INE5403

Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

Prof. Daniel S. Freitas

UFSC - CTC - INE

2 - FUNDAMENTOS

2.1) Teoria dos Conjuntos

2.2) Números Inteiros

2.3) Funções

2.4) Seqüências e somas

2.5) Crescimento de funções

FUNÇÕES & COMPLEXIDADE

- Para cada método de solução de um problema (algoritmo), pode-se definir funções que relacionam:
  - o espaço necessário para guardar os dados
  - a quantidade de passos para resolvê-lo

  com o tamanho (magnitude) dos dados de entrada.

- Estas funções permitem concluir sobre:
  - memória necessária para armazenar todos os dados
  - tempo de execução de algoritmos

FUNÇÕES & COMPLEXIDADE

- Comparações de ordens de grandeza destas funções equivalem a comparar os custos computacionais de diferentes métodos de solução de um problema.
- **Exemplo:** Solução de um sistema linear $n \times n$:

método	nro de OPFs	tempo para $n = 30$ $(^*)$
Regra de Cramer	$\sim (n+1)!$	1.4×10^{12} $anos$
Eliminação gaussiana	$\sim n^3/3$	0.05×10^{-9} s

(*) *em um supercomputador BlueGene (∼180 TFlops)*

- A primeira função cresce muito mais rapidamente do que a 2a.
- Assunto relacionado com o tema complexidade de algoritmos.

CRESCIMENTO DE FUNÇÕES

- **Exemplo 1:** Considere o problema de determinar a transitividade de uma relação R sobre um conjunto A com n elementos.
  - número de passos necessários (média) pelo método 1: $t(n) = \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2$
  - número de passos necessários (média) pelo método 2: $s(n) = \frac{1}{8}n^4$
  - A tabela mostra que s “cresce mais rápido” do que t:

n	$t(n)$	$s(n)$
2	6	2
5	75	78
10	550	1250
50	63750	781250
100	505000	12500000

NOTAÇÃO "BIG-O"

- Sejam f e g funções cujos domínios são subconjuntos de $\mathbb{Z}^+$:
  - dizemos que f é $O(g)$ se existem constantes c e k tais que:

$$|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|, \qquad \forall n \geq k$$

  - lê-se: f é "big-O" de g

- Ou seja: se f é $O(g)$, então f não cresce mais rápido do que g.

- Vantagem da notação big-O:
  - pode-se estimar o crescimento de uma função sem ligar para multiplicadores constantes ou termos de ordem menor
  - ou seja: usando notação big-O, não precisamos ligar para o hardware e o software usados para implementar um algoritmo.

NOTAÇÃO "BIG-O"

- **Exemplo 2:** A função $f(n) = \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2$ é $O(g)$ para $g(n) = n^3$.
  - Para ver isto, note que:

    $\frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2 \leq \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^3$ se $n \geq 1$

  - Portanto:

    $\frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2 \leq 1 \cdot n^3$ se $n \geq 1$

  - Daí, escolhendo $c = 1$ e $k = 1$, obtemos:

    $|f(n)| \leq |g(n)| \qquad \forall n \geq 1$

  - O que mostra que f é $O(g)$ $\square$

NOTAÇÃO "BIG-O"

- Note que são possíveis outras escolhas para c, k e até mesmo g.
- Note que, se $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|, \quad \forall n \geq k$, então:
  - $|f(n)| \leq C \cdot |g(n)|, \quad \forall n \geq k, \quad \forall C \geq c$, e
  - $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|, \quad \forall n \geq K, \quad \forall K \geq k$
  - ou seja: quando existe um par de constantes, existem infinitos
- Agora seja novamente a função $t(n) = \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2$:
  - t é $O(h)$ para $h(n) = dn^3$, se $d \geq 1$, pois:
    - $|t(n)| \leq 1 \cdot |g(n)| \leq |h(n)|$
  - Observe também que t é $O(r)$ para $r(n) = n^4$, pois:
    - $\frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2 \leq n^3 \leq n^4, \quad \forall n \geq 1$

NOTAÇÃO "BIG-O"

