

INE5403 - Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

4) Relações

4.1) Relações e Dígrafos

4.2) Caminhos em Relações e Dígrafos

4.3) Propriedades de Relações

4.4) Relações de Equivalência

4.5) Manipulação e Fecho de Relações

Combinação de relações

- Exemplo: Seja $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{1,2,3,4\}$. As relações $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ e $R_2=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$ podem ser combinadas para obter:

$$R_1 \cup R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (3,3)\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(1,1)\}$$

$$R_1 - R_2 = \{(2,2), (3,3)\}$$

$$R_2 - R_1 = \{(1,2), (1,3), (1,4)\}$$

Manipulação de relações (operações)

- Da mesma forma que nós podemos manipular números usando as regras da álgebra, podemos também definir operações que nos permitam operar com relações.
- Com estas operações nós podemos modificar, combinar e refinar relações existentes para produzir relações novas.
- Note que, uma vez que relações de A para B são subconjuntos de $A \times B$, duas relações de A para B podem ser combinadas de todos os modos em que se puder combinar dois conjuntos.

Operações entre relações

- Definição: Sejam R e S duas relações de A em B. Então as seguintes relações são definidas:

1) \bar{R} : a **relação complementar** de R é definida como:

$$(a,b) \in \bar{R} \Leftrightarrow (a,b) \notin R$$

- Nota: A *matriz da relação* \bar{R} é obtida a partir da matriz de R trocando-se todos os 0's por 1's e vice-versa:

$$M_{\bar{R}} = \overline{M_R}$$

Operações entre relações

2) $R \cap S$: a **relação intersecção** de R com S é definida como:

$$(a,b) \in R \cap S \Leftrightarrow (a,b) \in R \wedge (a,b) \in S$$

- Nota: $M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S$ (operação matricial lógica " \wedge " sobre as matrizes booleanas M_R e M_S).

3) $R \cup S$: a **relação união** de R com S é definida como:

$$(a,b) \in R \cup S \Leftrightarrow (a,b) \in R \vee (a,b) \in S$$

- Nota: $M_{R \cup S} = M_R \vee M_S$ (operação matricial lógica " \vee " sobre as matrizes booleanas M_R e M_S).

Operações entre relações

4) R^{-1} : a **relação inversa** de R é definida por:

$$(a,b) \in R^{-1} \Leftrightarrow (b,a) \in R$$

– Nota: $M_{R^{-1}} = (M_R)^T$ (transposta da matriz M_R)

Operações entre relações

- Exemplo: Sejam $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{a,b,c\}$ e R e S de A em B definidas por:

$$R=\{(1,a),(1,b),(2,b),(2,c),(3,b),(4,a)\}$$

$$S=\{(1,b),(2,c),(3,b),(4,b)\}$$

Computar a) R b) $R \cap S$ c) $R \cup S$ d) R^{-1}

- Solução:

$$\text{a) } A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c), \\ (4,a),(4,b),(4,c)\}$$

$$\Rightarrow \bar{R} = \{(1,c),(2,a),(3,a),(3,c),(4,b),(4,c)\}$$

$$\text{b) } R \cap S = \{(1,b),(2,c),(3,b)\}$$

$$\text{c) } R \cup S = \{(1,a),(1,b),(2,b),(2,c),(3,b),(4,a),(4,b)\}$$

$$\text{d) } R^{-1} = \{(a,1),(b,1),(b,2),(c,2),(b,3),(a,4)\}$$

Operações entre relações

- Exemplo: Sejam $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{a,b,c\}$ e R e S de A em B definidas por:

$$R=\{(1,a),(1,b),(2,b),(2,c),(3,b),(4,a)\}$$

$$S=\{(1,b),(2,c),(3,b),(4,b)\}$$

Calcular: a) M_R b) M_S c) $M_{\bar{R}}$ d) $M_{R^{-1}}$ e) $M_{R \cap S}$ f) $M_{R \cup S}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \bar{R}=\{(1,c),(2,a),(3,a),(3,c),(4,b),(4,c)\} \Rightarrow M_{\bar{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Operações entre relações

