INE5403

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA PARA A COMPUTAÇÃO

PROF. DANIEL S. FREITAS

UFSC - CTC - INE

3 - INDUÇÃO E RECURSÃO

3.1) Indução Matemática

3.2) Indução Forte

3.3) Definições Recursivas

3.4) Indução Estrutural

3.5) Algoritmos Recursivos

INDUÇÃO MATEMÁTICA

- **Exemplo:** Provar que $n! \geq 2^{n-1}$ para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

  Prova: usar a técnica de prova por casos:

  1. $n = 1$: $1! = 1 \geq 2^{1-1} = 1$
  2. $n = 2$: $2! = 2 \geq 2^{2-1} = 2$
  3. $n = 3$: $3! = 6 \geq 2^{3-1} = 4$
  4. $n = 4$: $4! = 24 \geq 2^{4-1} = 8$
  5. $n = 5$: $5! = 120 \geq 2^{5-1} = 16$

  - Assim, como $n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, concluímos que esta proposição é verdadeira.

- **Questão**: provar que $n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$

INDUÇÃO MATEMÁTICA

- **Exemplo:** Qual é a fórmula para a soma dos primeiros n inteiros positivos ímpares?

  Solução:

  - Note que:

    $$1 = 1$$
    $$1 + 3 = 4$$
    $$1 + 3 + 5 = 9$$
    $$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
    $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

  - Ou seja, aparentemente a soma dos n primeiros inteiros positivos ímpares é dada por n^2.
  - Como ter certeza de que isto vale para qualquer n?
    - ou seja: como provar esta suposição?

Método da Indução Matemática

- Técnica de demonstração de conjecturas.
- **Ilustração:** imagine que você deseja subir em uma escada sem fim.
  - Como saber se você será capaz de alcançar um degrau arbitrariamente alto?

MÉTODO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

- Agora suponha que sejam verdadeiras as seguintes afirmações sobre as suas habilidades de subir escadas:
  1. você pode alcançar o primeiro degrau
  2. ao chegar a um degrau qualquer, você sempre sempre pode passar ao degrau seguinte (uma implicação).

- Pela sentença 1, você tem garantia de chegar ao primeiro degrau
  - pela 2, você garante que chega ao segundo
  - novamente pela 2, você garante que chega ao segundo
  - novamente pela 2, você garante que chega ao terceiro
  - assim por diante

Princípio da Indução Matemática

- Técnica de prova de teoremas que estabelece que uma propriedade $P(n)$ é V para todo n inteiro e positivo.

- A prova por indução matemática consiste de 2 passos:
  1. Passo básico: $P(1)$ é V
  2. Passo indutivo: para um k genérico fixo é verdadeiro o condicional:

$$P(k) \rightarrow P(k+1)$$

- Observações:
  1. Assumir que $P(k)$ é V não é o mesmo que assumir o que queremos provar.
  2. Esta é uma técnica de raciocínio dedutivo, usada para provar alguma idéia obtida com um raciocínio indutivo.

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

- **Exemplo 1:** Mostre que, se n é um inteiro positivo:

$$1 + 2 + \cdots + n = n.(n+1)/2$$

Solução:

- Passo básico: $P(1)$ é V, pois:

$$1 = 1.(1+1)/2$$

- Passo indutivo: vamos assumir que $P(k)$ vale, de modo que:

$$1 + 2 + \cdots + k = k.(k+1)/2$$

  - Com base nisto, queremos mostrar que vale:

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = (k+1).[(k+1)+1]/2 \quad \text{(??)}$$

  - Ora, adicionando-se $(k+1)$ a ambos os lados de $P(k)$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= k.(k+1)/2 + (k+1) \\ &= (k+1).(k+2)/2 \qquad \square \end{aligned}$$

- **Exemplo 2:** Use a indução matemática para provar que a soma dos primeiros inteiros positivos ímpares é n^2.

  Solução:

  - Seja $P(n)$: "A soma dos primeiros ímpares é n^2"
    - ou: "$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$"

  - Passo básico: comprovar $P(1)$
    - $P(1)$ estabelece que $1 = 1^2$, o que é V

  - Passo indutivo: mostrar que $P(k) \rightarrow P(k+1)$ é V
    - Suponha que $P(k)$ é V para um k fixo, ou seja:
      $$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$
    - A partir disto, queremos provar que $P(k+1)$ é V, ou seja:
      $$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2(k+1) - 1] = (k+1)^2 \quad \text{(??)}$$

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

- **Exemplo 2 (cont.):** (Provar que a soma dos primeiros ímpares é n^2)

  Solução:

  - Passo indutivo: mostrar que é V a proposição:

    $$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + [2(k+1)-1] = (k+1)^2$$

    - Uma vez que $P(k)$ é V, o lado esquerdo acima fica:

      $$\begin{aligned} k^2 + [2(k+1)-1] &= k^2 + (2k+2-1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

    - Isto mostra que, efetivamente, $P(k+1)$ segue de $P(k)$.

