INE0003

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA PARA A COMPUTAÇÃO

PROF. DANIEL S. FREITAS

UFSC - CTC - INE

6 - RELAÇÕES DE ORDENAMENTO

6.1) Conjuntos parcialmente ordenados (posets)

6.2) Extremos de posets

6.3) Reticulados

6.4) Álgebras Booleanas Finitas

6.5) Funções Booleanas

Revisão de Álgebras Booleanas

- Pode-se tentar mostrar que um reticulado L é uma Álg. Booleana:
  - examinando o seu diagrama de Hasse
  - construindo diretamente um isomorfismo entre L e B_n ou entre L e $(P(S), \subseteq)$

- Pode-se tentar mostrar que um reticulado L não é Álg. Booleana:
  - verificando o número de elementos em L
  - conferindo as propriedades do seu ordenamento parcial

- Se L é uma Álg. Booleana, podemos usar qualquer das 14 propriedades básicas (->)
  - para manipular algebricamente ou
  - simplificar expressões envolvendo elementos de L.

Propriedades das Álgebras Booleanas $(L, \leq)$

1) $x \leq y$ se e somente se $x \vee y = y$	2) $x \leq y$ se e somente se $x \wedge y = x$
3) (a) $x \vee x = x$ (b) $x \wedge x = x$	4) (a) $x \vee y = y \vee x$ (b) $x \wedge y = y \wedge x$
5) (a) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (b) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	6) (a) $x \vee (x \wedge y) = x$ (b) $x \wedge (x \vee y) = x$
7) $\mathbf{O} \leq x \leq \mathbf{I}, \quad \forall x \in L$	8) (a) $x \vee \mathbf{O} = x$ (b) $x \wedge \mathbf{O} = \mathbf{O}$
9) (a) $x \vee \mathbf{I} = \mathbf{I}$ (b) $x \wedge \mathbf{I} = x$	10) (a) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (b) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
11) Todo elemento x tem um *único* x' tal que: (a) $x \vee x' = \mathbf{I}$ (b) $x \wedge x' = \mathbf{O}$	12) (a) $\mathbf{O}' = \mathbf{I}$ (b) $\mathbf{I}' = \mathbf{O}$
13) $(x')' = x$	14) (a) $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ (b) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

Álgebras Booleanas

- A partir de agora denotaremos B_1 simplesmente como B.
  - B contém, portanto, apenas os elementos 0 e 1.
- Qualquer dos B_n pode ser descrito em termos de B:
- **Teorema 1:** Para todo $n \geq 1$, B_n é o produto $B \times B \times \ldots \times B$ consigo mesmo n vezes, de acordo com a ordem parcial produto.
- **Prova**:
  - Por defi nição, B_n consiste de todas as n-tuplas de 0s e 1s
    - ou seja, todas as n-tuplas de elementos de B
  - Portanto, em termos de conjunto, B_n é igual a $B \times B \times \ldots \times B$ (n fatores)
  - Além disto, se $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ e $y = y_1 y_2 \ldots y_n$ são elementos de B_n:
    - $x \leq y$ se e somente se $x_k \leq y_k$, para todo k
  - Portanto, B_n, identifi cado com $B \times B \times \ldots \times B$ (n fatores), possui a ordem parcial produto. $\square$

Funções sobre Álgebras Booleanas

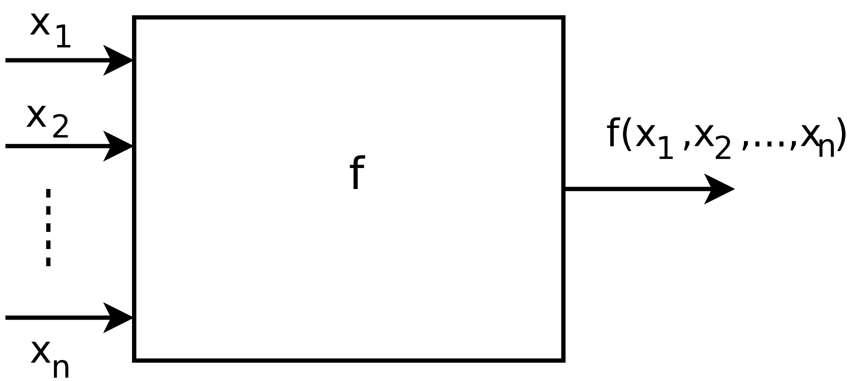
- Tabelas com os valores de uma função f para todos os valores de um B_n são chamadas de "tabelas-verdade" para f.
  - Pois são análogas com as tabelas da Lógica, supondo que:
    - os x_k representam sentenças declarativas simples (proposições)
    - $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ representa uma sentença composta dos x_k's
    - 0 = "sentença falsa" e 1 = "sentença verdadeira"

Exemplo:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Funções sobre Álgebras Booleanas

- Podem representar os requisitos de saída de um circuito computacional para quaisquer valores de entrada.



  - Cada x_i representa um circuito de entrada capaz de assumir dois estados de tensão (0 e 1).
  - A função f representa a resposta de saída desejada em todos os casos.
  - Estes requisitos precisam ser definidos na etapa de projeto de qualquer circuito computacional

Funções sobre Álgebras Booleanas

- Note que a especificação da função $f : B_n \to B$ é uma simples listagem de requisitos de circuito.
  - Ela não fornece indicação de como cumprir estes requisitos.

- Um importante modo de produzir funções de B_n para B é usando polinômios Booleanos.

POLINÔMIOS BOOLEANOS

- Um **polinômio Booleano** $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, nas variáveis x_k, é definido recursivamente:

1. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são todos polinômios Booleanos.
2. Os símbolos 0 e 1 são polinômios Booleanos.
3. Se $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ são polinômios Booleanos, então também o serão:
   - $(p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee q(x_1, x_2, \ldots, x_n))$
   - $(p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge q(x_1, x_2, \ldots, x_n))$
4. Se $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é um polinômio Booleano, então $(p(x_1, x_2, \ldots, x_n))'$ também o é.
5. Não existem polinômios Booleanos nas variáveis x_k além dos obtidos pelo uso repetido das regras anteriores.

