

INE5403 - Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

6) Relações de Ordenamento

6.1) Conjuntos Parcialmente Ordenados (Posets)

6.2) Extremos de Posets

6.3) Reticulados

6.4) Álgebras Booleanas Finitas

6.5) Funções Booleanas

Elementos extremos de posets

Definição: Considere o poset (A, \leq) com a ordem parcial \leq . Então:

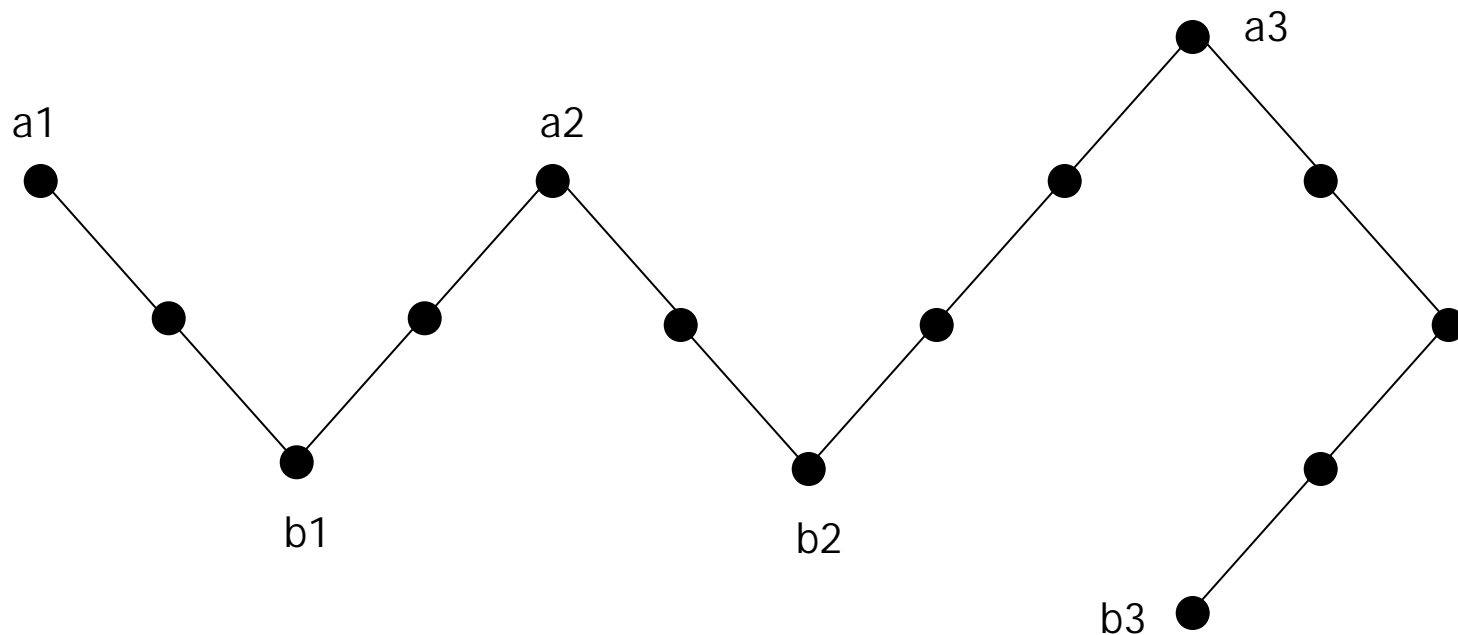
- a) Um elemento $a \in A$ é chamado de um **elemento maximal** de A se não existe $c \in A$ tal que $a < c$ ($a \leq c$, $a \neq c$).
- b) Um elemento $b \in A$ é chamado de um **elemento minimal** de A se não existe $c \in A$ tal que $c < b$ ($c \leq b$, $c \neq b$).

