# 國 立 政 治 大 學

國際經營與貿易研究所

碩士論文

# 以微分賽局論兩國財政政策之競合

Non-cooperative and Cooperative Fiscal Policies in a Two-country Differential Games Model

指導教授: 林柏生 博士

研究生: 郭哲瑋 撰

中 華 民 國 101 年 7 月

# 摘要

在一兩開放體系爲貨幣同盟與非貨幣同盟的情況下, 本文利用微分賽局理論來探討兩對稱國政府在財政政策上的策略搭配。本研究分析並比較兩國在貨幣同盟國與非貨幣同盟國中採取合作的財政政策、非合作的財政政策與領導和跟隨者的財政政策等三種不同策略對兩國總體經濟之影響。最後本文對本研究的模型作數值模擬並試圖利用其結果來闡明目前歐元區國家主權債務危機的可能解決之道。

# ABSTRACT

Considering both cases of monetary union and non-monetary union, this paper uses the differential game theory to explore the coordination of the fiscal policies between two governments. In both cases, each country can choose to cooperate in the fiscal policy, not to cooperate in the fiscal policy, or just to follow the policy of the other country. Diffrent stratigical decisions may cause different economic impacts. Finally, the paper also uses the numerical method to simulate our model and provides some possible solutions to the current economic crisis of the Eurozone.

# 目錄

# 表目錄



# 圖目錄

# 1 前言

由於國際經濟合作日趨頻繁, 國與國之間貿易依存度因此提高, 人民也因爲貿易後專業分工而提升生活水準, 使各國政府不斷地尋求與他國貿易的機會並設法降低對外之貿易障礙。但在貿易的過程中, 兩國使用不同貨幣所造成匯率波動而的不確定性, 往往帶來相當可觀之額外成本, 使市場運作缺乏效率。而國家間爲了降低進行貿易時因匯率波動所產生的風險, 協議相互釘住貨幣價值, 進而發行統一貨幣取代原先各自發行的貨幣並組織國際間的貨幣同盟 (Currency Union), 遂成爲各國經濟合作以降低貿易障礙的主要目標之一。

依據 Mundell (1961) 所提出之共同貨幣區理論, 使用共同貨幣雖可減少因匯率波動所產生的交易成本, 但對於加入貨幣同盟的國家而言, 其亦喪失了以匯率政策及貨幣政策來因應國內外經濟衝擊的能力。因此, 當面對景氣衰退或是不對稱經濟衝擊(assymetric economic shocks) 時, 貨幣同盟國政府的政策工具只剩下財政政策, 即以政府支出增加或降低稅率來刺激民間的實質產出與經濟成長。然而, 由國民所得恆等式可知, 一國政府之政府支出必須等於其稅收收入, 否則就必須以發行債券來因應政府赤字。[1] 由此可見, 貨幣同盟國的政府以財政政策來影響總體經濟環境的後果和非使用共同貨幣的政府有相當大的不同。

而探討一國使用共同貨幣所帶來的影響即最適通貨區理論自發表以來最主要的內容。後續許多研究論及了特定地區、國家是否也該成立共同貨幣區, 進而使用單一貨幣。至歐元區成立後, 許多實證研究也針對成立共同貨幣區對總體經濟的影響加以分析; 然大部分關於共同貨幣區之研究都將其分析的重點放在成立共同貨幣區後所造成的貿易創造與貿易移轉效果, 或分析使用共同貨幣後對某國經濟發展的影響; 而後之實證研究也大都針對成員國間之貿易政策該如何因應或最適通貨區之成功要件進行討論, 並探討共同貨幣使用前後該國對其他國家景氣循環的

[1] Simon Kuznets(1934)

相依程度, 實較缺乏以各國政府作爲賽局參與者與以政策競爭策略角度切入的觀點。直至80年代後期, 國際間經濟合作逐漸成爲趨勢, Turnovsky et al. (1988)首先以賽局理論之觀點開啓各國總體經濟策略競爭的分析, 但其著重的仍是各國實施貨幣政策後的影響, 較少探討財政政策之競爭與合作。然在現今各國經濟政策相互影響之環境下, 一國政府如何因應其他國家所實施之經濟政策, 勢必對於該國自身之社會福利有相當大的影響。

再者, 歐元區主權債務危機爆發至今方興未艾。希臘國會於2012年5月再度否決歐盟及國際貨幣基金會 (International Monetary Foundation, IMF) 所提出的緊縮財政方案, 歐盟區的穩定也成了世界各國關注的消息, 希臘政府的破產與否更關係著未來其他地區共同貨幣的實行。眼見希臘政府因無力負擔長期累積的主權債務而破產在即, 近期新聞、輿論或研究皆指出, 因歐元整合時缺乏一項穩定的財政協調機制, 將會造成歐元區經濟體系的崩解。歐元區各國於1992年簽訂馬茲垂克條約 (Masstrict Treaty) 時, 同時提出之經濟穩定成長協定 (Stability and Growth Pact, SGP), 此協定規定後續欲加入歐元區的國家之總體經濟指標必須符合一定之標準。[2] 雖然在歐元區後續發展中雖然經濟穩定與成長協定並沒有發揮預期之效果, 但實際上卻可將其視爲各國財政政策相互妥協之濫觴。

本文遂想檢視, 於共同貨幣區之會員國, 財政政策之搭配於理論上是否具有穩定經濟體系的功效。國際總體經濟環境中, 由於各國透過貿易使商品和資金的自由移動, 國與國之間財政政策與貨幣政策將會相互影響。因此, 各國政府扮演著類似制訂政策的寡占廠商。我們可將兩國政府視爲賽局之參與者, 將其制訂的總體經濟政策則視爲賽局中的策略, 各國政府在制訂政策時, 由於經濟體系的對外開放, 將會同時受到其他國家政策之影響。故各國經濟政策之制訂具有賽局理論中「策略性相依」(stratigical interdependence) 的特性存在。

[2]德國財政部長魏格爾(Theo Waigel) 於1993年所促成的成長穩定機制 (Stability and Growth Pact), 條約規定, 在採用歐元後, 各國政府有義務限制財政赤字戰國內生產毛額 3% 以下, 然最後卻因某些政治因素無法確實執行。

本文假設已知共同貨幣區會員國之政府只能利用財政政策作爲穩定經濟的政策工具, 爲簡化分析, 只討論在浮動匯率制度下, 兩規模相同之國家所實施財政政策之合作與競爭。文中使用傳統的兩國模型和貨幣同盟的兩國模型, 進一步比較若兩國使用共同貨幣是否會影響兩國財政政策的競合。利用動態最適化及微分賽局理論來分析兩國政府在固定一的時間內, 能否能透過政策搭配的方式達到兩國經濟之穩定均衡, 亦即在追求降低貿易障礙的同時, 減少上因產出、物價波動所造成的無謂損失, 進而創造最大社會福利。本文將 Dockner and R. Neck (2008) 分析的重點由貨幣政策改爲財政政策, 並延伸 Engwerda et al. (2002) 中兩共同貨幣國實施財政政策的模型, 以開放循環(open-loop) 爲資訊結構的微分賽局 (differential games) 模型解釋使用共同貨幣、非使用共同貨幣的兩國政府, 分別在一段時間內實施財政政策時所造成的相互影響, 進而闡述該國與另一國財政政策相互競爭與合作之關係。

於下一章, 我們先針對最適通貨區及經濟政策動態賽局理論之文獻進行簡單回顧。並說明 Mundell 與 Balassa 所提出之經濟整合理論。第三章介紹在動態最適化中主要使用的數學方法—Pantryagon 最大原理, 並簡介本文主要分析工具—動態微分賽局理論。第四章延伸Dockner and R. Neck (2008)的模型, 以非貨幣聯盟的財政政策之競合作爲主要的討論對象。第五章則是延續Engwerda et al. (2002)之模型設定, 假設兩國使用共同貨幣, 及兩國政府無法以貨幣政策作爲政策工具的情況。各國所實施的財政政策除了會刺激本國經濟, 透過商品的貿易、資產的移動還會將影響傳至另一國, 並同時對該國之經濟造成影響。反之, 另一國之經濟決策也會影響到本國。

由上述可知, 在現今國際經濟環境的決策模型中, 不論是否爲貨幣聯盟國, 兩國家皆不能單只針對自身的最適動態化問題進行求解, 還必需考量到另一國或其他國家的經濟政策, 此即爲賽局理論所強調的特性—決策相依性(strategic interdepenence)。在第四、五章將分別在兩國不使用共同貨幣, 兩國使用共同貨幣的情

況下, 分析三種不同的財政政策搭配情況:

**1** 非合作的情況 (Non-Cooperative Case, Nash Equilibirum)

**2** 合作的情況 (Cooperative Case, Pareto Equilibrium)

**3** 具有領導者的情況下 (Leader-follower Case, Stackelberg Equilibrium)

第六章則藉由改變模型中所設定的參數進行數值模擬測試。例如, 透過設定參數改變兩國貿易自由程度, 來分析不同情況下對社會福利的影響, 而後藉由比較推論出在不同的經濟環境, 實施何種政策較爲妥當。希望經過數值模擬後, 能回應前述的假設, 並回答貨幣同盟國是否該具有財政政策協調組織的問題, 或其成立之條件及時機, 並於文中假設之不足之處及未來研究方向的給予建議。

## 2 文獻回顧

### 2.1 最適通貨區

近代關於經濟整合的文獻首先出自於 Balassa (1961)。他於50年代末期陸續提出對國際間經濟整合的看法, 並於1961年總結爲區域整合的五階段漸進步驟。[3] 在他的理論中, 漸進式經濟整合步驟的第四階段即爲國與國之間成立貨幣同盟 (Currency Union)。由於這項理論的提出, 使各國對於經濟整合循序漸進的過程有初步之瞭解。而最適通貨區 (Optimum Currency Areas, OCA) 一詞首先由 Mundell (1961)提出, 其分析原先使用不同貨幣的兩國若可實施固定匯率機制進而使用相同貨幣, 將可消弭不對稱的經濟衝擊, 並建議邊界相鄰及貿易頻繁之國家應有成立最適通貨區之準備; Gandolfo (1987)進一步之釐淸由 Mundell 所定義之最適通貨區, 認爲最適通貨區的最小形式爲實施固定匯率的區域, 而最完整的形式則是各會員國使用單一通貨者。最適通貨區的理論最後被應用於歐洲經濟整合上, Mundell 因此被尊稱爲歐元之父。

共同貨幣區理論對各國經濟的影響直至90年代仍廣泛被經濟學家繼續討論。依據 Krugman (1993) 所述, 各國因爲成立共同貨幣造成經濟專業分工, 進而使會員國間之經濟結構差異越大, 反而越不利於最適通貨區的發展。然 Frankel and A. Rose (1995) 隨後提出對於最適通貨區內生性 (endogeneity) 的觀點, 即在考量會員國之產業內貿易和景氣循環爲相互內生後, 成立共同貨幣會使得會員國更有能力抵抗不對稱的經濟衝擊 (Frankel and A. Rose, 1995)。由上述文獻回顧中可得知, 自從最適通貨區理論發表以來, 討論經濟整合之重點首先都圍繞著貨幣政策

[3]根據Balassa 提出的分類, 區域經濟整合可以分爲五個階段: (1) 自由貿易區: 會員國消除彼此之間的關稅與非關稅貿易障礙, 但會員國對區域外國家仍可採取個別的關稅政策; (2) 關稅同盟: 除了會員國之間沒有貿易障礙, 關稅同盟國對非關稅國家採取共同的關稅稅率; (3) 共同市場: 除了商品市場的自由貿易以外, 加入共同市場的國家也必須開放生產要素的自由移動, 包括資本、勞動等; (4) 經濟同盟: 除了商品與生產因素自由移動以外, 區域內各國可藉由政策合作來改善經濟, 使用單一貨幣形成貨幣同盟即爲一例; (5) 完全經濟同盟:; 單一的經濟政策、建立超國家組織機構, 且會員國遵守該機構的決策。

的整合。由歐盟建立的歷史也可佐證, 國與國之間之經濟合作, 在自由貿易後都想先解決貨幣政策搭配的問題, 然在總體經濟環境中, 財政政策與貨幣政策爲密不可分, 在貨幣政策合作下如何利用財政政策穩定經濟體系, 以及使用共同貨幣下的兩國財政政策的實施與搭配會如何被影響, 遂成本文主要探討之目標。

## 2.2 經濟政策之賽局

一國政府若考量到如何在未來實施總體經濟政策, 就必須以動態最適化的方法進行, 本文將在 3.1 節詳述。但若只以最佳控制方法考量一經濟體經濟政策的設計, 隱涵著所有政策都只出自於單一機構, 並假設該機構可以完全地操控其欲制訂之政策, 而不需考量到其他機構制訂政策所造成的影響。(Petit, 1990)

然絕大部分國家, 不只有單一政策制訂機構的存在。以我國爲例, 經濟政策的實施單位有財政部、中央銀行及經濟部, 實施政策影響的單位可能有工會、產業組織、貿易商等等。每個機構可能有不同的目標, 制訂決策過程也不可能相互妥協, 也就是說每個單位組織的決策都將影響最終結果。因此, 如何制訂最佳政策的無法只以一個組織的動態最適化方法解決, 還必須將賽局理論的概念加入於不同政策參與者的決策過程中。而本文爲分析簡化起見, 將一國政府視爲具有制訂政策的能力, 其所要考量的只是他國政府對於本國政府的政策會有怎樣的反應, 並討論在他國政府同時追求在 $[0, T]$ 內的動態最適化時, 本國政府該如何面對此決策之賽局。

## 2.3 財政政策之搭配

隨著最適通貨區理論之演進, 共同貨幣也透過歐元區的成立得以實現, 經濟學家開始討論加入最適通貨區的國家財政政策搭配之問題。總體經濟理論認爲貨幣政策與財政政策爲兩項密不可分的政策工具, 故許多文獻開始探討兩國之財政政策的合作是否能加強各國之間的經濟交流。Engwerda et al. (2002) 將 Turnovsky et al. (1988) 的模型修改爲貨幣聯盟下的兩國模型, 並延伸 Mundell-Fleming 對

數線性模型論證財政政策搭配性。於該文獻中, 其假設貨幣聯盟的國家, 中央銀行已經被超國家的貨幣發行機構給取代, 各會員國政府喪失以貨幣政策作爲政策工具的手段後, 對於總體經濟政策的思考模式將有所改變。並分別探討對於兩國財政政策非合作時之 Nash 均衡, 及合作時如何達到最有效率之 Pareto 均衡。本文將繼續使用 Engwerda et al. (2002) 之二次線性兩國模型, 並加以探討若財政政策的實行也有領導者(leader) 與跟隨者 (follower) 之分時, 對於均衡的結果將會有何種不同。

# 3 數學方法

## 3.1 動態最適化概述

首先, 我們先定義何謂動態最適化 (dynamic optimization) 問題。動態最適化不同於傳統經濟學中靜態選擇的概念, 假設一經濟體的決策都是在同一個時點。和靜態最適化問題比較, 動態最適化問題加入了時間的因素, 也就是在探討「一經濟單位如何將有限資源分在一段時間內不同時點」的問題。數學上通常有三種方法得以解決動態最適化的問題, 依其被應用在經濟理論的時間排序, 分別爲變分法 (calculus of variation)、動態規劃 (dynamic programming) 及最適控制理論 (optimal control theory)。由於最適控制理論是將變分法加以一般化, 最適控制理論能夠解決變分法所能解決的問題。再者, 利用動態規劃作爲數學工具時, 在求解的過程中, 通常得面對較複雜的偏微分方程式 (nonlinear partial differential games)。相反地, 若使用最適控制理論在解決經濟問題時, 只需面對一些常微分方程式, 求解過程相對容易。[4] 因此, 本文主要以 L. Pantryagon 所發明之最適控制理論 (maximum control principle)—最大原理, 來對動態最適化問題進行求解。由於動態最適化所探討的是某一段時間內資源配置的問題, 一段時間指的就是 $[t_0, t_1]$; $t_0$ 代表起點 (initial time), $t_1$ 代表終點 (terminal time)。我們可以將最適控制問題以數學形式表示, 如表 1。

表 1 所表示的是一個連續時間 (continuous time) 的最適控制問題。除了代表時間的變數 $t$, 一般動態最適化問題, 還會利用兩組向量 $\mathbf{x} = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^{\mathrm{T}}$ 與 $\mathbf{u} = [u_1(t), u_2(t), \cdots, u_r(t)]^{\mathrm{T}}$, 來描繪經濟體系的隨著時間的改變。變數 $x_i(t)$是用來描述這個動態體系在時點 $t$ 所處狀態的變數, 稱其爲狀態變數 (state variables), 而 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ 則稱爲狀態向量, 可能由數個不同的狀態變數所組成。另一方面, 在時點 $t$ , 經濟單位可以選擇或控制的變數爲 $u_i$, 故稱其爲控制變數 (con-

[4](蔡攀龍, 1996 頁228)

表 1: 動態最適化數學表示

$$\begin{aligned}
\max\ V[u(t)] &= \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), u(t), t)dt \\
\mathbf{s.t.}\ \dot{x}(t) &= g[x(t), u(t), t] \\
x(t_0) &= x^0 \\
[t_1, x(t_1)] &\in A \subset \mathcal{R}^{n+1} \\
u(t) &\in U, t \in [t_0, t_1]
\end{aligned}$$

trolvariables), 而 $\mathbf{u}$ 則稱爲控制向量(control vector)。

狀態變數和控制變數最大的差異在於狀態變數之導數 $\dot{\mathbf{x}}(t) = [\dot{x_1}(t), \dot{x_2}(t)..., \dot{x_n}(t)]$ 會直接出現在動態最適化的問題中, 而控制變數的導數則沒有。另外, 所有的狀態變數 $\mathbf{x_t}, t \in [t_0, t_1], i = 1, 2..., n$ 必須都是連續函數; 反之, 控制變數 $u_j(t), t \in [t_0, t_1], j = 1, 2..., r$ 則可能都不是連續函數, 而是分段連續函數。換言之, 在動態理論中要求狀態變數或狀態向量 $\mathbf{x}(t)$ 隨時間經過的所描繪的狀態軌跡 (state trajectory) 必須是一條連續的曲線。然而, 控制變數 $\mathbf{u}(t)$ 的軌跡卻可以在某些時點發生不連續、跳躍的現象。[5]

