流体力学复习笔记-2020

王洁峰

2020 年 11 月 8 日

1 绪论、数理基础

牛顿内摩擦定律：流体的内摩擦力大小与流体性质有关，与流体速度变化梯度和接触面积成正比。

$$F = \mu A \frac{du}{dy}$$

F，内摩擦力，粘性力，与法向速度梯度有关，存在相对运动时产生，只能减缓，不能阻止。没有粘性（$\mu = 0$）的流体，即理想流体。

满足上述牛顿内摩擦定律的流体称为牛顿流体，否则为非牛顿流体。

在流体力学中，描述流体运动的观点有两种：拉格朗日方法、欧拉方法。

拉格朗日方法 着眼于流体质点，描述每（某）个质点自始至终的运动过程

欧拉方法 着眼于空间场，描述每（某）个空间点流体随时间变化的过程

注意的是：拉格朗日描述中的 t 是个变量，不变的是标记流体质点的 a, b, c 描述了随时间某个以 a, b, c 确定的质点随时间是如何变化的。欧拉描述描述的某一个时刻，因此公式里往往没有 t，如果有也是个定值，变量是 x, y, z，描述了随着空间坐标的变化，某个量是如何变化的。

场论：*(不管是标量场，还是矢量场都是欧拉描述吧？)*

场：空间区域内的（矢量、标量）函数称为场。在场内定义的（矢量、标量）函数通常是时间 t 和空间 $\vec{r}: x, y, z$ 的函数，比如说：

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi(x, y, z, t)$$

$$\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}, t) = \vec{a}(x, y, z, t)$$

下面介绍的均匀场和定常场，似乎与后面第二章的不可压缩流体、均质流体、均质不可压缩流体、定常、非定常有些关系，需要抽空问下老师。

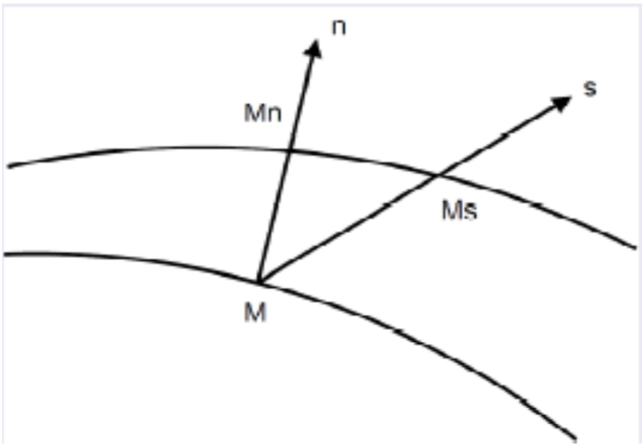
均匀场 如果同一时刻各点函数值是相等的，因此坐标就无所谓了，所以 $\varphi(x,y,z,t)$ 就简化为了 $\varphi(t)$，同理，$\vec{a}(x,y,z,t)$ 简化为了 $\vec{a}(t)$

定常场 如果场内函数值不依赖时间，即不随时间变化，为定常场，跟时间没关系说白了就是把 t 去掉就行，于是简化为了 $\varphi(\vec{r}),\vec{a}(\vec{r})$

小结：均匀场和定常场跟矢量场还是标量场无关，不是一个维度的评判标准。不管是标量场还是矢量场，应该都是需要固定个时间才知道某个时刻的状况，即 N 维的状况，我觉得还是都还是欧拉的描述。对否?

梯度

梯度就是最大的方向导数，沿着等位线法向方向 n 的方向导数是最大的。然后最大的这个方向导数（即梯度，方向是 n)，往任意方向的投影（在任意方向上的投影）等于该方向上的方向导数。



梯度性质

- 标量场不均匀的量度 (实际上矢量场也能求梯度)
- 梯度方向与等位线的法向方向重合，指向 φ 增长的方向，大小是 n 方向上的方向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$
- 梯度方向上是函数 φ 变化最快的方向，梯度在任何方向 s 上投影等于该方向上的方向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}cos(\vec{n},\vec{s})=\vec{s}\cdot grad\varphi$ 其中 $\vec{s}$ 是方向向量（单位向量）

