

---

## **2 - COMO FUNCIONA A SIMULAÇÃO (2)**

**Referencia principal:**

**Freitas, P. J. Introdução à Modelagem e Simulação de Sistemas, 2ª Ed.,  
Visual Books, 2008, Cap. 2.**

# Tratando a Variabilidade dos Sistemas

---

- ◆ Na **solução analítica**: dados empregados para determinar valores dos parâmetros (**comportamento médio**) das variáveis do sistema;
- ◆ Na **modelagem e simulação**: dados visam compreender o **comportamento dinâmico e aleatório das variáveis**, com a intenção de **incorporá-lo** ao modelo via funções probabilísticas.

# Incorporando Aleatoriedade

---

13,6	27,9	1,1	12,3	9,7	12,7	15,3	4,1	13,5	0,7
10,8	29,5	5,8	9,9	6,1	5,5	7,7	17,4	7,7	26,4
15,9	5,9	11,6	2,7	2,9	1,7	4,6	35,5	15,8	17,5
0,6	4,0	18,1	21,8	3,8	14,6	12,9	8,5	0,4	2,5
33,1	39,8	6,4	1,8	8,3	11,9	4,4	16,2	6,8	0,3
18,0	12,1	16,5	8,5	12,5	1,4	5,6	8,2	0,9	17,9
10,9	24,4	1,02	28,1	2,0	42,7	29,9	4,9	3,1	8,1
0,4	10,4	8,1	2,74	13,0	0,7	4,8	2,8	4,3	3,4
28,5	28,4	3,02	15,5	17,3	1,6	17,7	1,2	13,4	14,1
14,9	4,3	1,6	0,6	6,9	22,6	10,2	7,3	3,8	10,4

Dados brutos dos tempos entre chegadas  
de 100 automóveis (min.)

