5.3- MUDANÇA DE BASE

Sejam A e B bases de um espaço vetorial *V*. O papel da matriz de mudança de base, representada por $[I]_B^A$, como já foi visto, é transformar as componentes de um vetor *v* na base A em componentes do mesmo vetor *v* na base B. O problema para os espaços de mesma dimensão é análogo.

Observações: 1- A matriz $[I]_B^A$ é também conhecida como matriz de transição de A para B.

2- A matriz $[I]_B^A$ é, na verdade, a matriz do operador linear identidade.

$$\begin{aligned} I:\ & V \to V \\ & v \to v \end{aligned}$$

3- A matriz $[I]_B^A$, por transformar os vetores linearmente independentes da base A nos vetores linearmente independentes da base B, é inversível.

Considere $\qquad [v]_B = [I]_B^A\ [v]_A$

pode-se obter $\qquad [v]_A = \left([I]_B^A\right)^{-1}\ [v]_B$

logo $\qquad \left([I]_B^A\right)^{-1} = [I]_A^B$

isto é, a inversa da matriz mudança de base de A para B é a matriz-mudança de base de B para A.

Ex.: Sejam as bases A = $\{v_1, v_2\}$ e B = $\{w_1, w_2\}$ do IR^2, onde $v_1 = (2, -1)$, $v_2 = (-1, 1)$ e $w_1 = (1, 0)$, $w_2 = (2, 1)$.

a) Determinar a matriz mudança de base da A para B.

b) Utilizar a matriz $[I]_B^A$ para calcular $[v]_B$ sabendo que $[v]_A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

c) Verificar que $[v]_A = \left([I]_B^A\right)^{-1}\ [v]_B$.

5.3.1- Outra Forma de Determinação da Matriz-Mudança de Base

Lembrando o que foi visto sobre composta de transformações lineares e levando em conta que a matriz $[I]_B^A$, por transformar os vetores linearmente independentes da base A nos vetores linearmente independentes da base B, é inversível, então temos que:

$$[I]_B^A = [I \circ I]_B^A = [I]_B^C \; [I]_C^A = \left([I]_C^B\right)^{-1} \; [I]_C^A = \mathrm{B}^{-1}.\mathrm{A}$$

Ex.: Para as bases do exemplo anterior determine a matriz mudança de base da A para B, desta outra forma.

5.4- MATRIZES SEMELHANTES

Def.: Seja T: $V \to V$ um operador linear. Se A e B são bases de V e $[T]_A$ e $[T]_B$ as matrizes que representam o operador T nas bases A e B, respectivamente. As duas matrizes $[T]_A$ e $[T]_B$ são consideradas semelhantes se existe uma matriz inversível M tal que

$$[T]_B = M^{-1}.[T]_A.M$$

onde M é a matriz $[I]_A^B$, ou seja, a matriz-mudança de base de B para A.

De fato: Pelo conceito de matriz de uma transformação linear, tem-se

$$[T(v)]_A = [T]_A.[v]_A \qquad (1)$$

$$\text{e} \quad [T(v)]_B = [T]_B.[v]_B \qquad (2)$$

sendo $[I]_A^B$ a matriz-mudança de base de B para A, vem

$$[v]_A = [I]_A^B\ [v]_B \quad \text{e} \quad [T(v)]_A = [I]_A^B\ [T(v)]_B$$

substituindo $[v]_A$ e $[T(v)]_A$ na equação (1), resulta

$$[I]_A^B\ [T(v)]_B = [T]_A\ [I]_A^B\ [v]_B$$

como a matriz $[I]_A^B$ é inversível, então

$$[T(v)]_B = \left([I]_A^B\right)^{-1}\ [T]_A\ [I]_A^B\ [v]_B$$

comparando essa igualdade com a equação (2), conclui-se

$$[T]_B = \left([I]_A^B\right)^{-1}\ [T]_A\ [I]_A^B$$

Fazendo $\left([I]_A^B\right)^{-1}$ = M, a relação fica

$$[T]_B = M^{-1}.[T]_A.M$$

5.4.1- **Propriedade**: As matrizes semelhantes $[T]_A$ e $[T]_B$ possuem o mesmo determinante.