$grad\varphi=[\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}]^T$

散度

$$div\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

散度有以下几个物理意义：

- 流出为正，流入为负，散度表示通量的概念（不可压缩流体的总散度必为零）
- 流体单位体积的改变率
- 辐聚/辐散

$div\vec{a}=0$ 称为无源场或者管式场，性质如下（可略吧）

- 无源矢量 $\vec{a}$ 通过矢量管的任意截面的通量相同
- 矢量管不能再场内发生或者终止，只能延伸至无穷，靠在区域的边界上或自成封闭管路
- 无源矢量 $\vec{a}$ 经过一已知周线 L 的所有曲面 S 上通量都相等

旋度

$$\mathbf{curl}\ \mathbf{A}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

哈密顿算子

$$\bigtriangledown=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

具有矢量和微分双重性质，（其实不就是求梯度吗?）注意！他只对右边的变量发生微分作用。这也是我在小测中经常做错的原因，有时候对左侧的也微分起来的了。

2 流体运动学基础

流体力学就是研究流体（一种连续介质）的宏观运动的力学分支。

连续介质假设 认为：真是流体所占有的空间可近似的看做由 *流体质点*（*微团*）连续地无间隙地充满的。

流体质点（微团） 指的是宏观上足够小而在微观上足够大的分子团。一方面，分子团的尺度与分子运动尺度相比大得多，包含足够多的分子，是的个别分子进出不影响统计平均特性。另一方面相对宏观运动尺度足够小，使得分子团在平均物理量在宏观运动尺度上可看成均匀不变的。

连续介质假设的前提是*运动的宏观尺度要远远大于微观尺度*。也就是研究对象宏观运动和物质结构微观尺度相当的时候，连续介质假设不再适用，比如在高孔稀薄大气里面的航天器。

这一章是流体运动学，在不考虑外力作用下，用数学和几何方法描述流体的平动、转动、变形。

2.1 流体运动描述方法、几何表述

流体力学中，描述流体运动的观点和方法有两种：

拉格朗日方法 着眼于流体质点，设法描述出每个质点自始至终的运动过程，即他们的位置和其他属性（如速度，加速度，温度，压强等）随时间变化的规律

欧拉方法 着眼于空间点（场），设法在空间中的每一点上描述出流体运动随时间的变化状况

其实上面说的真的做到了吗？没啊，拉格朗日说的每个质点，欧拉说的每个空间点其实只是分别用 (a, b, c) *or* (x, y, z) 来表示了，哦，这是未知的，这就代表了所有，有种函数解析式的感觉了，但我/每个人直观的感受是-把它列举出来，一个一个的列举出来。

2.2 拉格朗日方法

要描述的物理量（空间位置、速度、加速度、密度、温度、压强等）表示成为初始位置坐标（t_0 时刻或 $t = 0$ 时候位置定为 $(a,\ b,\ c)$）和时间 t 的函数。

比如，描述的物理量是流体质点的位置随时间的变化（流体质点的运动规律）可以表示为：

$$\vec{r} = \vec{r}(a,\ b,\ c,\ t)$$

$\vec{r}$ 为矢径，上述公式在直角坐标下，分量表示形式是：

$$x = x(a,\ b,\ c,\ t)$$

$$y = y(a,\ b,\ c,\ t)$$

$$z = z(a,\ b,\ c,\ t)$$

每确定了一组 a，b，c，就确定了一个流体质点的运动方程和轨迹。

拉格朗日描述中，速度 $\vec{v}$ 是该质点矢径 $\vec{r}$ 的时间变化率，加速度 $\vec{a}$ 是该质点速度 $\vec{v}$ 的时间变化率，所以：

$$\vec{v}(a,\ b,\ c,\ t) = \frac{\partial\vec{r}(a,\ b,\ c,\ t)}{\partial t}$$
$$\vec{a}(a,\ b,\ c,\ t) = \frac{\partial\vec{v}(a,\ b,\ c,\ t)}{\partial t} = \frac{\partial^2\vec{r}(a,\ b,\ c,\ t)}{\partial t^2}$$

矢径仅仅是质点标号 (a,b,c) 的函数，不是空间坐标的函数，因此矢径不是场[1]。

2.3 欧拉方法

定常流动 流动不随时间变化（这说的是速度场吧？

对定常流动，欧拉表述的物理量不随时间变化。定常流动不是指的是流动吗？那其描述的物理量难道不是速度吗？还能有别的吗 另外，欧拉描述与拉格朗日描述所能描述的物理量应该没啥限制吧？都能速度、加速度、密度、温度、压强吧？欧拉的话，矢量场标量场应该都行，这些物理量在拉格朗日描述里不能叫场，只能叫拉格朗日所描述的物理量吧。还有拉格朗日描述的温度，压强一旦求导，对时间求导有啥物理意义？

