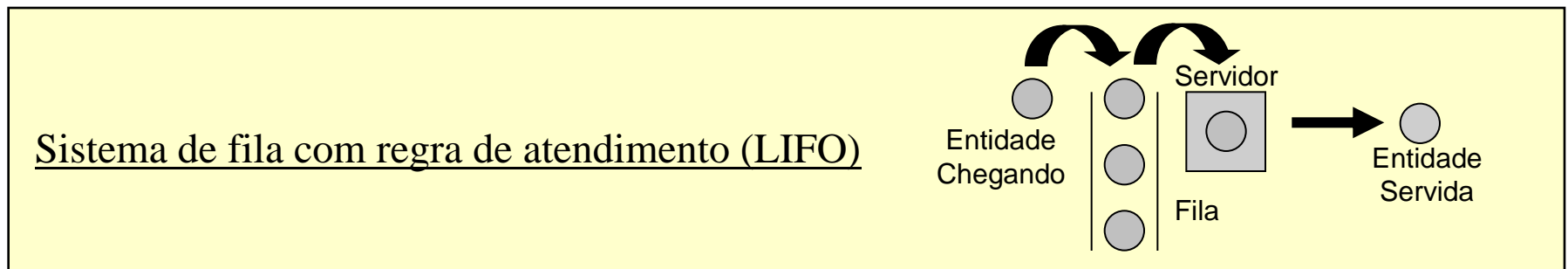
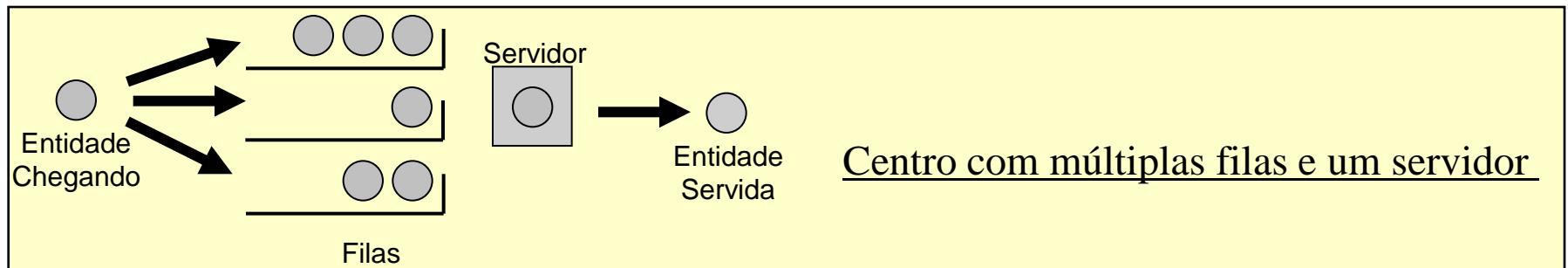
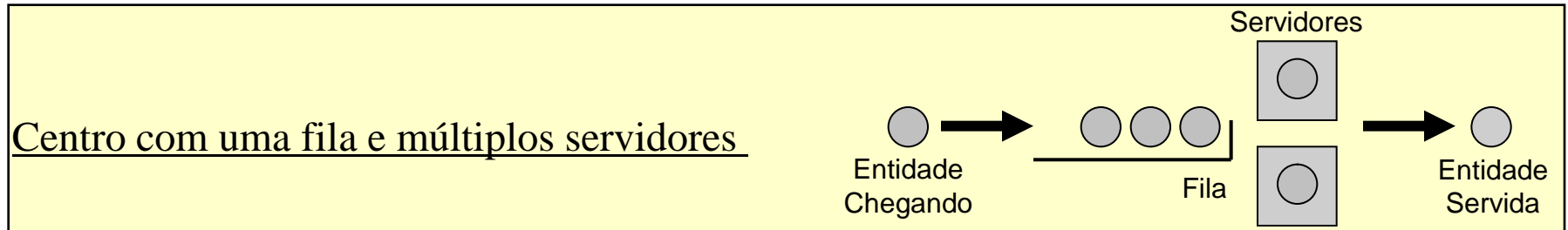
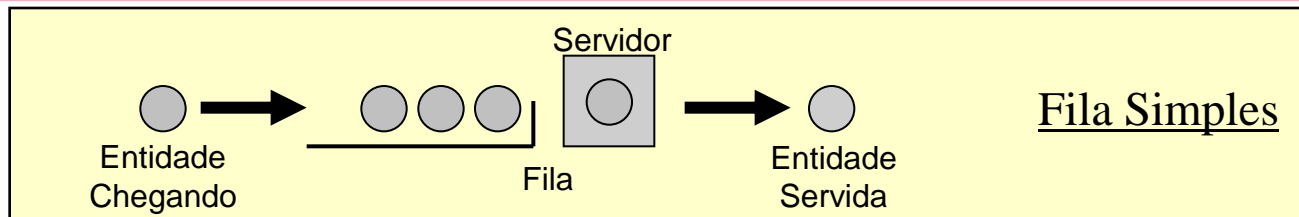