# Distribuição de Frequências dos TEC

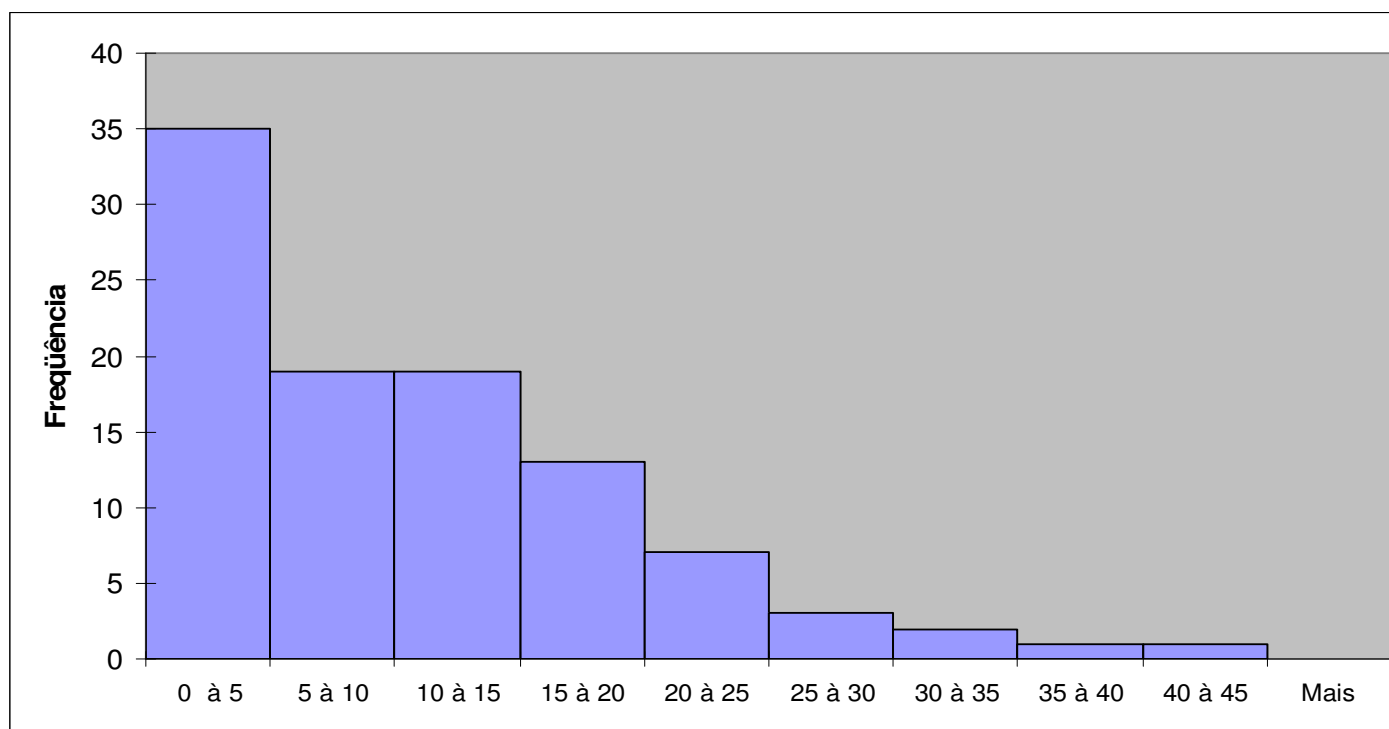
---

Classes	Observações
0 → 5	35
5 → 10	19
10 → 15	19
15 → 20	13
20 → 25	3
25 → 30	7
30 → 35	1
35 → 40	2
40 → 45	1
Mais de 45	0

Distribuição de frequências das observações efetuadas para os  
**tempos entre chegadas.**