Exemplos:

- 1. (\mathbf{Z}^+, \leq) : elemento minimal: 1, maximal: não tem
- 2. (\mathbf{R}, \leq) : elemento minimal: não tem, maximal: não tem
- 3. $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$: elemento minimal: 1, maximal: 4
- 4. $(\{1, 2, 3, 4\}, \geq)$: elemento minimal: 4, maximal: 1

Elementos extremos de posets

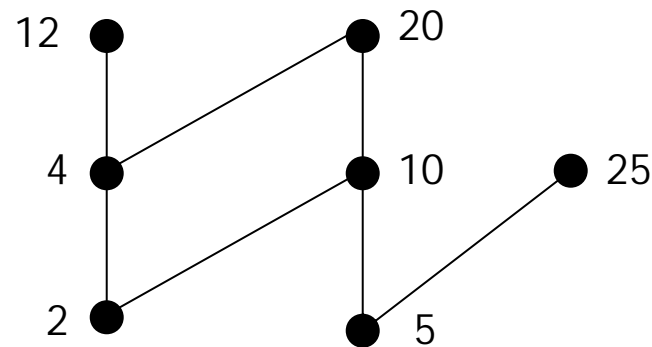
Exemplo: Considere o poset A com o diagrama de Hasse abaixo:



- a_1 , a_2 e a_3 são elementos *maximais* de A
- b_1 , b_2 e b_3 são elementos *minimais* de A

Elementos extremos de posets

Exemplo: Quais elementos do poset $(\{2,4,5,10,12,20,25\}, |)$ são maximais e quais são minimais?



- Elementos maximais: 12, 20 e 25.
- Elementos minimais: 2 e 5.
- Note que um poset pode ter mais do que um elemento maximal e mais do que um elemento minimal.

Elementos extremos de posets

Teorema: Seja (A, \leq) um poset finito e não vazio com ordem parcial \leq . Então A tem pelo menos um elemento maximal e ao menos um elemento minimal.

Prova:

- Seja $a \in A$. Se a não é maximal, então pode-se achar $a_1 \in A$ com $a < a_1$.
- Se a_1 não é maximal então pode-se achar $a_2 \in A$ com $a_1 < a_2$.
- Este argumento não pode ser continuado indefinidamente, pois o conjunto A é finito.
- Assim, eventualmente será formada a seguinte cadeia:
$$a < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{k-1} < a_k$$
- Não é possível encontrar mais algum $b \in A$ tal que $a_k < b$.
- Logo, a_k é um elemento maximal de (A, \leq) .

Algoritmo para ordenação topológica de posets

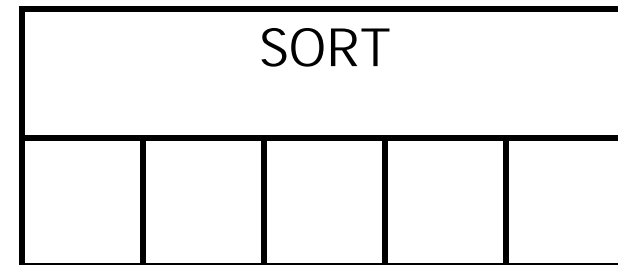
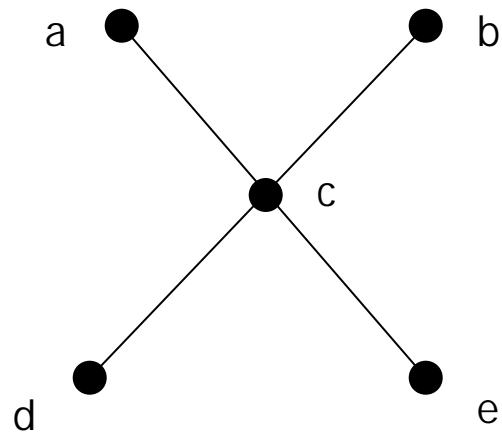
- Com o conceito de elementos minimais, pode-se estabelecer um *algoritmo* para encontrar uma ordenação topológica de um dado poset finito (A, \leq) .
- O algoritmo abaixo produz um vetor chamado *SORT* que satisfaz:
 $SORT[1] < SORT[2] < \dots$
- A relação $<$ sobre A definida desta forma é uma *ordenação topológica* de (A, \leq) .

