Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
Disciplina: INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação
Prof. Daniel S. Freitas

3) Lógica e Métodos de Prova

3.1) Lógica Proposicional

3.2) Lógica de Primeira Ordem*

3.3) Métodos de Prova

Lista de Exercícios

1. *(Rosen6-seção 1.3-ex.1)* Seja $P(x)$ a declaração "$x \leq 4$". Determine os valores verdade de:
   (a) $P(0)$
   (b) $P(4)$
   (c) $P(6)$

2. *(Rosen6-seção 1.3-ex.3)* Seja $Q(x, y)$ a declaração "x é a capital de y". Quais os valores verdade de:
   (a) $Q(florianopolis, SC)$
   (b) $Q(campinas, SP)$
   (c) $Q(curitiba, PR)$
   (d) $Q(brasilia, RJ)$

3. *(Rosen6-seção 1.3-ex.5)* Seja $P(x)$ a declaração "x gasta mais do que 5 horas por dia em sala de aula", aonde o Universo de Discurso consiste de todos os estudantes. Expresse cada uma das quantificações abaixo em português:
   (a) $\exists x\ P(x)$
   (b) $\forall x\ P(x)$
   (c) $\exists x\ \neg P(x)$
   (d) $\forall x\ \neg P(x)$

4. *(Rosen6-seção 1.3-ex.8)* Traduza as proposições abaixo para o português, aonde $C(x)$ é "x é um coelho" e $S(x)$ é "x caminha pulando", sendo que o UD consiste de todos os animais.
   (a) $\forall x\ (C(x) \rightarrow S(x))$
   (b) $\forall x\ (C(x) \wedge S(x))$
   (c) $\exists x\ (C(x) \rightarrow S(x))$
   (d) $\exists x\ (C(x) \wedge S(x))$

5. *(Rosen6-seção 1.3-ex.10)* Seja $G(x)$ a declaração "x tem um gato", seja $C(x)$ a declaração "x tem um cachorro" e seja $P(x)$ a declaração "x tem um porquinho da Índia". Expresse cada uma das proposições abaixo em termos de $G(x)$, $C(x)$, $P(x)$, quantificadores e conectivos lógicos. O UD consiste de todos os estudantes na sua turma de fundamentos.
   (a) Um estudante na sua turma tem um gato, um cachorro e um porquinho da Índia.

(b) Todos os estudantes na sua turma têm um gato, um cachorro e um porquinho da Índia.

(c) Alguns estudantes na sua turma têm um gato e um porquinho da Índia, mas não um cachorro.

(d) Nenhum estudante na sua turma tem um gato, um cachorro e um porquinho da Índia.

(e) Para cada um dos três animais, gatos, cachorros e porquinhos da Índia, existe um estudante na sua turma que possui um destes três animais como animal de estimação.

6. *(Rosen6-seção 1.3-ex.12)* Seja $Q(x)$ a declaração "$x+1 > 2x$". Se o UD consiste de todos os inteiros, quais são os valores verdade de:

   (a) $Q(0)$

   (b) $Q(-1)$

   (c) $Q(1)$

   (d) $\exists x\ Q(x)$

   (e) $\forall x\ Q(x)$

   (f) $\exists x\ \neg Q(x)$

   (g) $\forall x\ \neg Q(x)$

7. *(Rosen6-seção 1.3-ex.13)* Determine o valor verdade de cada uma das proposições abaixo, se o UD consiste de todos os inteiros.

   (a) $\forall n(n+1 > n)$

   (b) $\exists n(2n = 3n)$

   (c) $\exists n(n = -n)$

   (d) $\forall n(n^2 \geq n)$

8. *(Rosen6-seção 1.3-ex.16)* Determine o valor verdade de cada uma das proposições abaixo, se o UD de cada variável consiste de todos os números reais.