# Distribuição de Frequências dos TEC

---



**Histograma** das observações efetuadas para os  
**Tempos entre Chegadas.**

# Distribuição de Frequências dos TS

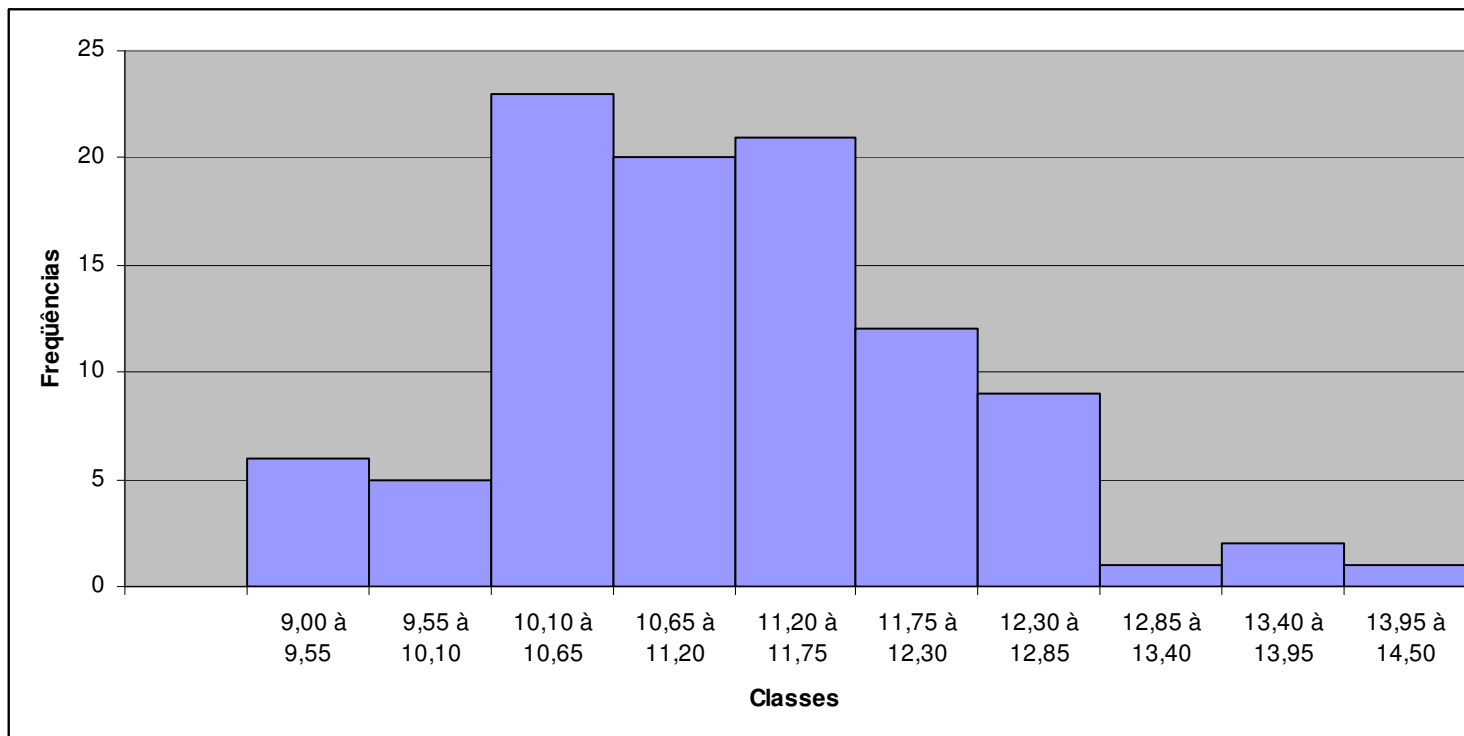
---

Classes	Observações
9,00 → 9,55	6
9,55 → 10,10	5
10,10 → 10,65	23
10,65 → 11,20	20
11,20 → 11,75	21
11,75 → 12,30	12
12,30 → 12,85	9
12,85 → 13,40	1
13,40 → 13,95	2
13,95 → 14,50	1

Distribuição de frequências das observações efetuadas para os  
**tempos de serviço**

# Distribuição de Frequências dos TS

---



**Histograma** das observações efetuadas para os  
tempos de serviço

# Instruções para Sorteio

---

- ◆ Procedimento sistemático semelhante ao das rifas ou loterias. Desta forma, a seguinte estratégia é adotada:
  - ✓ Um total de 100 bilhetes, são confeccionados e colocados numa urna;
  - ✓ Cada número representa o **ponto médio da classe** a qual pertence.
  - ✓ Um bilhete representante da classe que inicia em 10 e termina em 15, deve estar marcado com o número 12,5 (min.).
  - ✓ As diversas **classes** devem concorrer com um **número de bilhetes equivalentes aos percentuais de participação na amostra levantada**.
  - ✓ Por exemplo: Classe de 0 a 5, deve concorrer com 35 bilhetes do total de 100 bilhetes. O valor 2,5 (min.) estará anotado em cada um deles.



# Tabela de Simulação

Cliente	Tempo desde a última chegada (minutos)	Tempo de chegada no relógio	Tempo do Serviço (minutos)	Tempo de início do serviço no relógio	Tempo do cliente na fila (minutos)	Tempo final do serviço no relógio	Tempo do cliente no sistema (minutos)	Tempo livre do operador (minutos)
1	17,5	17,5	11,5	17,5	0,0	29,0	11,5	17,5
2	7,5	25,0	12,6	29,0	4,0	41,6	16,6	0,0
3	12,5	37,5	12,0	41,6	4,1	53,6	16,1	0,0
4	2,5	40,0	11,5	53,6	13,6	65,1	25,1	0,0
5	2,5	42,5	12,0	65,1	22,6	77,1	34,6	0,0
6	2,5	45,0	10,4	77,1	32,1	87,5	42,5	0,0
7	2,5	47,5	11,5	87,5	40,0	99,0	51,5	0,0
8	37,5	85,0	13,1	99,0	14,0	112,1	27,1	0,0
9	17,5	102,5	10,4	112,1	9,6	122,5	20,0	0,0
10	17,5	120,0	11,5	122,5	2,5	134,0	14,0	0,0
11	32,5	152,5	11,5	152,5	0,0	164,0	11,5	18,5
12	37,5	190,0	9,8	190,0	0,0	199,8	9,8	26,0
13	7,5	197,5	10,9	199,8	2,3	210,7	13,2	0,0
14	12,5	210,0	11,5	210,7	0,7	222,2	12,2	0,0
15	12,5	222,5	10,4	222,5	0,0	232,9	10,4	0,3
			170,6		145,5		316,1	62,3