  - Assim, uma vez que $P(1)$ e $P(k) \rightarrow P(k+1)$ são V, independente da escolha de k, concluímos que é V a proposição:

    $$\forall n\, P(n)$$

Princípio da Indução Matemática

- **Exemplo 3:** Prove que, para qualquer inteiro positivo n, $2^n > n$

Solução:

- Passo básico: comprovar $P(1)$
  - $P(1)$ estabelece que $2^1 > 1$, o que é V
- Passo indutivo: mostrar que $P(k) \rightarrow P(k+1)$ é V
  - Suponha que $P(k)$ é V para um k fixo, ou seja:

    $$2^k > k$$
  - Multiplicando os dois lados por 2, temos:

    $$2.2^k > 2.k$$
    $$2^{k+1} > k + k \geq k + 1$$
    $$2^{k+1} > k + 1$$
  - e $P(k+1)$ é V $\square$

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

- **Exemplo 4:** Prove que $n^2 > 3.n$, para $n \geq 4$.

  Solução:

  - Passo básico: neste caso,o passo inicial é $P(4)$:
    - $4^2 > 3.4$, é, efetivamente, V
  - Passo indutivo:
    - Hipótese de indução: $k^2 > 3.k$, para $k \geq 4$
    - Queremos mostrar que $(k+1)^2 > 3.(k+1)$

$$
\begin{aligned}
(k+1)^2 &= k^2 + 2.k + 1 & \\
&> 3.k + 2.k + 1 & \text{(pela hipótese de indução)} \\
&\geq 3.k + 8 + 1 & \text{(já que } k \geq 4\text{)} \\
&> 3.k + 3 = 3(k+1) & \text{(já que } k \geq 4\text{)}
\end{aligned}
$$

    - Isto mostra que $P(k+1)$ é V sempre que $P(k)$ é V. $\square$

Princípio da Indução Matemática

- **Exemplo 5:** Sejam $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ conjuntos quaisquer. Prove por indução que:

$$\overline{(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

  - (versão estendida das leis de De Morgan)

Solução:

- Seja $P(n)$: "vale a igualdade para quaisquer n conjuntos"
- Passo básico:

  $P(1)$ é $\overline{A_1} = \overline{A_1}$, o que é V
- Passo indutivo: usar $P(k)$ para provar $P(k+1)$ $(\Rightarrow)$

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

- **Exemplo 5 (cont.):** Prove que: $\overline{(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

  Solução:

  - Passo indutivo:

$$\overline{(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i)} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}}$$

$$= \overline{(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cup A_{k+1}} \quad \text{(associatividade de } \cup\text{)}$$

$$= \overline{(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)} \cap \overline{A_{k+1}} \quad \text{(De Morgan para 2 conjs)}$$

$$= (\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i}) \cap \overline{A_{k+1}} \quad \text{(usando } P(k)\text{)}$$

$$= (\bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{A_i})$$

  - Portanto, a implicação $P(k) \rightarrow P(k+1)$ é uma tautologia.
    - Logo, pelo princípio da indução, $P(n)$ é V, $\forall n \geq 1$. $\square$

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

- **Exemplo 6:** Mostre que todo conjunto finito não-vazio é contável, ou seja, pode ser arranjado em uma lista.

  Solução:

  - Seja $P(n)$: "se A é qualquer conjunto com $|A| = n \geq 1$, então A é contável."
  - Passo básico:
    - Seja $A = \{x\}$ um conjunto com um elemento.
    - x forma uma sequência cujo conjunto correspondente é A.
    - Então $P(1)$ é V.
  - Passo indutivo: usar $P(k)$ para provar $P(k+1)$ $\quad (\Rightarrow)$

Princípio da Indução Matemática

- **Exemplo 6 (cont.):** "Todo conjunto finito não-vazio é contável."

  Solução:

  - Passo indutivo:
    - $P(k)$ é "se A é qualquer conjunto com k elementos, então A é contável"
    - Agora escolha qualquer conjunto B com $k+1$ elementos.
    - Escolha um elemento qualquer x em B:
      - $B - \{x\}$ é um conjunto com k elementos
      - $P(k)$ garante que existe uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_k$ que tem $B - \{x\}$ por seu conjunto correspondente
      - ora, $x_1, x_2, \ldots, x_k, x$ tem B por seu conjunto correspondente
      - então B é contável
    - Já que B pode ser qualquer conjunto com $k+1$ elementos, $P(k+1)$ é V se $P(k)$ é V.
    - Conclusão: $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \geq 1$. $\square$

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

- **Observação:** Ao utilizar a indução para provar resultados, tome cuidado para não assumir que "$P(k)$ é V" para forçar o resultado esperado.
- Esta aplicação incorreta do princípio da indução matemática é um erro bastante comum.