POLINÔMIOS BOOLEANOS

- **Exemplos** de polinômios Booleanos nas variáveis x,y e z:
  - $p_1(x, y, z) = (x \vee y) \wedge z$
  - $p_2(x, y, z) = (x \vee y') \vee (y \wedge 1)$
  - $p_3(x, y, z) = (x \vee (y' \wedge z)) \vee (x \wedge (y \wedge 1))$
  - $p_4(x, y, z) = (x \vee (y \vee z')) \wedge ((x' \wedge z)' \wedge (y' \vee 0))$

POLINÔMIOS

- Polinômios comuns: “expressões representando computações algébricas com números não-especificados”.
  - Exemplos:
    - $x^2y + z^4$
    - $xy + yz + x^2y^2$
    - $x^3y^3 + xz^4$
- Estão, portanto, sujeitos às regras usuais da aritmética.
- Logo, são equivalentes:
  - $x^2 + 2x + 1$ e $(x + 1)(x + 1)$
  - $x(xy + yz)(x + y)$ e $x^3y + 2x^2yz + xyz^2$
  - Em ambos os casos, podemos transformar um no outro com manipulação algébrica.

POLINÔMIOS BOOLEANOS

- Polinômios Booleanos: “computações Booleanas com elementos não-especificados de B (0s e 1s)”.
- Sujeitos às regras da aritmética Booleana:
  - regras obedecidas por $\wedge$, $\vee$ e $'$ nas álgebras Booleanas.
- Dois polinômios Booleanos são equivalentes se for possível transformar um no outro por manipulações Booleanas.

Polinômios X Funções

- Polinômios comuns produzem funções por substituição.
  - Exemplo: o polinômio $xy + yz^3$ produz a seguinte $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$f(x, y, z) = xy + yz^3$$

    - uso: $f(3, 4, 2) = (3 \times 4) + (4 \times 2^3) = 12 + 32 = 44$

- Similarmente, polinômios Booleanos envolvendo n variáveis produzem funções de B_n para B.

Polinômios X Funções Booleanas

- **Exemplo**: Tabela verdade para a função Booleana $f : B_3 \to B$ determinada pelo polinômio Booleano:

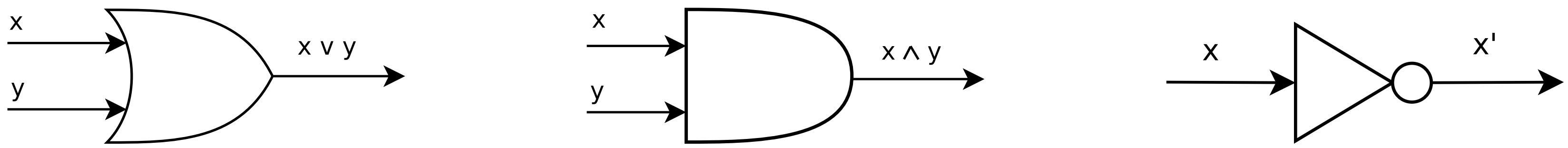
$$p(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \vee (x_2' \wedge x_3)))$$

  - Substituição das 2^3 triplas ordenadas de valores de B para x_1, x_2 e x_3:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \vee (x_2' \wedge x_3)))$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

DIAGRAMAS LÓGICOS

- Polinômios Booleanos podem ser representados simbolicamente.
- Polinômios básicos:



  - Linhas à esquerda: variáveis
  - Linha à direita: polinômio inteiro
  - Símbolo para $x \vee y$: “porta OR”
  - Símbolo para $x \wedge y$: “porta AND”
  - Símbolo para x': “inversor”

- Nomes: tabelas verdade das funções $x \vee y$ e $x \wedge y$ são exatamente análogas às tabelas dos conectivos “or” e “and”

DIAGRAMAS LÓGICOS

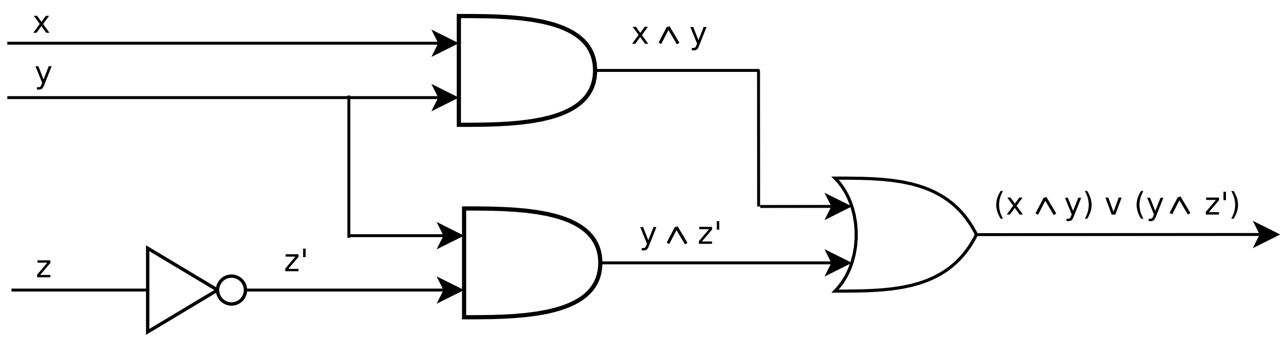
- Substituindo repetidamente estes símbolos, podemos representar qualquer polinômio Booleano como um **diagrama lógico**.
- **Exemplo**: Seja a função $f : B_3 \to B$ correspondente a $p(x, y, z) = ((x \wedge y) \vee (y \wedge z'))$.
  - Tabela verdade:

x_1	y	z	$f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z')$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$\Rightarrow$

DIAGRAMAS LÓGICOS

- **Exemplo (cont.)**: função f para $p(x, y, z) = ((x \wedge y) \vee (y \wedge z'))$
  - Diagrama lógico:



DIAGRAMAS LÓGICOS

- Seja p um polinômio Booleano em n variáveis.
- Seja f a função correspondente de B_n para B.
  - f descreve o comportamento de um circuito com n entradas e uma saída.
- Diagrama lógico de p: descrição da construção deste circuito (em termos de portas).
  - Ou seja: se a função f pode ser produzida por um polinômio p, o diagrama lógico para p fornece uma maneira de construir um circuito com aquele comportamento.
- É comum que muitos polinômios diferentes produzam a mesma função.
  - Seus diagramas lógicos representarão modos alternativos de construir o circuito desejado.

Expressando Funções como Polinômios

- Vimos que, se uma função $f : B_n \to B$ é dada por um polinômio Booleano, é possível construir um diagrama lógico para ela
  - e, portanto, modelar a sua implementação
- Agora veremos que todas as funções de B_n para B podem ser representadas por polinômios Booleanos.
- Juntamente com um método para encontrar uma expressão Booleana que produz uma função dada.

EXPRESSANDO FUNÇÕES COMO POLINÔMIOS

- Para $f : B_n \to B$, seja: $\quad S(f) = \{b \in B_n \mid f(b) = 1\}$
- **Teorema 2:** Sejam f, f_1 e f_2 três funções de B_n para B.