Novo modelo e simulação do posto de serviços

# Resultados

---

$$\text{Tempo médio de espera na fila} = \frac{\sum \text{tempos de espera na fila}}{\text{Número total de clientes}} = \frac{145,5}{15} = 9,7 \text{ min.}$$

$$\text{Probabilidade de um cliente esperar na fila} = \frac{\text{Numero de clientes que esperaram}}{\text{Numero total de clientes}} = \frac{11}{15} = 0,73$$

$$\text{Probabilidade do operador livre} = \frac{\sum \text{tempo livre do operador}}{\text{Tempo total de simulação}} = \frac{62,3}{240} = 0,26$$

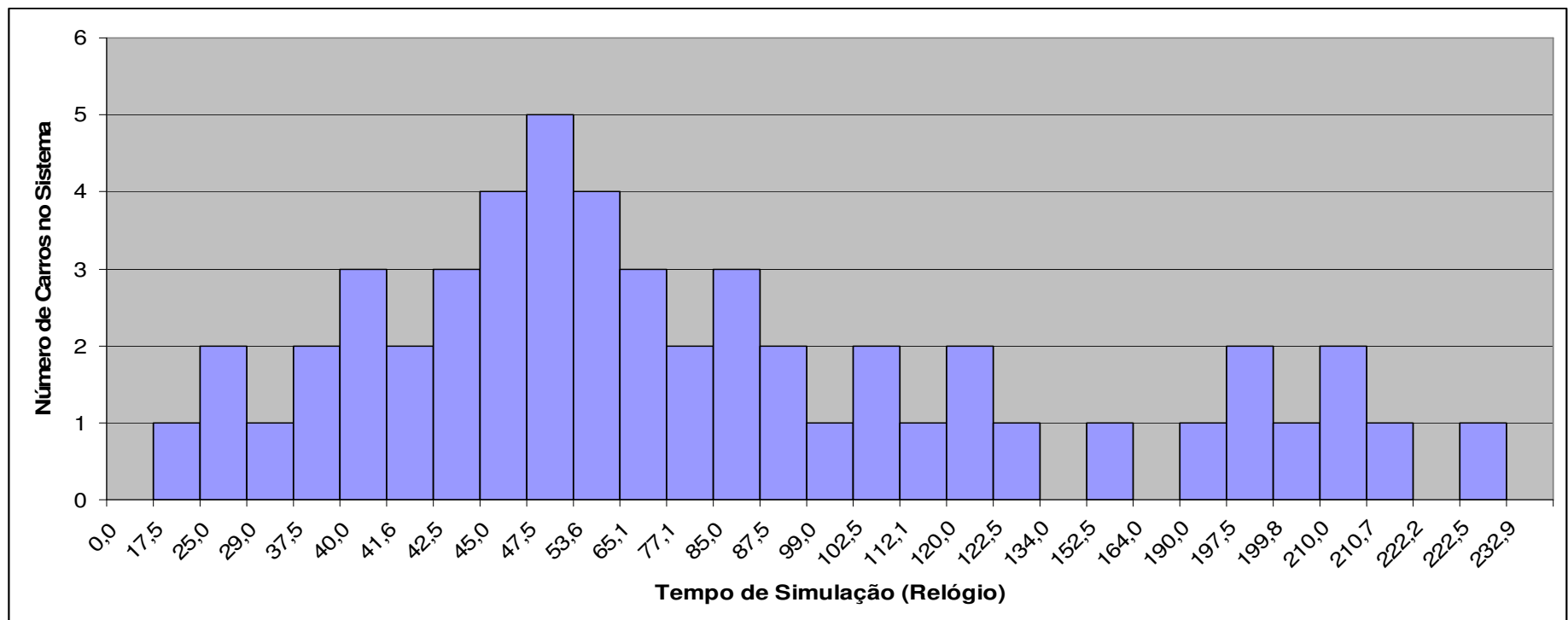
$$\text{Tempo médio de serviço} = \frac{\sum \text{Tempo de serviço}}{\text{Numero total de clientes}} = \frac{170,6}{15} = 11,37 \text{ min}$$