Teoria de Filas

Terminologia e Notação Básica

Referencia principal:

Freitas, P. J. Introdução à Modelagem e Simulação de Sistemas, 2ª Ed., Visual Books, 2008, Cap. 8.

Exemplos de Sistemas de Filas



Modelos de Filas e a Notação de Kendall

- ◆ A especificação de um modelo de fila normalmente requer que as seis características (parâmetros) sejam declarados.
- ◆ A notação mais conhecida é chamada de “notação de Kendall” que possui a forma $A/S/m/B/K/SD$, onde:
 - ✓ A: Distribuição do tempo de chegada;
 - ✓ S: Distribuição do tempo de serviço;
 - ✓ m: Número de servidores;
 - ✓ B: Capacidade do sistema (tamanho da fila);
 - ✓ K: Tamanho da população;
 - ✓ SD: Disciplina de serviço.
 - ✓ Se não especificado B e K são considerados infinitos e o tipo de disciplina de serviço é definido com FIFO.
 - ✓ As chegadas são individuais.

Modelos de Filas e a Notação de Kendall

◆ Os tipos de distribuição para tempos de chegada e de serviço, costumam ser representados pela seguinte nomenclatura:

- ✓ M: *Exponencial* (M de *memoryless*);
- ✓ E_k : *Erlang* com parâmetro k ;
- ✓ H_k : *Hiperexponencial* com parâmetro k ;
- ✓ D: *Determinística*;
- ✓ G: *Geral..*

Exemplo 1

- ◆ Considere a especificação $M/M/1/\infty/\infty/\text{FIFO}$:
 - ✓ (M) tempos entre chegadas com distribuição exponencial;
 - ✓ (M) tempo de serviço com distribuição exponencial;
 - ✓ (1) um único servidor;
 - ✓ (∞) capacidade do sistema (tamanho da fila) sem limitações;
 - ✓ (∞) população também ilimitada
 - ✓ (FIFO) disciplina de serviço
 - ✓ Forma reduzida. Se os 3 últimos parâmetros são $\infty/\infty/\text{FIFO}$ então a notação ficaria $M/M/1$.

Exemplo 2

- ◆ Um sistema de fila que foi retratado com o emprego da notação de Kendall como M/G/4/50/2000/LIFO.
 - ✓ M: tempos entre chegadas com distribuição exponencial;
 - ✓ G: tempos de serviço distribuídos de forma arbitrária;
 - ✓ 4: quatro servidores;
 - ✓ 50: capacidade do sistema (tamanho da fila) limitada a 50 clientes (4 sendo servidos e no máximo 46 aguardando na fila);
 - ✓ 2000: a fonte de origem dos clientes com capacidade também limitada para 2000 clientes.
 - ✓ LIFO: a disciplina de serviço é do tipo último a chegar é o primeiro a ser atendido.

Análise de um Sistema de Fila Simples

- ◆ As principais variáveis associadas a estes modelos são as seguintes:
 - ✓ τ = tempo entre chegadas, isto é, tempo decorrido entre duas chegadas sucessivas;
 - ✓ λ = taxa média de chegadas = $1/E(\tau)$;
 - ✓ s = tempo de serviço por cliente;
 - ✓ μ = taxa média de serviço do servidor = $1/E(s)$;

Análise de um Sistema de Fila Simples

- ◆ Relacionamentos entre λ e μ que se aplicam em modelos de fila do tipo G/G/m (MM1 é um caso especial do G/G/m).
 1. *Condição de Estabilidade* $\rightarrow \lambda < m\mu$. Isto é, que taxa média de chegadas (λ) seja menor que a taxa média de serviço (μ), considerando m servidores, onde $m = 1, 2, 3, \dots$
 2. *Número no Sistema versus Número na Fila* \rightarrow o número de clientes no sistema (n) = à soma do número de clientes na fila (nq) + o número de clientes sendo servidos (ns).

