Disclosing a Random Walk

背景

有研究表明了在风险规避的情况下，披露信息会导致一个更低的贴现率和更高的价格。而有研究认为当交易者能够充分实现其持股多元化时，不对称信息只会通过其对系统风险溢价的影响来影响预期收益。但是现有的文献主要关注静态或者动态模型，并且假设资产具有固定价值，忽略了现实中，随着信息的到来，资产的预期价值遵循随机游走的情况。而在自愿披露的相关研究中，大多数研究是基于单期模型中探讨了信息不确定性下的非平凡均衡，在少有的多期模型中，大多数仍未充分考虑信息随时间的变化及其对市场的影响。本文旨在弥合静态和动态自愿披露模型之间的差距，提出并分析了一个新的动态自愿披露模型，该模型基于市场对代理人所掌握的信息的不确定性，并且允许任意分布和任意数量的周期。

模型解释

公式/符号定义

1.时间是离散的，公司开始的价值 V0 是已知的。公司的价值随着随机游走而变化，当前价值是每个时间节点价值变化之和。

$$V_t = V_0 + \sum_{\tau=1}^{t} \Delta V_\tau$$

2.在每个周期 t 中，了解公司当前的价值的概率为$\pi \in (0,1)$。

3.历史时间序列$H_t = \{d_1, \dots, d_t\}$。

4.当代理人披露了公司的价值，则$d_\tau = V_\tau$，若代理人不披露公司价值，则$d_\tau = \emptyset$。

5.代理人的披露策略：$\delta_t(H_{t-1}, V_t) \in [0,1]$，该策略的输出值表示根据历史信息和当前价值信息，代理人披露策略的概率。

6.市场价格：$P_t(H_t)$。

7.代理人的目标函数：$\sum_{t=1}^{T} w_t \cdot P_t(H_t)$，$w_t$是代理人根据各个信息，决定 t 时期的价格的权重，代理人的目标是使得这个加权和最大。

8.定价函数：$\widehat{P_t}(H_t, x_1, \dots, x_t)$，作为在给定的历史信息和一系列的特定阈值信息下，对当前价值V_t的期望值。

假设

1. 假设增量 V_t具有相同的分布，并且代理可以披露信息的概率是恒定的。
2. 假设增量的均值为零且是独立的，这意味着价值过程遵循马丁格尔。
3. 假设代理人只能及时披露信息，如果他不在 t 处透露 V_t，他就不能在以后透露。
4. 假设代理人只有在能够披露V_t时才会学习V_t。相反，如果代理人即使在他无法披露V_t 的时期观察到 V_t，我们的分析和结果将保持不变。因为代理

人只有在他拥有可验证的信息时才采取行动，一旦这些信息到达，V_t的当前实现就足以证明公司的未来价值。

5. 假设当代理获得信息时，这些信息充分揭示了公司V_t 的价值。即如果他只能在收到信息时披露信息，则模型适用。

模型的均衡

模型的均衡是代理和市场价格的披露策略：$\{\sigma_t(H_{t-1},V_t),P_t(H_t)\}$

市场价格有两种情况：

1. 当代理人披露时，对于任何的H_t，当$d_t=V_t$，则$P_t(H_t)=V_t$。
2. 当代理人不披露时，对于任何的H_t，当$d_t=\emptyset$，$\tau\in\{0,\dots,t-1\}$，即τ是最后一个披露期时，此时的定价为最后一次披露时的价格+基于代理人从最后一次披露τ 之后不再披露信息的策略σ_s计算的条件期望。

$$P_t(H_t)=V_\tau+E\left[\sum_{s=\tau+1}^{t}\Delta V_s|\{\sigma_s(H_{s-1},V_s),d_s=\emptyset\}_{s=\tau+1}^{s=t}\right]$$

在均衡路径上，市场价格严格遵循贝叶斯规则，根据代理人的披露行为和策略更新价格预期。市场只在代理人意外披露时观察到非均衡事件。此时，意外披露期的价格=被披露的具体价值，模型假设从意外披露后的策略和价格继续形成一个新的均衡，仿佛起始值为被披露的值 $\widetilde{V_0}=V_\tau$，且模型的时间范围缩短为$\tilde{T}=T-\tau$。