Algoritmo SORT:

1. $I \leftarrow 1$
2. $S \leftarrow A$
3. Enquanto $S \neq \emptyset$
 - a. Escolha um elemento minimal a do conjunto S
 - b. $SORT[I] \leftarrow a$
 - c. $I \leftarrow I + 1$
 - d. $S \leftarrow S - \{a\}$

Algoritmo para ordenação topológica de posets

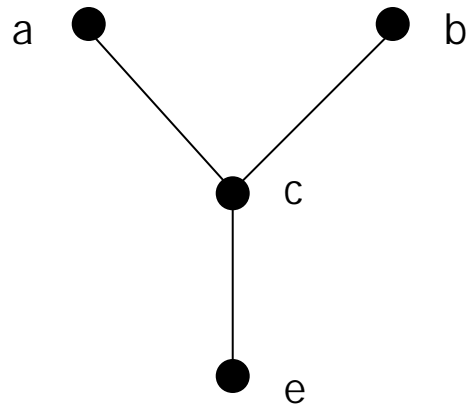
Exemplo: Seja $A=\{a,b,c,d,e\}$ e seja o diagrama de Hasse de \leq sobre A dado por:



Algoritmo para ordenação topológica de posets

Exemplo (cont.): Seja $A=\{a,b,c,d,e\}$ e seja o diagrama de Hasse de \leq sobre A dado por:

Passo 1:

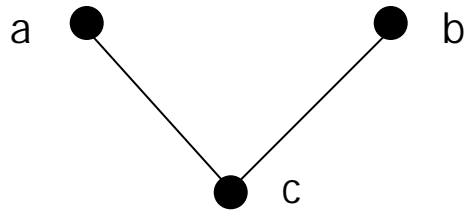


SORT				
d				

Algoritmo para ordenação topológica de posets

Exemplo (cont.): Seja $A=\{a,b,c,d,e\}$ e seja o diagrama de Hasse de \leq sobre A dado por:

Passo 2:



SORT				
d	e			

Algoritmo para ordenação topológica de posets

Exemplo (cont.): Seja $A=\{a,b,c,d,e\}$ e seja o diagrama de Hasse de \leq sobre A dado por:

Passo 3:

a ● ● b

SORT				
d	e	c		

Algoritmo para ordenação topológica de posets

Exemplo (cont.): Seja $A=\{a,b,c,d,e\}$ e seja o diagrama de Hasse de \leq sobre A dado por:

Passo 4:

a ●

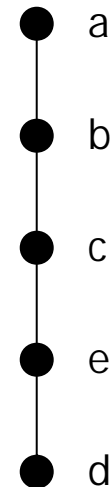
SORT				
d	e	c	b	

Algoritmo para ordenação topológica de posets

Exemplo (cont.): Seja $A=\{a,b,c,d,e\}$ e seja o diagrama de Hasse de \leq sobre A dado por:

Passo 5:

SORT				
d	e	c	b	a



Elementos extremos de posets

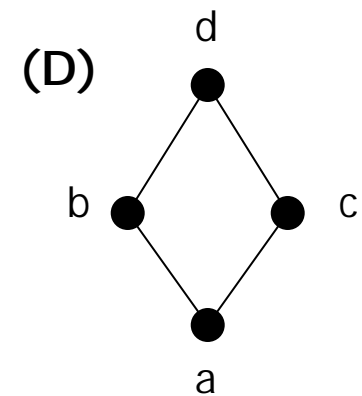
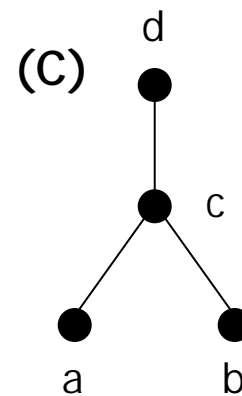
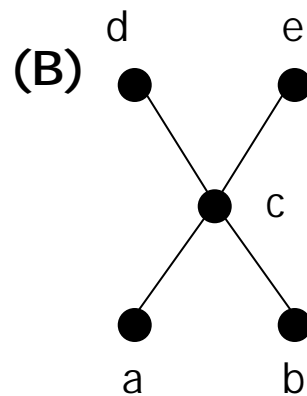
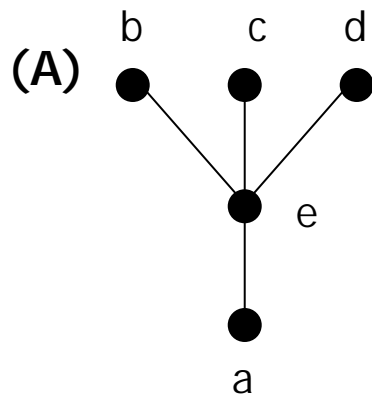
Definição: Seja o poset (A, \leq) . Então:

- 1) Um elemento $a \in A$ é chamado de um **maior elemento** de A se $b \leq a$ para todo $b \in A$
- 2) Um elemento $a \in A$ é chamado de um **menor elemento** de A se $a \leq b$ para todo $b \in A$.

Nota: Dado um poset (A, \leq) , um elemento $a \in A$ é um maior (ou menor) elemento se e somente se ele é um menor (maior) elemento do poset dual (A, \geq) .

Elementos extremos de posets

Exemplo: Determine se os posets representados por cada um dos diagramas de Hasse abaixo possuem um maior elemento e um menor elemento.



(A): menor elemento é a, não tem maior elemento

(B): não tem menor nem maior elemento

(C): não tem menor elemento, maior elemento é d

(D): menor elemento é a, maior elemento é d

Elementos extremos em posets

Exemplo: Seja A um conjunto. Determine se há um maior elemento e um menor elemento no poset $(P(A), \subseteq)$.

Solução:

- O menor elemento é o conjunto vazio, pois $\emptyset \subseteq T$ para qualquer subconjunto T de A .
- O próprio conjunto A é o maior elemento deste poset, pois $T \subseteq A$ sempre que T é um subconjunto de A .

Exemplo: Há um maior elemento e um menor elemento no poset $(\mathbb{Z}^+, |)$?

Solução:

- o inteiro 1 é o menor elemento, pois $1|n$ sempre que n é um inteiro positivo.
- Não há maior elemento, pois não existe inteiro que seja divisível por todos os inteiros positivos.

Elementos extremos em posets

Definição: Sejam um poset (A, \leq) e um subconjunto $B \subseteq A$.
Então:

a) um elemento $a \in A$ é chamado de uma **cota superior** ("upper bound") de B , se:

$$b \leq a, \text{ para todo } b \in B$$

b) um elemento $a \in A$ é chamado de uma **cota inferior** ("lower bound") de B , se:

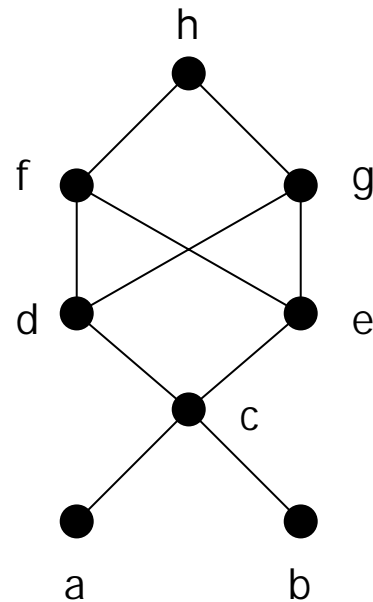
$$a \leq b, \text{ para todo } b \in B.$$

