DIU Enseignement de l'Info au Lycée

Cours 3 : Diviser pour Régner

Université de Montpellier

2018 – 2019

Diviser pour régner

- Méthode algorithmique utilisée pour **obtenir une meilleur complexité** que des algorithmiques plus 'naïfs' (...).
- Le principe est de **diviser le problème en des sous-problèmes** et de recombiner les solutions obtenues (**'régner'**).
- La base de ce type d'algorithmes est la **récursivité**.
- Diviser pour Régner au programme de l'option NSI en Term !

1. Qlqs rappels sur la récursivité

2. Premier exemple : tri fusion

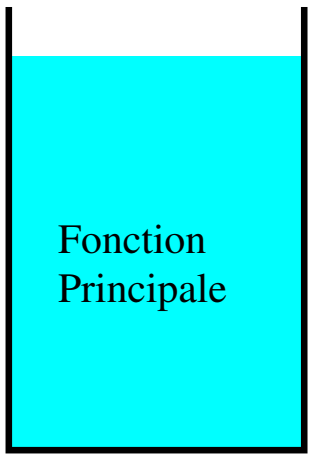
3. Qu'est-ce que « diviser pour régner » ?

4. Deuxième exemple : multiplication d'entiers

5. Exemple spécial : Calcul de rang

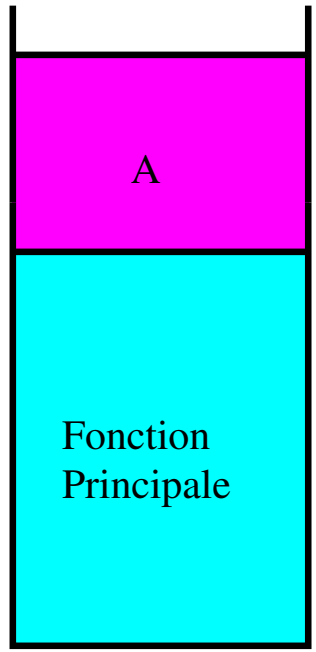
Appel de fonctions en mémoire

- **La pile des appels de fonction en mémoire**.
- Au début du lancement de tout programme, la `fonction principale` du programme est chargé en mémoire, dans cette pile.



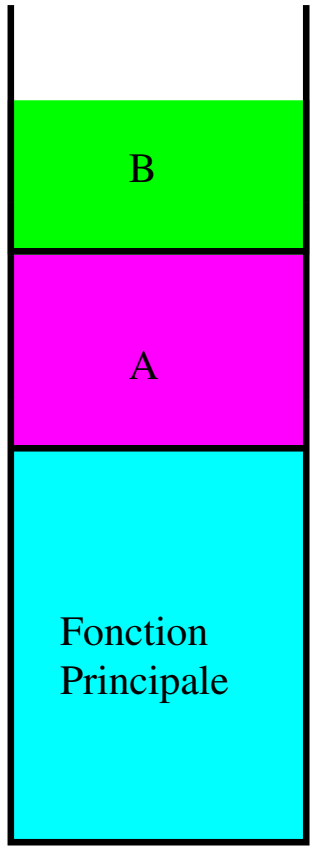
Appel de fonctions en mémoire

- Appel d'une fonction `A` par la fonction `principale` :
- La fonction `principale` se met en attente, et la fonction `A` est chargée dans la pile en mémoire.



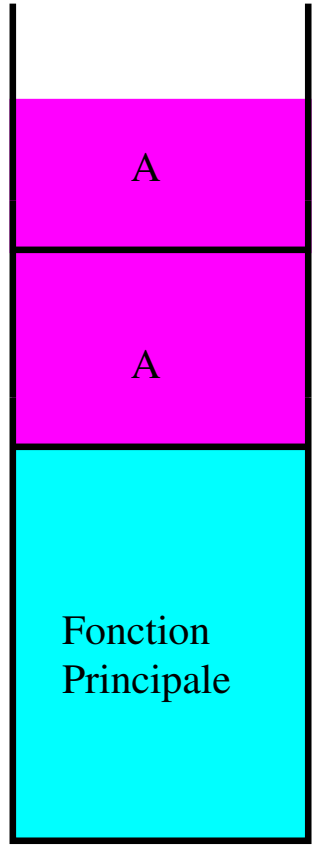
Appel de fonctions en mémoire

- Appel d'une fonction `B` par la fonction `A` :
- La fonction `A` se met en attente, et la fonction `B` est chargée dans la pile en mémoire.



Appel de fonctions en mémoire

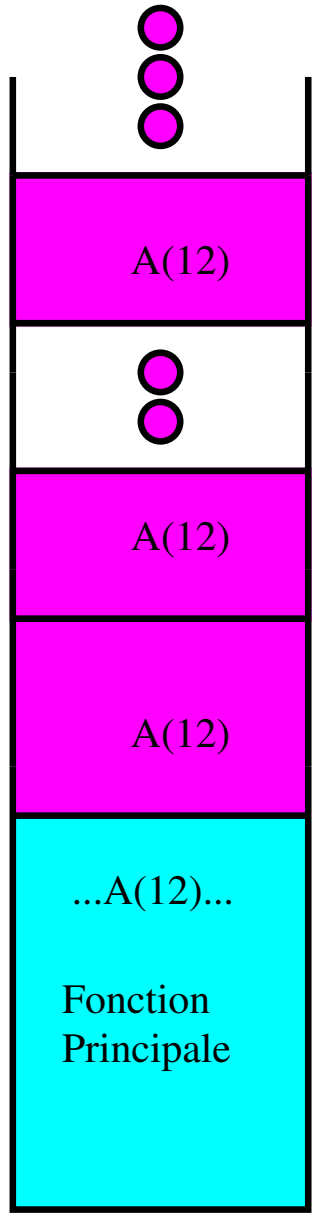
- **La récursivité :** La fonction `A` s'appelle elle-même (de la même manière qu'elle appelait la fonction `B`...)



Appel de fonctions en mémoire

- **La récursivité :** Attention aux appels récursifs à l'infini...
- Exemple :

```
def A(n):
if n==0:
        return 0
 return A(n)
```

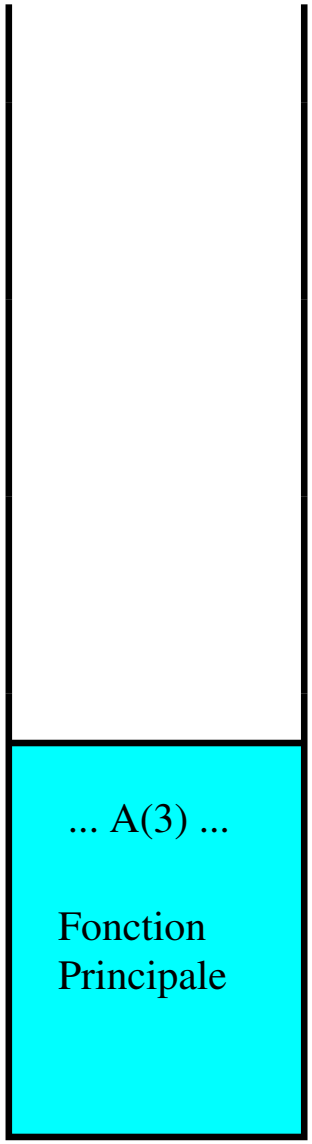


Appel de fonctions en mémoire

- Il faut assurer **un nombre fini d'appels récursifs**.
- Souvent, un paramètre décroît et un cas de base est prévu.
- Exemple :

```
def A(n):
if n==0:
        return 0
 return A(n-1)+1
```

- Le programme principal appelle `A(3)` et se met en attente.

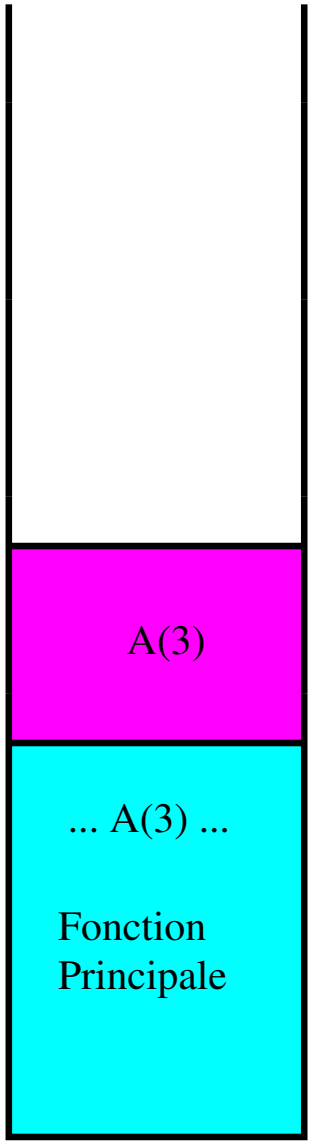


Appel de fonctions en mémoire

- Il faut assurer **un nombre fini d'appels récursifs**.
- Souvent, un paramètre décroît et un cas de base est prévu.
- Exemple :

```
def A(n):
if n==0:
        return 0
 return A(n-1)+1
```

- `A` se charge dans la pile avec 3 pour paramètre, appelle `A(2)` et se met en attente.

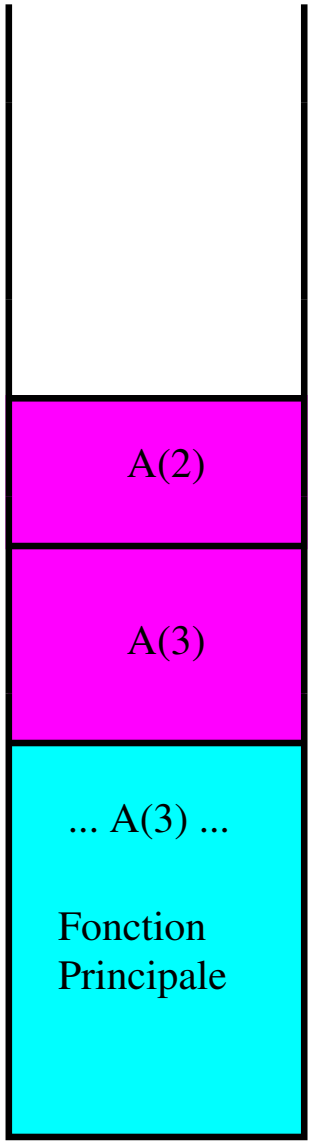


Appel de fonctions en mémoire

- Il faut assurer **un nombre fini d'appels récursifs**.
- Souvent, un paramètre décroît et un cas de base est prévu.
- Exemple :

```
def A(n):
if n==0:
        return 0
 return A(n-1)+1
```

- `A` se charge de nouveau dans la pile avec 2 pour paramètre, appelle `A(1)` et se met en attente.

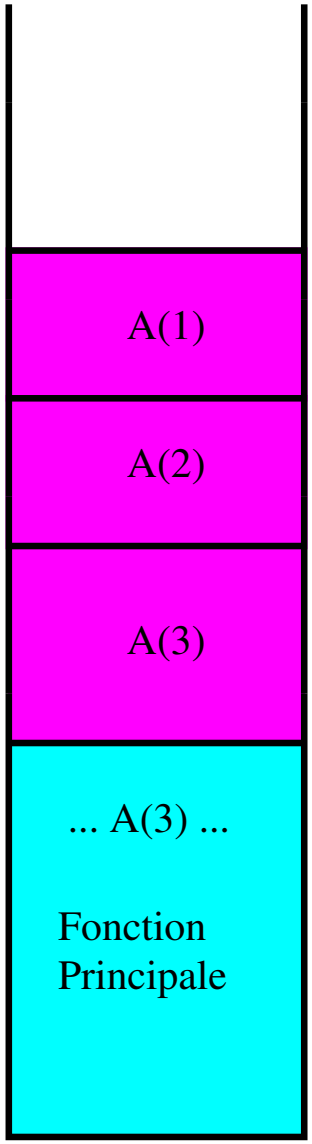


Appel de fonctions en mémoire

- Il faut assurer **un nombre fini d'appels récursifs**.
- Souvent, un paramètre décroît et un cas de base est prévu.
- Exemple :

```
def A(n):
if n==0:
        return 0
 return A(n-1)+1
```

- `A` se charge encore dans la pile avec 1 pour paramètre, appelle `A(0)` et se met en attente.

