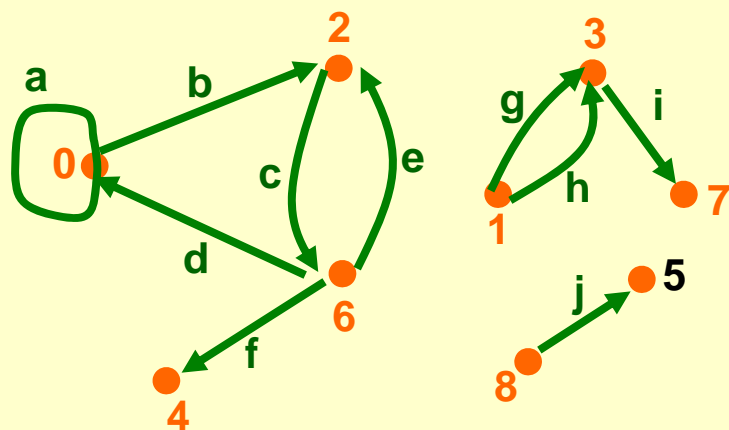


Grafos



Grafos



Grafo – formado por dois conjuntos:

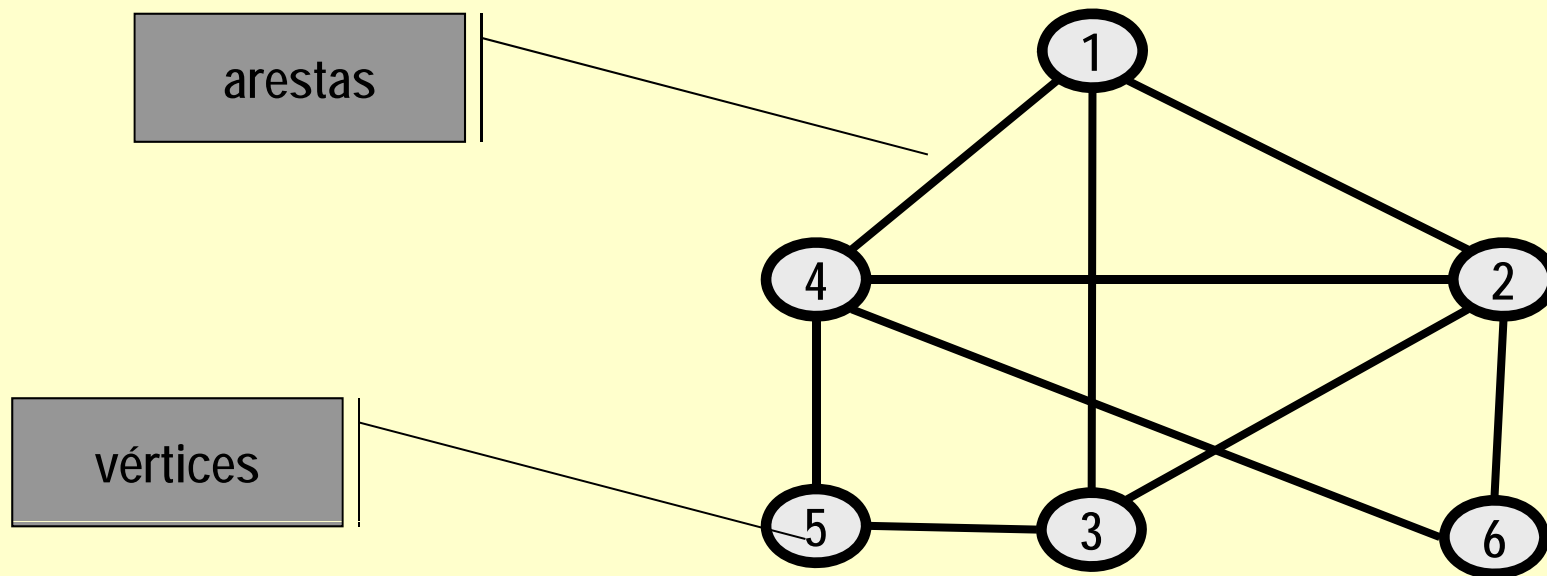
Vértices

Arcos

Ponta inicial	0	0	2	6	6	6	1	1	3	8
arco	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Ponta final	0	2	6	0	2	4	3	3	7	5

Aplicações

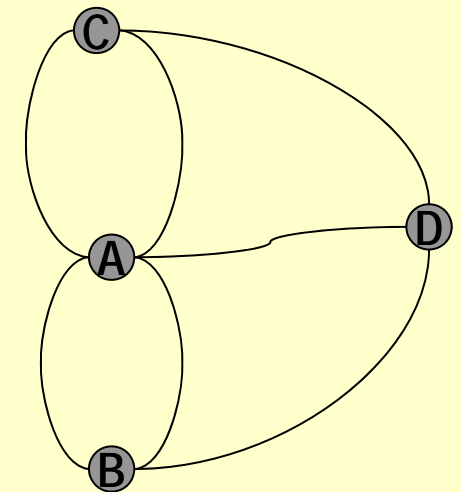
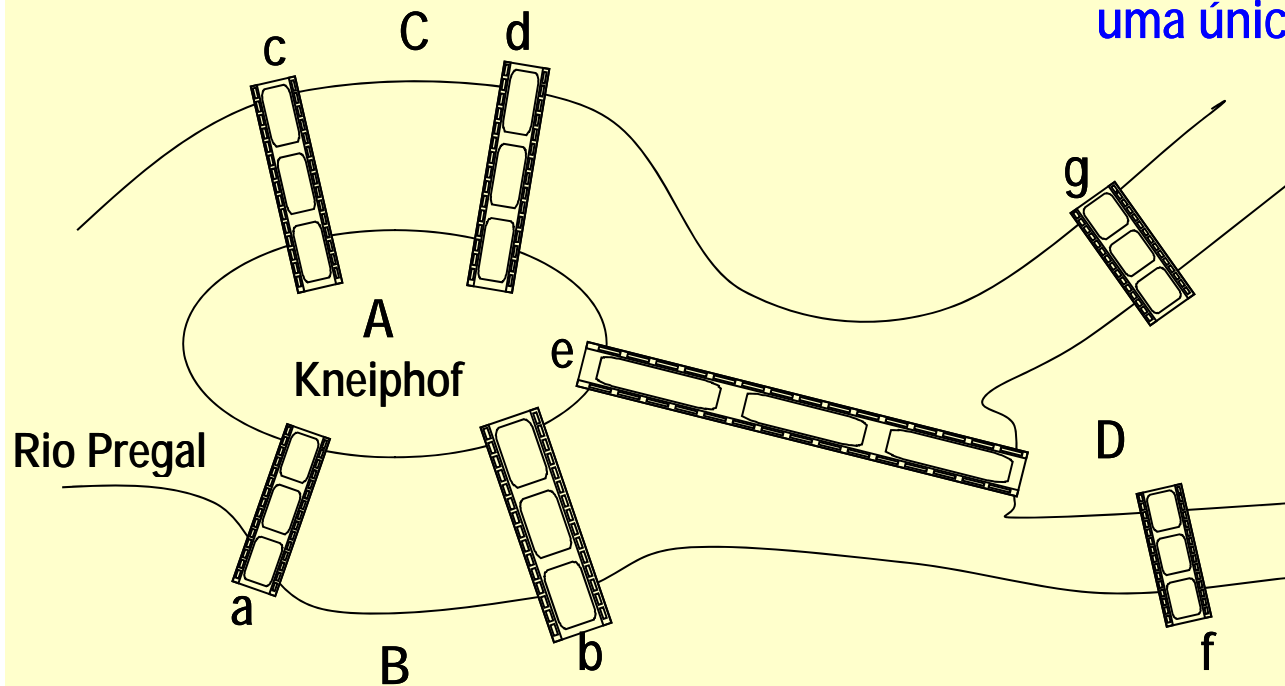
Associando-se significados aos **vértices** e às **linhas**, o grafo passa a constituir um **modelo** de uma situação ou informação real



Exemplos de aplicações

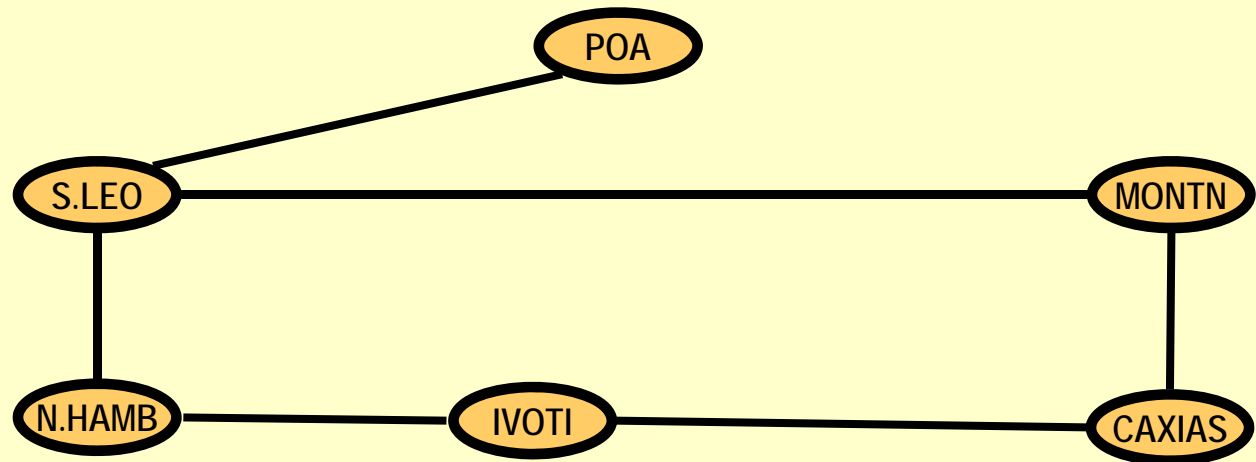
- 1a. Aplicação conhecida (1736)
 - Problema da ponte de Königsberg (na Prússia oriental)
 - Resolvido por Euler

É possível atravessar todas as pontes uma única vez, voltando ao lugar de partida?