- Exemplo: Sejam $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{a,b,c\}$ e R e S de A em B definidas por:

$$R=\{(1,a),(1,b),(2,b),(2,c),(3,b),(4,a)\}$$

$$S=\{(1,b),(2,c),(3,b),(4,b)\}$$

(Continuação):

d) $R^{-1}=\{(a,1),(b,1),(b,2),(c,2),(b,3),(a,4)\}$

$$\Rightarrow M_{R^{-1}} = (M_R)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e) $R \cap S = \{(1,b),(2,c),(3,b)\}$

$$M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações entre relações

- Exemplo: Sejam $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{a,b,c\}$ e R e S de A em B definidas por:

$$R=\{(1,a),(1,b),(2,b),(2,c),(3,b),(4,a)\}$$

$$S=\{(1,b),(2,c),(3,b),(4,b)\}$$

(Continuação):

$$f) R \cup S = \{(1,a),(1,b),(2,b),(2,c),(3,b),(4,a),(4,b)\}$$

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Manipulação de relações

Teorema: Suponha que R e S são relações de A em B .

- (a) Se $R \subseteq S$, então $R^{-1} \subseteq S^{-1}$
- (b) Se $R \subseteq S$, então $\overline{S} \subseteq \overline{R}$
- (c) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$ e $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
- (d) $\overline{(R \cap S)} = \overline{R} \cup \overline{S}$ e $\overline{(R \cup S)} = \overline{R} \cap \overline{S}$

Prova: os itens (b) e (d) são casos particulares de propriedades gerais de conjuntos.

- (a) Suponha que $R \subseteq S$ e seja $(a,b) \in R^{-1}$,
 - então $(b,a) \in R$ (definição de R^{-1})
 - segue que, como $R \subseteq S$, $(b,a) \in S$
 - como $(b,a) \in S$, segue que $(a,b) \in S^{-1}$ (definição de S^{-1})
 - portanto, $R^{-1} \subseteq S^{-1}$

Manipulação de relações

Prova da 1ra parte do item (c):

(c) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} \rightarrow$ temos que provar que:

i) $(R \cap S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cap S^{-1}$

ii) $R^{-1} \cap S^{-1} \subseteq (R \cap S)^{-1}$

i) $(R \cap S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cap S^{-1}$

- suponha que $(a,b) \in (R \cap S)^{-1}$.
- então $(b,a) \in R \cap S \Rightarrow (b,a) \in R$ e $(b,a) \in S$
- isto significa que $(a,b) \in R^{-1}$ e $(a,b) \in S^{-1}$
- de modo que $(a,b) \in R^{-1} \cap S^{-1}$

ii) $R^{-1} \cap S^{-1} \subseteq (R \cap S)^{-1}$ (converso)

- basta reverter os passos acima.

Manipulação de relações

- Exercício: Seja $A=B=\{1,2,3\}$ e

$$S=\{(1,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

$$T=\{(2,1),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

- Verifique o item (c) do teorema com S e T
- Verifique o item (d) do teorema com S e T
- NOTA:

$$(c) (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} \text{ e } (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$

$$(d) \overline{(R \cap S)} = \bar{R} \cup \bar{S} \text{ e } \overline{(R \cup S)} = \bar{R} \cap \bar{S}$$

Manipulação de relações

- Os teoremas a seguir mostram o efeito que as operações têm sobre algumas das propriedades vistas.

Teorema: Sejam R e S relações sobre A . Então:

- (a) Se R é reflexiva, então R^{-1} também o é;
- (b) R é reflexiva se e somente se \overline{R} é irreflexiva;
- (c) Se R e S são reflexivas, então $R \cap S$ e $R \cup S$ também o são.

Exemplo: Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e sejam: $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$
 $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$

- (a) $R^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 3)\} \Rightarrow R$ e R^{-1} são ambas reflexivas;
- (b) $\overline{R} = \{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$ é irreflexiva enquanto que R é reflexiva;
- (c) $R \cap S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$ e
 $R \cup S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$ são ambas reflexivas.