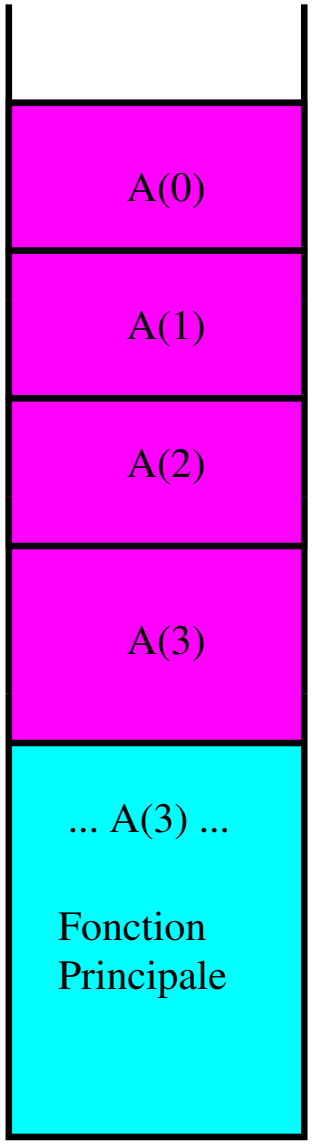


Appel de fonctions en mémoire

- Il faut assurer **un nombre fini d'appels récursifs**.
- Souvent, un paramètre décroît et un cas de base est prévu.
- Exemple :

```
def A(n):
if n==0:
        return 0
 return A(n-1)+1
```

- `A` se charge une dernière fois dans la pile avec 0 pour paramètre, puis retourne 0 à `A(1)`

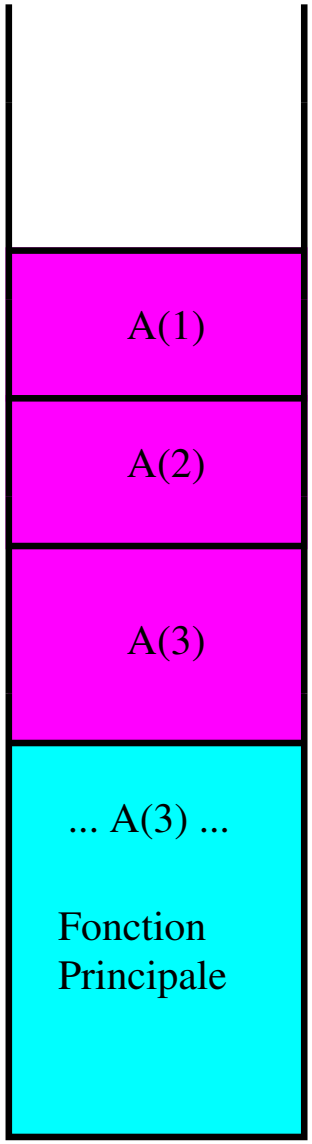


Appel de fonctions en mémoire

- Il faut assurer **un nombre fini d'appels récursifs**.
- Souvent, un paramètre décroît et un cas de base est prévu.
- Exemple :

```
def A(n):
if n==0:
        return 0
 return A(n-1)+1
```

- `A(1)` peut finir son calcul et renvoie 1 à `A(2)`

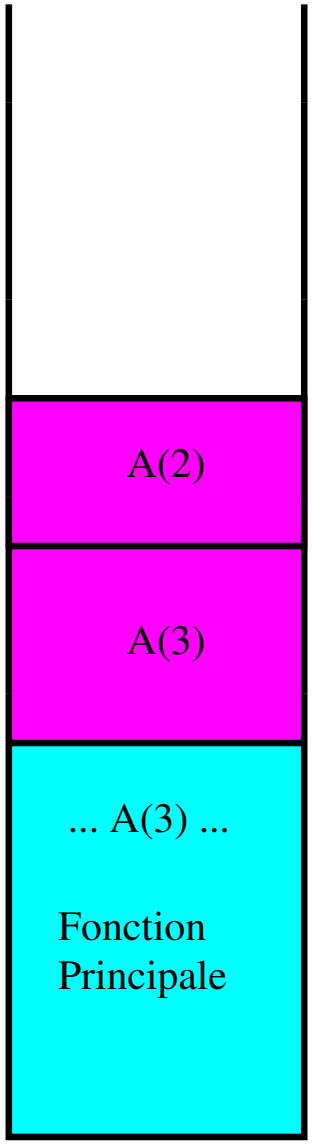


Appel de fonctions en mémoire

- Il faut assurer **un nombre fini d'appels récursifs**.
- Souvent, un paramètre décroît et un cas de base est prévu.
- Exemple :

```
def A(n):
if n==0:
        return 0
 return A(n-1)+1
```

- `A(2)` peut finir son calcul et renvoie 2 à `A(3)`

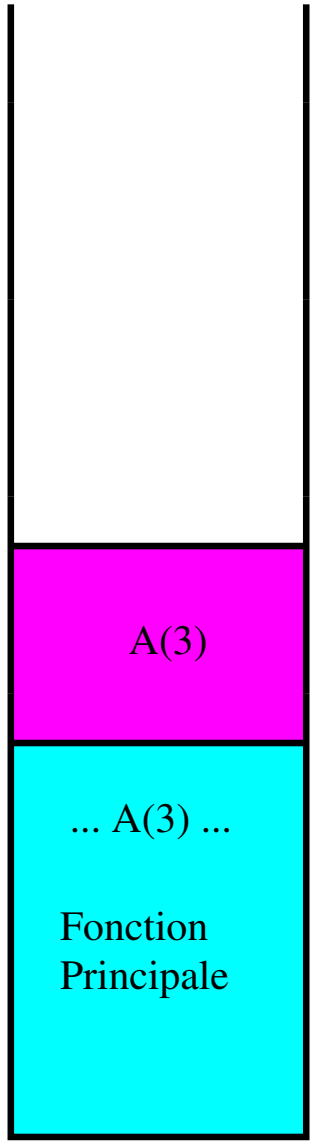


Appel de fonctions en mémoire

- Il faut assurer **un nombre fini d'appels récursifs**.
- Souvent, un paramètre décroît et un cas de base est prévu.
- Exemple :

```
def A(n):
if n==0:
        return 0
 return A(n-1)+1
```

- `A(3)` peut finir son calcul et renvoie 3 à la fonction principale

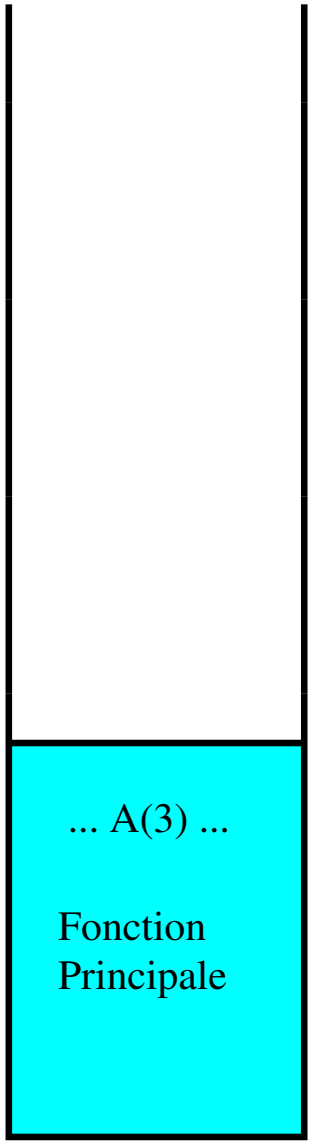


Appel de fonctions en mémoire

- Il faut assurer **un nombre fini d'appels récursifs**.
- Souvent, un paramètre décroît et un cas de base est prévu.
- Exemple :

```
def A(n):
if n==0:
        return 0
 return A(n-1)+1
```

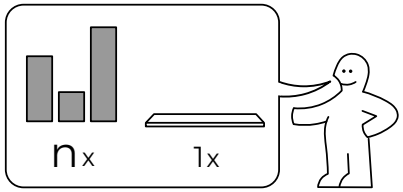
- La fonction principale a obtenu la valeur de `A(3)`, elle peut continuer sa petite vie de processus...



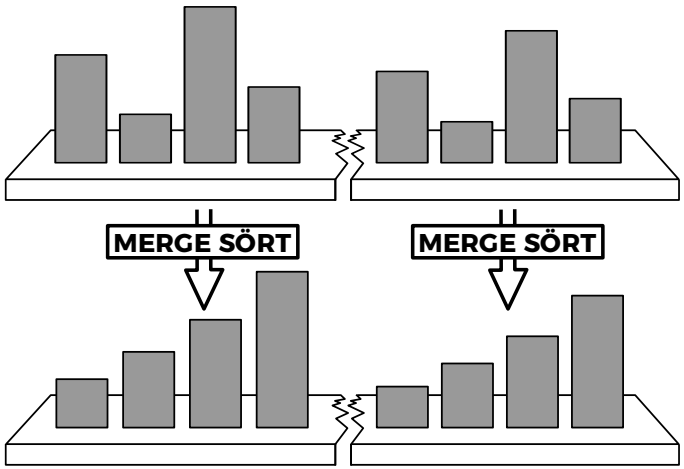
MERGE SÖRT

idea-instructions.com/merge-sort/
v1.1, CC by-nc-sa 4.0

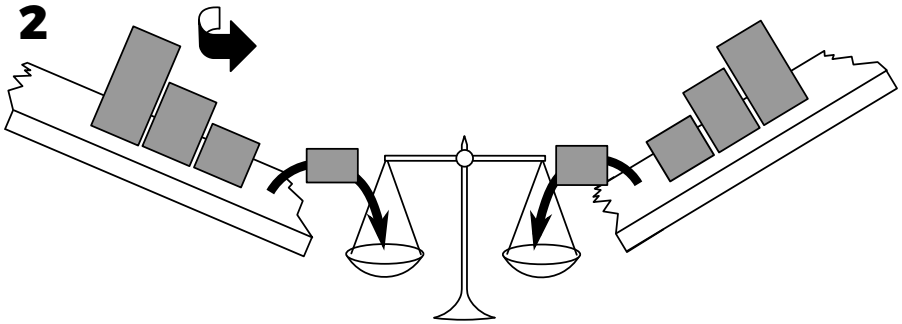
IDEA



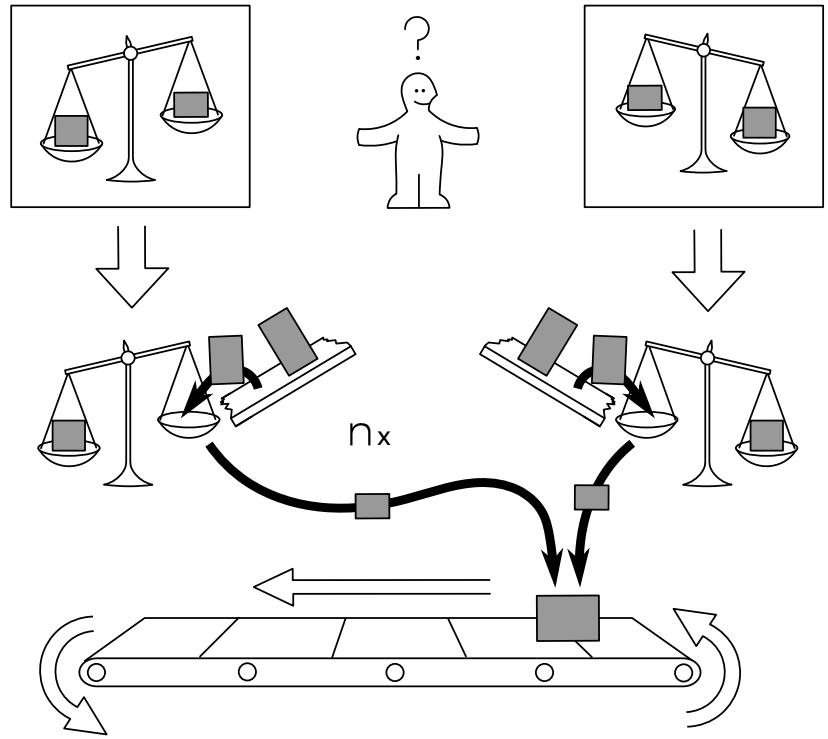
1



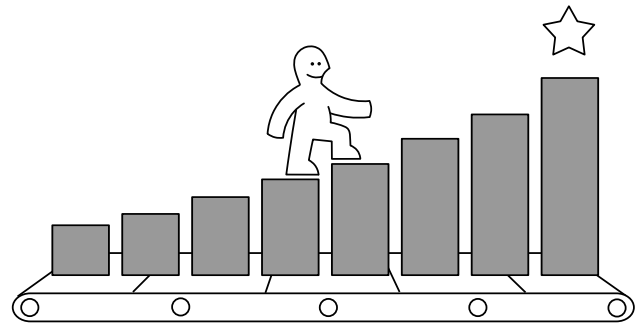
2



3



4



Algorithme du TriFusion

Algorithme : TriFusion(T)

