2.3- NÚCLEO DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Def.: O núcleo de uma transformação linear T: $V \to W$ é o conjunto de todos os vetores $v \in V$ que são transformados em $0 \in W$. Indica-se esse conjunto por N(T) ou *ker*(T):

$$N(T) = \{v \in V / T(v) = 0\}$$

Obs: Se $N(T) \subset V$, então $N(T) \neq \varnothing$, pois $0 \in N(T)$, tendo em vista que $T(0) = 0$.

Exemplos:

1- Determinar o núcleo da transformação T: $IR^2 \to IR^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, 2x - y)$.

2- Seja T: $IR^3 \to IR^2$ a transformação linear dada por: $T(x, y, z) = (x - y + 4z, 3x + y + 8z)$. Determinar *ker*(T).

2.3.1- **Propriedades do Núcleo**:

1- O núcleo de uma transformação linear T: $V \to W$ é um *subespaço vetorial* de V.

2- Uma transformação linear T: $V \to W$ é injetora se, e somente se, $N(T) = \{0\}$, ou seja, uma aplicação de T: $V \to W$ é injetora se $\forall\ v_1, v_2 \in V$, $T(v_1) = T(v_2)$, então $v_1 = v_2$ ou, de modo equivalente, $\forall\ v_1, v_2 \in V$, se $v_1 \neq v_2$ implica $T(v_1) \neq T(v_2)$.

($\to$) Quero mostrar que se T é injetora, então $N(T) = \{0\}$.
De fato: Seja $v \in N(T)$, isto é, $T(v) = 0$. Por outro lado, sabe-se que $T(0) = 0$. Logo, $T(v) = T(0)$. Como T é injetora por hipótese, $v = 0$. Portanto o vetor zero é o único elemento do núcleo, isto é, $N(T) = \{0\}$.
($\leftarrow$) Quero mostrar que se $N(T) = \{0\}$, então T é injetora.
De fato: Sejam $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = T(v_2)$. Então $T(v_1) - T(v_2) = 0$ ou $T(v_1 - v_2) = 0$ e, portanto, $v_1 - v_2 \in N(T)$. Mas, por hipótese, o único elemento do núcleo é o vetor 0, e portanto, $v_1 - v_2 = 0$, isto é, $v_1 - v_2$. Como $T(v_1) = T(v_2)$ implica $v_1 = v_2$, T é injetora.

2.4- IMAGEM

Def.: A imagem de uma transformação linear T: $V \to W$ é o conjunto de todos os vetores $w \in W$ que são imagens de pelo menos um vetor $v \in V$. Indica-se esse conjunto por Im(T) ou T(V):

$$\text{Im(T)} = \{w \in W / \text{T}(v) = w \text{ para algum } v \in V\}$$

Obs: Se Im(T) $\subset W$, então Im(T) $\neq \varnothing$, pois $0 = \text{T}(0) \in$ Im(T). Se Im(T) = W, T diz-se *sobrejetora*, isto é, $\forall\, w \in W$ existe pelo menos um $v \in V$ tal que T(v) = w.

Exemplos:

1- Determinar a imagem da transformação T: $IR^3 \to IR^3$ definida por T(x, y, z) = (x, y, 0) a projeção ortogonal do IR^3 sobre o plano xy.

2- Determinar a imagem da transformação T: $V \to W$ definida por T(v) = 0.

2.4.1- **Propriedades da Imagem**:

1- A imagem de uma transformação linear T: $V \to W$ é um *subespaço vetorial* de W.

2.4.2- **Teorema da Dimensão**: Seja V um espaço de dimensão finita e T: $V \to W$ uma transformação linear. Então, *dim* N(T) + *dim* Im(T) = *dim* V.

Exemplos:

1- No exemplo 1, o núcleo (eixo z) da projeção ortogonal T tem dimensão 1 e a imagem (plano xy) tem dimensão 2, enquanto o domínio IR^3 tem dimensão 3.

2- No exemplo 2, da transformação nula, temos *dim* Im(T) = 0. Portanto, *dim* N(T) = *dim* V, pois N(T) = V.

2.5- ISOMORFISMO

Def.: Isomorfismo do espaço vetorial V no espaço vetorial W é o nome dado a uma transformação linear T: $V \to W$, que é bijetora. Nesse caso, os espaços vetoriais são ditos isomorfos.

Obs: Dois espaços vetoriais de dimensão finita são isomorfos se tiverem a mesma dimensão.

Exemplos:

1- O operador linear T: $IR^2 \to IR^2$, T$(x, y) = (2x + y, 3x + 2y)$ é um isomorfismo no IR^2, pois $dim\ V = dim\ W = 2$.

2- O espaço vetorial IR^2 é isomorfo ao subespaço $W = \{(x, y, z) \in IR^3/z = 0\}$ do IR^3 (W representa o plano xy do IR^3).

De fato: a aplicação linear T: $IR^2 \to W$, tal que T$(x, y) = (x, y, 0)$, é bijetora: a cada vetor (x, y) do IR^2 corresponde um só vetor $(x, y, 0)$ de W e, reciprocamente. Logo, IR^2 e W são isomorfos.

Exercícios

1- Determinar o núcleo e a imagem do operador linear T: $IR^3 \to IR^3$, definida por T$(x, y, z) = (x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z)$.

2- Seja T: $IR^3 \to IR^3$ a transformação linear tal que T$(e_1) = (1, 2)$, T$(e_2) = (0, 1)$ e T$(e_3) = (-1, 3)$, sendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica do IR^3.

a) Determinar o N(T) e uma de suas bases. T é injetora?
b) Determinar a Im(T) e uma de suas bases.

3- Determinar o núcleo e a imagem da transformação linear T: $IR^3 \to IR^2$, definida por T$(x, y, z) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$.

4- Verificar se o vetor (5, 3) pertence ao conjunto Im(T), sendo T: $IR^2 \to IR^2$, definida por T$(x, y) = (x - 2y, 2x + 3y)$.

5- Dada a transformação linear. T: $IR^2 \to IR^3$, definida por T$(x, y) = (x + y, x, 2y)$.

a) Determinar o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão.
b) Determinar a imagem, uma base para esse subespaço e sua dimensão

RESPOSTAS

1- N(T) = $\{(5z, -2z, z)/z \in IR\} = \{z(5, -2, 1)/z \in IR\} = [(5, -2, 1)]$ e Im(T) = $\{(a, b, c) \in IR^3/a + b - c = 0\}$. 2- a) N(T) = $\{(z, -5z, z)/z \in IR\}$ e para $z = 1$, temos B = $\{(1, -5, 1)\}$. T não é injetora. b) Im(T) = IR^2 e B = $\{(1, 2), (0, 1)\}$. 3- a) N(T) = $\{(z, -z, z)/z \in IR\}$ e Im(T) = $\{(1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$. 5- a) N(T) = $\{(0, 0)\}$, dim N(T) = 0. Im(T) = $\{(x, y, z) \in IR^3/2x - 2y - z = 0\}$, dim Im(T) = 2.