INE5403

Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

Prof. Daniel S. Freitas

UFSC - CTC - INE

2 - FUNDAMENTOS

2.1) Teoria dos Conjuntos

2.2) Números Inteiros

2.3) Funções

2.4) Seqüências e somas

2.5) Crescimento de funções

CONJUNTOS E SUBCONJUNTOS

- Um **conjunto** é uma coleção “bem-definida” de objetos (chamados de **membros** ou **elementos** do conjunto).
  - “Bem-definida” significa simplesmente que é possível decidir se um dado objeto pertence ou não à coleção.
- Ou: “coleção não-ordenada de objetos”.
- Normalmente, os objetos em um conjunto possuem uma mesma propriedade.
- **Exemplo:** o conjunto dos inteiros menores do que 4:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

EXEMPLOS DE CONJUNTOS

- Conjunto dos livros da livraria da FEESC (finito).
- Conjunto dos números naturais (infinito).
- Conjunto dos dinossauros vivos (conj. Vazio, , $\emptyset$)
- Conjunto S de 2 elementos, um dos quais é o conjunto das letras minúsculas do alfabeto e o outro é o conjunto dos dígitos decimais:

$$X = \{a, b, c, d, \dots, y, z\}$$

$$Y = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

$$S = \{X, Y\} = \{\{a, b, c, \dots, y, z\}, \{0, 1, 2, \dots, 9\}\}$$

Conjuntos e Subconjuntos

- Usualmente:
  - letras maiúsculas denotam conjuntos
  - letras minúsculas denotam elementos de um conjunto
- (Pertinência) O símbolo $\in$ denota que um elemento pertence ao conjunto. Ex.: $a \in A$
- **Exemplo:** Se $A = \{violeta, amarelo, vermelho\}$, então:
  - $amarelo \in A$
  - $azul \notin A$

CARACTERÍSTICAS DOS CONJUNTOS

- A ordem em que os elementos são listados em um conjunto é irrelevante:

  $\{3, 2, 1\}$ e $\{1, 3, 2\}$ representam o mesmo conjunto

- A repetição dos elementos em um conjunto é irrelevante:

  $\{1, 1, 1, 3, 2\}$ é uma outra representação de $\{1, 2, 3\}$

CONJUNTOS DEFINIDOS POR PROPRIEDADES

- Conjuntos infinitos podem ser definidos indicando-se um padrão.
  - Exemplo: o conjunto S, de todos os inteiros pares, pode ser expresso como $\{2, 4, 6, ...\}$
- S também pode ser definido por “recursão”:
  1. $2 \in S$
  2. Se $n \in S$, então $(n + 2) \in S$
- Forma mais clara (e mais segura) de descrever este conjunto S:
  - $S = \{x \mid x$ é inteiro positivo par$\}$
  - ou: “o conjunto de todos os x tal que x é inteiro positivo e par”

Conjuntos definidos por propriedades

- A melhor maneira de definir um conjunto é especificando uma propriedade que os elementos do conjunto têm em comum.
- Usa-se um predicado $P(x)$ para denotar uma propriedade P referente a uma variável objeto x.
- Notação para um conjunto S cujos elementos têm a propriedade P:
  - $S = \{x \mid P(x)\}$
- O que significa também:
  - $\{x \mid x \in S \wedge P(x)\}$
  - $\{x \in S \mid P(x)\}$

CONJUNTOS DEFINIDOS POR PROPRIEDADES

- **Exemplos:**
  1. $\{x \mid x$ é um inteiro e $3 < x \leq 7\}$
  2. $\{x \mid x$ é um mês com exatamente 30 dias$\}$
  3. $\{x \mid x$ é a capital do Brasil$\}$
- **Exercícios:** Descreva os seguintes conjuntos:
  1. $\{1, 4, 9, 16\}$
  2. $\{$o pedreiro, o padeiro, o alfaiate$\}$
  3. $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$

CONJUNTOS ESPECIAIS

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais: $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros: $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Z}*$: conjunto dos números inteiros positivos: $\{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais: $\{x \mid x = n/m,\ m, n \in Z\ e\ m \neq 0\}$

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais: $\{x \mid x$ é um número real$\}$

IGUALDADE DE CONJUNTOS

- Dois conjuntos A e B são ditos **iguais** se e somente se eles possuem os mesmos elementos.
  - Neste caso, escreve-se: $A = B$

- A=B significa:

  $(\forall x)[(x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)]$

SUBCONJUNTOS

- O conjunto A é dito um **subconjunto** de B se e somente se todo elemento de A é também um elemento de B.

