3- AUTOVALORES E AUTOVETORES

Def.: Seja T: $V \to V$ um operador linear. Se existirem $v \in V$, $v \neq 0$, e $\lambda \in$ IR tais que $T(v) = \lambda v$, então λ é um autovalor de T é v um autovetor de T associado a λ.

Exemplos:

1- Dada a transformação T: $IR^2 \to IR^2$, definida por $T(x, y) = 2(x, y)$ ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Neste caso, 2 é o autovalor de T e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ é um autovetor de T associado ao autovalor 2.

De um modo geral toda transformação $T(x, y) = \alpha(x, y)$, com $\alpha \neq 0$, tem α como autovalor e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ como autovetor correspondente. Observe que $T(v)$ é sempre um vetor de mesma direção que v. Ainda mais, se:

i) se $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor;
ii) se $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor;
iii) se $\alpha = 1$, T é a identidade I;
iv) se $\alpha < 0$, T inverte o sentido do vetor.

2- Encontre o autovalor associado ao autovetor $(0, y)$ correspondente da transformação linear r: $IR^2 \to IR^2$ (Reflexão no eixo x), definida por $T(x, y) = (x, -y)$

3- Seja A = $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então A. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ y \end{bmatrix}$ e $T_A(x, y) = (2x + 2y, y)$. Encontre os autovetores e autovalores de T_A.

Teorema: Dada uma transformação T: $V \to V$ e um autovetor v associado a um autovalor λ, qualquer vetor $w = \alpha v$ ($\alpha \neq 0$) também é autovetor de T associado a λ.

De fato, $T(w) = T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha\lambda v = \lambda(\alpha v) = \lambda w$.

Isto também pode ser observado nos exemplos anteriores.

3.1- POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

Seja A uma matriz de ordem n. Os autovalores e autovetores correspondentes de A são aqueles que satisfazem a equação

$$Av = \lambda v$$

ou $$Av - (\lambda I)v = 0$$

ou ainda $$(A - \lambda I)v = 0.$$

Fazendo $(A - \lambda I) = B$, então $B.v = 0$. Se det $B \neq 0$, sabe-se que o posto da matriz B é n e portanto o sistema de equações lineares homogêneo indicado acima tem solução única, como $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (ou $v = 0$), então esta solução seria nula. Assim, a única maneira de encontrarmos autovetores (que são as soluções não nulas da equação acima) é termos det B = 0, ou seja,

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Com esta condição determina-se primeiro os autovalores λ que satisfazem a equação e depois os autovalores a eles associados. Observe que

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

é o polinômio em λ de grau n, onde os autovalores procurados são as raízes deste polinômio que é chamado de *polinômio característico* da matriz A.

Exemplo: Encontre os autovalores e autovetores da matriz A dada nos itens abaixo:

1- $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2- A = $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$.

3- A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

4- A = $\begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Exercícios

1- Ache os autovalores e autovetores correspondentes das transformações lineares dadas:

a) T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ tal que $T(x, y) = (2y, x)$

b) T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$

c) T: $IR^3 \rightarrow IR^3$ tal que $T(x, y) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$

2- Encontre a transformação linear T: $IR^2 \rightarrow IR^2$, tal que T tenha autovalores -2 e 3 associados aos autovetores $(3y, y)$ e $(-2y, y)$ respectivamente.

3- Ache os autovalores e autovetores correspondentes das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

4- Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Ache os autovalores e autovetores de A e de A^{-1}.
b) Quais são os autovetores correspondentes?

RESPOSTAS

1- b) $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, $v_1 = (x, \sqrt{2}x)$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$, $v_2 = (x, -\sqrt{2}x)$. 2- $T(x, y) = (-6y, -x + y)$. 3- a) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (x, 0)$, $\lambda_2 = -1$, $v_2 = (-y, y)$; b) $\lambda = 1$, $v = (x, 0, 0)$; c) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (-y, y, 0)$, $\lambda_2 = -1$, $v_2 = (x, 2x, -x)$, $\lambda_3 = 3$, $v_3 = (x, 0, x)$; d) $\lambda_1 = 4$, $v_1 = (y - z, y, z)$, $\lambda_2 = -2$, $v_2 = (x, 0, x)$ ou $\lambda_1 = 4$, $v_1 = (y, y, 0)$, $\lambda_2 = 4$, $v_2 = (-z, 0, z)$, $\lambda_3 = -2$, $v_2 = (x, 0, x)$. 4- a) Os de A são -1 e 2 e os de A^{-1} são -1 e ½; b) Os de A são $(-2y, y)$ e $(x, 2x)$ e os de A^{-1} são $(-2y, y)$ e (x, x).