INE5403 - Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

5) Relações

- 5.1) Relações e Dígrafos
- 5.2) Propriedades de Relações
- 5.3) Relações de Equivalência
- 5.4) Manipulação de Relações
- 5.5) Fecho de Relações

Relações de equivalência

- Suponha que a matrícula dos estudantes em uma dada universidade siga o esquema:

Inicial do nome :	Horário de matrícula :
A – G	8 :00 – 11 :00
H – N	11 :00 – 14 :00
O – Z	14 :00 – 17 :00

- Seja R a relação que contém (x,y) se x e y são estudantes com nomes começando com letras do mesmo bloco.
- Consequentemente, x e y podem se matricular na mesma hora se e somente se $(x,y) \in R$.
- Pode-se notar que R é reflexiva, simétrica e transitiva.
- Além disto, R divide os estudantes em 3 classes (*equivalentes*).

Relações de equivalência

- Suponha dois horários (inteiros) a=20:00 e b=68:00. Estes horários estão relacionados pela relação "congruência módulo 24", pois:

  $$24 \mid (68-20) \quad \text{ou} \quad 68=20+k.24$$

- "Um inteiro a está relacionado a um inteiro b se ambos tiverem o mesmo resto quando divididos por 24".
  - pode-se mostrar que esta relação é reflexiva, simétrica e transitiva.

- Conclui-se que esta relação subdivide o conjunto dos inteiros em 24 classes diferentes.

- Como o que nos interessa realmente é só o momento do dia, só precisamos saber a que *classe* pertence um valor dado.

Relações de equivalência

- Definição: Uma relação R sobre um conjunto A é chamada uma ***relação de equivalência*** se ela for uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

- Dois elementos relacionados por uma relação de equivalência são ditos ***equivalentes***.

Relações de equivalência

- **Exemplo1**: Sejam $A=\{1,2,3,4\}$ e
  $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,3),(3,3),(4,4)\}$.

  R é uma relação de equivalência, pois satisfaz às 3 propriedades:
  - Reflexividade: R é reflexiva, pois $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}\subseteq R$
  - Simetria: nota-se que $a\in R(b) \Leftrightarrow b\in R(a)$
  - Transitividade: nota-se que: $b\in R(a)$ e $c\in R(b) \Rightarrow c\in R(a)$

- **Exemplo2**: Seja A=Z o conjunto dos inteiros e seja $R=\{(a,b)\in A\times A \mid a\leq b\}$.

  R não é uma relação de equivalência, pois:
  - Reflexividade: R é reflexiva, pois $a\leq a$, $\forall a\in A$
  - Simetria: $b\leq a$ não segue de $a\leq b \Rightarrow$ R não é simétrica
  - Transitividade: se $a\leq b$ e $b\leq c \Rightarrow a\leq c$, portanto se aRb e bRc então aRc. Assim, R é transitiva.

Relações de equivalência

- <u>Exemplo3</u>: Seja m um inteiro positivo > 1. Mostre que a relação

  $$R=\{ (a,b) \mid a \equiv b \pmod{m} \}$$

  é uma ***relação de equivalência*** sobre o conjunto dos inteiros.

  - Lembre que: $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m|(a-b)$

  – <u>Reflexividade</u>: $a \equiv a \pmod{m}$ pois $a-a=0$ e $m|0 \Rightarrow aRa$

  – <u>Simetria</u>: se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a-b=k.m \Rightarrow b-a=(-k).m$
  $\Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$

  assim: $aRb \Rightarrow bRa$

  – <u>Transitividade</u>: suponha que $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$
  $\Rightarrow$ m divide tanto (b-a) como (c-b)
  $\Rightarrow a-b=k.m$ e $b-c=l.m$
  $\Rightarrow a-c = (a-b)+(b-c) = (k+l).m$
  $\Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$
  portanto, aRb e $bRc \Rightarrow aRc$ e R é transitiva.

