4- DIAGONALIZAÇÃO DE AUTOVETORES

4.1- BASE DE AUTOVETORES

Seja T: $V \to V$ um operador linear, nosso objetivo é conseguir uma base B de V na qual a matriz do operador linear nesta base $\left([T]_B^B\right)$ seja uma matriz diagonal, que é a forma mais simples possível de se representar um operador.

Teorema: Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Prova: Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ autovalores distintos. Queremos provar que $v_1, v_2, \ldots, v_r$ são LI.
Seja $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_rv_r = 0$. Aplicando a esta equação a transformação $T - \lambda_i I$.
Usando a linearidade de T e lembrando que $T(v_i) = \lambda_i v_i$ e $Iv_i = v_i$ para $i \in IN^*$.
Como $v \neq 0$. Logo $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$. Portanto $v_1, v_2, \ldots, v_r$ são LI.

Corolário: Se V é um espaço vetorial de dimensão n e T: $V \to V$ é um operador linear que possui n autovalores distintos, então V possui uma base cujos vetores são todos autovetores de T.

Em outras palavras, se conseguirmos encontrar tantos autovalores distintos quanto for a dimensão do espaço, podemos garantir a existência de uma base de autovetores.

Exemplos:

1- Dada a transformação T: $IR^2 \to IR^2$, definida por $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$ cuja matriz em relação à base canônica α é

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Encontre uma base B de autovetores e observe de que tipo é a matriz $[T]_B^B$.

2- Seja a transformação T: $IR^3 \rightarrow IR^3$, cuja matriz em relação à base canônica α é

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Encontre uma base B de autovetores e a matriz $[T]_B^B$.

Dada uma transformação linear qualquer T: $V \rightarrow V$, se conseguirmos uma base B = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ formada por autovetores de T, então, como

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n \\ T(v_2) &= 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + 0v_n \\ &\;\;\vdots \\ T(v_n) &= 0v_1 + 0v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

a matriz $[T]_B^B$ será uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são os autovalores λ_i, isto é,

$$[T]_B^B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Observação: 1- Não é necessário que os λ_i sejam distintos.
2- Um autovalor aparecerá na diagonal tantas vezes quantas forem os autovetores LI a ele associados.

4.2- OPERADOR DIAGONALIZÁVEL

Def.: Seja T: $V \to V$ um operador linear. T é um operador diagonalizável se existe uma base de V cujos elementos são autovetores de T.

Ex.: Seja a transformação T: $IR^3 \to IR^3$, cuja matriz em relação à base canônica α é

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Encontre uma base B de autovetores e a matriz $[T]_B^B$.

Exercícios

1- No exercício (1) da pág. 47, verifique quais os operadores são diagonalizáveis.

2- Sejam T: $IR^3 \to IR^3$ linear, α = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}, a base canônica de IR^3, B = {(0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 1)} e

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

a) Encontre o polinômio característico de T, os autovalores de T e os autovetores correspondentes.
b) Ache $[T]_B^B$ e o polinômio característico.

RESPOSTAS

1- a, b e c são diagonalizáveis. 2- a) $p(\lambda) = (2 - \lambda)(3 + \lambda)^2$; $\lambda_1 = 2$, $v_1 = (x, 0, 0)$ e $\lambda_2 = -3$, $v_2 = (0, y, 0)$. b) $p(\lambda) = (2 - \lambda)(3 + \lambda)^2$.

5- OPERADORES LINEARES

5.1- TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES

5.1.1- Matriz Simétrica

Def.: É uma matriz quadrada de ordem *n*, onde $a_{ij} = a_{ji}$, ou seja, $A = A^T$.

Exemplo: $A = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

5.1.2- Matriz Anti-Simétrica

Def.: É uma matriz quadrada de ordem *n*, onde $a_{ij} = -a_{ji}$, ou seja, $A^T = -A$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad -A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

5.1.3- Matriz Ortogonal

Def.: É uma matriz quadrada de ordem *n*, cuja inversa coincide com a transposta, ou seja, $A^{-1} = A^T$, ou ainda $A.\,A^T = A^T.A = I$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e $A.A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

5.2- OPERADORES INVERSÍVEIS

Def.: Um operador $T: V \to V$ associa a cada vetor $v \in V$ um vetor $T(v) \in V$. Se por meio de outro operador *S* for possível inverter essa correspondência, de tal modo que a cada vetor transformado $T(v)$ se associe o vetor de partida *v*, diz-se que *S* é operador inverso de T, indicado por T^{-1}.

Quando o operador linear T admite a inversa T^{-1}, diz-se que T é inversível, invertível, regular ou não-singular.

5.2.1- **Propriedades**: Seja T: $V \to V$ um operador linear.

1- Se T é inversível e T^{-1} é a sua inversa, então: $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$
2- T é inversível se, e somente se, N(T) = {0}.
3- Se T é inversível, T transforma base em base, isto é, se B é uma base de *V*, T(B) também é base de *V*.
4- Se T é inversível e B uma base de *V*, então $T^{-1}: V \to V$ é linear e: $[T^{-1}]_B = ([T]_B)^{-1}$, isto é, a matriz do operador linear inverso numa certa base B é a inversa da matriz do operador T nessa mesma base.

Exemplos:

1- Seja o operador linear em IR^2 definido por $T(x, y) = (4x - 3y, -2x + 2y)$.

a) Mostrar que T é inversível.
b) Encontrar uma regra para T^{-1} como a que define T.

2- Verificar se o operador linear T: $IR^3 \to IR^3$ definido por T(1, 1, 1) = (1, 0, 0), T(-2, 1, 0) = (0, -1, 0) e T(-1, -3, -2) = (0, 1, -1) é inversível e, em caso afirmativo, determinar $T^{-1}(x, y, z)$.