- Ao analisar algoritmos, buscamos a função simples g de "crescimento mais lento" para a qual f é $O(g)$.
  - algumas vezes ela vem de um "conjunto de referência"
    - tal como as funções da forma x^n, para n dado
- É comum substituirmos g em $O(g)$ pela fórmula que define g:
  - portanto, escrevemos que "t é $O(n^3)$"
  - esta é a chamada notação "big-O"
- Ainda: dizemos que f e g possuem mesma ordem se:
  - f é $O(g)$ e
  - g é $O(f)$

NOTAÇÃO "BIG-O"

- **Exemplo 3:** As funções $f(n) = 3n^4 - 5n^2$ e $g(n) = n^4$, definidas para inteiros positivos n, possuem a mesma ordem.
  - Primeiro, note que:

$$\begin{aligned} 3n^4 - 5n^2 &\leq 3n^4 + 5n^2 \\ &\leq 3n^4 + 5n^4, \qquad \text{se } n \geq 1 \\ &= 8n^4. \end{aligned}$$

    - daí, fazendo $c = 8$ e $k = 1$, temos $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|, \; \forall n \geq k$
  - Conversamente:

$$n^4 = 3n^4 - 2n^4 \leq 3n^4 - 5n^2, \qquad \text{se } n \geq 2$$

    - isto ocorre porque, se $n \geq 2$, então: $2n^4 > 5n^2$
    - daí, usando 1 para c e 2 para k, concluímos que g é $O(f)$.

NOTAÇÃO "BIG-O"

- Se f é $O(g)$ mas g não é $O(f)$, dizemos que:
  - f é de ordem mais baixa do que g ou que:
  - f cresce mais lentamente do que g

NOTAÇÃO "BIG-O"

- **Exemplo 4:** $f(n) = n^5$ é de ordem mais baixa do que $g(n) = n^7$.
  - É claro que, se $n \geq 1$, então $n^5 \leq n^7$.
  - Agora suponha que existam c e k tais que:
    $n^7 \leq cn^5, \qquad \forall n \geq k$
    - então escolha um N tal que $N > k$ e $N^2 > c$
    - daí: $N^7 \leq cN^5 < N^2 \cdot N^5$
    - mas isto é uma contradição!
  - Portanto, f é $O(g)$ mas g não é $O(f)$
    - e f é de ordem mais baixa do que g
    - o que, é claro, concorda com a idéia usual sobre n^5 e n^7

NOTAÇÃO "BIG-O"

- Com a ajuda da notação big-O, podemos determinar se é prático usar um certo algoritmo para resolver um problema à medida que o tamanho dos dados de entrada cresce.
  - Exemplo:
    - temos dois algoritmos para resolver um problema:
      - um utiliza $100n^2 + 17n + 4$ operações
      - o outro utiliza n^3 operações
    - a notação big-O mostra que o primeiro usa muito menos operações quando n é grande
      - mas gasta menos operações para n pequeno
      - ($n = 10$, por exemplo)

NOTAÇÃO "BIG-O"

- Dica para encontrar as constantes:
  - primeiro, selecione um valor de k para o qual o tamanho de $|f(x)|$ pode ser prontamente estimado quando $x > k$
  - verificar se é possível encontrar um valor de C para o qual $|f(x)| < C|g(x)|$ para $x > k$.
  - abordagem ilustrada no exemplo a seguir
- Note que a notação big-O também funciona com funções definidas sobre os reais.

