Lógica Nebulosa

•Conceito

- Lógica nebulosa é uma lógica multivalorada capaz de capturar informações vagas, em geral descritas em uma linguagem natural e convertê-las para um formato numérico, de fácil manipulação pelos computadores de hoje em dia.
- É uma forma de especificar quão bem um objeto satisfaz uma descrição vaga.
- **Lógica Nebulosa** e **Conjuntos Nebulosos** permitem a representação de tal "vagueza".
- A lógica nebulosa pode ainda ser definida como a lógica que suporta os modos de raciocínio que são aproximados, ao invés de exatos, como estamos acostumados a trabalhar.

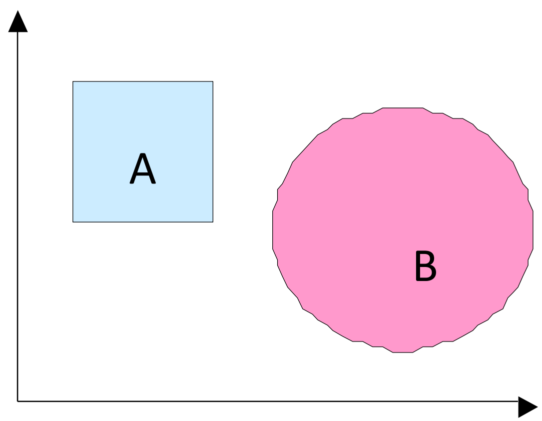
•Histórico

- A Lógica nebulosa foi desenvolvida por Lofti A. Zadeh da Universidade da Califórnia em Berkeley na década de 60 e combina lógica multivalorada, teoria possibilista, etc para poder representar o pensamento humano, ou seja, ligar a lingüística e a inteligência humana, pois muitos conceitos são melhores definidos por palavras do que pela matemática.

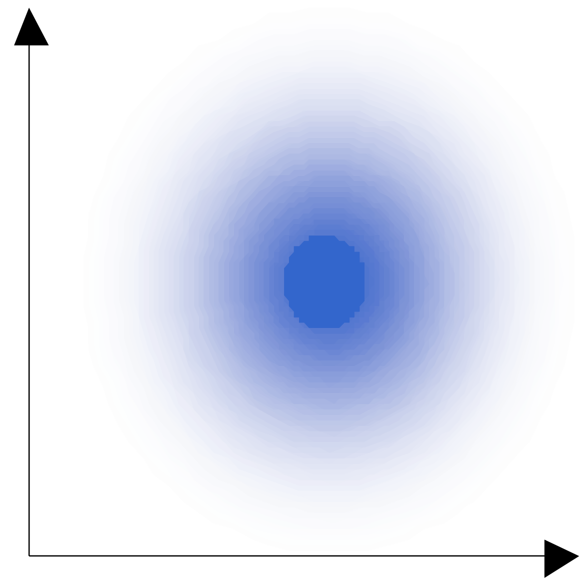
•Objetivo

- A lógica nebulosa objetiva fazer com que as decisões tomadas pela máquina se aproximem cada vez mais das decisões humanas, principalmente ao trabalhar com uma grande variedade de informações vagas e imprecisas, as quais podem ser traduzidas por expressões do tipo: a maioria, mais ou menos, talvez, etc. Antes do surgimento da lógica fuzzy essas informações não tinham como ser processadas.
- A lógica nebulosa vem sendo aplicada nas seguintes áreas: Análise de dados, Construção de sistemas especialistas, Controle e otimização, Reconhecimento de padrões, etc.

Conjuntos Clássicos x Conjuntos Nebulosos



Conjuntos Clássicos

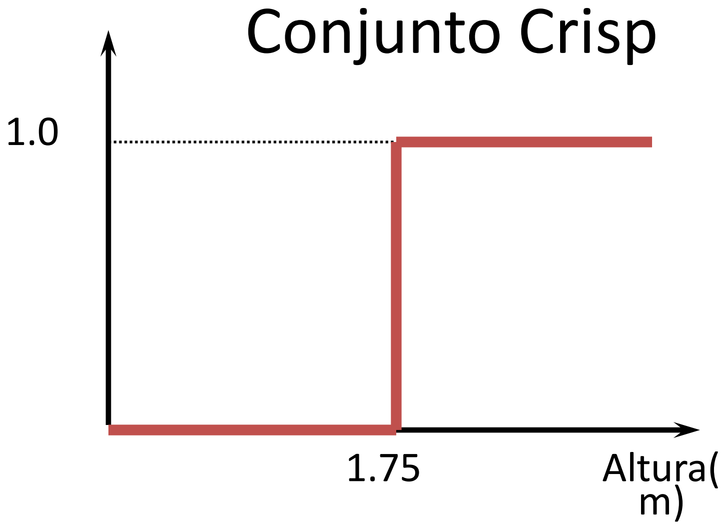


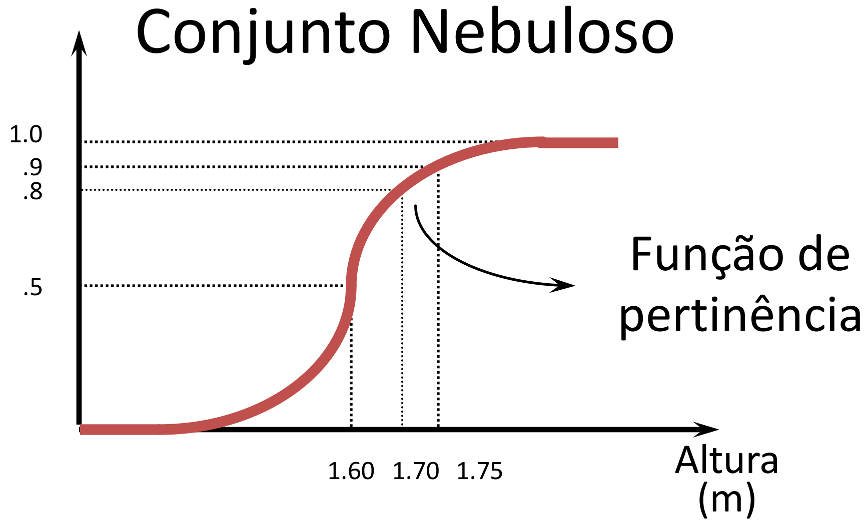
Conjunto Nebuloso

Conjuntos Nebulosos

- Conjuntos com limites imprecisos.

A = Conjunto de pessoas altas.





Conjuntos Nebulosos

- Definição formal:
  - Um conjunto nebuloso A em X é expresso como um conjunto de pares ordenados:

$$\underbrace{A}_{\text{Conjunto Nebuloso}} = \{(x, \underbrace{\mu_A(x)}_{\text{Função de pertinência (MF)}}) \mid x \in \underbrace{X}_{\text{Universo ou Universo de discurso}}\}$$

Um conjunto Nebuloso é totalmente caracterizado por sua função de pertinência (MF).

Conjuntos Nebulosos

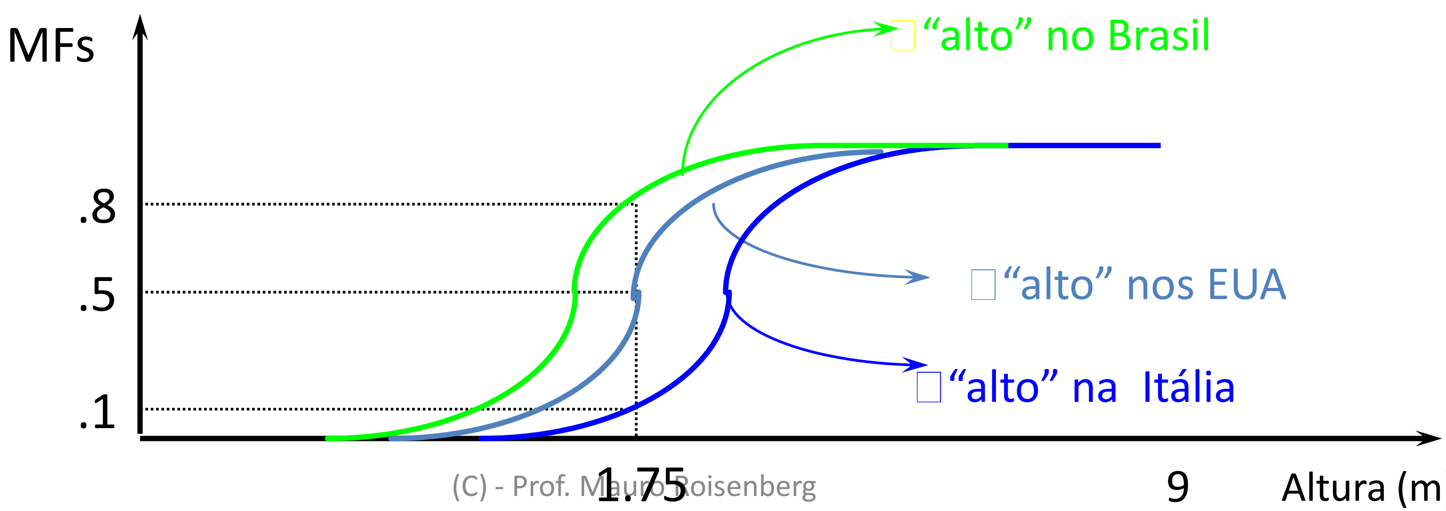
- Um conjunto difuso *A* definido no universo de discurso X é caracterizado por uma ***função de pertinência*** μ_A, a qual mapeia os elementos de X para o intervalo [0,1].