接者, 標的泛函數 $V[\mathbf{u}(t)]$ 是在動態規劃中 ,讓經濟單位選取控制軌跡使得目標函數$V[\mathbf{u}(t)]$ 的值達到最大。所謂控制軌線是指整條由控制向量 $\mathbf{u}(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 之間所描繪出的曲線, 而 $\mathbf{u}(t)$ 本身就是一個函數或一條時徑。$V[\mathbf{u}(t)]$ 爲的 $\mathbf{u}(t)$ 函數, 並不是直接對應於 $t$ , 數學上稱其爲 $t$ 之泛函數。

而限制式 $\dot{x} = g[x(t), u(t), t]$ 則描述出狀態變數是如何受到 $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ 和 $t$ 的影響。如果一動態體系已經知道其起初時間 $t_0$ 及起初狀態 $x(t_0)$, 只要經濟體選擇了個特定的控制向量 $u(t_0)$, 就可決定狀態向量變動的方向 $\dot{x}(t_0)$。藉由操縱控制軌

[5]蔡攀龍(1996)[頁 230]

線就可決定狀態軌線, 因此其爲運動方程式。[6] 故可推論, 當經濟單位選定了控制軌線後, 就已決定了狀態軌線; 因此, 在任何 $t \in [t_0, t_1]$, 當 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{u}(t)$ 均已確定, $f[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$ 之值也同時確定, 再經由積分目標函數, 即可得到 $V[u(t)]$。而動態最適化的問題即爲如何找出最適的控制變數, 使得動態體系 $\dot{x} = f[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$ 由 $[t_0, x(t_0)]$ 開始, 直到 $t = t_1$ 時, $V[u(t)]$ 達到最大。

## 3.2 微分賽局概述

微分賽局本質上爲一般賽局模型的延伸, 將賽局理論應用在一連續的時間內, 並加入動態最適化作爲分析工具。[7] 賽局理論常利用一般化的數學式來定義賽局中的各項元素, 如參與者的策略空間 (strategies space) 與報酬矩陣 (payoff matrix) 等。在微分賽局理論中亦同, 還必須以更技術性的數學工具進行分析, 最常見的即爲最大原理 (maximun priciple) 與 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式的動態規劃 (dynamic programming) 求解法。

在非合作的微分賽局中, 假設知道其他參與者可能的策略選擇之下, 每個參與者針對本身之動態最適化問題進行求解, 換言之, 每一位賽局參與者皆需解決自己所面對的最適控制問題。而同時作出的最適控制結果就形成非合作微分賽局的均衡, 相當於賽局理論中納許均衡 (Nash equibrium) 的概念。本文第一個探討之模型假設兩國同時實施財政政策, 並追求最佳化該國福利; 在此情況下, 可將政府所實施的政策視爲一非合作賽局的型態, 本文將在 4.2 節中詳細說明。另外, 在合作形式的微分賽局中, 藉由建立合作賽局中的聯合報酬方程式 (joint payoff function) 和利用最大控制理論的數學工具, 將可以求出具有柏拉圖最適 (Pareto optimum) 的合作均衡。

[6]或被稱作爲狀態方程式、狀態運動方程式、運動方程式, 原文爲 system dynamics, evolution equations, equations of motions

[7]Jørgensen and G. Zaccour (2004)[頁5]

在微分賽局中, 令 $t$ 表示時間變數, 且賽局之參與者會在一段時間 $[0, T]$ 中進行決策。$T$ 可以爲一有限數字或變數, 通常 $T$ 可以隨模型需要而改變。而在動態的理論中, 通常會利用狀態變數來描述目前體系情況或形勢。如在本文欲探討一國之出口商品競爭力 $s(t)$ 會如何受到財政政策 $f(t)$、$f^*(t)$ 之影響, $[s(t), t]$ 在此模型中, 可視爲本經濟體系在 $t$ 時的狀態, 故 $s(t)$ 即爲此模型下之狀態變數 (state variable)。

若賽局有 i 位參與者,$i$ 必爲大於零之正整數, 即 $i \in 1, ..., N$。在 $t$ 時, 參與者所作出的決策以 $u_i(t)$ 表示, 但決策必須受到限制, $u_i(t) \in \mathcal{U}_i[t, x(t)]$, 故稱集合 $\mathcal{U}_i$ 爲參與者 i 之控制空間。在本文模型中, 兩國之財政政策之變數 $f(t)$、$f^*(t)$ 即爲控制變數 (control variables)。隨著時間的經過, 動態體系必須以微分方程式來表現狀態的改變模式, 即在動態體系中會有描述狀態變數隨時間經過如何改變的微分方程式,[8] 此方程式在微分賽局理論中稱爲運動方程式 (state equations)。[9]

當一體系在 $[t, x(t)]$ 的狀態且參與者利用狀態變數 $u_1(t), ...u_N(t)$, 參與者之目標函數以 $g_i[t, x(t), u_1(t), ...u_N(t)]$ 表示, 可知目標式可爲時間 $t$, 狀態變數 $x(t)$ 以及各控制變數的函數 $u_1(t)$、$u_2(t)$。而報酬函數可以是經濟體所創造之效用、收益、利潤或是其所面對的成本, 換言之, 也就是任何想作爲極大化或極小化的目標。

$$g_i[t, x(t), u_1(t), ...u_N(t)]$$

最後, 由於動態最適化問題作決策時是必須考量到時間, 參與者 $i$ 需把未來所得到的報酬折現, 才能進行比較, 故一般在假設目標函數式時, 必須考慮未來之報酬或成本的折現率, 並換算成報酬之現值。

$$\mathcal{J}_i[u_1(.), ..., u_N(.)] = \int_0^T e^{-\theta_i t} g_i[t, x(t), u_1(t)..., u_N(t)]dt$$

[8]於本文模型中即爲式(12)

[9]請參照註解5

$\theta_i$ 爲參與者 $i$ 所面對之折現率 (discount rate), 通常爲一常數。若 $\theta_i = 0$, 表示參與者 $i$ 具有長期觀點, 將現在與未來的報酬視爲等值, 不將未來的報酬作任何折現; 但若 $\theta_i \to \infty$, 表示參與者 i 相當重視近期報酬, 並對折現率相當敏感。

一旦建立目標函數或成本函數 $\mathcal{J}_i$, 就可利用 3.1 節所述之動態最適化理論來求得滿足 $\mathcal{J}_i$ 極大值或極小值成立的條件。而在微分賽局理論中, $\mathcal{J}_i$ 的值會受到數個參與者的控制變數所影響, 如 $u_{i-1}$、$u_{i+1}$。參與者 i 想在 $[0, T]$ 時將其他賽局參與者的控制變數 $u_j(t)$ 納入考量, 並藉由選擇最佳控制路徑 $u_i(t)$ 將 $\mathcal{J}_i$ 最佳化。由於每個賽局參與者在作決定時都已經將其他的參與者的控制變數納入考量, 微分賽局理論並不是像 3.1 節所述之只針對單一個體的動態最適化問題, 而是在不同情況下考量各賽局參與者的動態最適化問題。$\mathcal{J}_i$ 在微分賽局理論中被稱作參與者 i 的報酬函數 (payoff function)。

當設定好一微分賽局之基本形式, 還需確定賽局參與者在做決定時是基於何時的資訊, 也就是各參與者在作決策時對於已知資訊的假設。若將 $\eta_i(t)$ 定義爲參與者 i 在時間 $t \in [t_0, t_f]$ 可獲得資訊, 整個賽局的資訊結構 (information structure) 可以定義爲所有參與者所獲得資訊的集合, 即 $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_N)$; 而在求解微分賽局的均衡解時, 若使用不同的資訊結構的假設, 將會求出不同的結果。

依據 Başar and G.J. Olsder (1982)[第五章], 在微分賽局理論中, 最普遍的資訊結構的假設方法約有四種, 分別爲開放循環(open-loop)、封閉循環 (closed-loop)、無記憶性封閉循環 (closed-loop memoryless) 及回饋形式 (feedback) 四種, 於下將這四種資訊結構之數學表達方式分別陳述。

(a) 開放循環 (open-loop), 如果

$$\eta_i(t) = \{x_0\}, t \in [t_0, t_f]$$

(b) 封閉循環 (closed-loop),[10]如果

$$\eta_i(t) = \{x(s), t_0 \leq s \leq t\}, t \in [t_o, t_f]$$

(c) 無記憶性封閉循環 (closed-loop memoryless),[11]如果

$$\eta_i(t) = \{x_0, x(t)\}, t \in [t_0, t_1]$$

(d) 回饋形式 (feedback), 如果

$$\eta_i = \{x(t)\}, t \in [t_0, t_f]$$

開放循環形式的資訊結構假設賽局參與者 i 在時點 t 時只知道起初狀態 $x_0(t)$, 相反地, 封閉循環形式的資訊結構則是數參與者 i 能夠在時點 t 回想整個時間經過時的路徑, 這樣的資訊結構即考量賽局參與者的記憶性 (memory)。若不加入記憶性, 參與者 i 只考量到時點 t 的狀態 $x(t)$ 和起初狀態 $x_0(t)$, 就成爲第三種無記憶性的封閉循環資訊結構。最後, 若當參與者 i 完全不考慮之前發生的所有狀態, 只在乎在時點 t 時的狀態 $x(t)$ 成爲反饋法。

一般而言, 開放循環 (open-loop) 的策略與無記憶性的封閉循環 (closed-loop memoryless)、反饋形式 (feedback) 策略差異在於, 經濟體決定採行開放循環 (open-loop) 策略時, 只依據最初的時間決定策略, 並不考量國內產出的變化, 以及兩國政策執行期間匯率、兩國產出或兩國物價的變動資訊。在開放循環的形式進行決策, 一國政府在初期即決定以後各期的均衡產量, 而且會永遠依循此生產計畫。就如同一國政府於政策制訂前, 設計一個最適化政府支出的電腦程式, 只要在以後各期輸入所處的時點, 程式就會自動解出最適的政府支出與一國之產出。由於政府只考慮時間上的差異, 如果後期該國的實際所得不同於一開始政府預期的路徑, 如兩國經

[10]又稱perfect state

[11]又稱perfect state memoryless

濟政策開始合作, 就會導致整個經濟合作體系發生變化, 但若以開放循環之形式求解, 就必須假設該國政府仍會採取期初決定的均衡策略。

由於本文的微分賽局模型中使用開放循環的假設, 亦即各國政府在參與政策搭配的賽局時, 只考慮該國的起初狀態。以現今世界主要的民主國家而言, 行政部門提出政策構想直到該政策被實施往往需經過複雜的行政流程, 且實行時也必須依循既定的規範。即便因時間經過而改變某些客觀條件, 政府仍不容易在政策實施時有所變動與調整, 因此, 本文假設各國財政政策之實施與搭配只取決於政策制訂時的起初情況, 並利用開放循環法作爲微分賽局資訊結構的假設。

# 4 非貨幣同盟國之兩國模型假設

## 4.1 非貨幣同盟的兩國模型

本章主要以Dockner and R. Neck (1995)及Dockner and R. Neck (2008)兩篇文獻中之數學方法作爲分析工具。假設兩國政府(或政策制訂者) 皆面對之目標函數爲跨期的損失函數 (intertemporal loss functions), 又兩國皆以擴張性財政政策作爲政策工具, 同時想要穩定國內產出 $y(t)$ , 國內通貨膨脹 $\dot{p}(t)$ 以及實質匯率 $s(t)$。本文些微修改Dockner and R. Neck (1995)的模型, 使兩國政府在模型中可利用財政政策作爲其政策工具。假設參與者的資訊結構爲開放循環(open-loop), 以微分賽局分析兩國在財政政策非合作、財政政策合作及財政政策有領導者與跟隨者時的均衡。

表 2: 非使用共同貨幣的兩國模型(Independent Two-country Model)

$$y(t) = \rho y^*(t) - \gamma r(t) + \delta[e(t) + p^*(t) - p(t)] + \eta f(t) \tag{T1}$$

$$y^*(t) = \rho y(t) - \gamma r^*(t) - \delta[e(t) + p^*(t) - p(t)] + \eta f^*(t) \tag{T2}$$

$$r(t) = i(t) - \dot{p}(t) \tag{T3}$$

$$r^*(t) = i^*(t) - \dot{p^*}(t) \tag{T4}$$

$$\tilde{m}(t) - p(t) = \kappa q(t) - \lambda i(t) \tag{T5}$$

$$\tilde{m}^*(t) - p^*(t) = \kappa q^*(t) - \lambda i^*(t) \tag{T6}$$

$$i(t) = i^*(t) + \dot{e}(t) \tag{T7}$$

$$\dot{p}(t) = \xi y(t) \tag{T8}$$

$$\dot{p^*}(t) = \xi y^*(t) \tag{T9}$$

$$m(t) = \tilde{m}(t) - p(t) \tag{T10}$$

$$m(t) = \tilde{m}^*(t) - p^*(t) \tag{T11}$$

$$s(t) = e(t) + p^*(t) - p(t) \tag{T12}$$

模型延伸自Dornbusch (1976), 為一段連續時間內的兩國傳統總體經濟模型, 將非使用共同貨幣的兩國模型整理成表 2, 並於後依序解釋各式之經濟意義。

假設兩國為相同規模的經濟體, 商品、資產皆可藉由貿易自由移動於兩經濟體之間。家計部門對於未來具有完全正確之預期, 但其作決策時並不考慮政府部門為穩定經濟的政策。除了名目利率 $i(t)$ 及實質利率 $r(t)$, 模型中其餘變數皆表示成對數形式; 另一國之變數意義相同, 以加上 $^*$ 符號表示。各項變數經濟意義詳述於後, 而短期商品市場均衡表示如下。

$$y(t) = \rho y^*(t) - \gamma r(t) + \delta[e(t) + p^*(t) - p(t)] + \eta f(t) \tag{T1}$$

$$y^*(t) = \rho y(t) - \gamma r^*(t) - \delta[e(t) + p^*(t) - p(t)] + \eta f^*(t) \tag{T2}$$

$y$ 代表偏離充分就業產出的實質產出, 換言之, 將該國之充分就業的產出標準化為 0。$r$ 為實質利率, $e$ 為名目匯率, 用以衡量一單位本國貨幣可以換得多少外國貨幣。而 $p$ 為國內的物價水準。由於本文以財政政策的競爭與合作為主題, 故將Dockner and R. Neck (1995)的模型略微修改, 在商品市場均衡式 (T1)、(T2) 中加入兩國政府支出的變數, 並假設完全由政府支出增加來實行擴張性的財政政策, 以 $f(t)$、$f^*(t)$ 表示本國及外國的政府支出。在家計部門擁有完全預期(perfect foresight)的假設下, 實質利率為可以 (T3)、(T4) 兩式表示。

$$r(t) = i(t) - \dot{p}(t) \tag{T3}$$

$$r^*(t) = i^*(t) - \dot{p^*}(t) \tag{T4}$$

而 $i$ 表示名目利率, $\tilde{m}$ 為名目貨幣供給, 資產市場的均衡條件為以下。

$$\tilde{m}(t) - p(t) = \kappa q(t) - \lambda i(t) \tag{T5}$$

$$\tilde{m}^*(t) - p^*(t) = \kappa q^*(t) - \lambda i^*(t) \tag{T6}$$

(T5)、(T6) 兩式隱含兩國之人民只持有該國之貨幣。在資本完全自由移動的假設和完全預期之下, 利率平價假說表示爲 (T7)。[12]

$$i(t) = i^*(t) + \dot{e}(t) \tag{T7}$$

(T8)、(T9) 則表示兩國物價水準的調整來自於國內商品市場的超額需求。

$$\dot{p}(t) = \xi y(t) \tag{T8}$$

$$\dot{p^*}(t) = \xi y^*(t) \tag{T9}$$

模型中所設的參數 $\gamma, \delta, \kappa, \lambda, \xi, \eta > 0$ 以及 $0 < \rho < 1$。

假設兩國政府非貨幣同盟國時, 皆可利用貨幣政策作爲干預貨幣市場的政策工具。在資訊完全透明的情況下, 實質貨幣供給可被視爲政府控制的變數, 即貨幣政策, 並以 (T10)、(T11) 表示。但在本章模型中, 由於主要要探討財政政策的動態賽局。因此, 假設各國之貨幣政策爲外生變數, 且在財政政策賽局開始前就已經確定, 不隨時間改變, 也不受到該國政府支出增加的影響。

$$m(t) = \tilde{m}(t) - p(t) \tag{T10}$$

$$m(t) = \tilde{m}^*(t) - p^*(t) \tag{T11}$$

兩國間的實質匯率 $s$, 爲對數化後名目匯率與兩國相對物價之差, 也可被視爲兩國出口貨品之相對價格或相對出口競爭力, 被定義爲 (T12)。

$$s(t) = e(t) + p^*(t) - p(t) \tag{T12}$$

整理以上 (T1) 至 (T12), 可得出實質利率的一階線性微分方程式, 也就是本模型中所要採取之狀態變數動態方程式。[13]

$$\dot{s}(t) = \phi_1 m^*(t) - \phi_1 m(t) + \phi_2 s(t) + \phi_3 f(t) - \phi_3 f^*(t) \tag{T13}$$

[12] 利率評價假說,interest rate parity, 簡稱 IRP。

[13] 又稱狀態變數運動方程式, state equation

其中

$$\kappa = (1 - \gamma\xi + \frac{\gamma k}{\lambda})$$
$$\phi_1 = \frac{1+\rho}{\lambda(\kappa+\rho)},\ \phi_2 = \frac{2\delta(\kappa-1)}{\lambda(\kappa+\rho)},\ \phi_3 = \frac{\eta(\kappa-1)}{\gamma(\kappa+\rho)}$$

經過 (T1)–(T11) 式的模型假設, 透過代數變換, 將兩國各自的產出 $y$、$y^*$ 以兩國貨幣政策 $m$、$m^*$, 實質匯率 $s$ 及兩國財政政策 $f$、$f^*$ 表示的函數。[14]

$$y = am + \frac{\rho}{\kappa}am^* + bs + cf + \frac{\rho}{\kappa}cf^* \tag{T14}$$
$$y^* = \frac{\rho}{\kappa}am + am^* - bs + \frac{\rho}{\kappa}cf + cf^* \tag{T15}$$