  - Isto é: $\forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$
  - Diz-se que "A está contido em B" e escreve-se $A \subseteq B$
  - Se A não é um subconjunto de B, escreve-se $A \not\subseteq B$
  - Se A é um subconjunto de B, mas queremos enfatizar que $A \neq B$, escrevemos $A \subset B$
    - neste caso, A é um **subconjunto próprio** de B

Subconjuntos (exemplos)

- Sejam os conjuntos:
  - $A = \{1, 7, 9, 15\}$
  - $B = \{7, 9\}$
  - $C = \{7, 9, 15, 20\}$
- Então as seguintes sentenças são verdadeiras:

$$
\begin{array}{ll}
B \subseteq C & 15 \in C \\
B \subseteq A & \{7, 9\} \subseteq B \\
B \subset A & \{7\} \subset A \\
A \not\subset C & \emptyset \subseteq C
\end{array}
$$

- Nota: O conjunto Vazio é um subconjunto de todo conjunto, pois:
  - se $x \in \emptyset$, então $x \in S$

SUBCONJUNTOS (EXEMPLOS)

- Conjuntos podem ter outros conjuntos como membros.
- **Exemplos:**
  - $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
  - $\{x \mid x$ é um subconjunto do conjunto $\{a, b\}\}$
    - (Note que estes dois conjuntos são iguais.)

Subconjuntos (exemplos)

- Conjuntos podem ter outros conjuntos como membros.
- **Exemplo:** Seja A um conjunto e seja $B = \{A, \{A\}\}$.
  - Como A e $\{A\}$ são elementos de B, tem-se que:

    $A \in B$ e também que $\{A\} \in B$
  - Segue então que $\{A\} \subseteq B$ e que $\{\{A\}\} \subseteq B$
  - Mas não é verdade que $A \subseteq B$ (Por quê?)

SUBCONJUNTOS

- Suponha que $B = \{x \mid P(x)\}$ e que $A \subseteq B$
- Para provar que $A \subseteq B$:
  - toma-se um $x \in A$ arbitrário
  - mostramos que $P(x)$ é verdadeira
    - (os elementos de A "herdam" a propriedade de B)

- **Exemplo:** seja $B = \{x \mid x$ é múltiplo de 4$\}$
  $A = \{x \mid x$ é múltiplo de 8$\}$
  - para mostrar que $A \subseteq B$, tomamos um $x \in A$:
    $x = m.8$ para algum inteiro m
  - então $x = m.2.4$
    ou $x = k.4$, onde $k = 2m$ também é um inteiro
  - isto mostra que x é múltiplo de 4 e que, portanto, $x \in B$

IGUALDADE DE CONJUNTOS

- A e B são iguais se e somente se contêm os mesmos elementos
- Logo, podemos provar que A=B provando que:

  $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

- **Exemplo:** Provar que:

  $$\{x \mid x \in \mathbb{N}\ e\ x^2 < 15\} \ = \ \{x \mid x \in \mathbb{N}\ e\ 2x < 7\}$$

  - Elementos de A: $\{0, 1, 2, 3\}$ (todos com dobro < 7)
  - Elementos de B: $\{0, 1, 2, 3\}$ (todos com quadrado < 15)

Conjunto potência

- Muitos problemas envolvem testar todas as combinações dos elementos de um conjunto para ver se elas satisfazem alguma propriedade.
- Dado um conjunto A, o **conjunto potência** de A é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A.
  - é denotado por $P(A)$ ou 2^A
  - também chamado de conjunto de “todas as partes” de A
- **Exemplo:** Seja $A = \{1, 2, 3\}$.
  - Então $P(A)$ consiste dos seguintes subconjuntos de A:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

- **Nota:** se A tem n elementos, então $P(A)$ tem 2^n elementos.