$$\mu_{A:X} \rightarrow [0,1]$$

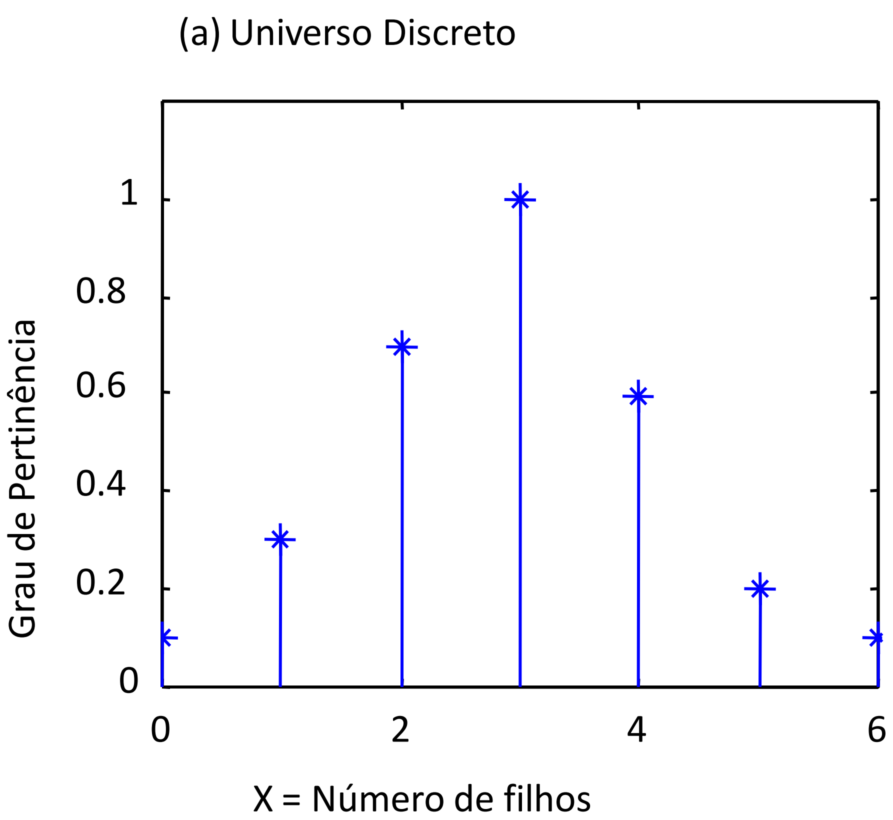
- Desta forma, a função de pertinência associa a cada elemento x pertencente a X um número real $\mu_{A(X)}$ no intervalo [0,1], que representa o *grau de possibilidade,* ou *grau de verdade* de que o elemento x venha a pertencer ao conjunto *A*, isto é, o quanto é possível para o elemento x pertencer ao conjunto *A*.

Função de Pertinência

- Reflete o conhecimento que se tem em relação a intensidade com que o objeto pertence ao conjunto difuso.
  - Características das funções de pertinência:
    - Medidas subjetivas;
    - Funções não probabilísticas monotonicamente crescentes, decrescentes ou subdividida em parte crescente e parte decrescente.

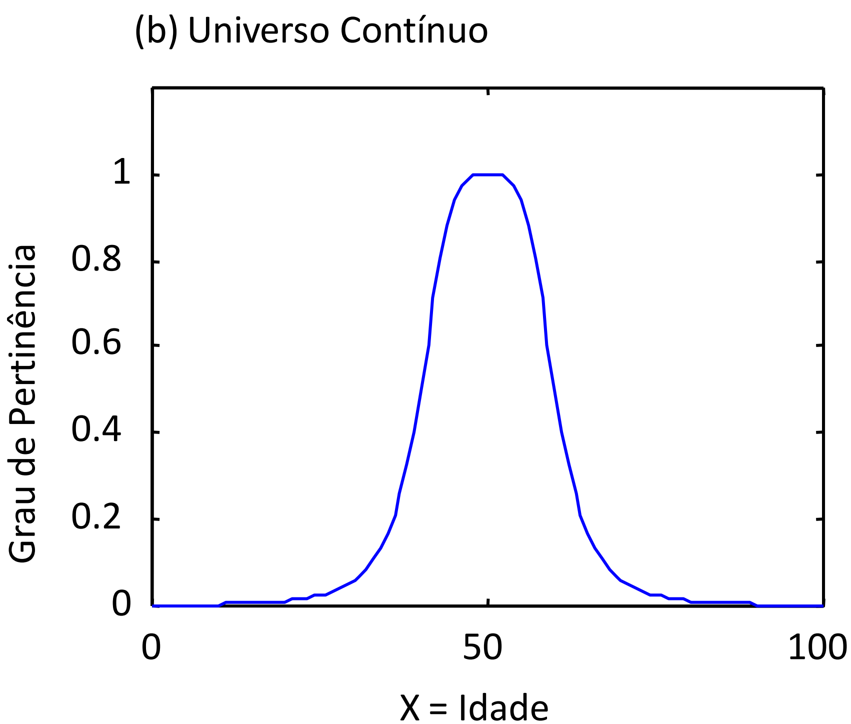


Universo Discreto



- X = {SF, Boston, LA} (discreto e não ordenado)
  - C = "Cidade desejável para se viver"
  - C = {(SF, 0.9), (Boston, 0.8), (LA, 0.6)}
- X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} (discreto)
  - A = "Número de filhos razoável"
  - A = {(0, .1), (1, .3), (2, .7), (3, 1), (4, .6), (5, .2), (6, .1)}

Universo Contínuo



$$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-50}{10}\right)^2}$$

- X = (Conjunto de números reais positivos)

(contínuo)

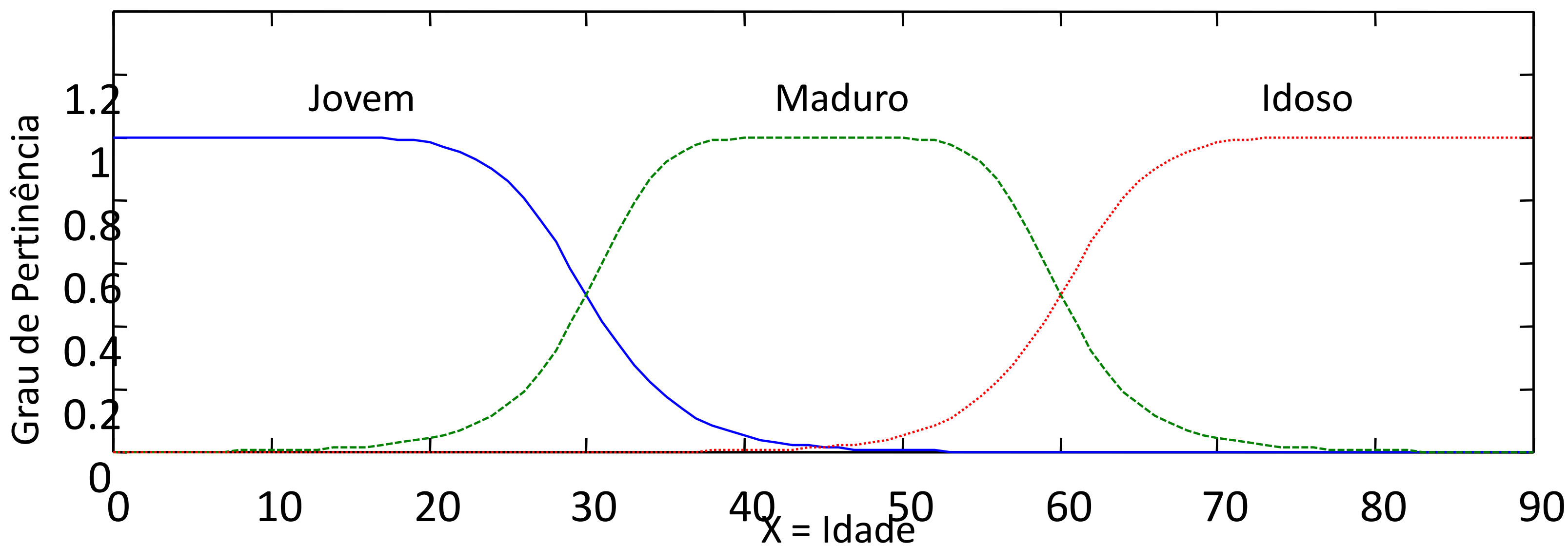
  - B = "Pessoas com idade em torno de 50 anos"
  - B = {(x, $\mu_{B(x)}$)| x em X}

Variáveis Lingüísticas

- Uma variável numérica possui valores numéricos:
  - Idade = 65
- Uma variável lingüística possui valores que não são números, e sim, palavras ou frases na linguagem natural.
  - Idade = idoso
- Um valor lingüístico é um conjunto fuzzy.
- Todos os valores lingüísticos formam um conjunto de termos:
  - T(idade) = {Jovem, velho, muito jovem,...
    Maduro, não maduro,...
    Velho, não velho, muito velho, mais ou menos velho,...
    Não muito jovem e não muito velho,...}

Partição Nebulosa

- Partição nebulosa da variável lingüistica "Idade", formada pelos valores lingüisticos "jovem", "maduro" e "idoso".