欧拉描述函数的变量是空间位置 a,b,c 与时间 t。

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r},\ t)$$

在直角坐标系下：

$$u = u(x,\ y,\ z,\ t)$$

$$v = v(x,\ y,\ z,\ t)$$

$$w = w(x,\ y,\ z,\ t)$$

其中，$(x,\ y,\ z,\ t)$ 称为欧拉变数，同样可以定义空间点上的密度 $\rho(\vec{r},\ t)$，压强 $p(\vec{r},t)$ 和温度 $T(\vec{r},t)$ 等。

[1]空间区域内定义的标量函数、矢量函数称为场

上面说的这些是空间点 (x, y, z) 的函数，因此是场。比如，速度场是矢量场，密度场、温度场是标量场。

均匀场：场内函数不依赖与空间坐标。定常场：场内函数不依赖时间 t。

欧拉描述下，求导是全导数，以加速度（速度的求导）为例：

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \bigtriangledown)\vec{v}$$

左手第一项 随体导数 $\frac{d\vec{v}}{dt}$：流体质点的速度随时间的变化率，局地导数和位变导数的和，也称为物质导数

右手第一项 局地导数 $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ 由于场的不定常性，引起的速度变化对质点加速度的贡献

右手第二项 位变导数 $(\vec{v} \cdot \bigtriangledown)\vec{v}$ 由于场的不均匀性引起的速度变化对质点加速度的贡献，流体质点沿着轨迹 L 移动引起的速度变化

在欧拉描述下，随体导数分解成局地导数和位变导数对欧拉描述的任何物理量（不管是矢量 $\vec{a}$ 还是标量 φ）都是成立的，即：

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \bigtriangledown)\varphi$$
$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \bigtriangledown)\vec{a}$$

质点的密度 ρ 在运动过程中不变的流体是不可压缩的流体，流体各点密度 ρ 都相等的流体称为均值流体。

2.4 拉格朗日-欧拉转换

2.4.1 拉格朗日 2 欧拉

基本思路：

- 已知的质点位置的拉格朗日描述，直接对时间 t 求导可以得到拉格朗日描述下的速度与加速度。
- 因为欧拉描述不能有 a,b,c 等常数，得替换掉，
- 替换方法是根据已知的位置方程，反解出 a,b,c，
- 再代入拉格朗日描述下的速度、加速度，这样，拉格朗日描述就变成了欧拉描述。

2.4.2 欧拉 2 拉格朗日

基本思路：

- 已知空间位置上的速度或者加速度，本身是矢径的一阶全导数/二阶全导数
- 积分上述一阶/二阶常微分方程，就得出了矢径的解 (含 x,y,z 与 t)
- 这时候代入 $t=0$，令 x,y,z = a,b,c 求出未知的 C，带回方程得出 x,y,z = (a,b,c,t) 的方程
- 根据已知条件，将已知条件改为拉格朗日方程

小结：需要注意的是-拉格朗日描述下：位置矢量 → 速度矢量 → 加速度矢量之间的变换是求偏导，$\vec{v}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}$ $\vec{a}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$；欧拉描述：位置矢量 → 速度矢量 → 加速度矢量之间的变换是求全导数，$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$

例1. 已知某二维流动的拉格朗日描述为$x=ae^t$，$y=be^{-t}$，其中a、b为常数. 请给出此流动在欧拉描述下的速度和加速度.

例2. 已知某二维流动在拉格朗日描述下的速度为$u=(a+1)e^t-1$，$v=(b+1)e^t-1$，其中(a,b)代表$t=0$时刻流体质点的位置坐标. 试求：(1)流体质点的运动方程；(2)设某质点初始位置为(1,2)，求该点的运动方程；(3)上述流体质点的加速度；(4)欧拉描述下的速度和加速度.

例3. 已知某流动欧拉描述的速度场为$u=c_1x+t^2$，$v=c_2y-t^2$，$w=0$，其中c_1、c_2为常数. 试给出此流动在拉格朗日表述下的(1)流体质点运动方程，(2)速度和(3)加速度.