$n \leftarrow$ taille(T)
si $n = 1$ **alors**
    Retourner T
sinon
    $T_1 \leftarrow$TriFusion($T[0, \lfloor n/2 \rfloor - 1]$)
    $T_2 \leftarrow$TriFusion($T[\lfloor n/2 \rfloor, n]$)
    Retourner Fusion(T_1, T_2)

Algorithme du TriFusion

Algorithme : TriFusion(T)

$n \leftarrow$ taille(T)
si $n = 1$ **alors**
  Retourner T
sinon
  $T_1 \leftarrow$TriFusion($T[0, \lfloor n/2 \rfloor - 1]$)
  $T_2 \leftarrow$TriFusion($T[\lfloor n/2 \rfloor, n]$)
  Retourner Fusion(T_1, T_2)

Lemme

Soit $T(n)$ la complexité de TriFusion *et $F(n)$ la complexité de* Fusion. *Alors*

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & si\ n = 1 \\ T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + F(n) & sinon \end{cases}$$

Algorithme de FUSION

Algorithme : FUSION(T_1, T_2)

$n_1 \leftarrow$ taille(T_1) ; $n_2 \leftarrow$ taille(T_2)
$S \leftarrow$ tableau de taille $n_1 + n_2$
$i_1 \leftarrow 0$; $i_2 \leftarrow 0$
pour $i_S = 0$ *à* $n_1 + n_2 - 1$ **faire**
    si $i_1 \geq n_1$ **alors** $S[i_S] \leftarrow T_2[i_2]$; $i_2 \leftarrow i_2 + 1$;
    sinon si $i_2 \geq n_2$ **alors** $S[i_S] \leftarrow T_1[i_1]$; $i_1 \leftarrow i_1 + 1$;
    sinon si $T_1[i_1] < T_2[i_2]$ **alors** $S[i_S] \leftarrow T_1[i_1]$; $i_1 \leftarrow i_1 + 1$;
    sinon $S[i_S] \leftarrow T_2[i_2]$; $i_2 \leftarrow i_2 + 1$;
retourner S

Algorithme de FUSION

Algorithme : FUSION(T_1, T_2)

$n_1 \leftarrow$ taille(T_1) ; $n_2 \leftarrow$ taille(T_2)
$S \leftarrow$ tableau de taille $n_1 + n_2$
$i_1 \leftarrow 0$; $i_2 \leftarrow 0$
pour $i_S = 0$ *à* $n_1 + n_2 - 1$ **faire**
    si $i_1 \geq n_1$ **alors** $S[i_S] \leftarrow T_2[i_2]$; $i_2 \leftarrow i_2 + 1$;
    sinon si $i_2 \geq n_2$ **alors** $S[i_S] \leftarrow T_1[i_1]$; $i_1 \leftarrow i_1 + 1$;
    sinon si $T_1[i_1] < T_2[i_2]$ **alors** $S[i_S] \leftarrow T_1[i_1]$; $i_1 \leftarrow i_1 + 1$;
    sinon $S[i_S] \leftarrow T_2[i_2]$; $i_2 \leftarrow i_2 + 1$;
retourner S

Exemple $[10, 5, 2, 4, 3, 7, 6, 4]$ au tableau...

Algorithme de FUSION

Algorithme : FUSION(T_1, T_2)

$n_1 \leftarrow$ taille(T_1) ; $n_2 \leftarrow$ taille(T_2)
$S \leftarrow$ tableau de taille $n_1 + n_2$
$i_1 \leftarrow 0$; $i_2 \leftarrow 0$
pour $i_S = 0$ *à* $n_1 + n_2 - 1$ **faire**
    si $i_1 \geq n_1$ **alors** $S[i_S] \leftarrow T_2[i_2]$; $i_2 \leftarrow i_2 + 1$;
    sinon si $i_2 \geq n_2$ **alors** $S[i_S] \leftarrow T_1[i_1]$; $i_1 \leftarrow i_1 + 1$;
    sinon si $T_1[i_1] < T_2[i_2]$ **alors** $S[i_S] \leftarrow T_1[i_1]$; $i_1 \leftarrow i_1 + 1$;
    sinon $S[i_S] \leftarrow T_2[i_2]$; $i_2 \leftarrow i_2 + 1$;
retourner S

Lemme
La complexité de FUSION *est* $O(n_1 + n_2)$.

Preuve facile...

Algorithme de FUSION

Algorithme : FUSION(T_1, T_2)

$n_1 \leftarrow$ taille(T_1) ; $n_2 \leftarrow$ taille(T_2)
$S \leftarrow$ tableau de taille $n_1 + n_2$
$i_1 \leftarrow 0$; $i_2 \leftarrow 0$
pour $i_S = 0$ *à* $n_1 + n_2 - 1$ **faire**
    si $i_1 \geq n_1$ **alors** $S[i_S] \leftarrow T_2[i_2]$; $i_2 \leftarrow i_2 + 1$;
    sinon si $i_2 \geq n_2$ **alors** $S[i_S] \leftarrow T_1[i_1]$; $i_1 \leftarrow i_1 + 1$;
    sinon si $T_1[i_1] < T_2[i_2]$ **alors** $S[i_S] \leftarrow T_1[i_1]$; $i_1 \leftarrow i_1 + 1$;
    sinon $S[i_S] \leftarrow T_2[i_2]$; $i_2 \leftarrow i_2 + 1$;
retourner S

Lemme

Si T_1 et T_2 sont deux tableaux triés (par ordre croissant), FUSION(T_1, T_2) *renvoie un tableau trié.*

Preuve validité admise...

Retour sur le TriFusion

Théorème

L'algorithme TriFusion *trie tout tableau de taille n en temps $O(n \log n)$.*

Algorithme : TriFusion(T)

$n \leftarrow$ taille(T)
si $n = 1$ **alors**
    Retourner T
sinon
    $T_1 \leftarrow$ TriFusion($T[0, \lfloor n/2 \rfloor - 1]$)
    $T_2 \leftarrow$ TriFusion($T[\lfloor n/2 \rfloor, n]$)
    Retourner Fusion(T_1, T_2)

Retour sur le TriFusion

Théorème
L'algorithme TriFusion *trie tout tableau de taille n en temps $O(n \log n)$.*

Algorithme : TriFusion(T)

$n \leftarrow$ taille(T)
si $n = 1$ **alors**
    Retourner T
sinon
    $T_1 \leftarrow$ TriFusion($T[0, \lfloor n/2 \rfloor - 1]$)
    $T_2 \leftarrow$ TriFusion($T[\lfloor n/2 \rfloor, n]$)
    Retourner Fusion(T_1, T_2)

Preuve de correction par récurrence (facile !)

- Si $n = 1$, OK
- Si $n > 1$, $\lfloor n/2 \rfloor \leq \lceil n/2 \rceil < \boldsymbol{n}$, donc T_1 et T_2 triés après appels récursifs. La correction de Fusion suffit à conclure.

Retour sur le TriFusion

Théorème
L'algorithme TriFusion *trie tout tableau de taille n en temps $O(n \log n)$.*

Algorithme : TriFusion(T)

$n \leftarrow$ taille(T)
si $n = 1$ **alors**
    Retourner T
sinon
    $T_1 \leftarrow$ TriFusion($T[0, \lfloor n/2 \rfloor - 1]$)
    $T_2 \leftarrow$ TriFusion($T[\lfloor n/2 \rfloor, n]$)
    Retourner Fusion(T_1, T_2)

Preuve de correction par récurrence (facile !)

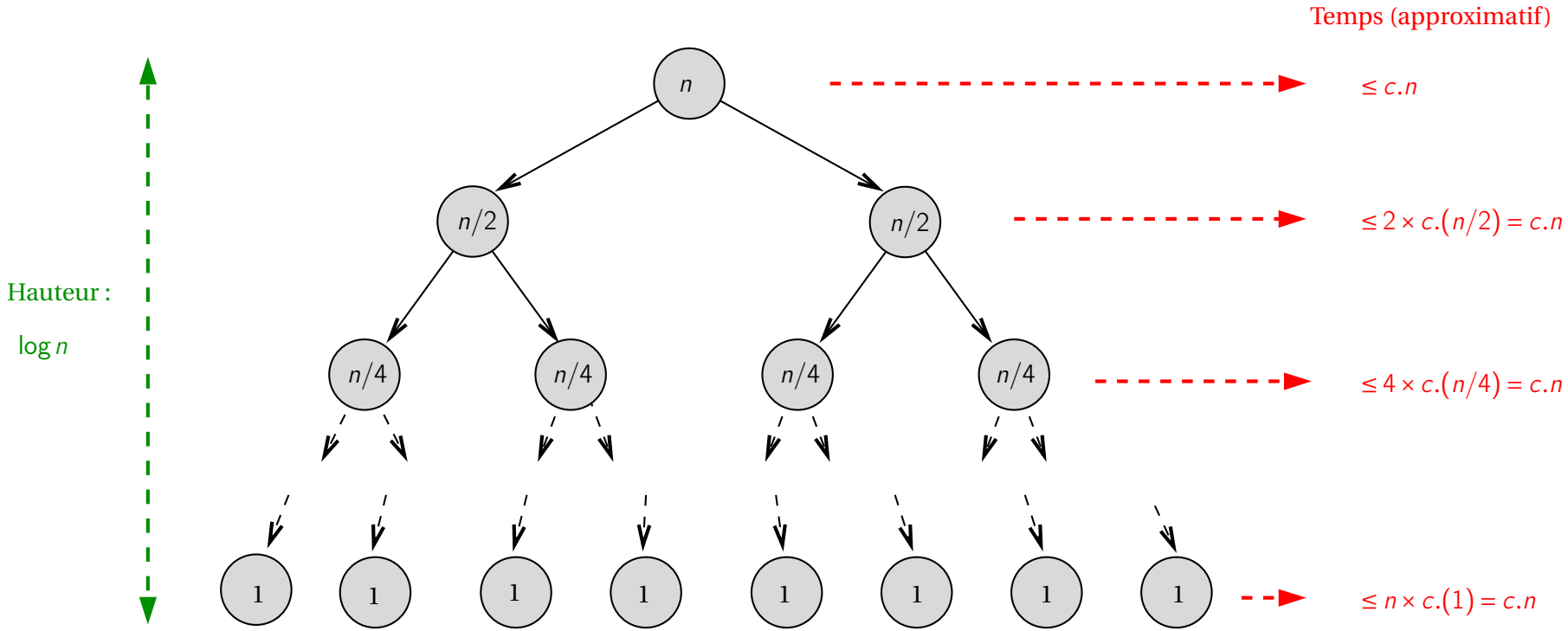
- Si $n = 1$, OK
- Si $n > 1$, $\lfloor n/2 \rfloor \leq \lceil n/2 \rceil < \boldsymbol{n}$, donc T_1 et T_2 triés après appels récursifs. La correction de Fusion suffit à conclure.

Preuve de complexité

- **Équation de récurrence :** $T(n) \leq 2T(\lceil n/2 \rceil) + O(n)$
- **Arbre de récursion** $\rightsquigarrow$ **estimation du temps de calcul**
- **Preuve par récurrence** de l'estimation

TriFusion : idée de la complexité, arbre de récursion

- On note c une constante majorant le nombre d'opérations élémentaires apparaissant dans TriFusion et Fusion (hors boucle et appels récursifs).