Mais definições

- Normalidade
- Altura
- Suporte
- Núcleo

- Pontos de Cruzamento
- α-cut
- strong α-cut

⌫ $\mu_{A(x)} = 1$

⌫ $Height_{(A)} = Max_x \, \mu_{A(x)}$

⌫ $Supp_{(A)} = \{x | \mu_{A(x)} > 0 \text{ e } x \in X\}$

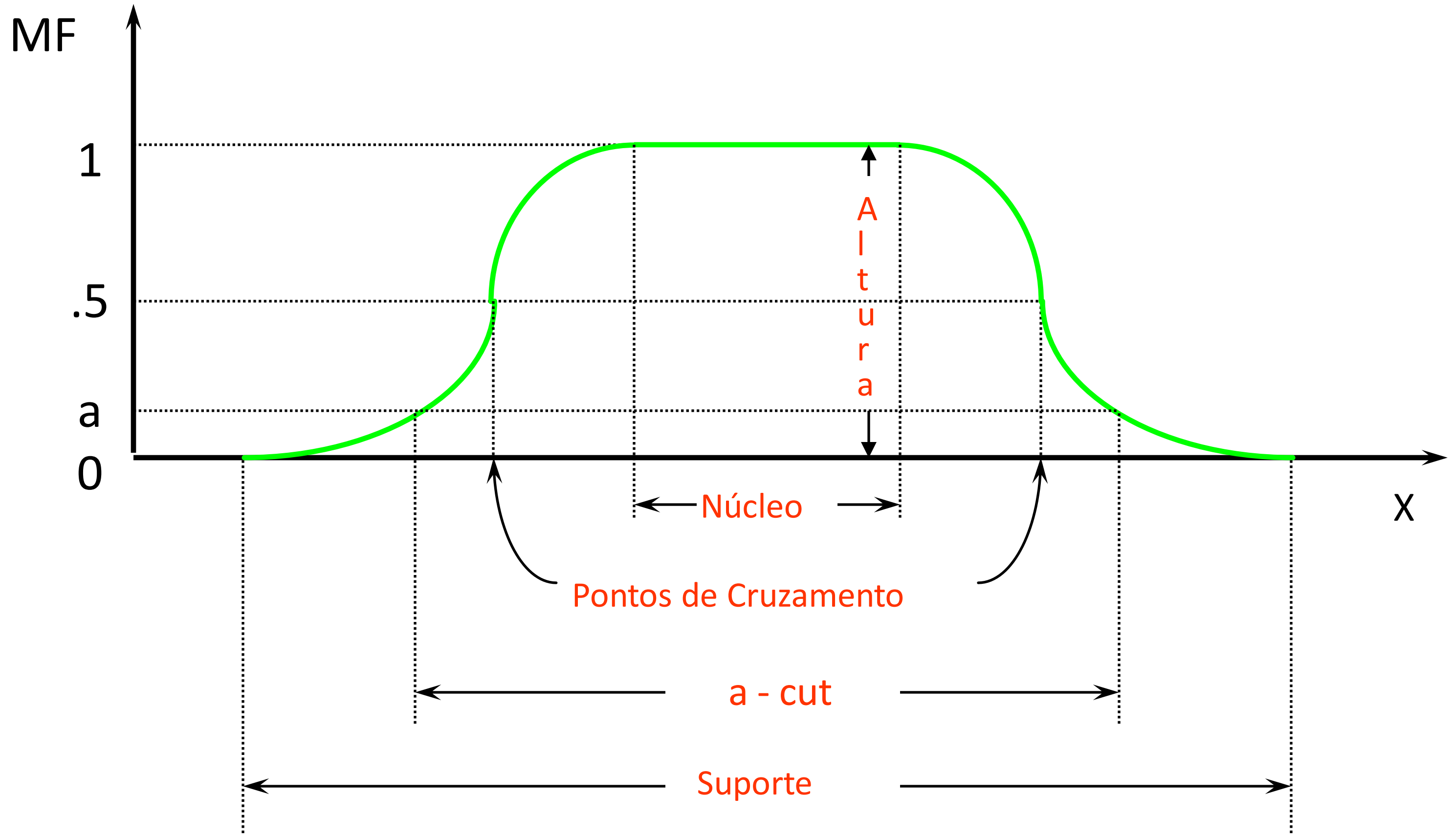
⌫ $Core_{(A)} = \{x | \mu_{A(x)} = 1 \text{ e } x \in X\}$

⌫ $Crossover_{(A)} = \{x | \mu_{A(x)} = 0.5\}$

⌫ $A_\alpha = \{x | \mu_{A(x)} \geq \alpha, x \in X\}$

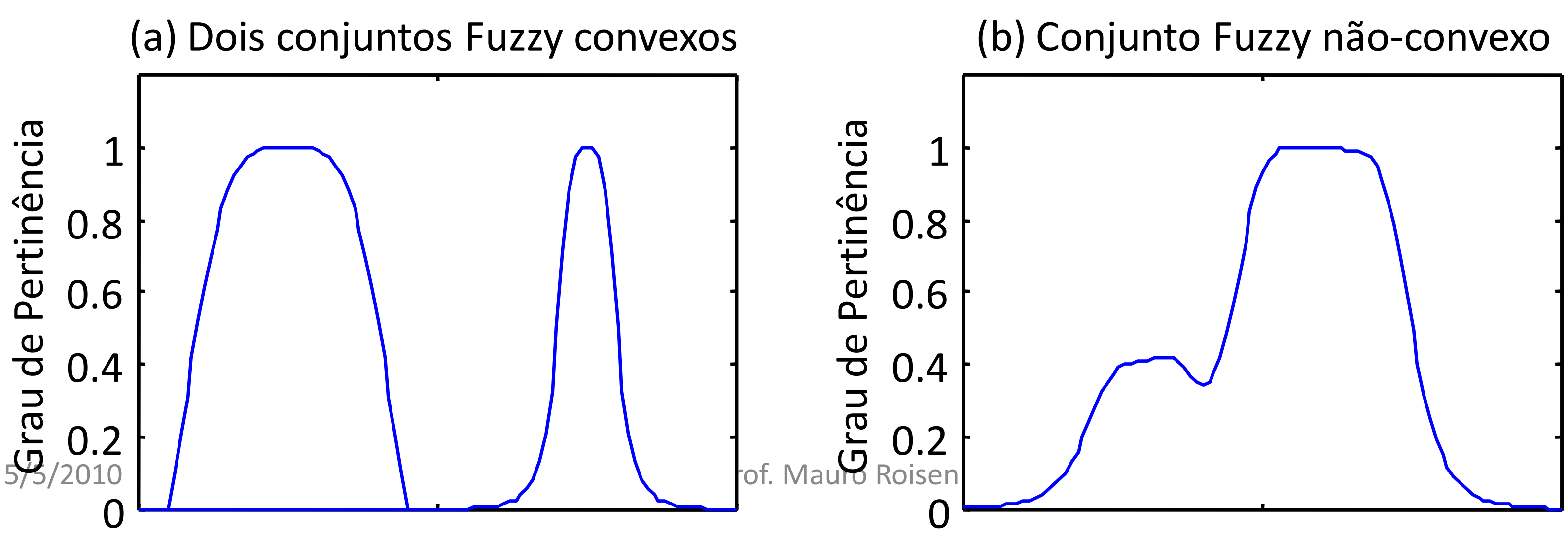
⌫ $A_{\alpha+} = \{x | \mu_{A(x)} > \alpha, x \in X\}$

Terminologia



Mais definições

- Conjunto nulo ⌫∅
- Força ⌫$\sum_{i=1}^{n} \mu_{A(xi)}$
- Convexidade
- Simetria
- Open left or right, closed



Exemplo:

- $X = \{a, b, c, d, e\}$
  - $A = \{1/a, 0.3/b, 0.2/c, 0.8/d, 0/e\}$ (normal)
  - $B = \{0.6/a, 0.9/b, 0.1/c, 0.3/d, 0.2/e\}$ (subnormal)
    - $Height_{(A)} = 1$ e $Height_{(B)} = 0.9$
    - $Supp_{(A)} = \{a, b, c, d\}$ e $Supp_{(B)} = \{a, b, c, d, e\}$
    - $Core_{(A)} = \{a\}$ e $Core_{(B)} = \emptyset$

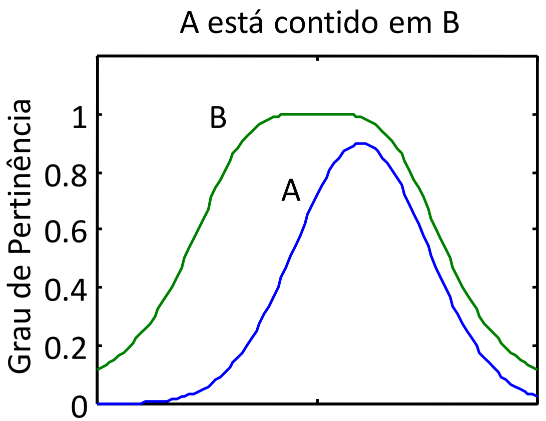
Exemplo (α-cut)

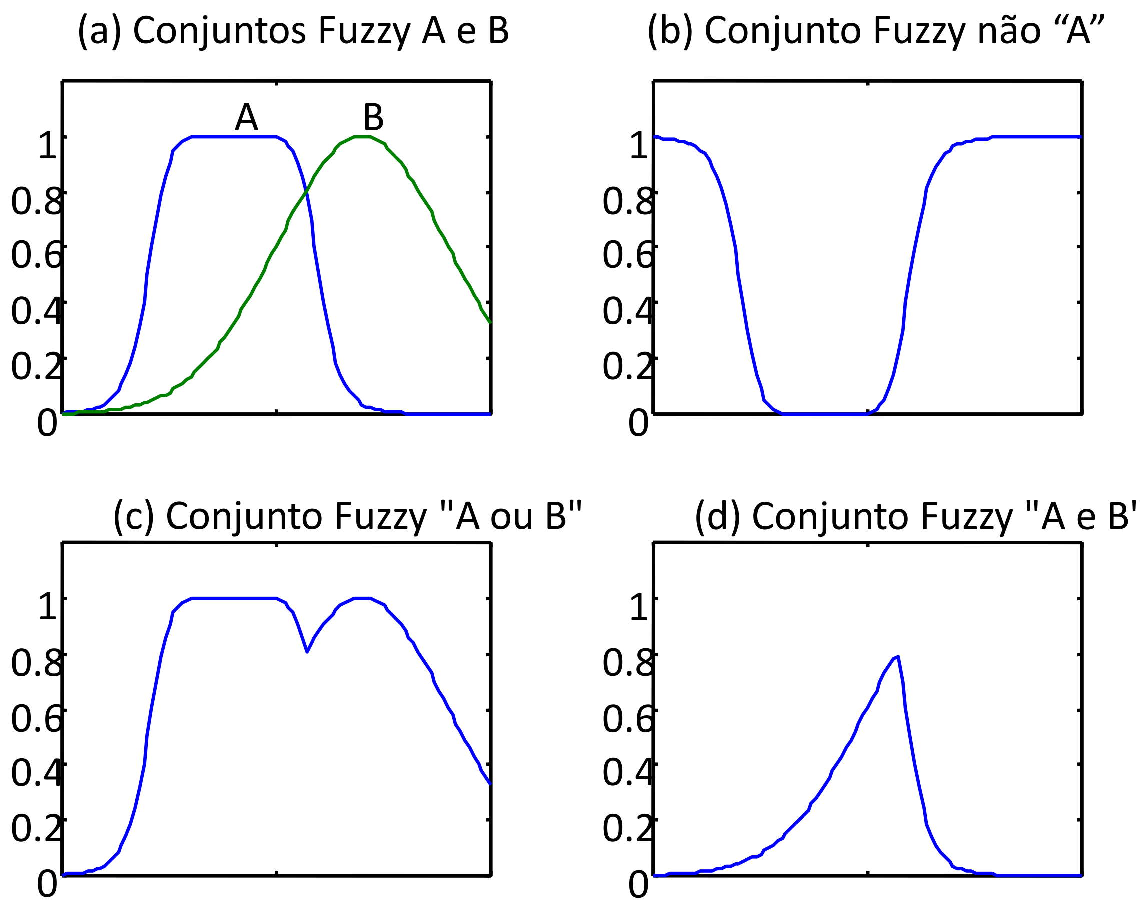
- A = {0.3/a, 1/b, 0.5/c, 0.9/d, 1/e}
  - para $0.3 \geq \alpha \geq 0$ A_α = {a, b, c, d, e}
  - para $0.5 \geq \alpha > 0.3$ A_α = {b, c, d, e}
  - para $0.9 \geq \alpha > 0.5$ A_α = {b, d, e}

