INE5403

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA PARA A COMPUTAÇÃO

PROF. DANIEL S. FREITAS

UFSC - CTC - INE

3 - Indução e Recursão

3.1) Indução Matemática

3.2) Indução Forte

3.3) Definições Recursivas

3.4) Indução Estrutural

3.5) Algoritmos Recursivos

INDUÇÃO FORTE

- Outra forma para o princípio da indução matemática.
- Também consiste de 2 passos:
  1. Passo básico: provar que $P(1)$ é V
  2. Passo indutivo: provar que:

$$P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k) \;\Rightarrow\; P(k+1)$$

- Forma equivalente à primeira.
  - Escolha depende da conveniência.

INDUÇÃO FORTE

- A validade de ambos os princípios de indução segue do princípio do bom ordenamento.
    - De fato, os 3 princípios são equivalentes.
    - Ou seja, qualquer prova que utilize um destes princípios pode ser reescrita utilizando qualquer um dos outros dois.
    - Dependendo do caso a ser provado, pode ser mais conveniente usar um ou outro princípio...

INDUÇÃO FORTE

- Uma vez que a hipótese indutiva pode assumir $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ para provar $P(k+1)$, a indução forte é uma técnica mais flexível do que a indução simples.
- Pode-se mostrar que qualquer uma é uma técnica válida assumindo que a outra é válida.

Indução Forte

- Note que toda prova que usa indução simples pode ser considerada uma prova por indução forte, pois:
  - a hipótese indutiva de uma prova por indução simples é parte da hipótese indutiva de uma prova por indução forte
  - ou seja, se podemos completar o passo indutivo de uma indução simples mostrando que $P(k+1)$ decorre de $P(k)$:
    - $P(k+1)$ também decorre de todos os $P(1), P(2), \ldots, P(k)$
    - neste caso, temos garantia de que "mais do que" $P(k)$ é V
- Mas é bem mais trabalhoso converter uma prova por indução forte em uma prova por indução simples.

A Indução Forte & A Escada

- A indução forte também permite uma analogia com a escada infinita.
- Ela diz que podemos alcançar todos os degraus se:
  - pudermos alcançar o primeiro degrau
  - para todo inteiro k, se pudermos alcançar todos os primeiros k degraus, então poderemos alcançar o $(k+1)$-ésimo degrau
- O exemplo a seguir ilustra o uso da indução forte em um caso que não pode ser provado facilmente utilizando indução simples.

Indução Forte

- **Exemplo:** Suponha que:
  - podemos alcançar o 1^o e o 2^o degraus de uma escada infinita
  - sabemos que, uma vez estando em um degrau, podemos alcançar dois degraus acima

  Prove que podemos alcançar qualquer degrau da escada usando:

  (a) o princípio da indução matemática

  (b) indução forte

INDUÇÃO FORTE

- **Exemplo (a):** usando indução simples:

  Solução:

  - Passo básico: vale, pois podemos alcançar o primeiro degrau
  - Passo indutivo (tentativa):
    - hipótese indutiva: podemos alcançar o k-ésimo degrau da escada
    - precisamos mostrar que, se assumirmos esta hipótese, então poderemos alcançar o $(k+1)$-ésimo degrau
    - mas não existe modo evidente de completar este passo, pois:
      - não sabemos, a partir da informação dada, que podemos alcançar o degrau $(k+1)$ a partir do k-ésimo
      - só o que sabemos é: se podemos alcançar um degrau, então poderemos alcançar o degrau dois níveis acima...

INDUÇÃO FORTE

- **Exemplo (b):** usando indução forte:

  Solução:

  - Passo básico: vale, pois podemos alcançar o primeiro degrau
  - Passo indutivo:
    - Hipótese: podemos alcançar cada um dos 1^{os} k degraus
    - Precisamos mostrar que, assumindo esta hipótese, poderemos alcançar o $(k+1)$-ésimo degrau
    - Já sabemos que podemos alcançar o segundo degrau:
      - à medida em que $k > 2$, sempre poderemos alcançar o degrau $(k+1)$ a partir do degrau $(k-1)$
      - pois sabemos que podemos escalar dois degraus a partir de um degrau que já tenhamos atingido
    - Isto completa a prova por indução forte. $\square$

INDUÇÃO FORTE

- **Exemplo:** Prove que todo inteiro positivo $n > 1$ pode ser escrito unicamente como $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$, onde os p_i são primos e $p_1 < p_2 < \cdots < p_s$.

  Solução:

  - Passo básico:
    - $P(2)$ é V, uma vez que 2 é primo.
  - Passo indutivo:
    - vamos usar $P(2)$,$P(3)$,...,$P(k)$ para mostrar $P(k+1)$ "$k+1$ pode ser escrito unicamente como $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$"

Indução Forte

- **Exemplo (cont.):** Todo inteiro positivo $n > 1$ pode ser escrito unicamente como $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$.

  Solução:

  - Passo indutivo: há dois casos a considerar:
    - $k+1$ é primo: então $P(k+1)$ é V.
    - $k+1$ não é primo:
      - · então $k+1 = l.m$, aonde: $2 \leq l \leq k$ e $2 \leq m \leq k$
      - · usando $P(l)$ e $P(m)$, temos:
        $k = l.m = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \cdots q_t^{b_t} . r_1^{c_1} r_2^{c_2} \cdots r_v^{c_v} = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$
      - · onde cada $p_i = (q_j$ ou $r_k)$ e $p_1 < p_2 < \cdots < p_s$
      - · além disto, se $q_j = r_k = p_i$, então $a_i = b_j + c_k$
      - · caso contrário: $p_i = q_j$ e $a_i = b_j$ ou $p_i = r_k$ e $a_i = c_k$
      - · já que a fatoração de l e m são únicas, a fatoração de $k+1$ também o é.

