INE5403

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA PARA A COMPUTAÇÃO

PROF. DANIEL S. FREITAS

UFSC - CTC - INE

4 - INTROD. À ANÁLISE COMBINATÓRIA

4.1) Arranjos (permutações)

4.2) Combinações

4.3) O Princípio do Pombal

4.4) Relações de Recorrência

REVISÃO SOBRE COMBINAÇÕES

- O princípio da multiplicação e os métodos de contagem para permutações são todos aplicáveis a situações aonde a ordem é importante.
- Combinações estão relacionadas a alguns problemas de contagem aonde a ordem não importa.

REVISÃO SOBRE COMBINAÇÕES

- **Questão:**
  - Seja A qualquer conjunto com n elementos e $0 \leq r \leq n$.
  - Quantos subconjuntos diferentes de A existem com r elementos?
  - Os subconjuntos com r elementos de um conjunto A com n elementos são chamados de **combinações** de A tomado r a r.

Revisão sobre Combinações

- **Exemplo:** Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
  - Combinações 3 a 3 distintas de A:

    $A_1 = \{1, 2, 3\},\ A_2 = \{1, 2, 4\},\ A_3 = \{1, 3, 4\},\ A_4 = \{2, 3, 4\}$
  - Note que se trata de subconjutos e não de seqüências.
  - Portanto:

    $A_1 = \{2, 1, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{1, 3, 2\} = \{3, 1, 2\} = \{3, 2, 1\}$
  - Ou seja: neste caso, a ordem é irrelevante.

REVISÃO SOBRE COMBINAÇÕES

- **Exemplo:** Seja A o conjunto de todas as 52 cartas em um baralho comum.
  - Então uma combinação 5 a 5 de A é simplesmente uma “mão” de 5 cartas.
    - Sem importar o modo como as cartas foram distribuídas.

REVISÃO SOBRE COMBINAÇÕES

- Agora queremos contar o número de subconjuntos com r elementos para um conjunto A com n elementos:
  - (partindo do que já sabemos sobre arranjos)
  - Note que todo arranjo ${}_nA_r$ pode ser produzido pela seqüência:

    Tarefa 1: escolha um subconjunto B de A contendo r elementos

    Tarefa 2: escolha uma permutação em particular de B
  - Estamos tentando computar o número de modos de escolher B:
    - vamos chamar este número de C
    - a tarefa 1 pode ser realizada de C modos
    - a tarefa 2 pode ser realizada de $r!$ modos
    - portanto, pelo princípio da multiplicação, o número de modos de realizar ambas as tarefas é dado por: $C \cdot r!$

REVISÃO SOBRE COMBINAÇÕES

- Número de subconjuntos com r elementos de um conjunto A com n elementos:
  - mas isto também é ${}_nP_r$, logo:

$$C \cdot r! \;=\; {}_nP_r \;=\; \frac{n!}{(n-r)!}$$

  - de onde tiramos que:

$$C \;=\; \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- Com isto, chegamos ao resultado a seguir...

Revisão sobre Combinações

- **Teorema:** Seja A um conjunto com $|A| = n$ e seja $0 \leq r \leq n$.
  - O número de combinações dos elementos de A tomados r a r é:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

    - (que também é o nro de subconjuntos de A com r elementos)

Revisão sobre Combinações

- Observe novamente que o número de combinações r a r de A não depende de A:
  - depende apenas de n e r.
- Este número é chamado de ${}_nC_r$:

$$
{}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}
$$

REVISÃO SOBRE COMBINAÇÕES

- **Exemplo:** Compute o número de “mãos” de 5 cartas distintas que podem ser distribuídas a partir de um baralho de 52 cartas.
- **Solução:**

$$_{52}C_5 = \frac{52!}{5!.47!} = 2598960$$

  - pois a ordem em que as cartas são dadas é irrelevante
  - compare isto com 311875200 (mesmo problema com arranjo).

- A seguir, consideraremos casos em que a repetição é permitida...

COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO

- Considere a seguinte situação (1/3):
  - Uma estação de rádio oferece um prêmio de 3 CDs da lista dos 10 melhores.
  - A escolha dos CDs é deixada para o ganhador:
    - e é permitido repetir
    - a ordem em que as escolhas são feitas é irrelevante.
  - Queremos determinar o número de modos em que os ganhadores dos prêmios podem fazer suas escolhas.
  - Usaremos a técnica básica: reduzir o problema a um que já sabemos resolver...