Operações Básicas

- Subconjunto — ⌫ $A \subset B$, se $\mu_{B(x)} \geq \mu_{A(x)}$ para cada $x \in X$
- Igualdade — ⌫ $A = B$, se $\mu_{A(x)} = \mu_{B(x)}$ para cada $x \in X$
- Complemento — ⌫ $\sim A = X - A \rightarrow \mu_{\sim A(x)} = 1 - \mu_{A(x)}$
- Complemento Relativo — ⌫ $\mu_{E(x)} = \text{Max}\ [0, \mu_{A(x)} - \mu_{B(x)}]$
- União — ⌫ $C = A \cup B \rightarrow \mu_{c(x)} = \max(\mu_{A(x)}, \mu_{B(x)})$
  - ⌫ $C = \mu_{A(x)} \vee \mu_{B(x)}$
- Interseção — ⌫ $C = A \wedge B \rightarrow \mu_{c(x)} = \min(\mu_{A(x)}, \mu_{B(x)})$
  - ⌫ $C = \mu_{A(x)} \wedge \mu_{B(x)}$

Representação





Exemplo (União|Interseção)

- X = {a, b, c, d, e}
  - A = {1/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.9/e}
  - B = {0.2/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.4/e}

  - C = {1/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.9/e}
  - D = {0.2/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.4/e}

Formulação da MF

- Função Triangular

$$trimf(x;a,b,c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

- Função Trapezoidal

$$trapmf(x;a,b,c,d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$$

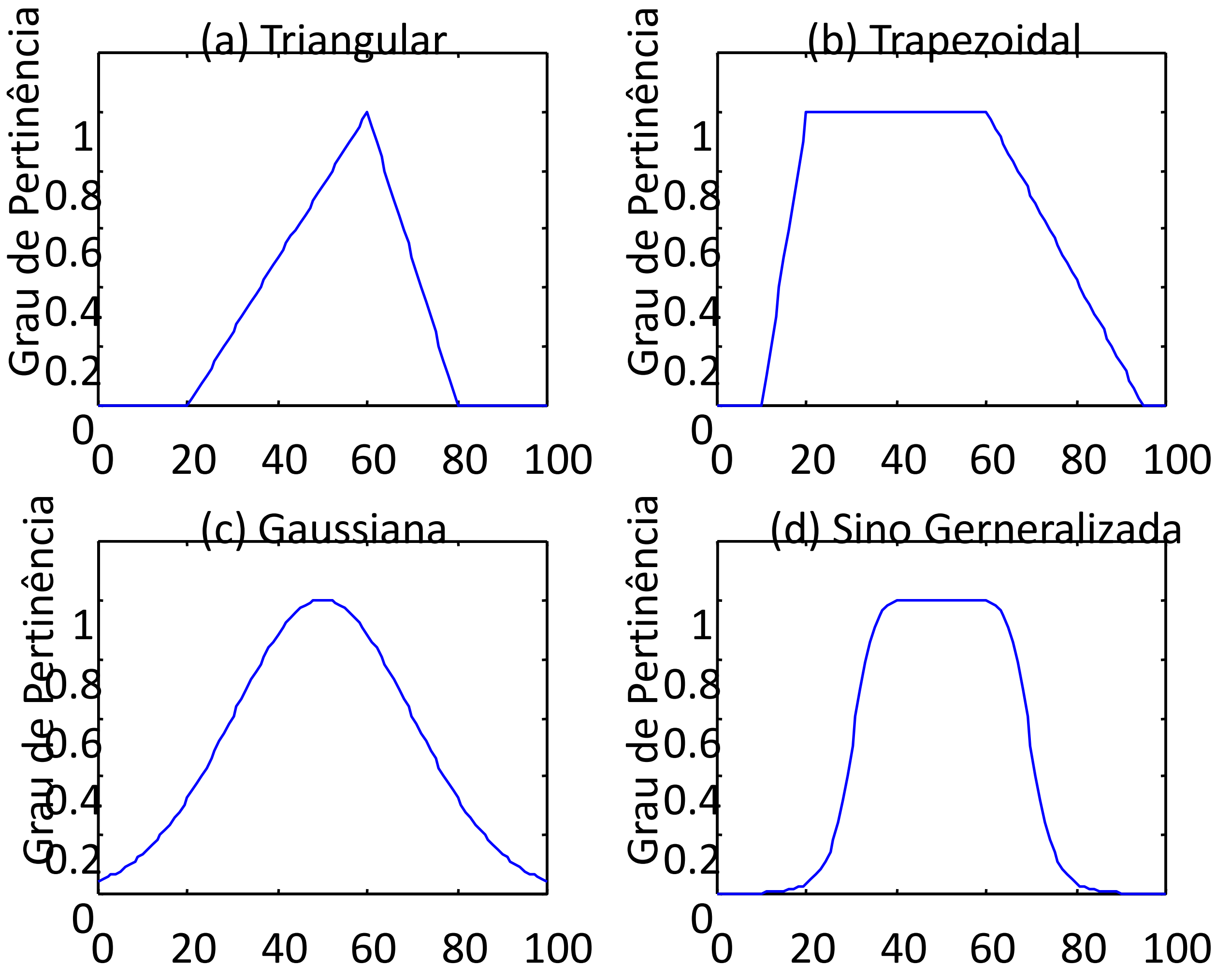
- Função Gaussiana

$$gaussmf(x;a,b,c) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

- Função Sino General

$$gbellmf(x;a,b,c) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{b}\right|^{2b}}$$

Formulação da MF



Propriedades (Interseção|União)

- Comutatividade
  - $A \vee B = B \vee A$
  - $A \wedge B = B \wedge A$
- Idempotência
  - $A \vee A = A$
  - $A \wedge A = A$
- Associatividade
  - $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C = A \vee B \vee C$
  - $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C = A \wedge B \wedge C$
- Distributividade
  - $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
  - $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Propriedades (Interseção|União)

- $A \vee \varnothing = A$ $\quad$ $A \vee X = X$
- $A \wedge \varnothing = \varnothing$ $\quad$ $A \wedge X = A$

- $A \subset A \vee B$
- $A \supset A \wedge B$
- $A \wedge B \subset A \vee B$

- Se $A \subset B$ então
  - $B = A \vee B$
  - $A = A \wedge B$

- Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então
  - $A \subset C$

Propriedades (Comp.|Comp. Relativo)

- Negação Dupla
  - $\sim(\sim A) = A$

- Lei de Morgan
  - $\sim(A \vee B) = \sim A \wedge \sim B$
  - $\sim(A \wedge B) = \sim A \vee \sim B$

- $\sim \phi = X$
- $\sim X = \phi$

- Se $A \subset B$ então $\sim A \supset \sim B$ e $A - B = \phi$

- $A - A = \phi$
- $\phi - A = \phi$

- $A - \phi = A$

Uma característica significante que distingue os conjuntos difusos dos conjuntos clássicos é:

- $\sim A \wedge A \neq \phi$
- $\sim A \vee A \neq X$

Sistemas Nebulosos

- Possuem grande habilidade para modelar sistemas comercias altamente complexos.
  - sistemas convencionais tem dificuldade em resolver problemas não-lineares complexos.

- São capazes de aproximar o comportamento do sistema
  - porque apresentam várias propriedades não-lineares e pouco compreensíveis.

Sistemas Nebulosos

- Benefícios para os especialistas:
  - habilidade em codificar o conhecimento de uma forma próxima a linguagem usada por eles.
- Mas o que faz uma pessoa ser um especialista?
  - é a capacidade em fazer diagnósticos ou recomendações em termos imprecisos.
- Sistemas *Fuzzy* capturam uma habilidade próxima do conhecimento do especialista.
- O processo de aquisição do conhecimento é:
  - mais fácil,
  - mais confiável,
  - menos propenso a falhas e ambigüidades.

Sistemas Nebulosos

- É capaz de modelar sistemas envolvendo múltiplos especialistas.
- Nos sistemas do mundo real, há vários especialistas sob um mesmo domínio.
- Representam bem a cooperação múltipla, a colaboração e os conflitos entre os especialistas.
- Um exemplo das posições dos gerentes de controle, de produção, financeiro e *marketing.*
  - Nosso preço deve ser baixo.
  - Nosso preço deve ser alto.
  - Nosso preço deve ser em torno de 2*custo
  - Se o preço dos concorrentes não é muito alto então nosso preço deve ser próximo do preço deles.

Sistemas Nebulosos

- Devido aos seus benefícios, como:
  - regras próximas da linguagem natural
  - fácil manutenção
  - simplicidade estrutural
- Os modelos baseados em sistemas *Fuzzy* são validados com maior precisão.
- A confiança destes modelos cresce.