$$\text{Tempo médio despendido no sistema} = \frac{\sum \text{tempos no sistema}}{\text{Número de clientes}} = \frac{316,1}{15} = 21,07 \text{ min.}$$

# Nº de Carros no Sistema

---

Gráfico do comportamento da variável número de carros no sistema ao longo do período simulado.



# Cronologia dos Eventos

Cliente	Tempo desde a última chegada (minutos)	Tempo de chegada no relógio	Tempo do Serviço (minutos)	Tempo de início do serviço no relógio	Tempo do cliente na fila (minutos)	Tempo final do serviço no relógio
1	17,5	17,5	11,5	17,5	0,0	29,0
2	7,5	25,0	12,6	29,0	4,0	41,6
3	12,5	37,5	12,0	41,6	4,1	53,6
4	2,5	40,0	11,5	53,6	13,6	65,1
5	2,5	42,5	12,0	65,1	22,6	77,1
6	2,5	45,0	10,4	77,1	32,1	87,5
7	2,5	47,5	11,5	87,5	40,0	99,0
8	37,5	85,0	13,1	99,0	14,0	112,1
9	17,5	102,5	10,4	112,1	9,6	122,5
10	17,5	120,0	11,5	122,5	2,5	134,0
11	32,5	152,5	11,5	152,5	0,0	164,0
12	37,5	190,0	9,8	190,0	0,0	199,8
13	7,5	197,5	10,9	199,8	2,3	210,7
14	12,5	210,0	11,5	210,7	0,7	222,2
15	12,5	222,5	10,4	222,5	0,0	232,9
			170,6		145,5	

Evento	Relógio	Carros no Sistema	Estado do Operador
Início	0,0	0	Livre
Chegada	17,5	1	Ocupado
Chegada	25,0	2	Ocupado
Saída	29,0	1	Ocupado
Chegada	37,5	2	Ocupado
Chegada	40,0	3	Ocupado
Saída	41,6	2	Ocupado
Chegada	42,5	3	Ocupado
Chegada	45,0	4	Ocupado
Chegada	47,5	5	Ocupado
Saída	53,6	4	Ocupado
Saída	65,1	3	Ocupado
Saída	77,1	2	Ocupado
Chegada	85,0	3	Ocupado
Saída	87,5	2	Ocupado
Saída	99,0	1	Ocupado
Chegada	102,5	2	Ocupado
Saída	112,1	1	Ocupado
Chegada	120,0	2	Ocupado
Saída	122,5	1	Ocupado
Saída	134,0	0	Livre
Chegada	152,5	1	Ocupado
Saída	164,0	0	Livre
Chegada	190,0	1	Ocupado
Chegada	197,5	2	Ocupado
Saída	199,8	1	Ocupado
Chegada	210,0	2	Ocupado
Saída	210,7	1	Ocupado
Saída	222,2	0	Livre
Chegada	222,5	1	Ocupado
Saída	232,9	0	Livre
Fim	240,0	0	Livre

- ◆ As mudanças de estado do sistema acontecem na medida em que os eventos ocorrem.
- ◆ Os eventos ocorrem em pontos discretos no tempo (..17,5; 25,0;..232,9; 240,0).

# Dúvidas

---

- ◆ É possível tirar conclusões definitivas sobre o comportamento deste sistema com os elementos calculados pelo modelo de simulação?
- ◆ Será que os resultados obtidos são decorrentes da própria natureza do sistema simulado ou foram provocados pelo modelo e pelos processos envolvidos na execução da simulação?
  - ✓ Lembre-se que geramos, **por sorteio**, valores das variáveis aleatórias relativas aos tempos entre chegadas de carros e os tempos de serviços.