Relações de equivalência e partições

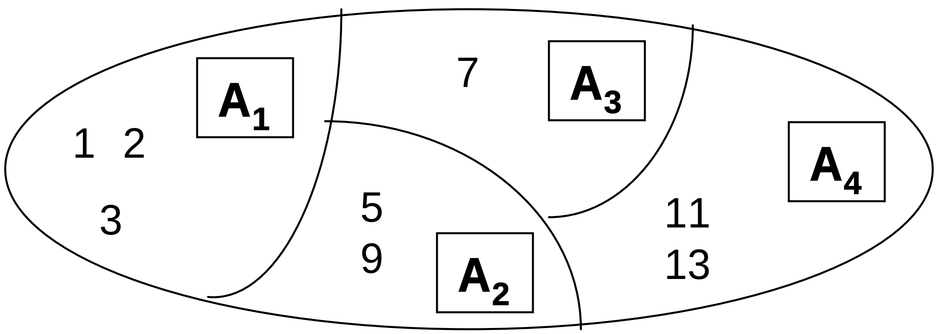
- <u>Definição</u>:

  Uma ***partição*** ou ***conjunto quociente*** de um conjunto não vazio A é uma coleção ***P*** de subconjuntos não vazios de A tal que:
  1. Cada elemento de A pertence a algum dos conjuntos em ***P***
  2. Se A_1 e A_2 são elementos distintos em ***P***, então $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

  – Os conjuntos em P são chamados de ***blocos*** ou ***células*** da partição.

Relações de equivalência e partições

- Exemplo: $A=\{1,2,3,5,7,9,11,13\}$



- $A_1=\{1,2,3\}$ $A_2=\{5,9\}$ $A_3=\{7\}$ $A_4=\{11,13\}$
- $\boldsymbol{P}=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ é uma partição do conjunto A em 4 blocos.

Relações de equivalência e partições

- Uma partição ***P*** pode ser usada para construir uma relação de equivalência sobre A.
- Teorema: Seja ***P*** uma partição sobre um conjunto A. Defina uma relação R sobre A como:

  aRb se e somente se a e b são membros do mesmo bloco.

  Então R é uma *relação de equivalência* sobre A (determin. por ***P***).

Prova:

(1) Se $a \in A$, então a está no mesmo bloco que ele mesmo, de modo que aRa $\Rightarrow$ R é reflexiva

(2) Se aRb então a e b estão no mesmo bloco, logo bRa $\Rightarrow$ R é simétrica

(3) Se aRb e bRc, então a, b e c estão no mesmo bloco ***P***, logo aRc. Portanto: aRb e bRc $\Rightarrow$ aRc (R é transitiva).

Relações de equivalência e partições

- Exemplo: Seja $A=\{1,2,3,4\}$ e considere uma partição $\boldsymbol{P}=\{\{1,2,3\}, \{4\}\}$. Ache a relação de equivalência determinada por $\boldsymbol{P}$.

- Solução: Os blocos de $\boldsymbol{P}$ são $\{1,2,3\}$ e $\{4\}$. Para construir esta relação, cada elemento do bloco deve estar relacionado com todos os outros elementos no mesmo bloco e somente estes elementos. Assim:

$$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,4)\}$$

Relações de equivalência e partições

- **Teorema**: Seja R uma relação de equivalência sobre A e seja ***P*** a coleção de todos os conjuntos relativos R(a), para todo $a \in A$. Então ***P*** é uma partição de A, e R é a relação de equivalência determinada por ***P***.

  – Se R é uma relação de equivalência sobre A, então os conjuntos R(a) são chamados de *classes de equivalência* de R.

  – A partição ***P*** construída no teorema acima consiste portanto de todas as classes de equivalência de R e esta partição é denotada por A/R.

  – Partições de um conjunto A também são chamadas de "conjuntos quocientes" de A, e a notação A/R lembra que ***P*** é o conjunto quociente de A que é construído e determinado por R.

Relações de equivalência e partições

- Exemplo1: Seja A={1,2,3,4} e seja a relação de equivalência R sobre A definida por

  R={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,3), (3,3), (4,4)}.

  Determine A/R (todas as classes de equivalência de R).

- Solução: R(1) = {1,2}
  R(2) = {1,2}
  R(3) = {3,4}
  R(4) = {3,4}

  $\Rightarrow$ A/R = {{1,2} , {3,4}}

Relações de equivalência e partições

- Exemplo2: Seja $A=\mathbf{Z}$ e seja $R=\{(a,b)\in A\times A \mid 2|(a-b)\}$ (como já visto, R é uma relação de equivalência). Determinar A/R.