Raciocínio Nebulosos

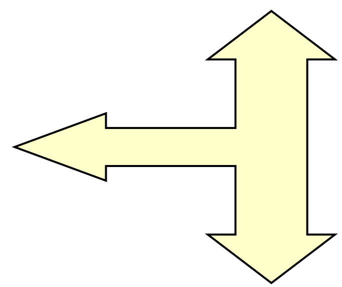
- Nos sistemas especialista convencionais:
  - as proposições são executadas seqüencialmente
  - heurísticas e algoritmos são usados para reduzir o número de regras examinadas.
- Nos sistemas especialistas *Fuzzy*:
  - o protocolo de raciocínio é um paradigma de processamento paralelo
  - todas as regras são disparadas

Etapas do Raciocínio

1ª FUZZIFICAÇÃO

AGREGAÇÃO

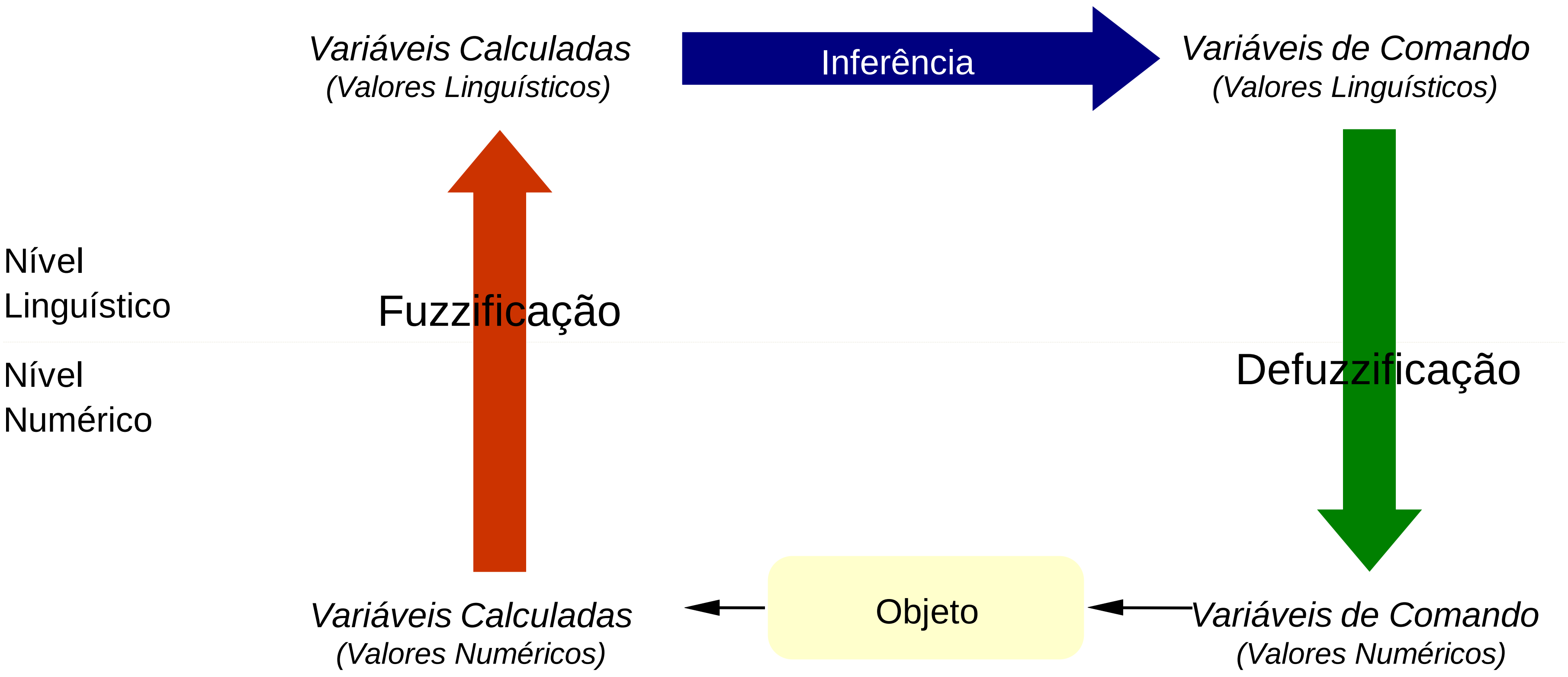
2ª INFERÊNCIA



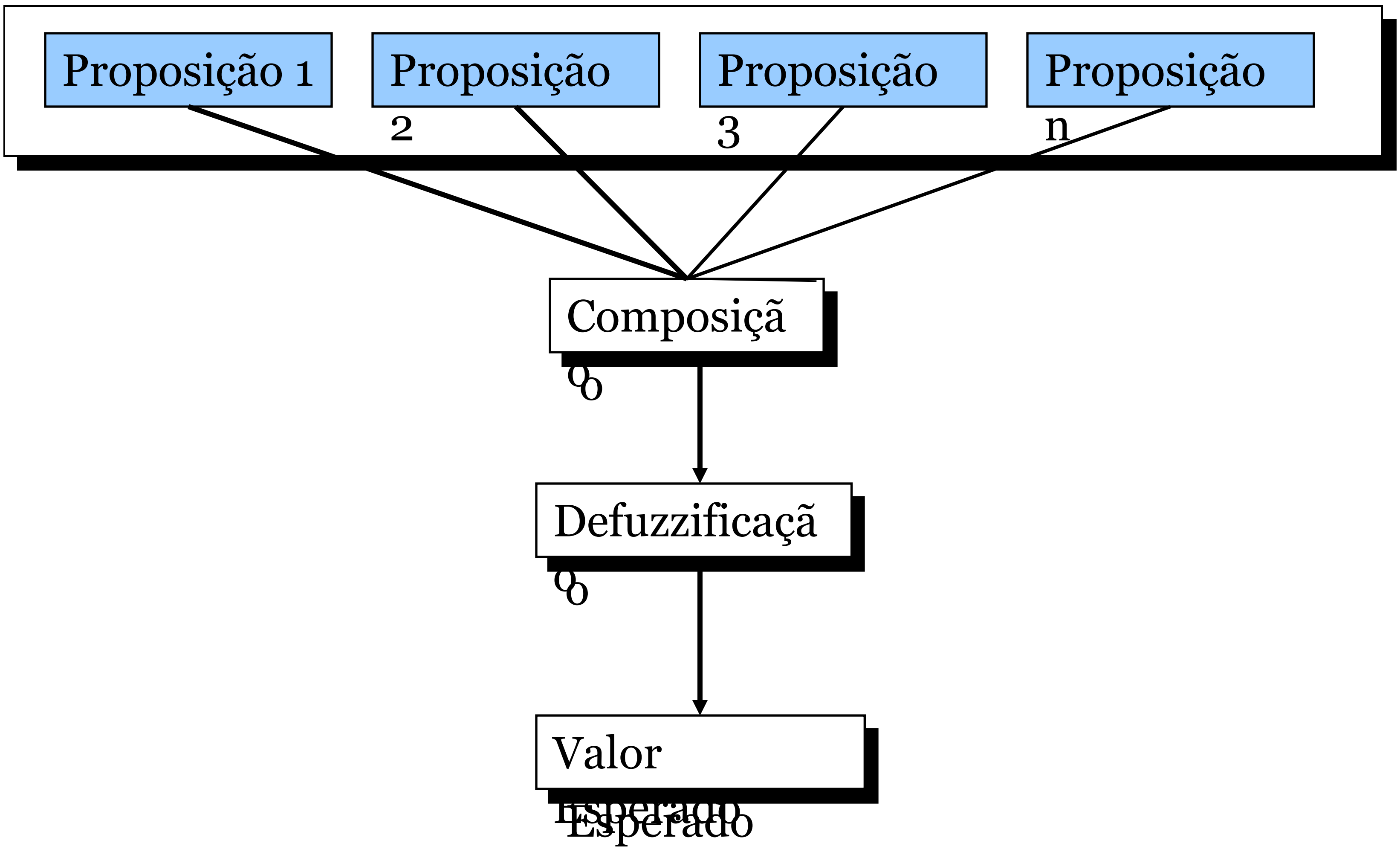
COMPOSIÇÃO

3ª DEFUZZIFICAÇÃO

Etapas do Raciocínio



Etapas do Raciocínio



Primeiro Exemplo

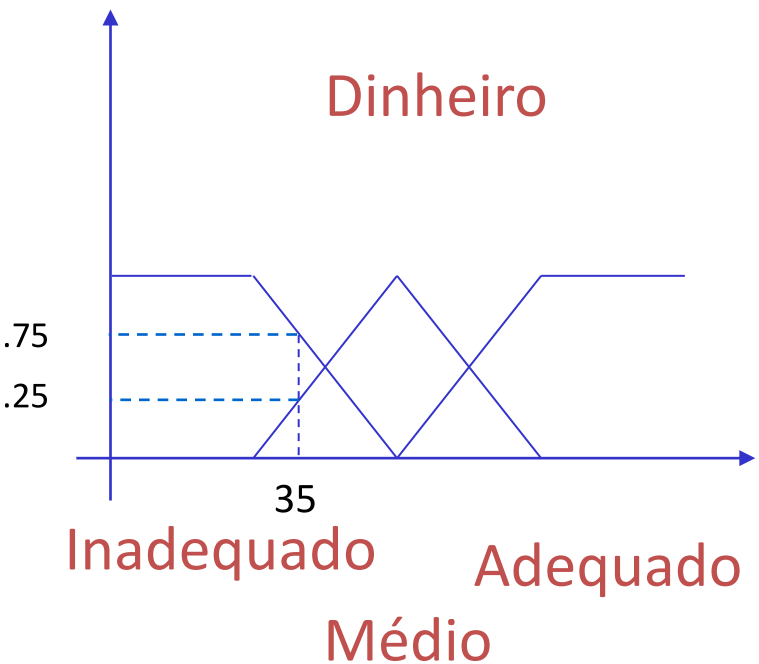
Objetivo do sistema: um analista de projetos de uma empresa que determina o risco de um determinado projeto.

