INE5403

Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

Prof. Mauro Roisenberg [1]

[1]UFSC - CTC - INE

25 de maio de 2010

Funções e Modelos Abstratos de Máquina

1.1) Funções Totais e Parciais

1.2) Função Característica de um Conjunto

1.3) Composição de Funções de Mais de um Argumento

1.4) Funções Iniciais

1.5) Funções Recursivas

- A Teoria da Computação, entre outras coisas, procura estudar:
  - os modelos matemáticos de dispositivos computacionais (ou máquinas),
  - os tipos de problemas que podem ser resolvidos por cada tipo de máquina.
- Dado um determinado problema, o procedimento padrão para determinar se este problema é 'computável' é:
  - reduzir o problema a um problema equivalente que consiste de uma função sobre os números naturais e
  - então decidir se esta função pode ser resolvida pelo modelo do computador.
- Definiremos de maneira *indutiva* uma classe de funções e mostraremos que estas funções podem ser resolvidas "mecanicamente".
- Esta classe de funções são chamadas *funções recursivas*.
- Nos resringiremos apenas àquelas funções cujos argumentos e valores são números naturais.

Funções Totais e Parciais

- Por generalização consideraremos funções de n variáveis ou argumentos denotadas como $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.
  - Se a função f for $f : \mathcal{N}^n \rightarrow \mathcal{N}$ ela é chamada "total", pois é definida para toda n-úpla em $\mathcal{N}^n$.
  - Por outro lado, se a função f for $f : D \rightarrow \mathcal{N}$ onde $D \subseteq \mathcal{N}^n$, então f é chamada "parcial".
- Exemplos de tais funções são:
  1. $f(x, y) = x + y$, a qual é definida para todo $x, y \in \mathcal{N}$ e portanto é uma função total.
  2. $g(x, y) = x - y$, a qual é definida apenas para aqueles $x, y \in \mathcal{N}$ que satisfaçam $x \geq y$ e portanto é uma função parcial.

Função Característica de um Conjunto

- Funções que mapeiam do conjunto Universo U para o conjunto $\{0, 1\}$.
- Uma correspondência de um-para-um é estabelecida entre estas funções e os conjuntos.
- Através da utilização destas funções, proposições sobre conjuntos e suas operações podem ser representadas em um computador através de números binários, de modo a facilitar a sua manipulação.

DEFINIÇÃO:

Seja U um conjunto Universo e seja A um subconjunto de U. A função $\psi_A : U \to \{0, 1\}$ definida como

$$\psi_A(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in A \\ 0 & se\ x \notin A \end{cases}$$

é chamada de *função característica* do conjunto A.

Exemplo

Seja U o conjunto de todas as pessoas moradoras em Florianópolis e seja M o conjunto das mulheres que mora em Florianópolis. Assim, ψ_F associa o número 1 com cada mulher e o número 0 com cada homem que more em Florianópolis.

- As propriedades a seguir sugerem como podemos relacionar as funções características de conjuntos com as operações sobre conjuntos.

- Sejam A e B quaisquer 2 subconjuntos de um conjunto Universo U. Então as seguintes afirmações podem ser provadas para todo $x \in U$.

$$(1) \quad \psi_A(x) = 0 \leftrightarrow A = \emptyset$$

$$(2) \quad \psi_A(x) = 1 \leftrightarrow A = U$$

$$(3) \quad \psi_A(x) \leq \psi_B(x) \leftrightarrow A \subseteq B$$

$$(4) \quad \psi_A(x) = \psi_B(x) \leftrightarrow A = B$$

$$(5) \quad \psi_{A \cap B}(x) = \psi_A(x) * \psi_B(x)$$

$$(6) \quad \psi_{A \cup B}(x) = \psi_A(x) + \psi_B(x) - \psi_{A \cap B}(x)$$

$$(7) \quad \psi_{A \sim A}(x) = 1 - \psi_A(x)$$

$$(8) \quad \psi_{A - B}(x) = \psi_{A \cap \sim B}(x) = \psi_A(x) - \psi_{A \cap B}(x)$$