其中

$$a = \frac{1}{(\kappa^2-\rho^2)}\frac{\gamma\kappa}{\lambda},\ b = \frac{\delta}{\kappa+\rho},\ c = \frac{\eta\kappa}{(\kappa^2-\rho^2)}$$

假設兩個國家的政策制訂者爲未來無限的時間內, 而未來値的折現率爲 $\theta > 0$, 並假設兩國政府欲最小化跨期二次損失函數 (quadratic loss function)。[15]

$$\mathcal{J}_1' = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\theta t}[\alpha y^2(t) + \beta\dot{p}^2(t) + \sigma s^2(t)]dt \tag{T16}$$
$$\mathcal{J}_2' = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\theta t}[\alpha y^{*2}(t) + \beta\dot{p}^{*2}(t) + \sigma s^2(t)]dt \tag{T17}$$

其中 $\alpha$, $\beta$, $\sigma > 0$。目標式爲該國國內的產出偏離充分就業時的水準 $y$, 通貨膨脹率 $\dot{p}$ 的函數。[16] 而兩國政府皆希望實施政策工具時, 能最小化未來因景氣波動所產生的成本的折現値。又因實質匯率 $s$ 可視爲兩國出口財貨之實質競爭力, $s$ 因實施經濟政策而波動將會影響該國進出口貿易甚鉅。模型中假設兩國政府都希望能維

[14]於後爲表達簡潔起見, 各項變數省略 $(t)$ 之符號, 如 $m(t) = m$, $m^*(t) = m^*$

[15]本文在經濟結構模型中引入凱因斯學派之觀點, 凸性菲利普曲線(Phillips curve)。在一個由二次損失函數以及非線性限制條件構成的理論分析框架下, 來檢驗有關最佳財政政策的影響。在傳統的二次線性 (linear-quadratic) 政策模型中, 央行的二次損失函數通常包含兩個目標變量, 即通貨膨脹 $\dot{p}$ 和產出缺口 $y$, 使用的貨幣政策工具則是短期名義利率 $i$, 而因本文使用開放模型, 在損失函數中還多了兩國之相對匯率 $s$。

[16]$\dot{p}(t)$ 即物價水準隨著時間經過的變化, 與通貨膨脹率相同

持穩定的實質匯率 $s$, 使其經常帳能夠保持均衡, 並希望其他國家因爲該貨幣之幣值穩定, 可利用該國之貨幣作爲國際上貿易的交易媒介, 類似於「強力國際貨幣」的概念。

由模型中 (T8), (T9) 兩式可知, 在凱因斯學派的假設之下, 跨期損失函數爲短期物價變動 $\dot{p}$ 和偏離充分就業水準下之產出 $y$ 的函數, 故可將目標式簡化爲以下兩式, 而不影響最適化之結果。

$$\min \mathcal{J}_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\theta t}[y^2(t) + ns^2(t)]dt \tag{T18}$$

$$\min \mathcal{J}_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\theta t}[y^{*2}(t) + ns^2(t)]dt \tag{T19}$$

其中

$$n = \frac{\sigma}{\alpha + \beta\xi^2} \tag{T20}$$

兩國各自追求動態最適化, 會因兩國之目標式中有實質匯率 $s(t)$ 而相互影響。換言之, 兩國各自實施不同的財政政策與貨幣政策, 將會因爲兩國商品的自由貿易而間接改變兩國相對競爭力。$0 \leq n \leq 1$, $n$ 爲兩國受到實質匯率變動影響的係數, 或可視爲兩國經濟受對外貿易影響的重要程度。若 $n \to 1$, 表示兩國對外貿易相當自由, 且經濟情況容易受到實質利率波動而產生影響; 另一方面, 若 $n \to 0$, 表示兩國經濟較爲封閉, 對外貿易較不自由, 外國之政策影響本國的程度較小。

因此, 開放體系下的兩國的模型可定義爲動態賽局, 政策制訂者隨著時間欲制訂將跨期的成本函數最小化的政策, 在這種假設下, 政策合作與競爭必須使用微分賽局理論來進行分析。而本文重點在探討不考慮外生的衝擊 (exogenous shocks) 的情況下, 兩大小相同之國家財政政策之競爭與合作。假設此賽局之時間由 $t = 0$ 開始且起點 $s(0) = s_0 \neq 0$, 並已知 $s_0$。此外, 本文在 $t \geq 0$ 時, 將實質匯率 $s(t)$ 視爲連續路徑, 即不考慮函數 $s(t)$ 的跳躍、不連續的情形, 此項假設符合前述動態最適化之狀態變數應爲連續函數。

## 4.2 財政政策非合作之情況 (Non-cooperative Case)

首先先假設兩國之政策制訂者只基於起初情況進行決策, 且隨著時間經過並不會產生記憶的效果, 換言之, 在 $s(t)$ 時, 只考量狀態變數的起初條件 $s_0$, 並將兩國之貨幣政策 $m(t)$、$m^*(t)$ 設爲外生常數, 在財政政策的動態賽局開始後就不隨著時間改變。將 H 國、F 國政府 (政策制訂者) 所面對的 Hamilton-Jacobi-Bellman 等式定義爲 $H_i$, 其中 $i = 1, 2$。而 $H_1$、$H_2$ 表示成 (TS1)、(TN2) 兩式。

$$H_1^N = \frac{1}{2}(y^2 + ns^2) + \lambda_1^N(\phi_1 m^* - \phi_1 m + \phi_2 s + \phi_3 f^N - \phi_3 f^{*N}) \qquad \text{(TN1)}$$

$$H_2^N = \frac{1}{2}(y^{*2} + ns^2) + \lambda_2^N(\phi_1 m^* - \phi_1 m + \phi_2 s + \phi_3 f^N - \phi_3 f^{*N}) \qquad \text{(TN2)}$$

$\lambda_1(t)$、$\lambda_2(t)$ 爲兩國政府 (政策制訂者) 所面對 Hamilton-Jacobi-Bellman 等式中之共變異數 (costate variables), $f(t)$ 、$f^*(t)$ 爲該國各自所控制的變數的時間路徑, 即最小化跨期成本目標函數的財政政策。另一方面, 兩國所面對的動態最適化問題則受限於狀態變數的運動方程式 (TN3), 而 (TN4)、(TN5)、(TN6)、(TN7) 爲開放循環的非合作均衡解之必要條件 (neccessary conditions)。

$$\dot{s}^{TN} = \phi_1 m^* - \phi_1 m + \phi_2 s + \phi_3 f - \phi_3 f^* \qquad \text{(TN3)}$$

$$f^{TN} = \arg\min_{f} H_1^N \qquad \text{(TN4)}$$

$$f^{*TN} = \arg\min_{f^*} H_2^N \qquad \text{(TN5)}$$

$$\dot{\lambda_1^N} = \theta\lambda_1^N - \frac{\partial H_1^N}{\partial s} \qquad \text{(TN6)}$$

$$\dot{\lambda_2^N} = \theta\lambda_2^N - \frac{\partial H_2^N}{\partial s} \qquad \text{(TN7)}$$

由於本文模型假設爲線性二次賽局 (linear-quadratic game), 線性二次爲凸函數的假設, 使得動態最適化的必要條件同時也是充分條件 (sufficient conditions)。同時, 充分條件中的貫截條件 (transversality conditions) 也成立, 狀態變數 $s(t)$ 於動態最適化問題中的邊界條件則設定爲水平終線 (infinite horizon problem),

終點不固定 (free-end point) 的形式。而狀態變數 $s(t)$ 的貫截條件 (transversality conditions) 爲:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_i^N (s^N - s) \geq 0 \ \forall s, i = 1, 2 \tag{TN8}$$

整理 (TN4)、(TN5) 兩式, 可得出兩國財政政策的反應函數。

$$f = -\frac{\rho}{\kappa} f^* - \frac{\phi_3}{c^2}\lambda_1 - \frac{a}{c}m - \frac{a}{c}\frac{\rho}{\kappa}m^* - \frac{b}{c}s \tag{TN9}$$

$$f^* = -\frac{\rho}{\kappa} f + \frac{\phi_3}{c^2}\lambda_2 - \frac{a}{c}\frac{\rho}{\kappa}m - am^* + \frac{b}{c}s \tag{TN10}$$

由 (TN9)、(TN10) 兩式求出 $f^{TN}$、$f^{*TN}$。

$$f^{TN} = \frac{-1}{c\Delta}(\frac{\phi_3}{c}\lambda_1 + \frac{\rho}{\kappa}\frac{\phi_3}{c}\lambda_2) - \frac{a}{c}m - (\frac{\kappa}{\kappa-\rho})\frac{b}{c}s \tag{TN11}$$

$$f^{*TN} = \frac{1}{c\Delta}(\frac{\rho}{\kappa}\frac{\phi_3}{c}\lambda_1 + \frac{\phi_3}{c}\lambda_2) - \frac{a}{c}m^* + (\frac{\kappa}{\kappa-\rho})\frac{b}{c}s \tag{TN12}$$

其中

$$\Delta = 1 - (\frac{\rho}{\kappa})^2$$

將 (TN11)、(TN12) 代入限制式 (TN3), 可得出

$$\dot{s}^{TN} = -\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{\phi_3^2}{c^2}\lambda_1^N + \frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{\phi_3^2}{c^2}\lambda_2^N + (\phi_2 - 2(\frac{\kappa-\rho}{\kappa})\frac{b}{c}\phi_3)s + (\phi_1 + \frac{a}{c}\phi_3)(m^* - m) \tag{TN13}$$

由於假設 $m^*(t)$ 和 $m(t)$ 爲外生常數, 即兩國雖然貨幣政策不同, 但各自的貨幣政策在財政政策的動態賽局開始前已經成立, 且不會隨著時間經過而改變。兩國在作財政政策的決策時, 並不考慮當時該國之貨幣政策, 故可將兩國之貨幣政策視爲外生常數, 即 $m^*(t) = \bar{m}^*(t)$、$m(t) = \bar{m}(t)$。由 (TN6)、(TN7) 的條件可得 $\lambda_1^N$、$\lambda_2^N$ 的一階微分方程式。

$$\dot{\lambda}_1^N = -ns + (\theta - \phi_2 + \frac{b}{c}\phi_3)\lambda_1^N \tag{TN14}$$

$$\dot{\lambda}_2^N = -ns + (\theta - \phi_2 - \frac{b}{c}\phi_3)\lambda_2^N \tag{TN15}$$

令 $\mathbf{y} = \left[s(t), \lambda_1^N(t), \lambda_2^N(t)\right]^{\mathrm{T}}$, 則典型方程式系統(canonical equations) 可表示爲 $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^{TN} \cdot \mathbf{y}$。

$$\mathbf{A}^{TN} = \begin{bmatrix} \phi_2 - 2(\frac{\kappa-\rho}{\kappa})\frac{b}{c}\phi_3 & -\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{\phi_3^2}{c^2} & -\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{\phi_3^2}{c^2} \\ -n & (\theta - \phi_2 + \frac{b}{c}\phi_3) & 0 \\ -n & 0 & (\theta - \phi_2 + \frac{b}{c}\phi_3) \end{bmatrix} \tag{TN16}$$

令 $|\mathbf{A}^{TN} - \nu\mathbf{I}| = 0$, 可求得三個特徵值 (eigenvalues) $\nu_1^N$、$\nu_2^N$、$\nu_3^N$, 進而求出各特徵值分別對應之特徵向量 (eigenvectors) $\mathbf{w}_1 = [w_{11}\ w_{21}\ w_{31}]^{\mathrm{T}}$、$\mathbf{w}_2 = [w_{21}\ w_{22}\ w_{23}]^{\mathrm{T}}$、$\mathbf{w}_3 = [w_{31}\ w_{32}\ w_{33}]^{\mathrm{T}}$。依照Dockner and R. Neck (1988)所述, 定義 $\nu_3$ 爲矩陣 $\mathbf{A}^{TN}$ 中最小之特徵值, 其對應之特徵向量爲 $\mathbf{w}_3 = [w_{13}\ w_{23}\ w_{33}]^{\mathbf{T}}$ 可以求得 $s^{TN}(t)$。[17]

$$s^{TN}(t) = s_0\, e^{\nu_3 t} \tag{TN17}$$

兩國的最佳財政政策之路徑爲

$$f^{TN} = (\frac{\kappa}{\kappa-\rho})[(\frac{\phi_3}{c^2})(\frac{w_{23}}{w_{13}}) - \frac{b}{c}]s_o e^{\nu_3 t} - \frac{a}{c}m \tag{TN18}$$

$$f^{*TN} = -(\frac{\kappa}{\kappa-\rho})[(\frac{\phi_3}{c^2})(\frac{w_{23}}{w_{13}}) - \frac{b}{c}]s_o e^{\nu_3 t} - \frac{a}{c}m^* \tag{TN19}$$

於兩國的商品市場, 一國會有超額供給, 而另一國將會有超額需求。[18]

$$y^{TN} = (\frac{\phi_3}{c})(\frac{w_{23}}{w_{13}})s_0 e^{\nu_3 t} \tag{TN20}$$

$$y^{*TN} = -y^{TN} \tag{TN21}$$

最後, 在兩國非使用共同貨幣並在開放循環的資訊結構下, 計算兩國因政府支出增加所造成的成本。

$$\mathcal{J}_1^{TN} = \mathcal{J}_2^{TN} = \frac{s_0^2}{2}[(\frac{\phi_3}{c^2})(\frac{w_{23}}{w_{13}})^2 + n][\frac{1}{\theta - 2\nu_3}] \tag{TN22}$$

數值模擬以及圖形比較留至第六章比較各不同情況時詳述。

[17]細節及假設請參照 Dockner and R. Neck (1988)

[18]由於假設世界上只有兩國, 其中一國商品市場若有超額供給, 另一國商品市場必有超額需求, 請參照 Dockner and R. Neck (1988)

## 4.3 財政政策合作之情況(Cooperative Case)

將兩國之目標函數 $\mathcal{J}_1$、$\mathcal{J}_2$ 用一個既定的合作參數 $\omega$ 合併, 使 $\mathcal{J}^c$ 爲不使用共同貨幣的兩國於財政政策合作情況下的目標式。其他變數的假設與前節相同, 目標式 $\mathcal{J}^C$ 視爲該兩國因爲合作的財政政策, 造成兩國產出 $y$、$y^*$, 及物價 $\dot{p}$ 波動的跨期成本, 實施政策搭配後欲追求目標式的最小化。$\omega$ 爲兩國目標的分配比例, 可視爲兩國在決定政策合作前的協議, 用以衡量各國的目標占政策合作時之比重。若 $\omega \to 0$, 表示兩國合作後之跨期成本將以對 H 國所產生的經濟衝擊所產生之成本作爲主要考量, 即 H 國因政策合作所造成的景氣波動會被考量較多; 另一方面, 若 $\omega \to 1$, 兩國所占之比例相同, 則表示沒有任何一國在政策搭配時享有較大的優勢。

$$\mathcal{J}^C = \mathcal{J}_1 + \omega \mathcal{J}_2,\ 0 < \omega < \infty \tag{TC1}$$

以 (TC1) 作爲目標式, 搭配整個經濟體系的狀態變數方程式, 兩國財政政策合作後的 Hamilton-Jacobi-Bellman 等式爲

$$H^{TC} = \frac{1}{2}\{y^2 + \omega y^{*2} + n(1+\omega)s^2\} + \lambda^c(\phi_1 m^* - \phi_1 m + \phi_2 s + \phi_3 f - \phi_3 f^*) \tag{TC2}$$

(TC3) 仍爲狀態變數運動方程式, 爲求最佳化目標時的限制式。依照 Pontryagon 最大原理, 目標式最小化之必要條件爲 (TC4)、(TC5)、(TC6)。

$$\dot{s}^{TC} = \phi_1 m^* - \phi_1 m + \phi_2 s + \phi_3 f^C - \phi_3 f^{*C} \tag{TC3}$$

$$f^{TC} = \arg\min_{f} H^{TC} \tag{TC4}$$

$$f^{*TC} = \arg\min_{f^*} H^{TC} \tag{TC5}$$

$$\dot{\lambda}^{TC} = \theta \lambda^{TC} - \frac{\partial H^{TC}}{\partial s} \tag{TC6}$$

整理 (TC4)、(TC5), 可得出兩國政府支出的反應函數。

$$cf + \frac{\rho}{\kappa}cf^* = -\frac{\lambda^C}{c}\phi_3 - (am + \frac{\rho}{\kappa}am^* + bs) \tag{TC7}$$

$$\frac{\rho}{\kappa}cf + cf^* = \frac{\lambda^C}{\omega c}\phi_3 - (\frac{\rho}{\kappa}am + am^* - bs) \tag{TC8}$$

由 (TC7)、(TC8) 求得 $f^{TC}$、$f^{*TC}$

$$f^{TC} = -\frac{1}{\Delta}(1 + \frac{1}{\omega}\frac{\rho}{\kappa})\phi_3\lambda^C - \frac{a}{c}m - \frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{b}{c}s \tag{TC9}$$

$$f^{*TC} = \frac{1}{\Delta}(\frac{1}{\omega} + \frac{\rho}{\kappa})\phi_3\lambda^C - \frac{a}{c}m^* + \frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{b}{c}s \tag{TC10}$$

其中

$$\Delta = c^2[1 - (\frac{\rho}{\kappa})^2]$$

由 (TC2) 可得

$$\frac{\partial H^{TC}}{\partial s} = by - \omega by^* + (1+\omega)ns + \phi_2\lambda^C \tag{TC11}$$

將 (TC9)、(TC10)、(TC11) 式, 代換回 (TC3)、(TC6), 可得出

$$\dot{s} = (\phi_1 + \frac{a}{c}\phi_3)m^* - (\phi_1 + \frac{a}{c}\phi_3)m - 2\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{b}{c}\phi_3 s - \frac{1+\omega}{\omega}\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\phi_3^2\lambda^C \tag{TC12}$$

$$\dot{\lambda^C} = -(1+\omega)ns + (\theta + 2\frac{b}{c}\phi_3 - \phi_2)\lambda^C \tag{TC13}$$

