TD1: Algorithmes, modéle de calcul, complexité

« Grand O »

Exercice 1. Exo TD : *Bon algorithme, bon programme*

Pour résoudre un problème algorithmique, dont la variable d'entrée est notée n, on dispose de deux algorithmes : ALGO-BOF dont la complexité en temps est de $O(n^2)$ et ALGO-TOP dont la complexité en temps est de $O(n \log n)$.

— ALGO-BOF est codé par un super programmeur qui garantit que le programme fait exactement $2n^2$ opérations élémentaires, il le fait en plus tourner sur sa super machine, capable d'effectuer 20 000 000 000 d'opérations élémentaires par seconde.

— ALGO-TOP, quant-à-lui est codé par un programmeur moyen qui pense que le programme ne fait pas plus de $50n \log n$ opérations élémentaires et il le fait tourner en salle TP tout en regardant YouTube, sa machine n'effectuant alors que 1 000 000 000 d'opérations élémentaires par seconde.

✎ À partir de quelle valeur de n le programme codant ALGO-TOP est-il plus rapide que celui codant ALGO-BOF ?

Exercice 2. Exo TD : *FAQ*

1. Est-il vraiment correct de dire « cet algorithme a une complexité en temps en au plus $O(n^2)$ » ?
2. A-t-on $2^{n+1} = O(2^n)$? Et $2^{2n} = O(2^n)$?
3. Montrer que si on a $f(n) = O(g(n))$ et $g(n) = O(h(n))$ alors on a aussi $f(n) = O(h(n))$.
4. Proposer deux fonctions f et g telles que $f(n) = O(g(n))$ et $g(n) = O(f(n))$. Si ce n'est pas le cas pour votre proposition, donner deux telles fonctions qui ne sont pas proportionnelles (c'est-à-dire, telles qu'il n'existe pas une constante c telle que $f(n) = c \cdot g(n)$).
5. Proposer deux fonctions f et g telles que $f(n) \neq O(g(n))$ et $g(n) \neq O(f(n))$.

Exercice 3. Exo TD : *O à la chaîne*

✎ Pour les paires de fonctions (f, g) suivantes, est-ce que $f(n) = O(g(n))$? Et $g(n) = O(f(n))$?

a. $f(n) = n + 100$ et $g(n) = n$ **b.** $f(n) = \sqrt{n}$ et $g(n) = n^{2/3}$ **c.** $f(n) = \sqrt{n}$ et $g(n) = (\log n)^3$
d. $f(n) = n^{1,01}$ et $g(n) = n \log^2 n$ **e.** $f(n) = 2^n$ et $g(n) = 3^n$ **f.** $f(n) = 10n + \log n$ et $g(n) = n + \log^2 n$
g. $f(n) = n^2 / \log n$ et $g(n) = n \log^2 n$ **h.** $f(n) = n^5$ et $g(n) = 3^{\log n}$ **i.** $f(n) = 2^n$ et $g(n) = n!$

Exercice 4. Exo TD : *Restes du cours*

Prouver les résulats suivants, qui sont donnés dans un lemme du cours :

1. Si $h = O(f)$ alors $f + h = O(f)$.
2. $O(f) \times O(g) = O(f \times g)$ (c-à-d, si $h_1 = O(f)$ et $h_2 = O(g)$ alors $h_1 \times h_2 = O(f \times g)$).

Complexité algorithmique

Exercice 5. Exo TD : *Puissance lente*

On considère les algorithme ALGOSANSTABLEAU et ALGOD&C du cours. On les appelle uniquement pour $x = 2$, et n quelconque.

1. Dans le modéle WORD-RAM, quelle est alors la taille de l'entrée ? ALGOD&C est-il polynomial ?
2. Dans le modéle RAM, quelle est alors la taille de l'entrée ? ALGOD&C est-il polynomial ? Et ALGOSANSTABLEAU ?
3. Si on code n en unaire, quelle est alors la taille de l'entrée ? ALGOSANSTABLEAU est-il polynomial ?

Exercice 6. **Exo TP** : *Complexité par l'exemple*

1. Écrire un programme qui prend une valeur n en entrée et qui effectue un nombre d'opérations proportionnel à $\log n$, *sans écrire* $\log n$ *dans votre code !*
2. Même question avec n^2 au lieu de $\log n$, *sans écrire* n^2 *dans votre code !*
3. Même question avec $n!$, *sans écrire* $n!$ *dans votre code !*

Exercice 7. **Exo TD** : *Combien de temps ?*

✎ Établir la complexité en temps des trois algorithmes suivants (les opérations élémentaires ont été omises).

```
Algorithme : ALGO1(n)
pour i de 0 à n−1 faire
    pour j de 0 à n−1 faire
        pour k de 0 à j faire
            <op elem>
pour i de 0 à n−1 faire
    <op elem>
```

```
Algorithme : ALGO2(n)
si n = 0 alors return val;
;
ALGO2(n−1);
<op elem>
ALGO2(n−1);
<op elem>
```

```
Algorithme : ALGO3(n)
<op elem>
tant que n > 1 faire
    n ← n/3;
<op elem>
```

Algorithmes

Exercice 8. **Exo TD/TP** : *Tri à bulles*

Voici une version du classique TRI-A-BULLES :

Données : Un tableau T contenant n nombres réels.
Résultat : Le tableau T trié.

```
pour i de n−1 à 1 faire
    pour j de 0 à i−1 faire
        si T[j] > T[j+1] alors Échanger les contenus de T[j] et T[j+1];
```

1. Dérouler l'algorithme sur le tableau $T = [12, 3, 7, 0]$.
2. Calculer la complexité en temps de l'algorithme.
3. Prouver la validité de l'algorithme TRI-A-BULLES.
4. Implémenter et tester cet algorithme.

Exercice 9. **Exo TD/TP** :*Somme de 3*

Étant donné un tableau T de taille n, on veut écrire un algorithme qui trouve trois indices distincts i, j et k de $\{0, \ldots, n-1\}$ tels que $T[i] + T[j] = T[k]$, ou qui signale si trois tels indices n'existent pas.

1. Écrire un tel algorithme de complexité en temps $O(n^3)$.
2. On va essayer d'avoir un algorithme de complexité quadratique. Pour cela, on va traiter d'abord le sous problème suivant : étant donné un tableau S *trié* de taille n et un nombre x, écrire un algorithme de complexité linéaire en temps qui décide s'il existe deux indices distincts i et j tels que $T[i] + T[j] = x$ (on pourra commencer par comparer $T[0] + T[n-1]$ et x).
3. En déduire un algorithme de complexité en temps quadratique pour résoudre le problème initial.
4. Implémenter et tester ces deux algorithmes. Comparer graphiquement leur temps d'exécution respectifs (voir exemple du cours).