- En tout, l'algo a une complexité approximative de $c.n.\log n$, c'est-à-dire en $O(n \log n)$

TriFusion : preuve de la complexité, par récurrence

- On note toujours c une constante majorant le nombre d'opérations élémentaires apparaissant dans TriFusion et Fusion (hors boucle et appels récursifs).
- On note $t(n)$ le nombre total d'opérations élémentaires effectuées par Fusion appelé sur un tableau de taille n.

TriFusion : preuve de la complexité, par récurrence

- On note toujours c une constante majorant le nombre d'opérations élémentaires apparaissant dans TriFusion et Fusion (hors boucle et appels récursifs).
- On note $t(n)$ le nombre total d'opérations élémentaires effectuées par Fusion appelé sur un tableau de taille n.
- Etape 1 : Invariant : $\mathscr{P}_n = 't(n) \leq c.n.\log(2n)'$

  On montre que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n = 2^k$ et $k \geq 1$

TriFusion : preuve de la complexité, par récurrence

- On note toujours c une constante majorant le nombre d'opérations élémentaires apparaissant dans TriFusion et Fusion (hors boucle et appels récursifs).
- On note $t(n)$ le nombre total d'opérations élémentaires effectuées par Fusion appelé sur un tableau de taille n.
- Etape 1 : Invariant : $\mathscr{P}_n = \text{'}t(n) \leq c.n.\log(2n)\text{'}$

  On montre que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n = 2^k$ et $k \geq 1$
  - $\mathscr{P}_1 (= \mathscr{P}_{2^0})$ est vraie.
  - Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour $n = 2^{k-1}$, alors pour $n = 2^k$ on a :
    - $t(n) = t(2^k) \leq c.2^k + 2.t(2^{k-1})$ (équation)

TriFusion : preuve de la complexité, par récurrence

- On note toujours c une constante majorant le nombre d'opérations élémentaires apparaissant dans TriFusion et Fusion (hors boucle et appels récursifs).
- On note $t(n)$ le nombre total d'opérations élémentaires effectuées par Fusion appelé sur un tableau de taille n.
- Etape 1 : Invariant : $\mathscr{P}_n = 't(n) \leq c.n.\log(2n)'$

  On montre que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n = 2^k$ et $k \geq 1$
  - $\mathscr{P}_1 (= \mathscr{P}_{2^0})$ est vraie.
  - Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour $n = 2^{k-1}$, alors pour $n = 2^k$ on a :
    - $t(n) = t(2^k) \leq c.2^k + 2.t(2^{k-1})$ (équation)
    - $t(n) \leq c.2^k + 2.(c.2^{k-1}\log(2.2^{k-1}))$ (hyp. de réc.)

TriFusion : preuve de la complexité, par récurrence

- On note toujours c une constante majorant le nombre d'opérations élémentaires apparaissant dans TriFusion et Fusion (hors boucle et appels récursifs).
- On note $t(n)$ le nombre total d'opérations élémentaires effectuées par Fusion appelé sur un tableau de taille n.
- Etape 1 : Invariant : $\mathscr{P}_n = 't(n) \leq c.n.\log(2n)'$

  On montre que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n = 2^k$ et $k \geq 1$
  - $\mathscr{P}_1 (= \mathscr{P}_{2^0})$ est vraie.
  - Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour $n = 2^{k-1}$, alors pour $n = 2^k$ on a :
    - $t(n) = t(2^k) \leq c.2^k + 2.t(2^{k-1})$ (équation)
    - $t(n) \leq c.2^k + 2.(c.2^{k-1}\log(2.2^{k-1}))$ (hyp. de réc.)
    - $t(n) \leq c.2^k + c.2^k(\log(2.2^k) - 1)$

      $t(n) \leq c.2^k.\log 2.2^k = c.n.\log(2n)$

TriFusion : preuve de la complexité, par récurrence

- On note toujours c une constante majorant le nombre d'opérations élémentaires apparaissant dans TriFusion et Fusion (hors boucle et appels récursifs).
- On note $t(n)$ le nombre total d'opérations élémentaires effectuées par Fusion appelé sur un tableau de taille n.
- Etape 1 : Invariant : $\mathscr{P}_n = 't(n) \leq c.n.\log(2n)'$
  On montre que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n = 2^k$ et $k \geq 1$
- Etape 2 : Invariant : $\mathscr{P}_n = 't(n) \leq 4.c.n.\log(2n)'$
  On montre que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$

TriFusion : preuve de la complexité, par récurrence

- On note toujours c une constante majorant le nombre d'opérations élémentaires apparaissant dans TriFusion et Fusion (hors boucle et appels récursifs).
- On note $t(n)$ le nombre total d'opérations élémentaires effectuées par Fusion appelé sur un tableau de taille n.
- Etape 1 : Invariant : $\mathscr{P}_n = 't(n) \leq c.n.\log(2n)'$

  On montre que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n = 2^k$ et $k \geq 1$
- Etape 2 : Invariant : $\mathscr{P}_n = 't(n) \leq 4.c.n.\log(2n)'$

  On montre que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$
  - Pour n quelconque, il existe k tel que $2^{k-1} < n \leq 2^k$
  - On a $t(n) \leq t(2^k) \leq c.2^k.\log(2.2^k)$ par l'étape 1

TriFusion : preuve de la complexité, par récurrence

- On note toujours c une constante majorant le nombre d'opérations élémentaires apparaissant dans TriFusion et Fusion (hors boucle et appels récursifs).
- On note $t(n)$ le nombre total d'opérations élémentaires effectuées par Fusion appelé sur un tableau de taille n.
- Etape 1 : Invariant : $\mathscr{P}_n = 't(n) \leq c.n.\log(2n)'$

  On montre que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n = 2^k$ et $k \geq 1$
- Etape 2 : Invariant : $\mathscr{P}_n = 't(n) \leq 4.c.n.\log(2n)'$

  On montre que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$
  - Pour n quelconque, il existe k tel que $2^{k-1} < n \leq 2^k$
  - On a $t(n) \leq t(2^k) \leq c.2^k.\log(2.2^k)$ par l'étape 1
  - On a aussi $2^k \leq 2.n$, donc $t(n) \leq 2.c.n.\log(4.n)$

■

TriFusion : preuve de la complexité, par récurrence

- On note toujours c une constante majorant le nombre d'opérations élémentaires apparaissant dans TriFusion et Fusion (hors boucle et appels récursifs).
- On note $t(n)$ le nombre total d'opérations élémentaires effectuées par Fusion appelé sur un tableau de taille n.
- Etape 1 : Invariant : $\mathscr{P}_n = 't(n) \leq c.n.\log(2n)'$
  On montre que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n = 2^k$ et $k \geq 1$
- Etape 2 : Invariant : $\mathscr{P}_n = 't(n) \leq 4.c.n.\log(2n)'$
  On montre que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$
  - Pour n quelconque, il existe k tel que $2^{k-1} < n \leq 2^k$
  - On a $t(n) \leq t(2^k) \leq c.2^k.\log(2.2^k)$ par l'étape 1
  - On a aussi $2^k \leq 2.n$, donc $t(n) \leq 2.c.n.\log(4.n)$ ■
- Arg... C'est un peu fastidieux...

La stratégie « diviser pour régner »

1. **Diviser** le problème en sous-problèmes
2. **Résoudre récursivement** ces sous-problèmes
3. **Combiner** les solutions pour reconstruire la solution du problème original.

La stratégie « diviser pour régner »

1. **Diviser** le problème en sous-problèmes
2. **Résoudre récursivement** ces sous-problèmes
3. **Combiner** les solutions pour reconstruire la solution du problème original.

- Stratégie principalement utilisée pour obtenir de meilleures complexités que celles données par un algorithme moins évolué.

La stratégie « diviser pour régner »

1. **Diviser** le problème en sous-problèmes
2. **Résoudre récursivement** ces sous-problèmes
3. **Combiner** les solutions pour reconstruire la solution du problème original.

- Stratégie principalement utilisée pour obtenir de meilleures complexités que celles données par un algorithme moins évolué.
- Exemple (voir TD) : la recherche dichotomique

La stratégie « diviser pour régner »

1. **Diviser** le problème en sous-problèmes
2. **Résoudre récursivement** ces sous-problèmes
3. **Combiner** les solutions pour reconstruire la solution du problème original.

- Stratégie principalement utilisée pour obtenir de meilleures complexités que celles données par un algorithme moins évolué.
- Exemple (voir TD) : la recherche dichotomique

Exemple du tri fusion

1. Diviser le tableau en 2 sous-tableaux de tailles environ égales
2. Trier récursivement chaque sous-tableau
3. Fusionner les sous-tableaux triés

Analyse d'un algorithme « diviser pour régner »

Récurrence(s) sur la taille du problème

Analyse d'un algorithme « diviser pour régner »

Récurrence(s) sur la taille du problème

- Preuve de correction

Analyse d'un algorithme « diviser pour régner »

Récurrence(s) sur la taille du problème

- Preuve de correction
- Complexité :
  1. Établir **l'équation de récurrence**
  2. Estimer le résultat (arbre de récursion, déroulement de la récurrence, habitude, ...)
  3. Preuve par récurrence

Analyse d'un algorithme « diviser pour régner »

Récurrence(s) sur la taille du problème

- Preuve de correction
- Complexité :
  1. Établir **l'équation de récurrence**
  2. Estimer le résultat (arbre de récursion, déroulement de la récurrence, habitude, ...)
  3. Preuve par récurrence

ou

2-3. Utiliser le « *master theorem* » !

Une version du « *master theorem* »

Théorème

S'il existe trois entiers $a \geq 0$, $b > 1$, $d \geq 0$ *et* $n_0 > 0$ *tels que pour tout* $n \geq n_0$,

$$T(n) \leq aT(\lceil n/b \rceil) + O(n^d)$$

Alors

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d) & \text{si } b^d > a \\ O(n^d \log n) & \text{si } b^d = a \\ O(n^{\frac{\log a}{\log b}}) & \text{si } b^d < a \end{cases}$$

Une version du « *master theorem* »

Théorème

S'il existe trois entiers $a \geq 0$, $b > 1$, $d \geq 0$ et $n_0 > 0$ tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$T(n) \leq aT(\lceil n/b \rceil) + O(n^d)$$

