INE5403 - Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

5) Relações

5.1) Relações e Dígrafos

5.2) Propriedades de Relações

5.3) Relações de Equivalência

5.4) Manipulação de Relações

5.5) Fecho de Relações

Propriedades de relações

- Em muitas aplicações da computação aparecem relações sobre um conjunto A em vez de relações de A em B.

<u>Definição</u>: (Reflexividade)

- Uma relação R sobre um conjunto A é dita <u>*reflexiva*</u> se $(a,a) \in R$ para todo $a \in A$, ou seja, se aRa para todo $a \in A$.
- Uma relação R sobre A é dita <u>*irreflexiva*</u> se $(a,a) \notin R$ para todo $a \in A$.

- Ou seja: R é *reflexiva* se todo elemento $a \in A$ está relacionado consigo mesmo e é *irreflexiva* se nenhum elemento está relacionado consigo mesmo.

Propriedades de relações (reflexividade)

Exemplos:

a) $\Delta = \{ (a,a) \mid a \in A\}$: a relação de igualdade no conjunto A.
Por definição, $(a,a) \in \Delta$, $\forall a \in A$.

b) $R = \{ (a,b) \in A \times A \mid a \neq b\}$
Irreflexiva pois $(a,a) \notin R$, $\forall a \in A$.

c) Seja $A = \{1,2,3\}$ e $R=\{(1,1),(1,2)\}$. Então:
R não é reflexiva pois $(2,2) \notin R$
R não é irreflexiva pois $(1,1) \in R$

Propriedades de relações (reflexividade)

Exemplo: Quais das relações a seguir são reflexivas?

$R_1 = \{ (a,b) \mid a \leq b \}$
$R_2 = \{ (a,b) \mid a > b \}$
$R_3 = \{ (a,b) \mid a = b \text{ ou } a = -b \}$
$R_4 = \{ (a,b) \mid a = b \}$
$R_5 = \{ (a,b) \mid a = b+1 \}$
$R_6 = \{ (a,b) \mid a+b \leq 3 \}$

Resposta:

- R_1: pois $a \leq a$ para todo inteiro a
- R_3 e R_4
- Para cada um dos outros casos, pode-se encontrar um par da forma (a,a) que não está na relação.

Propriedades de relações (reflexividade)

Caracterização de reflexividade e irreflexividade em termos de matrizes e dígrafos:

1. Matrizes:

   – relação R reflexiva $\Rightarrow$ a matriz M_R possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1
   – relação R irreflexiva $\Rightarrow$ a matriz M_R possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 0

2. Dígrafos:

   – relação R reflexiva $\Rightarrow$ para todos os vértices do dígrafo existem arestas que ligam o vértice a ele mesmo.
   – relação R irreflexiva $\Rightarrow$ para todos os vértices do dígrafo não existem arestas que ligam o vértice a ele mesmo.

- Observe também que se R sobre A é reflexiva, então:
  Dom(R) = Ran(R) = A

Propriedades de relações - simetria

Definição (Simetria): Uma relação R sobre um conjunto A é dita *simétrica* se *sempre* que $(a,b) \in R$, então também $(b,a) \in R$.

- segue que R sobre A é uma relação *não-simétrica* se para algum $a,b \in A$ for verificado que $(a,b) \in R$ e $(b,a) \notin R$.

Definição (Assimetria): Uma relação R sobre um conjunto A é dita *assimétrica* se *sempre* que $(a,b) \in R$, então $(b,a) \notin R$.

- uma relação R sobre A é *não-assimétrica* se para *algum* $a,b \in A$ for verificado que $(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$.

Definição (Antissimetria): Uma relação R sobre um conjunto A é dita *antissimétrica* se *sempre* que $(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$, então $a=b$.

- equivalentemente, se $a \neq b$, então $(a,b) \notin R$ ou $(b,a) \notin R$
- uma relação R sobre A é *não-antissimétrica* se existir $a,b \in A$ com $a \neq b$ e tanto $(a,b) \in R$ como $(b,a) \in R$.

Propriedades de relações

- **<u>Lembrete</u>**: escrever $(a,b) \in R$ é equivalente a escrever aRb, que significa dizer que a está relacionado com b por R.

- **<u>Observação</u>**: para verificar se estas propriedades são ***válidas ou não*** para uma certa relação R, deve-se notar que:

1. Uma propriedade *<u>não é válida</u>* em geral se puder ser encontrada uma situação onde ela não pode ser verificada.

2. Se não houver situação em que a propriedade *<u>falha</u>*, deve-se concluir que á propriedade é sempre válida.

Propriedades de relações - exemplos

Exemplo 1: Seja A=Z (o conjunto dos inteiros) e seja R a relação $R=\{(a,b)\in A\times A \mid a \geq b\}$. Determine se R é simétrica, assimétrica ou antissimétrica.

