

FUNDAMENTOS DE CONTROL Y GESTIÓN DE INVENTARIOS

• CARLOS JULIO VIDAL HOLGUÍN •



Universidad
del Valle

Programa Editorial

En este texto se presentan los principales conceptos y técnicas cualitativas y cuantitativas para el control y la gestión de inventarios de demanda independiente. El texto se ha ideado como una herramienta básica para cursos de Logística o de Gestión de Inventarios, a nivel de pregrado o de postgrado. Se ha escrito con base en una extensa bibliografía actualizada, consistente en libros y artículos científicos sobre los diversos temas y con base en las propias experiencias del autor en el área de logística y de administración y optimización de cadenas de abastecimiento.

El tópico de inventarios es un tema muy sensible del área de logística y administración de la cadena de abastecimiento. Puede decirse que, después del transporte, los inventarios constituyen el principal componente de los costos totales de logística en la mayoría de las organizaciones. Por ello, que el lector aprenda a pronosticar la demanda y a gestionar y controlar los inventarios de demanda independiente de la mejor forma posible en la práctica, es el principal objetivo de este texto. Por este motivo, se hace especial énfasis en los modelos matemáticos y en las técnicas cuantitativas de pronósticos y control de inventarios y se privilegia el diseño y la aplicación de hojas electrónicas como una herramienta de optimización.

En el texto se tratan diversos temas, incluyendo sistemas de pronósticos de demanda independiente, control de inventarios de demanda determinística y probabilística, control conjunto de inventarios, control de inventarios de productos de moda y perecederos y control de inventarios en cadenas de abastecimiento. De cada uno de estos temas, se han diseñado ejemplos resueltos y ejercicios propuestos para el desarrollo por parte de los estudiantes, extractados en buena parte de las experiencias propias del autor. Además, todos los capítulos contienen un listado de lecturas adicionales comentadas para la profundización independiente de parte del lector.



Carlos Julio Vidal Holguín

Fundamentos de control y gestión de inventarios



Colección Ciencias de la Administración

Vidal Holguín, Carlos Julio

Fundamentos de control y gestión de inventarios / Carlos Julio Vidal Holguín. --
Santiago de Cali : Programa Editorial Universidad del Valle, 2010.
436 p. ; 24 cm. -- (Colección Ciencias Sociales)
1. Administración de inventarios 2. Control de inventarios 3. Gestión de existencias
I. Tít. II. Serie.
658.7 cd 21 ed.
A1247616

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

Universidad del Valle

Programa Editorial

Título: *Fundamentos de control y gestión de inventarios*

Autor: Carlos Julio Vidal Holguín

ISBN: 978-958-670-863-0

ISBN PDF: 978-958-765-488-2

DOI:

Colección: Ciencias de la Administración

Primera Edición Impresa Diciembre 2010

Edición Digital Julio 2017

Rector de la Universidad del Valle: Édgar Varela Barrios

Vicerrector de Investigaciones: Javier Medina Vásquez

Director del Programa Editorial: Francisco Ramírez Potes

© Universidad del Valle

© Carlos Julio Vidal Holguín

Diseño de carátula: Anna Echavarria. Elefante

Diagramación: Artes Gráficas del Valle S.A.S.

Universidad del Valle

Ciudad Universitaria, Meléndez

A.A. 025360

Cali, Colombia

Teléfonos: (57) (2) 321 2227 - 339 2470

E-mail: programa.editorial@correounivalle.edu.co

Este libro, salvo las excepciones previstas por la Ley, no puede ser reproducido por ningún medio sin previa autorización escrita por la Universidad del Valle.

El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión del autor y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad del Valle, ni genera responsabilidad frente a terceros.

El autor es responsable del respeto a los derechos de autor del material contenido en la publicación (fotografías, ilustraciones, tablas, etc.), razón por la cual la Universidad no puede asumir ninguna responsabilidad en caso de omisiones o errores.

