INE5403 - Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

6) Relações de Ordenamento

- 6.1) Conjuntos Parcialmente Ordenados (Posets)
- 6.2) Extremos de Posets
- 6.3) Reticulados
- 6.4) Álgebras Booleanas Finitas
- 6.5) Funções Booleanas

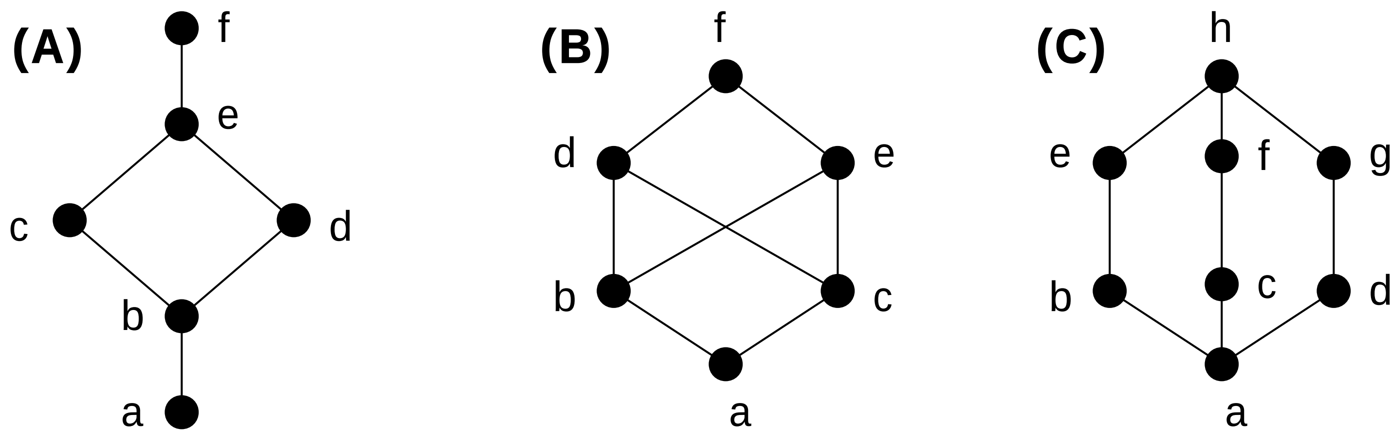
Reticulados (*lattices*)

Definição: Um poset (L,≤) é chamado de ***reticulado*** se ***todo*** par de elementos {a,b} possui tanto uma menor cota superior (LUB) como uma maior cota inferior (GLB).

- Reticulados possuem muitas propriedades especiais.
- São usados em muitas aplicações diferentes tais como modelos de fluxo de informação.
- Eles também têm um papel importante em álgebra booleana.
- Observação: denota-se LUB({a,b}) por $a \vee b$ (operação de *junção*) e denota-se GLB({a,b}) por $a \wedge b$ (operação de *encontro*).

Reticulados (*lattices*)

Exemplo: Determine se os posets representados por cada um dos diagramas de Hasse abaixo são reticulados.



- Os posets (A) e (C) são reticulados, pois cada par de elementos tem tanto uma LUB como uma GLB.
- Já o poset (B) não é um reticulado, pois os elementos b e c não possuem menor cota superior $\rightarrow$ note que d, e, f são cotas superiores, mas nenhum destes 3 elementos precede os outros 2 com respeito ao ordenamento deste poset.

Reticulados (*lattices*)

<u>Exemplo</u>: Determine se $(P(S),\subseteq)$ é um reticulado, onde S é um conjunto.

- Sejam A e B dois subconjuntos de S. Então:
  - a LUB (junção) de A e B é a sua união $A\cup B$ e
  - a GLB (encontro) de A e B é a sua intersecção $A\cap B$
  - logo, $(P(S),\subseteq)$ é um reticulado.

<u>Exemplo</u>: Considere o poset $(\mathbf{Z}^+,\leq)$, onde $a \leq b$ se e somente se $a|b$. Então $(\mathbf{Z}^+,\leq)$ é um reticulado em que as operações de junção e encontro de a e b são, respectivamente:

$$a\vee b = \text{mmc}(a,b) \qquad \text{e} \qquad a\wedge b = \text{mdc}(a,b)$$

Reticulados (*lattices*)

<u>Exemplo</u>: Determine se os posets ({1,2,3,4,5},|) e ({1,2,4,8,16},|) são reticulados.

