langle b, A \rangle / \lambda$
 $\langle a, B \rangle / \lambda$
 $\langle b, B \rangle / BB$

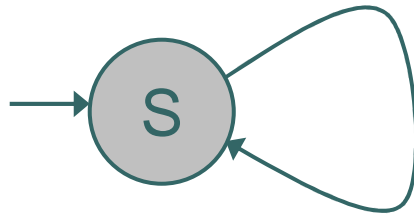


PILHA

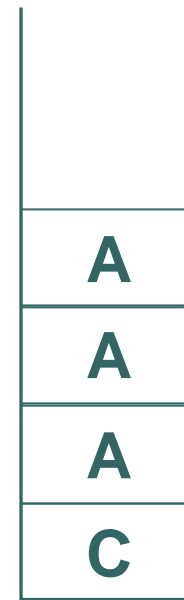


Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia **aaaabbabbb**



$\langle a, C \rangle / AC$
 $\langle b, C \rangle / BC$
 $\langle \lambda, C \rangle / \lambda$
 $\langle a, A \rangle / AA$
 $\langle b, A \rangle / \lambda$
 $\langle a, B \rangle / \lambda$
 $\langle b, B \rangle / BB$

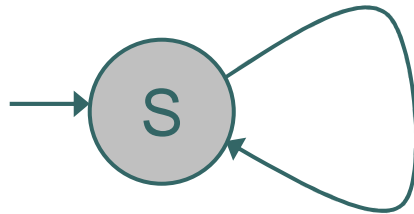


PILHA

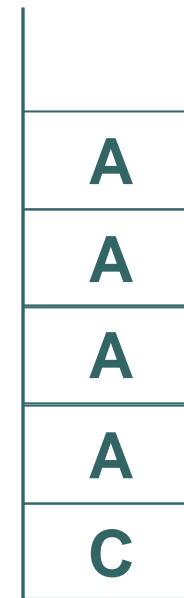


Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia **aaaabbbbbb**



$\langle a, C \rangle / AC$
 $\langle b, C \rangle / BC$
 $\langle \lambda, C \rangle / \lambda$
 $\langle a, A \rangle / AA$
 $\langle b, A \rangle / \lambda$
 $\langle a, B \rangle / \lambda$
 $\langle b, B \rangle / BB$

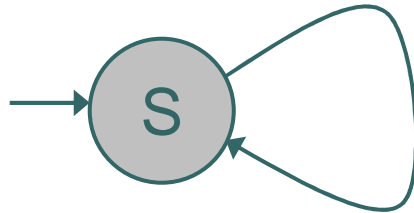


PILHA

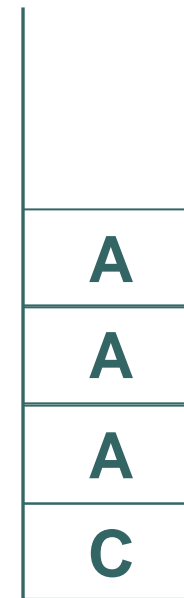


Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia **aaaabbabbb**



$\langle a, C \rangle / AC$
 $\langle b, C \rangle / BC$
 $\langle \lambda, C \rangle / \lambda$
 $\langle a, A \rangle / AA$
 $\langle b, A \rangle / \lambda$
 $\langle a, B \rangle / \lambda$
 $\langle b, B \rangle / BB$

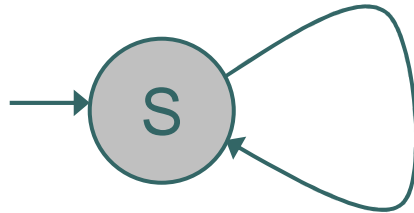


PILHA



Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia **aaaabbabbb**



$\langle a, C \rangle / AC$
 $\langle b, C \rangle / BC$
 $\langle \lambda, C \rangle / \lambda$
 $\langle a, A \rangle / AA$
 $\langle b, A \rangle / \lambda$
 $\langle a, B \rangle / \lambda$
 $\langle b, B \rangle / BB$

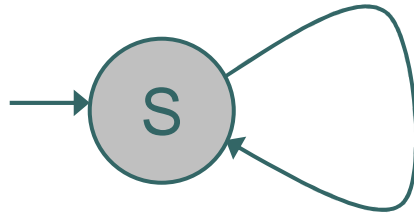


PILHA



Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia **aaaabbabbb**



$\langle a, C \rangle / AC$

$\langle b, C \rangle / BC$

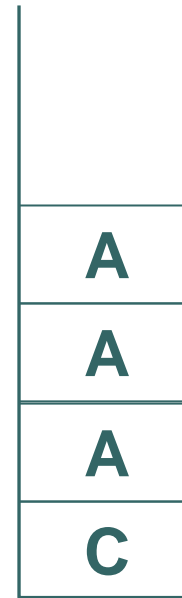
$\langle \lambda, C \rangle / \lambda$

$\langle a, A \rangle / AA$

$\langle b, A \rangle / \lambda$

$\langle a, B \rangle / \lambda$

$\langle b, B \rangle / BB$

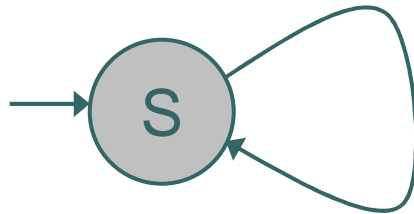


PILHA



Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia **aaaabbabbb**



$\langle a, C \rangle / AC$
 $\langle b, C \rangle / BC$
 $\langle \lambda, C \rangle / \lambda$
 $\langle a, A \rangle / AA$
 $\langle b, A \rangle / \lambda$
 $\langle a, B \rangle / \lambda$
 $\langle b, B \rangle / BB$