Análise de um Sistema de Fila Simples . . .

3. *Número versus Tempo* → duas relações são importantes para a compreensão do comportamento geral de um sistema de filas. A condição fundamental é que se considere que clientes não são perdidos (deixam o sistema) por falta de capacidade da fila de espera.

Nº médio de clientes no sistema =

= taxa de chegadas X tempo médio no sistema

Nº médio de clientes na fila =

= taxa de chegadas X tempo médio de espera

Análise de um Sistema de Fila Simples . . .

4. *Tempo no Sistema versus Tempo na Fila* → o tempo despendido por um cliente (ou o tempo de residência de um cliente) num sistema de fila (r) é igual à soma do tempo de espera (w) com o tempo recebendo serviço (s): $r = w + s$.

Modelo M/M/1

- ◆ É o modelo de fila mais empregado;
- ◆ Processos ou sistemas com um único servidor podem ser representados por este modelo.
- ◆ TEC e TS bem descritos por uma Exponencial (processos de Poisson).
- ◆ Sem limitações para o tamanho da fila
- ◆ Disciplina de gerenciamento é do tipo FIFO.
- ◆ Parâmetros necessários para sua análise são:
 - ✓ Taxa de chegada de clientes por unidade de tempo λ ,
 - ✓ Taxa de demanda de serviço do servidor por unidade de tempo μ .

Modelo M/M/1

- Estado do sistema determinado pelo número de clientes que se encontram no mesmo em determinado momento (na fila e no serviço).

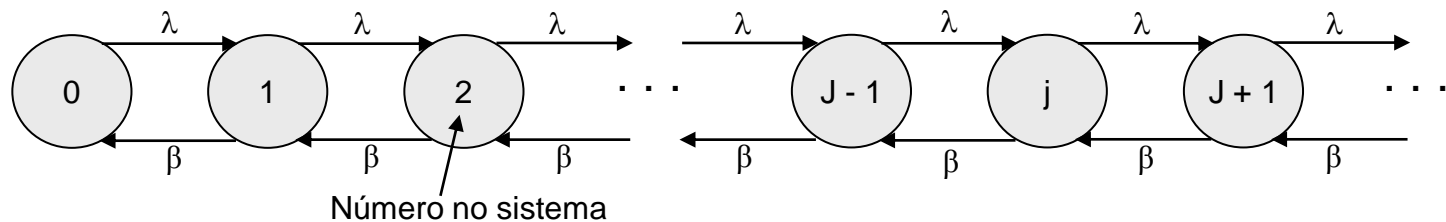


Diagrama de estados modelo M/M/1

Modelo M/M/1 - Fórmulas

1	Intensidade de tráfego	$\rho = \lambda / \mu$
2	Condição de estabilidade (requisito necessário para que a fila não cresça indefinidamente)	$\rho < 1$, isto é, $\lambda < \mu$
3	Probabilidade de zero clientes no sistema	$p_0 = 1 - \rho$
4	Probabilidade de n clientes no sistema	$p_n = (1 - \rho) \cdot \rho^n, n = 0, 1, \dots, \infty$
5	Probabilidade de n ou mais clientes no sistema	$P_{(n \text{ ou mais})} = \rho^n$
6	Número médio de clientes no sistema	$E[n] = \rho / (1 - \rho)$
7	Variância do número de clientes no sistema	$Var[n] = \rho / (1 - \rho)^2$
8	Probabilidade de k clientes na fila	$P(n_q = k) = \begin{cases} 1 - \rho^2, & k = 0 \\ (1 - \rho) \cdot \rho^{k+1}, & k > 0 \end{cases}$
9	Número médio de clientes na fila:	$E[n_q] = \rho^2 / (1 - \rho)$
10	Variância do número de clientes na fila	$Var[n_q] = \rho^2 \cdot (1 + \rho - \rho^2) / (1 - \rho)^2$
11	Tempo médio no sistema (ou de resposta)	$E[r] = (1/\mu) / (1 - \rho)$
12	Variância do tempo no sistema (ou de resposta)	$Var[r] = 1/\mu^2 / (1 - \rho)^2$
13	Tempo médio de espera	$E[w] = \rho \cdot (1/\mu) / (1 - \rho)$
14	Variância do tempo de espera	$Var[w] = (2 - \rho) \cdot \rho / (\mu^2 \cdot (1 - \rho)^2)$