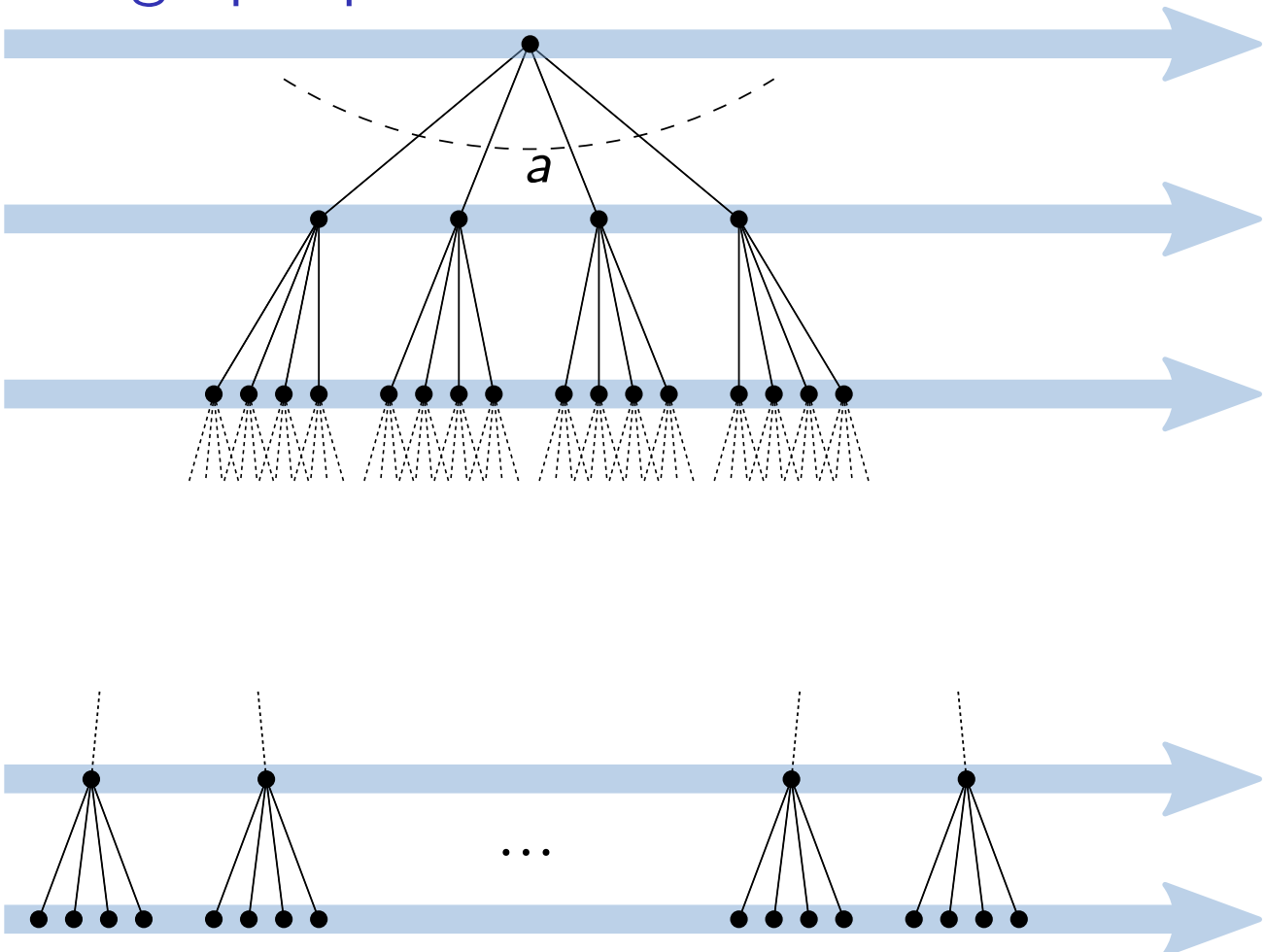
Alors

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d) & \text{si } b^d > a \\ O(n^d \log n) & \text{si } b^d = a \\ O(n^{\frac{\log a}{\log b}}) & \text{si } b^d < a \end{cases}$$

Exemple du tri fusion

- $T(n) \leq 2T(\lceil n/2 \rceil) + O(n)$: $a = 2$, $b = 2$, $d = 1$
- $b^d = a \rightsquigarrow T(n) = O(n^d \log n) = O(n \log n)$

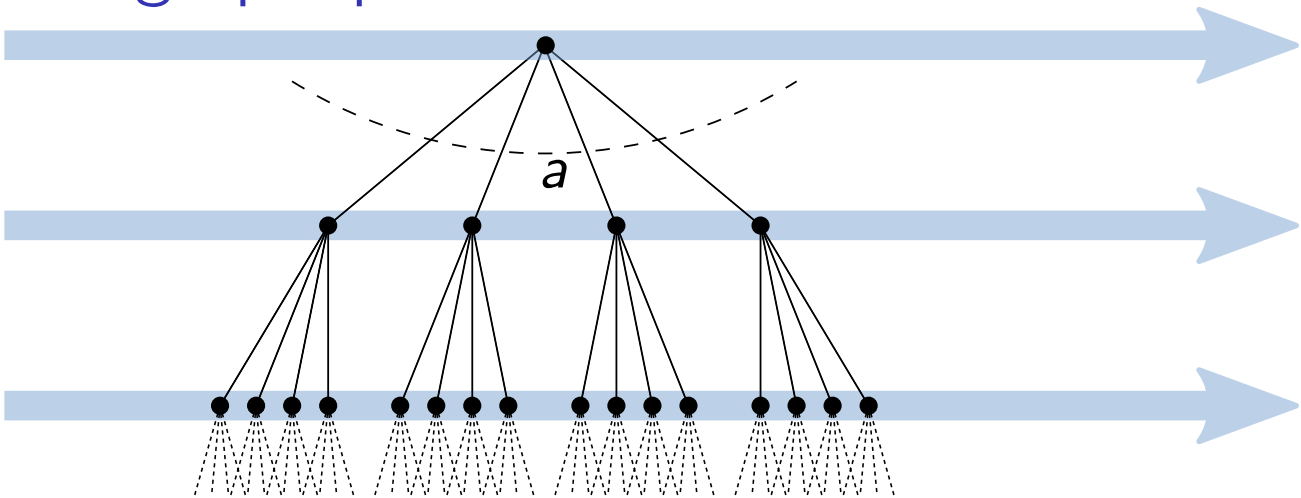
Preuve graphique



$$1 \times n^d$$
$$+$$
$$a \times (n/b)^d$$
$$+$$
$$a^2 \times (n/b^2)^d$$
$$+$$
$$\vdots$$
$$+$$
$$a^{\ell-1} \times (n/b^{\ell-1})^d$$
$$+$$
$$a^\ell \times (n/b^\ell)^d$$

modifié d'après *Algorithms* de Dasgupta, Papadimitriou, Vazirani
inspiré aussi de *Algorithms* de J. Erickson

Preuve graphique



$1 \times n^d$

$+$

$a \times (n/b)^d$

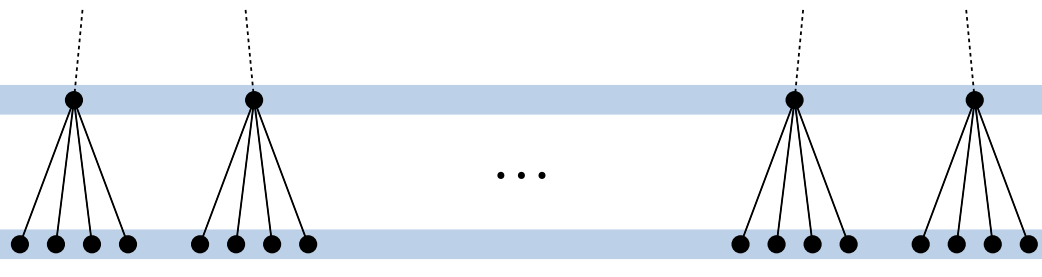
$+$

$a^2 \times (n/b^2)^d$

$+$

$\vdots$

$+$



$a^{\ell-1} \times (n/b^{\ell-1})^d$

$+$

$a^\ell \times (n/b^\ell)^d$

modifié d'après *Algorithms* de Dasgupta, Papadimitriou, Vazirani
inspiré aussi de *Algorithms* de J. Erickson

$(\ell = \log_b n)$

$$= \sum_{i=0}^{\ell} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^d = n^d \sum_{i=0}^{\ell} \left(\frac{a}{b^d}\right)^i = \begin{cases} O(n^d) & \text{si } b^d > a \\ O(n \log n) & \text{si } b^d = a \\ O(n^{\log b / \log a}) & \text{si } b^d < a \end{cases}$$

Retour à l'école primaire

⚠ **On se place dans le modèle RAM**

(en WORD-RAM, le problème n'aurait pas vraiment d'intérêt...)

Retour à l'école primaire

⚠ **On se place dans le modèle RAM**

(en WORD-RAM, le problème n'aurait pas vraiment d'intérêt...)

Multiplication d'entiers

Entrée Deux entiers A et B écrits en base 10

Sortie L'entier $C = A \times B$, en base 10

$$
\begin{array}{rr}
 & 1382 \\
\times & 7634 \\
\hline
 & 5528 \\
+ & 4146 \\
+ & 8292 \\
+ & 9674 \\
\hline
 & 10550188
\end{array}
$$

Retour à l'école primaire

⚠ **On se place dans le modèle RAM**
(en WORD-RAM, le problème n'aurait pas vraiment d'intérêt...)

	1382
×	7634
	5528
+	4146
+	8292
+	9674
	10550188

Multiplication d'entiers

Entrée Deux entiers A et B écrits en base 10

Sortie L'entier $C = A \times B$, en base 10

Question

- *Combien de **multiplications chiffre à chiffre** sont effectuées ?*
- *Combien d'**additions chiffre à chiffre** sont effectuées ?*

Retour à l'école primaire

⚠ **On se place dans le modèle RAM**
(en WORD-RAM, le problème n'aurait pas vraiment d'intérêt...)

	1382
×	7634
	5528
+	4146
+	8292
+	9674
	10550188

Multiplication d'entiers

Entrée Deux entiers A et B écrits en base 10

Sortie L'entier $C = A \times B$, en base 10

Question

- *Combien de **multiplications chiffre à chiffre** sont effectuées ?*
- *Combien d'**additions chiffre à chiffre** sont effectuées ?*

$\rightsquigarrow$ *$O(n^2)$ multiplications et additions*

Retour à l'école primaire

⚠ **On se place dans le modèle RAM**
(en WORD-RAM, le problème n'aurait pas vraiment d'intérêt...)

	1382
×	7634
	5528
+	4146
+	8292
+	9674
	10550188

Multiplication d'entiers

Entrée Deux entiers A et B écrits en base 10

Sortie L'entier $C = A \times B$, en base 10

Question

- *Combien de **multiplications chiffre à chiffre** sont effectuées ?*
- *Combien d'**additions chiffre à chiffre** sont effectuées ?*

$\rightsquigarrow$ *$O(n^2)$ multiplications et additions*

Peut-on faire mieux ?

Première tentative

Entrée $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i$ et $B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 10^i$

$A = 1382,\ B = 7634$

Première tentative

Entrée $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i$ et $B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 10^i$

Diviser $A = A_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} A_1$

$B = B_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} B_1$

$A = 1382,\ B = 7634$

$A_1 = 13,\ A_0 = 82$

$B_1 = 76,\ B_0 = 34$

Première tentative

Entrée $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i$ et $B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 10^i$

Diviser $A = A_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} A_1$

$B = B_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} B_1$

Récursion $C_{00} = A_0 \times B_0,\ C_{01} = A_0 \times B_1$

$C_{10} = A_1 \times B_0,\ C_{11} = A_1 \times B_1$

$A = 1382,\ B = 7634$

$A_1 = 13,\ A_0 = 82$

$B_1 = 76,\ B_0 = 34$

$C_{00} = 2788,\ C_{01} = 6232$

$C_{10} = 442,\ C_{11} = 988$

Première tentative

Entrée $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i$ et $B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 10^i$

Diviser $A = A_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} A_1$

$B = B_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} B_1$

Récursion $C_{00} = A_0 \times B_0,\ C_{01} = A_0 \times B_1$

$C_{10} = A_1 \times B_0,\ C_{11} = A_1 \times B_1$

Combiner $C = C_{00} + 10^{\lfloor n/2 \rfloor}(C_{01} + C_{10}) + 10^{2\lfloor n/2 \rfloor} C_{11}$

$A = 1382,\ B = 7634$
$A_1 = 13,\ A_0 = 82$
$B_1 = 76,\ B_0 = 34$
$C_{00} = 2788,\ C_{01} = 6232$
$C_{10} = 442,\ C_{11} = 988$
$C = 2788 + 100 \cdot (6232 + 442) + 10000 \cdot 988 = 10550188$

Première tentative

$A = 1382,\ B = 7634$
$A_1 = 13,\ A_0 = 82$
$B_1 = 76,\ B_0 = 34$
$C_{00} = 2788,\ C_{01} = 6232$
$C_{10} = \ 442,\ C_{11} = \ 988$
$C = 2788 + 100 \cdot (6232$
$\quad + 442) + 10000 \cdot 988$
$\quad = 10550188$

Entrée $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i$ et $B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 10^i$

Diviser $A = A_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} A_1$
$B = B_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} B_1$

Récursion $C_{00} = A_0 \times B_0,\ C_{01} = A_0 \times B_1$
$C_{10} = A_1 \times B_0,\ C_{11} = A_1 \times B_1$

Combiner $C = C_{00} + 10^{\lfloor n/2 \rfloor}(C_{01} + C_{10}) + 10^{2\lfloor n/2 \rfloor} C_{11}$

Preuve de correction :

$AB = A_0 B_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor}(A_0 B_1 + A_1 B_0) + 10^{2\lfloor n/2 \rfloor} A_1 B_1$

Première tentative

$A = 1382,\ B = 7634$
$A_1 = 13,\ A_0 = 82$
$B_1 = 76,\ B_0 = 34$
$C_{00} = 2788,\ C_{01} = 6232$
$C_{10} = 442,\ C_{11} = 988$
$C = 2788 + 100 \cdot (6232 + 442) + 10000 \cdot 988 = 10550188$

Entrée $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i$ et $B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 10^i$

Diviser $A = A_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} A_1$
$B = B_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} B_1$

Récursion $C_{00} = A_0 \times B_0,\ C_{01} = A_0 \times B_1$
$C_{10} = A_1 \times B_0,\ C_{11} = A_1 \times B_1$

Combiner $C = C_{00} + 10^{\lfloor n/2 \rfloor}(C_{01} + C_{10}) + 10^{2\lfloor n/2 \rfloor} C_{11}$

Preuve de correction :

$$AB = A_0 B_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor}(A_0 B_1 + A_1 B_0) + 10^{2\lfloor n/2 \rfloor} A_1 B_1$$

Preuve de complexité : $T(n) \leq 4T(\lceil n/2 \rceil) + O(n)$

- $a = 4,\ b = 2,\ d = 1 : b^d < a$
- $T(n) = O(n^{\log a / \log b}) = O(n^{\log 4 / \log 2}) = O(n^2)$...