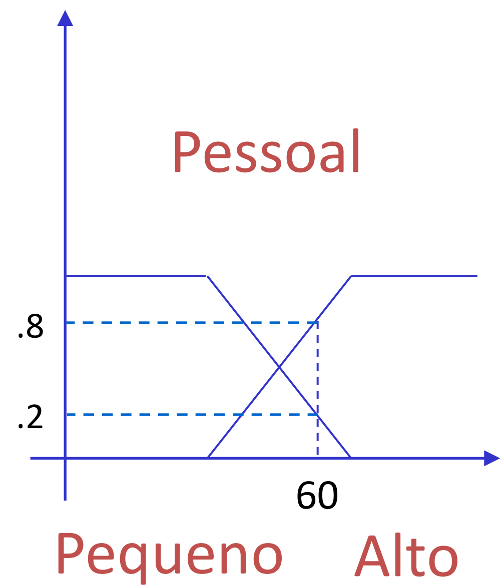
Depende da quantidade de dinheiro e de pessoas envolvidas no projeto (variáveis de entrada)

Base de conhecimento (regras)
R1 - Se dinheiro é adequado <u>ou</u> pessoal é pequeno <u>então</u> risco é pequeno
R2 - Se dinheiro é médio <u>e</u> pessoal é alto, <u>então</u> risco é normal
R3 - Se dinheiro é inadequado, <u>então</u> risco é alto

Primeiro Exemplo

- Passo 1: Fuzzificar





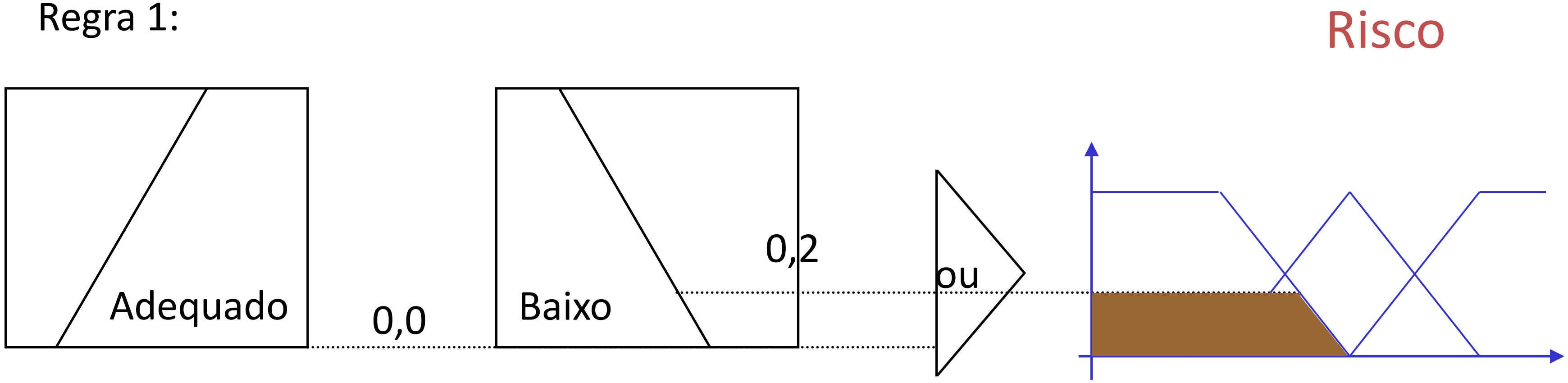
$$\mu_i(d) = 0{,}25 \& \mu_m(d) = 0{,}75$$

$$\mu_b(p) = 0{,}2 \& \mu_a(p) = 0{,}8$$

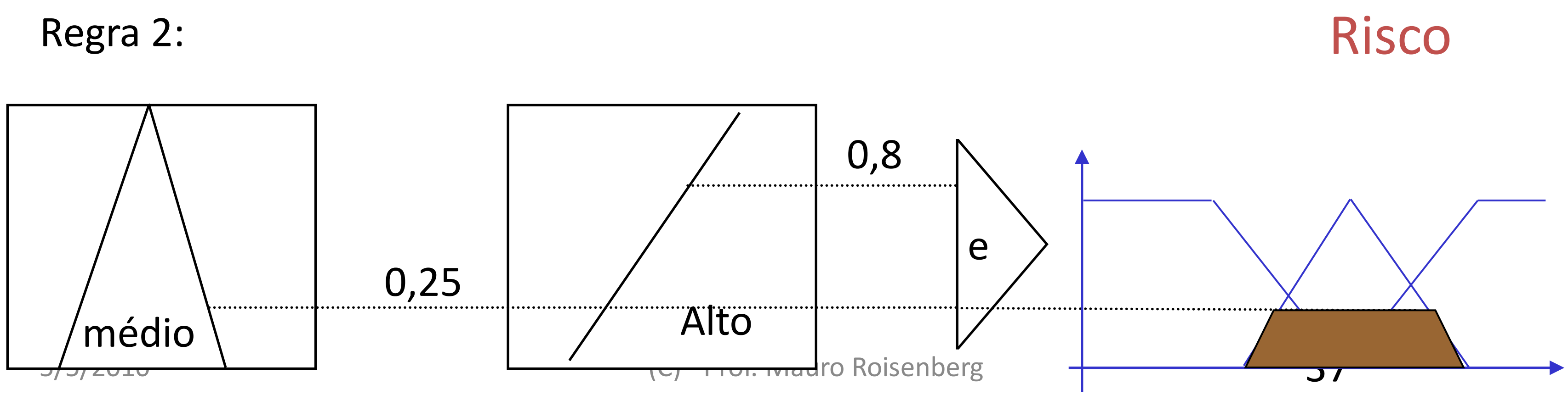
Primeiro Exemplo

- Passo 2: Avaliação das regras
  - ou → máximo e → mínimo

Regra 1:



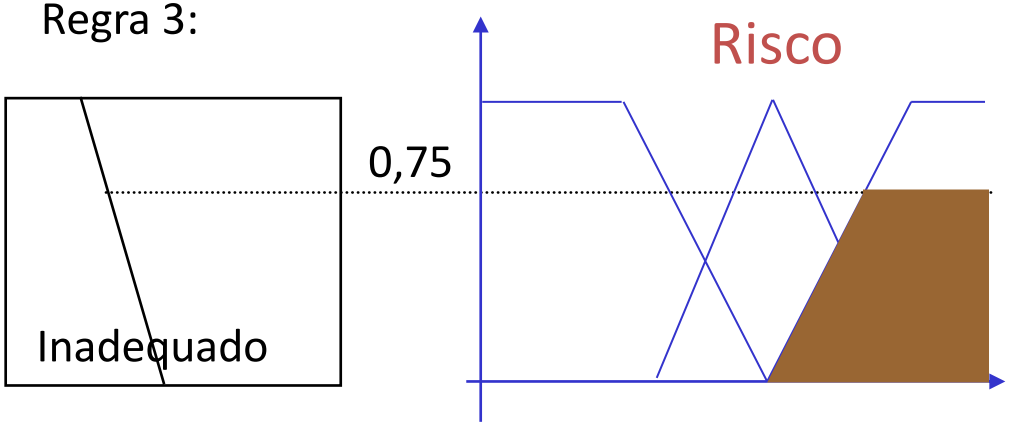
Regra 2:



Primeiro Exemplo

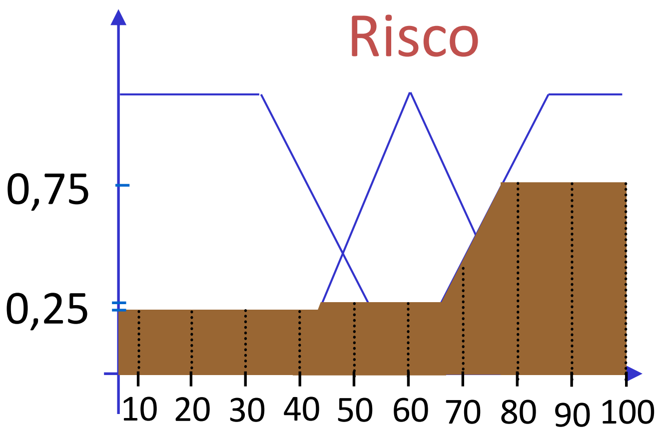
- Passo 2: Avaliação das regras

Regra 3:



Primeiro Exemplo

- Passo 3: Defuzzificação



$$C = \frac{(10+20+30+40)*0{,}2+(50+60+70)*0{,}25+(80+90+100)*0{,}75}{0{,}2+0{,}2+0{,}2+0{,}2+0{,}25+0{,}25+0{,}25+0{,}75+0{,}75+0{,}75} = \frac{267{,}5}{3{,}8} = 70{,}4$$

Fuzzificação

- Etapa na qual os valores numéricos são transformados em graus de pertinência para um valor lingüístico.
- Cada valor de entrada terá um grau de pertinência em cada um dos conjuntos difusos. O tipo e a quantidade de funções de pertinência usados em um sistema dependem de alguns fatores tais como: precisão, estabilidade, facilidade de implementação...

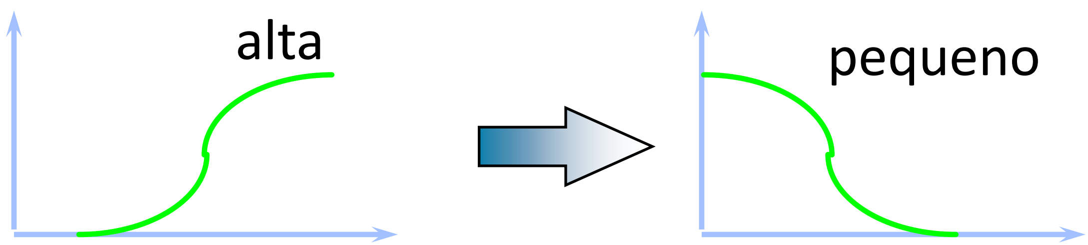
Determinação das regras

- Descrição das situações nas quais há reações através de regras de produção (If - then). Cada regra na saída especifica uma ou várias conclusões.