與前節所述相同, 假設兩國的貨幣政策爲一不隨時間改變的外生變數, $m^*(t) = \bar{m^*}$ 、$m(t) = \bar{m}$, 在此可將 $(\phi_1 + \frac{a}{c}\phi_3)m^* - (\phi_1 + \frac{a}{c}\phi_3)m$ 視爲常數。將不使用共同貨幣的兩國財政政策合作之典型方程式 (canonical equations) 寫成向量形式。令 $\mathbf{y} = \left[s(t), \lambda^C(t)\right]^T$, 則典型方程式系統可表示爲 $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^{TC} \cdot \mathbf{y}$。其中

$$\mathbf{A}^{TC} = \begin{bmatrix} -2\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{b}{c} & -\frac{1+\omega}{\omega}\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\phi_3^2 \\ -(1+\omega)n & (\theta + 2\frac{b}{c}\phi_3) \end{bmatrix} \tag{TC14}$$

令 $|\mathbf{A}^{TC} - \nu\mathbf{I}| = 0$, 可求得兩個特徵值 (eigenvalues) $\nu_1$、$\nu_2$, 與其分別對應之特徵向量 (eigenvectors) 爲 $\mathbf{w}_1 = [w_{11}\ w_{21}]^T$、$\mathbf{w}_2 = [w_{12}\ w_{22}]^T$。若體系爲穩定, 特徵值應爲一正一負, 可令 $\nu_2 \leq 0 \leq \nu_1$, 即可求出

$$s^{TC}(t) = s_0\ e^{\nu_2 t} \tag{TC15}$$

就可解出 $s^{TC}(t)$、$\lambda^{TC}(t)$ 之時間路徑, 數值模擬與圖形留至第六章比較各不同情況時再詳述。

## 4.4 財政政策有領導者的情況 (Stackelberg Case)

若是兩國處於資訊不對稱的情況下, 就必須以賽局理論中的 Stackelberg 模型來討論兩者的決策與均衡。在 Stackelberg 理論中, 賽局的參與者分爲領導者 (leader) 與跟隨者 (follower), 領導者在作決策時可將追隨者的反應內入考量; 也就是說領導者可以在追隨者決定其最佳化策略後, 再進行反應。反之, 跟隨者就和同時進行賽局時所面對的情況一樣, 在作決策時無法得知領導者的反應。因此對於領導者而言, 其最佳化的解將會有所不同。本文首先假設 H 國爲追隨者, 以下標 1 表示其變數; F國爲領導者, 則以下標 2 或 $*$ 符號表示其變數。雖然 Stackelberg 的模型會使人覺得兩國的規模或地位似乎不太相等, 領導國家在這個情況下會比較佔有優勢。但在這裡, 我們仍將兩國假設爲規模相同的兩個國家。在這個具有領導者的兩國模型, 可以將領導者視爲美國, 具有強大的經濟力並是有獨立決策能力的國家。另一個可視爲歐盟, 雖然經濟規模和美國差不多, 但其本身因爲是由不同的國家所組成之超國家組織, 對外的決策所需要的流程比起美國較爲複雜, 即便規模與美國相當, 仍不易作爲國際市場上的主要政策實施的領導經濟體。對於追隨者 H 國來說, 在 Stackelberg 模型中, 其解最大化目標函數所需之必要條件和非合作解時一樣。(Bąsar and G.J. Olsder, 1982) 故參照4.1節, 追隨者 (H 國) 所面對的

Hamilton-Jacobi-Bellman 等式爲

$$H_1^S = \frac{1}{2}(y^2 + ns^2) + \lambda_1^S(\phi_1 m^* - \phi_1 m + \phi_2 s + \phi_3 f^S - \phi_3 f^{*S}) \tag{TS1}$$

最佳化的條件也和 4.1 節相同。

$$f^S = \arg\min_f H_1^S \tag{TS2}$$

跟隨者 (H 國) 所面對的反應函數爲

$$f^S = -\frac{\rho}{\kappa} f^{*S} - \frac{\phi_3}{c^2}\lambda_1 - \frac{a}{c}m - \frac{a}{c}\frac{\rho}{\kappa}m^* - \frac{b}{c}s \tag{TS3}$$

其共變異數一階微分方程式 (adjoint equation, 伴隨等式) 爲

$$\dot{\lambda}_1^S = \theta\lambda_1 - \frac{\partial H_1^S}{\partial s} \tag{TS4}$$

整理可得

$$\dot{\lambda}_1^S = -ns + (\theta - \phi_2 + \frac{b}{c}\phi_3)\lambda_1^S \tag{TS5}$$

貫截條件和4.1節, 也就是兩國財政政策非合作時, 求解非合作 Nash 均衡時相同。

但對於領導者而言, 其必須修正所面對之最適控制問題。由於在 Stackelberg 模型中,F 國必須將 H 國的動態最適化考量進去, 也就是必須加入 (TS3)、(TS5) 兩式。求 Stackelberg 微分賽局最適化問題的必要條件之方法最先是由Simaan and Cruz, J.B. (1973)所提出, 以下爲領導廠商追求目標式最適化所必須滿足之條件。

$$f_2^S = \arg\min H_2^S[\lambda_2^S,\ \lambda_1^S,\ s,\ \lambda_3^S,\ f,\ f^*] \tag{TS6}$$

由於追隨者已經宣佈其欲實行的政府支出 $f(t)$, 而領導國家所面對的Hamilton-Jacobi-Bellman 等式爲

$$H_2^S = \frac{1}{2}(y^{*2}+ns^2)+\lambda_2^S(\phi_1 m^*-\phi_1 m+\phi_2 s+\phi_3 f-\phi_3 f^*)+\lambda_3^S[(\theta-\phi_2+\frac{b}{c}\phi_3)\lambda_1^S-ns] \tag{TS7}$$

由 (TS3) 可知, $\lambda_1^S$ 爲跟隨者的共變異數。$\lambda_2^S$ 爲領導者對於狀態運動方程式 (限制式) 的共狀態變數, 而領導者所面對之共狀態變數 $\lambda_2^S$ 之伴隨方程式 (adjoint equation) 爲

$$\dot{\lambda_2^S} = \theta\lambda_2^S - \frac{\partial}{\partial s}H_2^S[\lambda_2^S,\ \lambda_1^S,\ s,\ \lambda_3^S,\ f,\ f^*] \tag{TS8}$$

$\lambda_3^S$ 是領導者對於 $\lambda_1^S$(追隨者共變異數) 的共變異數, 以領導者的角度而言, 即類似另一個狀態變數, 其貫截條件和在政策非合作時一樣

$$\dot{\lambda_3^S} = \theta\lambda_3^S - \frac{\partial}{\partial \lambda_1^S}H_2^S[\lambda_2^S,\ \lambda_1^S,\ s,\ \lambda_3^S,\ f,\ f^*] \tag{TS9}$$

從政策領導國 F 國的角度觀之, $\lambda_3^S$ 表示 $\lambda_1^S$ 的價值, 類似於影子價格 (shadow price) 的意義。但現在領導國所面對的問題並不是一個標準的最適控制問題, 因爲領導者的第二個狀態變數 $\lambda_1^S$ 並沒有給定初始條件, 故我們必須假設其對應的共狀態變數 $\lambda_3^S$ 的初始條件滿足下式 (TS10)。

$$\lambda_3^S(0) = 0 \tag{TS10}$$

將追隨國家的最佳化條件, 也就是 (TS3) 式, 加入領導國家所面對的 Hamilton-Jacobi-Bellman 現值等式 (TS7)。並對其 Hamilton-Jacobi-Bellman 等式求有極值之條件。即可得出領導國所面對的反應函數 (TS11)。

$$f^{*S} = -\frac{\rho}{\kappa}f^S + \frac{a}{c}\frac{\rho}{\kappa}m + \frac{a}{c}m^* - \frac{b}{c}s + (\frac{\kappa+\rho}{\kappa})\frac{\phi_3}{c^2}\lambda_2^S \tag{TS11}$$

利用 (TS11) 與 (TS3) 兩式聯立, 即可求得 $f^S$、$f^{*S}$ 兩者在最佳化時該符合之條件。

$$cf^S + \frac{\rho}{\kappa}cf^{*S} = am + \frac{\rho}{\kappa}am^* - bs - \phi_3\lambda_1^S \qquad \text{(H國 跟隨國家 TS3)}$$

$$\frac{\rho}{\kappa}cf^S + cf^{*S} = \frac{\rho}{\kappa}am + am^* + bs + \frac{\kappa+\rho}{\kappa}\frac{\phi_3}{c}\lambda_2^S \qquad \text{(F國 領導國家 TS11)}$$

解出上聯立方程式之 $f^S$、$f^{*S}$, 即滿足 Stackelberg 模型假設下的求極值條件。

$$f^S = -\frac{a}{c}m^* - \frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{b}{c}s - \frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{\rho}{\kappa+\rho}\frac{\phi_3}{c}\lambda_1^S - \frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{\phi_3}{c^2}\lambda_2^S \tag{TS12}$$

$$f^{*S} = \frac{a}{c}m^* + \frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{b}{c}s + \frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{\rho}{\kappa+\rho}\frac{\phi_3}{c}\lambda_1^S + \frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{\phi_3}{c^2}\lambda_2^S \tag{TS13}$$

將 (TS12)、(TS13) 代換回狀態變數運動方程式 (TS14),

$$\dot{s} = \phi_1 m^* - \phi_1 m + \phi_2 s + \phi_3 f^S - \phi_3 f^{*S} \tag{TS14}$$

得出

$$\dot{s} = (\phi_1 - 2\frac{a}{c}\phi_3)m^* - \phi_1 m + (\phi_2 - 2\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{b}{c}\phi_3)s - 2\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{\phi_3^2}{c}\lambda_1^S - 2\frac{\kappa}{\kappa-\rho}(\frac{\phi_3}{c})^2\lambda_2^S \tag{TS15}$$

同樣的, 在本模型中假設貨幣政策在財政政策合作前就已經決定, 且不會隨著時間改變, 故可視爲兩外生變數。即 $m(t) = \bar{m}(t)$、$m^* = \bar{m}^*(t)$。配合 (TS4), 並整理 (TS8)、(TS9) 即可寫出本模型下之典型方程式。

$$\dot{\lambda}_2^S = -ns - (\theta + 2\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{b}{c}\phi_3)\lambda_2 + n\lambda_3^S \tag{TS16}$$

$$\dot{\lambda}_3^S = 2\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{\rho}{\kappa+\rho}\frac{\phi_3^2}{c}\lambda_2^S + (\phi_2 + \frac{b}{c}\phi_3)\lambda_3^S \tag{TS17}$$

若 $\mathbf{y}^{TS} = \begin{bmatrix} s\ \lambda_1^S\ \lambda_2^S\ \lambda_3^S \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, 將其典型方程式(canonical equations) 寫成向量形式, $\dot{\mathbf{y}}^{TS} = \mathbf{A}^{TS} \cdot \mathbf{y}$。其中 $\mathbf{A}^{TS} =$

$$\begin{bmatrix} (\phi_2 - 2\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{b}{c}\phi_3) & -2\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{\phi_3^2}{c} & -2\frac{\kappa}{\kappa-\rho}(\frac{\phi_3}{c})^2 & 0 \\ -n & (\theta - \phi_2 + \frac{b}{c}\phi_3) & 0 & 0 \\ -n & 0 & (\theta + 2\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{b}{c}\phi_3) & n \\ 0 & 0 & 2\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{\rho}{\kappa+\rho}\frac{\phi_3^2}{c} & (\phi_2 - \frac{b}{c}\phi_3) \end{bmatrix}$$

令 $\mathbf{A}^{TS}$ 中兩個穩定的 (負的) 特徵值爲 $\nu_1$, $\nu_2$。其各自所對應的特徵向量爲$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} w_{11}^S\ w_{21}^S\ w_{31}^S\ w_{41}^S \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 及 $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} w_{12}^S\ w_{22}^S\ w_{32}^S\ w_{42}^S \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。依據Dockner and R. Neck

(1987), 可以定義出一些參數方便求解。令

$$\Delta = w_{12}^S w_{41}^S - w_{11}^S w_{42}^S$$

得出之 $s^{TS}(t)$之路徑爲

$$s^{TS}(t) = \frac{s_0}{\Delta}(w_{12}^S w_{41}^S e^{\nu_2 t} - w_{11}^S w_{42}^S e^{\nu_1 t}) \tag{TS18}$$

最佳化的財政政策路徑爲

$$\begin{aligned} f^{TS}(t) = \frac{s_0\kappa}{c^2(\kappa-\rho)\Delta}\{ & w_{41}^S[(\frac{\phi_3\kappa}{\kappa+\rho})w_{22}^S + (\frac{\phi_3\rho\kappa}{\kappa^2-\rho^2})w_{32}^S - cbw_{12}^S]e^{\nu_2 t} \\ & + w_{42}^S[-(\frac{\phi_3\kappa}{\kappa+\rho})w_{21}^S - (\frac{\phi_3\rho\kappa}{\kappa^2-\rho^2})w_{31}^S + cbw_{11}^S]e^{\nu_1^t}\} \end{aligned} \tag{TS19}$$

$$\begin{aligned} f^{*TS}(t) = \frac{s_0\kappa}{c^2(\kappa-\rho)\Delta}\{ & w_{41}^S[(-\frac{\phi_3\rho}{\kappa+\rho})w_{22}^S + (\frac{\phi_3\kappa^2}{\kappa^2-\rho^2})w_{32}^S - cbw_{12}^S]e^{\nu_2 t} \\ & + w_{42}^S[(\frac{\phi_3\rho}{\kappa+\rho})w_{21}^S - (\frac{\phi_3\kappa^2}{\kappa^2-\rho^2})w_{31}^S + cbw_{11}^S]e^{\nu_1^t}\} \end{aligned} \tag{TS20}$$

除此之外亦可求得兩國產出的變化。

$$y^{TS}(t) = \frac{s_0\phi_3}{c\Delta}[w_{22}^S w_{41}^S e^{\nu_2 t} - w_{21}^S w_{42}^S e^{\nu_1 t}] \tag{TS21}$$

$$y^{*TS}(t) = -\frac{s_0\phi_3}{c\Delta}(\frac{\kappa}{\kappa-\rho})[w_{22}^S w_{41}^S e^{\nu_2 t} - w_{21}^S w_{42}^S e^{\nu_1 t}] \tag{TS22}$$

也可求出兩國因實施政策的成本折現值。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_1^{TS} &= \frac{s_0^2}{2\Delta^2}\{[\frac{(w_{41}^S)^2}{\theta-2\nu_2}][\frac{\phi_3^2}{c^2}(w_{22}^S)^2+c(w_{12}^S)^2] \\
&\quad +[\frac{(w_{42}^S)^2}{\theta-2\nu_1^S}][\frac{\phi_3^2}{c^2}(w_{21}^S)^2+c(w_{11}^S)^2] \\
&\quad -[\frac{2w_{41}^S w_{42}^S}{\theta-\nu_1^S-\nu_2^S}][\frac{\phi_3^2}{c^2}w_{22}^S w_{21}^S+cw_{12}^S w_{11}^S]\} \qquad \text{(TS23)} \\
\mathcal{J}_2^{TS} &= \frac{s_0^2}{2\Delta^2}\{[\frac{(w_{41}^S)^2}{\theta-2\nu_2}][(\frac{\phi_3\kappa}{c(\kappa-\rho)})^2(w_{32}^S)^2+c(w_{12}^S)^2] \\
&\quad +[\frac{(w_{42}^S)^2}{\theta-2\nu_1^S}][(\frac{\phi_3\kappa}{a(\kappa-\rho)})^2(w_{31}^S)^2+c(w_{11}^S)^2] \\
&\quad -[\frac{2w_{41}^S w_{42}^S}{\theta-\nu_1^S-\nu_2^S}][(\frac{\phi_3\kappa}{c^2(\kappa-\rho)^2}w_{32}^S w_{31}^S+cw_{12}^S w_{11}^S]\} \qquad \text{(TS24)}
\end{aligned}
$$

如此一來, 在開放循環資訊形式的兩國非貨幣同盟國模型中, 政府支出採Stackelberg的兩國政策模型以完全被數學表示。於第六章將會以數值模擬的方式求出特徵值與特徵向量, 並繪圖與其他模型比較。

# 5 貨幣同盟國之兩國模型假設

## 5.1 貨幣同盟的兩國模型

本章主要以Dockner and R. Neck (1995)及Dockner and R. Neck (2008)中之數學方法作爲分析工具, 並延續Engwerda et al. (2002)的模型, 進而分析兩國在使用單一貨幣下, 財政政策非合作、財政政策合作及財政政策有領導者的情況下, 假設參數並進行數值模擬, 以期能達到與上一章之結論比較之效果。

表 3: 使用共同貨幣的兩國模型(Currency Union Two-country Model)

$$y(t) = \delta s(t) - \gamma r(t) + \rho y^*(t) + \eta f(t) \tag{U1}$$

$$y^*(t) = -\delta s(t) - \gamma r^*(t) + \rho y(t) + \eta f^*(t) \tag{U2}$$

$$s(t) = p^*(t) - p(t) \tag{U3}$$

$$r(t) = i^E(t) - \dot{p}(t) \tag{U4}$$

$$r^*(t) = i^E(t) - \dot{p}^*(t) \tag{U5}$$

$$m(t) - p(t) = \kappa y(t) - \zeta i^E(t) \tag{U6}$$

$$m^*(t) - p^*(t) = \kappa y^*(t) - \zeta i^E(t) \tag{U7}$$

$$\dot{p} = \xi y(t) \tag{U8}$$

$$\dot{p^*} = \xi y^*(t) \tag{U9}$$

表 3 即爲本章所設定兩貨幣同盟國之模型。假設兩個國家在完全貨幣整合的情況下, H國、F 國爲不存在任何政治風險的貨幣同盟會員國。換言之, 實際上兩國個別之貨幣已經被共同貨幣給取代, 各國業已喪失了貨幣自主權, 由於兩國爲不能藉由增加貨幣供給量實施擴張性的貨幣政策, 也不能藉由操控利率干擾市場以刺激景氣。跨國間也成立了一個貨幣發行機構取代原先的中央銀行, 此跨國貨幣發行機構有權控制在兩地區的貨幣發行數量及名目利率。[19] 由以上假設也可推論出兩