Idée de Karatsuba [1]

$$A_0 B_1 + A_1 B_0 = A_0 B_0 + A_1 B_1 - (A_0 - A_1)(B_0 - B_1)$$

1. Voir : https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_de_Karatsuba

Idée de Karatsuba [1]

$$A_0B_1 + A_1B_0 = A_0B_0 + A_1B_1 - (A_0 - A_1)(B_0 - B_1)$$

- A_0B_0 et A_1B_1 sont calculés de toute façon
- un seul produit en plus !

1. Voir : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_de_Karatsuba`

Algorithme de Karatsuba (1962)

Entrée $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i$ et $B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 10^i$

$A = 1382,\ B = 7634$

Algorithme de Karatsuba (1962)

Entrée $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i$ et $B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 10^i$

Diviser $A = A_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} A_1$

$B = B_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} B_1$

$A = 1382,\ B = 7634$

$A_1 = 13,\ A_0 = 82$

$B_1 = 76,\ B_0 = 34$

Algorithme de Karatsuba (1962)

Entrée $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i$ et $B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 10^i$

Diviser $A = A_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} A_1$

$B = B_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} B_1$

Récursion $C_{00} = A_0 \times B_0,\ C_{11} = A_1 \times B_1$

$D = (A_0 - A_1) \times (B_0 - B_1)$

$A = 1382,\ B = 7634$

$A_1 = 13,\ A_0 = 82$

$B_1 = 76,\ B_0 = 34$

$C_{00} = 2788,\ C_{11} = 988$

$D = 69 \times (-42) = -2898$

Algorithme de Karatsuba (1962)

Entrée $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i$ et $B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 10^i$

Diviser
$$A = A_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} A_1$$
$$B = B_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} B_1$$

Récursion
$$C_{00} = A_0 \times B_0, \; C_{11} = A_1 \times B_1$$
$$D = (A_0 - A_1) \times (B_0 - B_1)$$

Combiner
$$C = C_{00} + 10^{\lfloor n/2 \rfloor}(C_{00} + C_{11} - D) + 10^{2\lfloor n/2 \rfloor} C_{11}$$

$A = 1382, \; B = 7634$
$A_1 = 13, \; A_0 = 82$
$B_1 = 76, \; B_0 = 34$
$C_{00} = 2788, \; C_{11} = 988$
$D = 69 \times (-42) = -2898$
$C = 2788 + 100 \cdot (2788$
$\quad + 988 + 2898) + 10000 \cdot 988$
$\quad = 10550188$

Algorithme de Karatsuba (1962)

Entrée $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i$ et $B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 10^i$

Diviser $A = A_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} A_1$
$B = B_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} B_1$

Récursion $C_{00} = A_0 \times B_0$, $C_{11} = A_1 \times B_1$
$D = (A_0 - A_1) \times (B_0 - B_1)$

Combiner $C = C_{00} + 10^{\lfloor n/2 \rfloor}(C_{00} + C_{11} - D) + 10^{2\lfloor n/2 \rfloor} C_{11}$

$A = 1382$, $B = 7634$
$A_1 = 13$, $A_0 = 82$
$B_1 = 76$, $B_0 = 34$
$C_{00} = 2788$, $C_{11} = 988$
$D = 69 \times (-42) = -2898$
$C = 2788 + 100 \cdot (2788$
$+ 988 + 2898) + 10000 \cdot 988$
$= 10550188$

Algorithme : KARATSUBA(A, B)

si *A et B n'ont qu'un chiffre* **alors retourner** $a_0 b_0$

Écrire A sous la forme $A_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} A_1$
Écrire B sous la forme $B_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} B_1$
$C_{00} \leftarrow$ KARATSUBA(A_0, B_0)
$C_{11} \leftarrow$ KARATSUBA(A_1, B_1)
$D \leftarrow$ KARATSUBA$(A_0 - A_1, B_0 - B_1)$
retourner $C_{00} + 10^{\lfloor n/2 \rfloor}(C_{00} + C_{11} - D) + 10^{2\lfloor n/2 \rfloor} C_{11}$

Analyse de l'algorithme de Karatsuba

Algorithme : KARATSUBA(A, B)

si *A et B n'ont qu'un chiffre* **alors retourner** $a_0 b_0$;

Écrire A sous la forme $A_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} A_1$

Écrire B sous la forme $B_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} B_1$

$C_{00} \leftarrow$ KARATSUBA(A_0, B_0)

$C_{11} \leftarrow$ KARATSUBA(A_1, B_1)

$D \leftarrow$ KARATSUBA$(A_0 - A_1, B_0 - B_1)$

retourner $C_{00} + 10^{\lfloor n/2 \rfloor}(C_{00} + C_{11} - D) + 10^{2\lfloor n/2 \rfloor} C_{11}$

Lemme

L'algorithme de Karatsuba retourne le produit de A et B et si $K(n)$ dénote le temps de calcul de KARATSUBA pour des entrées de taille n, on a $K(n) \leq \mathbf{3}K(\lceil n/2 \rceil) + O(n)$

Analyse de l'algorithme de Karatsuba

Algorithme : KARATSUBA(A, B)

si *A et B n'ont qu'un chiffre* **alors retourner** $a_0 b_0$;

Écrire A sous la forme $A_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} A_1$

Écrire B sous la forme $B_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} B_1$

$C_{00} \leftarrow$ KARATSUBA(A_0, B_0)

$C_{11} \leftarrow$ KARATSUBA(A_1, B_1)

$D \leftarrow$ KARATSUBA$(A_0 - A_1, B_0 - B_1)$

retourner $C_{00} + 10^{\lfloor n/2 \rfloor}(C_{00} + C_{11} - D) + 10^{2\lfloor n/2 \rfloor} C_{11}$

Lemme

L'algorithme de Karatsuba retourne le produit de A et B et si $K(n)$ dénote le temps de calcul de KARATSUBA pour des entrées de taille n, on a $K(n) \leq \mathbf{3}K(\lceil n/2 \rceil) + O(n)$

Corollaire (*master theorem*)

($a = 3$, $b = 2$ et $d = 1$, $b^d < a$)

$K(n) = O(n^{\log 3 / \log 2}) = \boldsymbol{O(n^{\log 3})} \simeq O(n^{1,58})$

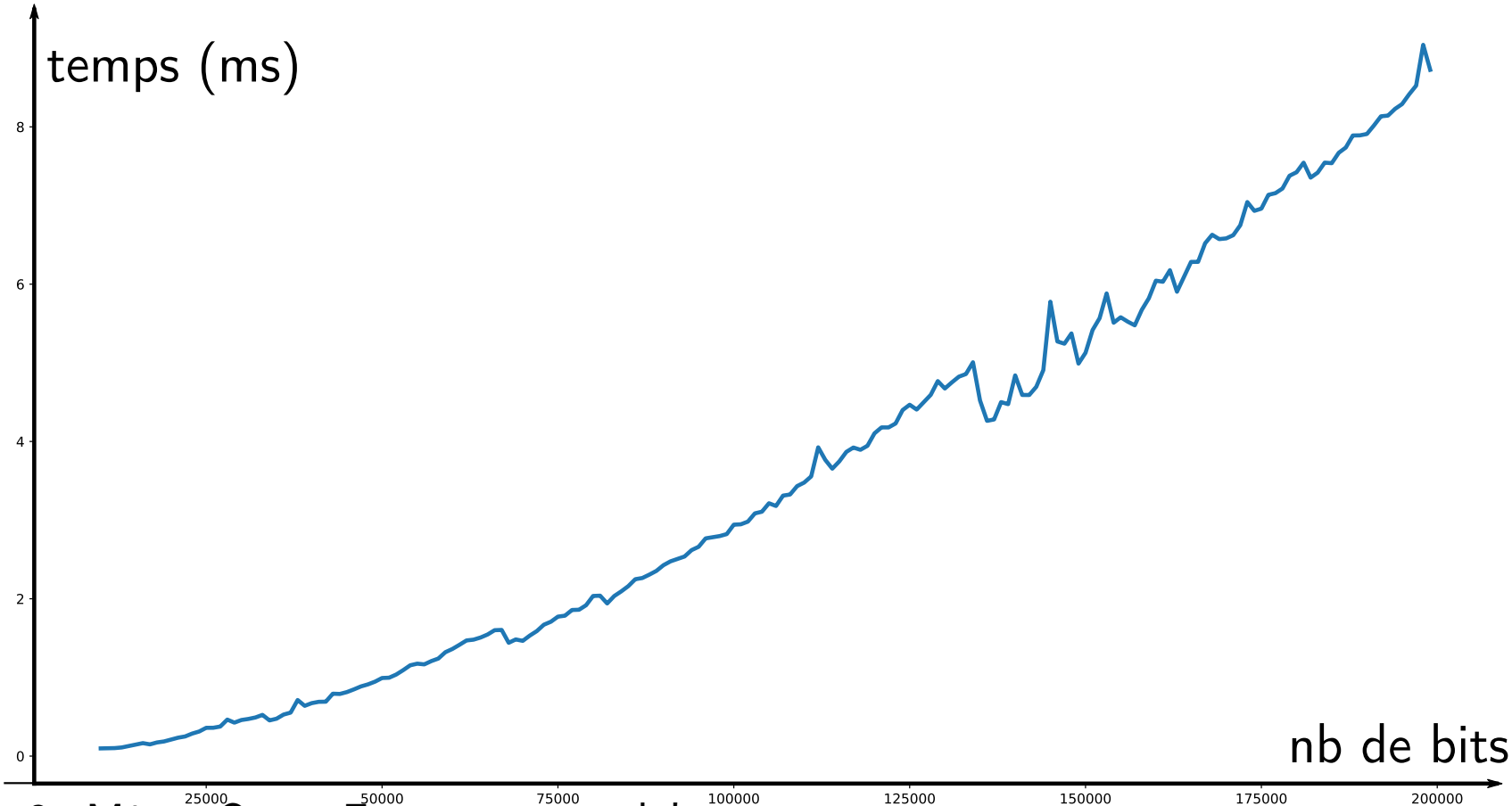
Dans la *vraie vie*

- Base 10 $\rightsquigarrow$ bases 2^{32}, 2^{64}, ...
  - Grands entiers représentés comme liste d'entiers de taille k bits $\Longleftrightarrow$ entiers écrits en base 2^k !
  - Exemple : `gmp` (C/C++), `BigInteger` (Java), `int` (Python)