  (a) Se $S(f) = S(f_1) \cup S(f_2)$, então: $f(b) = f_1(b) \vee f_2(b)$, $\forall b \in B_n$.

  (b) Se $S(f) = S(f_1) \cap S(f_2)$, então: $f(b) = f_1(b) \wedge f_2(b)$, $\forall b \in B_n$.

  - Nota: "$\vee$"= LUB e "$\wedge$"= GLB (em B).

- **Prova de (a):** Seja $b \in B_n$:
  - Se $b \in S(f)$, então $f(b) = 1$. Daí:
    - uma vez que $S(f) = S(f_1) \cup S(f_2)$, deve acontecer:
      · $b \in S(f_1)$ ou $b \in S(f_2)$ (ou ambos)
    - em qualquer dos 3 casos: $f_1(b) \vee f_2(b) = 1$
  - Se $b \notin S(f)$, então $f(b) = 0$. Daí:
    - deve acontecer: $b \notin S(f_1)$ e $b \notin S(f_2)$
    - nos dois casos: $f_1(b) \wedge f_2(b) = 0$, ou seja: $f_1(b) \vee f_2(b) = 0$
  - Logo, $\forall b \in B_n$ temos: $f(b) = f_1(b) \vee f_2(b)$. $\square$

Expressando Funções como Polinômios

- Relembrando:
  - $f : B_n \rightarrow B$ pode ser vista como uma função $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
    - n variáveis, cada uma assumindo 0 ou 1
  - se $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é uma expressão Booleana:
    - a função que ela produz é gerada substituindo-se todas as combinações de 0's e 1's para os x_i's na expressão

EXPRESSANDO FUNÇÕES COMO POLINÔMIOS

- **Exemplo:** Sejam as funções:
  - $f_1 : B_2 \to B$, produzida pela expressão $E(x, y) = x'$
  - $f_2 : B_2 \to B$, produzida pela expressão $E(x, y) = y'$
  - $f : B_2 \to B$ (tabela)

x	y	$f_1(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

x	y	$f_2(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

  - Note que $S(f) = S(f_1) \cup S(f_2) = \{(0,0),(0,1)\} \cup \{(0,0),(1,0)\}$.
  - Então o Teorema 2 garante que $f = f_1 \vee f_2$, de modo que:
    - $x' \vee y'$ é uma expressão Booleana que produz f. $\square$

EXPRESSANDO FUNÇÕES COMO POLINÔMIOS

- Note que toda $f : B_n \rightarrow B$, para a qual $S(f)$ tenha exatamente um elemento, pode ser produzida por uma expressão Booleana.

- **Exemplo:** $f : B_2 \rightarrow B$ com tabela-verdade:

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

  - Note que $S(f) = \{(0,1)\}$:
    - f é 1 apenas para o elemento (0,1) de B_2
    - $f(x,y) = 1$ apenas quando $x = 0$ e $y = 1$
  - O que também é verdade para a expressão: $E(x,y) = x' \wedge y$
    - logo: f é produzida por esta expressão $\square$

EXPRESSANDO FUNÇÕES COMO POLINÔMIOS

- Correspondência entre funções de B_2 que são 1 em apenas um elemento e as expressões Booleanas que as produzem:

$S(f)$	expressão que produz f
$\{(0,0)\}$	$x' \wedge y'$
$\{(0,1)\}$	$x' \wedge y$
$\{(1,0)\}$	$x \wedge y'$
$\{(1,1)\}$	$x \wedge y$

Expressando Funções como Polinômios

- Além disto, seja a $f : B_3 \to B$:

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

- Note que $S(f) = \{(0,1,1)\}$:
  - f vale 1 apenas quando $x = 0$, $y = 1$ e $z = 1$
  - o que também é verdade para a expressão: $x' \wedge y \wedge z$
  - a qual deve, portanto, produzir f $\square$

Expressando Funções como Polinômios

- $b \in B_n$ é uma seqüência $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ de comprimento n.
- Seja E_b a expressão Booleana: $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \cdots \overline{x}_n$
  - $\overline{x}_k = x_k$ quando $c_k = 1$
  - $\overline{x}_k = x'_k$ quando $c_k = 0$
- Esta expressão é chamada de **minterm**.

- Toda função $f : B_n \rightarrow B$, para a qual $S(f)$ é um único elemento de B_n, pode ser produzida por um minterm.
  - De fato, se $S(f) = \{b\}$, note que o minterm E_b produz f.

- Tudo isto leva para o resultado a seguir...

- **Teorema 3:** Toda função $f : B_n \rightarrow B$ é produzida por uma expressão Booleana.
- **Prova:**
  - Seja $S(f) = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$
  - Para cada i, seja $f_i : B_n \rightarrow B$ definida por:
    - $f_i(b_i) = 1$
    - $f_i(b) = 0$ se $b \neq b_i$
  - Então $S(f_i) = \{b_i\}$, de modo que $S(f) = S(f_1) \cup \cdots \cup S(f_k)$.
  - Daí, pelo Teorema anterior: $f = f_1 \vee f_2 \vee \cdots \vee f_k$
  - Como vimos, cada f_i é produzida pelo minterm E_{b_i}.
  - Portanto, f é produzida pela expressão Booleana:

$$E_{b_1} \vee E_{b_2} \vee \cdots \vee E_{b_k} \qquad \square$$

EXPRESSANDO FUNÇÕES COMO POLINÔMIOS

- **Exemplo:** Seja a função $f : B_3 \rightarrow B$ dada por:

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

- $S(f) = \{(0, 1, 1), (1, 1, 1)\} \quad \Rightarrow \quad f$ é produzida pela expressão:

$$E(x, y, z) = E_{(0,1,1)} \vee E_{(1,1,1)} = (x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \qquad \square$$

- No entanto, esta não é a expressão mais simples que produz f:
  - usando propriedades de Álgebras Booleanas, temos:

$$\begin{aligned}(x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) &= (x' \vee x) \wedge (y \wedge z)\\ &= 1 \wedge (y \wedge z)\\ &= y \wedge z\end{aligned}$$

  - portanto, f também é produzida por $y \wedge z$.