   (a) $\exists x(x^2 = 2)$

   (b) $\exists x(x^2 = -1)$

   (c) $\forall x(x^2 + 2 \geq 1)$

   (d) $\forall x(x^2 \neq x)$

9. *(Rosen6-seção 1.3-ex.19)* Suponha que o UD da função proposicional $P(x)$ consiste dos inteiros 1,2,3,4 e 5. Expresse as declarações abaixo sem usar quantificadores. Em vez disto, use apenas negações, disjunções e conjunções.

   (a) $\exists x P(x)$

   (b) $\forall x P(x)$

   (c) $\neg\exists x P(x)$

   (d) $\neg\forall x P(x)$

   (e) $\forall x((x \neq 3) \to P(x)) \vee \exists x \neg P(x)$

10. *(Rosen6-seção 1.3-ex.24)* Traduza cada uma das proposições abaixo de duas maneiras em operações lógicas utilizando predicados, quantificadores e conectivos lógicos. Primeiro, assuma que o UD consiste de todos os estudantes na sua turma; depois, assuma que o UD consiste de todas as pessoas.

   (a) Todos na sua sala possuem um telefone celular.

   (b) Existe alguém na sua sala que já assistiu um filme brasileiro.

   (c) Há uma pessoa na sua turma que não sabe nadar.

(d) Todos os estudantes na sua sala sabem resolver equações quadráticas.

(e) Alguns estudantes na sua sala não querem ser ricos.

11. *(Rosen6-seção ex.31)* Suponha que o UD de $Q(x, y, z)$ consista de triplas x, y, z, aonde x=0,1 ou 2, y=0 ou 1, e z=0 ou 1. Explicite as proposições abaixo utilizando disjunções e conjunções:

    (a) $\forall y Q(0, y, 0)$

    (b) $\exists x Q(x, 1, 1)$

    (c) $\exists z \neg Q(0, 0, z)$

    (d) $\exists x \neg Q(x, 0, 1)$

12. *(Rosen6-seção ex.32)* Expresse cada uma das declarações abaixo usando quantificadores. Então, forme a negação da declaração de modo que não haja nenhuma negação à esquerda de um quantificador. A seguir, expresse a negação em português simples. (Não use apenas os termos "não é verdade que...")

    (a) Todos os cachorros têm pulgas.

    (b) Existe um cavalo que sabe somar.

    (c) Todo koala consegue subir em árvores.

    (d) Nenhum macaco sabe falar francês.

    (e) Existe um porco que sabe nadar e que consegue pegar peixes.

13. *(Rosen6-seção ex.35)* Ache um contraexemplo, se possível, para estas asserções universalmente quantificadas, aonde o UD para todas as variáveis consiste de todos os números inteiros.

    (a) $\forall x(x^2 \geq x)$

    (b) $\forall x(x > 0 \vee x < 0)$

    (c) $\forall x(x = 1)$

14. *(Rosen6-seção ex.39)* Traduza as especificações abaixo para o português, aonde $F(p)$ é "A impressora p não está funcionando", $B(p)$ é "A impressora p está ocupada", $L(j)$ é "o job de impressão j se perdeu" e $Q(j)$ é "O job de impressão j está na fila".

    (a) $\exists p(F(p) \wedge B(p)) \rightarrow \exists j L(j)$

    (b) $\forall p B(p) \rightarrow \exists j Q(j)$

    (c) $\exists j(Q(j) \wedge L(j)) \rightarrow \exists p F(p)$

    (d) $(\forall p B(p) \wedge \forall j Q(j)) \rightarrow \exists j L(j)$

15. *(Rosen6-seção 1.3-ex.50)* Mostre que $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ e $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ não são logicamente equivalentes.

16. *(Rosen6-seção 1.3-ex.51)* Mostre que $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ e $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ não são logicamente equivalentes.

17. *(Rosen6-seção 1.3-ex.52)* A notação $\exists! x P(x)$ denota a proposição: "Existe um único x tal que $P(x)$ é verdadeiro". Se o universo de discurso consiste de todos os inteiros, determine o valor verdade de:

    (a) $\exists! x(x > 1)$

    (b) $\exists! x(x^2 = 1)$

    (c) $\exists! x(x + 3 = 2x)$

    (d) $\exists! x(x = x + 1$