[19]在歐元區的情況下爲歐洲中央銀行(European Central Bank, ECB)

國皆已無法藉由操控貨幣供給作爲政策工具, 在浮動匯率制度下, 也無法利用匯率升貶值作爲其影響其對外貿易。另一方面, 假設兩國生產要素之一—勞動 (labor) 無法自由移動, 而使得商品市場和要素市場中的調整機制較爲緩慢, 符合新凱因斯學派對於經濟體系的短期觀點。

接著, 將表 3 模型中各項變數加以解釋。其中, 我們給予 F 國的變數加上符號 $*$, 除了名目利率和 $i^E(t)$ 和通貨膨脹率 $\dot{p}(t)$, 其他變數皆爲對數型態, 並爲時間之函數。$y(t)$ 爲一國之實質產出, 如同前章所述, 爲偏離充分就業下的產出水準, $y^*(t)$ 則爲另一國偏離充分就業的產出水準。$p(t)$ 爲一國產出的平均物價, $\dot{p}(t)$ 爲一國之產出在一段時間內的價格變化, 可將其視爲通貨膨脹率。$i^E(t)$ 爲共同貨幣發行機構所制訂的共同名目匯率, $r(t)$、$r^*(t)$ 則表示由名目利率和各國物價水準相減後的實質利率。$s(t)$ 爲 H 國相對於 F 國出口產品物價的差異, 可視爲本國商品與外國商品的競爭程度, 也可視爲兩國出口競爭程度的指標; $f(t)$ 爲該國因政府支出和收入不均所造成的實質政府赤字。

本模型可出使用共同貨幣兩國的總體經濟環境, 並充分展現兩國景氣循環的相依關係。而爲了簡化分析時的複雜度, 假設兩國有對稱的參數, 並忽略與兩國與世界上其他國家的互動。接著, 闡述模型中數學式所代表的經濟意義。

$$y(t) = \delta s(t) - \gamma r(t) + \rho y^*(t) + \eta f(t) \tag{U1}$$

$$y^*(t) = -\delta s(t) - \gamma r^*(t) + \rho y(t) + \eta f^*(t) \tag{U2}$$

式 (U1) 爲顯示出共同貨幣區內之競爭的總和需求函數, 將本國實質利率、本國政府赤字和另一國之產出作爲變數。從 (U1) 可得知, 透過貿易, 兩國藉由商品、資金自由地進出口, 一國之產出將會被另一國之產出給影響。而 (U2) 式就表示 F 國 (外國) 商品市場的總和需求函數。由此可知, 兩國所實施的政策將會透過國際間的自由貿易而影響到另一國之產出。

$$s(t) = p^*(t) - p(t) \tag{U3}$$

(U3) 式爲兩個國家商品出口價格的差異, 也可視爲兩國家相互間貿易商品的競爭。而實質利率的定義則是被表示在 (U4)、(U5) 式。兩國的實質利率 $r(t)$、$r^*(t)$ 分別爲跨國貨幣發行機構所訂立名目利率減掉各國之物價變化率 $p(t)$、$p^*(t)$。

$$r(t) = i^E(t) - \dot{p}(t) \tag{U4}$$

$$r^*(t) = i^E(t) - \dot{p}^*(t) \tag{U5}$$

於式 (U6), 假設國內對於共同貨幣需求爲實質產出 $y(t)$ 與名目利率 $i^E(t)$ 的函數, 模型中設定跨國家之貨幣發行單位能夠完全地控制共同貨幣區的名目利率, $i^E(t)$。(U7) 則是另一國 (F 國) 的貨幣需求表示方式。

$$m(t) - p(t) = \kappa y(t) - \zeta i^E(t) \tag{U6}$$

$$m^*(t) - p^*(t) = \kappa y^*(t) - \zeta i^E(t) \tag{U7}$$

由於本文的主要將焦點放在財政政策上, 因此假設此共同貨幣發行單位將名目利率定於一固定水準, 即 $i^E(t) = \bar{i}^E$。而 (U8)、(U9) 爲短期經濟體系價格具有僵固性的觀點, 符合凱因斯學派之假設, 於短期下, 價格變動幅度會是偏離充分就業水準之產出的函數。

$$\dot{p} = \xi y(t) \tag{U8}$$

$$\dot{p^*} = \xi y^*(t) \tag{U9}$$

和前一章之模型比較 [第四章](表 2), 可發現兩模型的差異在於共同貨幣區沒有名目匯率 $e$ 以及各國政府訂立的名目利率 $i$、$i^*$。由於在貨幣聯盟中, 兩國家計部門在從事貿易時, 已經使用相同的貨幣作爲交易的媒介, 名目匯率當然就不存在。而兩國行在成立貨幣同盟後, 原本隸屬於國家機構的央行也轉變成超國家貨幣發行機構的分支機構, 不再擁有操控該國名目利率的權力, 也無法利用貨幣政策來刺激經濟。本章所假設之簡單模型, 可以參考任兩個目前使用歐元的國家目前執行貨幣政策的方式。

結合了 (U1) 至 (U9) 的數學式, 我們可以得到以下兩條方程式 (U10)、(U11) 來描述兩國的競爭關係。由式 (U10) 及 (U11) 可發現, 不論是 H 國或是 F 國, 該國之總產出會受到貨幣發行機構所控制之名目利率為 $i^E(t)$、兩國財政政策 $f(t)$、$f^*(t)$ 及兩國產品或國家相對競爭力 $s(t)$ 的影響。

$$y(t) = af(t) + \frac{\rho}{\kappa}af^*(t) + bs(t) - ci^E(t) \tag{U10}$$

$$y^*(t) = \frac{\rho}{\kappa}af(t) + af^*(t) - bs(t) - ci^E(t) \tag{U11}$$

其中

$$a = \frac{\eta\kappa}{\kappa^2 - \rho^2},\ b = \frac{\delta}{\kappa + \rho},\ c = \frac{\gamma}{\kappa - \rho},\ \kappa = 1 - \gamma\xi$$

標準化 $i^E(t) = 0$, 再將式 (U10) 與 (U11) 代回式 (U8) 與 (U9), 就可得出兩個描述物價變化的方程式, 將兩國之物價相減, 即可得到描述兩國政策競爭的一階線性微分的動態方程式。[20]

$$\dot{s}(t) = \phi_1 f^*(t) - \phi_1 f(t) + \phi_2 s(t) \tag{U12}$$

其中

$$\phi_1 = -\frac{\xi\eta}{\kappa + \rho},\ \phi_2 = -\frac{2\delta\xi}{\kappa + \rho}$$

接著, 在求解動態最適化問題時, 我們還必須設定兩國政府目標函數及其 Hamilton-Jacobi-Bellman 等式。如同前章所述, 兩國政府的目標函數, 即實施財政政策所造成的跨期成本會被狀態變數用動方程式給限制。[21] 為使分析容易, 將兩國政策制訂者的動態策略互動簡化為線性二次微分賽局 (linear quadratic differential games)。

依照Engwerda et al. (2002)文中指出, 政府支出增加雖可將該國經濟體的產出提高, 但同時也會造成物價 $\dot{p}$ 、產出 $y$ 的波動, 故一般分析總體經濟政策時, 將

[20] $\phi_1 = -\frac{\xi\eta}{\kappa+\rho} < 0$, $\phi_2 = \frac{-2\delta\xi}{\kappa+\rho} < 0$

[21]若兩國為貨幣同盟國模型中, 狀態變數運動方程式見式(U12)

物價和產出的波動視爲實施經濟政策時帶來的成本爲典型的設定, 而兩國政府則尋求最小化未來成本的損失。本文從另一角度分析, 認爲實施經濟政策後, 經濟體系因通貨膨脹率 $\dot{p}$ 、實質產出 $y$ 波動所造成的成本, 最後都將影響該國貨品之實質競爭力 $s$。例如, 該國之通貨膨脹率 $\dot{p}$ 上升, 將會造成實質出口商品競爭力 $s$ 的下降。而出口競爭力 $s$ 的波動, 將會帶給該國在貿易上額外之成本。故本文假設貨幣同盟國H 國與 F 國皆想以其財政政策刺激經濟, 同時也想避免因物價 $\dot{p}$ 上升 、產出 $y$ 波動而造成出口商品競爭力 $s$ 的下降。將 H 國、F 國之目標函數 $\mathcal{J}^h$ 、$\mathcal{J}^f$ 設定爲(U13)、(U14) 的形式。H國的目標式以 $\mathcal{J}_1$ 表示, F國的目標式以 $\mathcal{J}_2$ 及符號 $*$ 表示。[22]

$$\mathcal{J}_1' = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\theta t}[\alpha y^2(t) + \beta \dot{p}^2(t) + \sigma s^2(t)]dt \tag{U13}$$

$$\mathcal{J}_2' = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\theta t}[\alpha y^{*2}(t) + \beta \dot{p}^{*2}(t) + \sigma s^2(t)]dt \tag{U14}$$

其中 $\alpha, \beta, \sigma > 0$。令折現率則爲 $\theta$ 的情況下, 假設兩國將會在未來追求其目標函數的最適化, 即追求跨期成本函數折現值的最小化。

目標式爲該國國內的產出偏離充分就業時的水準 $y$, 通貨膨脹率 $\dot{p}$ 的函數, 而兩國政府皆希望實施政策工具時, 能最小化未來因景氣波動所產生的成本的折現值。又因實質匯率可視爲兩國出口財貨之實質競爭力, $s$ 因實施經濟政策而波動將會影響該國進出口貿易甚鉅。[23] 模型中假設兩國政府都希望能維持穩定的實質匯率 $s$, 使其經常帳不會因爲實施政策而劇烈波動, 並保持其出口產品的實質競爭力。

由模型中 (U8) , (U9) 兩式可知, 在符合凱因斯學派的假設之下, 各國的短期物價變動 $\dot{p}$ 爲偏離充分就業水準產出 $y$ 的函數, 故可將目標式簡化爲以下兩式, 而

[22]本文後半段爲統一表示, 以 $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ 表示 $\mathcal{J}^h$, $\mathcal{J}^f$。

[23]$\dot{p}(t)$ 即物價水準隨著時間經過的變化, 可視爲通貨膨脹率

不影響最適化之結果。

$$\min \mathcal{J}_1 = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\theta t}[y^2(t) + ns^2(t)]dt \tag{U15}$$
$$\min \mathcal{J}_2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\theta t}[y^{*2}(t) + ns^2(t)]dt \tag{U16}$$

其中

$$n = \frac{\sigma}{\alpha + \beta\xi^2} \tag{U17}$$

兩國各自追求動態最適化, 會因兩國之目標式中有實質匯率 $s(t)$ 而相互影響。換言之, 兩國各自實施不同的財政政策與貨幣政策, 將會因爲兩國商品的自由貿易而間接改變兩國相對競爭力。$0 \leq n \leq 1, n$ 爲兩國受到實質利率變動影響的係數, 或可視爲兩國經濟受對外貿易影響的重要程度。若 $n \to 1$, 表示兩國對外貿易相當自由, 且經濟情況容易受到實質利率波動而產生影響; 另一方面, 若 $n \to 0$, 表示兩國經濟較爲封閉, 對外貿易較不自由, 外國之政策影響本國的程度較小。

故本文將政策的微分賽局設定爲兩國各追求其 $\mathcal{J}_1$、$\mathcal{J}_2$ 的最佳化, 並同時受限於狀態方程式 (state equation)(式 12)。如此一來將可建立兩國之 Hamilton-Jacobi-Bellman 等式, 並利用 Pontryagon 最大原理進行在不同政策競爭或合作的情況下進行求解。

5.2 節將說明若兩國政府財政政策不合作時, 同時實施對該國動態最適化所造成的均衡解爲何, 相當於賽局理論中納許均衡 (Nash Equilibrium) 的概念。5.3 節則討論若兩國可以事先知道對方的政策, 並在彼此實施政策前達成政策搭配的協議, 此即爲進行合作的解 (Pareto Equilibrium)。5.4 節則將 H 國視爲政策跟隨國家,F 視爲實施政策的領導國家, 在此假設之下, 是將 H 國的政策和非合作時無異, 以動態最適化求出, 但 F 國因爲是領導國家的關係, 必須將 H 國政策變數加入其 Hamilton-Jacobi-Bellman 等式。此種均衡類似於寡占市場中 Steckelberg 均衡的概念, 必須將賽局參與者分成領導者 (leader) 與跟隨者 (follower)。領導廠

商在追求自身利益之最大化的同時, 假設已知跟隨者的最佳策略, 必須將後進廠商的政策納入考量。故均衡解會和 Nash 均衡 (非合作解) 有所不同。

### 5.2 財政政策非合作的情況 (Non-cooperative Case)

我們先分析若在共同貨幣區的兩國所採取財政政策的非合作情況, 此可視爲兩國政府同時作動態最適化, 所求出的解可視爲非合作情況下的納許均衡解 (Nash Equilbrium)。

延續 (UN13)、(UN14) 式, 本國 (H 國)、外國 (F 國) 折現目標函數爲 $\mathcal{J}_1$、$\mathcal{J}_2$。動態最適化問題即爲追求跨期成本的最小化, 其他的變數假設則延續貨幣聯盟下的模型表 3。本國的財政控制變數爲 $f_1$, 外國的財政控制變數爲 $f_2$, 兩國模型中的狀態變數爲出口貨品之競爭力 $s$。其中 $\lambda_1$、$\lambda_2$ 爲 Hamilton-Jacobi-Bellman 等式之共狀態變數 (costate variables)。加上 5.1 節所論述之目標函數設定方式, 兩國之 Hamilton-Jacobi-Bellman 等式 $H_1$、$H_2$ 分別可表示成 (UN1)、(UN2)。

$$H_1 = \frac{1}{2}\{y^2(t) + ns^2(t)\} + \lambda_1(t)\{\phi_1 f^*(t) - \phi_1 f(t) + \phi_2 s(t)\} \tag{UN1}$$

$$H_2 = \frac{1}{2}\{y^*(t) + ns^2(t)\} + \lambda_2(t)\{\phi_1 f^*(t) - \phi_1 f(t) + \phi_2 s(t)\} \tag{UN2}$$

本文採用的線性二次賽局 (linear-quadratic game), 由於凸函數的假設, 使得動態最適化的必要條件 (neccessary conditions) 同時也是充分條件 (sufficient conditions)。同時也使得充分條件中的貫截條件 (tranversality) 成立, 以水平終線 (infinite horizon problem), 終點不固定 (free-end point) 的條件來對狀態變數 $s(t)$ 作邊界設定。

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\theta t}\lambda_i(t)[s^N(t) - s(t)] \geq 0, i = 1, 2 \tag{UN3}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\theta t}\bar{\lambda}_i(t)\cdot s(t) \leq 0, i = 1, 2 \tag{UN4}$$

對於所有的 $s(t)$, $s(0) = s_0$, 使得 $[\lambda_i^N(t), x(t)]$ 收斂至有限的均衡點,

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_i^N(t) = \bar{\lambda_i^N}$$

利用 Pontryagon 最大原理求極値的必要條件 (necessary conditions) 進行求解。

$$\dot{s}^{UN}(t) = \phi_1 f^*(t) - \phi_1 f(t) + \phi_2 s(t),\ s(0) = s_0 \tag{UN5}$$

$$f^{UN}(t) = \arg\min H_1 \tag{UN6}$$

$$f^{*UN}(t) = \arg\min H_2 \tag{UN7}$$

$$\dot{\lambda}_1(t) = \theta\lambda_1(t) - \frac{\partial H_1}{\partial s(t)} \tag{UN8}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = \theta\lambda_2(t) - \frac{\partial H_2}{\partial s(t)} \tag{UN9}$$

求目標函數的極大值必須符合 (UN6)、(UN7) 的條件, 可求得兩國的實施財政政策時的反應函數 (U10)、(U11)。

$$af + \frac{\rho}{\kappa} af^* = -bs + \frac{\phi_1}{a}\lambda_1 \tag{UN10}$$

$$\frac{\rho}{\kappa} af + af^* = bs - \frac{\phi_1}{a}\lambda_2 \tag{UN11}$$

求出 $f^{UN}$、$f^{*UN}$爲

$$f^{UN} = -\frac{1}{\Delta}[(\frac{\kappa+\rho}{\kappa})abs + \phi_1\lambda_1 + \frac{\rho}{\kappa}\phi_1\lambda_2] \tag{UN12}$$

$$f^{*UN} = \frac{1}{\Delta}[(\frac{\kappa+\rho}{\kappa})abs - \frac{\rho}{\kappa}\phi_1\lambda_1 - \phi_1\lambda_2] \tag{UN13}$$

其中

$$\Delta = [1 - (\frac{\rho}{\kappa})^2]a^2$$

將 (UN12)、(UN13) 代回狀態變數運動方程式 (UN5):

$$\dot{s}^{UN} = [2(\frac{\kappa}{\kappa-\rho})\frac{b}{a}\phi_1 + \phi_2]s + (\frac{\kappa}{\kappa+\rho})\frac{\phi_1^2}{a^2}\lambda_1 - (\frac{\kappa}{\kappa+\rho})\frac{\phi_1^2}{a^2}\lambda_2 \tag{UN14}$$

而兩個共變異數的伴隨方程式 (adjoint equations) 爲下列兩式:

$$\dot{\lambda_1} = \theta\lambda_1 - \frac{\partial H_1}{\partial s} = -ns + (\theta - \frac{b}{a}\phi_1 - \phi_2)\lambda_1 \tag{UN15}$$

$$\dot{\lambda_2} = \theta\lambda_2 - \frac{\partial H_2}{\partial s} = -ns + (\theta - \frac{b}{a}\phi_1 - \phi_2)\lambda_2 \tag{UN16}$$