Por que a indução é válida? (1/3)

- Por que o método da indução matemática é uma técnica de prova válida?
- Em consequência do “Axioma do bom ordenamento” para os inteiros positivos:
  - “Todo sub-conjunto não-vazio do conjunto dos inteiros positivos tem um elemento mínimo.”

POR QUE A INDUÇÃO É VÁLIDA? (2/3)

- Axioma do bom ordenamento: “Todo sub-conjunto não-vazio do conjunto dos inteiros positivos tem um elemento mínimo.”
- Argumento:
  - Suponha que sabemos que $P(1)$ é V e que a proposição $P(k) \rightarrow P(k+1)$ é V, independente do k escolhido.
  - Agora assuma que existe pelo menos um inteiro positivo para o qual $P(n)$ é F.
  - Então o conjunto S dos “inteiros positivos para os quais $P(n)$ é F” é não-vazio.

POR QUE A INDUÇÃO É VÁLIDA? (3/3)

- Argumento:
  - O conjunto S dos "inteiros positivos para os quais $P(n)$ é F" é não-vazio.
  - Logo, pelo bom ordenamento, S tem um elemento mínimo (m):
    - sabemos que $m \neq 1$, pois assumimos que $P(1)$ é V
    - uma vez que m é positivo e > 1, temos que:

      $m - 1$ é um inteiro positivo
    - mas $m - 1$ não pode estar em S, já que $m - 1 < m$
    - então $P(m - 1)$ deve ser V
  - Daí, uma vez que $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ também é V, devemos ter:

    $P(m)$ é V (contradição!)
  - Portanto, $P(n)$ deve ser V para todo inteiro positivo n. $\square$

Erros em provas usando indução

- Em toda prova usando indução matemática, devemos executar de forma correta e completa tanto o passo básico como o passo indutivo.
- Devemos ter cuidado porque algumas vezes é difícil localizar o erro em uma prova por indução defeituosa.

ERROS EM PROVAS USANDO INDUÇÃO

- **Exemplo (1/4):** Encontre o erro na falsa prova abaixo de que todo conjunto de linhas no plano não-paralelas aos pares se encontra em um ponto comum.
- **"Prova":**
  - Seja $P(n)$: "Todo conjunto de n linhas não-paralelas aos pares no plano se encontra em um ponto comum".
  - Vamos "provar" que $P(n)$ é V para todo inteiro positivo $n \geq 2$.
    - Passo básico: $P(2)$ é V, pois quaisquer duas linhas não-paralelas no plano se encontram em um ponto comum.
    - Passo indutivo: $(\Rightarrow)$

Erros em provas usando indução

- **Exemplo (2/4):** "Todo conjunto de n linhas no plano não-paralelas aos pares se encontra em um ponto comum."
- **"Prova":**
  - Passo indutivo: $(\Rightarrow)$
    - Hipótese: $P(k)$ é V ("k linhas não-paralelas aos pares no plano se encontram em um ponto")
    - Agora considere $k+1$ linhas distintas no plano:
      - pela hipótese: as primeiras k se encotram em um ponto p_1
      - também: as últimas k se encontram em um ponto p_2
      - agora se fosse $p_1 \neq p_2$, todas as linhas que os contêm deveriam ser uma só (2 pontos determinam uma reta)
      - portanto: p_1 e p_2 são o mesmo ponto
      - e o ponto $p_1 = p_2$ está em todas as $k+1$ linhas

ERROS EM PROVAS USANDO INDUÇÃO

- **Exemplo (3/4):** "Todo conjunto de n linhas no plano não-paralelas aos pares se encontra em um ponto comum."
- **"Prova":**
  - Acabamos de mostrar que $P(k+1)$ é V, assumindo que $P(k)$ é V:
    - ou seja, mostramos que, se assumirmos que todo conjunto de k ($k \geq 2$) linhas distintas não-paralelas se encontram em um ponto, isto valerá também para $k+1$ linhas.
  - Completamos o passo básico e o passo indutivo de uma prova por indução que parece correta...

ERROS EM PROVAS USANDO INDUÇÃO

- **Exemplo (4/4):** Mostre que há na prova por indução para: “Todo conjunto de n linhas no plano não-paralelas aos pares se encontra em um ponto comum.”

- **“Solução”:**
  - Note que o passo indutivo requer que $k \geq 3$ (!!)
    - Ocorre que não podemos mostrar que $P(2)$ implica em $P(3)$!
  - Quando $k = 2$, o nosso objetivo é mostrar que quaisquer 3 linhas distintas não-paralelas aos pares se encontram em um ponto.
  - As duas primeiras linhas se encontram mesmo em um ponto p_1 e as duas últimas em um ponto p_2.
  - Mas, neste caso, p_1 e p_2 não precisam ser o mesmo ponto
    - pois apenas a 2a linha é comum a ambos os conjuntos... $\square$

INDUÇÃO MATEMÁTICA

- Final deste item.
- **Dica**: fazer exercícios sobre Indução Matemática...