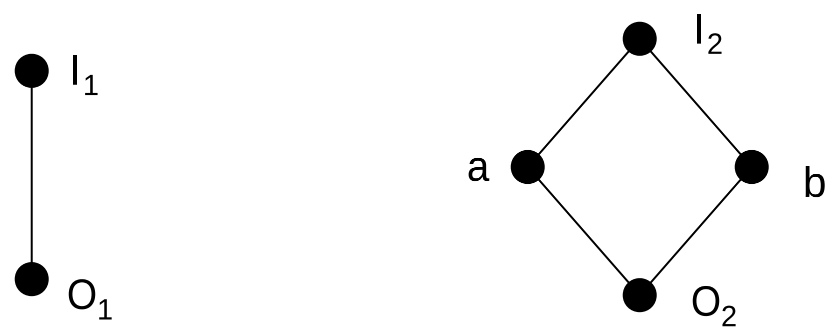
- <u>Solução</u>:
  - Uma vez que 2 e 3 não possuem cotas superiores em ({1,2,3,4,5},|), eles certamente não têm uma menor cota superior e <u>*o primeiro poset não é um reticulado*</u>.
  - Cada 2 elementos do segundo poset possuem tanto uma menor cota superior como uma maior cota inferior.
    $\rightarrow$ LUB de 2 elementos neste poset: maior deles
    $\rightarrow$ GLB de 2 elementos neste poset: menor deles
    $\rightarrow$ logo, <u>*o 2º poset é um reticulado*</u>.

Reticulados (*lattices*)

Teorema: Se ($\mathbf{L}_1,\leq_1$) e ($\mathbf{L}_2,\leq_2$) são reticulados, então ($\mathbf{L},\leq_3$) é um reticulado, onde $L=L_1\times L_2$ e a ordem parcial $\leq_3$ é a *ordem parcial produto* definida por

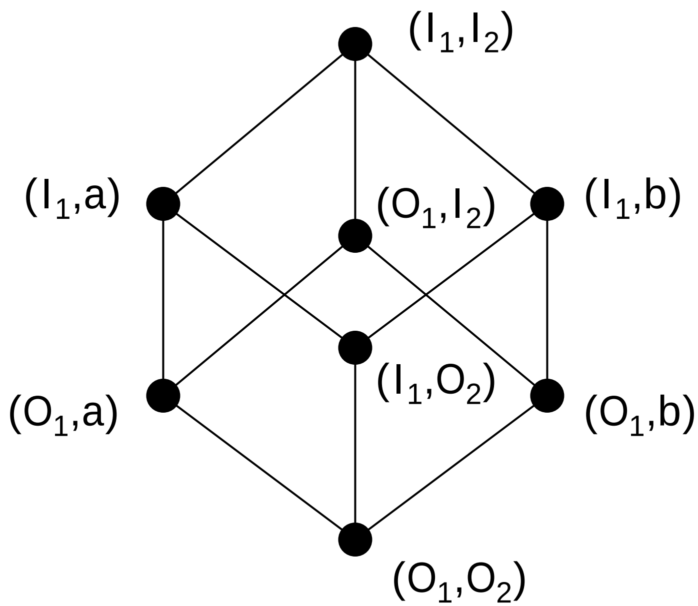
$$(a,b) \leq_3 (a',b'), \quad \text{se} \quad a\leq_1 a' \text{ em } L_1 \quad \text{e} \quad b\leq_2 b' \text{ em } L_2 .$$

- Exemplo: Sejam L_1 e L_2 os reticulados representados pelos diagramas de Hasse abaixo:



Reticulados (*lattices*)

