NE 5409 : 3ª PROVA : 2008.2 : PROF. JÚLIO

1] a) O QUE É A INTEGRAÇÃO NUMÉRICA? QUAL É A SUA NECESSIDADE? QUAIS SÃO AS CARACTERÍSTICAS PRINCIPAIS DE CADA UMA DAS DUAS FAMÍLIAS DE MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA VISTO.

b) POR QUE OS MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA SÃO INTRINSECAMENTE INSTÁVEIS? COMO ESTA INSTABILIDADE PODE SER CONTROLADA?

2] NA APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES COM EXPRESSÃO CONHECIDA $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, RESPONDA:

- POR QUE PADRONIZA-SE O DOMÍNIO $[a,b]$ PARA $[-1;1]$?
- QUAL É A IMPORTÂNCIA DA SÉRIE DE TAYLOR NESTE TIPO DE APROXIMAÇÃO?
- QUAL É A CONDIÇÃO DE APROXIMAÇÃO DO MÉTODO DE PADÉ $R_{nm}(x) \simeq f(x)$?

3] PARA A FUNÇÃO $f(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) + (\operatorname{sen} x * \cos x) \overset{\text{TAYLOR}}{=} 2x - x^3 + \frac{4}{15}x^5 - \frac{x^7}{15} + \cdots$, $x \in [-1;1]$:

i) OBTENHA O SEU APROXIMADOR DE TCHEBYSHEV $\bar{p}_3(x)$, A PARTIR DO DE TAYLOR DE GRAU $n=5$;

ii) OBTENHA O SEU APROXIMADOR DE PADÉ $R_{32}(x)$;

iii) ANALISE A EFICIÊNCIA DE CADA APROXIMADOR OBTIDO REFERENCIANDO-SE NAS CONDIÇÕES DE UM APROXIMADOR IDEAL.

4] a) CONSIDERANDO DISPONÍVEL O MINQPOL = ALGORITMO QUE AJUSTA UMA BASE $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{n}$ A UMA POLINOMIAL $p_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, ELABORE UM ALGORITMO QUE AJUSTE ESTA BASE À UMA FUNÇÃO

$$g(x) = a * e^{\frac{b}{x}} \text{ (exponencial inversa).}$$

b) DISPONDO-SE APENAS DOS PARÂMETROS a_{8i} e t_{8i}, $i = 1, 2, \ldots, 8$, ELABORE UM ALGORITMO COMPLETO QUE EFETUE NA PRECISÃO ε UMA INTEGRAL DO TIPO $I = \int_a^{\infty} f(x)\,dx$, $a \neq 0$, USANDO O MÉTODO DE GAUSS-LEGENDRE COMPOSTO.

GAUSS-LEGENDRE $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \simeq \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{m} a_i g(t_i)$, $g(t) = f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)$

SÉRIE TAYLOR $\Rightarrow f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)\,x^{n+1}}{n+1!}$, $\xi \in (0; x]$

POL. TCHEBYSHEV $\Rightarrow \begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = x \\ T_3 = 4x^3 - 3x \\ T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^0 = T_0 \\ x^1 = T_1 \\ x^3 = (T_3 + 3T_1)/4 \\ x^5 = (T_5 + 5T_3 + 10T_1)/16 \end{cases}$ onde $T_i = T_i(x)$

PADÉ $\Rightarrow R_{nm}(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{1 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$, onde:

$$(*)\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_1 = c_1 + b_1 c_0 \\ a_2 = c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\ a_3 = c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0 \\ \vdots \end{cases} \quad \text{e} \quad (**)\begin{bmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \cdots & c_n \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+m-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{n+1} \\ -c_{n+2} \\ \vdots \\ -c_{n+m} \end{bmatrix}$$

MÍNIMOS QUADRADOS $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_k & \sum x_k^2 & \cdots & \sum x_k^m \\ \sum x_k & \sum x_k^2 & \sum x_k^3 & \cdots & \sum x_k^{m+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \sum x_k^m & \sum x_k^{m+1} & & \cdots & \sum x_k^{2m} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_k \\ \sum x_k y_k \\ \vdots \\ \sum x_k^m y_k \end{bmatrix} \quad \text{onde } \sum = \sum_{k=1}^{n}$$

OBSERVAÇÃO: NA FUNÇÃO DA QUESTÃO 3] O $f(1) \overset{\text{EXATO}}{=} 1{,}216242869\ldots$