# Dúvidas

---

- ◆ **A resposta é não.**
- ◆ Não se pode tirar conclusões definitivas sobre o comportamento deste sistema apenas com os resultados obtidos de uma “rodada” de simulação. Motivos
  1. **As estatísticas obtidas nesta simulação dependem dos valores aleatórios sorteados. Fossem outros os valores sorteados e os resultados seriam diferentes.**
  2. **É o pequeno número de elementos amostrados para que se possa chegar a conclusões definitivas.**
- ◆ Estes problemas são, no entanto, **tratáveis**.

# Tratamento dos Resultados

---

- ◆ O primeiro problema pode ser resolvido pela aplicação de métodos que permitam **controlar a variabilidade** dos procedimentos utilizados.
  - ✓ É preciso ter a certeza de que a **variabilidade encontrada nos resultados** seja decorrente somente da **aleatoriedade dos processos** envolvidos no sistema modelado e não de um **descontrole** sobre a geração das **variáveis aleatórias** obtidas pelos sorteios, o qual se refletirá nos resultados da simulação.
  - ✓ Veremos como se faz esse controle mais adiante.

# Tratamento dos Resultados

---

- ◆ O segundo problema é uma **questão de tratamento estatístico adequado**.
  - ✓ Processos **experimentais (como a simulação)**, devem ser adequadamente (estatisticamente) tratados.
  - ✓ **Toda** a afirmação ou conclusão a partir de elementos resultantes de simulações exige um mínimo de atenção, sobre os dados obtidos.
  - ✓ Tirar conclusões com base em uma **pequena quantidade de dados** que apresentam alta variabilidade pode ser **arriscado**.



# Incorporando Distribuições Empíricas

---

- ◆ Como vimos é possível o emprego de variáveis aleatórias em modelos de simulação predeterminando empiricamente seu comportamento e empregar as distribuições de frequências.
- ◆ Dificuldade: como realizar os sorteios.
- ◆ No exemplo anterior, sugerimos o emprego de uma sistemática semelhante a sorteios lotéricos. Nem sempre esta é a técnica apropriada ou mesmo possível.
- ◆ Com o advento dos computadores, uma técnica matemática, conhecida desde o século passado, deu origem ao **Método de Monte Carlo** (MMC).

# O Método de Monte Carlo (MMC)

---

- ◆ O MMC é um método de solução numérica de problemas que se baseia na simulação de variáveis aleatórias.
- ◆ Na aplicação do MMC, os dados são artificialmente obtidos por meio de sorteios que geram valores associados a variável aleatória de interesse.
- ◆ Para a realização dos sorteios emprega-se um mecanismo gerador de números aleatórios (tabela ou um programa) e uma distribuição de frequência da variável aleatória.

# Tabelas de números aleatórios

---

- ◆ Tippett em 1927, com 41.600 dígitos gerados a partir de estatísticas obtidas em censos
- ◆ Kendall e Babington-Smith em 1939, com 100.000 dígitos, gerados a partir de um sistema mecânico, criado pelos próprios autores.
- ◆ Os esforços de tabulação praticamente se encerraram com a publicação, em 1955, da monumental tabela com um milhão de dígitos aleatórios da Rand Corporation (<http://www.rand.org/publications/classics/randomdigits/>) obtidos a partir de uma roleta eletrônica, feita especialmente para este propósito.