依照最大原理的充分條件 (UN12)、(UN13)、(UN14)、(UN15)、(UN16), 可將 Hamiltonian 微分方程之典型系統 (canonical system)1ul表示成向量形式。令 $\mathbf{y} = [s, \lambda_1, \lambda_2]^T$ , 而且 $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^{UN} \cdot \mathbf{y}$ 。

$$\begin{bmatrix} \dot{s}(t) \\ \dot{\lambda_1}(t) \\ \dot{\lambda_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{b}{a}\phi_1 + \phi_2 & (\frac{\kappa}{\kappa+\rho})\frac{\phi_1^2}{a^2} & -(\frac{\kappa}{\kappa+\rho})\frac{\phi_1^2}{a^2} \\ -n & (\theta - \frac{b}{a}\phi_1 - \phi_2) & 0 \\ -n & 0 & (\theta - \frac{b}{c}\phi_1 - \phi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(t) \\ \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}$$

利用 $|\mathbf{A}^{UN} - \nu\mathbf{I}| = 0$ 解出三個特徵值 (eigenvalue) $\nu_1, \nu_2, \nu_3$。進而求出各特徵值分別對應之特徵向量 (eigenvectors) $\mathbf{w}_1 = [w_{11}\ w_{21}\ w_{31}]^T$、$\mathbf{w}_2 = [w_{21}\ w_{22}\ w_{23}]^T$、$\mathbf{w}_3 = [w_{31}\ w_{32}\ w_{33}]^T$。依照Dockner and R. Neck (1988)所述, 定義 $\nu_3$ 爲矩陣 $\mathbf{A}^{UN}$ 中最小之特徵值(穩定解), 其對應之特徵向量爲 $\mathbf{w}_3 = [w_{13}\ w_{23}\ w_{33}]^T$ 可以求得 $s^{UN}(t)$。[24]

$$s^{UN}(t) = s_0\ e^{\nu_3 t} \tag{UN17}$$

兩國的最佳財政政策之路徑爲

$$f^{UN} = (\frac{\kappa}{\kappa-\rho})[(\frac{\phi_3}{c^2})(\frac{w_{23}}{w_{13}}) - \frac{b}{c}]s_o e^{\nu_3 t} \tag{UN18}$$

$$f^{*UN} = -(\frac{\kappa}{\kappa-\rho})[(\frac{\phi_3}{c^2})(\frac{w_{23}}{w_{13}}) - \frac{b}{c}]s_o e^{\nu_3 t} \tag{UN19}$$

於兩國的商品市場, 一國會有超額供給, 而另一國將會有超額需求。[25]

$$y^{UN} = (\frac{\phi_3}{c})(\frac{w_{23}}{w_{13}})\ s_0\ e^{\nu_3 t} \tag{UN20}$$

$$y^{*UN} = -y^{TN} \tag{UN21}$$

最後, 在兩國非使用共同貨幣並在開放循環的資訊結構下, 計算兩國因政府支出增加所造成的成本。數值模擬以及圖形比較留至第六章比較各不同情況時詳述。

$$\mathcal{J}_1^{UN} = \mathcal{J}_2^{UN} = \frac{s_0^2}{2}[(\frac{\phi_3}{a^2})(\frac{w_{23}}{w_{13}})^2 + n][\frac{1}{r-2\nu_3}] \tag{UN22}$$

[24]細節及假設請參照 Dockner and R. Neck (1988)

[25]同註解16。由於假設世界上只有兩國, 其中一國商品市場若有超額供給, 另一國商品市場必有超額需求, 請參照 Dockner and R. Neck (1988)

## 5.3 財政政策合作的情況(Cooperative Case)

延續第 5.1 節貨幣同盟國之模型中兩國對於目標函數的假設。兩國各自實施財政政策時將會因爲各自的產出 $y$、$y^*$ 及 出口貨品價格 $s$ 之波動而產生成本, 兩國決策者在理性的的假設下, 將會追求跨期成本函數折現值的最小。再藉由 (U8), (U9) 兩式可知, 在符合凱因斯學派的假設之下, 各國的短期物價變動 $\dot{p}$ 爲偏離充分就業水準產出 $y$ 的函數, 故可將目標式簡化爲以下兩式 (U15)、(U16), 而不影響最適化之結果。

$$\min \mathcal{J}_1 = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\theta t}[y^2(t) + ns^2(t)]dt \tag{U15}$$

$$\min \mathcal{J}_2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\theta t}[y^{*2}(t) + ns^2(t)]dt \tag{U16}$$

其中

$$n = \frac{\sigma}{\alpha + \beta\xi^2} \tag{U17}$$

在財政政策合作的情況下, 兩國的目標函數將會變成 (UC1)。

$$\mathcal{J}_c = \mathcal{J}_1 + \omega\mathcal{J}_2 \tag{UC1}$$

$\omega$ 是一常數, 實施政策合作時, 用以衡量兩國個別之政策目標占合作協議的相對比重。如 4.3 節所述, $\omega$ 爲兩國在在政策合作時, 兩國各自產生的成本占合作時的成本之比例。因此, $\omega$ 可視爲實施政策搭配前之協議。即假設爲兩國在進行政策合作前以進行協商, 決定兩國之跨期成本在政策合作時需占多少的比重。其他變數設定都如同 5.2 節。則在兩國財政政策搭配時, 我們可將合作之 Hamilton-Jacobi-Bellman 等式寫成 (UC2)。

$$H^C = \frac{1}{2}\{y^2(t) + \omega y^{*2}(t) + (1+\omega)ns^2(t)\} + \lambda_c\{\phi_1 f^*(t) - \phi_1 f(t) + \phi_2 s(t)\} \tag{UC2}$$

同 5.2 節, 再利用 Pontryagon 最大原理的充分條件 (UC3)、(UC4)、(UC5)、(UC6) 對動態最適化進行求解。

$$\dot{s}^{UC}(t) = \phi_1 f^*(t) - \phi_1 f(t) + \phi_2 s(t),\ s(0) = s_0 \tag{UC3}$$

$$f^{UC}(t) = \arg\min H^C \tag{UC4}$$

$$f^{*UC}(t) = \arg\min H^C \tag{UC5}$$

$$\dot{\lambda}^C(t) = \theta\lambda^C(t) - \frac{\partial H^C}{\partial s(t)} \tag{UC6}$$

(UC4)、(UC5) 爲求最大化目標函數的條件, $f^{UC}$、$f^{*UC}$ 必須符合下列等式。

$$[1+\omega(\frac{\rho}{\kappa})^2]f + (1+\omega)\frac{\rho}{\kappa}f^* = -\frac{b}{a}(1-\omega\frac{\rho}{\kappa})s + \frac{\phi_1}{a^2}\lambda^C \tag{UC7}$$

$$(1+\omega)\frac{\rho}{\kappa}f + [\omega+(\frac{\rho}{\kappa})^2]f^* = \frac{b}{a}(\omega-\frac{\rho}{\kappa})s - \frac{\phi_1}{a^2}\lambda^C \tag{UC8}$$

可求得 $f^{UC}$、$f^{*UC}$ 的最適化條件, 即使得跨期成本現値最小的 $f^{UC}$、$f^{*UC}$。

$$f^{UC} = \frac{1}{\Delta}\{-\frac{b}{a}[\omega+\omega\frac{\rho}{\kappa}-\omega(\frac{\rho}{\kappa})^2-\omega(\frac{\rho}{\kappa})^3]s + \frac{\phi_1}{a^2}[\omega+\frac{\rho}{\kappa}+\omega\frac{\rho}{\kappa}+(\frac{\rho}{\kappa})^2]\lambda_C\} \tag{UC9}$$

$$f^{*UC} = \frac{1}{\Delta}\{\frac{b}{a}[\omega+\omega\frac{\rho}{\kappa}+\omega(\frac{\rho}{\kappa})^2-2\omega^2(\frac{\rho}{\kappa})^2+\omega(\frac{\rho}{\kappa})^3]s - \frac{\phi_1}{a^2}[1+\frac{\rho}{\kappa}+\omega\frac{\rho}{\kappa}+\omega(\frac{\rho}{\kappa})^2]\lambda_C\} \tag{UC10}$$

其中

$$\Delta = \omega[1-(\frac{\rho}{\kappa})^2]^2$$

將其代回狀態變數運動方程式 (UC3), 可得:

$$\dot{s}^{UC} = \{\frac{b}{a\Delta}\phi_1[2\omega+2\omega(\frac{\rho}{\kappa})-2\omega^2(\frac{\rho}{\kappa})^2]-\phi_2\}s - \frac{\phi_1^2}{a^2\Delta}[1+\omega+2\frac{\rho}{\kappa}+2\omega\frac{\rho}{\kappa}+\omega(\frac{\rho}{\kappa})^2+\frac{\rho}{\kappa}]\lambda^C \tag{UC11}$$

共變異數的伴隨方程式 (adjoint equation) 爲以下:

$$\dot{\lambda}^C(t) = \theta\lambda^C(t) - \frac{\partial H^C}{\partial s(t)} = -2(1+\omega)ns - (\theta+2b\phi_1+\phi_2)\lambda^C \tag{UC12}$$

將 Hamiltonian 體系之典型方程式 (canonical equations) 寫成向量形式。令 $\mathbf{y} = [s, \lambda_c]^{\mathrm{T}}$ , 且 $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^{UC} \cdot \mathbf{y}$。$\mathbf{A}^{UC} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{b}{a\Delta}\phi_1[2\omega + 2\omega(\frac{\rho}{\kappa}) - 2\omega^2(\frac{\rho}{\kappa})^2] - \phi_2 & -\frac{\phi_1^2}{a^2\Delta}[1 + \omega + 2\frac{\rho}{\kappa} + 2\omega\frac{\rho}{\kappa} + \omega(\frac{\rho}{\kappa})^2 + \frac{\rho}{\kappa}] \\ -2(1+\omega)n & -(\theta + 2b\phi_1 + \phi_2) \end{bmatrix}$$

令 $|\mathbf{A}^{UC} - \nu\mathbf{I}| = 0$, 可求得兩個特徵值 (eigenvalues) $\nu_1$、$\nu_2$, 與其分別對應之特徵向量 (eigenvectors) 爲 $\mathbf{w}_1 = [w_{11}\ w_{21}]^{\mathrm{T}}$、$\mathbf{w}_2 = [w_{12}\ w_{22}]^{\mathrm{T}}$。若體系爲穩定, 則兩特徵值應爲一正一負, 假設 $\nu_2 \leq 0 \leq \nu_1$, 即可求出

$$s^N(t) = s_0\ e^{\nu_2 t} \tag{UC13}$$

就可解出 $s^{UC}(t)$、$\lambda^C(t)$ 之路徑, 留至第六章比較各不同情況時再詳述。

## 5.4 財政政策有領導者的情況 (Stackelberg Case)

前述 5.2, 5.3 兩小節爲考慮兩國之政策爲同時實施的情形。但若以現實世界所發生之情況論之, 國與國之間的政策實施時往往會有先後順序。國家政策制訂常需經過行政機關制訂, 民意代表審核的談判過程, 使政策之制訂往往曠日廢時。

如台灣於2012年積極推動「台美貿易暨投資架構協議」(Trade and Investment Framework Agreement,TIFA), 即因擔心韓國美國自由貿易協定 (U.S.-Korea Free Trade Agreement,KORUS FTA) 生效後會對我國出口產品造成影響。同樣的, 一國若以擴張政府支出以刺激該國經濟, 也會對其鄰近之國家造成影響。事故, 其貿易對手國或鄰國接會以其相關的決策來因應, 本文則是假設鄰國也會以擴張性的財政政策回應。因此, 藉由假設兩不同國家有依序地實施擴張性的財政政策, 同 4.4 節之假設。將 F 國設定爲先實施財政政策的國家, 即外國先實施財政政策, 本國 (H 國) 於後跟進的情況, 以 Stackelberg 形式之微分賽局進行分析。故參照5.1節, 追隨者 (H 國) 所面對的 Hamilton-Jacobi-Bellman 等式爲

$$H_1^S = \frac{1}{2}\{y(t)^2 + ns(t)^2\} + \lambda_1^S(\phi_1 f^{US}(t) - \phi_1 f^{*US}(t) + \phi_2 s(t)) \tag{US1}$$

最佳化的條件也和 5.1 節相同。

$$f^{US} = \arg\min_{f} H_1^{US} \tag{US2}$$

跟隨者 (H 國) 所面對的反應函數爲

$$f^{US} = -\frac{\rho}{\kappa} f^{*US} - \frac{b}{a} s + \frac{\phi_1}{a^2} \lambda_1^S \tag{US3}$$

其共變異數一階微分方程式 (adjoint equation, 伴隨等式) 爲

$$\dot{\lambda_1^S} = \theta \lambda_1^S - \frac{\partial H_1^S}{\partial s} = -ns + (\theta - \frac{b}{a}\phi_1 - \phi_2)\lambda_1^S \tag{US4}$$

如同 4.3 節, 對於領導者 (F 國) 而言, 其必須修正所面對之最適控制問題。由於在 Stackelberg 模型中,F 國必須將 H 國的動態最適化考量進去, 也就是必須加入 (US4) 式。求 Stackelberg 微分賽局最適化問題的必要條件之方法最先是由Simaan and Cruz, J.B. (1973)所提出, 以下爲領導廠商追求目標式最適化所必須滿足之條件。

$$f_2^{US} = \arg\min H_2^S[\lambda_2^S,\ \lambda_1^S,\ s,\ \lambda_3^S,\ f,\ f^*] \tag{US5}$$

由於追隨者已經宣佈其欲實行的政府支出 $f(t)$, 而領導國家所面對的Hamilton-Jacobi-Bellman 等式爲

$$H_2^S = \frac{1}{2}(y^{*2}+ns^2)+\lambda_2^S(\phi_1 f^* - \phi_1 f + \phi_2 s)+\lambda_3^S[(\theta-\frac{b}{a}\phi_1-\phi_2)\lambda_1^S - ns] \tag{US6}$$

由 (US4) 可知, $\lambda_1^S$ 爲跟隨者的共變異數。$\lambda_2^S$ 爲領導者對於狀態運動方程式 (限制式) 的共狀態變數, 而領導者所面對之共狀態變數 $\lambda_2^S$ 之伴隨方程式 (adjoint equation) 爲

$$\dot{\lambda_2^S} = \theta \lambda_2^S - \frac{\partial}{\partial s} H_2^S[\lambda_2^S,\ \lambda_1^S,\ s,\ \lambda_3^S,\ f,\ f^*] \tag{US7}$$

$\lambda_3^S$ 是領導者對於 $\lambda_1^S$(追隨者共變異數) 的共變異數, 以領導者的角度而言, 即類似另一個狀態變數, 其貫截條件和在政策非合作時一樣

$$\dot{\lambda_3^S} = \theta\lambda_3^S - \frac{\partial}{\partial\lambda_1^S}H_2^S[\lambda_2^S,\ \lambda_1^S,\ s,\ \lambda_3^S,\ f,\ f^*] \tag{US8}$$

從政策領導國 F 國的角度觀之, $\lambda_3^S$ 表示 $\lambda_1^S$ 的價值, 類似於影子價格 (shadow price) 的意義。但現在領導國所面對的問題並不是一個標準的最適控制問題, 因爲領導者的第二個狀態變數 $\lambda_1^S$ 並沒有給定初始條件, 故我們必須假設其對應的共狀態變數 $\lambda_3^S$ 的初始條件滿足下式 (US9)。

$$\lambda_3^S(0) = 0 \tag{US9}$$

將追隨國 (H 國) 的最大化條件 (US3) 加入至領導國家之折現成本函數 (US6), 並求出領導國在成本函數最小化的條件。

$$f^{*US} = -\frac{\rho}{\kappa}f + \frac{b}{a}s - \frac{\kappa+\rho}{\kappa}\frac{\phi_1}{a^2}\lambda_2^S \tag{US10}$$

整理在 Stackelberg 假設下, 兩國之反應函數爲 (US3)、(US10)。

$$f^{US} + \frac{\rho}{\kappa}f^{*US} = -\frac{b}{a}s - \frac{\phi_1}{a^2}\lambda_1^S \qquad \text{(H國 跟隨國家 US3)}$$

$$\frac{\rho}{\kappa}f^{US} + f^{*US} = \frac{b}{a}s - \frac{\kappa+\rho}{\kappa}\frac{\phi_1}{a^2}\lambda_2^S \qquad \text{(F國 領導國家 US10)}$$

解出上述聯立方程式即可求出使得兩國成本函數最小化的均衡值 $f^{US}$、$f^{*US}$。

$$f^{US} = -\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{b}{a}s - \frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{\kappa}{\kappa+\rho}\frac{\phi_1}{a^2}\lambda_1^S - \frac{\rho}{\kappa-\rho}\frac{\phi_1}{a^2}\lambda_2^S \tag{US11}$$

$$f^{*US} = \frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{b}{a}s + \frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{\rho}{\kappa+\rho}\frac{\phi_1}{a^2}\lambda_1^S - \frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{\phi_1}{a^2}\lambda_2^S \tag{US12}$$

將 (US11)、(US12) 之結果代回狀態變數運動方程式 (US13)。

$$\dot{s}(t) = \phi_1 f^{*US} - \phi_1 f^{US} + \phi_2 s \tag{US13}$$

得出

$$\dot{s} = (2\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{b}{a}\phi_1 + \phi_2)s + \frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{\phi_1^2}{a^2}\lambda_1^S - \frac{\kappa+\rho}{\kappa-\rho}\frac{\phi_1^2}{a^2}\lambda_2^S \tag{US14}$$

再將 (US7)、(US8) 整理, 加上 $\lambda_1^S$ 的伴隨方程式 (adjoint equation), 即可求出整個動態體系的典型系統, 隨後以向量形式表示。

$$\dot{\lambda_2^S} = \theta\lambda_2^S - \frac{\partial H_2^S}{\partial s} = -ns + [\theta - \frac{\kappa+\rho}{\kappa}\frac{b}{a^2}\phi_1 + 2(\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{b}{a}\phi_1 + \phi_2)]\lambda_2^S - n\lambda_3^S \tag{US15}$$

$$\dot{\lambda_3^S} = \theta\lambda_3^S - \frac{\partial H_2^S}{\partial \lambda_1^S} = -\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{\phi_1^2}{a^2}\lambda_2^S + (\frac{b}{a}\phi_1 + \phi_2)\lambda_3^S \tag{US16}$$