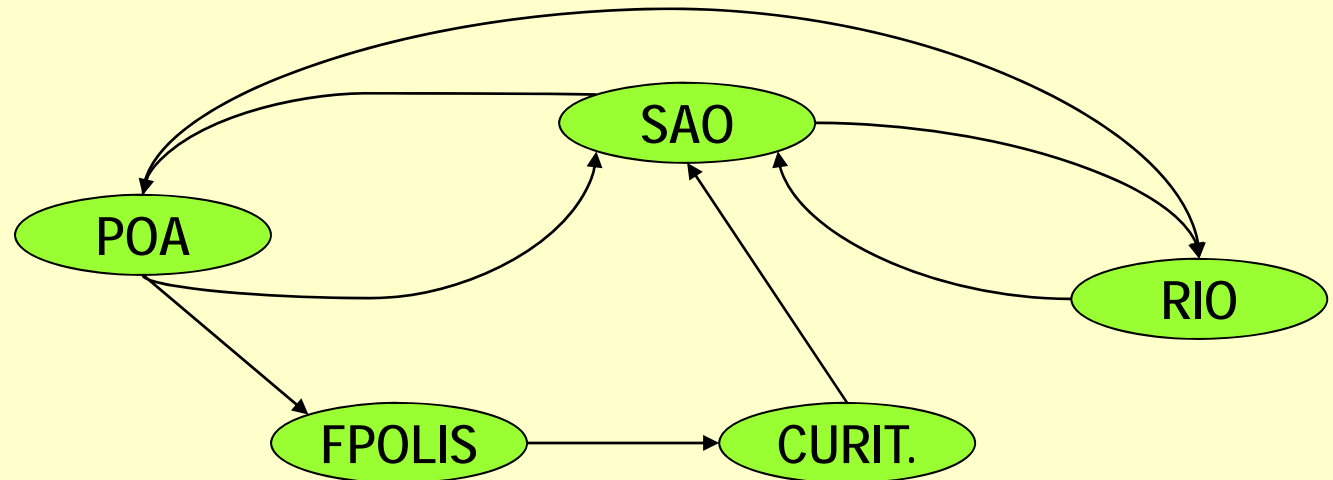


Exemplos de aplicações

- Cidades e estradas

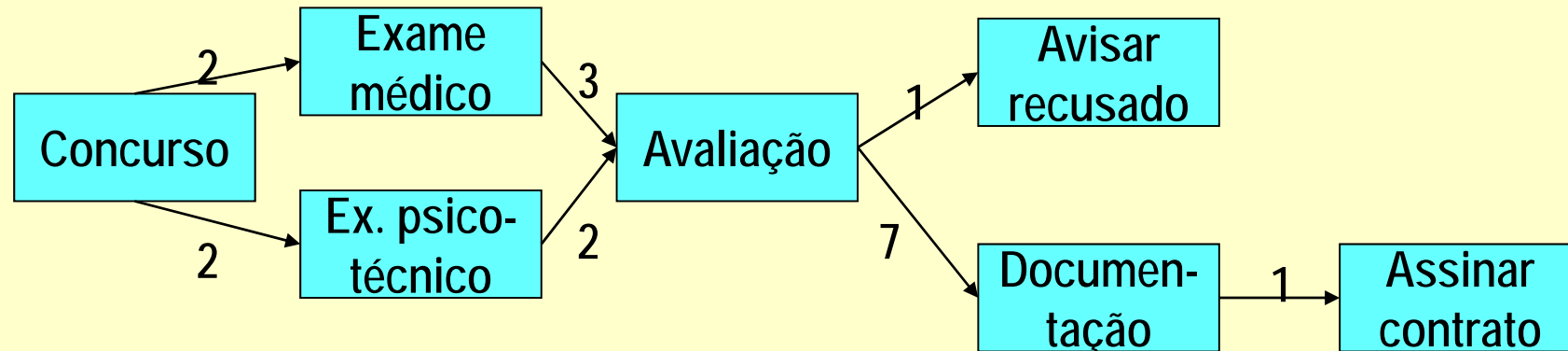


- Tráfego aéreo



Exemplos de aplicações

- Atividades e tempo de execução



Outras Aplicações

- Cada vértice é uma *tarefa de um grande projeto*. Há um arco de x a y se x é pré-requisito de y , ou seja, se x deve estar pronta antes que y possa começar. Análise de circuitos elétricos
- Cada vértice é um *arquivo de um sistema de software*. Cada arco é uma "dependência": um arquivo v é construído a partir de todos os arquivos w para os quais existe um arco da forma (v, w) .
 - O utilitário *make* do UNIX trabalha sobre grafos deste tipo
- Cada vértice é uma *página na teia WWW*. Cada arco é um link que leva de uma página a outra. [Parece que há cerca de 22 bilhões de páginas e 176 bilhões de links.]

Outras Aplicações

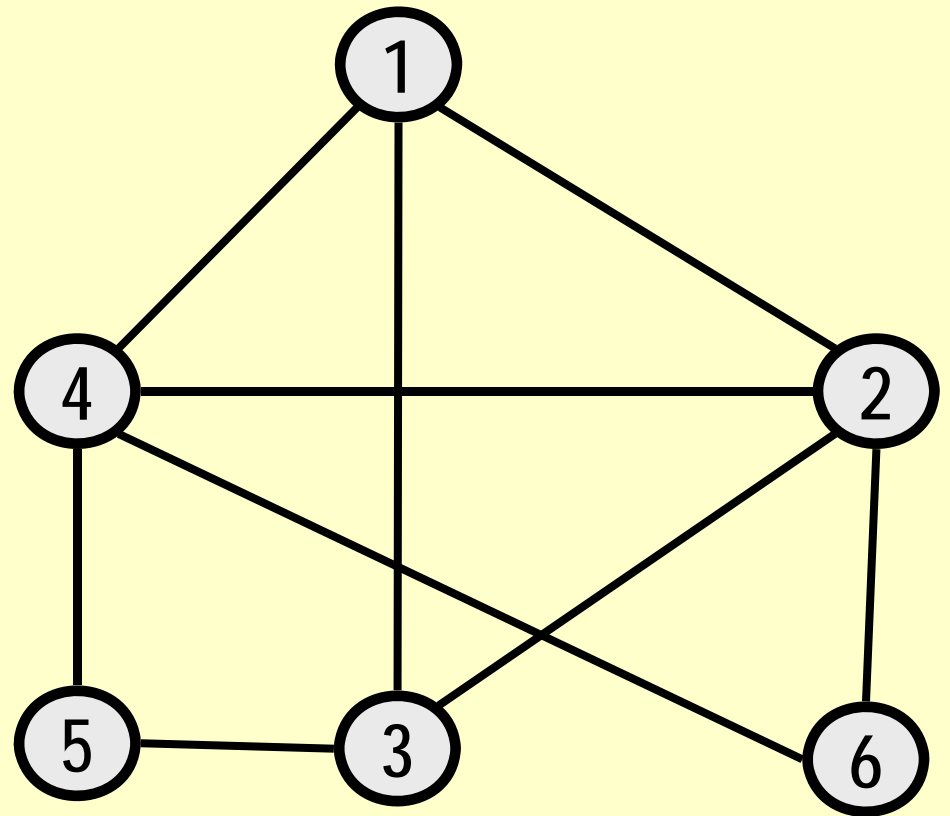
- Cada vértice é uma *tarefa de um grande projeto*. Há um arco de x a y se x é pré-requisito de y , ou seja, se x deve estar pronta antes que y possa começar.
Análise de circuitos elétricos
- Os vértices são *times de futebol* e os arcos são os jogos entre os times durante um campeonato.
- Os vértices são as casas de um *tabuleiro de xadrez*. Há um arco de x para y se um cavalo do jogo pode ir de x a y em um só movimento.

Outras Aplicações

- Outras aplicações
 - Análise de circuitos elétricos
 - Verificação de caminhos mais curtos
 - Análise de planejamento de projetos
 - Identificação de compostos químicos
 - Mecânica estática
 - Genética
 - Cibernética
 - Linguística
 - Ciências sociais
 - ...