这个要补题解，先过，同理还有那个可压缩，不可压缩的表达式

2.5 流体运动的几何表示

迹线：同一流体质点不同时刻所在位置的连线。–与拉格朗日描述相关 –同一质点运动规律的几何表示

流线：流线上任一点的速度方向与该曲线的切线方向重合，同一时刻不同质点组成的曲线。–与欧拉描述相联系–是速度场的几何表示

迹线，本身拉格朗日描述就是迹线，如果已知的是 x,y,z 的描述，能消除参数 t 就最好了。因为本身迹线与拉格朗日描述相联系，因此很多时候，求迹线的过程就是欧拉描述转拉格朗日描述的过程，即：求积分，解 ODE。

流线，$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}$，解这个方程就好了。

需要注意的是，对于定常运动，其实只要运动方向定常（本身不是定常运动）的运动，其流线与迹线是重合的。最好的例子是课本 P45 的 $u=-tx$，$v=t(y+1)$，可以看出的是如果让 u 除 v，t 消除了，这就说明了运动方向不随时间变化，因为 $tan\theta=\frac{u}{v}$!! 而且，在流线 (对应欧拉描述)，时间 t 是一个参数 (可变的常数)，而非变量。更多的注意事项需要做题，尤其是错题后补充

2.6 流体微团的运动和受力分析

流体的运动除平动和转动外，还包括变形运动。其中变形包括线变形与角变形。所以其实可以说流体运动包括平动、转动、线变形、角变形。线变形指引起流体微元体积大小变化的边长伸缩线变形运动，角变形是指引起流体微元体积变化的角变形运动。

刚体的速度分解定理：$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{\omega}\times\vec{r}=\vec{v}_0+\frac{1}{2}(\nabla\times\vec{v})\times\vec{r}$

线变形速率：线变形运动是指微元各边长发生伸缩的运动，线变形速率定义为 单位时间、单位长度的线变形量。如果是二维，那就是平面微元的面积变化率是：$divA=\theta_x+\theta_y$，三维立体微元的体积变化率是：$div\vec{V}=\theta_x+\theta_y+\theta_z$，其实就是说：各个方向的线变形速率之和等于面积/体积的变化率（膨胀率/三维是散度），对了，$\theta_x=\frac{\partial u}{\partial x},\theta_y=\frac{\partial v}{\partial y},\theta_z=\frac{\partial w}{\partial z}$ 。

流体速度的旋度，可以有三个分量 $(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$，$\vec{\omega}=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_k\vec{k}=\frac{1}{2}rot\ \vec{v}=\frac{1}{2}\nabla\times\vec{v}$，流体速度的的旋度表征了流体本身的自转角速度!

2.7 亥姆霍兹速度分解定理

先用泰勒展开，$\vec{v}=\vec{v}_0+\delta\vec{v}=\vec{v}_0+\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\delta z=\vec{v}_0+[\frac{\partial\vec{v}}{\partial x},\ \frac{\partial\vec{v}}{\partial y},\ \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}]\cdot[\delta x,\ \delta y,\ \delta z]^T$，把上式最后一项展开：

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\\ \delta z\end{bmatrix}$$

把方阵写成对称阵 S（变形）和反对称阵 A（转动）。所以本来，$\vec{v}=\vec{v}_0+(S+A)\cdot\vec{\delta r}$，但是呢？A 是由 ω 构成的，所以 $A\delta\vec{r}=\frac{1}{2}rot\vec{v}\cdot\delta\vec{r}$ 。那么 $\vec{v}=\vec{v}_0+\frac{1}{2}rot\vec{v}+\vec{S}\cdot\delta\vec{r}$。(平动 + 转动 + 变形）

2.8 作用在流体上的力

其实上面说的就是：把运动描述清楚了，是运动学，流体相比于原来的质点（只有平动）、刚体（平动 + 转动），又增加了转动，所以是平动 + 转动 $A+$ 变形 S ，那现在是时候看看作

用在流体上的力了，其实也简单就两类——体积力、表面力。

我觉得：体积力就是我们之前熟悉的让物体产生平动、转动的来源之重力啊，万有引力，惯性力啥的，表面力只在面上，比如粘性力，摩擦力，压力啥的，对吧。

跟线变形、角变形类似，这里的质量力也是单位质量受的力，和高数物理学的不一样吧、表面力也是得是单位面积受的力；这样描述的好处是啥呢？就是知道了单位的对吧，那你再乘上总的质量啊，总的面积啊，就物体所受到的总的力你就知道了。