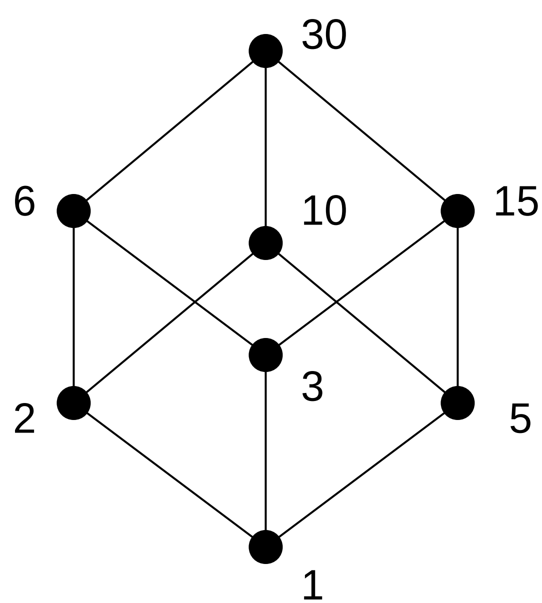
- <u>Exemplo (cont.)</u>: Então $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2$ é o reticulado:



Sub-reticulados (*sublattices*)

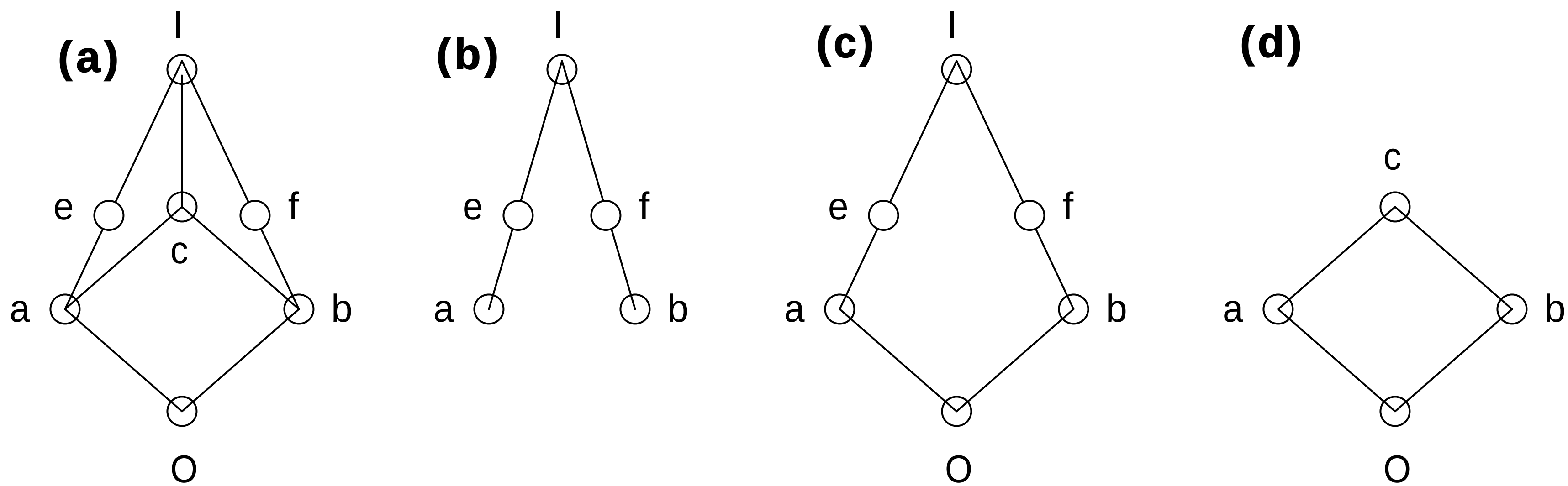
Definição: Seja $(L,\leq)$ um reticulado. Um subconjunto S de L, $S \subseteq L$, é chamado de um ***sub-reticulado*** de L se $a \vee b \in S$ e $a \wedge b \in S$ sempre que $a \in S$ e $b \in S$.

Exemplo: Os reticulados $(D_n,|)$, de todos os divisores de n com a relação de divisibilidade, são sub-reticulados do reticulado $(\mathbf{Z}^+,|)$.



Sub-reticulados (*sublattices*)

- Exemplo: Considere o reticulado L mostrado na fig. (a).



- O subconjunto parcialmente ordenado (b) não é um sub-reticulado de L pois $a \wedge b \notin S_b$ e $a \vee b \notin S_b$.
- O subconjunto parcialmente ordenado (c) não é um sub-reticulado de L pois $a \vee b = c \notin S_b$ $\rightarrow$ entretanto, S_c é um reticulado por si mesmo.
- O subconjunto parcialmente ordenado (d) é um sub-reticulado de L.

