Stirling number(simple)

jefflyy(naive!)

July 31, 2018

记号和约定

组合数：$\binom{n}{k}$
上升幂：$x^{\overline{n}} = x \cdots (x+n-1)$
下降幂：$x^{\underline{n}} = x \cdots (x-n+1) = n!\binom{x}{n}$

自然数幂求和：$S_k(n) = \sum_{i=0}^{n} i^k$

定义

第一类斯特林数$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$：将$n$个元素分成$k$个轮换的方案数

递推：$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$

定义

第一类斯特林数$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$：将$n$个元素分成$k$个轮换的方案数
递推：$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$

新元素要么加入之前的轮换中（把一个元素加入一个$k-$轮换中恰有k种方法），要么自成轮换

性质

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

性质

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

用归纳法证

$$\begin{aligned} x^{\overline{n}} &= (x+n-1)x^{\overline{n-1}} \\ &= \sum_k \left((n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \right) x^k \\ &= \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \end{aligned}$$

因为$x^{\underline{n}} = (-1)^n(-x)^{\overline{n}}$，所以$x^{\underline{n}} = \sum_k (-1)^{n+k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$

带符号第一类斯特林数$s(n,k) = (-1)^{n+k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$

求值

本质是计算$x^{\overline{n}}$的各项系数

可以直接分治FFT，时间复杂度$O\left(n\log_2^2 n\right)$

求值

本质是计算$x^{\overline{n}}$的各项系数
可以直接分治FFT，时间复杂度$O\left(n\log_2^2 n\right)$
有$O\left(n\log_2 n\right)$的做法
假设我们已经求出$x^{\overline{n}}=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$，现在要求$x^{\overline{2n}}=x^{\overline{n}}(x+n)^{\overline{n}}$

$$\begin{aligned}(x+n)^{\overline{n}}&=\sum_{i=0}^{n}a_i(x+n)^i\\&=\sum_{i=0}^{n}a_i\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}x^jn^{i-j}\\&=\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}\sum_{i=j}^{n}a_ii!\frac{n^{i-j}}{(i-j)!}\end{aligned}$$

时间复杂度$T(n)=T\left(\frac{n}{2}\right)+O(n\log_2 n)=O(n\log_2 n)$

求值

从生成函数的角度考虑

$$(1+z)^u=\sum_n\binom{u}{n}z^n=\sum_n\frac{z^n}{n!}\sum_k s(n,k)u^k=\sum_k u^k\sum_n s(n,k)\frac{z^n}{n!}$$

$$(1+z)^u=e^{u\ln(1+z)}=\sum_k u^k\frac{\ln^k(1+z)}{k!}$$

比较u^k系数，得$\frac{\ln^k(1+z)}{k!}$是$s(n,k)$的指数型生成函数

$\left[{n \atop k}\right]$的指数型生成函数是$\frac{\ln^k\left(\frac{1}{1-z}\right)}{k!}$

~~时间复杂度$O(n\log_2 n)$~~

CF960G Bandit Blues

有一个$1 \cdots N$的排列，从前往后贪心选取上升序列长度为A，从后往前长度为B，问有多少种排列满足此要求，对998244353取模
$N \le 10^5$

$N = 4, A = 2, B = 2 \to \text{ans} = 6$

Bandit Blues - solution

对于每种满足要求的排列，我们按以下方式将$1 \cdots N-1$分成$A+B-2$组
对于N的左边，每个被选取的数一直到（下一个被选取的数的前一位）分为一组，右边类似