令 $\mathbf{y} = [s, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$ , 而且 $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^{US} \cdot \mathbf{y}$。其中

$$\mathbf{A}^{US} = \begin{bmatrix} 2\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{b}{a}\phi_1 + \phi_2 & (\frac{\kappa}{\kappa+\rho})\frac{\phi_1^2}{a^2} & -(\frac{\kappa}{\kappa+\rho})\frac{\phi_1^2}{a^2} & 0 \\ -n & (\theta - \frac{b}{a}\phi_1 - \phi_2) & 0 & 0 \\ -n & 0 & (\theta - \frac{b}{c}\phi_1 - \phi_2) & -n \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa}{\kappa-\rho}\frac{\phi_1^2}{a^2} & (\frac{b}{a}\phi_1 + \phi_2) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}^{US}$ 中兩個穩定的 (負的) 特徵值爲 $\nu_1$, $\nu_2$, 假設 $\nu_1 \geq \nu_2$。其各自所對應的特徵向量爲$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} w_{11}^S & w_{21}^S & w_{31}^S & w_{41}^S \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 及 $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} w_{12}^S & w_{22}^S & w_{32}^S & w_{42}^S \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。依據 Dockner and R. Neck (1987), 可以定義出一些參數方便求解。令

$$\Delta = w_{12}^S w_{41}^S - w_{11}^S w_{42}^S \tag{US17}$$

並求得出狀態變數 $s^{US}(t)$ 的時間路徑爲。

$$s^{US}(t) = \frac{s_0}{\Delta}(w_{12}^S w_{41}^S e^{\nu_2 t} - w_{11}^S w_{42}^S e^{\nu_1 t}) \tag{US18}$$

最佳化的財政政策路徑為

$$
\begin{aligned}
f^{US}(t) = \frac{s_0\kappa}{a^2(\kappa-\rho)\Delta}\{ & w_{41}^S[(\frac{\phi_1\kappa}{\kappa+\rho})w_{22}^S + (\frac{\phi_1\rho\kappa}{\kappa^2-\rho^2})w_{32}^S - abw_{12}^S]e^{\nu_2 t} \\
& + w_{42}^S[-(\frac{\phi_1\kappa}{\kappa+\rho})w_{21}^S - (\frac{\phi_1\rho\kappa}{\kappa^2-\rho^2})w_{31}^S + abw_{11}^S]e^{\nu_1^t}\}
\end{aligned}
\tag{US19}
$$

$$
\begin{aligned}
f^{*US}(t) = \frac{s_0\kappa}{a^2(\kappa-\rho)\Delta}\{ & w_{41}^S[(-\frac{\phi_1\rho}{\kappa+\rho})w_{22}^S + (\frac{\phi_1\kappa^2}{\kappa^2-\rho^2})w_{32}^S - abw_{12}^S]e^{\nu_2 t} \\
& + w_{42}^S[(\frac{\phi_1\rho}{\kappa+\rho})w_{21}^S - (\frac{\phi_1\kappa^2}{\kappa^2-\rho^2})w_{31}^S + abw_{11}^S]e^{\nu_1^t}\}
\end{aligned}
\tag{US20}
$$

除此之外亦可求得兩國產出的變化。

$$
y^{US}(t) = \frac{s_0\phi_1}{c\Delta}[w_{22}^S w_{41}^S e^{\nu_2 t} - w_{21}^S w_{42}^S e^{\nu_1 t}] \tag{US21}
$$

$$
y^{*US}(t) = -\frac{s_0\phi_1}{c\Delta}(\frac{\kappa}{\kappa-\rho})[w_{22}^S w_{41}^S e^{\nu_2 t} - w_{21}^S w_{42}^S e^{\nu_1 t}] \tag{US22}
$$

也可求出兩國因實施政策的成本折現值。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_1^{US} = \frac{s_0^2}{2\Delta^2}\{ & [\frac{(w_{41}^S)^2}{\theta-2\nu_2}][\frac{\phi_1^2}{a^2}(w_{22}^S)^2 + a(w_{12}^S)^2] \\
& + [\frac{(w_{42}^S)^2}{\theta-2\nu_1^S}][\frac{\phi_1^2}{a^2}(w_{21}^S)^2 + a(w_{11}^S)^2] \\
& - [\frac{2w_{41}^S w_{42}^S}{\theta-\nu_1^S-\nu_2^S}][\frac{\phi_1^2}{a^2}w_{22}^S w_{21}^S + aw_{12}^S w_{11}^S]\}
\end{aligned}
\tag{US23}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_2^{US} = \frac{s_0^2}{2\Delta^2}\{ & [\frac{(w_{41}^S)^2}{\theta-2\nu_2}][(\frac{\phi_1\kappa}{a(\kappa-\rho)})^2(w_{32}^S)^2 + a(w_{12}^S)^2] \\
& + [\frac{(w_{42}^S)^2}{\theta-2\nu_1^S}][(\frac{\phi_1\kappa}{a(\kappa-\rho)})^2(w_{31}^S)^2 + a(w_{11}^S)^2] \\
& - [\frac{2w_{41}^S w_{42}^S}{\theta-\nu_1^S-\nu_2^S}][(\frac{\phi_1\kappa}{a^2(\kappa-\rho)^2}w_{32}^S w_{31}^S + aw_{12}^S w_{11}^S]\}
\end{aligned}
\tag{US24}
$$

如此一來, 在開放循環資訊形式的兩貨幣同盟國模型中, 政府支出採 Stackelberg 政策的兩國模型以完全被數學表示。於第六章將會以數值模擬的方式求出特徵值與特徵向量, 並繪圖與其他模型比較。

# 6 數值模擬及圖例

延續前兩章之內容, 於本章我們將以假設參數的方式進行數值模擬並畫圖。最後在比較兩國在不同模型下六種情形之圖形, 分析各模型中狀態變數實質匯率 $s(t)$ 的走勢, 並比較各種不同的模型假設之下狀態變數 $s(t)$ 走勢之異同。

## 6.1 非貨幣同盟兩國財政政策採不合作策略

延續第四章的模型, 爲兩國貨幣政策獨立時的模型。假設參數 $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.5$, $k = 1$, $\lambda = 0.5$, $\xi = 1$, $\rho = 0.5$, $\theta = 0.1$, $\eta = 0.5$。並假設起初實質匯率 $s_0 = 2$, 兩國爲完全開放體系, $n = 1$。

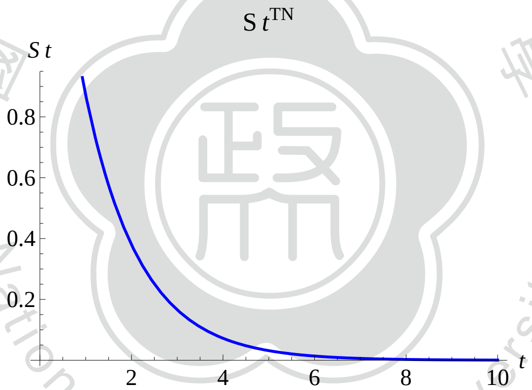


圖 1: 非貨幣同盟之兩國財政政策非合作時之匯率走勢

而 H 國之貨幣相對於 F 國貨幣在兩國財政政策實行後開始貶值, 即直接實質匯率 $s(t)$ 不斷下降。經計算後可得出 $\kappa = 1.5$, $a = 1.33$, $b = 0.33$, $c = 0.67$, $\phi_1 = 1.5$, $\phi_2 = 0.25$, $\phi_3 = 0.33$。依據 4.2 節模型推論結果, 非貨幣同盟國財政政策不合作的典型方程式(canonical system) 矩陣如下。

$$\mathbf{A}^{TN} = \begin{bmatrix} 0.0332 & -0.3639 & -0.3639 \\ -1 & 0.0125 & 0 \\ -1 & 0 & 0.0125 \end{bmatrix}$$

此三階方陣的特徵值爲 0.876, $-0.8303$, 0.0125。欲求體系的穩定解, 故取最小特徵值 (第四章使用符號爲 $\nu_3$) $-0.830325$。故狀態變數, 即匯率 $s^{TN}(t)$ 的走勢爲圖 1。

$$s^{TN}(t) = 2e^{-0.8303t} \tag{TN}$$

## 6.2 非貨幣同盟兩國財政政策採合作策略

根據 4.3 節之模型推導, 兩國在政策合作前, 會先達成一合作協議確定 $\omega$ 之大小, 即在合作時, 哪一國的成本函數被考量較多。若兩國合作時, $\omega = 0.2$, 即合作時政策偏重 H 國跨期的成本折現目標函數。

$$\mathbf{A}^{TC1} = \begin{bmatrix} -1.4476 & -0.9801 \\ -1.2 & 0.4251 \end{bmatrix}$$

此二階方陣 $\mathbf{A}^{TC1}$ 之特徵值爲 $-1.944$, 0.9215。穩定解取最小之特徵值 (第四章模型中 $\nu_2$), 實質匯率的時間路徑爲 (TC1) 式, 並以圖 2 表示。

$$s^{TC1}(t) = 2e^{-1.944t} \tag{TC1}$$

兩國合作時, 若 $\omega = 0.8$, 即財政政策合作時以 F 國的成本折現值。

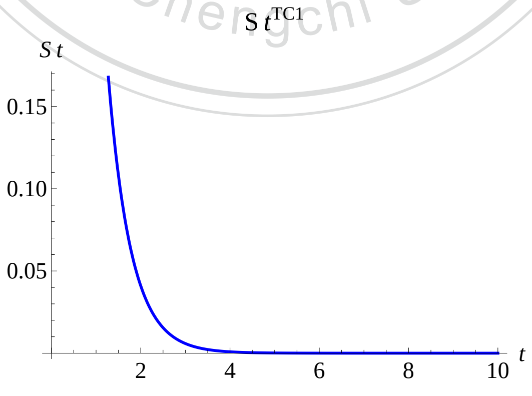


圖 2: 非貨幣同盟之兩國財政政策合作時之匯率走勢 (H 國爲主 $\omega = 0.2$)

$$\mathbf{A}^{TC2} = \begin{bmatrix} -1.4476 & -0.3676 \\ -1.8 & 0.4251 \end{bmatrix}$$

此二階方陣 $\mathbf{A}^{TC2}$ 之特徵值爲 $-1.7516$, $0.7291$。穩定解取最小之特徵值 (第四章模型中 $\nu_2$), 實質匯率的時間路徑爲 (TC2) 式, 並以圖 3 表示。

$$s^{TC2}(t) = 2e^{-1.7516t} \tag{TC2}$$

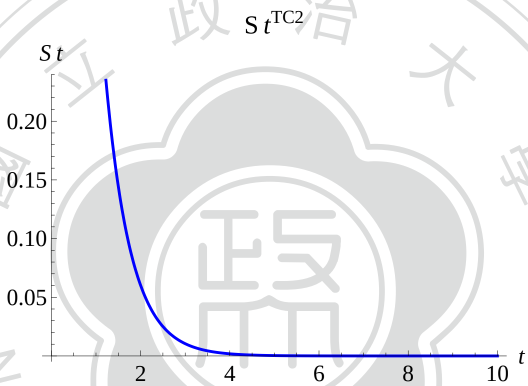


圖 3: 非貨幣同盟之兩國財政政策合作時之匯率走勢 (F 國爲主 $\omega = 0.8$)

### 6.3 非貨幣同盟兩國財政政策採領導-追隨者策略

依據 4.4 節之模型, 並依照 4.1 節之參數假設, $\mathbf{A}^{TS}$ 爲兩非貨幣同盟國在 Stackelberg 模型假設下的典型方程式矩陣。

$$\mathbf{A}^{TS} = \begin{bmatrix} -0.2376 & -0.4876 & -0.7278 & 0 \\ -1 & 0.0125 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0.5876 & 1 \\ 0 & 0 & 0.1219 & 0.0875 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}^{TS}$ 的特徵值爲 1.3091, −1.1207, 0.3311, −0.0695。依照 4.4 節的定義,$0 \leq \nu_1 \leq \nu_2$, $\nu_1 = -0.0695$, $\nu_2 = -1.1207$。分別對應的特徵向量爲

$$\mathbf{w}_1 = [0.0617, 0.7522, -0.5182, 0.4023]^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{w}_2 = [0.6789, 0.5991, 0.4224, -0.0426]^{\mathrm{T}}$$

可得出匯率的時間路徑爲

$$s^{TS}(t) = 7.2511(0.2731e^{-1.1207t} + 0.0026e^{-0.0695t}) \tag{TS}$$

時間路徑以圖 4 表示。

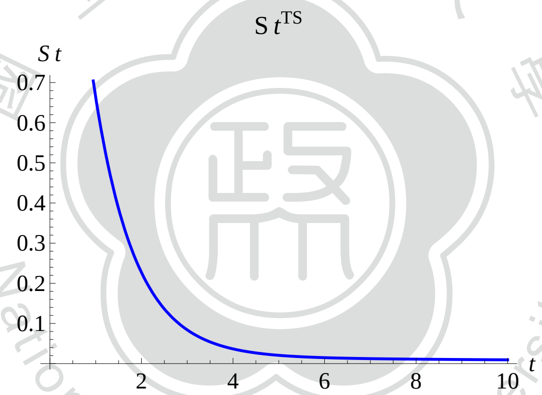


圖 4: 非貨幣同盟之兩國財政政策採領導–跟隨者之匯率走勢



延續前兩小節, 繪出各種情形並比較在非貨幣同盟國的模型假設下, 兩國以不同模式實施財政政策時, 影響到兩國實質匯率變動之時間路徑。

圖 5 表示爲政府支出增加後, 四種不同情況下兩國實質匯率時間路徑。由左到右分別是兩國財政政策合作以 H 國 (假設爲小國, 起初物價水準較低) 爲主、兩國財政政策合作以 F 國 (假設爲大國, 該國起初物價水準較高) 爲主、H 國跟隨 F 國的財政政策、兩國財政政策不合作。由圖中可發現, 不論是合作、非合作還是領導-跟隨的情況, 實質匯率 $s(t)$ 的最終均衡會趨近於零, 也就是說兩國的物價水準漸趨一致, 也代表兩國的出口產品價格逐漸相同。模型假設起初匯率 $s_0 = 2$, 起初

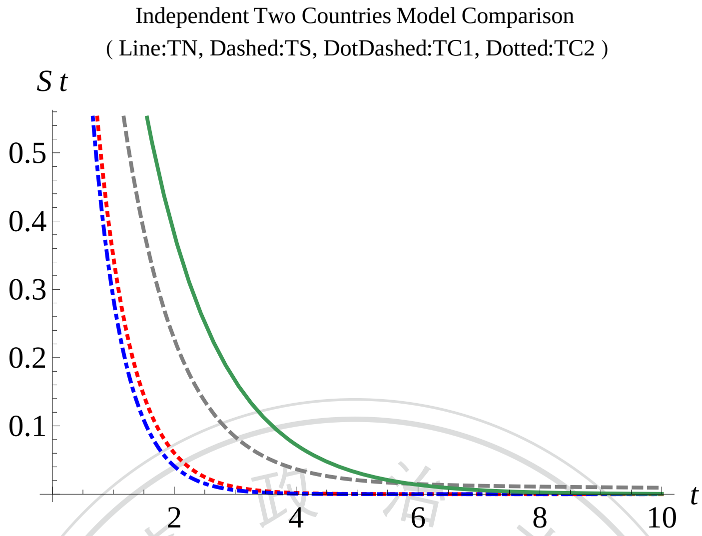


圖 5: 非貨幣同盟, 四種情況下(TN, TC1, TC2, TS) 匯率走勢之比較

本國出口產品的物價水準低於外國的物價水準。隨著兩國政府支出的增加, 貿易的過程中匯率不斷下降, 換言之, 本國的物價不斷上升。

圖 5 中最右邊的實線爲 H 國在財政政策非合作時的匯率變化, 即兩國各自追求最小化跨期成本函數時的實質匯率走勢。可以看出在此情況下小國匯率下降幅度最爲緩慢, 故在非貨幣同盟的假設下, H國應該不要與另一國進行財政政策的合作, 也不需要跟隨另一國的擴張性財政政策。因此, 在完全開放的體系下,H 國只需對其本身實施動態最佳化的財政政策, 是最佳的策略, 不會讓匯率一下子下降太多, 也不會讓國內物價水準 $p$ 相對其他國家快速增加。若採取跟所大國的策略或是與大國合作, 會使得 H 國相對 F 國之匯率波動幅度變大、物價水準上升的速度加快。

### 6.4 貨幣同盟兩國財政政策採不合作策略

延續第五章之模型假設, 即兩國爲貨幣同盟國之模型。6.4、6.5、6.6 節分別以數值模擬的方式將三種財政政策的競爭策略假設參數並進行數值模擬。假設參數 $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.5$, $k = 1$, $\lambda = 0.5$, $\xi = 1$, $\rho = 0.4$, $\theta = 0.1$, $\eta = 0.5$。令起初匯

率爲$s_0 = 2$, 且兩國皆爲完全開放經濟體, $n = 1$。假設 H 國之貨幣相對於 F 國貨幣在兩國財政政策實行後開始貶值, 即直接實質匯率 $s$ 不斷下降。

模型中之參數經計算後可得出 $\kappa = 0.6$, $a = 1.5$, $b = 0.46$, $c = 2.5$, $\phi_1 = -0.5$, $\phi_2 = -1$。依據 5.2 節模型推論結果, 非貨幣同盟國財政政策不合作的典型方程式 (canonical system) 矩陣如下。

$$\mathbf{A}^{UN} = \begin{bmatrix} -1.92 & 0.067 & -0.067 \\ -1 & 1.253 & 0 \\ -1 & 0 & 1.253 \end{bmatrix}$$