阈值规则

$$\widehat{P_t}(H_t,x_1,\dots,x_t)=P_t(H_t)$$

在均衡条件下，市场价格与基于均衡阈值策略的条件期望相一致，市场价格正确反映了基于代理人均衡策略的信息。

将均衡策略阈值记为$x_t^*(H_{t-1})$，即在给定历史信息H_{t-1}下，代理人在时间 t 选择披露的均衡阈值。

初步探索

静态模型

假如代理人不披露，将获得一个固定的收益$P(\emptyset)$；假如代理人披露，则会获得一个和V_1相关的收益，V_1增加，则其收益也会增加。

由于不披露的收益不变，而披露的收益随 V1 增加，因此代理人更有动力在资产价值较高时选择披露。

$$P(\varnothing)=\frac{(1-\pi)\mathbb{E}[V_1]+\pi\cdot\Pr(V_1<P(\varnothing))\mathbb{E}[V_1\,|\,V_1<P(\varnothing)]}{(1-\pi)+\pi\cdot\Pr(V_1<P(\varnothing))}.$$

Latex 的代码 P(\varnothing) = \frac{(1 - \pi) \mathbb{E}[V_1] + \pi \cdot \Pr(V_1 < P(\varnothing)) \mathbb{E}[V_1 | V_1 < P(\varnothing)]}{(1 - \pi) + \pi \cdot \Pr(V_1 < P(\varnothing))}.

代理人未获得 V1 的概率是$1-\pi$，此时，市场对于价格的期望为$E[V_1]$，而代

理人获得 V1 的概率是 π，当此时，$V_1 < P(\phi)$时，代理人选择不披露，此时市场的固定价格就是代理人未获得V_1的概率*市场期望价值+代理人能够披露但是不披露的概率*此时的市场期望价值/所有的可能。

并且均衡阈值满足 $\hat{P}(\varnothing, x) = \frac{(1-\pi)\mathbb{E}[V_1] + \pi \cdot \Pr(V_1 < x)\mathbb{E}[V_1 \mid V_1 < x]}{(1-\pi) + \pi \cdot \Pr(V_1 < x)}.$

Latex 的代码\hat{P}(\varnothing, x) = \frac{(1 - \pi) \mathbb{E}[V_1] + \pi \cdot \Pr(V_1 < x) \mathbb{E}[V_1 | V_1 < x]}{(1 - \pi) + \pi \cdot \Pr(V_1 < x)}.

市场在不披露时的期望满足阈值规则，即满足

$$x^* = \frac{(1-\pi)\mathbb{E}[V_1] + \pi \cdot \Pr(V_1 < x^*)\mathbb{E}[V_1 \mid V_1 < x^*]}{(1-\pi) + \pi \cdot \Pr(V_1 < x^*)}$$

Latex 的代码 x^* = \frac{(1 - \pi) \mathbb{E}[V_1] + \pi \cdot \Pr(V_1 < x^*) \mathbb{E}[V_1 | V_1 < x^*]}{(1 - \pi) + \pi \cdot \Pr(V_1 < x^*)}

固定点处于最低静默价格，且该固定点唯一，直觉原因在于边际类型和平均类型相等。

动态模型：

在任意时期 t<T 时，此时类型为$V_t = v$，满足以下三个引理：

（i） 如果代理人选择披露，则期望收益为 $\text{Payoff} = v\sum_{s=t}^{T} w_s$

Latex 的代码\text{Payoff} = v \sum_{s=t}^{T} w_s

（ii） 如果代理人选择不披露，则期望收益为 $\text{Payoff} = w_t P_t(H_{t-1}, \varnothing) + h(v)$

Latex 的代码\text{Payoff} = w_t P_t(H_{t-1}, \varnothing) + h(v)

（iii） 分布ψ满足 $\mathbb{E}_{\psi}[V_t] = v_0$

Latex 的代码\mathbb{E}_{\psi}[V_t] = v_0

而此时，payoff 满足 $h(v) < \mathbb{E}_{\psi}[h(V)]$.

Latex 的代码 h(v) < \mathbb{E}_{\psi}[h(V)].

考虑两期模型，假如在第一个周期不披露，则他的持续收益为

$h(v) = w_2\left((1-\pi)P_2(\varnothing, \varnothing) + \pi\mathbb{E}[\max(P_2(\varnothing, \varnothing), V_2) \mid V_1 = v]\right).$

Latex 的代码 h(v) = w_2 \left((1 - \pi) P_2(\varnothing, \varnothing) + \pi \mathbb{E}[\max(P_2(\varnothing, \varnothing), V_2) | V_1 = v] \right).