Manipulação de relações

Teorema: Seja R uma relação sobre A . Então:

- (a) R é simétrica se e somente se $R=R^{-1}$;
- (b) R é antissimétrica se e somente se $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$ (Δ : rel. de igualdade);
- (c) R é assimétrica se e somente se $R \cap R^{-1} = \emptyset$.

Teorema: Sejam R e S relações sobre A .

- (a) Se R é simétrica, então R^{-1} e \overline{R} também o são;
- (b) Se R e S são simétricas, então $R \cap S$ e $R \cup S$ também o são.

Manipulação de relações

Exemplo: Seja $A=\{1,2,3\}$ e considere as relações simétricas:

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$$

$$S=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$$

(a) $R^{-1}=\{(1,1),(2,1),(1,2),(3,1),(1,3)\}$

$$\overline{R}=\{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

→ ambas simétricas

(b) $R \cap S = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$

$$R \cup S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3)\}$$

→ ambas simétricas

Manipulação de relações

- Exercício: Seja $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ e sejam as relações de equivalência sobre A seguintes:

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$$

$$S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,4),(4,6),\\(5,5),(6,4),(6,6)\}$$

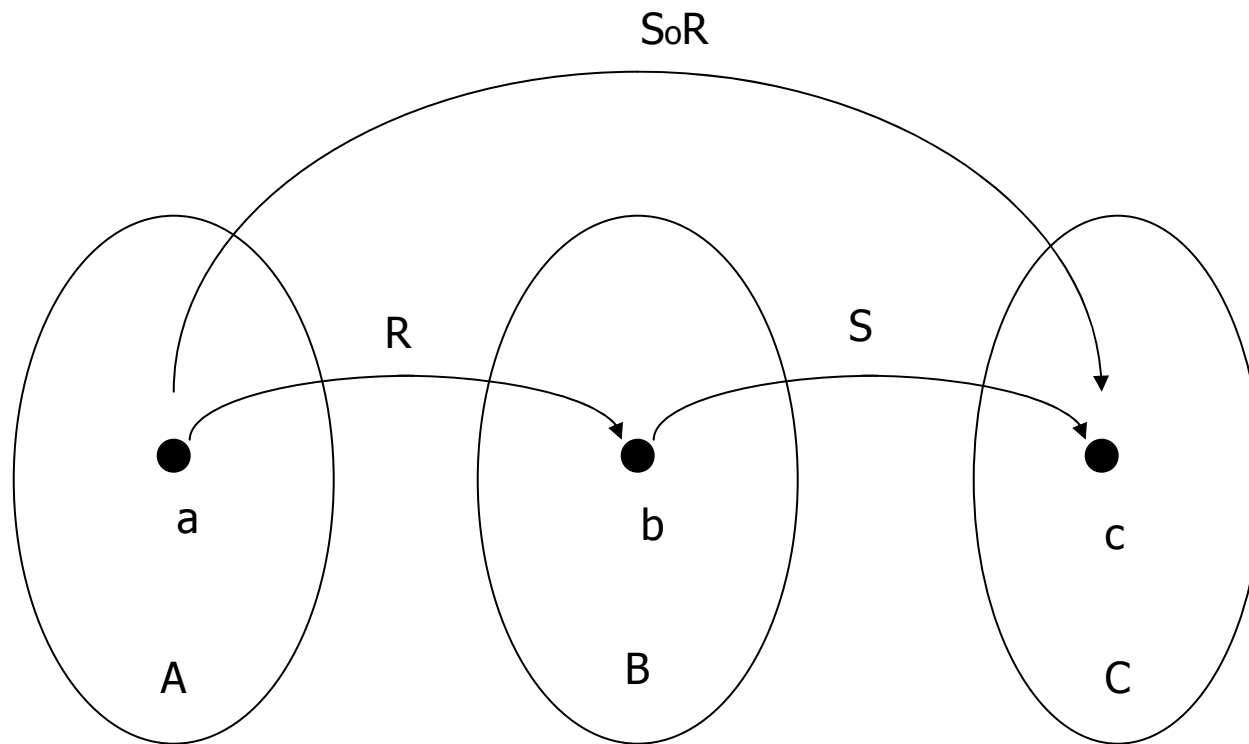
Compute a partição correspondente a $R \cap S$.