Cali, Colombia - Julio de 2017



Universidad
del Valle

PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA

CONTENIDO

Prefacio	11
Capítulo 1	
Introducción	15
Motivación, naturaleza e importancia de los inventarios.....	15
La gran pregunta: ¿qué nivel de inventarios mantener y en dónde?.....	19
Ítems individuales o <i>Stock Keeping Units (SKU)</i>	24
Aspectos que influyen en el diseño de un sistema	30
de administración de inventarios.....	30
Lecturas adicionales	41
Capítulo 2	
Elementos para la toma de decisiones en sistemas de inventarios	43
La diversidad de ítems y el marco de referencia	43
para las decisiones de inventarios	43
Clasificación funcional de los inventarios	47
Factores de importancia para la toma de decisiones en inventarios	48
Lecturas adicionales	62
Capítulo 3	
Pronósticos de demanda	63
Introducción	63
Naturaleza de los sistemas de pronósticos	64
Análisis de datos históricos y patrones de demanda.....	82
Sistema de pronósticos de promedio móvil	87

Suavización exponencial simple	95
Suavización exponencial doble.....	107
Sistemas de pronósticos para demanda estacional.....	123
Sistemas de pronósticos para ítems con demanda errática, ítems nuevos y otros temas relacionados	136
Introducción al cálculo de inventarios de seguridad.....	150
Errores suavizados y señales de rastreo	157
Lecturas adicionales	171

Capítulo 4

Control de inventarios de demanda determinística	173
Introducción	173
Control de inventarios de demanda constante	174
Tamaño de lote económico con descuentos	184
por cantidades de compra o producción	184
Tamaño de lote óptimo de producción (<i>EPQ</i>).....	191
Control de inventarios de demanda conocida variable con el tiempo ..	195
Ejercicios adicionales y de repaso	216
Lecturas adicionales	221

Capítulo 5

Control de inventarios con demanda aleatoria	223
Introducción	223
Definiciones básicas.....	224
Formas de revisión del nivel de inventario	225
Tipos de sistemas de control	227
Criterios para la selección de inventarios	229
de seguridad para ítems individuales	229
El sistema de control continuo (<i>s, Q</i>).....	233
El sistema de control periódico (<i>R, S</i>)	254
Tiempo de reposición aleatorio.....	259
Inventario en tránsito y su efecto sobre la selección	262
del modo de transporte	262
Ejercicios adicionales y de repaso	271
Lecturas adicionales	278

Capítulo 6

Introducción al control conjunto de ítems	279
Generalidades.....	279
Curvas de intercambio	280
Reabastecimiento conjunto	290
Lecturas adicionales	308

Capítulo 7

Control de inventarios de ítems especiales	309
Control de inventarios de ítems clase A.....	309
Control de ítems clase C	328
Control de ítems perecederos y estacionales	334
Ejercicios adicionales y de repaso	356
Lecturas adicionales	359

Capítulo 8

Control de inventarios en cadenas de suministro	361
Introducción	361
Modelos de demanda constante	362
La complejidad de la demanda aleatoria.....	368
Un sistema de control tipo <i>push</i>	383
El impacto de la consolidación de inventarios.....	387
Otros sistemas de control de inventarios	391
Lecturas adicionales	400

Apéndice A	401
La distribución normal	401
La distribución normal unitaria y sus propiedades	401
Funciones en Excel™ para la distribución normal	402
Tablas de las principales funciones de la distribución normal unitaria	405

Apéndice B	413
Resumen sobre pronósticos de demanda	413

Bibliografía	423
--------------------	-----

PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA

PREFACIO

MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS

Este libro se ha ideado como una herramienta básica para cualquier curso de Gestión de Inventarios a nivel de pregrado o de postgrado, para cursos generales de Logística y para temas selectos en cursos de Investigación de Operaciones. El documento brinda una introducción a las principales técnicas cualitativas y cuantitativas para el eficiente y eficaz control y gestión de inventarios, principalmente, de demanda independiente. Se ha escrito con base en la más actualizada bibliografía relacionada con el tema, y en las experiencias propias del autor en este campo, a través de versiones secuenciales que se han ido mejorando gradualmente. Se han consultado los principales textos clásicos de Logística y de gestión de inventarios específicamente y muchos artículos científicos actualizados a la fecha. De algunos de ellos se han adaptado y extractado varios conceptos, en todos los casos, citando la fuente original.