Regras If - then

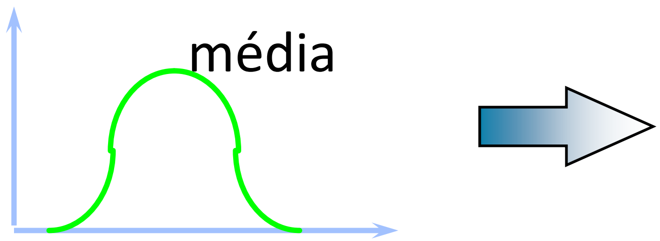
- Estilo Mamdani

  Se a pressão é alta, então o volume é pequeno



- Estilo Sugeno

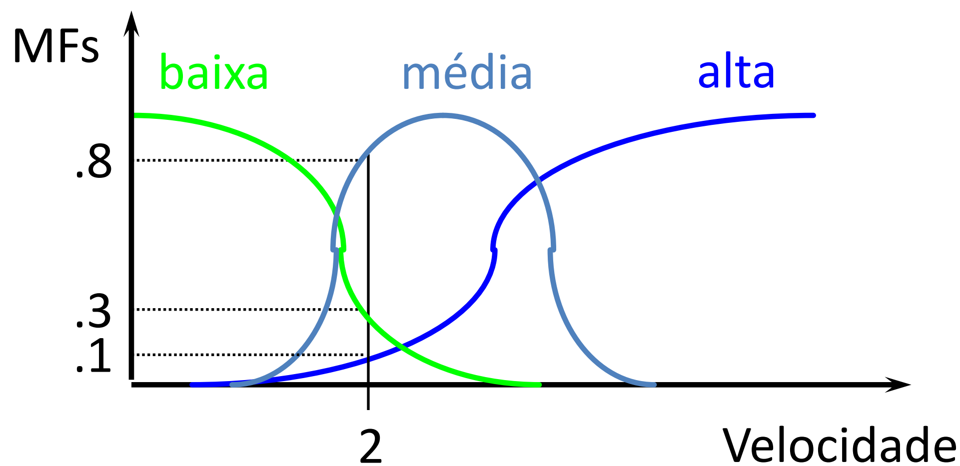
  Se a velocidade é média, então a resistência = 5 * velocidade



resistência = 5*velocidade

Sistema de inferência

Se velocidade é baixa então resistência = 2
Se velocidade é média então resistência = 4 * velocidade
Se velocidade é alta então resistência = 8 * velocidade



Regra 1: w1 = .3; r1 = 2
Regra 2: w2 = .8; r2 = 4*2
Regra 3: w3 = .1; r3 = 8*2

Resistência = S(wi*ri) / Swi
= 7.12

Avaliação das regras

- Cada antecedente (lado if) tem um grau de pertinência. A ação da regra (lado then) representa a saída nebulosa da regra. Durante a avaliação das regras, a intensidade da saída é calculada com base nos valores dos antecedentes e então indicadas pelas saídas nebulosas da regra.
  - Alguns métodos de avaliação:
    - MinMax, MaxMin, MaxProduto, MinMin, MaxMedia, MaxMax e Soma dos produtos.

Agregação das Regras

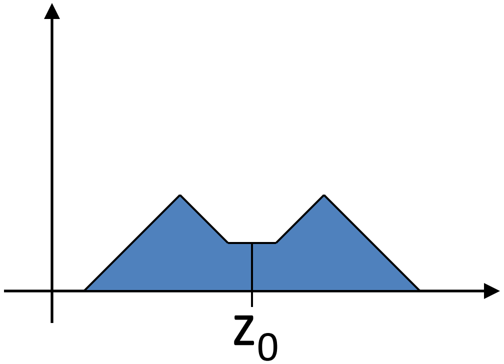
- São as técnicas utilizadas na obtenção de um conjunto difuso de saída “x” a partir da inferência nas regras.
- Determinam quanto a condição de cada regra será satisfeita.

Defuzzificação

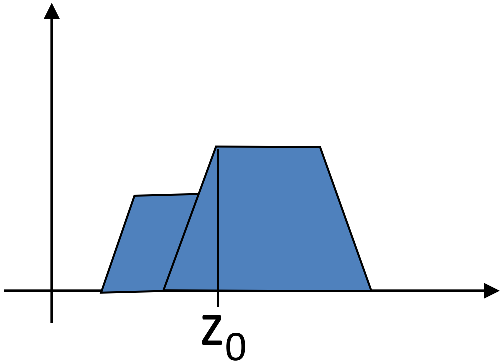
- Processo utilizado para converter o conjunto difuso de saída em um valor crisp correspondente.
  – Alguns métodos de defuzzificação:
    - Centróide,
    - Média dos máximos,
    - Distância de Hamming,
    - Barras verticais,
    - Método da altura, etc.

Defuzzificação

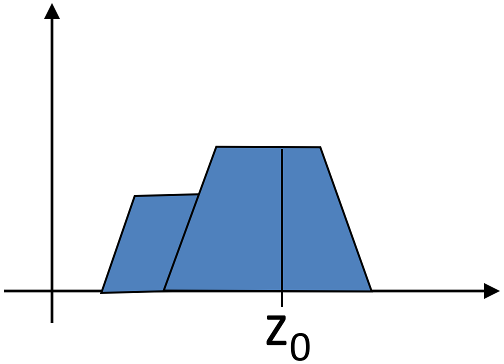
Exemplos:



Centróide



First-of-Maxima



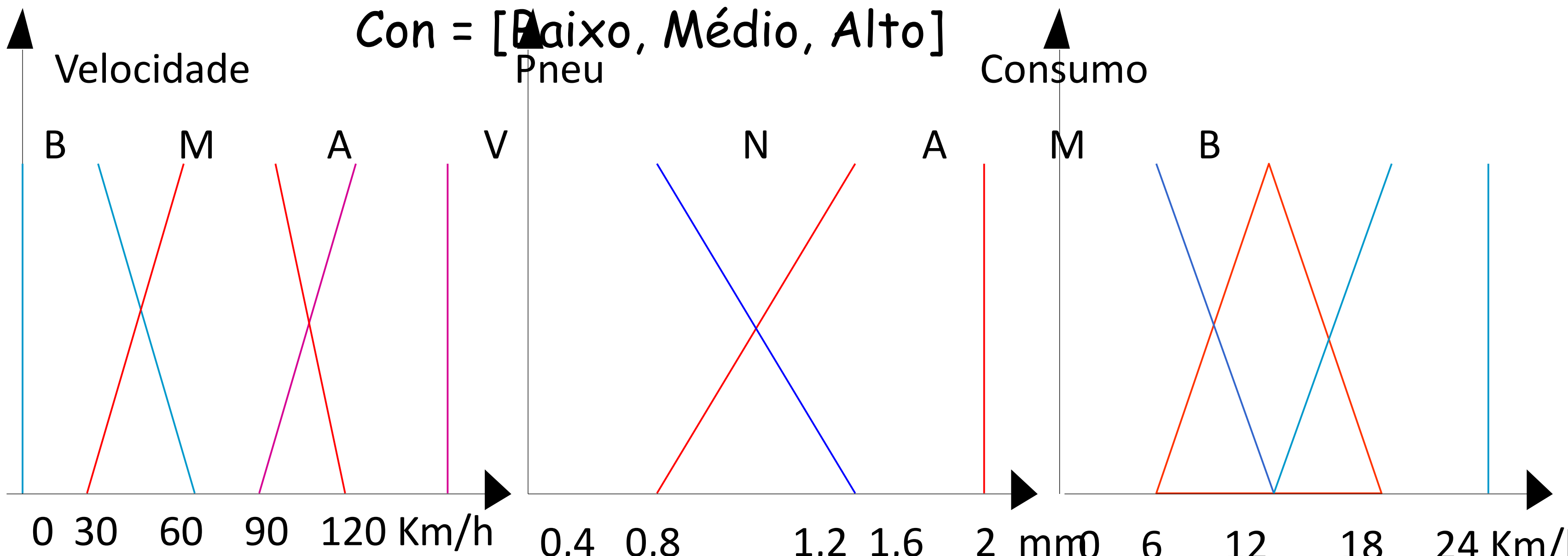
Critério Máximo

Outro Exemplo

- Projeto e funcionamento de um sistema para determinação do consumo de combustível de um automóvel.
  - Passo (1): Variáveis de entrada = velocidade (Vel), pneu (Pneu)

    Variável de saída = consumo (Con)
  - Passo (2): Vel = [Baixa, Média, Alta]; Pneu = [Velho, Novo]

    Con = [Baixo, Médio, Alto]



