粘性不可压缩流动的解析解

粘性不可压缩流动的求解方法

粘性流动的基本方程组是二阶非线性偏微分方程组，目前还没有求解该方程组的普遍方法. 通常有三种途径求解粘性流动问题:

- **简单流动的解析解** 在一些简单的流动问题中，非线性的惯性项等于零或者可以化为非常简单的形式，因此方程组得以线性化或得到很简单的形式，使方程组可找到解析解，但这类问题很少.
- **近似解** 根据问题的特点，略去方程中的某些次要项，从而得出近似方程，在某些情形下可得到近似方程的解. 这种途径所得解为近似解，常用的近似方法之一是参数摄动法，粘性流动问题主要摄动参数是雷诺数$Re = \frac{UL}{\nu}$. 用雷诺数作为摄动参数可求解两类问题: (1) 小Re问题，这是一类速度很小、尺度很小或粘性很大的流动; (2) 大Re问题，这是一类速度较大、尺度较大或粘性很小的流动，用大Re问题摄动的结果可导出壁面附近的近似粘性流动方程和远离壁面的无粘流动的组合模型，即普朗特边界层理论模型.
- **数值解**

1. 定常的平行剪切流动

均质流体不可压缩流动的控制方程组为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \ \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v}.$$

我们先来讨论这样一类简单的流动：所有流体质点沿空间某一确定的方向运动，且流场中各种物理量不随时间而改变. 这种流动称为**定常平行剪切流动**.

我们把流动的方向取为x轴，速度分量就可表示为

$$u = u(x, y, z), \ v = w = 0$$

于是，粘性流动方程组简化为

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\
&-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0, \\
&\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0.
\end{aligned}$$

这表明，流体质点的加速度处处为零，作用在流体上的压力和粘性力相互平衡. 上述方程组可以写为

1. 定常的平行剪切流动

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

因为该方程左边只是x的函数，右边又只是y和z的函数，所以方程两边必须同为一个常数. 若令

$$\frac{dp}{dx} = -G$$

则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{G}{\mu}$$

下面，我们分别研究定常平行剪切流几种不同边值问题的解法.

a. 平板库艾特(Couette)流

库艾特在1890年首先研究了这样一种流动：在两块无限大的平行平板间充满流体，让其中一块平板相对于另一块平板以不变的速度在其自身平面内运动，从而使得流体在摩擦力作用下发生运动. 当时间充分长后，流体运动达到定常状态，要求出此定常流动的速度场.

a. 平板库艾特(Couette)流

取一个固定于其中一块平板上的笛卡尔坐标系$\{x, y, z\}$，使该平板所在平面为xy平面，另一块平板处于$z = h$的平面内，它的运动方向取为x轴方向. 由于流动是由运动平板作用在相邻流体上的摩擦力引起，且没有施加任何压强来推动或阻滞流体运动，引起方程中应取$G = 0$. 利用平板在x方向和y方向上无界的假设，可知$u = u(z)$. 于是，方程退化为一个简单的常微分方程

$$\frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

在流体与平板的交界面上，粘性流动应满足无滑移条件，即

$$z = 0, u = 0;\ z = h, u = U,$$

其中U是平板运动的速度. 上述两式联立可得

$$u(z) = \frac{U}{h}z,\ 0 \le z \le h.$$

运动平板面上的流体应力为

$$\sigma_{zx} = \mu\frac{du}{dz}|_{z=h} = \frac{\mu U}{h}.\ (\boldsymbol{P} = -p\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{S})$$

a. 平板库艾特(Couette)流

因此，在单位面积的交界面上，运动平板在单位时间内对流体的作功为

$$W = \sigma_{zx} U = \frac{\mu U^2}{h}$$

单位体积流体中机械能耗散率为

$$\phi = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 = \mu\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = \frac{\mu U^2}{h^2},$$

故两板之间单位底面积的流体柱内，单位时间内的机械能耗散为

$$\Phi = \phi h = \frac{\mu U^2}{h},$$

它正好等于单位时间内平板对流体所作的功.

b. 平板泊肖叶(Poiseuille)流

假设在两块处于相对静止的无限大平行平板之间充满了流体. 若沿着和平行板平行的某一方向在流体内作用一个不变的压强梯度，使流体在此压力场作用下运动，则当时间充分长以后，作用在流体上的压力和粘性力就会达到平衡，使流体停止加速并达到定常流动状态. 现确定其速度分布.

b. 平板泊肖叶(Poiseuille)流

取同样的坐标系，并将压强梯度的反方向取为x轴方向，即有

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \frac{dp}{dx} = -G, \ where\ G = const > 0.$$

由于流动是由x方向的恒定的压力梯度所驱动的，故可知$u = u(z), v = w = 0$，从而可得简化的流体运动方程

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{G}{\mu}$$

在两块平板面上，流体应满足无滑移条件

$$z = 0, u = 0; \ z = h, u = 0$$

联立上述两式可得

$$u(z) = \frac{G}{2\mu} z(h - z).$$

因此，泊肖叶流动的速度沿板面垂直方向成抛物线分布，最大速度出现在两板之间的中心位置上. 在泊肖叶流动中，压强场对流体所作的功正好补偿流体在运动中的机械能消耗.

2. 非定常的平行剪切流动

非定常的粘性流动有两种可能的情况：一种是由于流动的边界条件随时间发生变化，使得作用在流体上的外力以及流体内部的相互作用力都随之发生变化，从而导致了流动随时间的改变；另一种是流动失去稳定性，这时即使边界条件不随时间变化，N-S方程也不存在稳定的定常解. 我们现在只讨论第一种情况. 这种问题又分为两种类型：一类是边界作周期性变化的“边界值问题”，求解的是一种稳定振动的渐进状态；另一类是边界作任意运动的“初始值问题”，求解的是一种不断随时间变化的“瞬态运动”.

a. 斯托克斯第一问题

假设有一块无限大平板浸没在无界的静止流体中. 突然，平板以速度U沿其自身所在的平面运动起来，并一直保持着速度的大小和方向不变. 求解平板起动后流体运动的演化过程.

我们已在第八讲中对此问题进行了详细求解，此处不再讨论.

b. 斯托克斯第二问题

一无限大的平板位于$z=0$平面内，其上方（$z>0$）充满粘性系数为常数μ的均质不可压缩流体. 设平板在其自身平面内以速度$U\cos\omega t$振动，由于粘性作用，它将带动上半空间的流体作周期性运动. 求流体的速度u随时间和位置的变化.

利用问题的对称性，可知

$$u=u(z,t),\ v=w=0,\ p=const$$

于是，N-S方程简化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

边界条件为

$$z=0, u=Re(Ue^{-i\omega t});\ z\to\infty, u=0$$

利用解的周期性，可设

$$u(z,t)=Re[f(z)e^{i\omega t}],$$

其中$f(z)$为一复函数，代入上述方程可得$f(z)$满足的常微分方程

$$f''-\frac{i\omega}{\nu}f=0$$

b. 斯托克斯第二问题

引入

$$k_{1,2} = \pm\left(\frac{i\omega}{\nu}\right)^{1/2} = \pm\frac{i+1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}},$$

上述常微分方程的通解为

$$f(z) = Ae^{ik_1 z} + Be^{ik_2 z}.$$

由边界条件可得，$A = 0, B = U$. 于是

$$u(z,t) = Ue^{-kz}cos(kz - \omega t),$$

其中$k = \sqrt{\omega/2\nu}$.