

INE0003

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA PARA A COMPUTAÇÃO

PROF. DANIEL S. FREITAS

UFSC - CTC - INE

7 - ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

7.1) Operações Binárias

7.2) Semigrupos

7.3) Produtos e Quocientes de Semigrupos

7.4) Grupos

7.5) Produtos e Quocientes de Grupos

ÁLGEBRA ABSTRATA

- Noção familiar: Álgebra Elementar.
 - Exemplo: adição e multiplicação sobre os inteiros.
 - Essência: “operação binária” sobre “um conjunto de elementos”.
- **Abstração**: recurso poderoso.
 - Consiste em isolar a **essência** do problema.
 - Conexão entre problemas aparentemente não relacionados.
 - Problemas complexos viram simples casos particulares de esquema mais geral.
 - Uma vez identificada a “classe” de um problema, pode-se aproveitar resultados prontos.
- Ponto de vista de modelagem em Ciência da Computação:
 - interessa justamente mais o “esquema geral” do que os detalhes
 - abstração permite focar apenas no que interessa

OPERAÇÕES BINÁRIAS

- Precisamos de uma definição precisa desta idéia familiar.
- **Operação Binária** sobre um conjunto A :
 - função $f : A \times A \rightarrow A$
 - definida para todo par ordenado de elementos de A
 - apenas um elemento de A é atribuído a cada par de $A \times A$
- Ou seja: regra que atribui um único elemento de A a cada par ordenado de elementos de A .

OPERAÇÕES BINÁRIAS

● Notação:

- como se trata de uma **função**, o normal seria denotar o elemento atribuído a (a, b) por $*(a, b)$
- mas o usual é $a * b$

● Importante: lembrar que $a * b \in A$

- também se diz que A é **fechado** sob a operação $*$

OPERAÇÕES BINÁRIAS

● **Exemplo 1(/6):** Seja $A = \mathbb{Z}$.

● Defina $a * b$ como $a + b$.

● Então $*$ é uma operação binária sobre \mathbb{Z} □

OPERAÇÕES BINÁRIAS

● **Exemplo 2(/6):** Seja $A = \mathbb{R}$.

● Defina $a * b$ como a/b .

● Então $*$ **não é** uma operação binária

● pois **não** é definida para **todo** par ordenado de $A \times A$

● por exemplo, **$3 * 0$** não é definida □

OPERAÇÕES BINÁRIAS

● **Exemplo 3(/6):** Seja $A = \mathbb{Z}^+$.

● Defina $a * b$ como $a - b$.

● Então $*$ **não é** uma operação binária:

● **não** atribui um elemento de A para **todo** par de $A \times A$

● por exemplo, $2 * 5 \notin A$ \square

OPERAÇÕES BINÁRIAS

● **Exemplo 4(/6):** Seja $A = \mathbb{Z}$.

● Defina $a * b$ como um número menor do que a e do que b .

● Então $*$ **não é** uma operação binária:

● **não** atribui um elemento **único** de A para **todo** par de $A \times A$

● por exemplo, $8 * 6$ poderia ser 5, 4, 3, 2, 1, etc.

● Neste caso, $*$ seria uma **relação** de $A \times A$ para A

● mas **não** uma **função**



OPERAÇÕES BINÁRIAS

● **Exemplo 5(/6):** Seja $A = \mathbb{Z}$.

● Defina $a * b$ como $\max\{a, b\}$.

● Então $*$ é uma operação binária:

● $2 * 4 = 4$

● $-3 * (-5) = -3$ □

OPERAÇÕES BINÁRIAS

● **Exemplo 6(/6):** Seja $A = P(S)$, para algum conjunto S .

● Sejam V e W dois **subconjuntos de S** .

● $V * W$ definida como **$V \cup W$** é uma operação binária sobre A .