Bandit Blues - solution

对于每种满足要求的排列，我们按以下方式将$1 \cdots N-1$分成$A+B-2$组

对于N的左边，每个被选取的数一直到（下一个被选取的数的前一位）分为一组，右边类似

一个有k个数的组有$(k-1)!$种排列方法

$\begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} = (k-1)!$

把$N-1$个元素划分为$A+B-2$个轮换，方案数为$\begin{bmatrix} N-1 \\ A+B-2 \end{bmatrix}$

Bandit Blues - solution

对于每种满足要求的排列，我们按以下方式将$1 \cdots N-1$分成$A+B-2$组

对于N的左边，每个被选取的数一直到（下一个被选取的数的前一位）分为一组，右边类似

一个有k个数的组有$(k-1)!$种排列方法

$\left[{k \atop 1}\right] = (k-1)!$

把$N-1$个元素划分为$A+B-2$个轮换，方案数为$\left[{N-1 \atop A+B-2}\right]$

以上的讨论并没有考虑N，分好组后还要决定把哪些组排在N的左边，方案数为$\binom{A+B-2}{A-1}$

答案是$\left[{N-1 \atop A+B-2}\right]\binom{A+B-2}{A-1}$

时间复杂度$O(n \log_2 n)$

应用

注意到$x^{\underline{n}} = \sum_{j=1}^{n} s(n,j)x^j$的$j = n$那一项为$x^n$，我们把它拆出来

$$x^n = n!\binom{x}{n} - \sum_{j=1}^{n-1} s(n,j)x^j$$

有什么用？~~做毒瘤题~~

——自然数幂求和

xsy1515 小学生数学题

求$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$对$p^k$取模的值

$p \le 10^5, np^k \le 10^{18}$，$p$是奇质数

$3, 6$在模3意义下没有逆元，但$\sum\limits_{i=1}^{6}\frac{1}{i} = \frac{49}{20}$，$\frac{49}{20} \equiv 2 \pmod{3}$

小学生数学题 - solution

设$f(n,k)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)\%p^k, g(n,k)=\left(\sum_{\substack{1\le i\le n\\ p\nmid i}}\frac{1}{i}\right)\%p^k$

$$f(n,k)=\left(g(n,k)+\frac{f\left(\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor, k+1\right)}{p}\right)\%p^k$$

小学生数学题 - solution

$$g(n,k) = \sum_{\substack{i=a+bp \\ i \leq n}} \frac{1}{i}$$

小学生数学题 - solution

$$g(n,k) = \sum_{\substack{i=a+bp \\ i\le n}} \frac{1}{i}$$

$$= \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=0}^{\left\lfloor \frac{n-a}{p} \right\rfloor} \frac{1}{a+bp}$$

小学生数学题 - solution

$$
\begin{aligned}
g(n,k) &= \sum_{\substack{i=a+bp \\ i\le n}} \frac{1}{i} \\
&= \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=0}^{\left\lfloor \frac{n-a}{p} \right\rfloor} \frac{1}{a+bp} \\
&= \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=0}^{\left\lfloor \frac{n-a}{p} \right\rfloor} \frac{1}{a} \sum_{i=0}^{k-1} \left(-\frac{bp}{a}\right)^i
\end{aligned}
$$

小学生数学题 - solution

$$
\begin{aligned}
g(n,k) &= \sum_{\substack{i=a+bp\\ i\le n}} \frac{1}{i} \\
&= \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=0}^{\left\lfloor \frac{n-a}{p} \right\rfloor} \frac{1}{a+bp} \\
&= \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=0}^{\left\lfloor \frac{n-a}{p} \right\rfloor} \frac{1}{a} \sum_{i=0}^{k-1} \left(-\frac{bp}{a}\right)^{i} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} (-p)^{i} \sum_{a=1}^{p-1} \frac{1}{a^{i+1}} \sum_{b=0}^{\left\lfloor \frac{n-a}{p} \right\rfloor} b^{i} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} (-p)^{i} \sum_{a=1}^{p-1} \frac{1}{a^{i+1}} S_i\left(\left\lfloor \frac{n-a}{p} \right\rfloor\right)
\end{aligned}
$$

小学生数学题 - solution

需要快速计算自然数幂求和

小学生数学题 - solution

需要快速计算自然数幂求和

引理：$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

对n归纳，$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

小学生数学题 - solution

需要快速计算自然数幂求和

引理：$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

对n归纳，$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

$$S_k(n) = \sum_{i=0}^{n} \left(k! \binom{i}{k} - \sum_{j=1}^{k-1} s(k,j) i^j \right)$$

小学生数学题 - solution

需要快速计算自然数幂求和

引理：$\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$

对n归纳，$\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$

$$S_k(n)=\sum_{i=0}^{n}\left(k!\binom{i}{k}-\sum_{j=1}^{k-1}s(k,j)i^j\right)$$

$$=k!\left(\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}\right)-\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}s(k,j)i^j$$