Expressando Funções como Polinômios

- O processo de combinar minterms e simplificar a expressão resultante, pode ser sistematizado:
  - há vários modos
  - veremos um procedimento gráfico: **mapas de Karnaugh**
- Mapas de Karnaugh:
  - fácil manualmente, se n não é muito grande (2, 3 ou 4)
  - se n é grande, há técnicas melhores para automatizar o processo

MAPAS DE KARNAUGH PARA $n = 2$

- f é uma função de x e y.
- Considere a seguinte matriz de “quadrados”:

0 0	0 1
1 0	1 1

entradas b de B_2

	y'	y
x'	x'∧ y'	x'∧ y
x	x ∧ y'	x ∧ y

minterm E_b

- Lembrar rótulos:
  - linhas: x' e x
  - colunas: y' e y

MAPAS DE KARNAUGH PARA $n = 2$

- **Exemplo:** Seja a função $f : B_2 \rightarrow B$ dada por:

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Tabela-verdade de f

	y'	y
x'	1	1
x	0	0

Mapa de Karnaugh de f

- Como $S(f) = \{(0,0),(0,1)\}$, a expressão para f é:

$$(x' \wedge y') \vee (x' \wedge y) = x' \wedge (y' \vee y) = x'$$

MAPAS DE KARNAUGH PARA $n = 2$

- Quando os 1's de uma $f : B_2 \to B$ preenchem toda uma linha (coluna), o rótulo daquela linha (coluna) fornece a expressão para f.
  - Se os 1's preenchem apenas um quadrado, f é dada pelo minterm (completo) correspondente.
  - Em geral: quanto maior o quadrado de 1's, menor será a expressão de f.

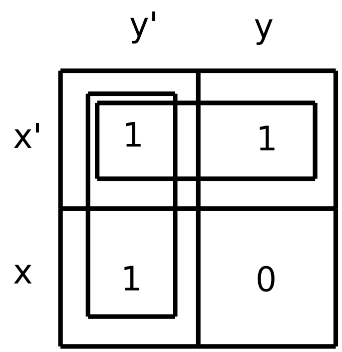
- Se os 1's não estão em um retângulo, podemos decompor estes valores na união de retângulos.
  - Então, a expressão de f será o "$\vee$" das expressões correspondentes a cada retângulo (pelo Teorema 2).

Mapas de Karnaugh para $n = 2$

- **Exemplo:** Seja a função $f : B_2 \to B$ dada por:

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabela-verdade de f



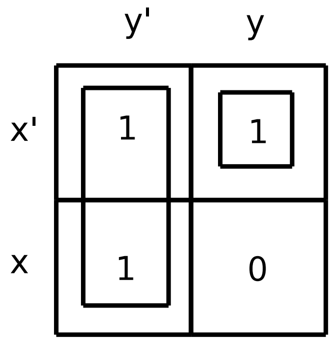
Mapa de Karnaugh de f

- Decompor os 1s nos dois retângulos mostrados.
- Expressão para o retângulo horizontal: x'
- Expressão para o retângulo vertical: y'
- Expressão para f: $x' \vee y'$

MAPAS DE KARNAUGH PARA $n = 2$

Exemplo (cont.):

- Outra decomposição dos 1s em retângulos:



- Também correta.
- Mas leva para uma expressão mais complexa: $(y' \vee (x' \wedge y)$
- Conclusão: a decomposição em retângulos não é única
- Tentar usar os maiores retângulos possíveis.

MAPAS DE KARNAUGH PARA $n = 3$

- Caso $f : B_3 \rightarrow B$ (função de x, y e z)
- Poderíamos construir um "cubo" de lado 2 para os valores de f, mas:
  - figuras 3D são inconvenientes
  - a idéia não poderia ser generalizada
- Em vez disto, usaremos um retângulo 2x4 do tipo:

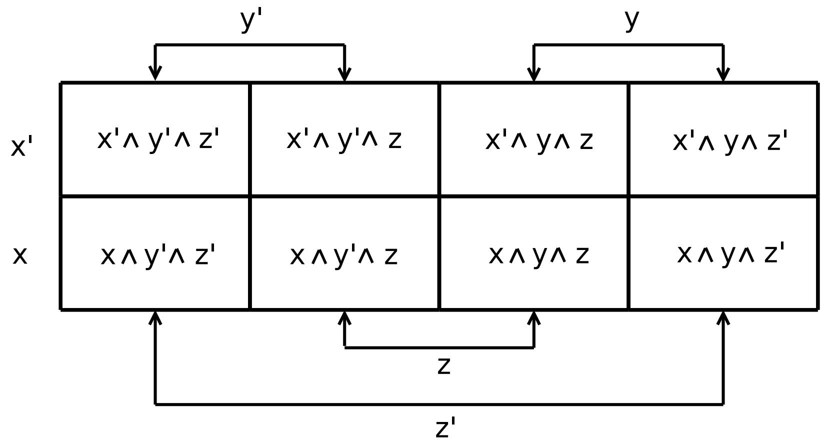
	0 0	0 1	1 1	1 0
0	0 0 0	0 0 1	0 1 1	0 1 0
1	1 0 0	1 0 1	1 1 1	1 1 0

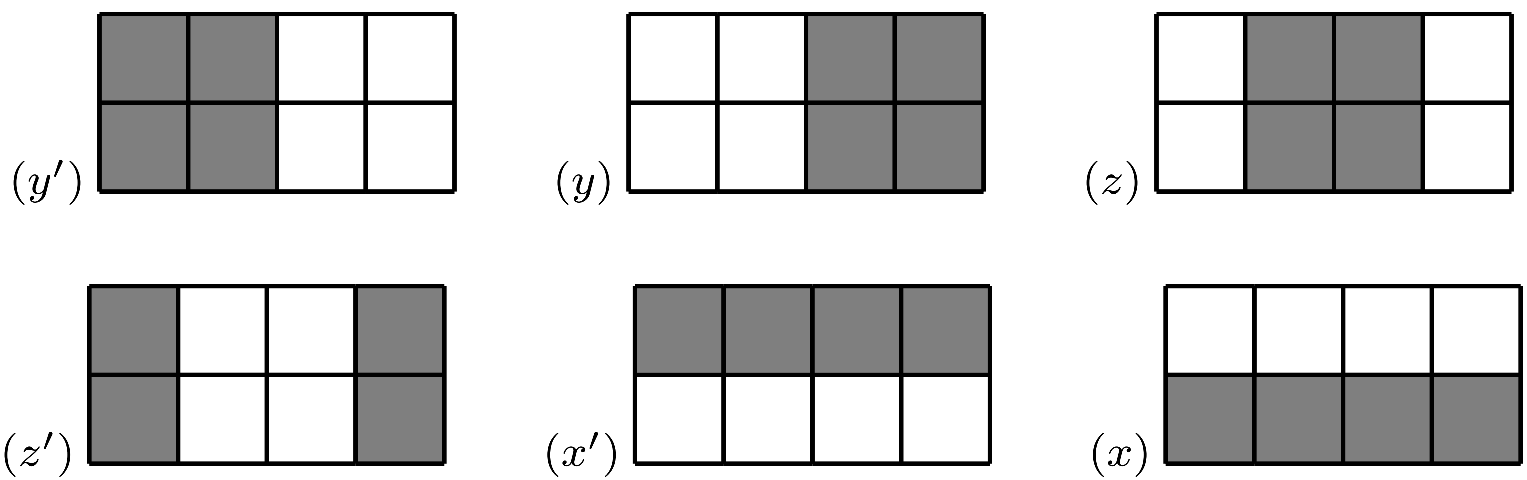
Tabela-verdade de f

	y'	y'	y	y
x'	x'∧ y'∧ z'	x'∧ y'∧ z	x'∧ y∧ z	x'∧ y∧ z'
x	x ∧ y'∧ z'	x ∧ y'∧ z	x ∧ y∧ z	x ∧ y∧ z'
	z'	z	z	z'