这里不管是质量力还是表面力，PPT 里面的表述都很费解啊，一边说力除以体积 /面积分别是质量力，表面力，一会又说求出来的结果是质量力，表面力在体积、面积上的分布密度。质量力是质量力的分布密度？不对啊，应该是质量力是这个质量所有的质量力的分布密度。同理表面力是总的表面力的分布密度。

总之呢，$\vec{p}_n = lim\frac{\delta\vec{p}}{\delta S}$。然后就把 $\vec{p}_n$ 叫做应力矢量。$\vec{p}_n$ 是某一时刻在 M 点以 n 为其法向的 δS 面，在 n 所指的一侧的流体对于 δS 的另一侧流体的作用力。应力矢量 $\vec{p}_n$ 的方向，并不与法向 n 一致，除了有 n 方向上的分量，还有面上的切向分量。

$\vec{p}_n = \vec{n} \cdot \vec{P}$。$\vec{P}$ 叫做应力张量。

$$\begin{bmatrix} p_n x & p_n y & p_n z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix}$$

p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} 是法向应力分量，其余 6 个是切向应力分量。

应力张量各个分量的两个下标，第一个下标表示该应力作用面的法线方向，第二个下标表示该应力的投影方向。比如 p_{xy} 表示：作用于外法线方向为 x 轴正向的面积元上的应力 p_x 在 y 轴上的投影分量。

2.9 本构方程

广义牛顿粘性定律的假设（斯托克斯假设）：

- 流体是连续的，它的应力张量是应变率张量的线性函数，与流动的平动、转动无关。
- 流体是各向同性，其应力张量与应变率张量之间的关系与坐标系的选择与位置无关。
- 当流体静止，应变率为零，流体中的应力就是流体的静压强。

$\vec{P} = 2\mu\vec{S} + [-p + (\mu' - \frac{2}{3}\mu)\nabla \cdot \vec{v}]\vec{I}$ （μ' 叫第二粘性系数、膨胀粘性系数、度量流体由于体积膨胀或收缩所造成的流体内部能量耗散的系数，一帮情况下，可以忽略不计，即近似 $\mu' = 0$）

此即广义牛顿定律，描述了应力张量与应变率张量之间的普遍关系。即牛顿流体的本构方程。

3 流体运动基本方程组

系统 是指某一确定流体质点集合的总体，即给定流体质点组成的流体团。相当于原来研究的被简化为质点的物体系统和外界之间有边界隔开；流动过程中，位置和形状可以改变，组成的质点是固定的，和外界可以有力的交互作用，动能、能力交换，只是没有物质交换。(是拉格朗日描述)

控制体 指流体所在空间中以假想或真实流体边界包围的、固定不动的、形状任意的空间体积，包围控制体的叫控制面。一旦选定，其形状、大小、位置都是确定的，流体呢，不断流入流出，是流体的欧拉描述。

雷诺输运定理 某时刻一个可变体积的系统上总物理量的时间变化率等于该时刻 (体积变之前的那个时刻) 的空间 (控制体) 中的物理量的时间变化率 + 该流体物理量在单位时间通过该空间边界 净的输运流体物理量可以是任意矢量物理量

$\frac{D}{Dt}\int_{\tau(t)}\vec{a}(\vec{r},t)$：一可变体积系统总的物理量 (所以对体积积分 $\int_{\tau t}$)，的时间变化率 ($\frac{D}{Dt}$)

$\int_{\tau(t)}\frac{\partial\vec{a}(\vec{r},t)}{\partial t}d\tau$ 或者说 $\frac{\partial}{\partial t}\int_t\vec{a}(\vec{r},t)\delta\tau$ ：仅仅是时间变化率 (所以是对时间的偏微分，$\frac{\partial}{\partial t}$)，空间域的所以还是要对空间积分 (备注：$(\vec{r},t)=(x,y,z,t)$)

$\oint_{S(t)}\vec{a}(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S}$：通过空间域边界 (所以对表面积分)，单位时间 (所以物理量 $\times$ 速度矢量)

散度的物理意义：

三个相互正交方向上线变形速率之和在向量分析上称为速度 $\vec{V}$的散度，记为 $div\vec{v}$，即

$$div\ \vec{v}=\bigtriangledown\cdot\vec{v}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\theta_x+\theta_y+\theta_y$$