NOTAÇÃO "BIG-O"

- **Exemplo:** Mostre que $f(x) = x^2 + 2x + 1$ é $O(x^2)$

  Solução:

  - podemos prontamente estimar o tamanho de $f(x)$ quando $x > 1$:
    - $x < x^2$ e $1 < x^2$ quando $x > 1$
  - segue então que:

    $$0 \leq x^2 + 2x + 1 \leq x^2 + 2x^2 + x^2 = 4x^2$$

  - assim, fazendo $c = 4$ e $k = 1$, temos que $f(x)$ é $O(x^2)$, pois:

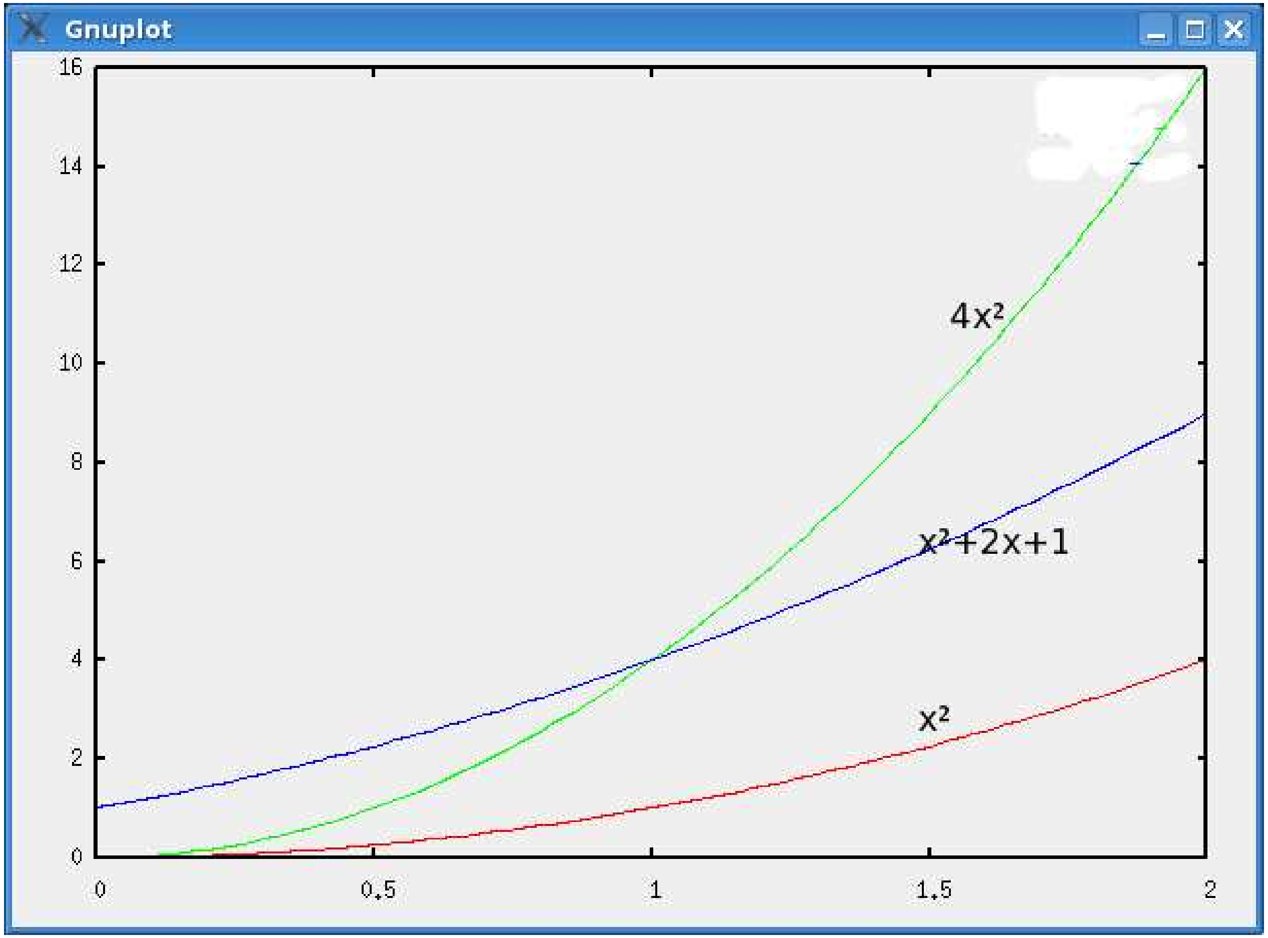
    $f(x) = x^2 + 2x + 1 < 4x^2$, sempre que $x > 1$

