5.5- OPERADOR ORTOGONAL

Def.: Seja V um espaço vetorial euclidiano. Um operador linear T: $V \rightarrow V$ é ortogonal se preserva o módulo de cada vetor, isto é, se para qualquer $v \in V$

$$|T(v)| = |v|$$

Exemplos:

1- Verifique se, com o produto interno usual, o operador linear T(x, y) = $\left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y, \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y\right)$ é ortogonal.

2- Verifique se T: $IR^3 \rightarrow IR^3$, tal que T(x, y, z) = (-y, x, -z) é ortogonal.

5.5.1- **Propriedades**:

1- Seja T: $V \rightarrow V$ um operador ortogonal sobre o espaço euclidiano V. Então a inversa da matriz T coincide com a sua transposta.

2- O determinante de uma matriz ortogonal é +1 ou -1.

3- Todo operador linear ortogonal T: $V \rightarrow V$ preserva o produto interno de vetores, isto é, para quaisquer vetores u, $v \in V$, tem-se:

$$u.v = \text{T}(u).\text{T}(v)$$

De fato: Sabendo que $[\text{T}]^t [\text{T}] = \text{I}$, temos

$$[\text{T}(u).\text{T}(v)] = [\text{T}(u)]^t.[\text{T}(v)] = ([\text{T}]\ [u])^t\ [\text{T}][v] = [u]^t\ [\text{T}]^t\ [\text{T}]\ [v] = [u]^t\ [v] = [u.v]$$

logo $$u.v = \text{T}(u).\text{T}(v)$$

4- A composta de duas transformações ortogonais é uma transformação ortogonal ou, equivalentemente, o produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

5- As colunas (ou linhas) de uma matriz ortogonal são vetores ortonormais.

De fato: Sejam A = $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ uma base ortonormal do espaço euclidiano V e T: $V \to V$ um operador linear ortogonal representado nesta base pela matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que: $|e_1| = |e_2| = \ldots = |e_n| = 1$ e $e_i \,.\, e_j = 0$, $i \neq j$ e que

$$\begin{aligned} T(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n \\ T(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n \\ &\vdots \\ T(e_n) &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned} |T(e_1)|^2 &= T(e_1).T(e_1) = a_{11}^2 + a_{21}^2 + \cdots + a_{n1}^2 = 1 \\ |T(e_2)|^2 &= T(e_2).T(e_2) = a_{12}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{n2}^2 = 1 \\ &\vdots \\ |T(e_n)|^2 &= T(e_n).T(e_n) = a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \cdots + a_{nn}^2 = 1 \end{aligned}$$

e

$$\mathrm{T}(e_i).\mathrm{T}(e_j) = a_{11}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \ldots + a_{ni}a_{nj} = 0$$

Logo as colunas

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

representam vetores ortonormais do espaço V e, conseqüentemente, formam uma base ortonormal.

Exemplo: Seja a matriz $\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$. Verificar se os vetores-colunas de A são ortonormais.

5.6- OPERADOR SIMÉTRICO

Def.: Um operador linear T: $V \to V$ é simétrico, ou *auto-adjunto*, se a matriz que o representa numa base ortonormal A é simétrica, isto é, se

$$[T]_A^t = [T]_A$$

Exemplo: Verificar se os operadores abaixo são simétricos.

a) T: $IR^2 \to IR^2$, tal que T(x, y) = ($2x + 4y$, $4x - y$)
b) T: $IR^3 \to IR^3$, tal que T(x, y, z) = ($x - y$, $-x + 3y - 2z$, $-2y$)

5.6.1- **Propriedade**: Seja um espaço vetorial euclidiano. Se T: $V \to V$ é um operador simétrico, então para quaisquer vetores u, $v \in V$, tem-se:

$$T(u).v = u.T(v)$$

De fato: Sabendo que $[T]^t [T] = I$, temos

$$[T(u).v] = [T(u)]^t.[v] = ([T]\,[u])^t\,[v] = [u]^t\,[T]^t\,[v] = [u]^t\,([T][v]) = [u.T(v)]$$

logo $$T(u).v = u.T(v)$$

Exemplo: Seja o operador simétrico, no IR^2, definido por $T(x, y) = (x + 3y, 3x - 4y)$. Verifique a propriedade anterior.

Exercícios

1- Quais dos seguintes operadores são ortogonais?

a) $T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)$

b) $T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T(x, y) = (-y, -x)$

c) $T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, x - y)$

2- Dentre os seguintes operadores lineares, verificar quais são ortogonais:

a) $T: IR^3 \to IR^3$ tal que $T(x, y, z) = (z, x, -y)$

b) $T: IR^3 \to IR^3$ tal que $T(x, y, z) = (x, y, z)$

c) $T: IR^3 \to IR^3$ tal que $T(x, y, z) = (x, 0, 0)$

3- Verificar quais das seguintes matrizes são ortogonais:

a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

4- Determinar *a* e *b* para que os seguintes operadores do IR^3 sejam simétricos:

a) $T: IR^3 \to IR^3$, $T(x, y, z) = (3x - 2y, ax + y - 3z, by + z)$

b) $T: IR^3 \to IR^3$, $T(x, y, z) = (x + 2z, ax + 4y + bz, 2x - 3y + z)$

RESPOSTAS

1- a e b. 2- a e b. 3- a e c. 4- a) $a = -2$ e $b = -3$; b) $a = 0$ e $b = -3$.