2.7- TRANSFORMAÇÕES LINEARES PLANAS

Def.: São as transformações de IR^2 em IR^2.

As transformações lineares planas mais importantes e suas correspondentes interpretações geométricas são:

2.7.1- Reflexão

2.7.1.1- Reflexão em torno do eixo dos *x*

Essa transformação linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem $(x, -y)$, simétrica em relação ao eixo dos *x* e é uma transformação representada da seguinte forma:

T: $IR^2 \to IR^2$, definida por $T(x, y) = (x, -y)$

sendo sua matriz canônica $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ assim:

$$\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2.7.1.2- Reflexão em torno do eixo dos *y*

T: $IR^2 \to IR^2$, definida por $T(x, y) = (-x, y)$

ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2.7.1.3- Reflexão na origem

T: $IR^2 \to IR^2$, definida por $T(x, y) = (-x, -y)$

ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2.7.1.4- Reflexão em torno da reta $y = x$

T: $IR^2 \to IR^2$, definida por $T(x, y) = (y, x)$

ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2.7.1.5- Reflexão em torno da reta $y = -x$

T: $IR^2 \to IR^2$, definida por $T(x, y) = (-y, -x)$

ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2.7.2- Dilatações e Contrações

2.7.2.1- Dilatação ou Contração na direção do vetor

T: $IR^2 \to IR^2$, definida por $T(x, y) = \alpha(x, y)$

ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Observe que:

se $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor;
se $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor;
se $\alpha = 1$, T é a identidade I;
se $\alpha < 0$, T troca o sentido do vetor.

A transformação T: $IR^2 \to IR^2$, definida por $T(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)$ é um exemplo de contração.

2.7.2.2- Dilatação ou Contração na direção do eixo dos x

T: $IR^2 \to IR^2$, definida por T(x, y) = (αx, y), $\alpha > 0$

ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \alpha x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Observe que:

se $\alpha > 1$, T dilata o vetor;
se $0 < \alpha < 1$, T contrai o vetor;

Essa transformação é também chamada dilatação ou contração na direção $0x$ (ou horizontal) de um fator α.

2.7.2.3- Dilatação ou Contração na direção do eixo dos y

T: $IR^2 \to IR^2$, definida por T(x, y) = (x, αy), $\alpha > 0$

ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Observe que:

Se, nesse caso, $\alpha = 0$, então $(x, y) \to (x, 0)$ e T seria a projeção ortogonal do plano sobre o eixo dos x.

2.7.3- Cisalhamentos

2.7.3.1- Cisalhamento na direção do eixo dos x

T: $IR^2 \to IR^2$, definida por T(x, y) = ($x + \alpha y$, y)

ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x + \alpha y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Esse cisalhamento é também chamado de cisalhamento horizontal de fator α.

2.7.3.2- Cisalhamento na direção do eixo dos y

T: $IR^2 \to IR^2$, definida por $T(x, y) = (x, y + \alpha x)$

ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y + \alpha x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2.7.4- Rotação

A rotação do plano em torno da origem, que faz cada ponto descrever um ângulo θ, determina a transformação linear

T_θ: $IR^2 \to IR^2$, definida por $T_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\,sen\,\theta,\ x\,sen\,\theta + y\cos\theta)$, cuja matriz canônica é :

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Ex.: Obter a imagem do vetor $v = (4, 2)$ pela rotação de $\theta = \pi/2$.

Exemplos:

1- Os pontos A(2, -1), B(6, 1) e C(x, y) são vértices de um triângulo eqüilátero. Determinar o vértice C, pela matriz de rotação.

2- Determinar a matriz da transformação linear de IR^2 em IR^2 que representa um cisalhamento por um fator 2 na direção horizontal seguida de uma reflexão em torno do eixo dos y.

3- O plano sofre uma rotação de um ângulo θ. A seguir experimenta uma dilatação de fator 4 na direção Ox e, posteriormente, uma reflexão em torno da reta $y = x$. Qual a matriz que representa a única transformação linear e que tem o mesmo efeito do conjunto das três transformações citadas?