  - note que $c = 3$ e $k = 2$ também serviriam, pois:
    - se $x > 2$, temos que:

      $$0 \leq x^2 + 2x + 1 \leq x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$

NOTAÇÃO "BIG-O"

- **Exemplo (cont.):** $x^2 + 2x + 1 < 4x^2$ para $x > 1$:

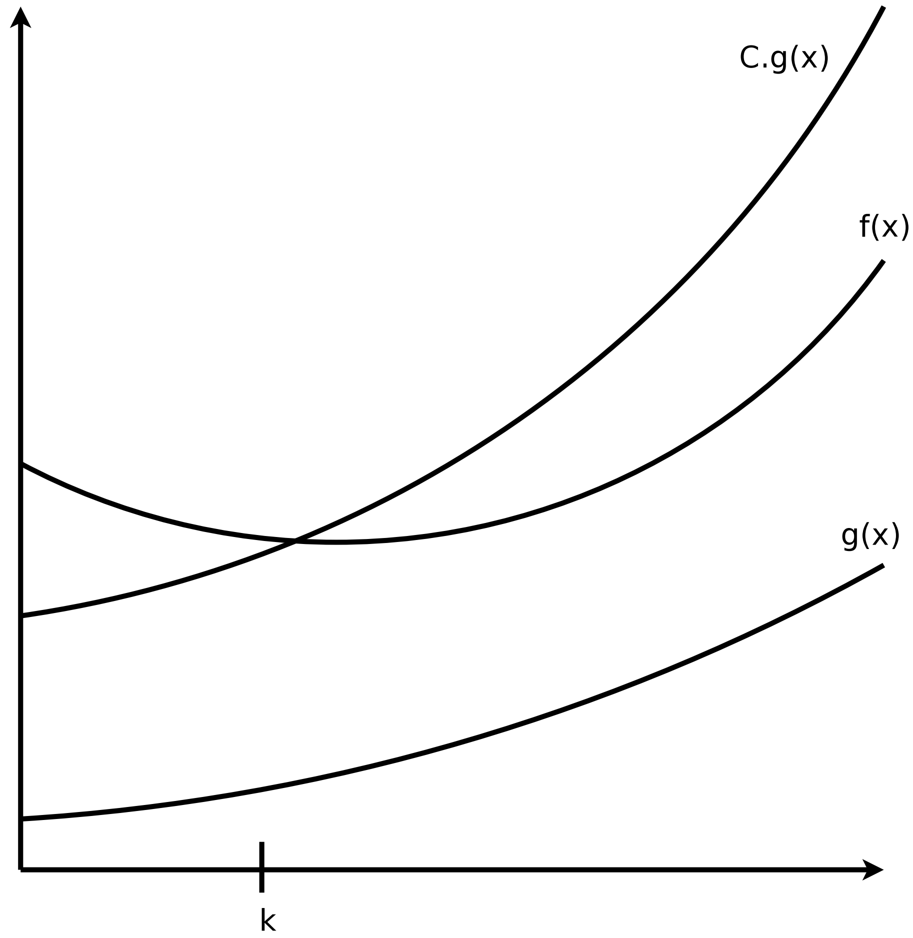


NOTAÇÃO "BIG-O"

- Observe que na relação "$f(x)$ é $O(x)$", x^2 pode ser trocada por qualquer função com valores maiores do que x^2.
  - Exemplo:
    - $f(x)$ é $O(x^3)$
    - $f(x)$ é $O(x^2 + 2x + 1)$, etc.
- Note que $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e $g(x) = x^2$ possuem mesma ordem.
- Note ainda que não é aceitável escrever: $f(x) = O(g(x))$
  - pois big-O significa apenas que existe uma desigualdade válida relacionando valores das funções f e g
  - para valores suficientemente grandes nos respectivos domínios
- No entanto, está correto dizer que: $f(x) \in O(g(x))$
  - pois $O(g(x))$ representa o conjunto de todas as funções que são $O(g(x))$

NOTAÇÃO "BIG-O"