Grafos

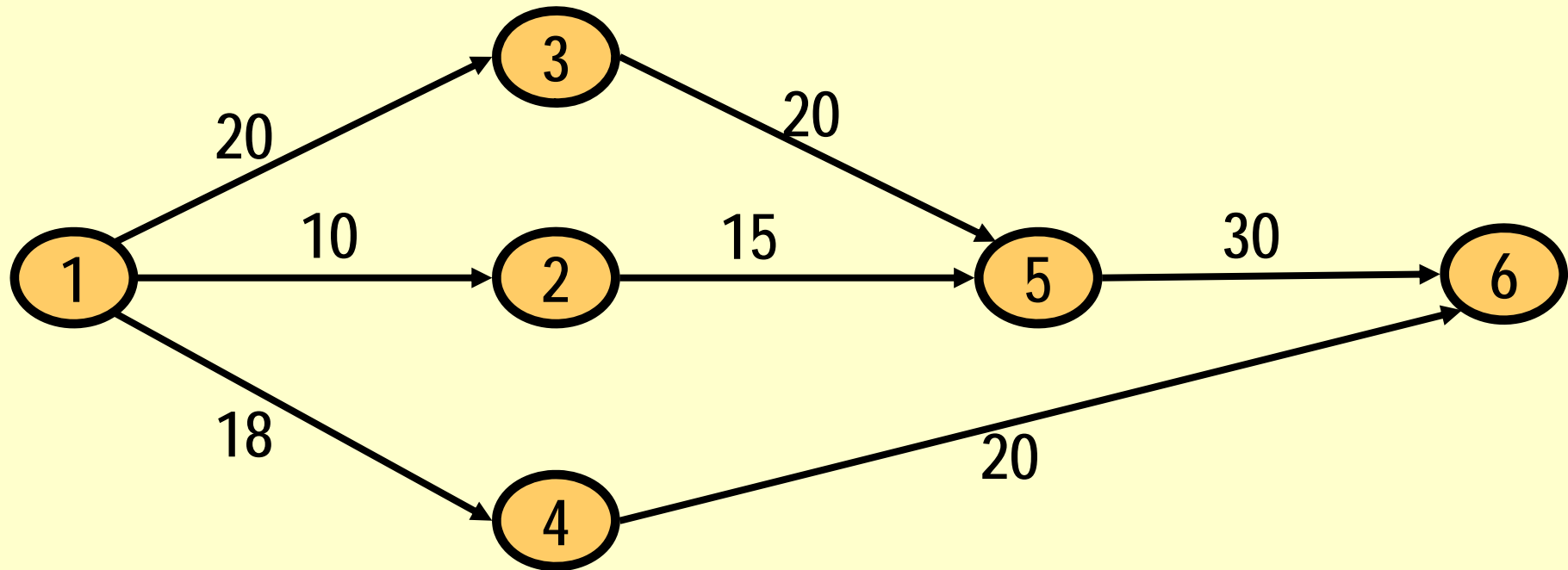
- Representação
 - implementação da *Estrutura de Dados*
- Principais Algoritmos



Problemas típicos

- caminho crítico (máximo e mínimo)
- número cromático
- árvore geradora (máxima e mínima)
- planaridade

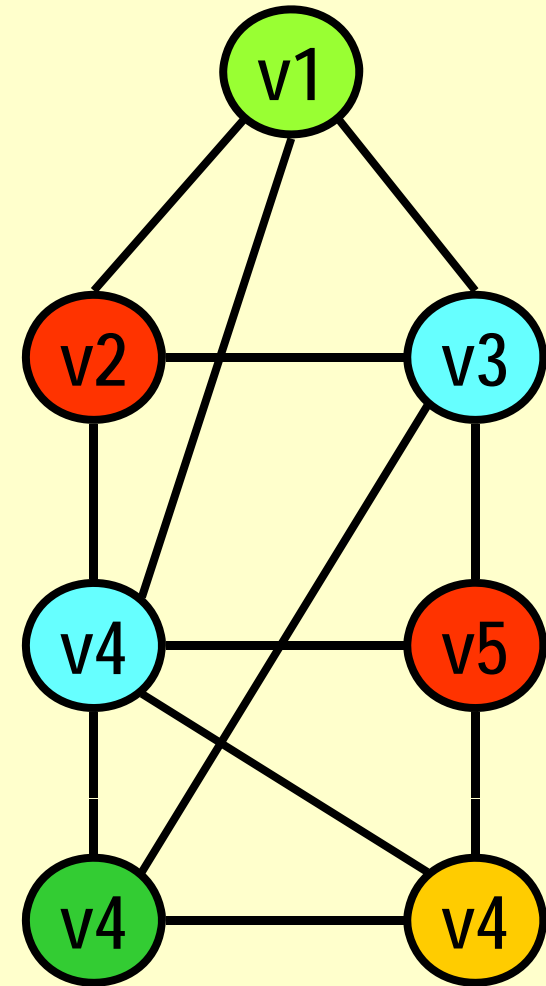
Caminho Mínimo



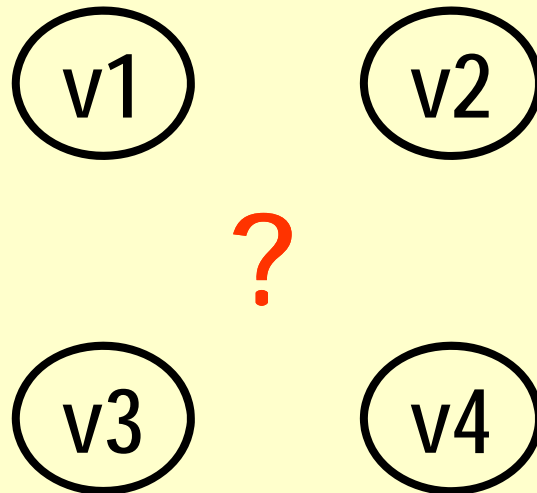
O ***caminho crítico*** entre dois vértices u e w , em um grafo orientado G , é o caminho de maior custo de u até w em G

Número cromático

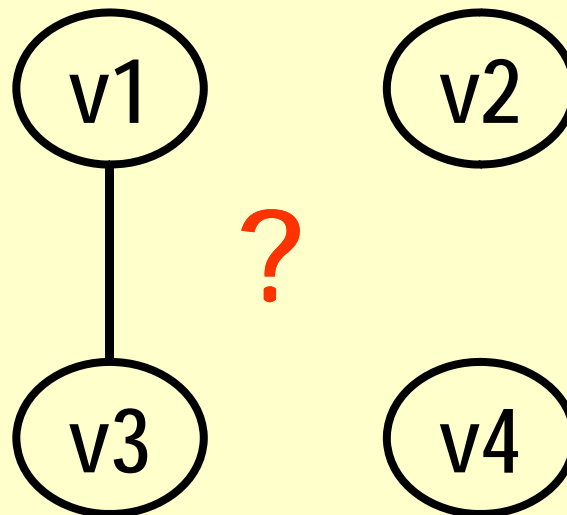
É o número mínimo de cores suficiente para que os vértices do grafo sejam coloridos sem que se atribua a mesma cor a dois vértices adjacentes