2.8- TRANSFORMAÇÕES LINEARES NO ESPAÇO

Def.: São as transformações de IR^3 em IR^3.

Dentre as diversas transformações lineares em IR^3, veremos as reflexões e rotações.

2.8.1- Reflexões

2.8.1.1- Reflexões em relação aos planos coordenados

A reflexão em relação ao plano xOy é a transformação linear que leva cada ponto (x, y, z) na sua imagem $(x, y, -z)$, simétrica em relação ao plano xOy. Assim essa transformação é definida por:

$T(x, y, z) = (x, y, -z)$

e sua matriz canônica é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

assim, as reflexões em relação aos planos
xOz e yOz têm as matrizes canônicas:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.8.1.2- Reflexões em relação aos eixos coordenados

A reflexão em torno do eixo dos x é o operador linear

$T: IR^3 \rightarrow IR^3$, definida por $T(x, y, z) = (x, -y, -z)$

cuja matriz canônica é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

De forma análoga, $T(x, y, z) = (-x, y, -z)$ e $T(x, y, z) = (-x, -y, z)$ definem as reflexões em relação aos eixos Oy e Oz, respectivamente.

2.8.1.3- Reflexão na origem

T: $IR^3 \to IR^3$, definida por T(x, y, z) = ($-x$, $-y$, $-z$)

2.7.4- Rotações

Dentre as rotações do espaço ressalta-se a rotação do espaço em torno do eixo dos z, que faz cada ponto descrever um ângulo θ. Esse operador linear T: $IR^3 \to IR^3$ é definido por

T(x, y, z) = ($x\cos\theta - y\,sen\,\theta$, $x\,sen\,\theta + y\cos\theta$, z), cuja matriz canônica é :

$$[T] = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ex.: Calcular o ângulo α formado pelos vetores v e T(v) quando o espaço gira em torno do eixo dos z de um ângulo θ, nos seguintes casos:

a) θ = 180° e v = (3, 0, 3)
b) θ = 90° e $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Exercícios

1- Os pontos A(2, -1), B(-1, 4) são vértices consecutivos de um quadrado. Calcular os outros dois vértices, utilizando a matriz-rotação.

2- Os pontos A(-1, -1), B(4, 1) e C(a, b) são vértices de um triângulo retângulo isósceles, reto em A. Determinar o vértice C fazendo uso da matriz-rotação.

3- Determinar, em cada caso, a matriz da transformação linear de IR^2 em IR^2 que representa a seqüência de transformações dadas:

a) Reflexão em torno do eixo dos *y*, seguida de um cisalhamento de fator 5 na direção horizontal.

b) Rotação de 60°, seguida de uma reflexão em relação ao eixo dos *y*.

c) Rotação de um ângulo θ, seguida de uma reflexão na origem.

d) Reflexão em torno da reta $y = -x$, seguida de uma dilatação de fator 2 na direção O*x* e, finalmente, um cisalhamento de fator 3 na direção vertical.

4- O vetor $v = (3, 2)$ experimenta seqüencialmente: uma reflexão em torno da reta $y = x$, um cisalhamento horizontal de fator 2, uma contração na direção O*y* de fator 1/3, uma rotação de 90° no sentido anti-horário.

a) Calcular o vetor resultante dessa seqüência de operações.

b) Encontrar a expressão da transformação linear T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ que representa a composta das quatro operações.

c) Determinar a matriz canônica da composta das operações.

5- Determinar o ângulo α formado pelos vetores *v* e T(*v*) quando o espaço gira em torno do eixo dos *z* e de um ângulo θ, no seguinte caso:

a) $\theta = 180°$ e $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

RESPOSTAS

1- (4, 7) e (7, 2) ou (-6, 1) e (-3, -4). 2- C(-3, 4) ou C(1, -6). 3- a) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} -os\theta & sen\theta \\ -sen\theta & -cos\theta \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$. 4- a) (-1, 8); b) T(*x*, *y*) = (-*x*/3, 2*x* + *y*); c) [T] = $\begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. 5- a) $\alpha = 90°$.