- Ilustração de "$f(x)$ é $O(g(x))$" (ou: $f(x) < c.g(x)$ para $x > k$)



Notação "big-O"

- **Exemplo:** Mostre que $7x^2$ é $O(x^3)$

  Solução:

  - Note que, quando $x > 7$, temos: $7x^2 < x^3$
    - (multiplicar ambos os lados de $x > 7$ por x^2)
  - Logo, as constantes $c = 1$ e $k = 7$ mostram que $7x^2$ é $O(x^3)$
  - Alternativamente:
    - quando $x > 1$, temos que $7x^2 < 7x^3$
    - de modo que $c = 7$ e $k = 1$ também servem

NOTAÇÃO "BIG-O"

- **Exemplo:** Mostre que n^2 não é $O(n)$

  Solução:

  - Temos que mostrar que nenhum par de constantes c e k satisfaz:

    $n^2 \leq cn$, sempre que $n > k$

  - Para ver que as constantes não existem, note que, quando $n > 0$:
    - pode-se dividir ambos os lados de $n^2 \leq cn$ por n
    - para obter: $n \leq c$

  - Note, então, que, não importa quem sejam c e k:
    - a desigualdade $n \leq c$ não pode valer para todo n, com $n > k$
    - note que, uma vez fixado um valor para k:
      - quando n for maior do que o máximo de k e c,
      - não é verdade que $n \leq c$
      - muito embora tenhamos $n > k$

NOTAÇÃO "BIG-O"

- **Exemplo:** Mostre que x^3 não é $O(7x^2)$

  Solução:

  - Temos que mostrar que nenhum par de constantes c e k satisfaz:

    $x^3 \leq c(7x^2)$, sempre que $n > k$

  - A desigualdade $x^3 \leq c(7x^2)$ é equivalente a: $x \leq 7c$

  - Note que não existe c para o qual $x \leq 7c$ para todo $x > k$
    - não importa quem seja k, pois x pode ser tornado tão grande quanto se queira

  - Segue que não existem c e k para os quais exista a relação proposta.

RESULTADOS "BIG-O" IMPORTANTES

- É comum o uso de polinômios para estimar o crescimento de funções.
- O teorema a seguir mostra que o termo principal de um polinômio domina o seu crescimento.
- **Teorema 1:** Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, aonde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são números reais. Então $f(x)$ é $O(x^n)$.

RESULTADOS "BIG-O" IMPORTANTES

- **Exemplo 1(/3):** Use notação big-O para estimar a quantidade de operações envolvida na soma dos primeiros n inteiros positivos.

  Solução:

  - Como cada inteiro da soma é $< n$, segue que:

    $$1 + 2 + \cdots + n \leq n + n + \cdots + n = n^2$$

  - Então, tomando-se $c = 1$ e $k = 1$, concluímos que:

    $$1 + 2 + \cdots + n \text{ é } O(n^2) \qquad \square$$

Resultados "big-O" importantes

- **Exemplo 2(/3):** Forneça estimativas big-O para a função fatorial e para o seu logaritmo.
  - Nota: a função fatorial é definida por: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, $(0! = 1)$
  - Note que a função fatorial crece rapidamente:

    $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, ...,

    $20! = 2.432.902.008.176.640.000$

Solução:

- Note que cada termo no produto não excede n.
- Portanto:
$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \\ &\leq n \cdot n \cdot n \cdots n \\ &= n^n \end{aligned}$$
- o que mostra que $n!$ é $O(n^n)$ (tomando $c = 1$ e $k = 1$)

RESULTADOS "BIG-O" IMPORTANTES

- **Exemplo 2 (cont.):** Estimativa big-O para o log da função fatorial:
  - Tomando log de ambos os lados, obtemos:

    $log\ n! \leq log\ n^n = n.log\ n$

  - o que significa que:

    $log\ n!$ é $O(n.log\ n)$ (tomando $c = 1$ e $k = 1$)