Número cromático

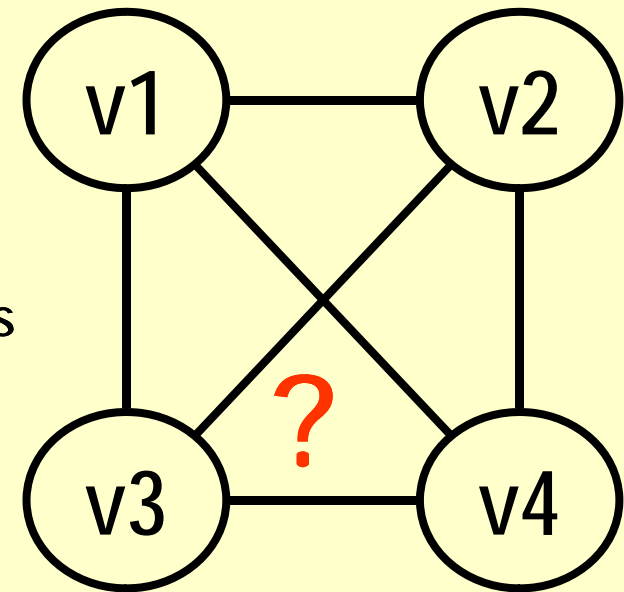


1 cor

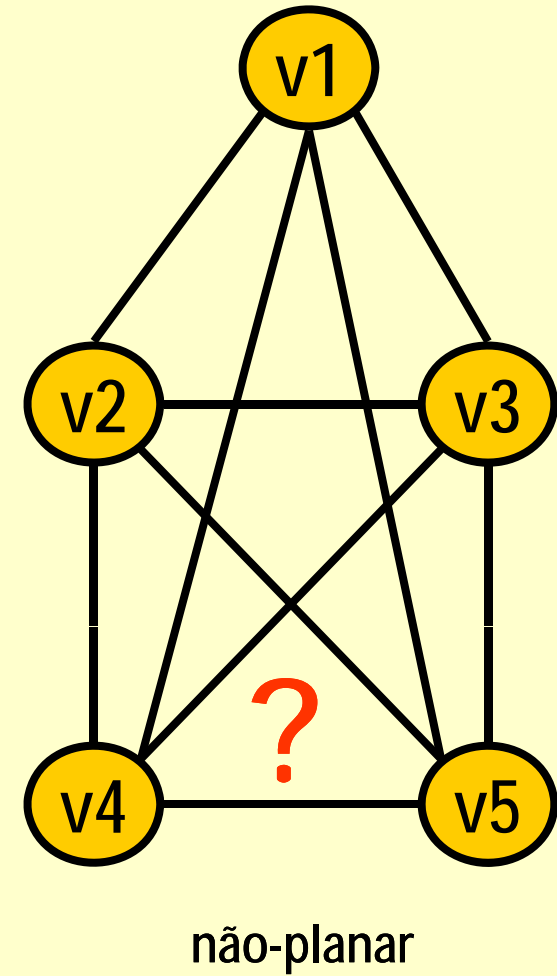
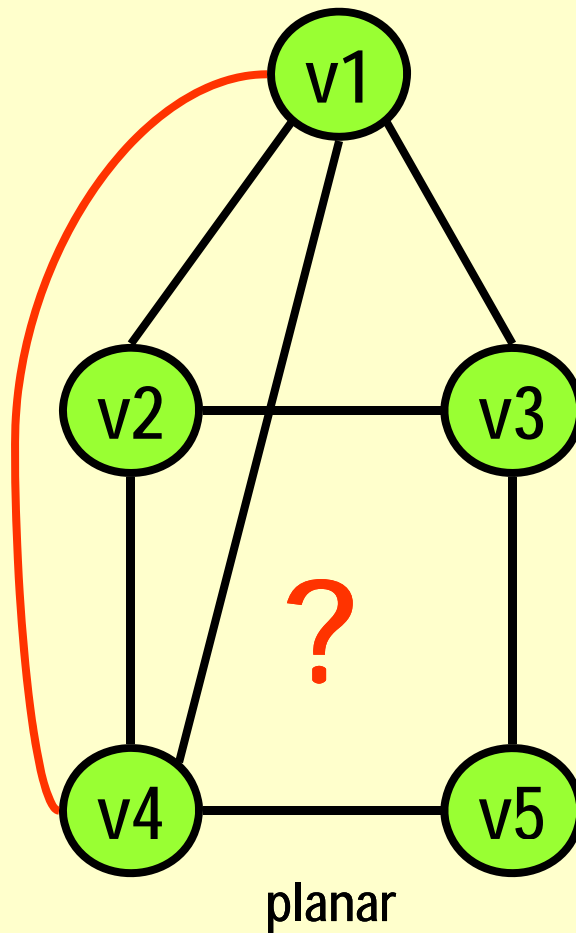
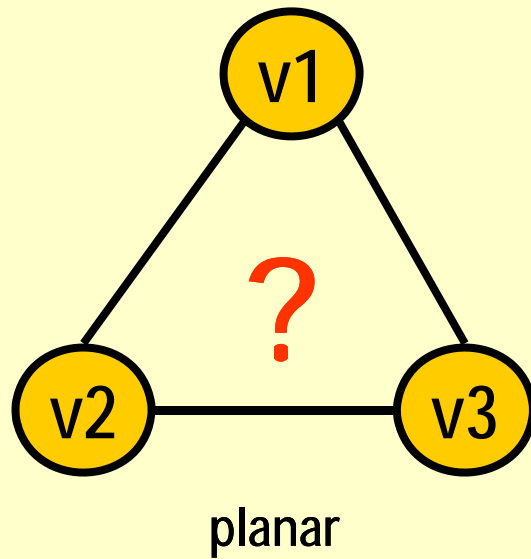


2 cores

4 cores



Planaridade



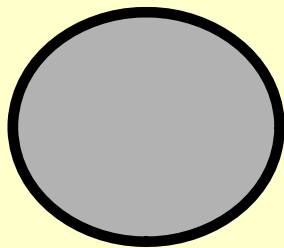
GRAFOS -

Definições

Definição formal

Um grafo é uma tripla (V, A, f) , onde V é um conjunto não-vazio de nodos (vértices), A é um conjunto possivelmente vazio de relacionamentos (linhas) e f é uma função de incidência que representa um relacionamento

vértices

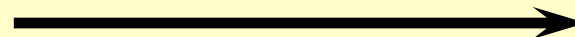


Linhas:

arestas

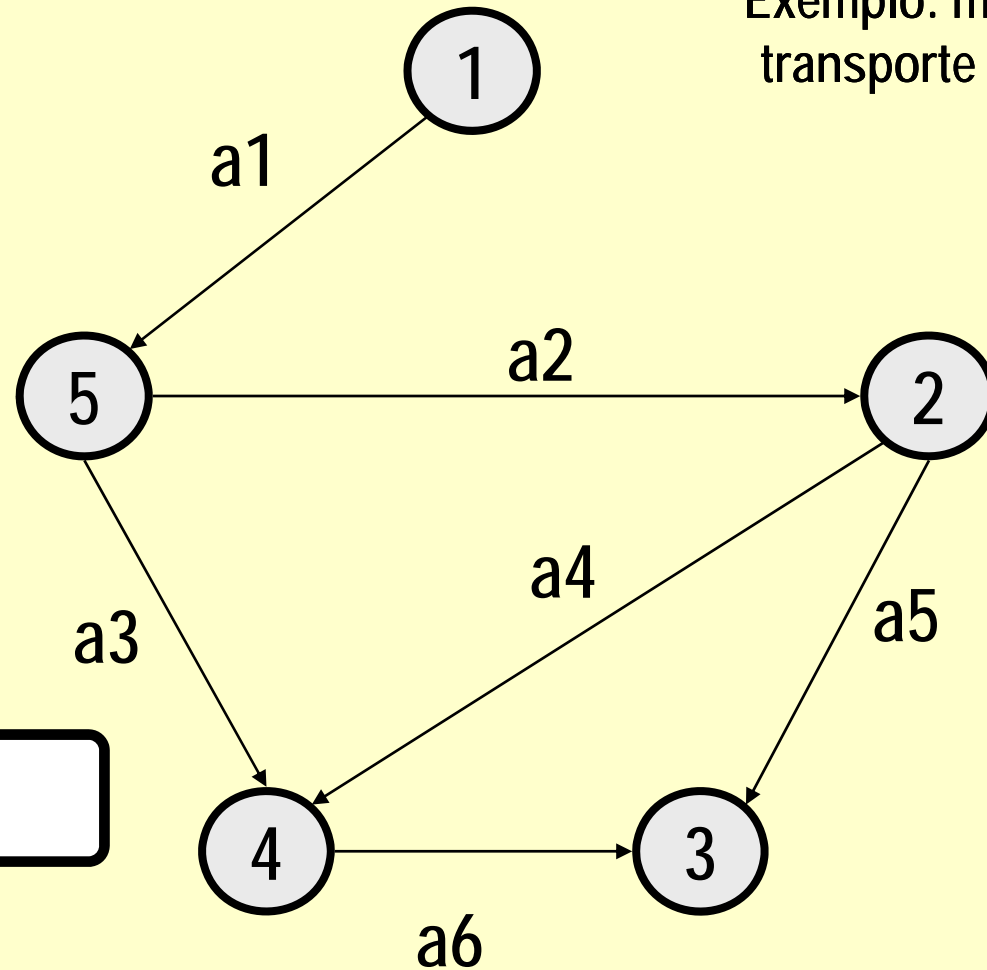


arcos



Grafo orientado

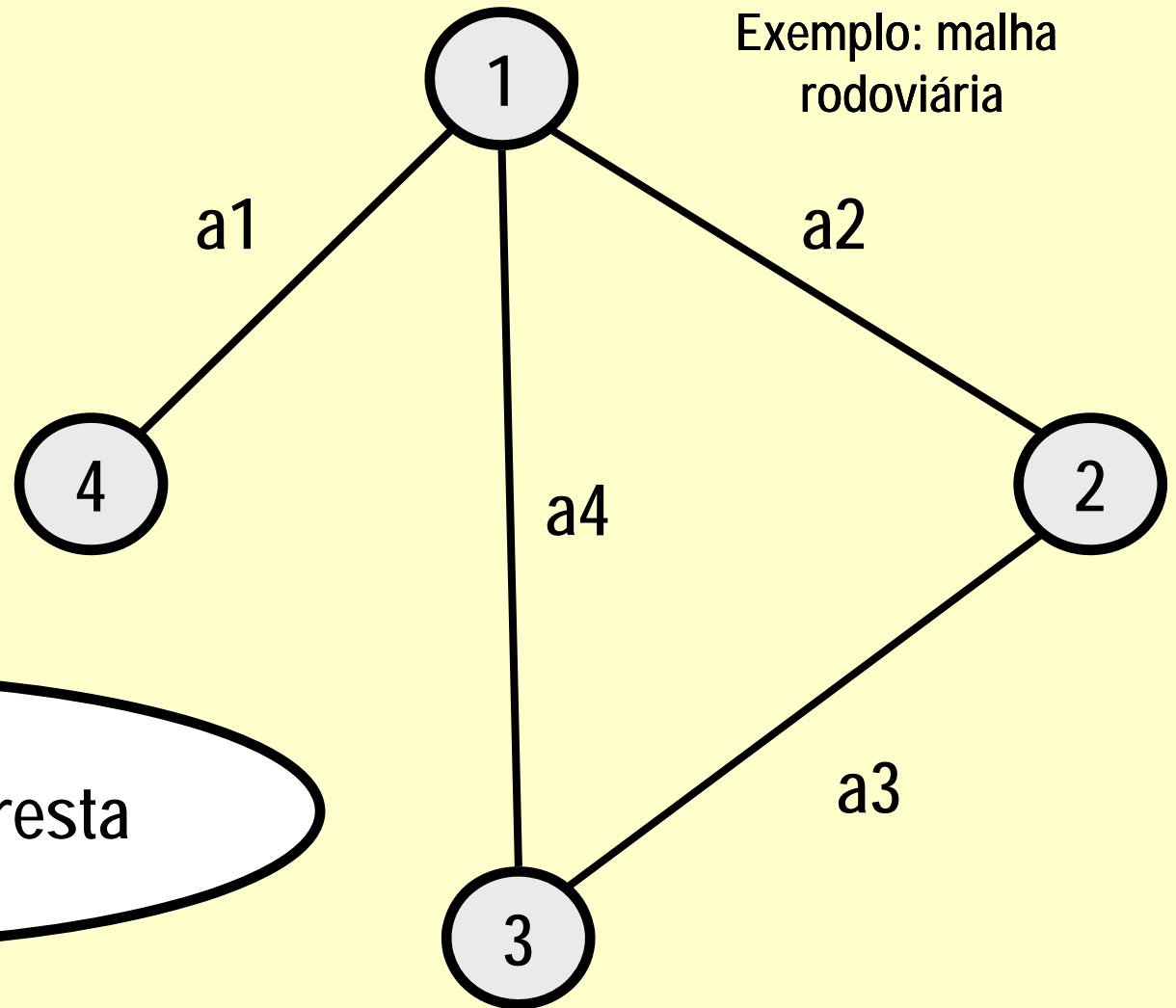
Exemplo: malha de transporte urbano



$a = (v1, v2)$ é um arco

Grafo não-orientado

Exemplo: malha
rodoviária



$a = \{v_1, v_2\}$ é uma aresta

Grafos orientados x não-orientados

Um grafo expressa uma relação binária R

Grafo não-orientado:

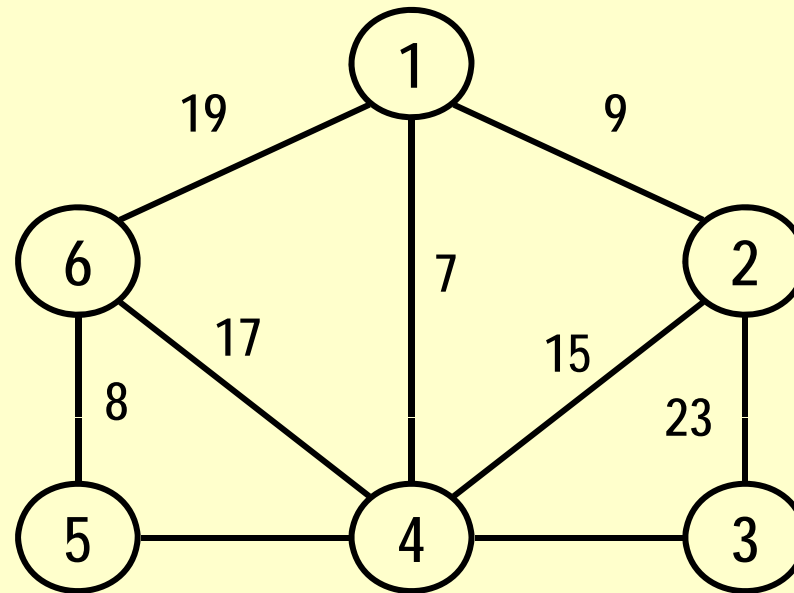
$$(v1, v2) \in G \leftrightarrow v1 R v2$$

Grafo orientado:

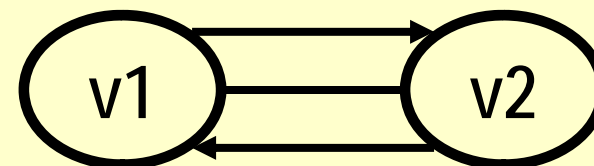
$$\{v1, v2\} \in G \leftrightarrow v1 R v2 \wedge v2 R v1$$

Definições e terminologia

Um grafo é **valorado** se possuir valores associados às linhas e/ou aos vértices.



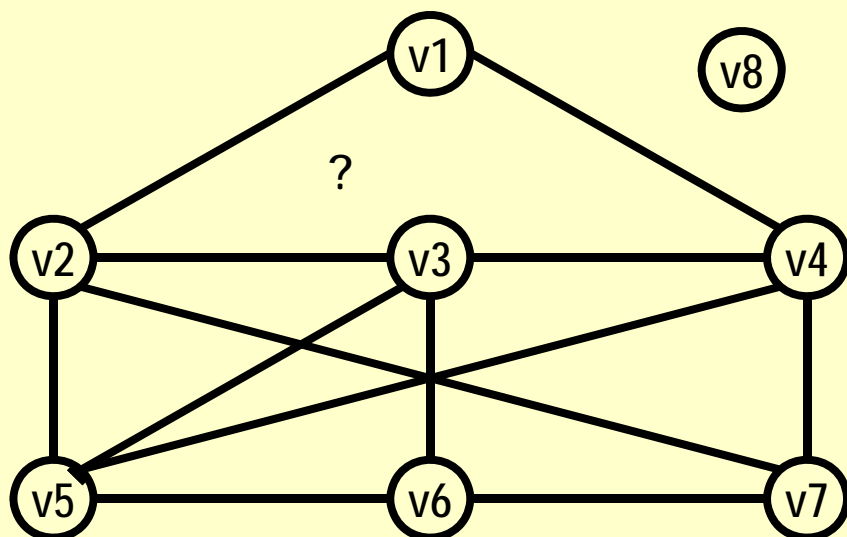
Definições e terminologia



Dois vértices $v1$ e $v2$ são ditos **adjacentes** em G , se neste existe a aresta $\{v1, v2\}$ ou um dos arcos $(v1, v2)$ e $(v2, v1)$

Uma linha a é **incidente** a um vértice v , se v for uma das extremidades de a .

Definições e terminologia



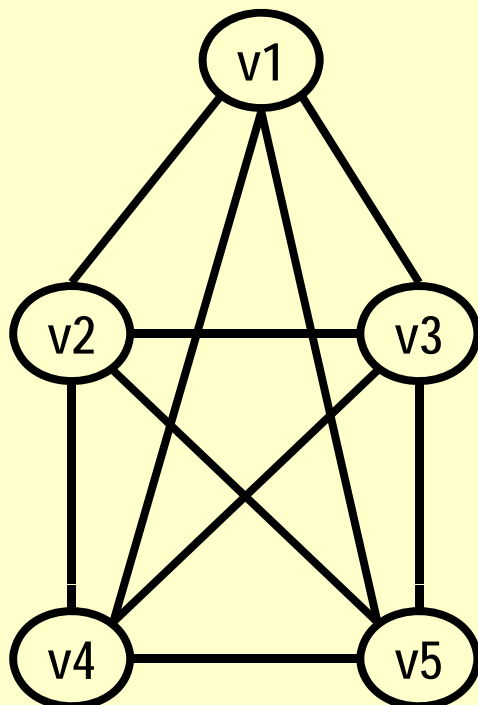
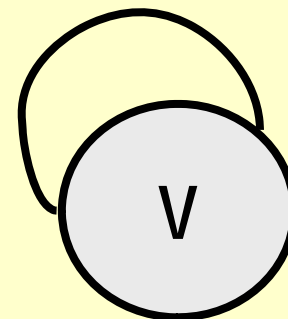
Grau de um vértice é igual ao número de linhas que nele incidem

Vértices com grau igual a zero são ditos **isolados**

A **ordem** de um grafo é igual ao número de vértices do mesmo

Definições e terminologia

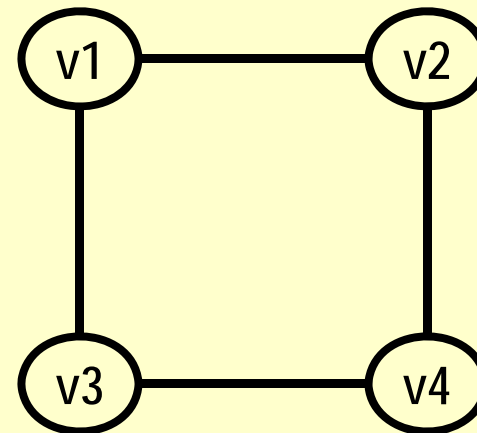
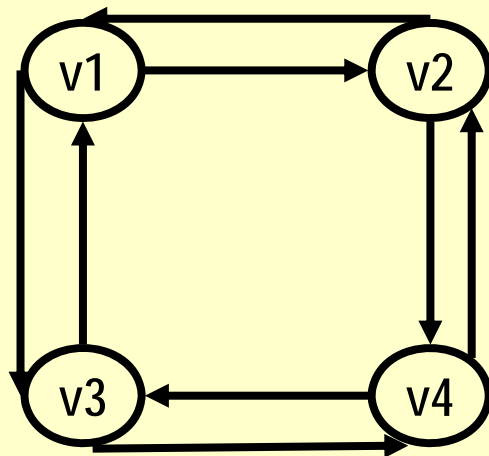
Uma linha que tem ambas extremidades em um mesmo vértice é chamada **laço**



Um grafo é dito **completo** se todos os seus pares de vértices forem adjacentes

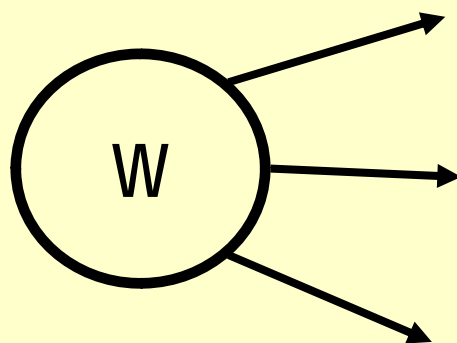
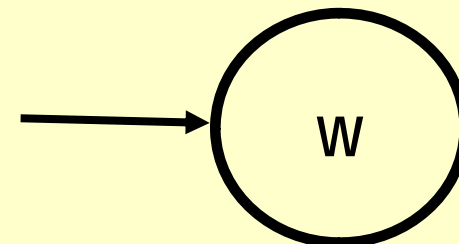
Definições e terminologia

Um grafo é dito ***simétrico*** se para cada arco da forma (v,w) existe um arco da forma (w,v) .