El tópico de inventarios es un tema muy sensible del área de Logística y administración de la cadena de abastecimiento. Puede decirse que, después del transporte, los inventarios constituyen el principal componente de los costos totales de logística en la mayoría de las organizaciones. Por ello, que el lector aprenda a pronosticar la demanda y a gestionar y controlar los inventarios de demanda independiente de la mejor forma posible en la práctica, es el principal objetivo de este texto. Por este motivo, se hace especial énfasis en los modelos matemáticos y en las técnicas cuantitativas de pronósticos y control de inventarios, y se privilegia el diseño y la aplicación de hojas electrónicas como una herramienta de optimización.

Se destaca aquí la necesidad de considerar la variabilidad de la demanda y de los tiempos de reposición en cualquier sistema de control adecuado, aspecto que se ignora en la gran mayoría de las empresas de nuestro medio y, muchas veces, a nivel internacional. Igualmente, se resalta la importancia de los temas de administración de inventarios, del papel de las tecnologías de información en la cadena de abastecimiento y de la interrelación entre los componentes de la misma, como elementos primordiales para el manejo integral de los inventarios en cualquier organización.

NIVEL MATEMÁTICO Y USO DEL COMPUTADOR

Cualquier estudiante que haya tomado, al menos, un curso básico de probabilidad y estadística, de cálculo y de optimización, está en capacidad de asimilar todos los temas de este libro. El tratamiento matemático se limita al meramente necesario para la comprensión y sustento de cada tema; se prefiere destacar la utilización de cada concepto y sus posibilidades de aplicación real. Se requiere por otra parte un cierto grado de manejo de hojas electrónicas para el máximo aprovechamiento de todos los temas.

CONTENIDO

El libro presenta inicialmente, en los capítulos 1 y 2, una introducción general al tema de gestión de inventarios, resaltando la importancia que tienen éstos en cualquier tipo de organización y describiendo los principales elementos para la toma de decisiones en esta área. Posteriormente, en el capítulo 3, se presenta un amplio contenido sobre pronósticos de demanda, aspecto fundamental e ineludible para el correcto control de los inventarios. Se incluyen aquí detalles sobre métodos auto-adaptivos, pronósticos de demanda errática, pronósticos combinados y pronósticos de ítems nuevos, los cuales no son muy tratados en los textos tradicionales de Logística. En el apéndice B se presenta un resumen sobre este capítulo, el cual puede ser utilizado como una rápida referencia hacia todos los temas de pronósticos de demanda.

El texto continúa en el capítulo 4 con los diversos sistemas de control de inventarios de ítems individuales con demanda determinística, tanto constante como variable con el tiempo. Después, en el capítulo 5, se presentan los aspectos fundamentales sobre control de inventarios de ítems individuales con demanda aleatoria, el cual es básico para el desarrollo de los capítulos restantes. Se consideran aquí los principales tópicos relacionados con los sistemas de control continuo y periódico y los conceptos de nivel de servicio y cálculo de inventarios de seguridad. Es en este capítulo donde se explica la íntima relación que existe entre el sistema de pronósticos y el sistema de control de inventarios.

cos y el sistema de control, enmarcados dentro del sistema administrativo y de información de la empresa, aspecto que muchas veces no se reconoce en nuestro medio.

En el capítulo 6 se describen los principales métodos de control conjunto de ítems, incluyendo el tema de curvas de intercambio y de reabastecimiento conjunto. Aquí se ilustra el hecho de que se puede llegar a mejorar el nivel de servicio con menor inversión de capital en inventarios. El capítulo 7 se dedica al control de inventarios de ítems con características especiales, como son los ítems más importantes (clase A), los ítems de lento movimiento (clase C), incluyendo partes y repuestos, y los ítems de demanda estacional y perecederos. Se incluye aquí un tema de gran interés sobre contratos de aprovisionamiento, los cuales pueden traer grandes beneficios a todos los actores de la cadena de abastecimiento. Finalmente, el capítulo 8 ilustra los principales aspectos sobre control de inventarios en la cadena de abastecimiento, destacándose su gran complejidad, incluso si la demanda fuese constante. Se da aquí un especial tratamiento al problema de control de inventarios en cadenas de abastecimiento con una bodega y N puntos de venta, con base en casos reales en los que el autor ha participado. Al final del capítulo se incluye una introducción a la simulación de inventarios.