Exemplo 8.1

- ◆ Medições feitas em um roteador mostram que pacotes de dados chegam para serem roteados com uma taxa média de 1250 pacotes por segundo (pps) e são encaminhados (processados) com uma média de um pacote a cada 0,5 ms.
- ✓ Qual é a probabilidade de haver uma sobrecarga no buffer do roteador se este dispõe de espaço para apenas 35 pacotes?
- ✓ Qual o tamanho de buffer necessário para que a taxa de perda de pacotes seja inferior a 1 pacote por milhão.

Dados:

Taxa de chegada $\lambda = 1.250 \text{ pps}$

Taxa de serviço $\mu = 1/0,0005 = 2.000 \text{ pps}$

Exemplo 8.1 - Solução

Utilização do roteador (intensidade do tráfego): $\rho = \lambda / \mu = 1.250/2.000 = 0,625$

Numero médio de pacotes no roteador: $E[n] = \rho / (1 - \rho) = 0,625 / 0,375 = 1,67$

Tempo médio de resposta do roteador:

$$E[r] = (1/\mu) / (1 - \rho) = (1/2.000)/(1 - 0,625) = (0,0005 / 0,375) = 0,0013 \text{ seg.}$$

Probabilidade de estouro do *buffer*:

$$P(n \geq 35) = \rho^{35} = 0.625^{35} = 7,2 \times 10^{-8} \approx 72 \text{ pacotes para cada bilhão de pacotes roteados.}$$

Tamanho do buffer para que a probabilidade deste estourar seja $\leq 10^{-6}$.

O que se deseja é que $\rho^n \leq 10^{-6}$.

$$\log(\rho^n) \leq \log(10^{-6}) \therefore n \cdot \log(\rho) \leq \log(10^{-6}) \therefore n > \log(10^{-6}) / \log(\rho)$$

$$n > \log(10^{-6}) / \log(0.625) \therefore -5 / -0,204 > 24,5. \text{ Ou } n \geq 25.$$

Com um buffer de tamanho 25, a taxa de perda menor que 1 pacote por milhão de pacotes roteados.

Exemplo 8.2

- ◆ Verifica-se que o tempo entre requisições a um servidor Web pode ser modelado por meio de uma distribuição exponencial com parâmetro para sua média igual a 8 ms. O tempo médio para o servidor processar cada requisição também pode ser descrito como uma exponencial com tempo médio de aproximadamente 5 ms. Com base nestas medições solicita-se:
 - ✓ Qual o tempo médio de resposta experimentado pelos usuários?
 - ✓ Quanto mais rápido deveria ser um novo servidor para que o tempo de resposta caia para a metade do tempo atual?
 - ✓ Qual deve ser o tamanho do buffer de entrada do servidor para que a perda de requisições seja de, no máximo, 1 a cada bilhão de requisições?

Exemplo 8.2 - Solução

◆ Dados:

O tempo médio entre chegadas de requisições (req) é de uma a cada 8 ms.

Logo a taxa de requisições $\lambda = 1 \text{ req}/8 \text{ ms} = 0,125 \text{ req/ms}$.

O tempo de processamento é de 5 ms/req.

Logo a taxa de serviço $\mu = 1 \text{ req}/5 \text{ ms} = 0,2 \text{ req/ms}$

◆ Solução:

Taxa de utilização do servidor $\rho = \lambda/\mu = 0,125/0,2 = 0,625$ ou 62,5 % de sua capacidade máxima.

(a) Tempo médio de resposta (ou valor esperado para o tempo de resposta):

$$E[r] = (1/\mu)/(1 - \rho) = (1/0,2)/(1 - 0,625) = 13,333 \text{ ms};$$

Exemplo 8.2 - Solução

Qual deve ser o novo valor de μ para que $r = 13,33/2 = 6,67$ ms?