- Repare que as operações $\leq$, $=$, $+$, e $-$ utilizadas com as funções características são as operações aritméticas usuais, uma vez que os valores das funções características são sempre 0 ou 1.
- As propriedades acima podem ser facilmente provadas utilizando a definição de função característica. Por exemplo, a afirmação (5) acima pode ser provada da seguinte maneira:
  - $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$, e por conseqüência $\psi_A(x) = 1$ e $\psi_B(x) = 1$ e $\psi_{A \cap B}(x) = 1 * 1 = 1$. Se $x \notin A \cap B$, então $\psi_A(x) = 0$ ou $\psi_B(x) = 1$ e portanto $\psi_{A \cap B}(x) = 0$.

Composição de Funções

- A operação de composição será utilizada para gerar outras funções.
- Já vimos como funciona a composição de funções para uma variável. A mesma idéia pode ser utilizada para funções de mais de uma variável.
- Tomemos como exemplo o seguinte caso:
  - Sejam $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, *e* $g(x, y)$ quaisquer três funções. A composição de g com f_1 e f_2 é uma função h dado por:

$$h(x, y) = g(f_1(x, y), f_2(x, y))$$

- Generalizando, sejam $f_1, f_2, ..., f_n$ funções parciais de m variáveis e seja g uma função parcial de n variáveis. Então a composição de g com $f_1, f_2, ..., f_n$ produz uma função parcial h dada por:

$$h(x_1, ...x_n) = g(f_1(x_1, ..., x_m), ..., f_n(x_1, ...x_m))$$

Exemplo

Sejam $f_1(x, y) = x + y$, $f_2(x, y) = xy + y^2$, *e* $g(x, y) = xy$
$h(x, y) = g(f_1(x, y), f_2(x, y))$
$h(x, y) = g(x + y, xy + y^2)$
$h(x, y) = (x + y).(xy + y^2)$

- Veremos agora um conjunto de três funções chamadas *funções iniciais*, que são utilizadas para definir outras funções por indução.
  - $Z : Z(x) = 0$ - Função Zero
  - $S : S(x) = x + 1$ - Função Sucessor
  - ${U_i}^n : {U_i}^n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i$ - Função Projeção

    - A Função Projeção é também chamada de "função identidade generalizada".
    - **exemplo:** ${U_1}^1(x) = x, \quad {U_2}^2(x, y) = y, \quad {U_2}^3(2, 4, 6) = 4,$ etc...

- Dada uma função $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ de n variáveis, muitas vezes é conveniente considerar $n - 1$ destas variáveis como fixas e variar apenas a variável restante sobre o domínio do números naturais ou sobre um subconjunto deste.
- Por exemplo, podemos tratar x como um parâmetro fixo e variar y em $f(x, y)$ para obter $f(x, 0), f(x, 1), f(x, 2)$, etc.
- Apesar de parecer extremamente trabalhoso num processo de cálculo manual, esta técnica pode ser bastante interessante em um processo de computação automática.

- Vejamos, por exemplo, o cálculo de $f(2,3)$ onde $f(x,y) = x + y$.
  - Assumimos que $f(2,0) = 2$, seja um valor dado e então prosseguimos calculando $f(2,1)$, $f(2,2)$, e finalmente $f(2,3)$.
  - Cada valor da função (exceto $f(2,0)$) é calculado através da adição de 1 ao valor anterior da função até que o resultado desejado seja obtido.
  - O cálculo de $f(2,3)$ fica então:
    $f(2,3) = [(f(2,0)+1)+1]+1 =$
    $f(2,3) = [(2+1)+1]+1 =$
    $f(2,3) = [3+1]+1 = 4+1 = 5$

- Recursão é a operação que define uma função $f(x-1, x_2, ..., x_n, y)$ de $n+1$ variáveis através do uso de outras duas funções $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $h(x_1, x_2, ..., x_n, y, z)$ de n e $n+2$ variáveis respectivamente.
- Nesta definição assume-se a variável y como sendo uma variável indutiva, no sentido de que o valor de f para $y+1$ pode ser expressa em termos de f para y.
- As variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ são tratadas como parâmetros fixos. Também assume-se g e h como funções conhecidas.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, 0) = g(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, y+1) = h(x_1, x_2, ..., x_n, y, f(x_1, x_2, ..., x_n, y))$$

DEFINIÇÃO:

Uma função f é chamada *primitiva recursiva* se e somente se ela puder ser obtida de funções iniciais através de um número finito de operações de composição e recursão.

