6.12- PROCESSO DE ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

Dado um espaço vetorial V e uma base qualquer B = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ desse espaço, é possível, a partir dessa base, determinar uma base ortogonal de V.

Para isso, inicialmente vamos supor uma base B = $\{v_1, v_2\}$.

Seja $w_1 = v_1$. Precisamos encontrar a partir de v_2 um novo vetor v_2 ortogonal a w_1, isto é, $w_2.w_1 = 0$. Tomamos, então $w_2 = v_2 - \alpha w_1$, onde α é um número escolhido de modo que $w_2.w_1 = 0$, isto é, $(v_2 - \alpha w_1).w_1 = 0$.

Isto significa que $\alpha = \dfrac{v_2.w_1}{w_1.w_1}$

temos então

$$w_1 = v_1$$
$$w_2 = v_2 - \frac{v_2.w_1}{w_1.w_1}.w_1$$

Observe que w_2 foi obtido de v_2, subtraindo-se deste a projeção do vetor v_2 na direção de w_1,

$$\frac{v_2.w_1}{w_1.w_1}.w_1$$

e que w_1 e w_2 são vetores ortogonais não nulos que podem então ser normalizados fazendo

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} \text{ e } u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$$

obtendo assim uma base B' = $\{u_1, u_2\}$ que é ortonormal.

Exemplo: Seja B = {(2, 1), (1, 1)} uma base do IR^2. Vamos obter a partir de B uma base ortonormal em relação ao produto interno usual.

O procedimento de ortogonalização de dois vetores pode ser generalizado para uma base B = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, da seguinte forma:

Tomemos como no caso anterior

$w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2.w_1}{w_1.w_1}.w_1$$

Então, w_1 é ortogonal a w_2.

Agora procuramos um vetor w_3 que seja ortogonal ao mesmo tempo a w_1 e w_2. Por analogia ao caso anterior vamos estabelecer que $w_3 = v_3 - a_2w_2 - a_1w_1$ e determinar os valores de a_1 e a_2 tais que $w_3.w_1 = 0$ e $w_3.w_2 = 0$. Desenvolvendo estas duas condições, obtemos

$$\begin{aligned} w_3.w_1 = 0 &\Leftrightarrow (v_3 - a_2w_2 - a_1w_1).w_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow v_3.w_1 - a_2(w_2.w_1) - a_1(w_1.w_1) = 0 \end{aligned}$$

Assim, como $w_2.w_1 = 0$, temos que $w_3.w_2 = 0$ se, e somente se

$$a_1 = \frac{v_3.w_1}{w_1.w_1}$$

$$a_2 = \frac{v_3.w_2}{w_2.w_2}$$

portanto,

$$w_3 = v_3 - \frac{v_3.w_2}{w_2.w_2}.w_2 - \frac{v_3.w_1}{w_1.w_1}.w_1$$

Observe que a_2 e a_1 são os *coeficientes de Fourier* de v_3 com relação a w_1 e a w_2 respectivamente. Procedendo de maneira análoga, obtem-se $w_4, ..., w_n$.

Assim, a partir de uma base B = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de um espaço vetorial euclidiano V, construímos a base ortogonal $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ dada por:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2.w_1}{w_1.w_1}.w_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{v_3.w_2}{w_2.w_2}.w_2 - \frac{v_3.w_1}{w_1.w_1}.w_1$$

$$\vdots$$

$$w_n = v_n - \frac{v_n.w_{n-1}}{w_{n-1}.w_{n-1}}.w_{n-1} - \ldots - \frac{v_n.w_1}{w_1.w_1}.w_1$$

Esse procedimento e conhecido como *processo de ortogonalizacao de Gram-Schmidt*.

Para obter uma base ortonormal, basta normalizar os vetores w_i.

Exemplos:

1- Seja B = {(1, 1, 1), (0, 2, 1), (0, 0, 1)} uma base do IR^3. Obtenha a partir de B uma base ortonormal em relação ao produto interno usual.

2- Seja B = {(1, 0), (0, 1)} a base canonica do IR^2. Obtenha a partir de B uma base ortonormal em relação ao produto interno $(x_1, y_1).(x_2, y_2) = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2$.

Exercicios

1- Seja B = {(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)} uma base do IR^3. Esses vetores constituem uma base B = $\{v_1, v_2, v_3\}$ não-ortogonal em relação ao produto interno usual. Obtenha, a partir de B, uma base B' = $\{u_1, u_2, u_3\}$ que seja ortonormal.

2- Em relação ao produto interno usual, determinar uma base ortonormal do seguinte subespaço vetorial do IR^3:

$S = \{(x, y, z) \in IR^3 / x + y - z\} = 0$

RESPOSTAS

1- B' = $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$. 2- B' = $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$.