Considerando a mesma taxa de requisições λ e

$$r = (1/\mu)/(1 - \rho) = 1/(\mu - \lambda),$$

pode-se isolar $\mu = (1/r) + \lambda = (1/6,67) + 0,125 = 0,275$ req/ms.

Isto significa que o novo servidor deve ser $\approx ((0,275 - 0,2)/0,2)) \times 100\% = 37,5\%$ mais rápido do que o anterior para que o tempo médio de resposta seja a metade do atual.

Exemplo 8.2 - Solução

É preciso encontrar um valor limite n , acima do qual haveria perda de requisições, caso a fila (buffer) tenha que ser limitada (como de fato acontece nos sistemas do mundo real).

Deseja-se que a probabilidade de uma requisição chegar ao sistema e encontrar k ou mais requisições seja menor ou igual a 10^{-9} . Empregando-se a relação 5 da Tabela 8.1 ($P(n \text{ ou mais}) = \rho^n$), obtém-se: $\rho^n = 10^{-9}$.

Solução para $\rho = 0,667$ é dado por:

$$n \geq \log(10^{-9}) / \log(0,625) = 44,09.$$

Logo, em se tratando de um sistema com a fila limitada, haveria a necessidade de espaço para comportar pelo menos 45 requisições para que a de descarte destas junto ao servidor ser menor do que 10^{-9} .

Modelo M/M/m

- ◆ É utilizado para a modelagem de sistemas que apresentam uma única fila diante de vários dispositivos (servidores) idênticos, ou sistemas multiprocessados.
- ◆ Como o M/M/1, TEC e TS são Exponenciais (processos de Poisson).
- ◆ Sem limitações para o tamanho da fila
- ◆ Disciplina de gerenciamento é do tipo FIFO.
- ◆ Parâmetros necessários para sua análise são:
 - ✓ Taxa de chegada de clientes por unidade de tempo λ ,
 - ✓ Taxa de serviço de cada um dos servidores por unidade de tempo μ
 - ✓ Quantidade de servidores disponíveis m .

Modelo M/M/m

- Assim como no modelo anterior, o estado do sistema também é determinado pelo número n de clientes que ali se encontrem em determinado momento (na fila e nos servidores).

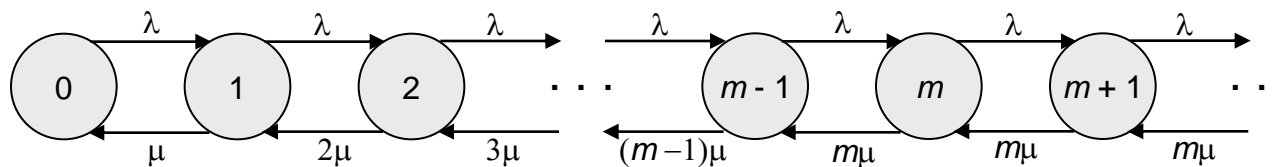


Diagrama de estados modelo M/M/m

Fórmulas

Modelo

M/M/m

1	Intensidade de tráfego	$\rho = \lambda / (m \cdot \mu)$
2	Condição de estabilidade	$\rho < 1$, isto é, $\lambda < m \cdot \mu$
3	Probabilidade de zero clientes no sistema	$p_0 = \left[1 + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} \right]^{-1}$
4	Probabilidade de n clientes no sistema	$p_n = \begin{cases} \frac{(m\rho)^n}{n!} p_0, & n = 1, 2, \dots, m-1 \\ \frac{\rho^n m^m}{m!} p_0, & n = m, m+1, \dots, \infty \end{cases}$
5	Probabilidade de enfileiramento (∂ = probabilidade de m ou mais clientes no sistema)	$\partial = P(\geq m \text{ clientes}) = \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} p_0$
6	Número médio de clientes no sistema	$E[n] = m\rho + \rho \cdot \partial / (1 - \rho)$
7	Variância do número de clientes no sistema	$Var[n] = m\rho + \rho \cdot \partial \left[\frac{1 + \rho - \rho \cdot \partial}{(1 - \rho)^2} + m \right]$
8	Número médio de clientes na fila:	$E[n_q] = \rho \cdot \partial / (1 - \rho)$
9	Variância do número de clientes na fila	$Var[n_q] = \partial \rho \cdot (1 + \rho - \partial \rho) / (1 - \rho)^2$
10	Tempo médio no sistema (ou de resposta)	$E[r] = \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{\partial}{m(1-\rho)} \right)$
11	Variância do tempo no sistema (ou de resposta)	$Var[r] = \frac{1}{\mu^2} \left[1 + \frac{\partial(2-\rho)}{m^2(1-\rho)^2} \right]$
12	Tempo médio de espera	$E[w] = E(n_q) / \lambda = \partial / [m\mu(1-\rho)]$
13	Variância do tempo de espera	$Var[w] = \partial(2-\rho) / [m^2\mu^2(1-\rho)^2]$
14	Taxa de utilização média de cada servidor;	$U = \lambda / m\mu = \rho$