Combinações com repetição

- Escolha de 3 CDs da lista dos 10 melhores (com repetição) (2/3):
  - suponha que as escolhas são gravadas pelo sistema de correio de voz da estação
  - depois de se identificar, um ganhador é solicitado a pressionar 1 se quer o CD nro n e 2 se não o quer:
    - se o 1 é pressionado, o sistema pergunta de novo sobre o CD n
    - quando o 2 é pressionado, o sistema pergunta sobre o próximo CD da lista
    - quando três 1's forem registrados, o sistema comunica a quem está na linha que os CDs selecionados serão enviados
  - um registro tem que ser criado para cada uma destas chamadas:
    - será uma seqüência de 1's e 2's
    - é claro que esta seqüência conterá três 1s
    - uma seqüência poderá chegar a conter nove 2's
      - (por exemplo: 1^{os} 9 CDs recusados + 3 cópias do CD nro 10)

Combinações com repetição

- Escolha de 3 CDs da lista dos 10 melhores (com repetição) (3/3):
  - O nosso modelo para contar o número de modos em que um ganhador do prêmio pode escolher os seus 3 CDs é o seguinte:
    - cada seleção de 3 CDs pode ser representada por um vetor contendo três 1's e nove 2's ou brancos
    - total de 12 células, como, por exemplo:
      - 222122122221 (seleção dos números 4, 6 e 10)
      - $1211bbbbbbbb$ (número 1 e duas cópias do número 2)
      - 222222222111 (três cópias do número 10)
  - O número de modos de selecionar 3 células do vetor para conter 1's é ${}_{12}C_3$
    - pois o vetor contém $3 + 9 = 12$ células e a ordem na qual esta seleção é feita não importa
- O teorema a seguir generaliza esta discussão...

COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO

- **Teorema:** Suponha que k seleções têm que ser feitas a partir de n ítens, sem ligar para ordem e permitindo repetições
    - (assumindo que pelo menos k cópias de cada um dos n ítens estão disponíveis).

Então:

- O número de modos em que estas seleções podem ser feitas é dado por:

$$_{n+k-1}C_k$$

COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO

- **Exemplo:** de quantos modos o ganhador do prêmio pode escolher três CDs da lista dos 10 melhores se forem permitidas repetições?
- **Solução:**
  - temos $n = 10$ e $k = 3$
  - pelo teorema, são ${}_{10+3-1}C_3 \; = \; {}_{12}C_3$ modos de fazer as seleções
  - ou seja, o ganhador pode fazer a sua seleção de 220 maneiras diferentes. $\square$

COMBINAÇÕES

- Alguns problemas requerem que a contagem de combinações seja suplementada pelo princípio da multiplicação (ou pelo da adição).

- **Exemplo:** Suponha que uma senha válida consista de 7 caracteres:
  - o 1^o é uma letra escolhida do conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G\}$
  - cada um dos outros seis é uma letra qualquer ou um dígito

  Quantas senhas diferentes são possíveis?

- **Solução:**
  - Uma senha pode ser construída pela execução em seqüência das tarefas:

    Tarefa 1: escolha uma letra inicial do conjunto dado.

    Tarefa 2: escolha uma seqüência de letras e dígitos (pode repetir).
  - A tarefa 1 pode ser realizada de ${}_7C_1 = 7$ modos.
  - A tarefa 2 pode ser realizada de $36^6 = 2176782336$ modos
  - Daí, pelo Princípio da Multiplicação, existem:

    $7 \cdot 2176782336 = 15237476352$ senhas diferentes. □

COMBINAÇÕES

- **Exemplo:** Quantos comitês diferentes de 7 pessoas podem ser formado se cada comitê contém:
  - 3 mulheres de um conjunto de 20
  - 4 homens de um conjunto de 30 ?

- **Solução:**
  - Um comitê pode ser formado pela execução das seguintes tarefas em sucessão:

    Tarefa 1: escolha 3 mulheres do conjunto de 20

    Tarefa 2: escolha 4 homens do conjunto de 30
    - Note que a ordem das escolhas não importa.
  - A tarefa 1 pode ser realizada de ${}_{20}C_3 = 1140$ modos.
  - A tarefa 2 pode ser realizada de ${}_{30}C_4 = 27405$ modos.
  - Logo, pelo Princípio da Multiplicação, existem:

    $(1140)(27405) = 31241700$ comitês diferentes. □