UFSC / CTC / INE

Disciplina: Paradigmas de Programação

Curso de Ciências da Computação: INE5416-0432

Prof. Dr. João Dovicchi*

Solução da Lista de Exercícios 1

Exercício 1

Seja

$$y = f(x) = \frac{x+1}{x^2}$$

encontre $f(y)$.

Solução:

Sendo a função $f(x)$ uma função racional, devemos avaliá-la quando a variável independente é, ela mesma, uma função. Assim,

$$f(y) = \frac{y+1}{y^2} = \frac{\frac{x+1}{x^2} + 1}{\left(\frac{x+1}{x^2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow f(y) = \frac{\frac{(x^2+x+1)}{x^2}}{\frac{(x^2+2x+1)}{x^4}}$$

$$f(y) = x^2 \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2}$$

*http://www.inf.ufsc.br/~dovicchi --- dovicchi@inf.ufsc.br

Exercício 2

Encontre $f(x)$ se

$$f(x-1) = (x^2 - 1)$$

Solução:

A função é um polinômio com um polinômio como argumento. O problema pede para se avaliar a função para a variável x.

É necessário encontrar como podemos substituir $x-1$ por x para se encontrar $f(x)$. Isto pode ser feito, certamente, substituindo-se $f(x-1)$ por $f(x-1+1)$. Então x deve ser substituído por $x+1$ e, portanto, se:

$$f(x-1) = x^2 - 1 \Rightarrow f((x+1)-1) = (x+1)^2 - 1$$

logo:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 - 1 = x^2 + 2x$$

Exercício 3

Seja

$$f(x) = x + \frac{1}{x},$$

prove que:

$$(f(x))^3 = f(x^3) + 3f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Solução:

Novamente, temos uma função polinomial e temos que avaliar a função ao cubo, sendo que isto requer o cálculo da função para os argumentos ao cubo. Assim,

$$\begin{array}{rcl} (f(x))^3 & = & \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 \\ & = & x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x^2\frac{1}{x} + 3x\frac{1}{x^2} \\ & = & x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \end{array}$$

Por sua vez,

$$f(x^3) = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

Então:

$$(f(x))^3 = f(x^3) + 3f(x)$$

Mas podemos observar que:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + x = f(x)$$

Assim:

$$(f(x))^3 = f(x^3) + 3f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercício 4

Seja

$$f(x) = \frac{|x|}{x},\ x \neq 0$$

encontre

$$|f(a) - f(-a)|$$

.

Solução:

A função envolve o módulo na forma racional. Assim, podemos avaliar a função sem o módulo:

$$f(a) - f(-a) = \frac{|a|}{a} - \frac{|-a|}{-a} = \frac{|a|}{a} + \frac{|a|}{a} = \frac{2\,|a|}{a};\ a \neq 0$$

Sabemos, ainda, que $|a| = \pm a$, então:

$$f(a) - f(-a) = \frac{2(\pm a)}{a} = \pm 2$$

Assim, seu módulo é:

$$|f(a) - f(-a)| = 2;\ a \neq 0$$

Exercício 5

Sejam as funções $f : \Re \rightarrow [0, \infty)$, $g : \Re \rightarrow [0, \infty)$ e $h : \Re \rightarrow [0, \infty)$, definidas para:

$$f(x) = x^4,\ g(x) = \sqrt{1 + x^3},\ h(x) = \frac{x^2 + 1}{2x + 1}$$

encontre o domínio e contradomínio das composições:

a. $f \circ g$

b. $f \circ g \circ h$

Solução:

Pode-se perceber, claramente, que a função $g(x)$ só pode ser definida como $g : [0, \infty) \to \Re$ e não o inverso, como declarado e a função $h(x)$ definida como $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$, as compostas $f \circ g$ e $f \circ g \circ h$, no entanto, são definidas para $\Re \to [0, \infty)$.