Isomorfismo entre reticulados

Definição:

Se $f: L_1 \rightarrow L_2$ é um isomorfismo do poset $(L_1, \leq_1)$ para o poset $(L_2, \leq_2)$, então L_1 é um reticulado se e somente se L_2 for um reticulado (aplicação de teorema visto).

- De fato, se a e b são elementos de L_1 , então
  $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ e $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$
- L_1 e L_2 são reticulados isomórficos.

Propriedades de reticulados

- Relembrando os significados de $a \vee b$ e $a \wedge b$:

1. $a \leq a \vee b$ e $b \leq a \vee b$ ($a \vee b$ é uma cota superior de a e de b);
2. se $a \leq c$ e $b \leq c$, então $a \vee b \leq c$ ($a \vee b$ é a ***menor*** cota superior de a e de b);

- Analogamente:

1'. $a \wedge b \leq a$ e $a \wedge b \leq b$ ($a \wedge b$ é uma cota inferior de a e de b);

2'. se $c \leq a$ e $c \leq b$, então $c \leq a \wedge b$ ($a \wedge b$ é a ***maior*** cota inferior de a e de b).

Propriedades de reticulados

Teorema: Seja L um reticulado. Então, para todo a e b em L:

a) $a \vee b = b \iff a \leq b$

b) $a \wedge b = a \iff a \leq b$

c) $a \wedge b = a \iff a \vee b = b$

Prova (a):

($\rightarrow$) suponha que $a \vee b = b$. Como $a \vee b$ é o LUB({a,b}), tem-se que $a \leq a \vee b = b$;

($\leftarrow$) como $a \leq b$, temos que b é uma cota superior de {a,b} e, pela definição de LUB, temos que $a \vee b \leq b$. Mas como também $a \vee b$ é uma cota superior de {a,b}, temos que $b \leq a \vee b$ e portanto $a \vee b = b$.

Propriedades de reticulados

Teorema: Seja L um reticulado. Então, para todo a e b em L:

a) $a \vee b = b \iff a \leq b$

b) $a \wedge b = a \iff a \leq b$

c) $a \wedge b = a \iff a \vee b = b$

Prova (b):

($\rightarrow$) suponha que $a \wedge b = a$. Como $a \wedge b$ é o GLB({a,b}), tem-se que $a = a \wedge b \leq b$;

($\leftarrow$) como $a \leq b$, temos que a é uma cota inferior de {a,b} e, pela definição de GLB, temos que $a \leq a \wedge b$. Mas como também $a \wedge b$ é uma cota inferior de {a,b}, temos que $a \wedge b \leq a$ e portanto $a \wedge b = a$.

Propriedades de reticulados

Teorema: Seja L um reticulado. Então, para todo a e b em L:

a) $a \vee b = b \Leftrightarrow a \leq b$

b) $a \wedge b = a \Leftrightarrow a \leq b$

c) $a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$

Prova (c):

De (a) temos que $a \vee b = b \Leftrightarrow a \leq b$, mas por (b) $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$, portanto:

$$a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

Propriedades de reticulados

Teorema: Seja L um reticulado. Então:

a) $a \vee a = a$ b) $a \wedge a = a$	Idempotência
a) $a \vee b = b \vee a$ b) $a \wedge b = b \wedge a$	Comutatividade
a) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ b) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	Associatividade
a) $a \vee (a \wedge b) = a$ b) $a \wedge (a \vee b) = a$	Absorção

Propriedades de reticulados

Teorema: Seja L um reticulado. Então para todo a,b,c $\in$ L:

1. Se $a \leq b$, então
   a) $a \vee c \leq b \vee c$
   b) $a \wedge c \leq b \wedge c$

2. $a \leq c$ e $b \leq c \iff a \vee b \leq c$

3. $c \leq a$ e $c \leq b \iff c \leq a \wedge b$

4. Se $a \leq b$ e $c \leq d$, então
   a) $a \vee c \leq b \vee d$
   b) $a \wedge c \leq b \wedge d$

Tipos especiais de reticulados

Definição: Um reticulado L é dito limitado se L tem um maior elemento **I** e um menor elemento **O**.