SEQÜÊNCIAS

- Como os conjuntos não são ordenados, uma estrutura diferente é necessária para representar coleções ordenadas.
- Uma **seqüência** é uma lista de objetos em ordem.
  - um “primeiro elemento”, um “segundo elemento”,...
  - a lista pode ser finita ou não

Exemplos de Seqüências

- A seqüência 1,0,0,1,0,1,0,0,1,1,1
- A seqüência 1,4,9,16,25,... ("quadrados dos n^{os} positivos") é infinita
  - também pode ser denotada por $(n^2)_{1 \leq n \leq \infty}$
- A seqüência finita 1,2,4,...,256 pode ser denotada por $(2^n)_{0 \leq n \leq 8}$
- A notação $(1/n)_{2 \leq n \leq \infty}$ representa a seqüência: 1/2, 1/3, 1/4,...
- A palavra "pesquisa" pode ser vista como a seqüência finita: p,e,s,q,u,i,s,a
  - é costume omitir-se as vírgulas e escrever a palavra no modo usual
  - mesmo uma palavra sem sentido, como "abacabcd" pode ser vista como uma seqüência de tamanho 8
  - seqüências de letras ou outros símbolos, escritos sem vírgulas, são chamadas de "strings"

CONJUNTO CORRESPONDENTE A UMA SEQÜÊNCIA

- Conjunto de todos os elementos distintos na seqüência.
- **Exemplo**: o conjunto correspondente à seqüência:
  - a,b,a,b,a,b,a,b,...
  - é, simplesmente: $\{a, b\}$

Cardinalidade de conjuntos

- Um conjunto é dito **contável** se for o conjunto correspondente a alguma seqüência.
- Informalmente: os elementos do conjunto podem ser arranjados em uma lista ordenada, a qual pode, portanto, ser contada.
- Todos os conjuntos finitos são contáveis.
- Alguns conjuntos infinitos também:
  - Exemplo: por definição, o conjunto $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ é contável.
- Um conjunto que não é contável é dito **incontável**.

Cardinalidade de conjuntos

- O número de elementos em um conjunto X é a **cardinalidade** de X.
  - denotada por $|X|$
  - Exemplo: $|\{2, 5, 7\}| = 3$
- Importante: saber se dois conjuntos possuem mesma cardinalidade.
  - se ambos forem finitos, é só contar os elementos de cada um
  - porém: será que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, e $\mathbb{R}$ possuem a mesma cardinalidade?
- Ainda: será que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, e $\mathbb{R}$ são contáveis?

CARDINALIDADE DE CONJUNTOS

- Para nos convencermos de que dois conjuntos X e Y possuem a mesma cardinalidade:
  - tentamos produzir um “emparelhamento” de cada x em X com apenas um y em Y
  - de maneira que cada elemento de Y seja usado apenas uma vez neste emparelhamento

- **Exemplo:** para os conjuntos $X = \{2, 5, 7\}$ e $Y = \{?, !, \#\}$, o emparelhamento:

$$2 \leftrightarrow ?, \quad 5 \leftrightarrow \#, \quad 7 \leftrightarrow !$$

  - mostra que ambos possuem a mesma cardinalidade $\square$

CARDINALIDADE DE CONJUNTOS

- **Exemplo:** O emparelhamento:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & -5 & \cdots \end{array}$$

  - mostra que os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}^+$ possuem mesma cardinalidade
  - logo, o conjunto $\mathbb{Z}$ é contável. $\square$

- **Exemplo:** O conjunto dos racionais, $\mathbb{Q}$, é contável.
  - Emparelhamento com $\mathbb{Z}^+$???

CARDINALIDADE DE CONJUNTOS

- **Exemplo:** o conjunto de todos os números reais entre 0 e 1 é incontável.
  - Nota: um nro real entre 0 e 1 é o decimal infi nito $.a_1a_2a_3\ldots$, onde a_i é um inteiro tal que $0 \le a_i \le 9$.
- **Prova (por contradição):**
  - assuma que o conjunto dos decimais ($0.a_1a_2a_3\ldots$) entre 0 e 1 é contável (!)
  - então deve ser possível formar uma seqüência contendo todos estes decimais:

$$\begin{aligned} n_1 &= .a_1a_2a_3\ldots \\ n_2 &= .b_1b_2b_3\ldots \\ n_3 &= .c_1c_2c_3\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

  - todo decimal infi nito deve aparecer em algum lugar desta lista. $(\Rightarrow)$

CARDINALIDADE DE CONJUNTOS

- **Exemplo:** o conjunto de todos os números reais entre 0 e 1 é incontável.
- **Prova (cont.):**
  - Vamos estabelecer uma contradição construindo um decimal infi nito x que não está na lista.
  - Construindo o decimal $x = .x_1x_2x_3\ldots$:
    - valor de x_1: qualquer dígito diferente de a_1
    - valor de x_2: qualquer dígito diferente de b_1
    - valor de x_3: qualquer dígito diferente de c_1
    - e assim por diante...