2. Même Ouest-France en a parlé!

Dans la *vraie vie*

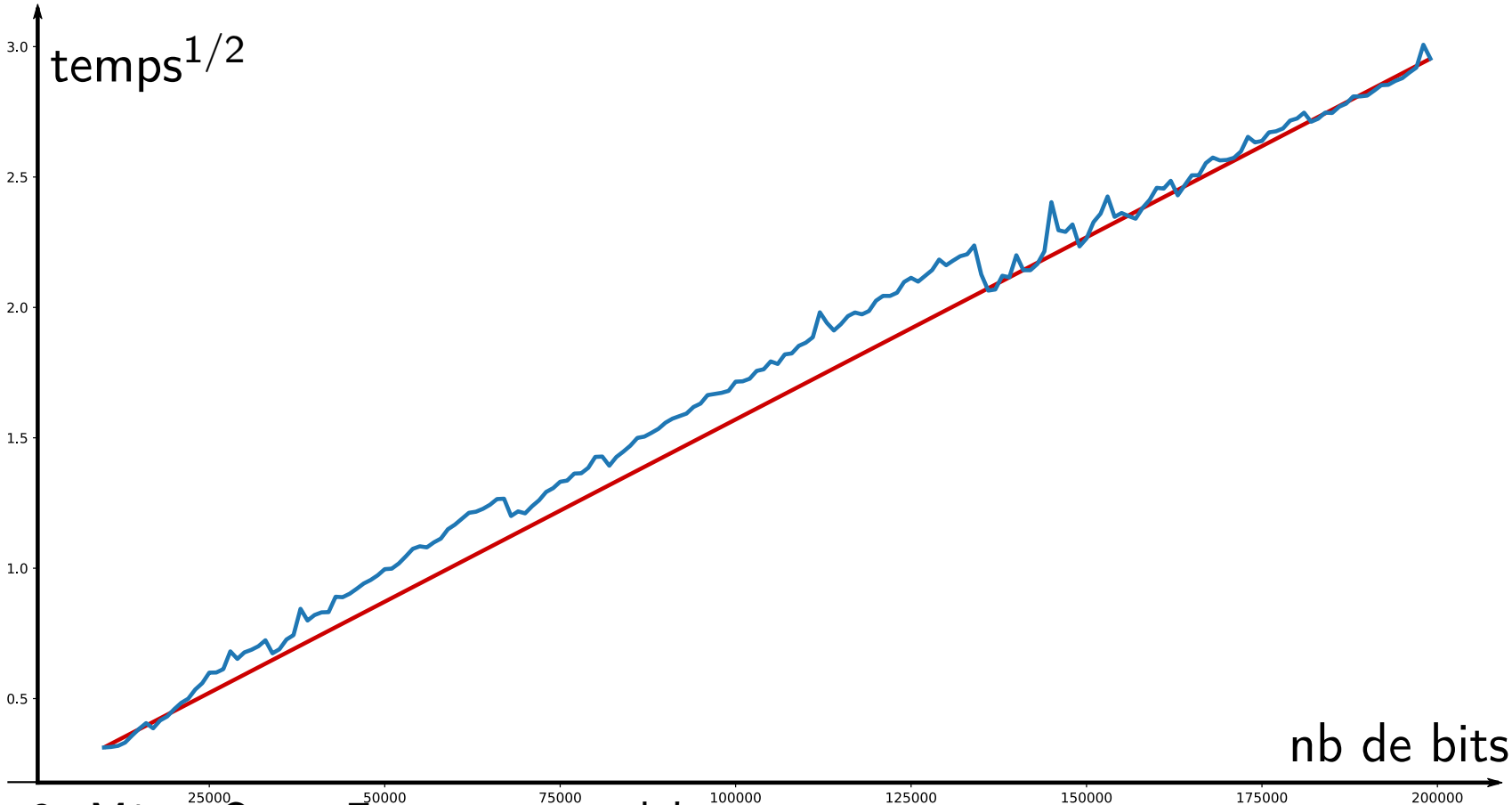
- Base 10 $\rightsquigarrow$ bases 2^{32}, 2^{64}, ...
  - Grands entiers représentés comme liste d'entiers de taille k bits $\Longleftrightarrow$ entiers écrits en base 2^k !
  - Exemple : `gmp` (C/C++), `BigInteger` (Java), `int` (Python)



2. Même Ouest-France en a parlé!

Dans la *vraie vie*

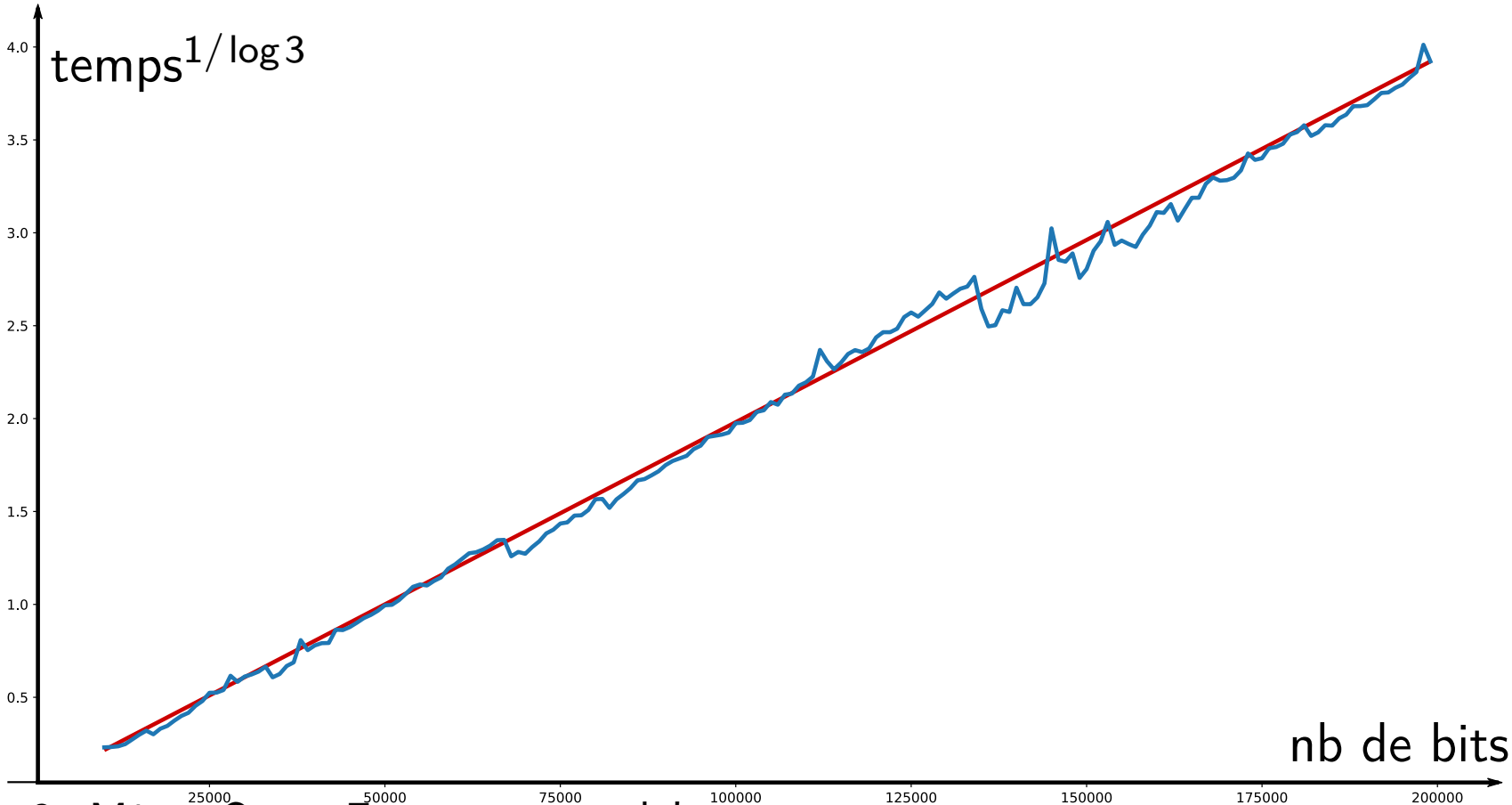
- Base 10 $\rightsquigarrow$ bases 2^{32}, 2^{64}, ...
  - Grands entiers représentés comme liste d'entiers de taille k bits $\Longleftrightarrow$ entiers écrits en base 2^k !
  - Exemple : `gmp` (C/C++), `BigInteger` (Java), `int` (Python)



2. Même Ouest-France en a parlé!

Dans la *vraie vie*

- Base 10 $\rightsquigarrow$ bases 2^{32}, 2^{64}, ...
  - Grands entiers représentés comme liste d'entiers de taille k bits $\Longleftrightarrow$ entiers écrits en base 2^k !
  - Exemple : `gmp` (C/C++), `BigInteger` (Java), `int` (Python)



2. Même Ouest-France en a parlé!

Dans la *vraie vie*

- Base 10 $\rightsquigarrow$ bases 2^{32}, 2^{64}, ...
  - Grands entiers représentés comme liste d'entiers de taille k bits $\iff$ entiers écrits en base 2^k !
  - Exemple : `gmp` (C/C++), `BigInteger` (Java), `int` (Python)
- Remarque par rapport au modèle
  - Modèle du cours : multiplication en temps $O(1)$
  - Irréaliste pour de grands entiers
  - Modèle souvent utilisé : taille d'un registre $= O(\log n)$

2. Même Ouest-France en a parlé!

Dans la *vraie vie*

- Base 10 $\rightsquigarrow$ bases 2^{32}, 2^{64}, ...
  - Grands entiers représentés comme liste d'entiers de taille k bits $\iff$ entiers écrits en base 2^k !
  - Exemple : `gmp` (C/C++), `BigInteger` (Java), `int` (Python)
- Remarque par rapport au modèle
  - Modèle du cours : multiplication en temps $O(1)$
  - Irréaliste pour de grands entiers
  - Modèle souvent utilisé : taille d'un registre $= O(\log n)$
- Autre utilisation : polynômes

2. Même Ouest-France en a parlé!

Dans la *vraie vie*

- Base 10 $\rightsquigarrow$ bases 2^{32}, 2^{64}, ...
  - Grands entiers représentés comme liste d'entiers de taille k bits $\iff$ entiers écrits en base 2^k !
  - Exemple : `gmp` (C/C++), `BigInteger` (Java), `int` (Python)
- Remarque par rapport au modèle
  - Modèle du cours : multiplication en temps $O(1)$
  - Irréaliste pour de grands entiers
  - Modèle souvent utilisé : taille d'un registre $= O(\log n)$
- Autre utilisation : polynômes
- Algorithmes plus rapides (1960's)
  - Toom-3 : découpe en 3 morceaux $O(n^{1,465})$
  - Toom-Cook : découpe en r morceaux $O(n^{1+\epsilon})$
  - Algorithmes basés sur la FFT $O(n \log n \log\log n)$

2. Même Ouest-France en a parlé!

Dans la *vraie vie*

- Base 10 $\rightsquigarrow$ bases 2^{32}, 2^{64}, ...
  - Grands entiers représentés comme liste d'entiers de taille k bits $\Longleftrightarrow$ entiers écrits en base 2^k !
  - Exemple : `gmp` (C/C++), `BigInteger` (Java), `int` (Python)
- Remarque par rapport au modèle
  - Modèle du cours : multiplication en temps $O(1)$
  - Irréaliste pour de grands entiers
  - Modèle souvent utilisé : taille d'un registre $= O(\log n)$
- Autre utilisation : polynômes
- Algorithmes plus rapides (1960's)
  - Toom-3 : découpe en 3 morceaux $O(n^{1,465})$
  - Toom-Cook : découpe en r morceaux $O(n^{1+\epsilon})$
  - Algorithmes basés sur la FFT $O(n \log n \log\log n)$
  - Record actuel (mars 2019) [2], utilise la FFT $O(n \log n)$

2. Même Ouest-France en a parlé!

Définition et algorithmes ± naïfs

Entrée Un tableau T de n nombres, et un entier $k \in \{1, \ldots, n\}$

Sortie le $k^{\text{ème}}$ plus petit élément de T, noté $\mathbf{rang(k, T)}$

Rk : $k = 1 \rightsquigarrow$ min, $k = n \rightsquigarrow$ max, $k = n/2 \rightsquigarrow$ médiane

Définition et algorithmes ± naïfs

Entrée Un tableau T de n nombres, et un entier $k \in \{1, \ldots, n\}$

Sortie le $k^{\text{ème}}$ plus petit élément de T, noté $\mathbf{rang}(k, T)$

Rk : $k = 1 \rightsquigarrow$ min, $k = n \rightsquigarrow$ max, $k = n/2 \rightsquigarrow$ médiane

Algorithme en $O(n^2)$:

```
pour i = 0 à n − 1 faire
    c = 0
    pour j = 0 à n − 1 faire
        si T[j] ≤ T[i] alors
            c ← c + 1
    si c = k alors retourner
      T[i]
```

Définition et algorithmes ± naïfs

Entrée Un tableau T de n nombres, et un entier $k \in \{1, \dots, n\}$

Sortie le $k^{\text{ème}}$ plus petit élément de T, noté $\mathbf{rang(k, T)}$

Rk : $k = 1 \rightsquigarrow$ min, $k = n \rightsquigarrow$ max, $k = n/2 \rightsquigarrow$ médiane

Algorithme en $O(n^2)$:

```
pour i = 0 à n − 1 faire
    c = 0
    pour j = 0 à n − 1 faire
        si T[j] ≤ T[i] alors
            c ← c + 1
    si c = k alors retourner
     T[i]
```

Algorithme en $O(n \log n)$:

```
Trier T
retourner T[k − 1]
```

Définition et algorithmes ± naïfs

Entrée Un tableau T de n nombres, et un entier $k \in \{1, \dots, n\}$

Sortie le $k^{\text{ème}}$ plus petit élément de T, noté $\mathbf{rang(k, T)}$

Rk : $k = 1 \rightsquigarrow$ min, $k = n \rightsquigarrow$ max, $k = n/2 \rightsquigarrow$ médiane

Algorithme en $O(n^2)$:

```
pour i = 0 à n − 1 faire
    c = 0
    pour j = 0 à n − 1 faire
        si T[j] ≤ T[i] alors
            c ← c + 1
    si c = k alors retourner
      T[i]
```

Algorithme en $O(n \log n)$:

```
Trier T
retourner T[k − 1]
```

Algorithme en $O(n)$?