Outro Exemplo

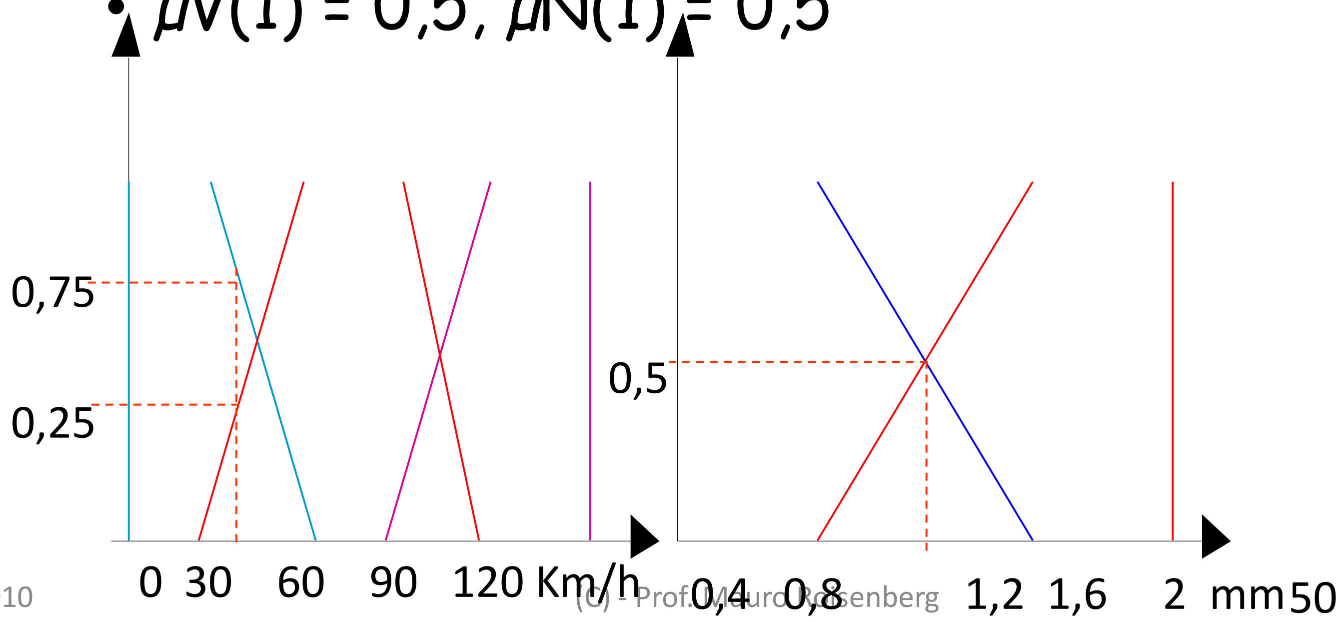
- Passo (3):
  - Regra 1: Se Vel = B e Pneu = V, então Con = A.
  - Regra 2: Se Vel = B e Pneu = N, então Con = M.
  - Regra 3: Se Vel = M e Pneu = V, então Con = M.
  - Regra 4: Se Vel = M e Pneu = N, então Con = B.
  - Regra 5: Se Vel = A e Pneu = V, então Con = A.
  - Regra 6: Se Vel = A e Pneu = N, então Con = M.
- Passo (4):
  - Adotar centro de massa

Outro Exemplo

– Para Velocidade = 35 km/h e Pneu = 1mm, qual o Consumo?

– Fuzzificação:

- $\mu B(35) = 0,75$, $\mu M(35) = 0,25$, $\mu A(35) = 0,0$
- $\mu V(1) = 0,5$, $\mu N(1) = 0,5$



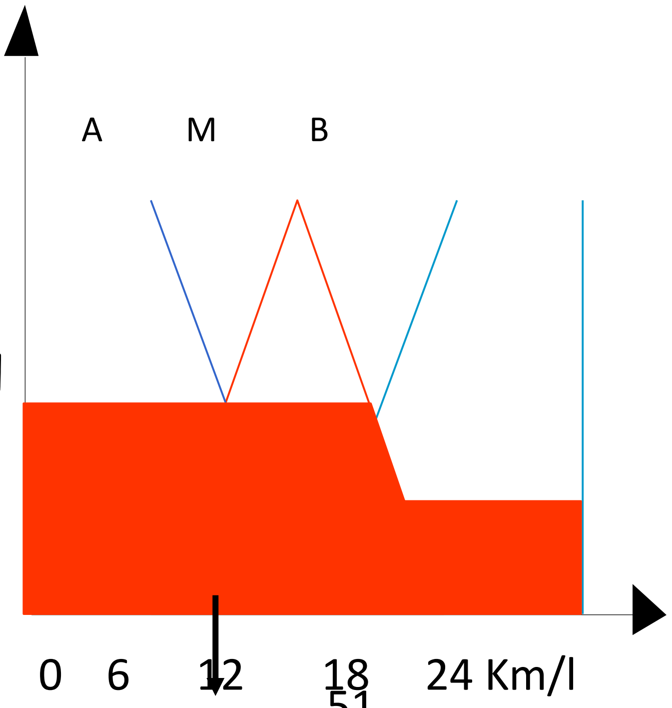
Outro Exemplo

–Inferência:

- D1 = min[μB(35), μV(1)] = 0,5 (Con=A)
- D2 = min[μB(35), μN(1)] = 0,5 (Con=M)
- D3 = min[μM(35), μV(1)] = 0,25 (Con=M)
- D4 = min[μM(35), μN(1)] = 0,25 (Con=B)
- D5 = min[μA(35), μV(1)] = 0,0 (Con=A)
- D6 = min[μA(35), μN(1)] = 0,0 (Con=M)
- A: max (0,5; 0)=0,5; B: max(0,25)=0,25
  M: max(0,5; 0,25;0)=0,5;

–Defuzzificação:

- Usando centro de massa: Con ≅11,5 km/l



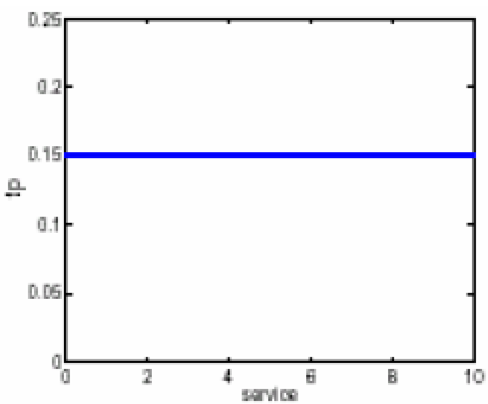
Ainda Outro Exemplo

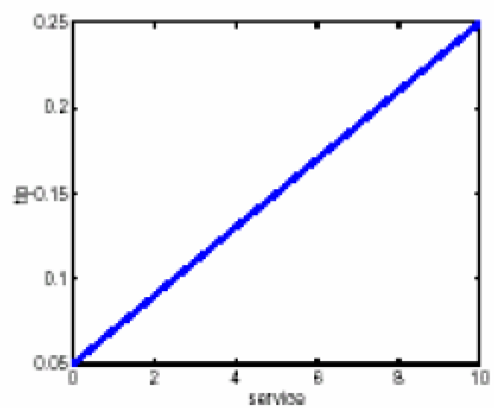
- O Problema da Gorjeta
  - 1.Aproximação não fuzzy:

    Gorjeta fixa = 15% da conta (independente da qualidade do serviço).

    Gorjeta em função do serviço. Dependência linear entre 5% e 25% com o serviço classificado numa escala de 0 a 10:

    - tip=0.05+Serviço*0.20/10





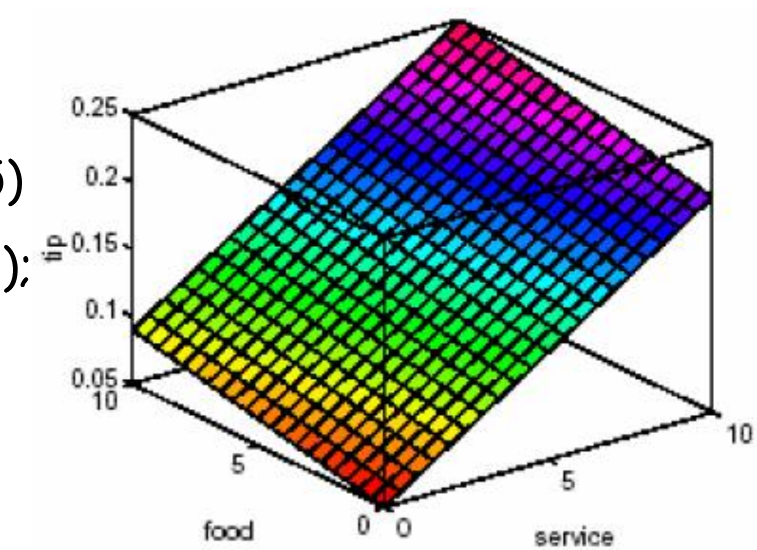
Ainda Outro Exemplo

- O Problema da Gorjeta
  - 1.Aproximação não fuzzy:

    Problema estendido: Qualidade do serviço e da comida entre 0 e 10. Serviço com peso 80% e comida com peso 20%:

  - servRatio=0.8;
  - tip=servRatio*(0.20/10*service+0.05)

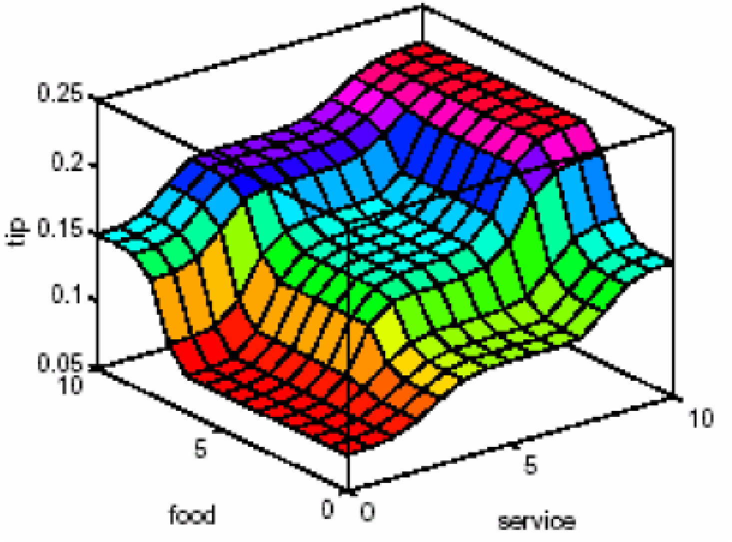
    + (1–servRatio)*(0.20/10*food+0.05);



Ainda Outro Exemplo

- O Problema da Gorjeta
  - 2. Aproximação Fuzzy para o problema da Gorjeta no restaurante:
    - Combinando o Serviço e a Comida:

1. If service is poor or the food is rancid, then tip is cheap
2. If service is good, then tip is average
3. If service is excellent or food is delicious, then tip is generous



Lógica *Fuzzy* no Mundo

- Lógica *Fuzzy* tornou-se tecnologia padrão e é também aplicada em análise de dados e sinais de sensores;
- Também utiliza-se lógica fuzzy em finanças e negócios;
- Aproximadamente 1100 aplicações bem sucedidas foram publicadas em 1996; e
- Utilizada em sistemas de Máquinas Fotográficas, Máquina de Lavar Roupas, Freios ABS, Ar Condicionado e etc.