CARDINALIDADE DE CONJUNTOS

- **Exemplo:** o conjunto de todos os números reais entre 0 e 1 é incontável.
- **Prova (cont.):**
  - Por exemplo, se tivéssemos:

$$n_1 = 0.3659663426\ldots$$
$$n_2 = 0.7103958453\ldots$$
$$n_3 = 0.0358493553\ldots$$
$$n_4 = 0.9968452214\ldots$$
$$\vdots$$

    - o número x poderia ser dado por: $0.5637\ldots$

CARDINALIDADE DE CONJUNTOS

- **Exemplo:** o conjunto de todos os números reais entre 0 e 1 é incontável.
- **Prova (cont.):**
  - o número x que resulta é um decimal infinito
    - certamente está entre 0 e 1
  - mas difere de todos os números da lista em algum dígito
    - logo, x não está na lista
  - resumindo: não importa como a lista é construída
    - sempre é possível construir um número real entre 0 e 1 que não está nela
  - Contradição!
    - (a lista deveria conter todos os reais entre 0 e 1) $\square$

SEQÜÊNCIAS E ALFABETOS

- A^*: conjunto de todas as seqüências finitas de elementos de A
  - quando A é um conjunto de símbolos (e não de números), é chamado de alfabeto
- Seqüências em A^*: palavras ou strings de A
  - neste caso, as seqüências em A^* não são escritas com vírgulas entre os elementos
- Assume-se que A contém a seqüência vazia (Λ)

SEQÜÊNCIAS E ALFABETOS

- **Exemplo:** seja $A = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$
  - A^* = todas as palavras comuns
    - tais como: macaco, universidade, desburocratizar,...
    - mas também: ixalovel, zigadongdong, cccaaa, pqrst, ...
  - Todas as seqüências finitas de A estão em A^*
    - tenham elas significado ou não...

Produto cartesiano

- O **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$, ou seja:

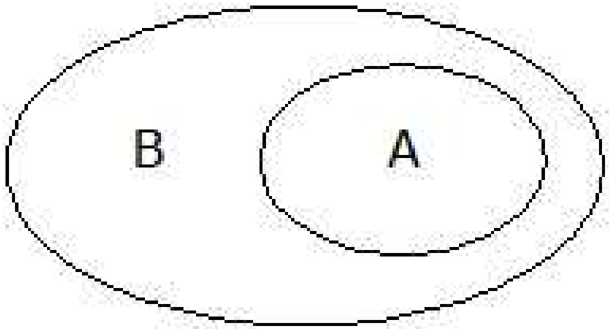
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

- Exemplo: qual é o produto de $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$?

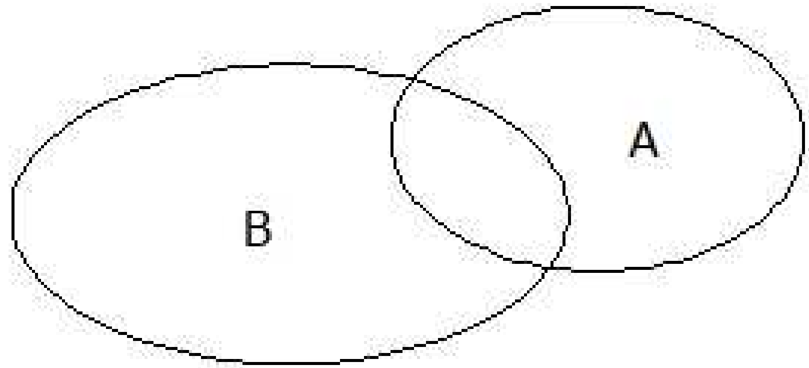
$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