Stratégie « diviser pour régner »

Diviser Choisir un **pivot** $p \in T$ pour séparer T en trois :

- $\boldsymbol{T}_{\text{inf}}$ qui contient les éléments x de T vérifiant $x < p$
- $\boldsymbol{T}_{\text{eq}}$ qui contient les éléments x de T vérifiant $x = p$
- $\boldsymbol{T}_{\text{sup}}$ qui contient les éléments x de T vérifiant $x > p$

Stratégie « diviser pour régner »

Diviser Choisir un **pivot** $p \in T$ pour séparer T en trois :

- T_{inf} qui contient les éléments x de T vérifiant $x < p$
- T_{eq} qui contient les éléments x de T vérifiant $x = p$
- T_{sup} qui contient les éléments x de T vérifiant $x > p$

Exemple : $T =$

3	7	21	9	12	16	7	3	1	2

On choisit le pivot $T[1] = 7$, on a :

$T_{\text{inf}} =$

3	3	1	2

$T_{\text{eq}} =$

7	7

$T_{\text{sup}} =$

21	9	12	16

Du coup :

- Le 2ème rang de T est le 2ème rang de T_{inf}
- Le 5ème rang de T est $T[1] = 7$
- Le 9ème rang de T est le 3ème rang de T_{sup}

Stratégie « diviser pour régner »

Diviser Choisir un **pivot** $p \in T$ pour séparer T en trois :

- $\boldsymbol{T}_{\text{inf}}$ qui contient les éléments x de T vérifiant $x < p$
- $\boldsymbol{T}_{\text{eq}}$ qui contient les éléments x de T vérifiant $x = p$
- $\boldsymbol{T}_{\text{sup}}$ qui contient les éléments x de T vérifiant $x > p$

Récursion Trouver $\text{rang}(k, T)$ dans T_{inf}, T_{eq} ou T_{sup}

$$\text{rang}(k, T) = \begin{cases} \text{rang}(k, T_{\text{inf}}) & \text{si } k \leq n_{\text{inf}} \\ p & \text{si } n_{\text{inf}} < k \leq n_{\text{inf}} + n_{\text{eq}} \\ \text{rang}(k - n_{\text{inf}} - n_{\text{eq}}, T_{\text{sup}}) & \text{si } n_{\text{inf}} + n_{\text{eq}} < k \end{cases}$$

où $n_{\text{inf}} = |T_{\text{inf}}|$, $n_{\text{eq}} = |T_{\text{eq}}|$, $n_{\text{sup}} = |T_{\text{sup}}|$

Combiner Rien à faire...

Idée d'algorithme

- Idée d'algo : on choisit un pivot, puis on crée T_{inf} et T_{sup} soit on a trouvé le $k$ième rang, soit on relance récursivement sur T_{inf} ou sur T_{sup}.

Idée d'algorithme

- Idée d'algo : on choisit un pivot, puis on crée T_{inf} et T_{sup} soit on a trouvé le $k$ième rang, soit on relance récursivement sur T_{inf} ou sur T_{sup}.

- Si on pouvait trouver à chaque étape un pivot tel que $n_{\text{inf}} \sim n/2$ et $n_{\text{sup}} \sim n/2$
  Alors on aurait comme équation de récurrence :

$$t(n) \leq t(n/2) + O(n)$$

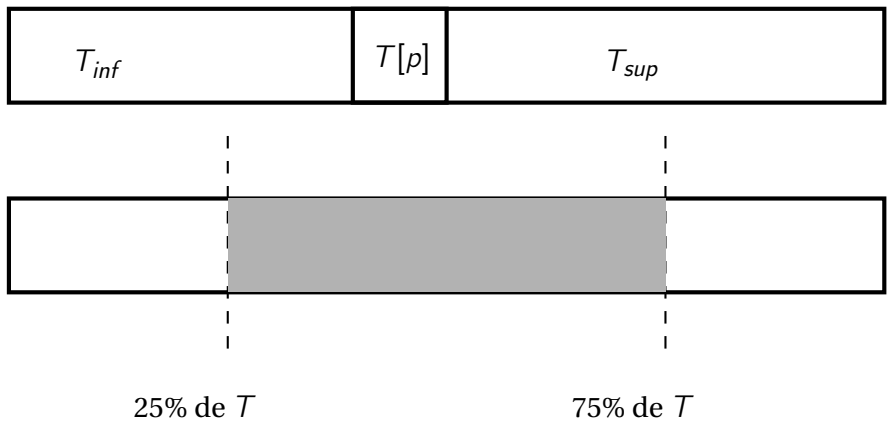
  Le 'Master Theorem' dit ($a = 1$, $b = 2$ et $d = 1$, $b^d = 2 > 1 = a$)
  $t(n) = O(n^d) = O(n)$ **Bingo !**

Idée d'algorithme, on chauffe...

- Mais c'est impossible de garantir $n_{\text{inf}} \sim n/2$ et $n_{\text{sup}} \sim n/2$...

Idée d'algorithme, on chauffe...

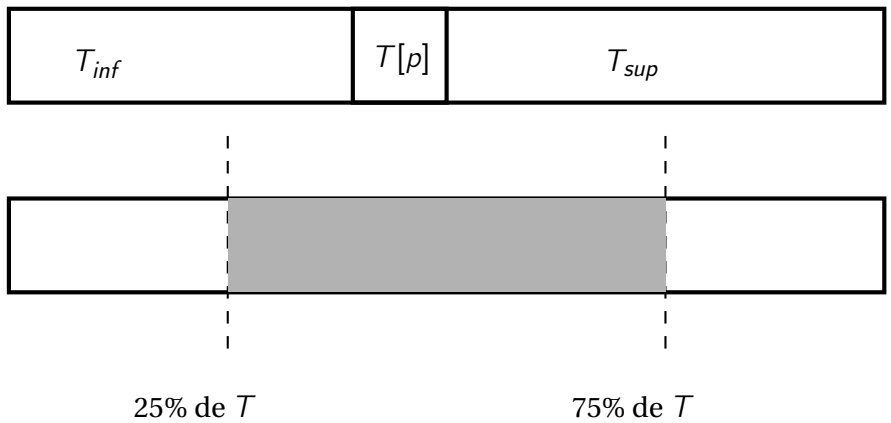
- Mais c'est impossible de garantir $n_{\text{inf}} \sim n/2$ et $n_{\text{sup}} \sim n/2$...
- Regardons ce qui se passe sur T trié :



Si $T[p]$ est choisi dans la zone hachurée, alors on est sûr que $n_{\text{inf}} \geq n/4$ et $n_{\text{sup}} \geq n/4$ soit $n_{\text{inf}} \leq \lceil 3n/4 \rceil$ et $n_{\text{sup}} \leq \lceil 3n/4 \rceil$

Idée d'algorithme, on chauffe...

- Mais c'est impossible de garantir $n_{\text{inf}} \sim n/2$ et $n_{\text{sup}} \sim n/2$...
- Regardons ce qui se passe sur T trié :



Si $T[p]$ est choisi dans la zone hachurée, alors on est sûr que $n_{\text{inf}} \geq n/4$ et $n_{\text{sup}} \geq n/4$ soit $n_{\text{inf}} \leq \lceil 3n/4 \rceil$ et $n_{\text{sup}} \leq \lceil 3n/4 \rceil$

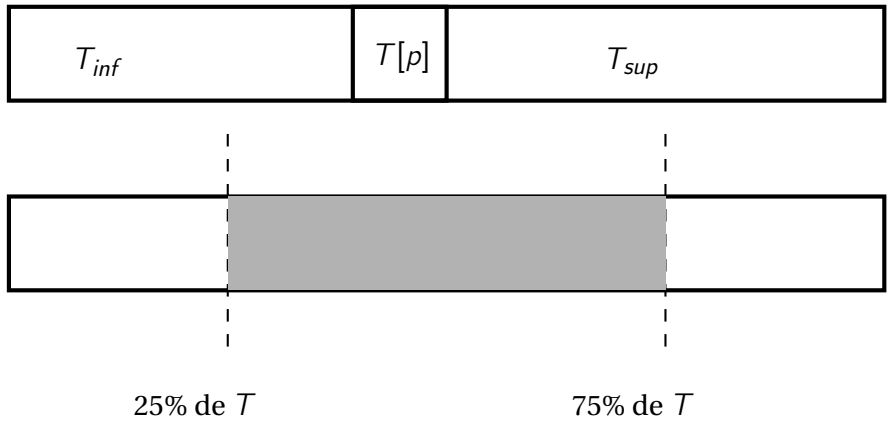
- Alors on aurait comme équation de récurrence :

$$t(n) \leq t(\lceil 3n/4 \rceil) + O(n)$$

Le 'Master Theorem' dit ($a = 1$, $b = 3/4$ et $d = 1$, $b^d = 3/4 > 1 = a$) $t(n) = O(n^d) = O(n)$. **Bingo pour de bon !**

Idée d'algorithme, on chauffe...

- Mais c'est impossible de garantir $n_{\text{inf}} \sim n/2$ et $n_{\text{sup}} \sim n/2$...
- Regardons ce qui se passe sur T trié :



Si $T[p]$ est choisi dans la zone hachurée, alors on est sûr que $n_{\text{inf}} \geq n/4$ et $n_{\text{sup}} \geq n/4$ soit $n_{\text{inf}} \leq \lceil 3n/4 \rceil$ et $n_{\text{sup}} \leq \lceil 3n/4 \rceil$

- Alors on aurait comme équation de récurrence :

$$t(n) \leq t(\lceil 3n/4 \rceil) + O(n)$$

Le 'Master Theorem' dit ($a = 1$, $b = 3/4$ et $d = 1$, $b^d = 3/4 > 1 = a$) $t(n) = O(n^d) = O(n)$. **Bingo pour de bon !**

- **Et on a 1 chance sur 2 de tirer $T[p]$ dans la zone hachurée !**

L'algorithme

Algorithme : RANG(T, k)

si $k = 1$ **alors retourner** $T[0]$;

$n_{\text{inf}} \leftarrow n$; // n est la taille de T

$n_{\text{sup}} \leftarrow n$;

tant que $n_{inf} > \lceil 3n/4 \rceil$ ou $n_{sup} > \lceil 3n/4 \rceil$ **faire**

  Choisir p au hasard entre 0 et $n-1$;

  Calculer $T[p]$, T_{inf} et T_{sup} puis n_{inf} et n_{sup} ;

si $k \leq n_{inf}$ **alors**

  retourner RANG(T_{inf}, k)

sinon si $n_{inf} < k \leq n_{inf} + n_{eq}$ **alors**

  retourner p

sinon

  retourner RANG($T_{sup}, k - n_{inf} - n_{eq}$)

- En moyenne, on ne fait que 2 tours de boucles 'Tant que'
  $\rightsquigarrow t(n) = O(n)$