此时，持续收益为第二期的权重*（代理人在第二期未能获得V_2的收益+代理人在第二期获得V_2时，根据披露策略（仅披露V_2 >$P_2(\phi, \phi)$的期望收益）

而根据以上引理，我们可以知道$\hbar(v)$的性质，$\hbar(v)$是递增的，且$\hbar(v)$是凸的，此外，$\hbar(v)$的边际严格收益小于未来所有期权权重的总和。

超额披露

动态环境下，代理人的信息披露行为比静态模型预测的更为积极。代理人的披露阈值低于静态模型，并且代理人在某些情况下会选择披露信息，即使这会降低他当前的价格至低于静默价格。其数学表达式为：$x_t^* < x_t^{myopic} < P_t(\varnothing)$.

Latex 的代码 x_t^* < x_t^{myopic} < P_t(\varnothing).

其中x_t^*为动态模型中的均衡披露阈值，而x_t^{myopic}为静态模型中的披露阈值，而$P(\phi)$为静默价格。

比较静态结果

文章进一步提出了两个命题。

命题 1：静默价格随着不披露的期数增加而下降

每当代理人在某一时期选择不披露，市场会基于不披露的信息更新对资产价值的预期。如果代理人一直不披露，市场会认为资产价值可能较低，因此静默价格会逐期降低。

命题 2：

对于两期模型：

(i) 第一期的披露阈值随着权重 w_1增加而增加。

(ii) 当 $w_1 = 0$ 时，第二期的披露阈值达到最小值。

当代理人对第一期的权重 w_1 增加时，他更看重第一期的收益，相应地，他需要更高的资产价值 V_1 才会选择披露。如果代理人完全不关心第一期的收益（即$w_1 = 0$），他在第二期会选择以最低的阈值披露信息，从而最大化信息披露量。

讨论和延伸

可疑信念原则

在本文提出的动态模型中，根据超额披露的模型可知，披露政策并没有最小化第一期不披露的价格，但是仍存在最小原则的理念，作者将其称为可疑信念原则，它不再是全局最小化，并且依赖于披露策略。

此时，定义 $\phi(\sigma,\hat{\sigma})$ 表示在代理人实际遵循策略σ的情况下，如果市场错误地认为代理人遵循策略σ'，则加权的静默价格之和的期望值

$$\phi(\sigma,\hat{\sigma}) = \mathbb{E}\left[\sum_{s=1}^{\tau(\sigma)-1} w_s \cdot P_s^{\hat{\sigma}}(\varnothing)\right]$$

Latex 的 代 码 \phi(\sigma, \hat{\sigma}) = \mathbb{E} \left[\sum_{s=1}^{\tau(\sigma)-1} w_s \cdot P_s^{\hat{\sigma}}(\varnothing) \right])

其中 $P_s^{\hat{\sigma}}(\varnothing)$ 表示在时间 s 代理人选择不披露信息时，市场对资产价值的估计价格，而σ表示代理人的实际策略，即代理人选择在何时披露信息，σ'为市场的信念，即市场认为代理人遵循的策略。$\tau(\sigma)$是一个随机的变量，表示代理人首次选择披露信息的时间点，取决于策略σ。

若代理人遵守策略σ^*，则σ^*是均衡策略的充分必要条件是，对于任意策略σ，满足$\phi(\sigma,\sigma^*)\leq\phi(\sigma,\sigma)$

Latex 的代码\phi(\sigma, \sigma^*) \leq \phi(\sigma, \sigma)

进一步，得出推论，即当$\forall s\leq T-1, w_s=0$，$w_T=1$满足$\sigma^*=\arg\min_{\sigma} P_T^{\sigma}(\varnothing)$

Latex 的代码\sigma^* = \arg\min_{\sigma} P_T^{\sigma}(\varnothing)

该推论说明了代理人仅关心最后一期（即 t=T）的收益，其他所有期的权重均为零，并且代理人选择一种策略，使得最后一期的静默价格最小化，而在这种情况下，代理人会最大化信息披露，因为更高的信息披露率可以减少最后一期的静默价格。