- Note que: $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

DIAGRAMAS DE VENN

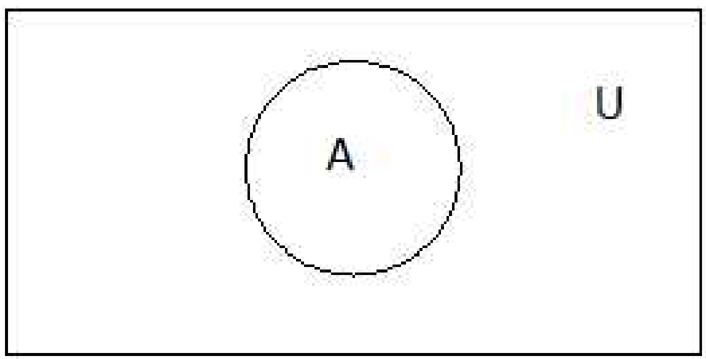


$A \subseteq B$



$A \not\subseteq B$

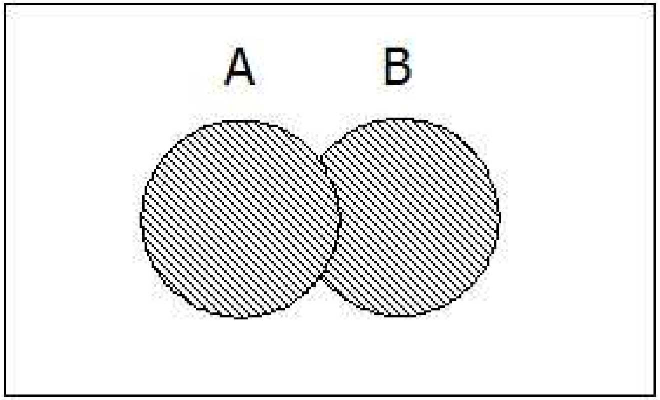
- Conjunto universal U: conjunto contendo todos os objetos em consideração:



Operações sobre conjuntos

- A **união** de dois conjuntos A e B é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A ou em B, ou em ambos:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

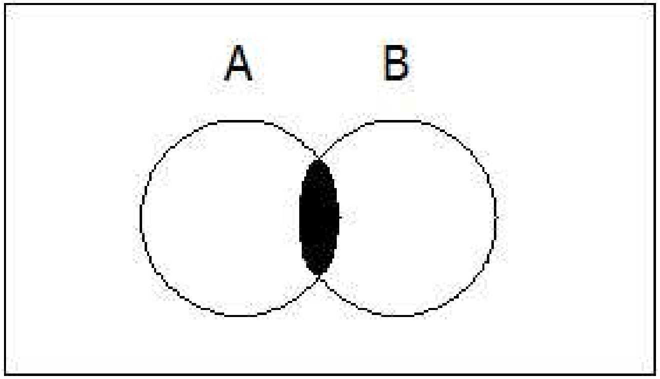


- **Exemplo**: A união dos conjuntos $\{1, 3, 5\}$ e $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto $\{1, 2, 3, 5\}$.

OPERAÇÕES SOBRE CONJUNTOS

- A **intersecção** de dois conjuntos A e B é o conjunto que contém aqueles elementos que estão tanto em A como em B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

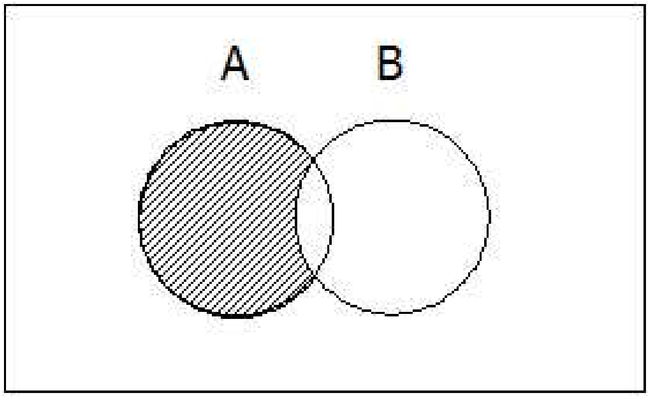


- **Exemplo**: A intersecção dos conjuntos $\{1, 3, 5\}$ e $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto $\{1, 3\}$.

OPERAÇÕES SOBRE CONJUNTOS

- A **diferença** de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que estão em A mas não em B:

$$A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

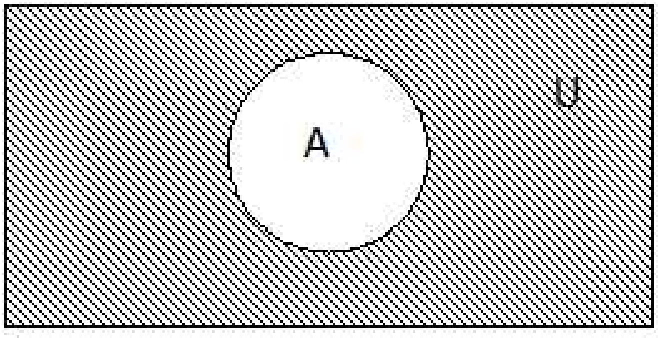


- **Exemplo**: A diferença dos conjuntos $\{1, 3, 5\}$ e $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto $\{5\}$.