# Tabela de números aleatórios

---

98543	59525	21114	73109	69095	.....
87060	95250	50277	17486	07962	.....
82170	68014	07937	98003	40146	.....
48673	26100	23776	66959	84477	.....
08560	52600	66188	63746	05849	.....
68708	28373	27635	52562	18148	.....
80511	00208	61965	66983	70232	.....
02253	27120	53172	99800	74603	.....
37110	07752	38216	54843	22496	.....
01548	06209	79410	99823	17603	.....
81417	85771	25961	84381	88582	.....
36602	77275	35226	53601	91939	.....
79337	00250	64655	89710	19526	.....
60564	55609	64304	10940	69422	.....
87552	78655	14220	30037	07403	.....
04951	65135	00626	99163	34098	.....
01761	01488	35218	11762	11586	.....
41451	57175	88050	23528	46360	.....
03646	98017	51286	18545	02393	.....
02863	33742	19979	10905	34863	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....

## Tabela de números aleatórios

---

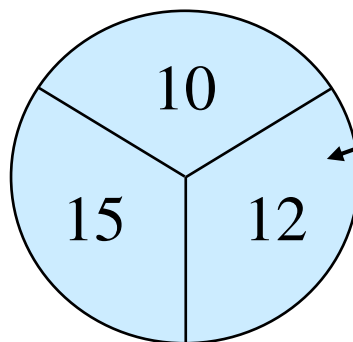
# O Método de Monte Carlo (MMC)

---

- ◆ O nome do método está associado a idéia de uso de roletas para a realização dos sorteios.
- ◆ No exemplo do lava rápido:

	TEC			TS		
Tempos (min.)	10	12	15	9	10	11
Probabilidades	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3

Roleta  
para o  
TEC



Proporcionalidade das divisões do disco à frequência observada para cada possível valor da variável.

# O Método de Monte Carlo (MMC)

---

- ◆ No método de Monte Carlo, a idéia da proporcionalidade é associada a subintervalos proporcionais ao intervalo  $[0, 1]$ .
- ◆ A obtenção destes subintervalos é melhor determinada a partir da distribuição de frequências acumulada.
- ◆ Considere o TEC do exemplo anterior:

	TEC		
Tempos	10	12	15
Probabilidade	0,33	0,33	0,33
Prob. Acumulada	0,33	0,66	1,00
Sub-intervalo	[0,01 - 0,33]	[0,34 - 0,66]	[0,67 - 0,00]
Digitos Aleatórios (tab)	01 - 33	34 - 66	67 - 00



No exemplo, se o número sorteado for 0,76 (ou 76 de uma tabela), TEC valerá 15.

# Simulação com uso do MMC

---

Classes	Frequência	Frequência Acumulada	Intervalo de Valores
0 → 5	0,35	0,35	[0,01; 0,35]
5 → 10	0,19	0,54	[0,36; 0,54]
10 → 15	0,19	0,73	[0,55; 0,73]
15 → 20	0,13	0,86	[0,74; 0,86]
20 → 25	0,03	0,89	[0,87; 0,89]
25 → 30	0,07	0,96	[0,90; 0,96]
30 → 35	0,01	0,97	[0,97]
35 → 40	0,02	0,99	[0,98; 0,99]
40 → 45	0,01	1,00	[0,00]
Mais de 45	0,00	1,00	-

Tabela 2.10: Frequências e valores empregados no MMC no exemplo do posto de serviços

# Obtenção de TEC Usando o MMC

Classes	Ponto Médio	Intervalo de Valores
0 → 5	2,5	[0,01; 0,35]
5 → 10	7,5	[0,36; 0,54]
10 → 15	12,5	[0,55; 0,73]
15 → 20	17,5	[0,74; 0,86]
20 → 25	22,5	[0,87; 0,89]
25 → 30	27,5	[0,90; 0,96]
30 → 35	32,5	[0,97]
35 → 40	37,5	[0,98; 0,99]
40 → 45	42,5	[0,00]

Diagram illustrating the assignment of TEC value based on a random number (0,43) using the Monte Carlo Method (MMC). The random number 0,43 is compared against the intervals in the table. Since 0,43 falls within the interval [0,36; 0,54], the corresponding TEC value of 7,5 is assigned.