Mapa de Karnaugh de f

Mapas de Karnaugh para $n = 3$

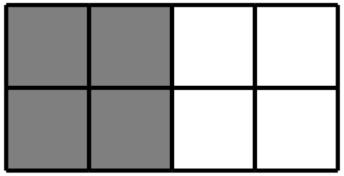




- Se os 1s de uma $f : B_3 \rightarrow B$ preenchem exatamente um destes retângulos sombreados, f é expressa por: x, y, z, x', y' ou z' (como indicado)

MAPAS DE KARNAUGH PARA $n = 3$

- **Exemplo**:

(y') 

- f corresponde à junção com "$\vee$" dos 4 minterms envolvidos:

$$(x' \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z) =$$

$$= ((x' \vee x) \wedge (y' \wedge z')) \vee ((x' \vee x) \wedge (y' \wedge z))$$

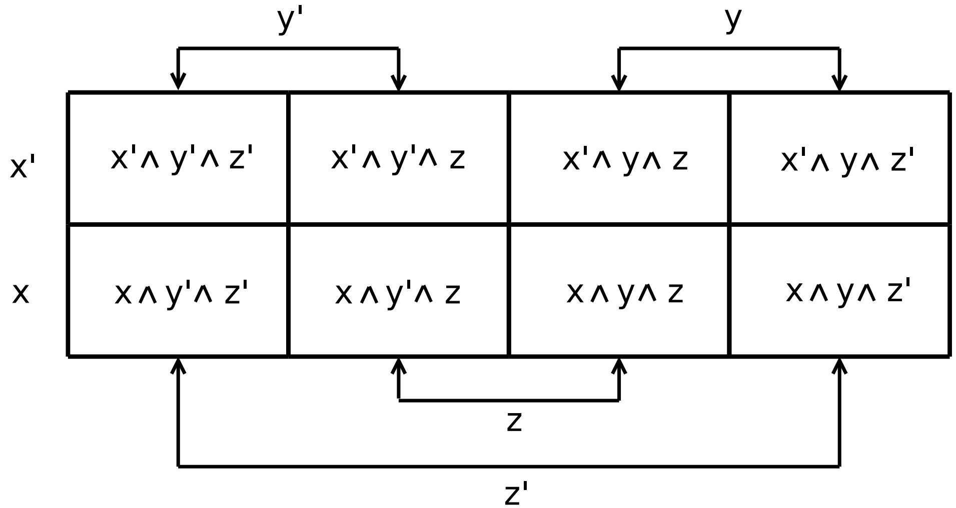
$$= (1 \wedge (y' \wedge z')) \vee (1 \wedge (y' \wedge z))$$

$$= (y' \wedge z') \vee (y' \wedge z)$$

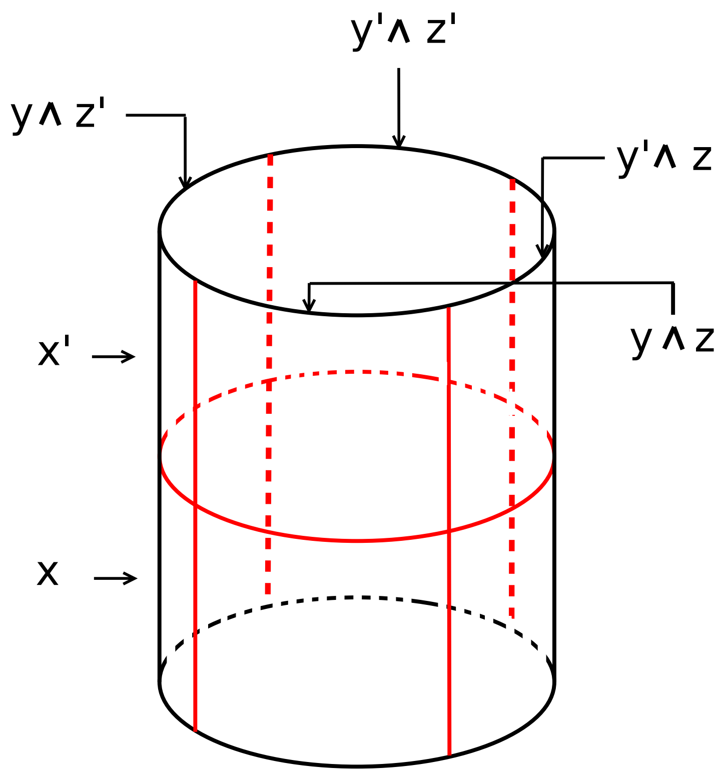
$$= y' \wedge (z' \vee z) = y' \wedge 1 = y' \qquad \square$$

- Pode-se mostrar que os outros 5 "rótulos" estão corretos.

- Retângulo básico para $n = 3$:

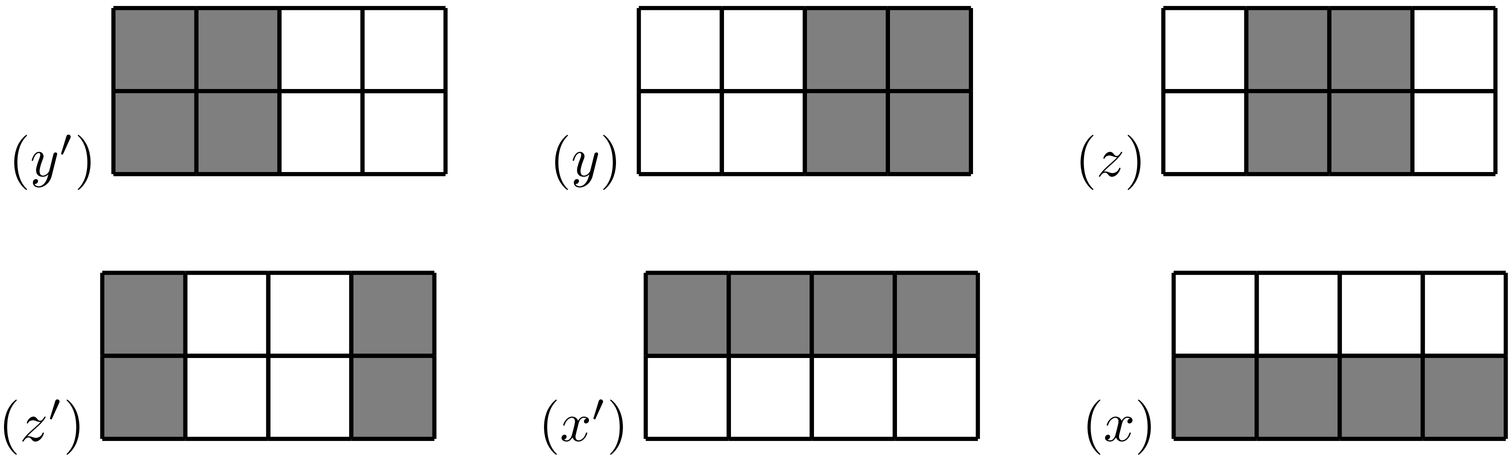


- “Fechando-o” como um cilindro, cada uma das 6 regiões consiste em:
  - duas colunas adjacentes
  - metade superior ou inferior



Mapas de Karnaugh para $n = 3$

- Expressões Booleanas das 6 regiões básicas são as únicas a serem consideradas.

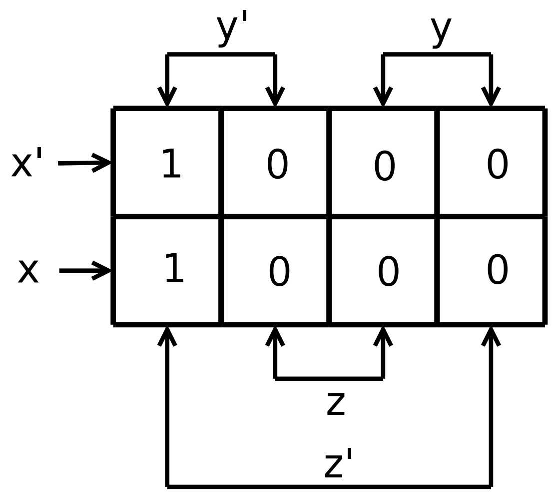


- Elas servem de rótulo para todos os mapas de B_3 para B.
- Se os 1s de uma $f : B_3 \rightarrow B$ compõem a intersecção de 2 ou 3 das regiões básicas:

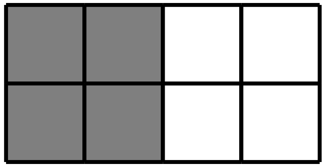
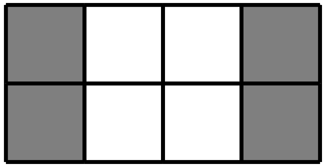
  expressão para f = "$\wedge$" *das expressões destas regiões*

MAPAS DE KARNAUGH PARA $n = 3$

- **Exemplo:** obtemos os 1s da função f dada por:



  - da intersecção das regiões:

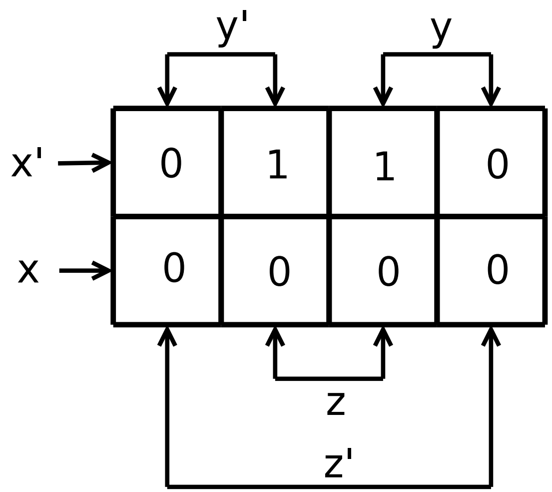
(y')  (z') 

  - logo, a expressão Booleana para f é: $y' \wedge z'$ $\square$

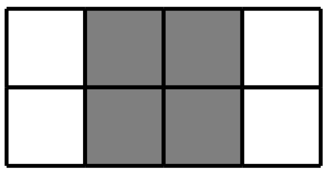
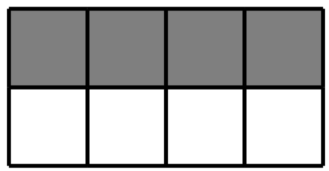
- Similar para as outras 3 colunas.

MAPAS DE KARNAUGH PARA $n = 3$

- **Exemplo:** obtemos os 1s da função f dada por:



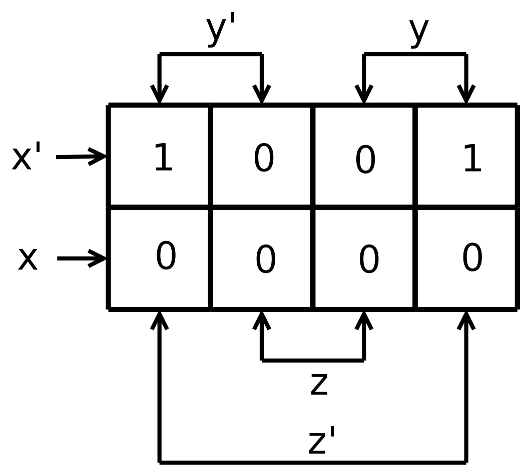
- da intersecção das regiões:

(z)  (x') 

- logo, a expressão Booleana para esta f é: $z \wedge x'$ $\square$

MAPAS DE KARNAUGH PARA $n = 3$

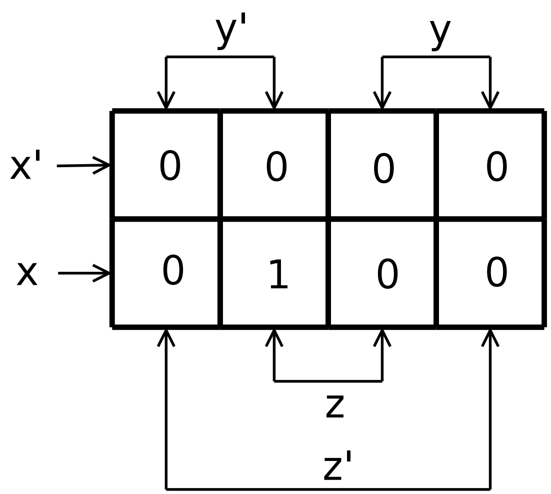
- Algo similar ao exemplo anterior ocorre para qualquer f com 1s em dois quadrados adjacentes.
- Existem 8 destas funções se vemos o retângulo como um cilindro.
  - Estamos incluindo casos do tipo:



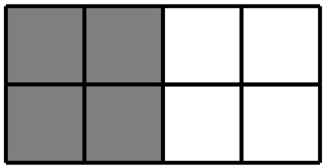
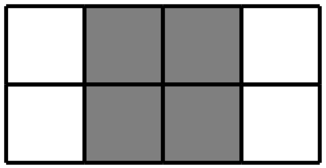
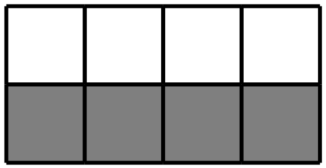
  - Cuja expressão é dada por: $z' \wedge x'$

Mapas de Karnaugh para $n = 3$

- Intersecção (não-vazia) de 3 regiões básicas: quadrado (minterm).
- **Exemplo:** o 1 da função f dada por:



  - vem da intersecção de:

(y')  (z)  (x) 

  - logo, a expressão Booleana para esta f é: $y' \wedge z \wedge x$ $\square$

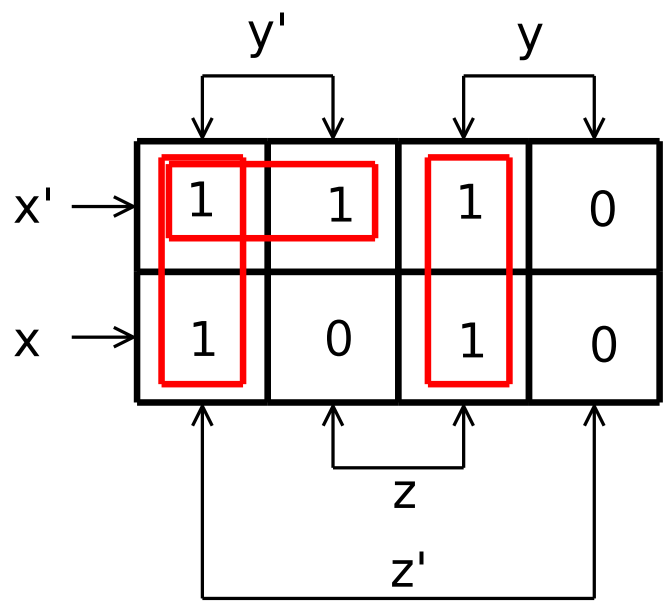
MAPAS DE KARNAUGH PARA $n = 3$

- Logo: sabendo os “rótulos”, pode-se obter todos os minterms.
- Sabemos, portanto, computar expressões Booleanas para toda $f : B_3 \rightarrow B$ cujos 1s formem um retângulo de comprimento $2^n \times 2^m$ (n=0:1; m=0:2).
- Caso os 1s não formem um retângulo, sempre se pode descrevê-los como união destes retângulos:
  - expressão para f = “$\vee$” das expressões de cada retângulo
- Quanto maiores os retângulos escolhidos, mais simples serão as expressões Booleanas resultantes.

Mapas de Karnaugh para $n = 3$

- **Exemplo:** Seja a função f dada por:

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1



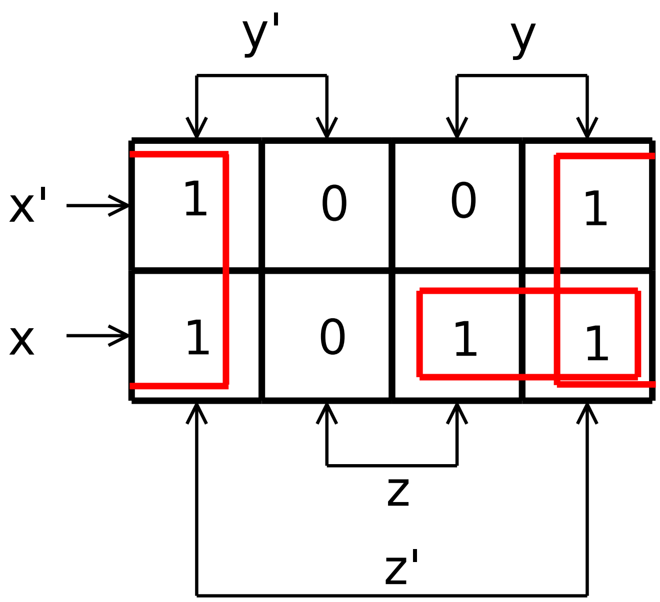
- Uma decomposição dos 1s é mostrada.
- De onde se deduz que uma expressão Booleana para f é:

$$(y' \wedge z') \vee (x' \wedge y') \vee (y \wedge z) \qquad \square$$

Mapas de Karnaugh para $n = 3$

- **Exemplo:** Seja a função f dada por:

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

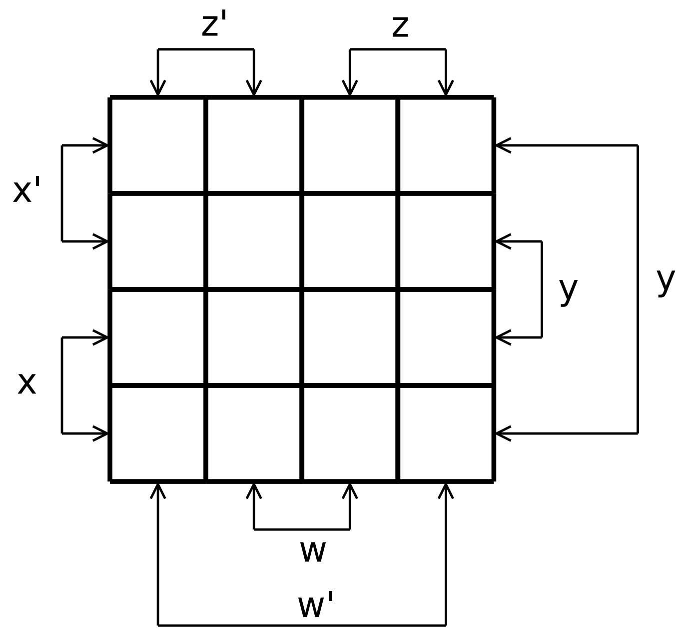


- Decomposição mostrada une a 1ra e a última colunas (cilindro).
- Expressão Booleana resultante: $z' \vee (x \wedge y)$ $\square$

MAPAS DE KARNAUGH PARA $n = 4$

- Entradas e rótulos para a função (de x,y,z,w) $f : B_4 \rightarrow B$:

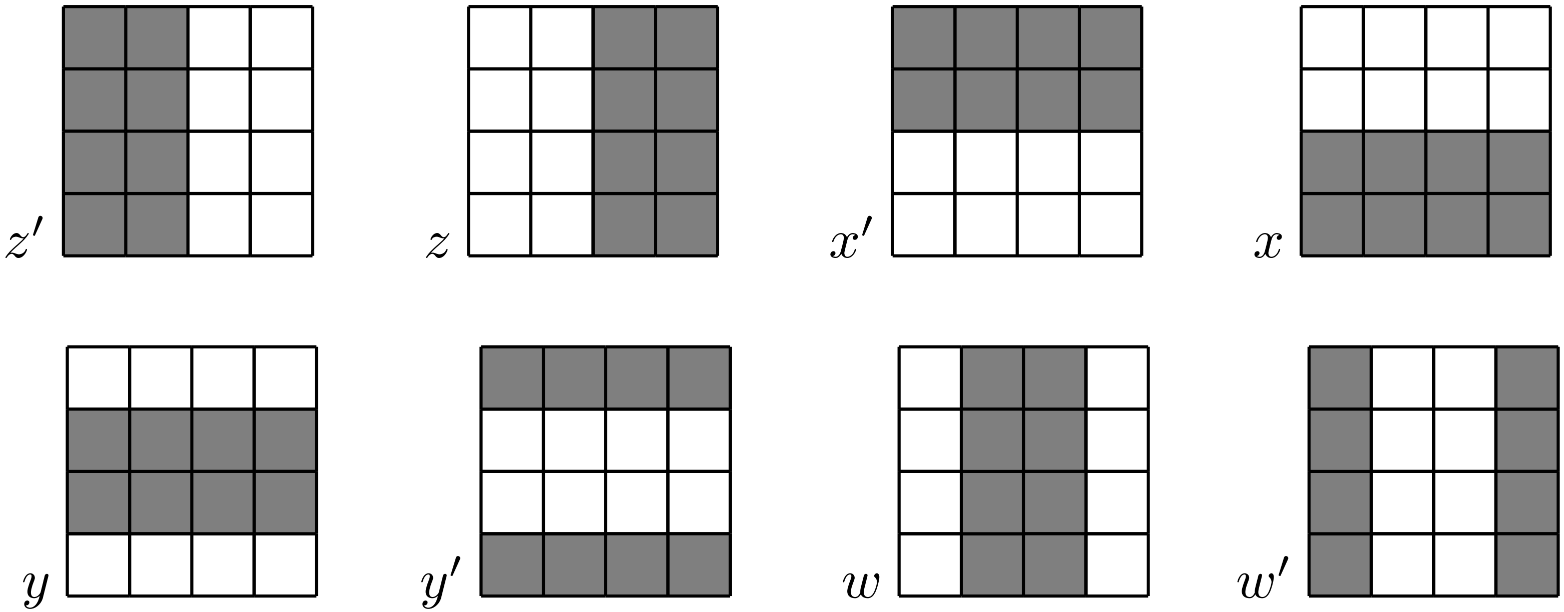
	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0101	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010



- 1ra-última colunas & 1ra-última linhas são adjacentes (toro)

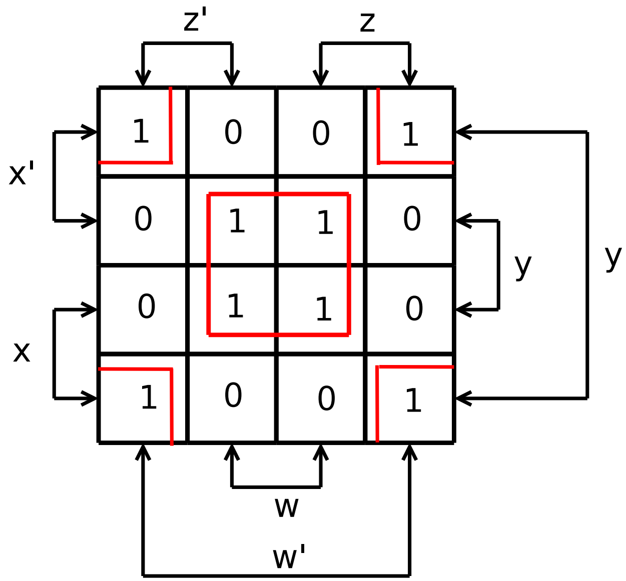
MAPAS DE KARNAUGH PARA $n = 4$

- Composição de retângulos com lados de comprimento 1, 2 ou 4.
- Expressão p/ estes retângulos = intersecção dos retângulos a seguir:



MAPAS DE KARNAUGH PARA $n = 4$

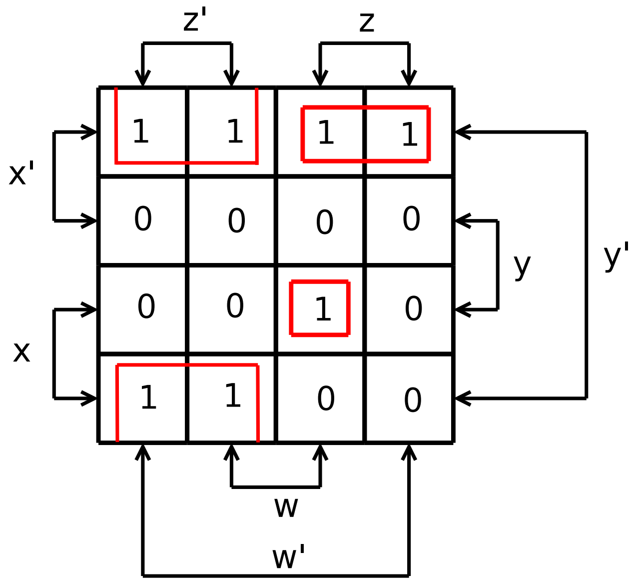
- **Exemplo:** Seja a função $f : B_4 \to B$ representada por:



- Segue a convenção: $f(0101) = 1$, $f(0001) = 0$, etc.
- Quadrado 2×2 central: "$w \wedge y$"
- Quadrado 2×2 dos 4 cantos: "$w' \wedge y'$"
- Expressão Booleana para f: $(w \wedge y) \vee (w' \wedge y')$ $\square$

Mapas de Karnaugh para $n = 4$

- **Exemplo:** Seja a função $f : B_4 \to B$ representada por:



- Expressão para f: $(z' \wedge y') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z \wedge w)$

$\square$

FUNÇÕES BOOLEANAS

- Final deste item.
- Dica: fazer exercícios sobre Funções Booleanas...