OPERAÇÕES SOBRE CONJUNTOS

- Se U é o conjunto universo, $U - A$ é chamado de **complemento** de A:

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$



- **Exemplo**: Seja A o conjunto dos inteiros positivos maiores do que 10 (onde o universo é o conjunto de todos os inteiros positivos).
  - Então: $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

IDENTIDADES DE CONJUNTOS

- As operações sobre conjuntos satisfazem às propriedades:
  - Comutatividade:
    - $A \cup B = B \cup A$
    - $A \cap B = B \cap A$
  - Associatividade:
    - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
    - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  - Distributividade:
    - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - Idempotência:
    - $A \cup A = A$
    - $A \cap A = A$

IDENTIDADES DE CONJUNTOS

- As operações sobre conjuntos satisfazem às propriedades:
  - Propriedades do complemento:
    - $\overline{\overline{A}} = A$
    - $A \cup \overline{A} = U$
    - $A \cap \overline{A} = \emptyset$
    - $\overline{\emptyset} = U$ e também: $\overline{U} = \emptyset$
    - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (1a. Lei de De Morgan)
    - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (2a. Lei de De Morgan)

IDENTIDADES DE CONJUNTOS

- Propriedades do conjunto Universo:
  - $A \cup U = U$
  - $A \cap U = A$
- Propriedades do conjunto Vazio:
  - $A \cup \emptyset = A$
  - $A \cap \emptyset = \emptyset$
- Nota: cada identidade acima tem o seu dual:
  - Troca-se $\cup$ por $\cap$
  - Troca-se U por $\emptyset$

UTILIZAÇÃO DAS IDENTIDADES

- **Exemplo:** Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que:

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$$

Solução (1/4):

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)} \qquad \text{(1}^a \text{ lei de De Morgan)}$$

UTILIZAÇÃO DAS IDENTIDADES

- **Exemplo:** Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que:

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$$

Solução (2/4):

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)} \qquad \text{(1}^a \text{ lei de De Morgan)}$$

$$= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \qquad \text{(2}^a \text{ lei de De Morgan)}$$

UTILIZAÇÃO DAS IDENTIDADES

- **Exemplo:** Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que:

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$$

Solução (3/4):

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup (B \cap C)} &= \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)} && \text{(1}^a\text{ lei de De Morgan)} \\
&= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) && \text{(2}^a\text{ lei de De Morgan)} \\
&= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A} && \text{(comutatividade de } \cap\text{)}
\end{aligned}$$

Utilização das identidades

- **Exemplo:** Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que:

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$$

Solução (4/4):

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup (B \cap C)} &= \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)} && \text{(1}^a\text{ lei de De Morgan)} \\
&= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) && \text{(2}^a\text{ lei de De Morgan)} \\
&= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A} && \text{(comutatividade de } \cap \text{)} \\
&= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A} && \text{(comutatividade de } \cup \text{)}
\end{aligned}$$

CONJUNTO UNIVERSO

- O conjunto “todas as coisas” não pode ser considerado sem destruir a lógica da matemática.
- Para cada discussão existe um “conjunto universal” U contendo todos os objetos para os quais a discussão faz sentido.

CARDINALIDADE DE CONJUNTOS (REL.)

- Conjuntos são muito usados em problemas de contagem, o que leva a uma discussão sobre o seu tamanho.
- Um conjunto A é dito **finito** se ele tem n elementos distintos, onde $n \in \mathbb{N}$.
  - Neste caso, n é chamado de **cardinalidade** de A
  - A cardinalidade de A é denotada por $|A|$
  - Um conjunto que não é finito é chamado de **infinito**

CARDINALIDADE DE CONJUNTOS

- **Exemplos:**
  - Seja A o conjunto dos inteiros positivos ímpares < 10.
    - Então $|A| = 5$
  - Seja A o conjunto das letras do alfabeto: $|A| = 26$
  - $|\emptyset| = ?$

CONTAGEM DE CONJUNTOS

- **Princípio da adição:** Se
  - uma primeira tarefa pode ser feita de n_1 modos e uma segunda de n_2 modos
  - e se ambos os eventos não podem ocorrer ao mesmo tempo

  então há $n_1 + n_2$ modos de fazer uma ou outra tarefa

- Ou seja, se A e B são conjuntos, temos que: $|A \cup B| = |A| + |B|$

- Esta regra pode ser estendida para:

  $$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_m|$$

  - desde que não haja duas tarefas que podem ser realizadas ao mesmo tempo.