本文提出的怀疑信念原则和传统最小原则的关系是，当代理人仅关心一个时期（如仅关心最后一期），怀疑信念原则简化为最小原则。这表明在某些特定条件下，怀疑信念原则与静态模型中的最小原则一致。

本文提出的怀疑信念原则的优点在于，在多期决策环境中，怀疑信念原则提供了一种更为灵活和全面的市场信念调整机制，适用于更复杂的动态信息披露情境。

随机游走模型扩展

在带漂移的随机游走、几何随机游走、均值回复随机游走中，均衡策略仍是阈值策略。而对于任何均衡、任意历史和类型，期望收益如下：

$$\text{disclosure payoff} = v\cdot M + c$$

Latex 的代码\text{disclosure payoff} = v \cdot M + c

$$\text{undisclosure payoff} = w_t P_t(H_{t-1},\varnothing) + h(v)$$

Latex 的代码\text{undisclosure payoff} = w_t P_t(H_{t-1}, \varnothing) + h(v)

而对于不同的资产价值过程，参数 M 和 c 的取值有所不同：

1. 带漂移或无漂移的随机游走$M=\sum_{s=t}^{T} w_s$ ，$c=\sum_{s=t+1}^{T} w_s\mathbb{E}[\Delta V_s]$

   Latex 的代码 M = \sum_{s=t}^{T} w_s ，c = \sum_{s=t+1}^{T} w_s \mathbb{E}[\Delta V_s]

2. 几何随机游走 $M=w_t+\sum_{s=t+1}^{T} w_s\cdot\mathbb{E}\left[\prod_{\tau=t+1}^{s}\Delta V_\tau\right]$ ，c=0

   Latex 的代码 M = w_t + \sum_{s=t+1}^{T} w_s \cdot \mathbb{E} \left[\prod_{\tau=t+1}^{s} \Delta V_{\tau} \right]

3. 均值回复随机游走$M=\sum_{s=t}^{T} w_s\alpha^{s-t}$ ，c=0

   Latex 的代码 M = \sum_{s=t}^{T} w_s \alpha^{s-t}

但是模型同时存在局限性，它并不适用于所有类型的资产价值过程，特别是当增

量不独立时。

当价值发生变化时的披露模型

在每个时期 t，以概率 π 发生一个信息事件。信息事件发生时，资产价值 Vt 增加 ΔVt，经理人获得该增量的可验证信息，且 ΔVt 是独立同分布的随机变量；信息事件不发生时，资产价值保持不变，即 Vt=Vt−1，且经理人无法证明资产价值未发生变化。

信息披露也存在两种情况。当经理人可以披露当前的累计资产价值 Vt 时，经理人遵循低于静态模型的阈值策略，即动态模型中的披露阈值低于静态模型的阈值。而经理人只能披露当前时期的增量 ΔVt，在这种情况下，经理人变得短视，即其决策仅基于当前时期的收益，不考虑未来的收益。

在时期 t，价格 Pt 等于上一时期的价格 Pt−1 加上当前增量的期望值，其中 dt 表示在时期 t 的披露决策。数学表达为 $P_t = P_{t-1} + \mathbb{E}[\Delta V_t | d_t]$

Latex 的代码 P_t = P_{t-1} + \mathbb{E}[\Delta V_t | d_t]

由于 Pt−1 对披露决策没有影响，经理人的披露决策仅基于当前增量 ΔVt，与过去的决策无关。

这一比较表明，我们的模型会根据代理可以披露的信息的性质产生不同的结果。如果只是当前的增量，披露并不取决于过去的决定。如果是累计值，之前的披露决策确实会影响当前的披露。

结论

在动态信息披露模型的框架下，本研究揭示了经理人在多期决策环境下的独特披露行为与市场反应。首先，经理人表现出超额披露倾向，即在资产价值较低时仍选择披露信息，旨在减少市场未来的不确定性，尽管这可能会导致当前股价的下降。其次，研究提出了怀疑信念原则，该原则代替了静态模型中的最小原则，强调市场在动态环境下会依据代理人的实际披露策略动态调整信念，而不是简单假设最悲观情景。总的来说，动态模型展示了信息披露行为在多期决策中的复杂性与市场信念调整的机制，凸显了市场透明度与信息效率的提升。