De cada uno de los temas, se ha diseñado un número adecuado de ejemplos resueltos y de ejercicios propuestos para el desarrollo por parte de los estudiantes, extractados, en buena parte, de las experiencias propias del autor en el área. Varios capítulos contienen, al final, ejercicios adicionales y de repaso, algunos con un grado de dificultad mayor que el promedio y otros en forma de caso de estudio. Todos los capítulos contienen un listado de lecturas adicionales comentadas, las cuales están disponibles para consulta y profundización por parte de los estudiantes. La bibliografía general, al final del documento, está comentada en gran parte y contiene algunas referencias adicionales de consulta.

USO DEL INGLÉS

Por dos motivos principales, a lo largo del libro se resaltan y definen los más importantes términos en inglés relacionados con cada tema. Primero, en nuestro medio se utilizan muchos de estos términos en el lenguaje tradicional de las personas que trabajamos en el área de Logística y de gestión y optimización de la cadena de abastecimiento. Por ejemplo, los términos *Lead Time* y *SKU* son de uso común, aunque nos refiramos a ellos principalmente como “tiempo de reposición” e “ítem”, respectivamente. Segundo, una gran parte de la bibliografía disponible en el tema de inventarios y la gran mayoría de los artículos científicos, están escritos en inglés

y, por lo tanto, es recomendable que el estudiante se familiarice con los principales términos logísticos en este idioma. Es así como, por ejemplo, el término *Economic Order Quantity (EOQ)*, es decir, el “tamaño económico de pedido”, es universalmente conocido por todas las personas que se desempeñan en esta área y por ello se prefirió en este caso conservarlo, en lugar de definir otro término en español que pudiera causar confusión.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece sinceramente a todas las personas que han contribuido, de una u otra forma, con esta publicación, especialmente a aquellos profesores y estudiantes a quienes les he dirigido su proyecto de grado de pregrado o posgrado en temas relacionados con inventarios. Igualmente, mis mayores agradecimientos para las empresas con las que hemos desarrollado proyectos en el área de gestión y control de inventarios por su invaluable aporte para las experiencias adquiridas por el autor en esta área, las cuales se han podido transmitir por medio de artículos científicos, mediante la labor docente en el aula de clase, a través de la dirección y asesoría de proyectos de grado y ahora, en su gran mayoría, se encuentran plasmadas en este libro.

A todos los lectores les agradezco cualquier sugerencia u observación de cualquier tipo y la identificación de posibles errores a lo largo de esta publicación para mejorarla y actualizarla en ediciones posteriores.

Carlos Julio Vidal Holguín, Ph.D.
Octubre de 2010

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

MOTIVACIÓN, NATURALEZA E IMPORTANCIA DE LOS INVENTARIOS

El control de inventarios es uno de los temas más complejos y apasionantes de la Logística y de la planeación y administración de la cadena de abastecimiento (*Supply Chain Management, SCM*). Es muy común escuchar a los administradores, gerentes y analistas de Logística afirmar que uno de sus principales problemas a los que se deben enfrentar es la administración de los inventarios. Uno de los problemas típicos, por ejemplo, es la existencia de excesos y de faltantes de inventarios: “Siempre tenemos demasiado de lo que no se vende o consume, y muchos agotados de los productos que más rotan”. Lo interesante de este problema es que ocurre prácticamente en cualquier empresa del sector industrial, comercial o de servicios, las cuales administran, de una u otra forma, materias primas, componentes, repuestos, insumos y/o productos terminados, productos y materias primas en proceso o en tránsito, manteniendo unidades en inventario en mayor o menor grado.

Las causas fundamentales que originan la necesidad del mantenimiento de inventarios, en cualquier empresa, son las fluctuaciones aleatorias de la demanda y de los tiempos de reposición (conocido también con el término en inglés *Lead Times*). Los inventarios también surgen del desfase que existe entre la demanda de los consumidores y la producción o suministro de dichos productos. Se puede, sin embargo, atenuar estas causas mediante una o más de las siguientes estrategias:

- La obtención de información precisa y en tiempo real sobre la demanda en el punto de consumo. A mayor información disponible

oportunamente, la planeación será mucho más fácil y eficaz. En realidad, podría decirse que el problema de planeación de demanda y control de inventarios es básicamente un *problema de información en la cadena de abastecimiento*.