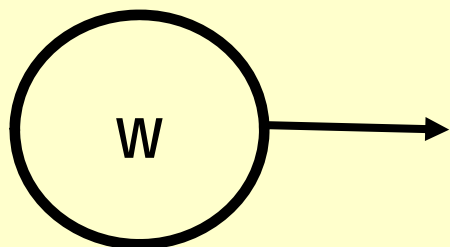
Definições e terminologia

Semigrau interior de um vértice w , em um grafo orientado, é igual ao número de arcos (v, w) existente no grafo.



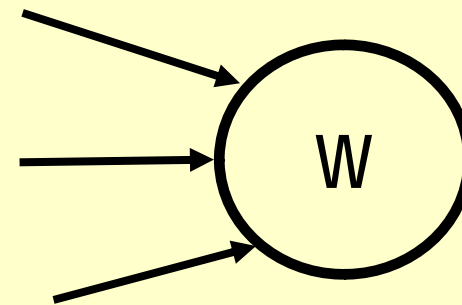
Entradas ou ***fontes*** são vértices que possuem *semigrau interior* igual a zero.

Definições e terminologia



Semigrau exterior de um vértice w , em um grafo orientado, é igual ao número de arcos (w, v) existente no grafo.

Saídas ou **sumidouros** são vértices que possuem **semigrau exterior** igual a zero.



Representação física de grafos

- matriz de adjacência
 - matriz de incidência
 - lista de adjacência
 - lista de incidência
-

Matriz de adjacência

Matriz de adjacência $A(n \times n)$ de um grafo G de ordem n , é uma matriz onde cada elemento $a_{i,j}$ é:

Grafos orientados:

$$a_{i,j} = 1 \text{ se } (v_i, v_j) \in G$$

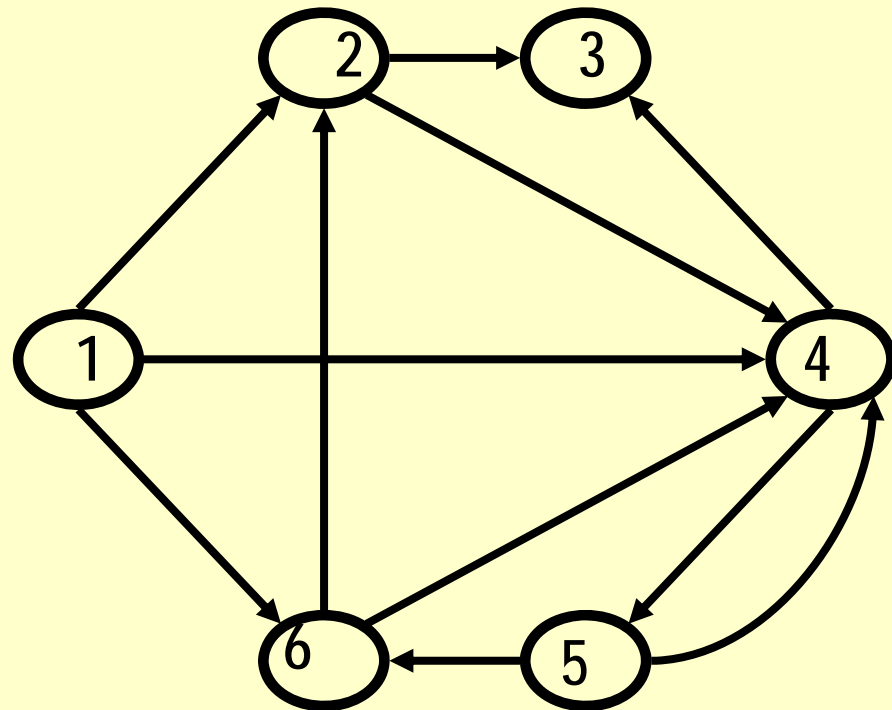
$$a_{i,j} = 0 \text{ se } (v_i, v_j) \notin G$$

Grafos não orientados:

$$a_{i,j} = 1 \text{ se } \{v_i, v_j\} \in G$$

$$a_{i,j} = 0 \text{ se } \{v_i, v_j\} \notin G$$

Matriz de adjacência



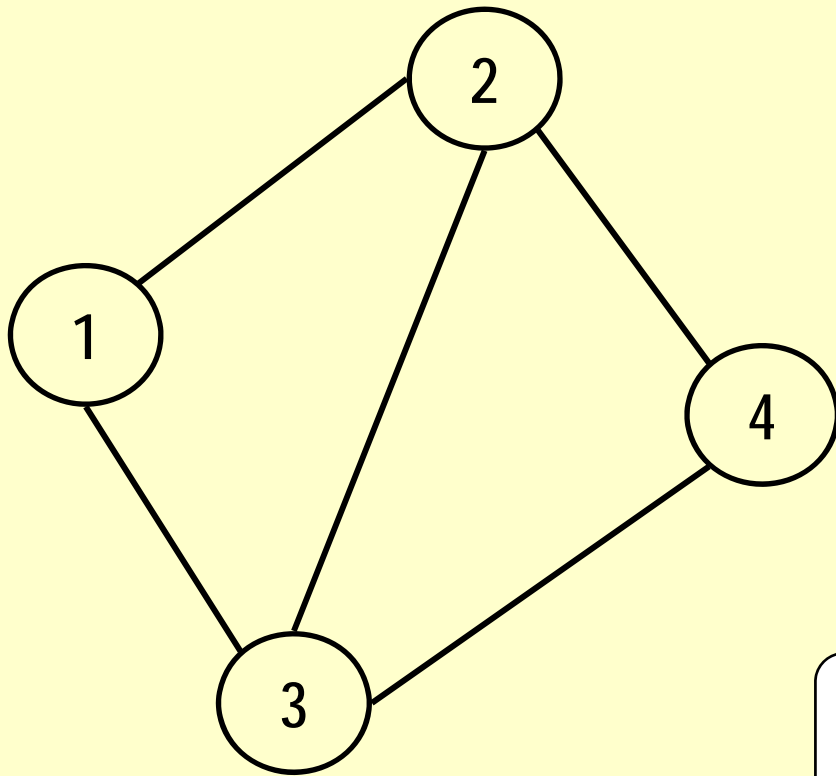
vértices

vértices

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	1	1	0	1
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	1	0
5	0	0	0	1	0	1
6	0	1	0	1	0	0

A **matriz de adjacência** é uma forma de representação de grafos simples, econômica e adequada para muitos problemas que envolvem apenas a estrutura do grafo.

Matriz de adjacência



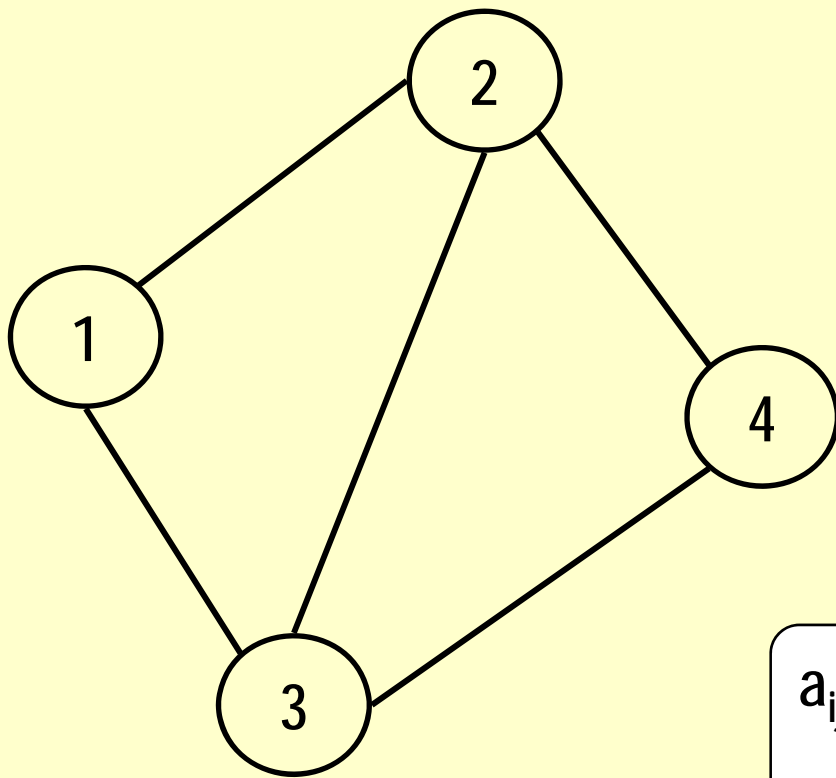
	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	1
3	1	1	0	1
4	0	1	1	0