Exemplo 8.4

- ◆ Para o mesmo sistema citado no exemplo 8.2, considere uma nova configuração no servidor Web. Agora, o número de processadores é igual a quatro. Com esta nova configuração, até quatro requisições podem ser simultaneamente atendidas. Neste caso, considerando a mesma demanda, qual seria o tempo médio de resposta experimentado pelos usuários?
- ◆ Dados:
 - ✓ O tempo médio entre chegadas de requisições (req) é de uma a cada 8 ms.
 - ✓ Logo a taxa de requisições $\lambda = 1 \text{ req}/8 \text{ ms} = 0,125 \text{ req/ms}$.
 - ✓ O tempo de processamento é de 5 ms/req.
 - ✓ Logo, Taxa de serviço $\mu = 1 \text{ req}/5 \text{ ms} = 0,2 \text{ req/ms}$
 - ✓ Número de servidores $m = 4$.

Exemplo 8.4 - Solução

Taxa de utilização do servidor $\rho = \lambda / m \cdot \mu = 0,125 / 4 \cdot 0,2 = 0,156$ ou 15,6 % de sua capacidade máxima.

Tempo médio de resposta: $E[r] = \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{\partial}{m(1-\rho)} \right)$, onde ∂ = probabilidade de m ou mais clientes no sistema.

$$\partial = P(\geq m \text{ clientes}) = \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} p_0, \text{ onde } p_0 = \left[1 + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} \right]^{-1}.$$

Assim, $p_0 = 0,536$ e $\partial = 0,004$.

O novo valor esperado para o Tempo de Resposta será:

$$E[r] = (1/0,2) + (0,004/(4 \cdot 0,2) \cdot (1 - 0,156)) = 5,01 \text{ ms}.$$

Portanto, pode-se esperar que um aumento de quatro vezes na capacidade nominal de processamento do servidor provoque uma redução de aproximadamente 60% no tempo de resposta, isto é, de 13,33 ms para 5,01 ms.

Exemplo 8.5

- ◆ Uma companhia aérea pretende disponibilizar 5 terminais de auto-atendimento em um aeroporto.
- ◆ A gerencia de atendimento da companhia está em dúvida entre duas alternativas:
 - ✓ (a) colocar os 5 terminais juntos, com acesso por fila única;
 - ✓ (b) distribuí-los individualmente em vários locais do aeroporto, considerando, neste caso, que a demanda se distribua igualmente entre os locais onde se encontrarem os 5 terminais.
- ◆ Para apoiar futura decisão, a gerencia solicita ao departamento técnico uma análise para prever o comportamento das duas alternativas, principalmente em relação a expectativa do tempo médio despendido pelos clientes no sistema. Os dados fornecidos pelo gerente são os seguintes:

Exemplo 8.5 – Dados e Solução

◆ Dados:

- ✓ Estima-se a chegada de 100 clientes por hora nos terminais;
- ✓ Cada cliente deverá permanecer, em média, 2 minutos junto ao terminal;

◆ Solução

O sistema poderá ser avaliado considerando

- (a) Emprego de um modelo M/M/5 ou
- (b) Empregando-se um modelo M/M/1 (neste caso com a demanda reduzida a 1/5 da demanda original).