Composição de relações

Definição:

- Suponha que A , B e C são conjuntos, que R é uma relação de A em B e que S é uma relação de B em C .
- Então define-se a relação de composição de R e S , escrita como $S \circ R$, como segue:
 - Se $a \in A$ e $c \in C$, então $(a, c) \in S \circ R$ se e somente se existir algum $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$.
 - “ S em seguida a R ” (primeiro R , depois S).

Composição de relações



Composição de relações

- Exemplo: Sejam $A=\{1,2,3,4\}$ e as relações R e S sobre A definidas por:
 $R=\{(1,2),(1,1),(1,3),(2,4),(3,2)\}$
 $S=\{(1,4),(1,3),(2,3),(3,1),(4,1)\}$
 - Como $(1,2) \in R$ e $(2,3) \in S$, então temos que $(1,3) \in S \circ R$.
 - Também $(1,1) \in R$ e $(1,4) \in S$, assim $(1,4) \in S \circ R$.
 - Continuando com este processo, encontra-se que:
 $S \circ R=\{(1,4),(1,1),(1,3),(2,1),(3,3)\}$

Composição de relações

- O resultado a seguir mostra como computar conjuntos relativos para a composição de duas relações.
- Teorema: Sejam R uma relação de A em B e S uma relação de B em C . Então, se $A_1 \subseteq A$, temos que

$$(S \circ R)(A_1) = S(R(A_1))$$

- Ver prova no livro: teorema 6, pág. 138.

Composição de relações

- Teorema: Se R é uma relação de A em B e S é uma relação de B em C , então:

$$M_{S \circ R} = M_R \otimes M_S$$

- Além disto, se $|A|=m$, $|B|=n$ e $|C|=p$:
 - M_R tem ordem $m \times n$
 - M_S tem ordem $n \times p$
 - $M_{S \circ R}$ tem ordem $m \times p$

Composição de relações

- Exemplo: Seja $A=\{a,b,c\}$ e sejam R e S relações sobre A com matrizes:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R = \{(a,a),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,b)\}$$

$$\Rightarrow S = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,c)\}$$

$$\Rightarrow S \circ R = \{(a,a),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$$

– E a matriz da relação composta $S \circ R$ é:

$$M_{S \circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M_R \otimes M_S$$

Composição de relações

- Exercício: Refazer com matrizes o exemplo:

Sejam $A=\{1,2,3,4\}$ e as relações R e S sobre A definidas por:

$$R=\{(1,2),(1,1),(1,3),(2,4),(3,2)\}$$

$$S=\{(1,4),(1,3),(2,3),(3,1),(4,1)\}$$

o que leva a:

$$S \circ R=\{(1,1),(1,3),(1,4),(2,1),(3,3)\}$$

Composição de relações

- Teorema: Sejam A, B, C e D conjuntos e:
 - R uma relação de A em B,
 - S uma relação de B em C, e
 - T uma relação de C em D.

Então:

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$

- Prova no livro: teorema 7, pág. 140, usando matrizes.

Composição de relações

- Em geral: $S \circ R \neq R \circ S$
- Exemplo: Sejam:

$$A = \{a, b\}$$

$$R = \{(a, a), (b, a), (b, b)\}$$

$$S = \{(a, b), (b, a), (b, b)\}$$

Então:

$$S \circ R = \{(a, b), (b, a), (b, b)\}$$

enquanto que:

$$R \circ S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

Composição de relações

- Teorema: Sejam A, B e C conjuntos, R uma relação de A em B e S uma relação de B em C. Então:

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

- Prova: seja $c \in C$ e $a \in A$.
 - Então $(c,a) \in (S \circ R)^{-1} \Leftrightarrow (a,c) \in S \circ R$;
 - ou seja, se e somente se existe $b \in B$ com $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in S$;
 - isto é equivalente a ter $(b,a) \in R^{-1}$ e $(c,b) \in S^{-1}$
 - o que, pela definição de composição, significa que $(c,a) \in R^{-1} \circ S^{-1}$

Composição de relações

- Exercício: Seja $A=\{1,2,3,4\}$ e sejam

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,1),(4,2)\}$$

$$S=\{(3,1),(4,4),(2,3),(2,4),(1,1),(1,4)\}$$

- Calcule $R \circ R$.
- Calcule $S \circ R$.
- Calcule $R \circ S$.
- Calcule $S \circ S$.

Fechos de relações

- Se R é uma relação sobre A , pode acontecer que R não possua algumas propriedades importantes, tais como reflexividade, simetria e transitividade.
- Se R não possui uma propriedade particular, pode-se querer adicionar os pares relacionados em R até que ela adquira a propriedade desejada.
- Naturalmente, deseja-se adicionar o menor número de pares possível, de modo a obter a menor relação R_1 sobre A que possui a propriedade desejada.
- Eventualmente R_1 pode não existir \rightarrow se a relação R_1 existe, ela é chamada de o "fecho de R com respeito à propriedade em questão".

Fechos de relações

- Exemplo1: Seja $A=\{a,b,c\}$ e R sobre A definida por

$$R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(c,c)\}$$

- R não é simétrica pois (b,a) e (c,a) não pertencem a R .
Então o *fecho simétrico* de R é a relação R_1 a seguir:

$$R_1 = R \cup \{(b,a),(c,a)\}$$

- Exemplo2 (reflexividade): Suponha que R é uma relação não-reflexiva sobre um conjunto A .
 - Isto somente pode acontecer quando alguns pares da relação diagonal $\Delta=\{(a,a)|a\in A\}$ não estão em R .
 - Assim, $R_1=R\cup\Delta$ é a menor relação reflexiva sobre A que contém R .
 - Em outras palavras, $R\cup\Delta$ é o *fecho reflexivo* de R .

Fechos de relações

- Exemplo3 (simetria): Suponha que R é uma relação sobre um conjunto A e que R não é simétrica.
 - Desta forma, deve existir pares $(x,y) \in R$ tais que $(y,x) \notin R$
 - Por outro lado, $(y,x) \in R^{-1}$
 - Portanto, para R se tornar simétrica, deve-se adicionar todos os pares de $R^{-1} \Rightarrow R$ deve ser aumentada para $R \cup R^{-1}$
 - $R \cup R^{-1}$ é a menor relação simétrica que contém R , ou seja, $R \cup R^{-1}$ é o fecho simétrico de R .
 - Assim, se $A = \{a,b,c,d\}$ e $R = \{(a,b), (b,c), (a,c), (d,c)\}$
 - $\Rightarrow R^{-1} = \{(b,a), (c,b), (c,a), (c,d)\}$
 - \Rightarrow o fecho simétrico de R é:
$$R \cup R^{-1} = \{(a,b), (b,c), (a,c), (d,c), (b,a), (c,b), (c,a), (c,d)\}$$

Fechos de relações

Fecho transitivo:

- Será que o fecho transitivo de uma relação pode ser produzido pela adição de todos os pares da forma (a,c) , onde (a,b) e (b,c) já estão na relação?
- Considere a relação $R=\{(1,3),(1,4),(2,1),(3,2)\}$ sobre o conjunto $\{1,2,3,4\}$.
 - Ela não é transitiva, pois não contém todos os pares (a,c) onde (a,b) e (b,c) estão em $R \rightarrow$ falta $(1,2),(2,3),(2,4),(3,1)$
 - Adicionando o que falta:
 $R=\{(1,3),(1,4),(2,1),(3,2),(1,2),(2,3),(2,4),(3,1)\}$
 - Relação resultante contém $(3,1)$ e $(1,4)$ mas não $(3,4)$!
- Fechos transitivos dependem de algoritmos especiais.