Exemplos:

- **Z**$^+$, sob a ordem parcial de divisibilidade, tem um menor elemento mas não tem um maior elemento $\Rightarrow$ não limitado.
- **Z**, sob a ordem parcial “menor ou igual a” não tem nem maior nem menor elemento $\Rightarrow$ não limitado.
- O reticulado (2^S,$\subseteq$), de todos os subconjuntos de um conjunto finito S, é limitado:

$$\mathbf{I}=S \quad e \quad \mathbf{O}=\{\ \}$$

Tipos especiais de reticulados

- <u>Nota</u>: Se L é um reticulado limitado, então, $\forall a \in L$:

    a) $\mathbf{O} \leq a \leq \mathbf{I}$

    b) $a \vee \mathbf{O} = a$

    c) $a \wedge \mathbf{O} = \mathbf{O}$

    d) $a \vee \mathbf{I} = \mathbf{I}$

    e) $a \wedge \mathbf{I} = a$

Teorema: Seja $L=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$ um reticulado finito. Então L é limitado.

- <u>Prova</u>:

    O maior elemento de L é $a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \ldots \vee a_n$

    O menor elemento de L é $a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \ldots \wedge a_n$

Tipos especiais de reticulados

Definição: Um reticulado é chamado <u>distributivo</u> se, para quaisquer elementos $a,b,c \in L$, valem as seguintes regras:

a) $a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

b) $a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)$

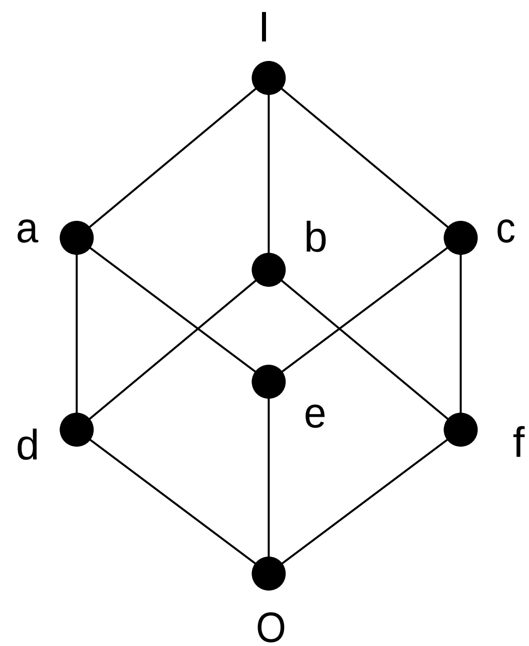
<u>Nota</u>: As leis distributivas valem quando quaisquer 2 dos elementos a, b, ou c são iguais, ou quando qualquer 1 dos elementos é **O** ou **I**.

– Esta observação reduz o número de casos que devem ser verificados na determinação da distributividade de um reticulado.

– Entretanto, a verificação da distributividade é geralmente trabalhosa.