De fato: De

$$[T]_B = M^{-1}.[T]_A.M, \text{ temos:}$$

$$M.[T]_B = [T]_A.M$$
$$\det M \,.\, \det [T]_B = \det [T]_A \,.\, \det M$$
$$\det [T]_B = \det [T]_A$$

Exemplos:

1- Sejam T: $IR^2 \to IR^2$ um operador linear e as bases A = {(3, 4), (5, 7)} e B= {(1, 1), (-1, 1)} e seja

$$[T]_A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

a matriz de T na base A. Calcule $[T]_B$ pela relação: $[T]_B = M^{-1}.[T]_A.M$.

2- Seja o operador linear T: $IR^2 \to IR^2$, definido por: T(x, y) = (2x + 9y, x + 2y). Determinar [T], matriz canônica de T, e a seguir utilizar a relação: $[T]_B = M^{-1}.[T]_A.M$ para transformá-la na matriz T na base: B = {(3, 1), (-3, 1)}.

Exercícios

1- A seguir são dados operadores lineares T em IR^2 e em IR^3. Verificar quais são inversíveis e, nos casos afirmativos, determinar uma fórmula para T^{-1}.

a) T: $IR^2 \to IR^2$ tal que $T(x, y) = (3x - 4y, -x + 2y)$
b) T: $IR^2 \to IR^2$ tal que $T(x, y) = (x - 2y, -2x + 3y)$
c) T: $IR^2 \to IR^2$ tal que $T(x, y) = (2x - y, -4x + 2y)$
d) T: $IR^3 \to IR^3$ tal que $T(x, y, z) = (x - y + 2z, y - z, -2x + y - 3z)$

2- Mostre que o operador linear, no IR^3, definido pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ não é inversível. Determinar $v \in IR^3$ tal que $T(v) = (6, 9, 15)$.

3- Verificar se o operador linear T: $IR^3 \to IR^3$, definido por T(1, 0, 0) = (2, -1, 0), T(0, -1, 0) = (-1, -1, -1) e T(0, 3, -1) = (0, 1, 1) é inversível e, em caso afirmativo, determinar $T^{-1}(x, y, z)$.

4- No plano uma rotação de $\pi/3$ radianos é seguida de uma reflexão em torno do eixo dos y. Determine a inversa da transformação definida.

5- Sabendo que: $[I]_B^A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -11 \end{bmatrix}$ e B = {(3, 5), (1, 2)}, determinar a base A.

6- Considere as seguintes bases do IR^3, A = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} e B = {(1, 0, -1), (0, 1, -1), (-1, 1, 1)}.

a) Determinar a matriz $[I]_B^A$.
b) Utilizar a matriz obtida no item (a) para calcular v_B, sendo $v_A = (1, 2, 3)$.
c) Determinar a matriz $[I]_A^B$.

7- Em relação aos operadores dados, determinar primeiramente a matriz de T na base A e, a seguir, utilizar a relação entre matrizes semelhantes para calcular a matriz de T na base B.

a) T: $IR^2 \to IR^2$ tal que $T(x, y) = (x + 2y, -x + y)$, A = {(-1, 1), (1, 2)} e B = {(1, -3), (0, 2)}.
b) T: $IR^3 \to IR^3$ tal que $T(x, y, z) = (x - 2y - 2z, y, 2y + 3z)$, A é canônica e B = {(0, 1, -1), (1, 0, 0), (-1, 0, 1).

RESPOSTAS

1- a) $T^{-1}(x, y) = (x + 2y, x/2 + 3y/2)$; b) $T^{-1}(x, y) = (-3x - 2y, -2x - y)$; c) T não é inversível. d) T não é inversível. 2- $v = (z, 3 - 2z, z)$, $z \in IR$. 3- $T^{-1}(x, y, z) = (-y + z, -2x - 4y + 7z, x + 2y - 3z)$. 4- $T^{-1}(x, y) = (-x/2 + \sqrt{3}y/2, \sqrt{3}x/2 + y/2)$. 5- A = {(1, 3), (1, -2)}. 6- a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $v_B = (7, -4, 6)$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. 7- $[T]_A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $[T]_B = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -19/2 & 7 \end{bmatrix}$; b) $[T]_A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.