Solução:

- simetria: se $a \geq b$, então não é sempre verdade que $b \geq a$ (exemplo: $2 \geq 1$ mas $1 < 2$) $\Rightarrow$ R é não-simétrica.

- assimetria: R é não-assimétrica pois se $a=2$ e $b=2$ temos aRb e bRa.

- antissimetria: R é antissimétrica pois $a \geq b$ e $b \geq a \Rightarrow a=b$.

Propriedades de relações - exemplos

<u>Exemplo 2</u>: Seja $A=\{1,2,3,4\}$ e seja a relação:

$$R=\{(1,2),(2,2),(3,4),(4,1)\}$$

Determine se R é simétrica, assimétrica ou antissimétrica.

<u>Solução</u>:

- <u>simetria</u>: R é não-simétrica, pois, por exemplo, $1R2$ e $2\not R1$
- <u>assimetria</u>: R é não-assimétrica pois $(2,2) \in R$
- <u>antissimetria</u>: R é antissimétrica pois se $a\neq b$, então ou $(a,b)\notin R$ ou $(b,a)\notin R$.

Propriedades de relações - exemplos

<u>Exemplo 3</u>: Seja A= Z^+ (inteiros positivos) e seja

$R = \{ (a,b) \in A \times A \mid a|b \}$ (a divide b).

Determine se R é simétrica, assimétrica ou antissimétrica.

<u>Solução</u>:

- <u>simetria</u>: a|b não implica que b|a, então R é não-simétrica.
- <u>assimetria</u>: se a=b=5, por exemplo, então aRb e bRa. Assim, R é não-assimétrica.
- <u>antissimetria</u>: se a|b e b|a, então a=b, de modo que R é antissimétrica.

Propriedades de relações - exemplos

Exemplo 4: Quais das relações a seguir são simétricas e quais são antissimétricas?

$R_1 = \{ (a,b) \mid a \leq b \}$
$R_2 = \{ (a,b) \mid a > b \}$
$R_3 = \{ (a,b) \mid a = b \text{ ou } a = -b \}$
$R_4 = \{ (a,b) \mid a = b \}$
$R_5 = \{ (a,b) \mid a = b+1 \}$
$R_6 = \{ (a,b) \mid a+b \leq 3 \}$

- R_3 é simétrica: se $a=b$ ou $a=-b$, então $b=a$ ou $b=-a$.
- R_4 é simétrica: $a=b \Rightarrow b=a$.
- R_6 é simétrica: $a+b\leq 3 \Rightarrow b+a\leq 3$.
- R_1 é antissimétrica: $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow b=a$.
- R_2 é antissimétrica: é impossível $a>b$ e $b>a$.
- R_4 é antissimétrica pela definição.
- R_5 é antissimétrica: é impossível acontecer $a=b+1$ e $b=a+1$.

Caracterização de simetria, assimetria e antissimetria através da matriz de relação

- **Simetria**: A matriz $M_R=[m_{ij}]$ de uma relação simétrica satisfaz à propriedade:

$$m_{ij}=1 \Rightarrow m_{ji}=1$$
$$m_{ij}=0 \Rightarrow m_{ji}=0$$

  Portanto, neste caso tem-se que $m_{ij}=m_{ji}$, o que significa que R é simétrica se e somente se $M_R=(M_R)^t$.

- **Assimetria**: A matriz $M_R=[m_{ij}]$ de uma relação assimétrica satisfaz:

$$m_{ij}=1 \Rightarrow m_{ji}=0$$

  Logo, se R é assimétrica, segue que $m_{ii}=0$ para todo i.

- **Antissimetria**: A matriz $M_R=[m_{ij}]$ de uma relação antissimétrica satisfaz:

$$\text{se } i\neq j \text{ então } m_{ij}=0 \text{ ou } m_{ji}=0$$

Propriedades de relações com matrizes

- **<u>Exemplo1</u>**:

$$M_{R1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{R3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{R6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades de relações com matrizes

- **Exemplo1 (cont.)**:
  - R1 e R2 são simétricas, pois M_{R1} e M_{R2} são matrizes simétricas.
  - R3 é antissimétrica, pois não existe nenhuma simetria fora da diagonal.
  - R3 não é assimétrica, pois contém 1's na diagonal principal.
  - R4 não é simétrica, nem assimétrica e nem antissimétrica pois:
    1. M_{R4} não é simétrica;
    2. A presença do nro. 1 no elemento m_{41} viola tanto a propriedade de assimetria quanto a de antissimetria.
  - R5 é antissimétrica mas não assimétrica.
  - R6 é antissimétrica e não assimétrica.