Exemplo (1/2)

Mostre que a função $f(x, y) = x + y$ é primitiva recursiva.
Observe que $x + (y + 1) = (x + y) + 1$, então
$f(x, y + 1) = f(x, y) + 1 = S(f(x, y))$
também
$f(x, 0) = x$
Podemos agora definir $f(x, y)$ como

$$f(x, 0) = x = {U_1}^1(x)$$

$$f(x, y + 1) = S({U_3}^3(x, y, f(x, y))$$

Aqui a função base é $g(x) = {U_1}^1(x)$ e a função passo-indutiva é $h(x, y, z) = S({U_3}^3(x, y, z))$.

Exemplo (2/2)

Vejamos agora como calcular o valor de $f(2,4)$
$f(2,0) = 2$
$f(2,4) = S(f(2,3)) = S(S(f(2,2)))$
$= S(S(S(f(2,1)))) = S(S(S(S(f(2,0)))))$
$= S(S(S(S(2)))) = S(S(S(3))) = S(S(4)) = S(5) = 6.$

Exemplo

Usando recursão, defina a função de multiplicação $*$ dada por

$$g(x, y) = x * y$$

Uma vez que $g(x, 0) = 0$ e $g(x, y + 1) = g(x, y) + x$,
$g(x, 0) = Z(x)$
$g(x, y + 1) = f(U_3{}^3(x, y, g(x, y)), U_1{}^3(x, y, g(x, y)))$
onde f e a função de adição dada no exemplo anterior.

- É importante ressaltar que não é necessário utilizar apenas as funções iniciais na construcão de uma função recursiva.
- Se possuirmos um conjunto de funções $f_1, f_2, ..., f_n$ que são recursivas, então podemos utilizar quaisquer destas funções juntamente com as funções iniciais para obter outra função recursiva, desde que nos restrinjamos apenas às operações de composição e recursão.

- As funções mostradas a seguir são funções recursivas frequentemente utilizadas para construção de outras funções recursivas.

1. Função sinal, sg:
   $sg(0) = 0 \quad sg(y+1) = 1$
   ou $sg(0) = Z(0) \quad sg(y+1) = S(Z({U_2}^2(y, sg(y))))$
2. Função testa zero, $\widetilde{sg}$:
   $\widetilde{sg}(0) = 1 \quad \widetilde{sg}(y+1) = 0$
   ou $\widetilde{sg}(0) = S(0) \quad \widetilde{sg}(y+1) = Z({U_2}^2(y, \widetilde{sg}(y)))$
3. Função antecessor, A:
   $A(0) = 0 \quad A(y+1) = y = {U_1}^2(y, A(y))$

Funções Recursivas

1. Função subtração própria, $\dot{-}$:
   $x \dot{-} 0 = x \quad x \dot{-} (y+1) = A(x \dot{-} y)$
2. Função mínimo(x,y), $min(x, y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$
3. Função máximo(x,y), $max(x, y) = y + (x \dot{-} y)$
4. Função quadrática, $f(y) = y^2$:
   $f(y) = y^2 = U_1{}^1(y) * U_1{}^1(y)$

1. **exercício:**

Exercicio

Mostre que a função $Pr(x)$ que calcula a paridade de um número é recursiva.
Note que $Pr(0) = 0, \ \ Pr(1) = 1, \ \ Pr(2) = 0, \ \ Pr(3) = 1, \ \ ...$

2. **exercício:**

Exercicio

Mostre que a função Fatorial de um número $(x!)$ é recursiva.
Note que $0! = 1, \ \ 1! = 0! * 1, \ \ 2! = 1! * 2, \ \ ...$