Elementos extremos em posets

Exemplo: Seja o poset $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ com o diagrama de Hasse abaixo. Ache todas as cotas superiores e inferiores dos seguintes subconjuntos de A :

a) $B_1 = \{a, b\}$

b) $B_2 = \{c, d, e\}$

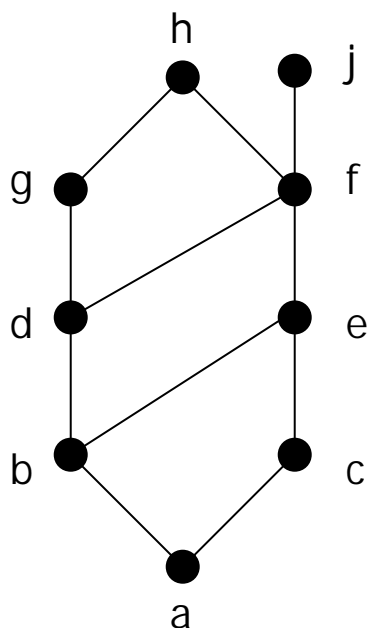


- B_1 não tem cotas inferiores
- suas cotas superiores são:
 c, d, e, f, g, h

- as cotas superiores de B_2 são:
 f, g, h
- suas cotas inferiores são:
 c, a, b

Elementos extremos em posets

Exercício: Encontre as cotas superiores e inferiores dos subconjuntos $\{a,b,c\}$, $\{j,h\}$ e $\{a,c,d,f\}$ no poset cujo diagrama de Hasse é dado por:



- cotas superiores de $\{a,b,c\}$:
e,f,j,h
- única cota inferior: a

- não há cotas superiores de $\{j,h\}$
- suas cotas inferiores são:
a,b,c,d,e,f

- cotas superiores de $\{a,c,d,f\}$:
f,h,j
- sua cota inferior é: a

Elementos extremos em posets

Observações:

- Note que um subconjunto B de um poset pode ou não ter cotas inferiores ou superiores (em A).
- Além isto, uma cota superior ou inferior de B pode ou não pertencer ao próprio B .

Menor cota superior / Maior cota inferior

Definição (1):

- Um elemento x é chamado de **Menor Cota Superior** (LUB - "Least Upper Bound") de um subconjunto A se x é uma cota superior menor do que qualquer outra cota superior de A .
 - ou seja, x será a menor cota superior de A se:
 - $a \leq x$ para todo $a \in A$ e
 - $x \leq z$ para todo z que seja uma cota superior de A

Definição (2):

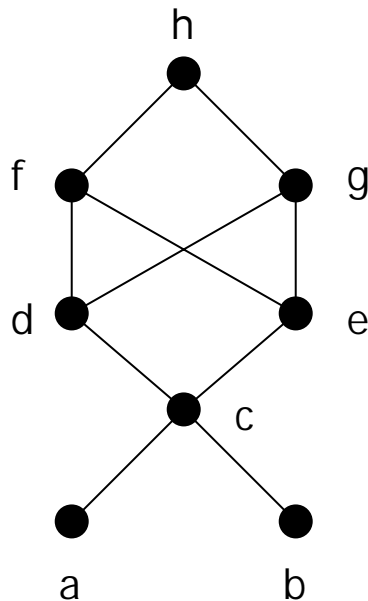
- Um elemento y é chamado de **Maior Cota Inferior** (GLB - "Greatest Lower Bound") de A se y é uma cota inferior de A e $z \leq y$ para todo z que seja uma cota inferior de A

Menor cota superior / Maior cota inferior

Exemplo: Seja o poset $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ com o diagrama de Hasse abaixo. Ache todos os LUBs e GLBs de:

a) $B_1 = \{a, b\}$

b) $B_2 = \{c, d, e\}$



- Como B_1 não tem cotas inferiores, também não terá GLBs

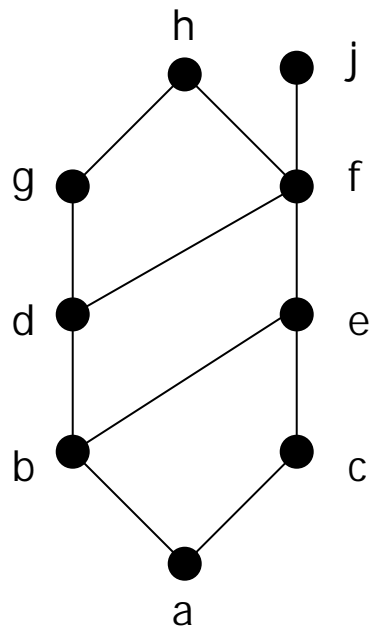
- $\text{LUB}(B_1) = c$

- Como as cotas inferiores de B_2 são c, a, b , temos que $\text{GLB}(B_2) = c$

- As cotas superiores de B_2 são f, g, h - então, como f não é comparável com g , concluímos que B_2 não tem LUB