小学生数学题 - solution

需要快速计算自然数幂求和

引理：$\sum\limits_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

对n归纳，$\sum\limits_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

$$
\begin{aligned}
S_k(n) &= \sum_{i=0}^{n} \left(k! \binom{i}{k} - \sum_{j=1}^{k-1} s(k,j) i^j \right) \\
&= k! \left(\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} \right) - \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} s(k,j) i^j \\
&= k! \binom{n+1}{k+1} - \sum_{j=1}^{k-1} s(k,j) \sum_{i=0}^{n} i^j
\end{aligned}
$$

小学生数学题 - solution

需要快速计算自然数幂求和

引理： $\sum\limits_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$

对n归纳， $\sum\limits_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$

$$
\begin{aligned}
S_k(n) &= \sum_{i=0}^{n}\left(k!\binom{i}{k}-\sum_{j=1}^{k-1}s(k,j)i^j\right) \\
&= k!\left(\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}\right)-\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}s(k,j)i^j \\
&= k!\binom{n+1}{k+1}-\sum_{j=1}^{k-1}s(k,j)\sum_{i=0}^{n}i^j \\
&= \frac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1}-\sum_{j=1}^{k-1}s(k,j)S_j(n)
\end{aligned}
$$

小学生数学题 - solution

$O(k^2)$预处理自然数幂求和

原式$g(n,k)=\sum_{i=0}^{k-1}(-p)^i\sum_{a=1}^{p-1}\frac{1}{a^{i+1}}S_i\left(\left\lfloor\frac{n-a}{p}\right\rfloor\right)$

时间复杂度$O(kp\log_p n)$

~~讲完了~~

~~完结撒花~~
有第一类斯特林数就有第二类斯特林数

定义

第二类斯特林数$\left\{ {n \atop k} \right\}$：将$n$个元素分成$k$个非空子集的方案数

递推：$\left\{ {n \atop k} \right\} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$

定义

第二类斯特林数$\left\{ {n \atop k} \right\}$：将$n$个元素分成$k$个非空子集的方案数
递推：$\left\{ {n \atop k} \right\} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$

新元素要么加入之前的子集中（因为这些子集中有数，所以它们是不同的），要么自成一个子集

性质

$$x^n = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$$

性质

$$x^n = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$$

用归纳法证

$$\begin{aligned}
x^n &= x \sum_k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \\
&= \sum_k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} (x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}) \\
&= \sum_k \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} x^{\underline{k}} + \left\{ {n-1 \atop k} \right\} kx^{\underline{k}} \\
&= \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}
\end{aligned}$$

BZOJ2159 Crash的文明世界

对每个i求$\sum_{j=1}^{n} \text{dis}(i,j)^k$

$n \leq 50000, k \leq 150$

Crash的文明世界 - solution

$$\sum_{j=1}^{n} \text{dis}(i,j)^k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{x=0}^{k} \left\{ {k \atop x} \right\} \text{dis}(i,j)^{\underline{x}}$$

$$= \sum_{x=0}^{k} \left\{ {k \atop x} \right\} x! \sum_{j=1}^{n} \binom{\text{dis}(i,j)}{x}$$

转为求$\sum_{x=1}^{n} \binom{\text{dis}(i,x)}{j}$

两遍dfs求出$f1_{i,j} = \sum_{x \in \text{subtree}(i)} \binom{\text{dis}(i,x)}{j}$和$f2_{i,j} = \sum_{x \notin \text{subtree}(i)} \binom{\text{dis}(i,x)}{j}$

时间复杂度$O(nk)$

xsy1519 彩灯节

有n盏灯，有m条形如(a_i,b_i)的限制，意思是a_i和b_i两者必须有且仅有一盏灯是亮的

对一种满足要求的开灯方案x，设$f(x)$表示在这种开灯方案下亮灯的数量，求$\sum_x f(x)^k$

$n \le 200000, k \le 100$

彩灯节 - solution

限制构成一个图，不是二分图则无解

彩灯节 - solution

限制构成一个图，不是二分图则无解

同样转为求$\sum_x \binom{f(x)}{i}$

对每个联通块分开考虑，假设已经求出只考虑前i个连通块的$\sum_{x_i} \binom{f(x_i)}{j}$，第$i+1$个连通块的大小为$a+b$，现在要求$\sum_{x_{i+1}} \binom{f(x_{i+1})}{j} = \sum_{x_i} \binom{f(x_i)+a}{j} + \sum_{x_i} \binom{f(x_i)+b}{j}$