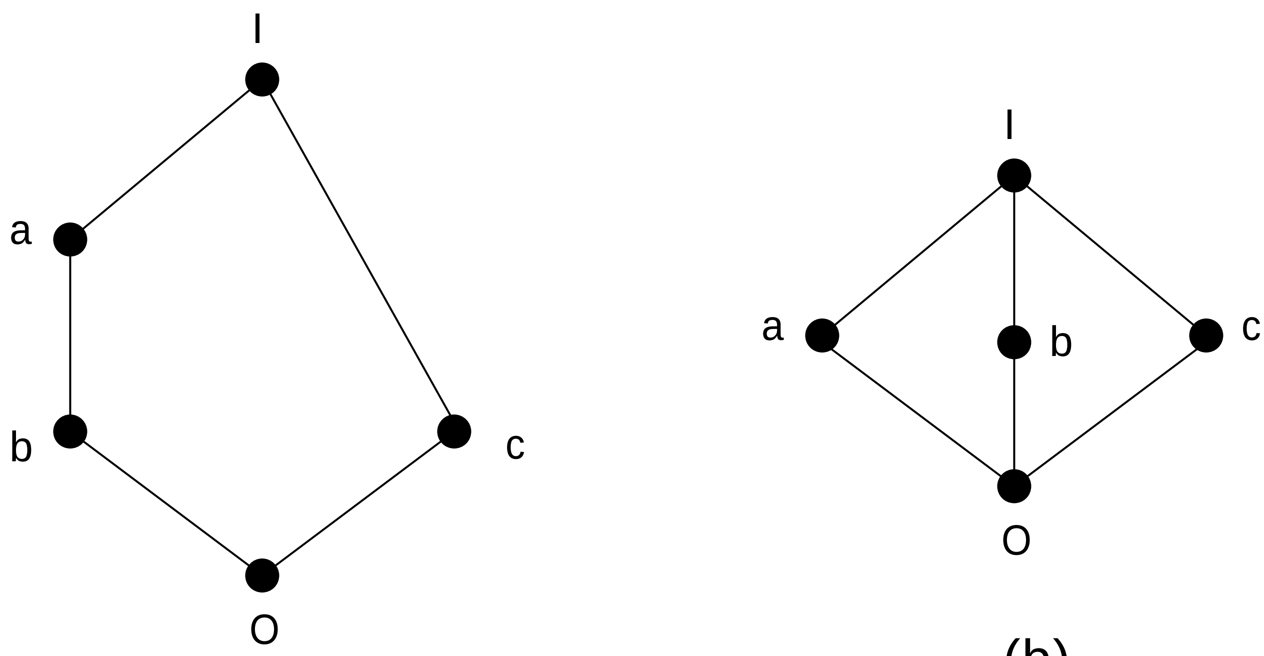
Reticulados distributivos

- Exemplo: O reticulado mostrado abaixo é distributivo:
  - a lei de distributividade vale para todos os trios ordenados escolhidos entre os elementos a,b,c,d,e,f.



Reticulados distributivos

- <u>Exemplo</u>: Mostre que os reticulados mostrados abaixo não são distributivos:



(a) (b)

Reticulados distributivos

- Exemplo (cont.): Mostre que os reticulados não são distributivos:

- Reticulado (a):
  - Temos: $a \wedge (b \vee c) = a \wedge \mathbf{I} = a$
  - enquanto: $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee \mathbf{O} = b$

- Reticulado (b):
  - Observe que: $a \wedge (b \vee c) = a \wedge \mathbf{I} = a$
  - enquanto: $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = \mathbf{O} \vee \mathbf{O} = \mathbf{O}$

Teorema: Um reticulado L é não-distributivo se e somente se contiver um sub-reticulado que seja isomórfico a um dos 2 reticulados do exemplo anterior.

Tipos especiais de reticulados

Definição: Seja L um reticulado limitado com maior elemento **I** e menor elemento **O**, e seja $a \in L$. Um elemento $a' \in L$ é chamado de um <u>complemento</u> de a se:

$$a \vee a' = \mathbf{I} \qquad \text{e} \qquad a \wedge a' = \mathbf{O}.$$

- Observe que $\mathbf{O}' = \mathbf{I}$ e $\mathbf{I}' = \mathbf{O}$.

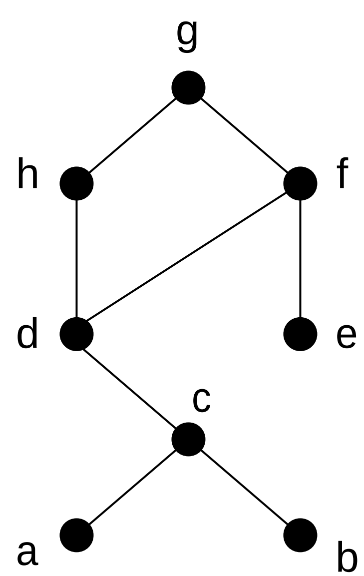
- <u>Exemplo</u>: O reticulado $(2^S, \subseteq)$ é tal que todo elemento tem um complemento, pois se $A \in 2^S$, então o seu complementar tem as propriedades:

  $$A \vee A' = S\ (= \mathbf{I}) \qquad \text{e} \qquad A \wedge A' = \{\ \}\ (= \mathbf{O})$$

  – ele também é distributivo, pois as operações de união e intersecção satisfazem às leis de distributividade para reticulados.

Reticulados (*lattices*)

- Exercício: Determine se o diagrama de Hasse abaixo representa um reticulado.



Reticulados (*lattices*)

- Exercício: Determine se o poset A={2,3,6,12,24,36,72}, sob a relação de divisibilidade (|), representa um reticulado.

- Exercício: Determine se o reticulado abaixo é distributivo e também se os seus elementos possuem complementos.