Menor cota superior / Maior cota inferior

Exercício: Encontre a LUB e a GLB de $\{b,d,g\}$, se elas existirem, no poset cujo diagrama de Hasse é:



- as cotas superiores de $\{b,d,g\}$ são:
g,h
- então, como $g < h$, g é a menor cota superior (LUB)

- as cotas inferiores de $\{b,d,g\}$ são:
a,b
- então, como $a < b$, b é a maior cota inferior (GLB)

Menor cota superior / Maior cota inferior

Exemplo: Encontre a menor cota superior e a maior cota inferior dos conjuntos $\{3,9,12\}$ e $\{1,2,4,5,10\}$, se elas existirem, no poset $(\mathbf{Z}^+, |)$.

- Solução:
- GLBs (maiores cotas inferiores):
 - um inteiro é uma cota inferior de $\{3,9,12\}$ se 3, 9, e 12 forem divisíveis por este inteiro
 - os únicos inteiros deste tipo são 1 e 3
 - então, como $1|3$, 3 é a *maior cota inferior* de $\{3,9,12\}$
 - a única cota inferior do conjunto $\{1,2,4,5,10\}$ é o 1
 - portanto, 1 é a *maior cota inferior* para $\{1,2,4,5,10\}$

Menor cota superior / Maior cota inferior

Exemplo (cont.): Encontre a menor cota superior e a maior cota inferior dos conjuntos $\{3,9,12\}$ e $\{1,2,4,5,10\}$, se elas existirem, no poset $(\mathbf{Z}^+, |)$.

- LUBs (menores cotas superiores):
 - um inteiro é uma cota superior de $\{3,9,12\}$ sse ele for divisível por 3, 9 e 12.
 - os inteiros com esta propriedade são aqueles divisíveis pelo mmc de 3, 9 e 12, que é 36.
 - então, 36 é a *menor cota superior* de $\{3,9,12\}$
 - um inteiro é uma cota superior para o conjunto $\{1,2,4,5,10\}$ sse ele for divisível por 1,2,4,5,10
 - os inteiros com esta propriedade são aqueles divisíveis pelo mmc de 1,2,4,5,10, que é 20.
 - então, 20 é a *menor cota superior* de $\{1,2,4,5,10\}$

Elementos extremos de posets

Teorema: Seja (A, \leq) um poset. Então um subconjunto B qualquer de A tem no máximo um LUB e um GLB.

Teorema: Suponha que (A, \leq) e (A', \leq') são posets isomorfos sob o isomorfismo $f: A \rightarrow A'$. Então tem-se que:

- a) se a é um elemento maximal (minimal) de (A, \leq) , então $f(a)$ é um elemento maximal (minimal) de (A', \leq') ;
- b) se a é o maior (menor) elemento de (A, \leq) , então $f(a)$ é o maior (menor) elemento de (A', \leq') ;
- c) se a é uma cota superior (inferior) de um subconjunto B de A , então $f(a)$ é uma cota superior (inferior) do subconjunto $f(B)$ de A' ;
- d) se todo subconjunto de (A, \leq) tem LUB (GLB), então todo subconjunto de (A', \leq') tem um LUB (GLB).

Elementos extremos de posets

Exemplo: Mostre que os posets (A, \leq) e (A', \leq') , cujos diagramas de Hasse estão mostrados abaixo, *não são isomórficos*.



Solução: Os 2 posets não são isomórficos porque (A, \leq) possui um maior elemento a , enquanto que (A', \leq') não possui um maior elemento.

- Também se pode argumentar que eles não são isomórficos porque (A, \leq) não tem um menor elemento enquanto que (A', \leq') tem.