PRINCÍPIO DA ADIÇÃO

- **Exemplo 1:** Um estudante tem que escolher um projeto em uma de 3 listas. As 3 listas contêm 23, 15 e 19 possíveis projetos, respectivamente. Quantas possibilidades de projetos há para escolher?

- **Exemplo 2:** Qual o valor de k após a execução do código:

```
k:=0
for i_1:=1 to n_1
  k:=k+1
end
for i_2:=1 to n_2
  k=k+1
end
...
for i_m:=1 to n_m
  k=k+1
end
```

CONTAGEM DE CONJUNTOS

- **Princípio da multiplicação:** Suponha que:
  - um procedimento possa ser subdividido em duas tarefas
  - há n_1 modos de fazer a 1^{ra} tarefa
  - e n_2 modos de fazer a segunda depois que a 1^{ra} esteja pronta

  então há $n_1.n_2$ modos de executar o procedimento.

- Ou seja, se A e B são conjuntos finitos, temos que:

  $$|A \times B| = |A|.|B|$$

- Esta regra pode ser estendida para:

  $$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m| = |A_1|.|A_2|.\ldots.|A_m|$$

PRINCÍPIO DA MULTIPLICAÇÃO

- **Exemplo 1:** A última parte de un número de telefone tem 4 dígitos. Quantos números de 4 dígitos existem?

  Resposta: podemos imaginar como o total de possibilidades de uma seqüência de 4 etapas de escolha de 1 dígito:

  $$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$$

PRINCÍPIO DA MULTIPLICAÇÃO

- **Exemplo 2:** Quantos números de 4 dígitos sem repetições de dígitos existem?

  Resposta: novamente temos uma seqüência de 4 etapas
  - mas não podemos usar o que já foi usado
  - assim: $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

PRINCÍPIO DA MULTIPLICAÇÃO

- **Exemplo 3:** Cada usuário em um dado sistema tem uma senha com 6 a 8 caracteres, onde:
  - cada caracter é uma letra maiúscula ou um número
  - cada senha tem que conter pelo menos 1 número

  então quantas possibilidades de senhas existem?

  Resposta:
  - P_6 , P_7 , P_8 = senhas com 6,7 e 8 caracteres
  - cálculo de P_6:
    - strings de letras maiúsculas e números com 6 caracteres = 36^6
      - (incluindo as sem número algum)
    - strings de letras maiúsculas e sem nro algum = 26^6
    - logo: $P_6 = 36^6 - 26^6$
  - de maneira similar: $P_7 = 36^7 - 26^7$

    $P_8 = 36^8 - 26^8$
  - total = 2.684.483.063.360 senhas □

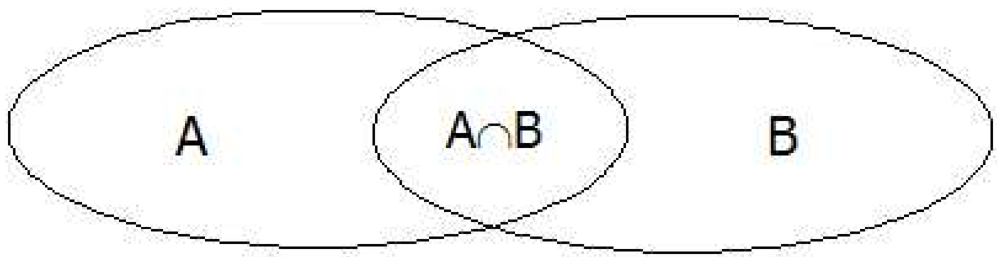
PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

- **Exemplo:** Sabe-se que em uma aula de uma certa disciplina da Computação há 10 mulheres e 40 formandos. Quantos estudantes desta aula são mulheres ou formandos?
  - Provavelmente, a resposta correta não é "adicionar a quantidadade de mulheres e formandos"
    - mulheres formandas seriam contadas duas vezes
  - Logo, o nro de mulheres ou formandos é
    - a soma do nro de mulheres com o nro de formandos
    - menos o nro de mulheres formandas

PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

- Se A e B são conjuntos finitos, então:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



- **Exemplo:** Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{c, e, f, h, k, m\}$. Verifique a igualdade acima.
  - $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, h, k, m\}$
  - $A \cap B = \{c, e\}$
  - $|A \cup B| = 9$ $|A| = 5$ $|B| = 6$ $|A \cap B| = 2$

PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

- **Exemplo:** Suponha que haja 450 calouros no CTC da UFSC. Destes, 48 estão cursando Computação, 98 estão cursando Eng. Mecânica e 18 estão em ambos os cursos. Quantos não estão cursando Computação nem Eng. Mecânica?