$a_{ij}=1$ se $\{v_i, v_j\} \in G$

$a_{ij}=0$ se $\{v_i, v_j\} \notin G$

Matriz de adjacência

Não-orientado - SIMÉTRICO



	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2		0	1	1
3			0	1
4				0

$a_{ij}=1$ se $\{v_i, v_j\} \in G$

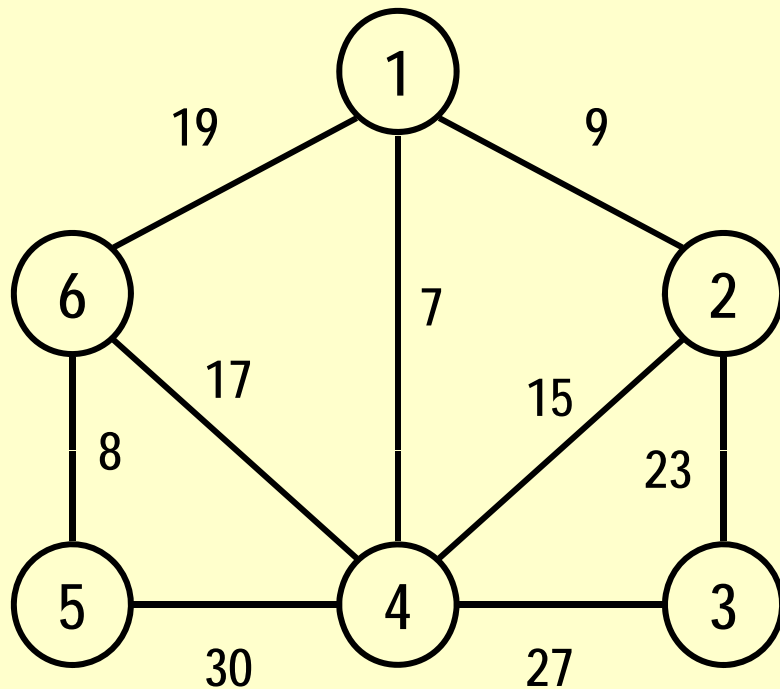
$a_{ij}=0$ se $\{v_i, v_j\} \notin G$

Matriz de adjacência

Valores associados às linhas podem ser representados por uma extensão simples da Matriz de Adjacência

$$a_{ij}=k \text{ se } (v_i, v_j) \in G$$

$$a_{ij}=* \text{ se } (v_i, v_j) \notin G$$



	1	2	3	4	5	6
1	*	9	*	7	*	19
2	9	*	23	15	*	*
3	*	23	*	27	*	*
4	7	15	27	*	30	17
5	*	*	*	30	*	8
6	19	*	*	17	8	*

Matriz de adjacência (MA)

- Matriz binária: ocupa pouco espaço, especialmente para grafos densos
- Manipulação simples: recursos p/matrizes em qualquer linguagem
- Fácil determinar se $(v_i, v_j) \in G$
- Fácil determinar $\{\text{Adjacentes}(v, G)\}$
- Quando o grafo é não orientado, a MA é simétrica (mais econômica)
- Inserção de novos vértices é muito difícil

Matriz de incidência

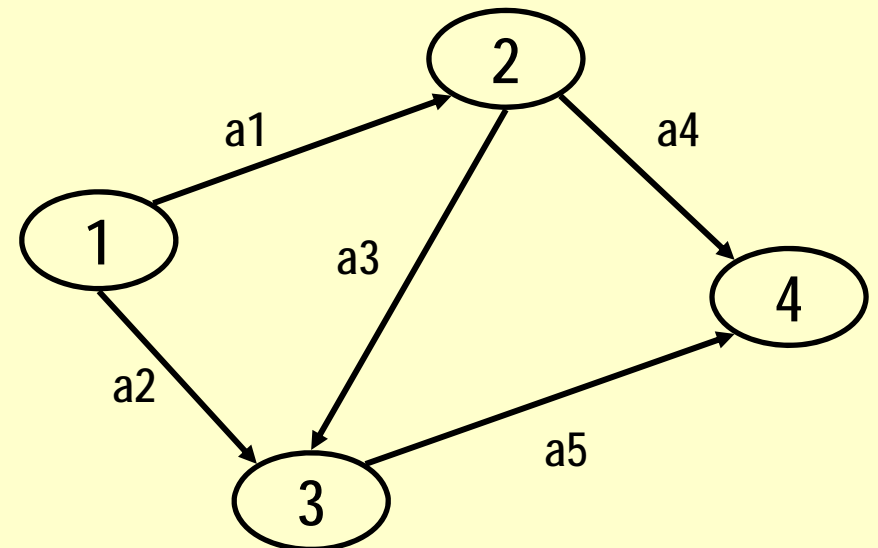
É uma matriz $B(n \times m)$, sendo n o número de vértices, m o número de linhas e:

$b_{ij} = -1$ se o vértice i é a origem da linha j

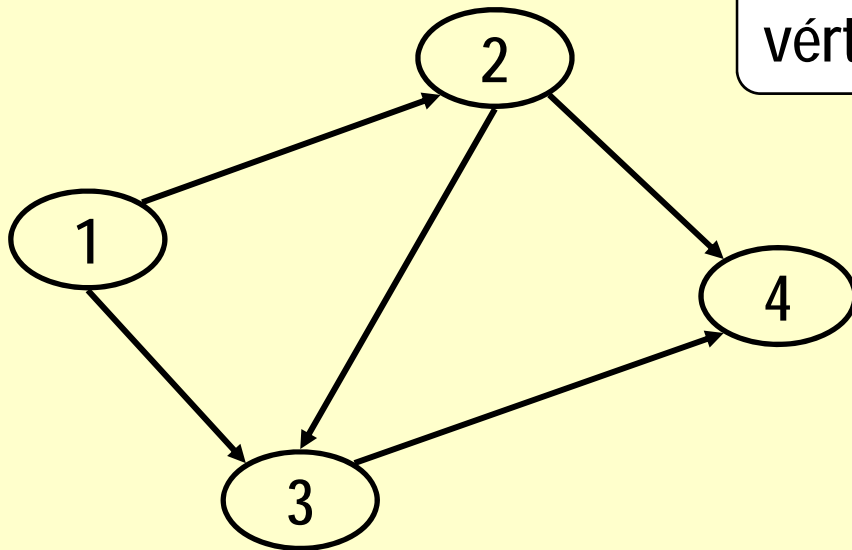
$b_{ij} = 1$ se o vértice i é o término da linha j

Para grafos não orientados, $b_{ij} = 1$ se a aresta j é incidente ao vértice i .

		arcos				
vértices		a1	a2	a3	a4	a5
	1	-1	-1	0	0	0
	2	1	0	-1	-1	0
	3	0	1	1	0	-1
	4	0	0	0	1	1



Listas de adjacência



Para cada vértice v é representada a lista de vértices u tais que $(v,u) \in G$

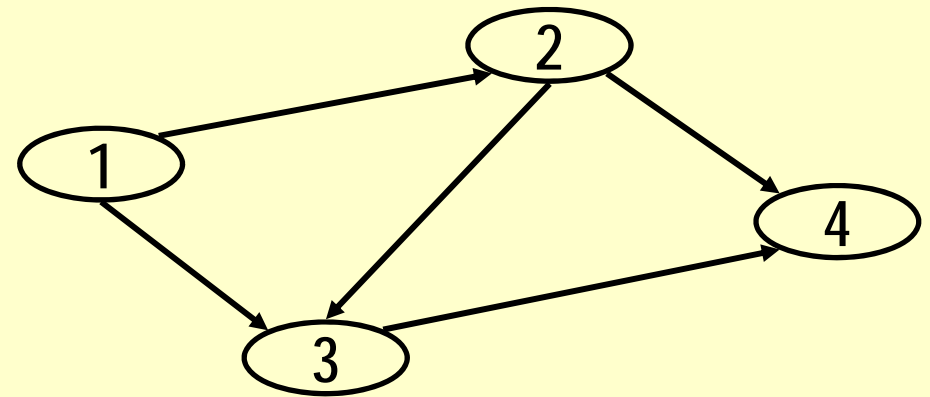
- Muito rígida
- Requer previsão do tamanho máximo das listas
- Eficiente para grafos pouco densos, com graus uniformes

