NE 5409 = CÁLCULO NUM. PARA COMPUTAÇÃO : 3ª PROVA : 2008.1 : PROF. JÚLIO

1] NUM SISTEMA DEDICADO TEM-SE QUE OBTER VALORES FUNCIONAIS $f(v)$, $v \in [-1;1]$ DA FUNÇÃO

$$f(x) = \int_0^x e^{\cos y - 1}\, dy \overset{\text{TAYLOR}}{=} x - \frac{x^3}{3*2} + \frac{x^5}{5*4} - \frac{x^7}{7*6} + \frac{x^9}{9*8} - \dots$$ PARA ESTA FUNÇÃO RESPONDA:

i) QUAL É A PRECISÃO DO SEU APROXIMADOR DE TAYLOR DE GRAU $n=15$?

ii) OBTENHA O SEU APROXIMADOR DE PADÉ $R_{32}^{(x)}$, BEM COMO AVALIE A QUALIDADE DO $R_{32}^{(x)} \simeq f(x)$;

iii) UM APROXIMADOR DE TCHEBYSHEV TERIA EFEITO TELESCÓPICO SIGNIFICATIVO? JUSTIFIQUE;

iv) O QUE SERIA MAIS EFICIENTE, OBTER OS VALORES DA $f(x)$ EFETUANDO NUMERICAMENTE AS INTEGRAIS $\int_0^x e^{\cos y - 1} dy$, OU USANDO A APROXIMAÇÃO DA $f(x)$? JUSTIFIQUE.

2] PARA UMA FUNÇÃO $y=f(x), x \in [-1;1]$, ELABORE UM ALGORITMO COMPLETO E EFICIENTE QUE OBTENHA NA PRECISÃO ϵ OS n PRIMEIROS COEFICIENTES b_i DA SUA SÉRIE DE TCHEBYSHEV

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i T_i(x), \text{ ONDE } b_i = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\, T_i(x)\, dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad i = 0,1,2,\dots,\infty,$$

USANDO O INTEGRADOR DE GAUSS-TCHEBYSHEV. CONSIDERE DISPONÍVEIS OS POLINÔMIOS $T_i(x)$, $i = 0,1,\dots,n$. QUAIS SÃO AS VANTAGENS E AS DESVANTAGENS ~~DEM~~ SE USAR ESTA SÉRIE GERADA POR ESTE ALGORITMO PARA APROXIMAR A FUNÇÃO $y=f(x)$?

3] A FUNÇÃO EXPONENCIAL INVERSA $g(x) = a * e^{\frac{b}{x}}$ É USADA NA CALIBRAGEM DE EQUIPAMENTOS METROLÓGICOS. CONSIDERANDO DISPONÍVEL O MINQPOL (= AJUSTADOR À POLINÔMIOS), ELABORE UM ALGORITMO COMPLETO E EFICIENTE QUE EFETUE O AJUSTE DE UMA BASE DE DADOS $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{n}$ À UMA $g(x) = a * e^{\frac{b}{x}}$, BEM COMO OBTENHA O SEU COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO PERCENTUAL

TAYLOR $\Rightarrow f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}_{(0)} x^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)\, x^{n+1}}{(n+1)!}, \ \xi \in (0;x)$

GAUSS-TCHEBYSHEV $\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{g(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \simeq \sum_{j=1}^{m} a_j\, g(x_j); \ a_j = \frac{\pi}{m}; \ x_j = \cos\left[\frac{(2j-1)\pi}{2m}\right], j = 1,2,\dots,m$

PADÉ $\Rightarrow R_{nm}^{(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{1 + b_1 x + \dots + b_m x^m}$, ONDE:

$$(*) \begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_1 = c_1 + b_1 c_0 \\ a_2 = c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\ a_3 = c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0 \\ \vdots \end{cases}$$

$$(**) \begin{bmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \cdots & c_n \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+m-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{n+1} \\ -c_{n+2} \\ \vdots \\ -c_{n+m} \end{bmatrix}$$

MÍNIMOS QUADRADOS $\Rightarrow$

$$p_m^{(x)} = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \text{ ONDE } \begin{bmatrix} n & \Sigma x_k & \Sigma x_k^2 & \cdots & \Sigma x_k^m \\ \Sigma x_k & \Sigma x_k^2 & \Sigma x_k^3 & \cdots & \Sigma x_k^{m+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Sigma x_k^m & \Sigma x_k^{m+1} & & \cdots & \Sigma x_k^{2m} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_k \\ \Sigma x_k y_k \\ \vdots \\ \Sigma x_k^m y_k \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \sum_{k=1}^{n}$$

OBSERVAÇÃO $\Rightarrow f(1) = \int_0^1 e^{\cos y - 1} dy \overset{\text{"EXATA"}}{=} 0,867\dots \qquad r^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n}[g(x_k) - YM]^2}{\sum_{k=1}^{n}[y_k - YM]^2}, \ YM = \frac{\Sigma y_k}{n}$