Atribuição do valor de TEC após o sorteio



# Programas Geradores de Números Aleatórios

---

- ◆ Um GNA, é um **programa computacional** que deve ser capaz de **gerar valores aleatórios independentes e uniformemente distribuídos** (isto é, todos com a mesma probabilidade de ocorrência) no intervalo de 0 a 1.
- ◆ A busca de bons algoritmos geradores de números aleatórios só se desenvolveu plenamente quando do advento dos primeiros computadores digitais.

# Números Pseudo-Aleatórios

---

- ◆ Por serem gerados artificialmente, os valores aleatórios obtidos são conhecidos como números **pseudo-aleatórios**.
- ◆ Isto significa que a **seqüência** de números gerada por um destes algoritmos é **reproduzível** e, portanto, não aleatória no sentido estrito do termo.
- ◆ Estatisticamente falando, a comparação entre um conjunto de valores gerados em um computador com outro, verdadeiramente aleatório, gerado, por exemplo, pela natureza, **não apresenta diferenças**.
- ◆ E os números **VERDADEIRAMENTE** aleatórios?
  - ◆ Você conhece algum **gerador natural**?

# O MMC

---

- ◆ O MMC é básico para compreender os procedimentos que ocorrem dentro de um programa de simulação.
- ◆ Com MMC é possível reproduzir, no modelo, o comportamento das inúmeras variáveis aleatórias que compõem os sistemas do mundo real.
- ◆ Quando se está lidando com uma linguagem de simulação, os procedimentos para traduzir este comportamento podem ser realizados de diversas formas.
- ◆ Uma delas é descrever ao modelo ou programa a distribuição de frequências das variáveis aleatórias de forma semelhante ao que acabamos de realizar.

# Exercícios MMC

---

## ◆ Exercício 2 (Lista do Capítulo 2)

- ✓ As tabelas de dados apresentadas a seguir foram obtidas de um sistema que oferece um serviço realizado por um único servidor.
- ✓ Monte as tabelas para poder realizar uma simulação manual usando o MMC.

# Exercício MMC...dados

---

4,54	9,31	0,36	4,11	3,24	4,26	5,12	1,38	4,51	0,24
3,62	9,82	1,95	3,30	2,06	1,85	2,58	5,79	2,55	8,79
5,32	1,98	3,88	0,92	0,99	0,58	1,52	11,84	5,27	5,85
0,21	1,35	6,05	7,29	1,29	4,87	4,30	2,86	0,13	0,84
11,04	13,27	2,13	0,60	2,77	3,99	1,47	5,38	2,26	0,08
6,02	4,02	5,51	2,82	4,17	0,47	1,87	2,72	0,31	5,99
3,62	8,14	0,34	9,38	1,00	14,24	9,99	1,63	1,03	2,67
0,14	3,48	2,68	0,91	4,34	0,25	1,61	0,95	1,42	1,16
9,49	9,50	1,03	5,19	5,77	0,54	5,91	0,40	4,46	4,71
4,95	1,45	0,52	0,21	2,31	7,55	3,40	2,42	1,26	3,48

Tempos decorridos entre chegadas no sistema

# Exercício MMC...dados

---

0,65	3,76	0,59	0,71	0,89	2,00	8,59	1,32	1,27	0,85
5,06	4,36	1,62	5,98	0,38	3,45	3,36	4,63	3,07	0,02
1,09	2,42	0,26	5,71	12,09	1,60	5,79	2,12	0,87	0,21
1,33	4,02	1,59	2,76	3,48	1,13	1,77	1,17	2,94	1,40
1,41	7,85	1,36	1,48	2,06	0,00	1,94	3,37	7,27	0,11
1,38	2,02	0,78	5,57	1,13	0,44	0,51	0,01	5,65	3,25
0,54	0,70	1,13	11,65	1,60	1,22	0,72	1,15	2,02	3,76
2,66	7,81	2,61	0,63	0,21	5,16	5,46	0,43	0,38	2,00
0,52	2,11	1,44	0,52	7,40	3,83	1,84	3,91	0,40	2,32
18,92	0,16	7,73	2,63	1,54	1,02	3,55	1,77	1,50	1,56

Tempos dos serviços realizados