- Solução:
  - $R(0)=\{\ldots -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ (O conjunto dos inteiros pares, pois 2 divide a diferença entre quaisquer dois inteiros pares.)
  - $R(1)=\{ \ldots -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5, \ldots\}$ (O conjunto dos inteiros ímpares, pois 2 divide a diferença entre quaisquer dois inteiros ímpares.)
  - Assim, A/R consiste do conjunto dos inteiros pares e do conjuto dos inteiros ímpares, isto é, $A/R=\{R(0), R(1)\}$.

Procedimento geral para determinar partições A/R

- ***<u>Passo 1</u>.*** *Escolha um elemento qualquer de A, digamos a, e calcule a classe de equivalência R(a).*

- ***<u>Passo 2</u>.*** *Se $R(a) \neq A$, escolha um elemento b não incluído em R(a) e calcule a classe de equivalência R(b).*

- ***<u>Passo 3</u>.*** *Se A não é igual a união das classes de equivalência previamente calculadas, então escolha um elemento x de A que não esteja em nenhuma dessas classes de equivalência e calcule R(x).*

- ***<u>Passo 4</u>.*** *Repita o passo 3 até que todos os elementos de A estejam em classes de equivalência já calculadas. Se A é infinito este processo pode continuar indefinidamente. Neste caso, continue até que apareça um padrão que permita descrever ou dar uma fórmula para todas as classes de equivalência*

Relações de equivalência - Exercícios

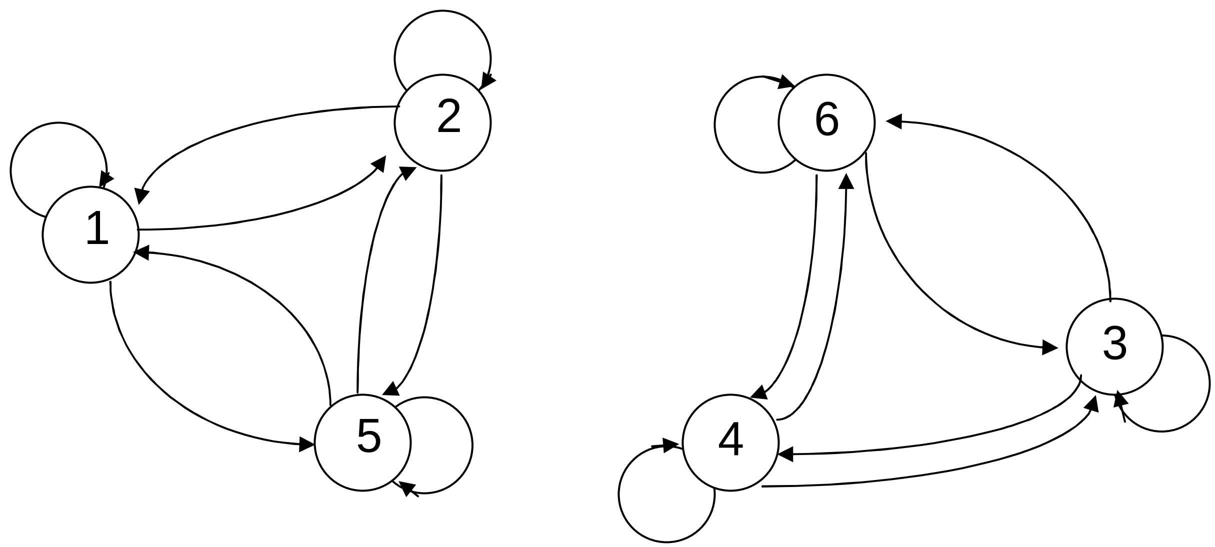
- Exercício 1: Seja A={a,b,c}. Determine se a relação R cuja matriz é dada abaixo é uma relação de equivalência.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Resp.: SIM. (Por quê?)

Relações de equivalência - Exercícios

- <u>Exercício 2</u>: Determine se a relação R cujo dígrafo é dado abaixo é uma relação de equivalência.



- <u>Resp.</u>: SIM. (Por quê?)

Relações de equivalência - Exercícios

- Exercício 3: Se {{1,3,5}, {2,4}} é uma partição do conjunto A={1,2,3,4,5}, determine a relação de equivalência R correspondente.

- Resp.:

$$R=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$$