● Mas: $V * W$ definida como **$V \cap W$ também.**



OPERAÇÕES BINÁRIAS

- Note que é possível definir **muitas operações binárias** sobre o mesmo conjunto.
- **Exemplo:** Seja M o conjunto de todas as matrizes Booleanas.
 - São operações binárias:
 - $A * B$ definido como $A \vee B$
 - $A * B$ definido como $A \wedge B$ □
- **Exemplo:** Seja L um reticulado.
 - São operações binárias sobre L :
 - $a * b$ definido como $a \wedge b$ (“GLB” de a e b)
 - $a * b$ definido como $a \vee b$ (“LUB” de a e b) □

OPERAÇÕES BINÁRIAS & TABELAS

- Pode-se definir uma operação binária sobre um conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ por meio de uma **tabela**:

$*$	a_1	a_2	\dots	a_j	\dots	a_n
a_1						
a_2						
\dots						
a_i				$a_i * a_j$		
\dots						
a_n						

- Elemento na posição i, j denota $a_i * a_j$

OPERAÇÕES BINÁRIAS & TABELAS

🔴 **Exemplo:** Operações \vee e \wedge sobre $A = \{0, 1\}$:

\vee	0	1
0	0	1
1	1	1

\wedge	0	1
0	0	0
1	0	1

NÚMERO DE OPERAÇÕES BINÁRIAS

- Seja $A = \{a, b\}$.
- O número de operações binárias que podem ser definidas sobre A é:
 - toda operação binária sobre A pode ser descrita pela tabela:

*	a	b
a		
b		

- como cada espaço vazio pode ser preenchido com a ou b :
 - há $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ modos de completar a tabela
- Logo, existem 16 operações binárias possíveis sobre A . \square

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES BINÁRIAS

- **Prop1:** Uma operação binária é **comutativa** se:

$$a * b = b * a \quad \forall a, b \in A$$

- **Exemplo:** $a + b$ sobre $A = \mathbb{Z}$ é comutativa.

- **Exemplo:** $a - b$ sobre $A = \mathbb{Z}$ não é comutativa, pois:

- $2 - 3 \neq 3 - 2$

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES BINÁRIAS

- Uma operação binária definida por uma tabela é simétrica se e somente se **a tabela é simétrica**.

- **Exemplo:** Sejam as operações binárias sobre A :

*	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	b	c	b	a
c	c	d	b	c
d	a	a	b	b

*	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	c	d	b	a
c	b	b	a	c
d	d	a	c	d

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES BINÁRIAS

- **Prop2:** Uma operação binária é **associativa** se:

$$a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in A$$

- **Exemplo:** $a + b$ sobre $A = \mathbb{Z}$ é associativa.

- **Exemplo:** $a - b$ sobre $A = \mathbb{Z}$ não é associativa, pois:

- $2 - (3 - 5) \neq (2 - 3) - 5$

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES BINÁRIAS

- **Exemplo:** A operação binária $a * b = a \wedge b$, sobre um reticulado L , é comutativa e associativa.
- Também é **idempotente**: $a \wedge a = a$.
- Nota: o **converso** disto é **parcialmente verdadeiro**...

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES BINÁRIAS

● Exemplo:

- Seja uma operação binária $*$ sobre A que satisfaz:

- $a = a * a$ (idempotência)

- $a * b = b * a$ (comutatividade)

- $a * (b * c) = (a * b) * c$ (associatividade)

- E seja uma relação \leq sobre A definida por:

- $a \leq b$ se e somente se $a = a * b$

- Então, **mostre que:**

1) (A, \leq) é um poset

2) $GLB(a, b) = a * b, \quad \forall a, b \in A$

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES BINÁRIAS

🔴 Exemplo (cont.):

1) Mostrando que (A, \leq) é um poset:

🟡 reflexiva: como $a = a * a$, temos que

$$\cdot a \leq a, \quad \forall a \in A$$

🟡 antissimétrica: se $a \leq b$ e $b \leq a$, então:

$$\cdot a = a * b = b * a = b$$

🟡 transitiva: se $a \leq b$ e $b \leq c$, então:

$$\cdot a = a * b = a * (b * c) = (a * b) * c = a * c$$

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES BINÁRIAS

🔴 Exemplo (cont.):

2) Mostrando que $a * b = a \wedge b$:

- 🟡 temos que: $a * b = a * (b * b) = (a * b) * b$
 - de modo que: $a * b \leq b$
 - similarmente: $a * b \leq a$
 - conclusão: $a * b$ é **uma** cota inferior para a e b
- 🟡 agora, se $c \leq a$ e $c \leq b$:
 - $c = c * a$ e $c = c * b$
 - portanto: $c = (c * a) * b = c * (a * b)$
 - de modo que: $c \leq a * b$
 - conclusão: $a * b$ é **a maior** cota superior de a e b . □