Exemplo 8.5 – Solução

a) Modelo M/M/5

Taxa de chegadas 100 clientes por hora. Logo, $\lambda = 1,667$ clientes/min;

Taxa de serviço $\mu = 1$ cliente/2 min = 0,5 *clientes/min*

Número de servidores $m = 5$.

Resultados do modelo:

Taxa média de utilização dos servidores: $\rho = \lambda/m \cdot \mu = 1,667/5 \cdot 0,5 = 0,668$ ou 66,8 % de sua capacidade máxima

Tempo médio no sistema: $E[r] = \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{\partial}{m(1-\rho)} \right)$, onde

$$\partial = P(\geq m \text{ clientes}) = \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} p_0 \text{ e } p_0 = \left[1 + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} \right]^{-1}.$$

Calculando-se $p_0 = 0,128$ e $\partial = 1,314$. Assim, o tempo esperado no sistema:

$E[r] = (1/0,5) \cdot [1 + (1,314/5 \cdot (1-0,668))] = \underline{3,58 \text{ min}}$, com $Var[r] = 4,1$ min.

Exemplo 8.5 – Solução

b) Modelo M/M/1

Taxa de chegadas será de 1/5 da taxa original. Logo, chegam 20 clientes/hora ou 1 cliente a cada 3 min. Assim, $\lambda = 0,333$ clientes/min;

Taxa de serviço permanece a mesma: $\mu = 1$ cliente/2 min = 0,5 clientes/min

O número de servidores é igual a um servidor por local $m = 1$.

Resultados do modelo:

Taxa média de utilização dos servidores: $\rho = \lambda/\mu = 0,333/0,5 = 0,666$ ou 66,6 % de sua capacidade máxima.

Tempo médio no sistema: $E[r] = (1/\mu)/(1 - \rho) = (1/0,5)/(1-0,666) = \underline{5,99 \text{ min}}$

A variância do tempo no sistema será: $\text{Var}[r] = (1 / \mu^2) / (1 - \rho)^2 = 35,86$ e o desvio-padrão será 5,98 min.

Modelo M/M/m/B

- ◆ O modelo M/M/m/B apresenta fila com múltiplos servidores e tamanho limitado para área de espera.
- ◆ Se a capacidade da área de espera ser alcançada, todos os novos clientes são “perdidos”.
- ◆ B deve ser maior ou igual a m.
- ◆ Como o M/M/1, TEC e TS são Exponenciais (processos de Poisson) e o gerenciamento da fila é do tipo FIFO.
- ◆ Parâmetros necessários para sua análise são:
 - ✓ Taxa de chegada de clientes por unidade de tempo λ ,
 - ✓ Taxa de serviço de cada um dos servidores por unidade de tempo μ
 - ✓ Quantidade de servidores disponíveis m .
 - ✓ O tamanho máximo da fila B

Modelo M/M/m/B

- Assim como no modelo anterior, o estado do sistema também é determinado pelo número n de clientes que ali se encontrem em determinado momento (na fila e nos servidores). Há agora uma limitação em B .