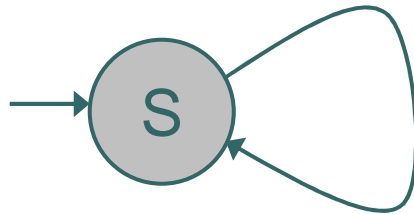


PILHA



Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia **aaaabbabbb**



$\langle a, C \rangle / AC$

$\langle b, C \rangle / BC$

$\langle \lambda, C \rangle / \lambda$

$\langle a, A \rangle / AA$

$\langle b, A \rangle / \lambda$

$\langle a, B \rangle / \lambda$

$\langle b, B \rangle / BB$

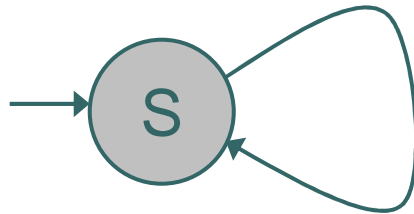


PILHA



Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia **aaaabbabbb**



$\langle a, C \rangle / AC$
 $\langle b, C \rangle / BC$
 $\langle \lambda, C \rangle / \lambda$
 $\langle a, A \rangle / AA$
 $\langle b, A \rangle / \lambda$
 $\langle a, B \rangle / \lambda$
 $\langle b, B \rangle / BB$

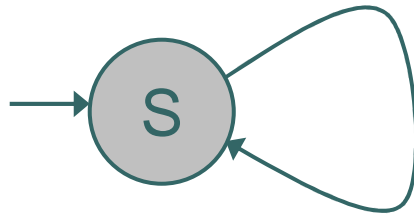


PILHA



Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia **aaaabbabbb**



**CADEIA
ACEITA**

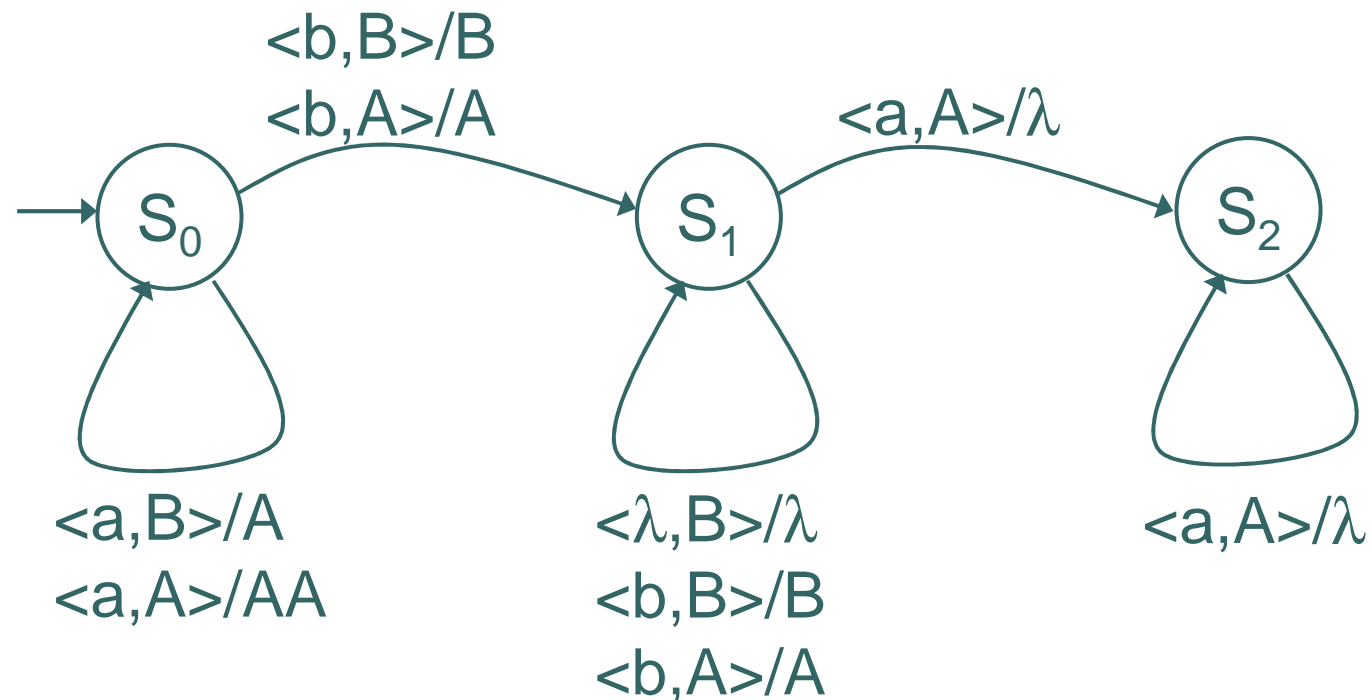
$\langle a, C \rangle / AC$
 $\langle b, C \rangle / BC$
 $\langle \lambda, C \rangle / \lambda$
 $\langle a, A \rangle / AA$
 $\langle b, A \rangle / \lambda$
 $\langle a, B \rangle / \lambda$
 $\langle b, B \rangle / BB$



PILHA

Autômato com Pilha

- Descreva um AP para a linguagem $\{a^n b^m a^n \mid n \geq 0 \wedge m > 0\}$.





Bibliografia

- DELAMARO, Márcio Eduardo. Linguagens Formais e Autômatos. UEM, 1998.