Relação entre Máquinas de Turing e Linguagens

Prof^{a} Jerusa Marchi

Departamento de Informática e Estatística

Universidade Federal de Santa Catarina

e-mail: jerusa@inf.ufsc.br

Máquinas de Turing como Funções

- Dado que Máquinas de Turing podem alterar o conteúdo de suas fitas, elas podem produzir saídas mais elaboradas do que uma simples resposta “sim” ou “não”
- É possível então que, dada uma MT M, operando sobre uma palavra w produza uma saída y e termine
  - y é dito saída de M para a entrada w e é denotado $M(w)$
  - Se f é uma função de Γ para Γ, dizemos que M **computa** a função f, se para todos os $w \in \Gamma$, $M(w) = f(w)$
  - Ou seja, quando M pára ao final da computação de w, a fita de M contém a cadeia $f(w)$
  - Uma linguagem é dita *Recursiva* se houver uma máquina de Turing M que computa f

Máquinas de Turing como Funções

- Uma Máquina de Turing pode ser pensada como um dispositivo que computa funções sobre os números naturais
  - Basta para isso encontrar uma representação adequada para os números, como a representação binária, ou mesmo, a representação unária

Máquinas de Turing como Funções

- Exemplo:
  - Seja $f(n,m) = n + m$, onde n e m são representados por 1^n e 1^m respectivamente ($\Sigma = \{1, 0\}$
  - Seja M uma MT que computa a função f, como segue:
    - incialmente a fita contém 1^n01^m
    - M avança o cabeçote até encontrar o 0
    - M substitui o 0 por 1
    - M avança até encontrar o primeiro branco à direita
    - M retrocede à esquerda, posicionando seu cabeçote no último 1
    - M grava $\sqcup$ na posição e pára.

Máquinas de Turing como Funções

- O termo *Recursiva*, utilizado para descrever tanto funções quanto linguagens computadas por Máquinas de Turing, vem do estudo de funções numéricas recursivas
- As funções numéricas computáveis através de Máquinas de Turing são exatamente aquelas que podem ser definidas recursivamente a partir de um conjunto adequado de funções básicas

Máquinas de Turing como Enumeradores

- Podemos acoplar a uma Máquina de Turing, um dispositivo de impressão
- A esta variação, chamamos de Enumerador
  - A máquina pode usar a impressora como um dispositivo de saída para imprimir cadeias
  - Cada vez que a máquina deseja adicionar uma cadeia a lista de cadeias, ela a envia para o dispositivo de impressão

Máquinas de Turing como Enumeradores

- Um Enumerador (E) inicia com uma fita em branco
- Se E não pára, pode imprimir uma lista infinita de cadeias
- A linguagem enumerada por E é o conjunto de todas as cadeias que E eventualmente imprime
- As cadeias podem ser impressas em qualquer ordem e podem eventualmente ser repetidas

Máquinas de Turing como Enumeradores

- **Teorema:** Uma linguagem é Turing reconhecível ou Turing enumerável ou Recursivamente Enumerável se e somente se algum enumerador a enumera.
- **Prova:** A asserção pode ser dividida em:
  1. Se há um enumerador E que enumera uma linguagem L, uma Máquina de Turing M reconhece L
  2. Se uma Máquina de Turing M reconhece uma linguagem L, há um enumerador E que enumera L

Máquinas de Turing como Enumeradores

Continuação

- Se há um enumerador E que enumera uma linguagem L, uma Máquina de Turing M reconhece L
  - A Máquina de Turing M que reconhece L trabalha da seguinte forma:
    - Grava-se na fita de M a palavra w
    - Roda E. A cada vez que E imprime uma cadeia, compara-a com a cadeia w
    - Se w aparecer como saída de E, M aceita w.

Máquinas de Turing como Enumeradores

Continuação

- Se uma Máquina de Turing M reconhece uma linguagem L, há um enumerador E que enumera L
  - Digamos que $s_1, s_2, s_3, \cdots$ é a lista de todas as possíveis cadeias em $\Sigma^\star$
  - Um enumerador E repete para $i = 1, 2, 3, \cdots$

1. Roda M durante i passos para cada entrada, $s_1, s_2, \cdots s_i$
2. Se alguma computação é aceita, E imprime a cadeia s_j correspondente.

Máquinas de Turing como Enumeradores

- M é uma máquina de Turing não determinística
- Se M aceita uma cadeia s, eventualmente s aparecerá infinitas vezes na lista gerada por E, uma vez que M roda desde o começo para cada entrada no passo 1
- Este procedimento dá o efeito de rodar M em paralelo para todas as possíveis cadeias de entrada.