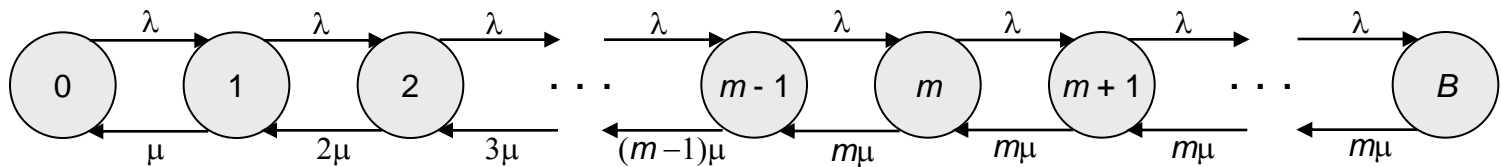


Diagrama de estados modelo M/M/m/B

Fórmulas Modelo M/M/m/B

1	Intensidade de tráfego	$\rho = \lambda / (m \cdot \mu)$
2	Condição de estabilidade	$\rho < \infty$
3	Probabilidade de zero clientes no sistema	$p_0 = \left[1 + \frac{(1 - \rho^{B-m+1})(m\rho)^m}{m!(1 - \rho)} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} \right]^{-1}$
4	Probabilidade de n clientes no sistema em termos da intensidade de tráfego	$p_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} (m\rho)^n p_0, & 0 \leq n < m \\ \frac{m^m \rho^n}{m!} p_0, & m \leq n \leq B \end{cases}$
5	Número médio de clientes no sistema	$E[n] = \sum_{n=1}^B n p_n$
6	Número médio de clientes na fila	$E[n_q] = \sum_{n=m+1}^B (n - m) p_n$
7	Taxa efetiva de chegada no sistema	$\lambda' = \sum_{n=0}^{B-1} \lambda p_n = \lambda(1 - p_B)$
8	Tempo médio no sistema (ou de resposta)	$E[r] = E[n] / \lambda' = E[n] / [\lambda(1 - p_B)]$
9	Tempo médio de espera	$E(w) = E(r) - 1 / \mu = E[n_q] / [\lambda(1 - p_B)]$
10	Taxa de perda por unidade de tempo	λp_B clientes/unidade de tempo
11	Taxa de utilização média de cada servidor;	$U = \lambda' / m\mu = \rho(1 - p_B)$

Exemplo 8.6

- ◆ Para o roteador do exemplo 8.1, considere agora que o mesmo tenha seu *buffer* (área de espera) limitado a um máximo de 5 pacotes. Medições feitas no roteador mostram que pacotes de dados chegam para serem roteados com uma taxa média de 1250 pacotes por segundo (pps) e são encaminhados (processados) numa média de um pacote a cada 0,5 ms.
- ◆ Dados:
 - ✓ Taxa de chegada $\lambda = 1.250$ pps;
 - ✓ Taxa de serviço $\mu = 1/0,0005 = 2.000$ pps;
 - ✓ $m = 1$;
 - ✓ $B = 5$

Exemplo 8.6 - Solução

Intensidade de tráfego: $\rho = \lambda / \mu = 1.250 / 1.2.000 = 0,625$

Para $n = 1, 2, \dots, B$, P_n será:

$$p_1 = \rho \cdot p_0 = 0,625 \cdot p_0$$

$$p_2 = \rho^2 \cdot p_0 = 0,391 \cdot p_0$$

$$p_3 = \rho^3 \cdot p_0 = 0,256 \cdot p_0$$

$$p_4 = \rho^4 \cdot p_0 = 0,163 \cdot p_0$$

$$p_5 = \rho^5 \cdot p_0 = 0,103 \cdot p_0$$

Pelo axioma da probabilidade total:

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$$

$$p_0 + 0,625 \cdot p_0 + 0,391 \cdot p_0 + 0,256 \cdot p_0 + 0,163 \cdot p_0 + 0,103 \cdot p_0 = 1$$

$$p_0 = 1 / (1 + 0,625 + 0,391 + 0,256 + 0,163 + 0,103) = 1 / 2,538 = 0,39$$

Exemplo 8.6 - Solução

Logo,

$$p_0 = 1/(1 + 0,625 + 0,391 + 0,256 + 0,163 + 0,103) = 1/2,538 = 0,39$$

Substituindo p_0 nas equações de p_n , com $n = 1, 2, \dots 5$ obtêm-se:

$$p_1 = 0,625 \cdot 0,39 = 0,247$$

$$p_2 = 0,391 \cdot 0,39 = 0,152$$

...

$$p_5 = 0,103 \cdot 0,39 = 0,04$$

$$E[n] = \sum_{n=1}^B np_n = 1 \cdot 0,247 + 2 \cdot 0,152 + \dots + 5 \cdot 0,04 = 1,31$$

Exemplo 8.6 - Solução

Como o número de buffers do sistema é limitado, os pacotes excedentes são descartados. Pode-se então calcular a taxa efetiva de chegada, isto é, os pacotes que efetivamente acessam o roteador como sendo:

$$\lambda' = \lambda \cdot (1 - p_B) = 1.250 \cdot (1 - 0,103) = 1.121 \text{ pps}$$

Desta forma, a partir do cálculo de λ' pode-se calcular o número esperado de pacotes que serão perdidos com esta limitação do buffer:

$$\lambda - \lambda' = 1.250 - 1.121 = 129 \text{ pps.}$$

Exercícios

- ◆ Responda aos exercícios de teoria das filas do capítulo 8 do livro texto.