  Resposta:

  - $A =$ conjunto dos calouros em Computação
  - $B =$ conjunto dos calouros em Eng. Mecânica
    - $|A| =$48 $|B| =$98 $|A \cap B|$=18
  - logo:
    - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| =$ 48+98-18 = 128
    - (128 calouros estão cursando Comp. ou Eng. Mec.)
  - Assim: há 450-128=322 calouros que não estão em nenhum dos 2 cursos.

PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

- **Exemplo:** Uma companhia de computação deve contratar 25 programadores para lidar com tarefas de programação de sistemas e 40 programadores para programação de aplicativos. Dos contratados, 10 terão que realizar tarefas de ambos os tipos. Quantos programadores devem ser contratados?

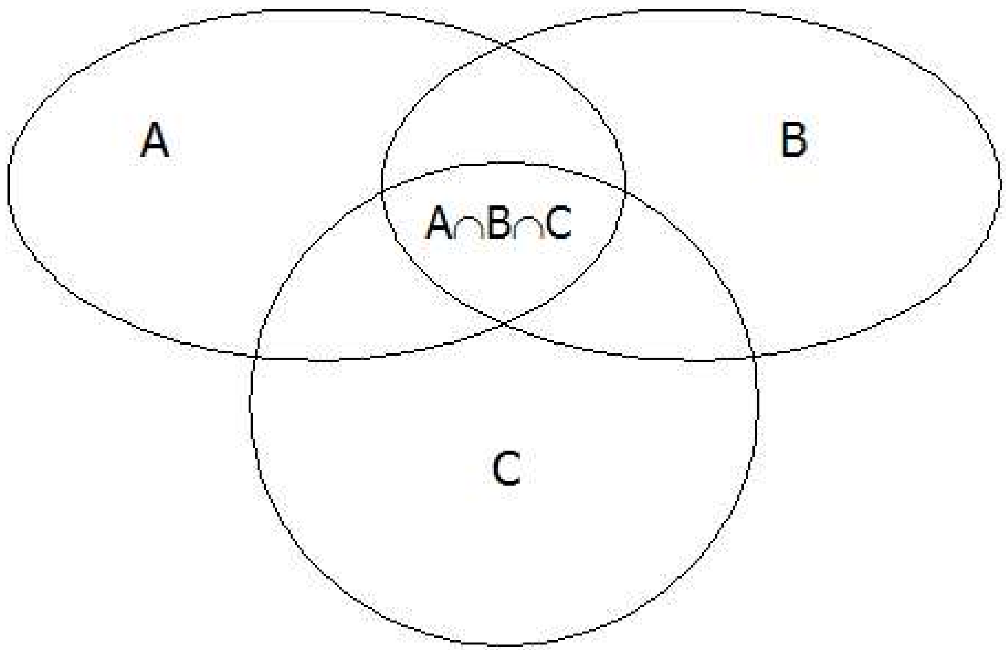
  Solução:

  - $A =$ conjunto de programadores para sistemas
  - $B =$ conjunto de programadores para aplicativos
  - Deve-se ter $|A \cup B|$ programadores = 55

PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

- Se A, B e C são conjuntos finitos, então:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

- **Exemplo:** Um mercadinho vende apenas brócolis, cenoura e batata. Em determinado dia, a quitanda atendeu 208 pessoas. Se 114 compraram apenas brócolis, 152 compraram apenas cenouras, 17 apenas batatas, 64 apenas brócolis e cenouras, 12 apenas cenouras e batatas e 8 apenas brócolis e batatas, determine se alguém comprou os 3 produtos simultaneamente.

  Solução:

  - $A = \{$pessoas que compraram brócolis$\}$
  - $B = \{$pessoas que compraram cenouras$\}$
  - $C = \{$pessoas que compraram batatas$\}$

$$|A \cup B \cup C| = 208 \qquad |A| = 114 \qquad |B| = 152 \qquad |C| = 17$$

$$|A \cap B| = 64 \qquad |A \cap C| = 8 \qquad |B \cap C| = 12 \qquad |A \cap B \cap C| = ?$$

$$|A \cap B \cap C| = 208 - 114 - 152 - 17 + 64 + 12 + 8 = 9$$

TEORIA DOS CONJUNTOS

- Final deste item.

- **Dica**: fazer exercícios sobre Teoria dos Conjuntos...