INDUÇÃO FORTE

- **Exemplo:** Mostre que se n é um inteiro > 1, ele pode ser escrito como o produto de números primos.

  Solução:

  - Seja $P(n)$: "n pode ser escrito como o produto de números primos"
  - Passo básico: $P(2)$ é verdade, pois 2 pode ser escrito como um primo (ele mesmo).
  - Passo Indutivo:
    - Vamos assumir que $P(r)$ é verdade para todo $r \leq k$
    - Devemos mostrar que, com esta hipótese, $P(k+1)$ é V
    - Há dois casos a considerar:

      1) $k+1$ é primo: neste caso, $P(k+1)$ é imediatamente V

      2) $k+1$ é um número composto $\quad (\Rightarrow)$

INDUÇÃO FORTE

- **Exemplo (cont.):** Todo inteiro $n > 1$ pode ser escrito como o produto de primos.

  Solução:

  - Se $k+1$ é composto, ele pode ser escrito como:

    $$k+1 = a.b, \quad \text{onde} \quad 2 \leq a \leq b \leq k$$

  - Daí, pela hipótese de indução, tanto a como b podem ser escritos como o produto de primos
  - Portanto, se $k+1$ é composto, ele pode ser escrito como o produto de alguns primos.
    - (aqueles da fatoração de a e de b) $\square$

INDUÇÃO FORTE

- **Exemplo (1/3):** Considere um jogo em que dois jogadores se revezam removendo um nro qualquer que desejem de palitos de uma de duas pilhas. O jogador que remover o último palito ganha o jogo. Mostre que, se as duas pilhas contiverem o mesmo número de palitos inicialmente, o segundo jogador sempre pode garantir uma vitória.

  Solução:

  - Seja n o número de palitos em cada pilha.
  - Usaremos indução forte para provar $P(n)$: "o 2^o pode ganhar quando houver, inicialmente, n palitos em cada pilha"
  - Passo básico:
    - quando $n = 1$, o 1^o jogador só pode remover um palito de uma das pilhas
    - e sobra uma única pilha com um único palito...

INDUÇÃO FORTE

- **Exemplo (2/3):** Mostre que, se o jogo começar com o mesmo número de palitos na pilha, o 2^o jogador sempre pode vencer.

  Solução:

  - Passo indutivo:
    - Hipótese: $P(j)$ é V, $\forall j$, com $1 \leq j \leq k$
      - "o 2^o jogador sempre pode ganhar se há inicialmente j palitos em cada pilha"
    - Precisamos provar que $P(k+1)$ ("o 2^o jogador pode ganhar se o jogo começar com $(k+1)$ palitos em cada pilha") é V

INDUÇÃO FORTE

- **Exemplo (3/3):** Mostre que, se o jogo começar com o mesmo número de palitos na pilha, o 2^o jogador sempre pode vencer.

  Solução: Continuação do passo indutivo:

  - Suponha que há $(k+1)$ palitos em cada uma das pilhas e que o 1^o jogador remove r palitos ($1 \leq j \leq k$) de uma das pilhas
    - deixando $(k+1-r)$ palitos nesta pilha
  - Ao remover o mesmo nro da outra pilha, o 2^o jogador cria a situação onde há duas pilhas com $(k+1-r)$ palitos
    - uma vez que $1 \leq k+1-r \leq k$, o 2^o jogador pode ganhar pela hipótese indutiva.
  - Note que o 1^o jogador sempre perde se remover todos os $(k+1)$ palitos de uma das pilhas. $\square$

Indução Forte X Simples

- O exemplo a seguir mostra que alguns resultados podem ser prontamente provados utilizando-se tanto indução simples como indução forte.
- **Exemplo:** Prove que todo valor de postagem de 12 centavos ou mais pode ser formada usando-se somente selos de 4 e de 5 centavos.
- **Solução:** Usando indução simples:
  - Passo básico: 12 centavos = 3 X 4 centavos
  - Passo indutivo:
    - Hipótese: $P(k)$ é V ("valores de k centavos podem ser formados com selos de 4 e 5")

INDUÇÃO FORTE X SIMPLES

- **Exemplo:** “Todo valor $\geq$ 12 centavos pode ser formado com selos de 4 e de 5 centavos”.
- **Solução:** Usando indução simples (cont.):
  - Passo indutivo:
    - Hipótese: $P(k)$ é V (“valores de k centavos podem ser formados com selos de 4 e 5”)
    - Suponha que pelo menos um selo=4 foi usado para formar k:
      - basta substituir este selo por um de 5 para obter $k + 1$ centavos
    - Agora, se nenhum selo de 4 foi usado, k é formado só de 5s:
      - foram necessários pelo menos 3 selos de 5 para formar k (pois $k \geq 12$)
      - daí, substituindo-se 3 selos de 5 centavos por 4 selos de 4 centavos, pode-se formar $(k + 1)$. $\square$

Indução Forte X Simples

- **Exemplo:** "Todo valor $\geq$ 12 centavos pode ser formado com selos de 4 e de 5 centavos".
- **Solução:** Usando indução forte:
  - Passo básico: $P(12),\ P(13),\ P(14)\ e\ P(15)$ são V
  - Passo indutivo:
    - Hipótese: $P(j)$ é V para $12 \leq j \leq k$
    - Por esta hipótese, podemos assumir que $P(k-3)$ é V, pois $k - 3 \geq 12$
      - ou seja, podemos formar valores de $(k-3)$ centavos utilizando apenas selos de 4 e de 5
    - Para formar $(k+1)$, só precisamos adicionar um selo de 4 aos selos usados para formar $(k-3)$ centavos. $\square$