RESULTADOS "BIG-O" IMPORTANTES

- **Exemplo 3(/3):** No cap sobre indução veremos que, para $n \in \mathbb{Z}^+$:

  $$n < 2^n$$

  - Isto permite concluir que: n é $O(2^n)$ $(k = 1, c = 1)$
  - Como o logaritmo é crescente, podemos tomar log desta desigualdade:

    $$log\, n < n$$

  - Segue que $log\, n$ é $O(n)$ ($k = 1,\ c = 1$)

NOTAÇÃO "BIG-O"

- (rel.) A notação big-O é usada para estimar o número de operações necessárias para resolver um problema usando um procedimento ou algoritmo específico.
- As funções usadas nestas estimativas comumente incluem:

$$1,\ log\,n,\ n\,log\,n,\ n^2,\ 2^n,\ n!$$

  - Usando Cálculo, pode-se mostrar que cada função nesta lista é menor do que a seguinte.
    - Ou seja: a relação entre cada função e sua sucessora tende a zero à medida que n cresce.

COMBINAÇÃO DE FUNÇÕES

- Muitos algoritmos são compostos de dois ou mais subprocedimentos.
  - Neste caso, a quantidade total de passos é a soma dos passos dos subprocedimentos.
  - Estimativas big-O para o total envolvem, portanto, a combinação das sub-estimativas.

COMBINAÇÃO DE FUNÇÕES

- Estimativas de combinações de funções exigem cuidado quando estimativas diferentes são combinadas.
- É frequentemente necessário estimar o crescimento de somas e de produtos de duas funções.

BIG-O DE SOMAS DE FUNÇÕES

- Suponha que:
  - f_1 seja $O(g_1(x))$: existem constantes c_1 e k_1 tais que:

    $|f_1(x)| \leq c_1|g_1(x)|$, quando $x > k_1$
  - f_2 seja $O(g_2(x))$: existem constantes c_2 e k_2 tais que:

    $|f_2(x)| \leq c_2|g_2(x)|$, quando $x > k_2$
- Estimativa para a soma de $f_1(x)$ e $f_2(x)$:

$$\begin{aligned} |(f_1 + f_2)(x)| &= |f_1(x) + f_2(x)| \\ &\leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \end{aligned}$$

  - em que foi usada a desigualdade triangular $|a + b| \leq |a| + |b|$

BIG-O DE SOMAS DE FUNÇÕES

- Então, quando x é maior do que k_1 e k_2, temos:

$$\begin{aligned} |f_1(x)| + |f_2(x)| &\leq c_1|g_1(x)| + c_2|g_2(x)| \\ &\leq c_1|g(x)| + c_2|g(x)| \\ &= (c_1 + c_2)|g(x)| \\ &= c|g(x)| \end{aligned}$$

  - onde: $c = c_1 + c_2$

    e: $|g(x)| = max(|g_1(x)|, |g_2(x)|)|$

- o que mostra que: $|(f_1 + f_2)(x)| \leq c.|g(x)|$
  - sempre que $x > k$
  - aonde $k = max(k_1, k_2)$

Big-O de somas de funções

- O raciocínio anterior demonstra o seguinte teorema:
- **Teorema 2:** suponha que:
  - $f_1(x)$ é $O(g_1(x))$
  - $f_2(x)$ é $O(g_2(x))$.

  Então:

  $$(f_1 + f_2)(x) \text{ é } O(max(|g_1(x)|, |g_2(x)|))$$

- Se, por acaso, tivermos estimativas para f_1 e f_2 em termos da mesma função g, vale o seguinte:
- **Corolário:** Suponha que $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são ambas $O(g(x))$. Então $(f_1 + f_2)(x)$ é $O(g(x))$.

