INE 5409 : 3ª PROVA : 2009.2 : PROF. JÚLIO : 01/12/2009

1] RESPONDA DE FORMA SUSCINTA E COM OS TÓPICOS ESSENCIAIS DE CADA UMA DAS QUESTÕES ABAIXO:

a) POR QUE SE APROXIMA UMA FUNÇÃO $Y=f(x)$, $x\in[a;b]$, COM EXPRESSÃO CONHECIDA?

b) POR QUE PADRONIZA-SE O DOMÍNIO $[a;b]$ PARA $[-1;1]$ NA APROXIMAÇÃO DE $Y=f(x)$ CONHECIDA?

c) QUAL É A IMPORTÂNCIA DA SÉRIE DE TAYLOR NA APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES CONHECIDAS?

d) QUE VANTAGENS E DESVANTAGENS OCORREM NA DETERMINAÇÃO DO APROXIMADOR DE TCHEBYSHEV DE UMA $Y=f(x)$ MANUALMENTE (= NA UNHA) VERSUS OBTÊ-LO COMPUTACIONALMENTE?

e) POR QUE SE OBTÉM O COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO r^2 NA APROXIMAÇÃO POR AJUSTE DE CURVAS?

f) COMO É POSSÍVEL EFETUAR UMA $I=\int_0^\infty f(x)\,dx$ COM MÉTODO NUMÉRICO? MOSTRE ALGEBRICAMENTE.

2] PARA A FUNÇÃO $f(x)=\ln\cos x \overset{TAYLOR}{=} -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\dots$, $x\in[-1;1]$ OBTENHA O SEU APROXIMADOR DE PADÉ $R_{22}(x)$. AVALIE A QUALIDADE DO $R_{22}(x)\simeq f(x)$. ($\ln\cos 1=-0{,}61562\dots$)

3] DISPONDO DE UM ARQUIVO DE PARÂMETROS a_{im} e t_{im}, $m=2,3,\dots,8$, ELABORE UM ALGORITMO PARA TENTAR OBTER NA PRECISÃO $\mathcal{E}$ UMA $I=\int_a^b f(x)\,dx$, PRÓPRIA, USANDO GAUSS-LEGENDRE.

4] PARA UMA BASE DE DADOS $\{(x_k,y_k)\}_{k=1}^{n}$ ELABORE UM ALGORITMO COMPLETO E EFICIENTE QUE:

a) VERIFIQUE SE NESTA BASE NÃO EXISTEM AMOSTRAS (= PONTOS) REPETIDOS. CASO EXISTAM, DESCARTÁ-LOS E RECOMPOR A DIMENSÃO DA BASE;

b) AJUSTÁ-LA POR MÍNIMOS QUADRADOS A UMA FUNÇÃO DO TIPO $Y=a\,b^{cx+x^2}$. CONSIDERE DISPONÍVEL O PROCEDIMENTO QUE AJUSTA A BASE A UM POLINÔMIO $p_m(x)$ (= MINQPOL).

TAYLOR $\Rightarrow$ $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)x}{1!}+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\dots+\frac{f^{(n)}(0)\,x^n}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)\,x^{n+1}}{n+1!}$, $\xi\in[0;x]$

GAUSS-LEGENDRE $\Rightarrow$ $I=\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{m} a_{im}\,g(t_{im})$ e $g(t)=f\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\right)$

PADÉ: $R_{nm}(x)=\frac{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n}{1+b_1x+\dots+b_mx^m}$ (**)

$$\begin{bmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \cdots & c_n \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \cdots & c_{n+1} \\ c_{n-m+3} & c_{n-m+4} & \cdots & c_{n+2} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+m-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ b_{m-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{n+1} \\ -c_{n+2} \\ -c_{n+3} \\ \vdots \\ -c_{n+m} \end{bmatrix} \quad (*) \begin{cases} a_0=c_0 \\ a_1=c_1+b_1c_0 \\ a_2=c_2+b_1c_1+b_2c_0 \\ \vdots \\ a_n=c_n+b_1c_{n-1}+\dots+b_i \end{cases}$$

TCHEBYSHEV $\Rightarrow$ $T_n(x)=\cos n\arccos x \Rightarrow \begin{cases} T_0=1 \\ T_1=x \\ T_{k+1}=2xT_k-T_{k-1} \end{cases}$

MÍNIMOS QUADRADOS PARA $p_m(x)=a_0+a_1x+\dots+a_mx^m \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_k & \Sigma x_k^2 & \cdots & \Sigma x_k^m \\ \Sigma x_k & \Sigma x_k^2 & \Sigma x_k^3 & \cdots & \Sigma x_k^{m+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Sigma x_k^m & \Sigma x_k^{m+1} & & \cdots & \Sigma x_k^{2m} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_k \\ \Sigma x_k y_k \\ \vdots \\ \Sigma x_k^m y_k \end{bmatrix}$$

AQUI $\Sigma=\sum_{k=1}^{n}$.

O FORMULÁRIO FORNECIDO É PARA A SUA REFERÊNCIA POIS NÃO SERÃO UTILIZADAS TODAS AS FÓRMULAS LISTADAS NESTA PROVA.