Propriedades de relações - transitividade

- <u>Definição</u>: Uma relação R sobre um conjunto A é dita ***transitiva*** se, sempre que a R b e b R c, então a R c.

- Por outro lado, R sobre A é uma relação ***não-transitiva*** se existir a, b e c em A tais que a R b e b R c, mas a $\not R$ c.
$\rightarrow$ se tais a, b e c não existirem, então R é ***transitiva***.

Propriedades de relações - transitividade

- Exemplo1: Seja $A=Z^+$ e $R=\{ (a,b) \in A \times A \mid a|b \}$ ("a divide b"). A relação R é transitiva?

  Solução: suponha que a R b e que b R c, de modo que a|b e b|c. Então a|c, o que significa que a R c. Logo, R é transitiva.

- Exemplo2: A relação $R=\{(1,2),(1,3),(4,2)\}$ sobre $A=\{1,2,3,4\}$ é transitiva?

- Solução: como não é possível encontrar elementos a, b e c tais que $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$, mas $(a,c) \notin R$, *R é transitiva*.

Caracterização de relações transitivas por matrizes

- Se $M_R=[m_{ij}]$ é a matriz de uma relação transitiva R, então M_R satisfaz à propriedade:

  $$\text{se } m_{ij}=1 \text{ e } m_{jk}=1\text{, então } m_{ik}=1$$

  ou seja, a transitividade de R significa que se $(M_R \otimes M_R)$ tem um 1 em qualquer posição, então M_R deve ter um 1 na mesma posição (o converso pode ser falso), ou seja:

  $$M_R \otimes M_R \leq M_R$$

Caracterização de relações transitivas por matrizes

- Exemplo: Mostre que a relação R sobre A={1,2,3} dada abaixo é transitiva:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Solução: Por cálculo direto, $M_R \otimes M_R = M_R$, de modo que R é transitiva.

Propriedades de relações - Exercícios

- Exercício1: Determine se as relações abaixo são reflexivas, irreflexivas, simétricas, assimétricas, antissimétricas ou transitivas:

  a) $R=\{(1,3),(1,1),(3,1),(1,2),(3,3),(4,4)\}$

  b) $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$

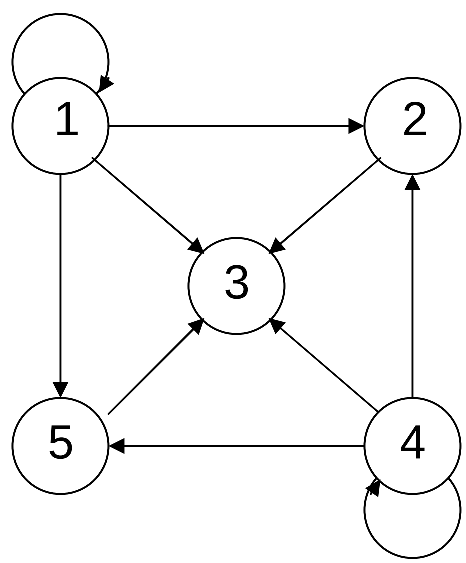
- Respostas:

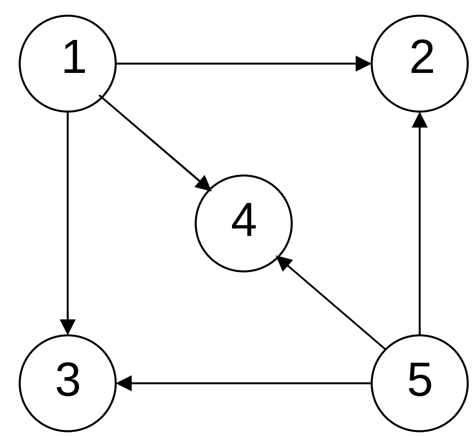
  a) N, N, N, N, N, N

  b) S, N, S, N, N, S

Propriedades de relações - Exercícios

- Exercício2: Seja A={1,2,3,4,5}. Determine se as relações definidas pelos dígrafos abaixo são reflexivas, irreflexivas, simétricas, assimétricas, antissimétricas ou transitivas.





Resp. (a): N, N, N, N, S, S

Resp. (b): ?