流体速度的散度表示流体微团的相对体积膨胀率 (单位时间内单位体积流体的体积的增长量)

3.1 连续性方程

终于到了三大方程！

连续性方程来源是质量守恒定律。可以从系统 (拉格朗日) 和控制体 (欧拉) 两种思路来思考：1. 包含在一流体系统中的流体质量在流动过程中保持不变；2. 在一固定空间中的流体质量的减少率等于单位时间内通过其表面的质量通量。

拉格朗日描述下推导连续性方程：

$$\frac{d}{dt}\delta m = 0$$
$$\frac{d}{dt}(\rho\delta\tau) = 0$$
$$\rho\frac{d}{dt}\delta\tau + \delta\tau\frac{d}{dt}\rho = 0$$
$$\frac{1}{\delta\tau}\frac{d(\delta\tau)}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0$$
$$\because \frac{1}{\delta\tau}\frac{d(\delta\tau)}{dt} = \nabla\cdot\vec{v}$$
$$\nabla\cdot\vec{v} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0$$

附：不可压缩：ρ 不随时间变化，因为如果能压缩的话，是下一刻发生的。但其在空间分布上可能是不均匀的，所以它是空间 x,y,z 的函数，即 $\rho = \rho(x,y,z)$ 或 $div\ \rho = \nabla\cdot\rho = 0$ 或 $\frac{d\rho}{dt} = 0$这是有问题的啊。不可压缩对空间不均匀的话，怎么能对时间 t 求全导数呢？; 均质流体是 $\rho = \rho(t)$ 或 $\nabla\rho = 0$; 均质不可压缩：$\rho = const$ 当然对空间求梯度，对时间求导都是 *0*

欧拉观点下推导连续性方程：我觉得?：$\oint_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S}$ 是总的流入的增加的；$-\int_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}\delta t$ 是因为密度变化为减少的。然后增加的和减少的加起来为零，也就是：

$$\int_\tau \frac{\delta\rho}{\partial t}\delta\tau + \oint_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S} = 0$$

奥-高公式：

$$\int_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{f}dV$$

前面的公式可以推导如下：

$$\int_\tau \frac{\delta\rho}{\partial t}\delta\tau + \oint_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S} = 0$$
$$\int_\tau \frac{\delta\rho}{\partial t}\delta\tau + \int_\tau \nabla\cdot(\rho\vec{v})d\tau = 0$$
$$\int_\tau [\frac{\delta\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v})]\delta\tau = 0$$
$$\therefore \frac{\delta\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$$

拉格朗日推导出来的和欧拉推导出来的其实是一样的，只是暂时长得不一样而已，可以利用标量矢量的积的散度公式互相推导：

$$div(\varphi\vec{F}) = grad(\varphi)\cdot\vec{F} + \varphi\ div(\vec{F})$$
$$= (\nabla\varphi)\cdot\vec{F} + \varphi(\nabla\cdot\vec{F})$$

雷诺输运定理推导连续性方程：

把雷诺输运定理里面的物理量换成了 ρ：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\tau \rho d\tau &= \int_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}\delta\tau + \oint_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S} \\ \because \frac{d}{dt}\int_\tau \rho d\tau &= 0 \\ \therefore \int_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}\delta\tau + \oint_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S} &= 0 \\ \therefore \int_\tau [\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v})]\delta\tau &= 0 \\ \therefore \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) &= 0\end{aligned}$$

这些个里面的大 S 是标量还是矢量，感觉标量也不对，矢量也不太对 这里雷诺输运定理右手第一项把偏分写在里面，没有写外面，是因为后面正好利用对同一变量的积分把两个式子加起来！

连续性方程的特殊情况：

定常运动 $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$：$\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0$ 单位体积净的流出质量为 0（流入流出的质量相等）

不可压缩流动 $\frac{d\rho}{dt}=0 \therefore \nabla\cdot\vec{v}=0$ :: 流体微团的体积在其运动过程中保持不变:: 利用奥-高公式 $\oint_S \vec{v}\cdot dS = \int_\tau \nabla\cdot\vec{v}d\tau$ $\therefore$ 对不可压缩，在任意闭合曲面上 $\oint_S \vec{v}\cdot dS = 0$

均质流体的不可压缩流动 密度为常数，连续性方程为：$\nabla\cdot\vec{v}=0$。