此三階方陣的特徵值爲 $-1.8772$, $1.253$, $1.2102$。欲求體系的穩定解, 故取最小特徵值 (第四章使用符號爲 $\nu_3$) $-1.8772$。故狀態變數, 即匯率 $s^{UN}(t)$ 的時間路徑以圖 6 表示。

$$s^{UN}(t) = 2e^{-1.8772t} \tag{UN}$$

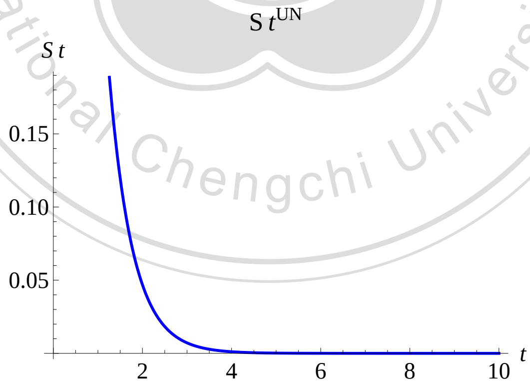


圖 6: 貨幣同盟之兩國財政政策非合作時之實質匯率走勢

## 6.5 貨幣同盟兩國財政政策採合作策略

根據 5.3 節, 即使假設兩國爲貨幣同盟國, 在政策合作前, 兩國仍會先達成一合作協議確定 $\omega$ 之大小, 即在合作時, 哪一國的成本函數被考量較多。若兩國合作

時, $\omega = 0.2$, 即合作時政策偏重 H 國成本折現值, 模型中 $\Delta = 0.0607$。

$$\mathbf{A}^{UC1} = \begin{bmatrix} -0.5967 & -6.5308 \\ -2.4 & 1.36 \end{bmatrix}$$

此二階方陣 $\mathbf{A}^{UC1}$ 之特徵值為 4.4598, $-3.6965$。穩定解取最小之特徵值 (第四章模型中 $\nu_2$), 實質匯率的時間路徑為 (UC1) 式, 並以圖 7 表示。

$$s^{UC1}(t) = 2e^{-3.6965t} \tag{UC1}$$

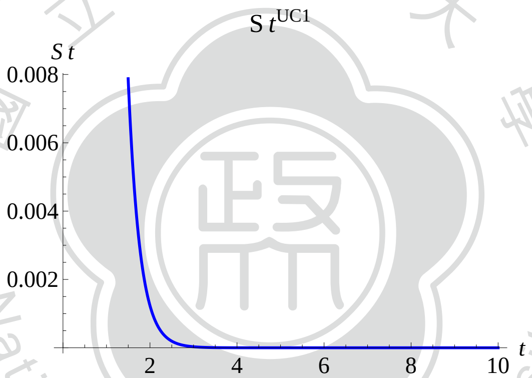


圖 7: 貨幣同盟之兩國財政政策合作時之實質匯率走勢 (H國為主 $\omega = 0.2$)

兩國合作時若 $\omega = 0.8$, 即財政政策合作時以 F 國的成本折現值。模型中 $\Delta = 0.2492$, 典型方程式矩陣為 $\mathbf{A}^{UC2}$。

$$\mathbf{A}^{UC2} = \begin{bmatrix} -0.2954 & -2.3369 \\ -3.6 & 1.36 \end{bmatrix}$$

此二階方陣 $\mathbf{A}^{UC2}$ 之特徵值為 2.944, $-2.1807$。穩定解取最小之特徵值 (第四章模型中 $\nu_2$), 實質匯率的時間路徑為 (UC2) 式, 並以圖 8 表示。

$$s^{UC2}(t) = 2e^{-2.1807t} \tag{UC2}$$

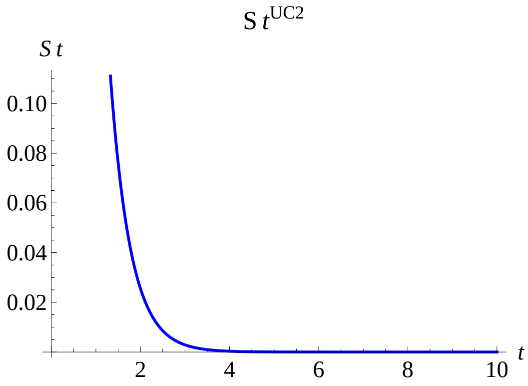


圖 8: 貨幣同盟之兩國財政政策合作時之實質匯率走勢 (F國爲主 $\omega = 0.8$)

### 6.6 貨幣同盟兩國財政政策採領導-追隨者策略

依據 5.4 節, 在兩非貨幣同盟國時 Stackelberg 模型下的典型方程式系統。

$$\mathbf{A}^{US} = \begin{bmatrix} -1.92 & 0.067 & -0.067 & 0 \\ -1 & 1.253 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1.253 & -1 \\ 0 & 0 & -0.333 & -1.153 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}^{US}$ 的四個特徵值爲 $-1.9233$, $1.4011$, $-1.2791$, $1.2343$。依照 5.4 節的定義, 爲使均衡解穩定, 取兩個負的特徵值。又令 $0 \leq \nu_1 \leq \nu_2$, 故 $\nu_1 = -1.2791$, $\nu_2 = -1.9233$。分別對應的特徵向量爲

$$\mathbf{w}_1 = [-0.0386, -0.0152, 0.3538, 0.9344]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{w}_2 = [-0.8920, -0.2808, -0.3251, -0.1405]^{\mathrm{T}}$$

可得出在貨幣同盟中,H 國實施財政政策爲跟隨 F 國, 實質匯率的時間路徑爲

$$s^{US}(t) = 2.3841(0.8335e^{-1.9233t} + 0.0117e^{-1.2791t}) \tag{US}$$

時間路徑以圖 9 表示。

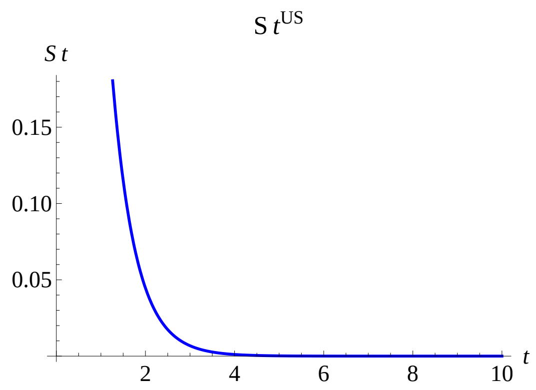


圖 9: 貨幣同盟之兩國財政政策採領導-追隨者策略之實質匯率走勢

最後, 將前述之四種情況加以比較。利用圖 10 分析在「貨幣同盟國」的模型假設下, 兩國以不同方式實施財政政策時, 所造成的實質匯率 $s(t)$ 變動之時間路徑。

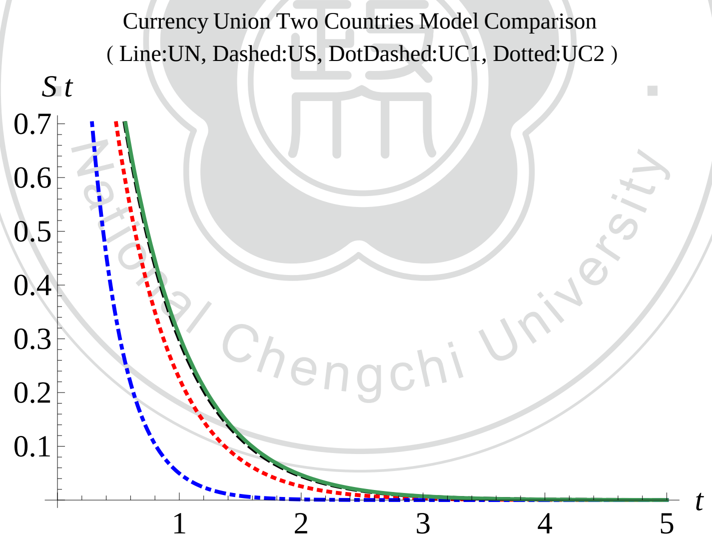


圖 10: 貨幣同盟, 四種情況下(UN, UC1, UC2, US) 實質匯率走勢之比較

圖 10 綜合了 6.4、6.5、6.6 節的圖形分析, 將兩貨幣同盟國在財政政策合作、非合作以及領導-追隨模型時的圖形加以比較。由左至右分別爲兩貨幣同盟國財政政策合作時以小國目標函數考量爲主、財政政策合作以大國爲主、H 國財政政策採

追隨 F 國策略、兩國財政政策採非合作時的匯率走勢。與圖 5 比較, 可看出和非貨幣同盟國中有些許不同。若兩國爲貨幣同盟國, 對於小國最有利的還是採取獨立的財政政策, 以追求該國成本函數的最小化來實施財政政策。但在貨幣同盟國的模型中, 小國若採取跟隨大國的財政政策的策略, 或是合作時無法取得協議上的優勢, 就會和在非貨幣同盟國時有不同的結果。由圖 10 中可看出, 兩國若爲貨幣同盟, 小國 (H 國) 若無法在政策合作時使大國讓步, 其出口商品之競爭力將會受到很嚴重的影響。

## 7 結論與建議

本文主要分析兩國爲貨幣同盟國與非貨幣同盟國於財政政策非合作時、財政政策合作時, 與財政政策有領導國家時的情況下實質匯率的走勢。一國之實質匯率可解釋成其出口商品相對於其他國家的價格, 在某些時候也可視爲一國出口競爭力的一種表現。從上一章的圖 5、圖 10 可以看出兩個國家變成貨幣同盟時和原先兩國各自使用自己的貨幣有些許的差異。比較圖 5 及圖 10, 若以小國 (H 國, 起初物價水準較低的國家) 而言。兩者相同的地方在於, 若兩國政府皆想利用財政政策來刺激該國經濟, 卻又不想造成太大的物價上升和匯率波動的成本, 對於 H 國來說, 不論是在貨幣同盟或是非貨幣同盟的模型假設下, 不考慮另一國的財政政策都是成本最小的策略。但從本文簡單的線性模型也可看出, 小國採取不同策略的報酬在兩不同模型中 (貨幣同盟和非貨幣同盟模型) 最大的差別在於, 若 H 國已經和 F 國形成貨幣同盟, 採取跟隨 F 國的策略或是和 F 國合作, 和採取獨立的最佳化政策差異不大, 這似乎隱含著在現今貨幣同盟國的國家應該也須建立起一財政協調機制。簡言之, 在貨幣同盟的模型中, 由大國主導財政政策協議會比在非貨幣同盟時來的更有效果。

從今日歐元區的情勢觀之, 德國總理梅克爾 (Angela Dorothea Merkel) 主張希臘政府應以撙節之財政政策換取國際貨幣基金會的紓困, 並增加未來歐元區政府在政府支出上之限制。德國政府所主張之政策符合本模型所模擬之結果, 大國爲爭取其經濟的穩定會和在貨幣同盟中的其他國家合作。而在本文兩國爲共同貨幣的模型假設中, 起初匯率高的國家會設法與起初匯率低的另一國合作實施共同財政政策, 才能降低政策實施後帶給社會的成本。

因此, 在現今區域整合成爲國際趨勢下, 欲成立共同貨幣區的國家應該先和其主要的貿易對手國政府達成政府支出或擴張性財政政策之協議, 否則在成立貨幣同盟後, 若小國堅持以其實施合作政策所造成的成本考量爲主, 將會造成匯率波動

過大, 並無法達成最有效率的財政政策合作協議。換言之, 形成貨幣同盟前, 大國應先主導未來貨幣同盟國的財政政策協議, 如此一來, 因兩國政府支出增加所造成的成本和才會和兩國財政政策非合作時的相同。

從本文的分析中我們發現, 兩個國家是不是貨幣同盟國對於其選擇財政政策的策略將會有所不同。然而, 由於模型中假設許多條件, 對於未來要以動態微分賽局作爲分析兩國政府政策的方式本文給予下列建議。

首先, 動態微分賽局的因爲假設不同, 可分爲約可分爲四種不同形式。假設作動態決策時並不考慮前期的改變, 並只將起初條件作爲已知, 稱爲開放循環 (open-loop) 方法, 本文即在此前提下進行論述; 在開放循環的假設下雖然較容易以動態最適化方法進行求解, 但卻常有時間上不一致 (time-inconsistency) 的問題存在。故建議若欲繼續探討合作解、非合作解或領導者的不同形式, 可以其他的假設對動態微分賽局進行求解, 例如封閉循環 (close-loop)、反饋法 (feedback) 等。

再者, 不論是在貨幣同盟國或非貨幣同盟國的模型中, 我們假設兩個國家的經濟體系都是完全對外開放, 即在模型中令參數 $n = 1$。近年來雖然世界貿易組織的大力提倡自由貿易, 貿易障礙也因爲多邊談判體系及全球化浪潮的出現而有所降低。但事實上, 國與國之間仍然有許多無形的貿易障礙, 如技術性法規、貿易習慣等等, 會增加國內家計部門在從事對外貿易活動時的無形成本。而在各國貨品之運送、服務貿易的國際交流中, 運輸成本與其他交易成本往往所費不貲。在考慮交易成本後, 即便是在自由貿易的國家, $n$ 應該還是不會接近理想中的 1。另外, 一國的跨期成本函數中所包含的產出 $y$、$y^*$、物價波動 $\dot{p}$、匯率 $s$ 所佔之比例也會影響到 $n$。由各模型的典型方程式矩陣可看出, 若 $n \neq 1$, 分析的結果也會因而改變, 故 $n$ 值爲多少仍有待實證研究加以分析, 才能使結論更爲完整。

從區域整合的理論的發展歷史來看, 各國經濟整合的趨勢不論是由歷史看來或是理論解釋都是由國與國之間的貿易所引起。各國會因爲使用貨幣的不同而造成交易上的額外成本。故以政府來說, 兩國間欲加深經濟合作的方式應以降低貿易障

礙與統一貨幣開始著手。雖然財政政策和貨幣政策都屬於國家之主權, 但貨幣政策比較起來, 財政政策更容易被政治因素所影響。

再加上本模型中只考量貨幣同盟國爲兩國家所組成, 現實世界中的歐元區至今已擁有17個會員國, 利用兩國所組成的貨幣同盟模型所得到之結論能否進一步適用在更多國家的貨幣同盟中, 還需另外的理論及實證研究輔助探討。

而各國政府是由該國公民所選出的政治代表人, 如何在最大化各國利益的前提下, 在成立貨幣同盟前達成財政政策的協議, 而達成了協議又該利用何種方式去執行並監督, 都還有待考驗當前各國政治領導者的智慧。

最後, 將本研究所使用的模型理論與本文的貢獻, 整理表格 4 爲本文作結。

表 4: 本文結構總整理

| 開放循環法則<br>(Open-loop) | 兩國非貨幣同盟國<br>[第四章]Independent | 兩國為貨幣同盟國<br>[第五章]Currency Union |
|---|---|---|
| 財政政策合作策略<br>(Nash Equalibrium) | 修正Dockner et al. (2000)<br>考慮兩國之政府支出 | 修正Engwerda et al. (2002)<br>與非貨幣同盟國模型比較 |
| 財政政策非合作策略<br>(Pareto Eqaulibrium) | 修正Dockner et al. (2000)<br>考慮兩國之政府支出 | 修正Engwerda et al. (2002)<br>與非貨幣同盟國模型比較 |
| 財政政策以領導-跟隨者策略<br>(Stackelberg Case) | 修正Dockner et al. (2000)<br>考慮兩國之政府支出 | 本研究整理 |

## 參考文獻


Balassa, B. (1961), *The Theory of Economic Integration*, Richard D. Irwin.

Başar, T. and G.J. Olsder (1982), *Dynamic Noncooperative Game Theory*, London: Academic Press.

Casella, A. (1992), "Participation in a Currency Union", *American Economic Review*, 82, 847–863.

Cellini, R. and L. Lamertini (2004), "Dynamic Oligopoly with Sticky Prices: Closed-loop, Feedback, and Open-loop solutions", *Journal of Dynamical and Control Systems*, 10, 303–314.

Dockner, E.J. and R. Neck (1987), "Time-consistency, Subgame perfectness, Solution Concepts, and Information Pattern in Dynamic Models of Stabilization Policies", report, University of Saskatchewan.

——— (1988), "Commitment and Coordination in a Dynamic game of International Economic Policy-making", Technical Report 8804, Ludwig Boltzmann Institut fuer oekonomische Analysen wirtschaftspolitischer Aktivitaeten, Vienna.

——— (1995), "Commitment and Coordination in a Dynamic Game Model of International Economic Policy-making", *Open Economics Review*, 6, 5–28.

——— (2008), "Time consistency, Subgame perfectness, Solution Concepts and Information Patterns in Dynamic Model of Stabilization Policies", *Advanced in Computational Economics*, 20, 50–101.

Dockner, E.J., S. Jørgensen, N. van Long, and G. Sorger (2000), *Differential Games in Economics and Management Science*, Cambridge University Press.

Dornbusch, R. (1976), "Expectations and Exchange Rate Dynamics", *Journal of Political economy*, 84, 1161–1176.

Engwerda, Jacob C., Bas van Aarle, and Joseph E.L. Plasmans (2002), "Co-operative and Non-cooperative Fiscal Stabilization Policies in the EMU", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26, 451–481.

Frankel, J. and A. Rose (1995), "The Endogeneity of the Optimum Currency Area Criteria", *The Economic Journal*, 108, 1009–1025.

Gandolfo, G. (1987), *International Economics*, Springer-Verlag.

Jørgensen, S. and G. Zaccour (2004), *Differential Games in Marketing*, Kluwer Academic Publisher.

Kamien, Morton I. and Nancy L. Schwartz (1981), *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Managemant*, volume 4, North-Holland.

Krugman, P. (1993), "Lessons of massachusetts for EMU", in F. Torres and F. Giavazzi (eds.), *Adjustment and Growth in the European Monetary Union*, CPER, Cambridge University Press, london.

Larson, Robert E. and John L. Casti (1978), *Principles of Dynamic Programming*, Marcel Dekker.

Leonard, Daniel and Ngo van Long (1992), *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*, Cambridge University Press.

Mundell, Robert A. (1961), "The Theory of Optimum of Currency Areas", *American Economic Review*, 51, 357–384.

Petit, Maria Luisa (1990), *Control Theory and Dynamic Games in Economic Policy Analysis*, Cambridge University Press.

Simaan, M. and Cruz, J.B. (1973), "Additional Aspects of the Stackelberg Strategy in Non-zero-sum Game", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 11, 613–626.

Trumbull, Gunnar and Diane Choi (2011), "European Union: The Road to Lisbon", Case 9-711-032, Havard Business School.

Turnovsky (1997), *International Economic Dynamics*, The MIT Press.

Turnovsky, S., T. Başar, and V. d'Orey (1988), "Dynamic Strategic Monetary Policies and Coordination in Interdependent Economics", *American Economic Review*, 78, 341–361.