Big-O de produtos de funções

- De modo similar, quando x é maior do que $max(k_1, k_2)$, segue que:

$$|(f_1 f_2)(x)| = |f_1(x)||f_2(x)|$$
$$\leq c_1|g_1(x)|.c_2|g_2(x)|$$
$$\leq c_1 c_2|(g_1 g_2)(x)|$$
$$\leq c|(g_1 g_2)(x)|$$

  - onde: $c = c_1 c_2$

- o que mostra que $f_1(x)f_2(x)$ é $O(g_1 g_2)$, pois:
  - existem constantes c e k (ou seja: $c = c_1 c_2$ e $k = max(k_1, k_2)$)
  - tais que: $|(f_1 f_2)(x)| \leq c|g_1(x)g_2(x)|$, sempre que $x > k$

BIG-O DE PRODUTOS DE FUNÇÕES

- O raciocínio anterior demonstra o seguinte teorema:
- **Teorema 3:** suponha que:
  - $f_1(x)$ é $O(g_1(x))$
  - $f_2(x)$ é $O(g_2(x))$.

  Então:

  $$(f_1 f_2)(x) \text{ é } O(g_1(x) g_2(x)).$$

Estimativas big-O

- Objetivo de usar a notação big-O:
  - escolher uma função $g(x)$ que cresça lentamente o suficiente para que $f(x)$ seja $O(g(x))$.
- Os exemplos a seguir ilustram como usar os dois teoremas anteriores para fazer isto.
- Nota: este é um tipo de análise frequentemente usado na análise de tempo necessário para resolver um problema com programas computacionais.

ESTIMATIVAS BIG-O

- **Exemplo:** Forneça uma estimativa big-O para

$$f(n) = 3n\,log(n!) + (n^2 + 3)\,log\,n \qquad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

Solução:

- estimando o produto $3n\,log(n!)$:
  - sabemos que: $log(n!)$ é $O(n\,log\,n)$
  - além disto: $3n$ é $O(n)$
  - o teorema 2, então, fornece a estimativa:

$$3n\,log(n!) \text{ é } O(n^2\,log\,n)$$

ESTIMATIVAS BIG-O

- **Exemplo:** Forneça uma estimativa big-O para

$$f(n) = 3n\,log(n!) + (n^2+3)\,log\,n \qquad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

Solução (cont.):

- Vimos que: $3n\,log(n!)$ é $O(n^2\,log\,n)$
- Estimando o produto $(n^2+3)\,log\,n$:
  - uma vez que $(n^2+3) < 2n^2$ quando $n > 2$, segue que:

    $$n^2 + 3 \quad \text{é} \quad O(n^2)$$

  - logo, do teorema 3 segue que:

    $$(n^2+3)\,log\,n \quad \text{é} \quad O(n^2\,log\,n)$$

- Com o teorema 2 novamente, temos que:

$$f(n) = 3n\,log(n!) + (n^2+3)\,log\,n \quad \text{é} \quad O(n^2\,log\,n) \qquad \square$$

ESTIMATIVAS BIG-O

- **Exemplo:** Forneça uma estimativa big-O para:

  $$f(x) = (x+1)\,log(x^2+1) + 3x^2$$

  Solução:

  - estimativa big-O para $(x+1)\,log(x^2+1)$:
    - $(x+1)$ é $O(x)$
    - além disto: $x^2+1 \leq 2x^2$ quando $x > 1$
    - portanto, se $x \geq 2$, podemos escrever:

      $$log(x^2+1) \leq log(2x^2) = log\,2 + 2log\,x \leq 3log\,x$$

    - isto mostra que:

      $$log(x^2+1) \quad \text{é} \quad O(log\,x)$$

    - então, o teorema 3 mostra que:

      $$(x+1)log(x^2+1) \text{ é } O(x\,log\,x) \qquad \square$$

ESTIMATIVAS BIG-O

- **Exemplo:** Forneça uma estimativa big-O para:

  $$f(x) = (x+1)\,log(x^2+1) + 3x^2$$

  Solução (cont.):

  - vimos que: $(x+1)log(x^2+1)$ é $O(x\,log\,x)$
  - daí, uma vez que $3x^2$ é $O(x^2)$, temos, pelo teorema 2, que:

    $f(x)$ é $O(max(x\,log\,x, x^2))$
  - já que $x\,log\,x \leq x^2$, para $x > 1$, temos: $f(x)$ é $O(x^2)$. $\square$

CRESCIMENTO DE FUNÇÕES

- Final deste item.
- **Dica**: fazer exercícios sobre Crescimento de funções...