分别转移a次和b次即可

求值

考虑容斥

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

即枚举空集的个数

$O(m \log_2 n)$

BZOJ5093 图的价值

定义一个无向图的价值为$\sum_{i=1}^{n} \deg(i)^k$

求所有n个点的无向简单图（无自环无重边）的价值之和

$n \leq 10^9, k \leq 200000$

图的价值 - solution

考虑枚举一个点的度数i

贡献为$i^k \binom{n-1}{i} 2^{\binom{n-1}{2}}$

图的价值 - solution

考虑枚举一个点的度数i

贡献为$i^k\binom{n-1}{i}2^{\binom{n-1}{2}}$

答案为$n2^{\binom{n-1}{2}}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}i^k$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}i^k &= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\sum_{j=0}^{k}\left\{ {k \atop j} \right\} i^{\underline{j}} \\ &= \sum_{j=0}^{k}\left\{ {k \atop j} \right\}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(i-j)!(n-1-i)!}\end{aligned}$$

图的价值 - solution

考虑枚举一个点的度数i

贡献为$i^k\binom{n-1}{i}2^{\binom{n-1}{2}}$

答案为$n2^{\binom{n-1}{2}}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}i^k$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}i^k &= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\sum_{j=0}^{k}\left\{ k \atop j \right\} i^{\underline{j}} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\left\{ k \atop j \right\}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(i-j)!(n-1-i)!} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\left\{ k \atop j \right\}\frac{(n-1)!}{(n-1-j)!}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1-j}{i-j}
\end{aligned}
$$

图的价值 - solution

考虑枚举一个点的度数i

贡献为$i^k\binom{n-1}{i}2^{\binom{n-1}{2}}$

答案为$n2^{\binom{n-1}{2}}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}i^k$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}i^k &= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\sum_{j=0}^{k}\left\{{k \atop j}\right\}i^{\underline{j}} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\left\{{k \atop j}\right\}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(i-j)!(n-1-i)!} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\left\{{k \atop j}\right\}\frac{(n-1)!}{(n-1-j)!}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1-j}{i-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\left\{{k \atop j}\right\}(n-1)^{\underline{j}}2^{n-1-j}
\end{aligned}
$$

时间复杂度$O\left(k\log_2 n\right)$

xsy1262 循环排插

n个点的随机图，每个点入度出度均为1，设C为图中环的个数，求$E(C^k)n!$
$n \le 10^5, k \le 30$

循环排插 - solution

计数题

C是$1\cdots n$排列中轮换的个数，轮换个数为i的方案数为$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$

答案为$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} i^k$

循环排插 - solution

引理: $$\left[{n+1 \atop m+1} \right] = \sum_k \left[{n \atop k} \right] \binom{k}{m}$$

循环排插 - solution

引理： $\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{m}$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = (n+1)![z^{n+1}] \frac{\ln^{m+1}\left(\frac{1}{1-z}\right)}{(m+1)!} = \frac{n!}{m!}[z^n]\frac{1}{1-z}\ln^m\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

$$\begin{aligned} \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{m} &= n![z^n]\sum_k \frac{\ln^k\left(\frac{1}{1-z}\right)}{k!}\binom{k}{m} \\ &= \frac{n!}{m!}[z^n]\sum_k \frac{\ln^k\left(\frac{1}{1-z}\right)}{(k-m)!} \\ &= \frac{n!}{m!}[z^n]\ln^m\left(\frac{1}{1-z}\right)\frac{1}{1-z} \end{aligned}$$

循环排插 - solution

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} i^k &= \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \sum_{j=1}^{k} \begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix} i^{\underline{j}} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix} j! \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \binom{i}{j} \\
&= \sum_{j=1}^{k} j! \begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} n+1 \\ j+1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$O(nk)$

讲完了

Thanks for listening.