Contigüidade Física

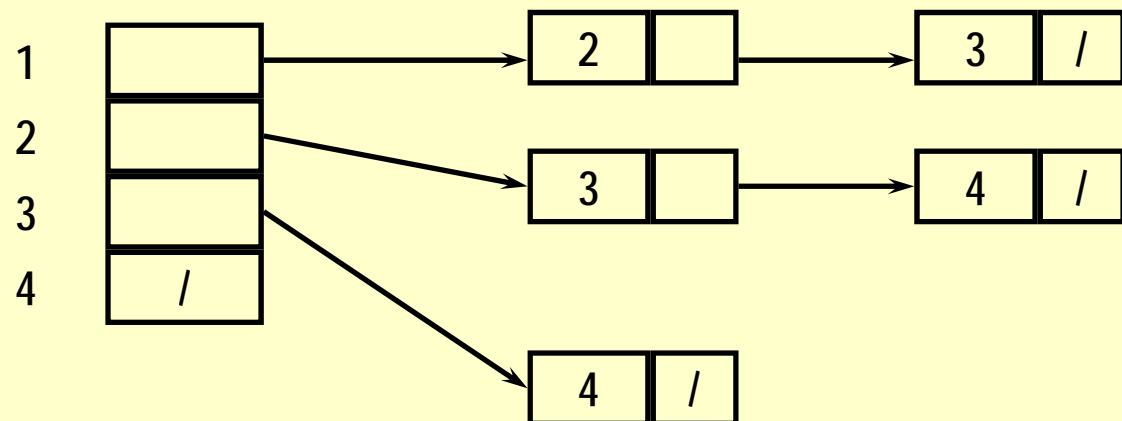
		Grau máximo	
		1	2
vértices	1	2	3
	2	3	4
	3	4	0
	4	0	0

Listas de adjacência

Representação mista

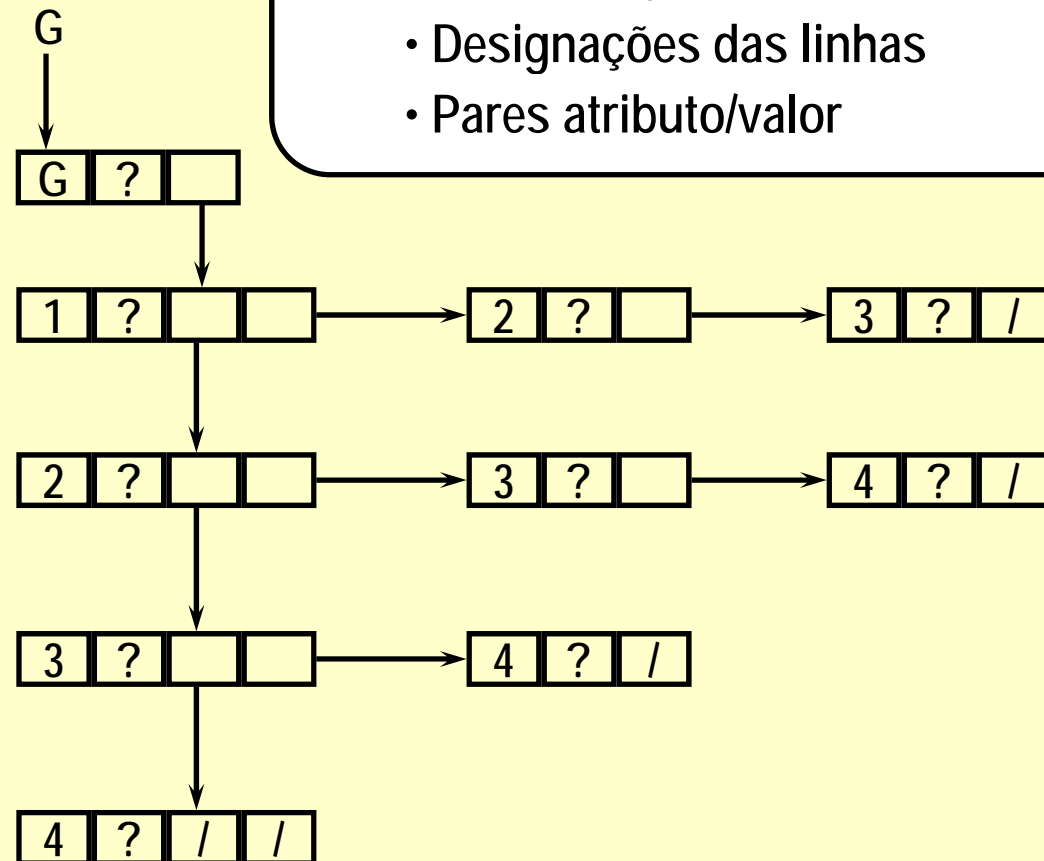
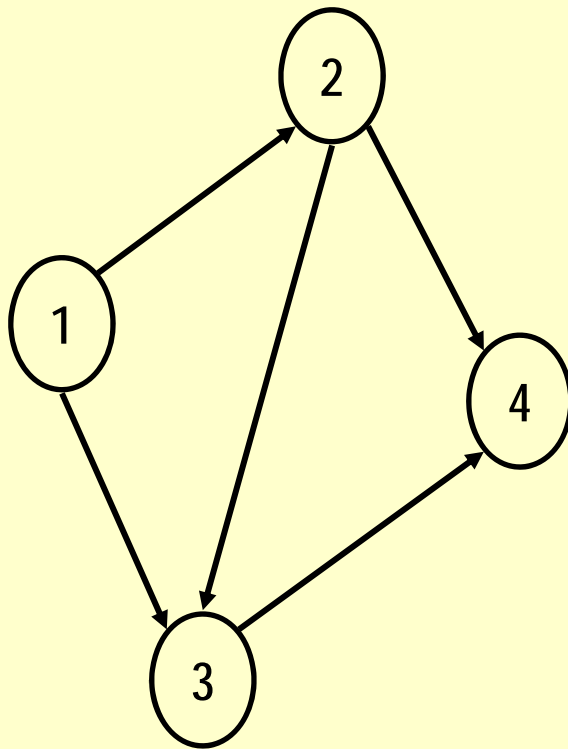


- Uso mais racional do espaço
- Inserção/exclusão de linhas mais fácil
- Inserção de vértices problemática



Listas de adjacência

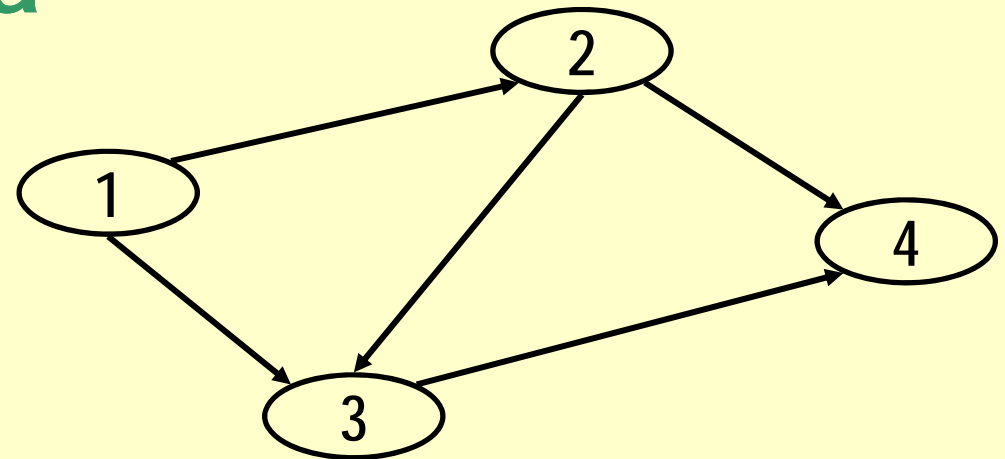
Encadeamento



- Uso racional do espaço
- Flexibilidade
- Nós podem ser estendidos para representar outras informações
 - Designações das linhas
 - Pares atributo/valor

Listas de incidência

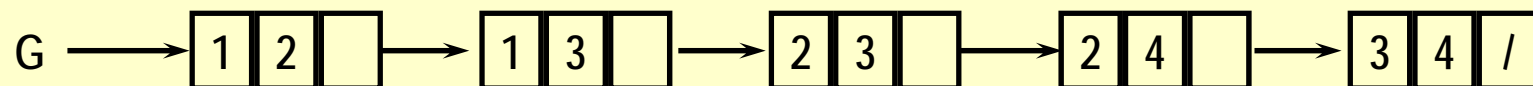
Contigüidade Física



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	2	1	3	2	3	2	4	3	4			

Encadeamento

1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	2	3			
2	3	3	4	4			



Exercício

Exercício 01. Os Turistas Jensen, Leuzingner, Dufour e Medeiros se encontram em um bar de Paris e começam a conversar. As línguas disponíveis são o inglês, o francês, o português e o alemão. Jensen fala todas. Leuzingner não fala apenas o português. Dufour fala francês e alemão. Medeiros fala inglês e português. Represente por meio de um grafo todas as possibilidades de **um** deles dirigir a palavra a outro, sendo compreendido.

Exercício 02

	1	2	3	4	5	6	7
1		5					
2			2	6	10		
3					33	4	
4			1		14		9
5							19
6				8	33		
7							

2. Representar o grafo por **Matriz de Adjacência**

3. Representar o grafo por **Matriz de Incidência**

3. Representar o grafo por **Lista de Adjacência**

3. Representar o grafo por **Lista de Incidência**