- La consolidación de centros de distribución y bodegas para aumentar los volúmenes de demanda por instalación, ya que más altos volúmenes de demanda conducen, generalmente, a menores niveles de variabilidad de la misma.
- La estandarización de productos para evitar el mantenimiento de inventarios de una gran diversidad de ítems que sólo difieren en aspectos menores de forma, color, condición, etc. Las características finales del producto pueden ser implementadas en el momento de recibir las órdenes de los clientes. A esta práctica se le denomina como el *principio de posposición de forma* del producto y ha producido grandes resultados en muchas empresas.
- El mejoramiento de los sistemas de pronósticos de demanda, a través de técnicas estadísticas de reconocida eficacia, y mediante la combinación de diversas estrategias para pronosticar.
- El mejoramiento de alianzas y de sistemas de comunicación con proveedores y clientes para la reducción de los tiempos de reposición. En general, esto se conoce como procesos colaborativos en la cadena de abastecimiento.
- La emisión de órdenes conjuntas para diversos grupos de ítems con el objeto de balancear su inventario y la consolidación de despachos desde (hacia) diversas localidades, a través de técnicas como el *cross-docking*, el cual consiste en pasar directamente los productos de la sección de recepción de un centro de distribución hacia la zona de despacho en un tiempo muy limitado (una hora máximo, de acuerdo con varios autores), para así eliminar la necesidad de mantener el producto en inventario. Esto es más conocido como el *principio de posposición de tiempo*.
- La reducción de demoras y tiempos de reposición a lo largo de toda la cadena de abastecimiento, incluyendo los tiempos de tránsito en los sistemas de transporte.

Debido a que las causas que generan la necesidad de mantener inventarios no pueden ser eliminadas totalmente, la mejor alternativa es aplicar sistemas óptimos de gestión y control para responder a dichas causas. El problema, en la mayoría de las empresas, radica en que los inventarios de seguridad y sus correspondientes puntos de reorden (o inventarios máximos) se determinan exclusivamente con base en el *promedio* de la demanda, ignorando su *variabilidad y la variabilidad de los tiempos de*

reposición. Por ejemplo, para cierto ítem, se podría establecer el inventario de seguridad en “dos semanas de inventario”. Esto significa que, en *promedio*, el inventario de seguridad duraría aproximadamente dos semanas de demanda. En realidad, dicho inventario puede durar mucho menos, o mucho más de dos semanas, dependiendo de la variabilidad de la demanda del ítem considerado.

Es un error conceptual grave, por lo tanto, definir inventarios de seguridad y puntos de reorden (o inventarios máximos) de un ítem proporcionalmente a su demanda promedio en forma exclusiva. De aquí, precisamente, proviene el desbalanceo del inventario mencionado anteriormente. Cuando la variabilidad de la demanda del ítem del ejemplo del párrafo anterior es baja, dos semanas de inventario de seguridad puede ser un exceso en el que se está invirtiendo capital innecesariamente. Por el contrario, si la variabilidad de la demanda del ítem es alta, dos semanas de inventario de seguridad puede no ser suficiente y probablemente ocurrirán agotados frecuentes de dicho ítem.

Sólo en algunas ocasiones los inventarios de seguridad y los puntos de reorden calculados solamente con base en la demanda promedio, coinciden con el valor óptimo obtenido como resultado de un análisis estadístico formal. *La clave consiste en liberar capital invertido en inventarios de seguridad de ítems con baja variabilidad y distribuirlo en inventarios de seguridad de ítems con alta variabilidad*. El balance de esta operación es frecuentemente positivo y se puede mejorar significativamente el servicio al cliente sin invertir un peso adicional en inventarios, se puede mantener el servicio actual (si éste es adecuado) con mucho menos capital invertido, o se puede diseñar una combinación intermedia de ambos beneficios.

La solución a estos problemas frecuentes de desbalanceo de inventarios es la de diseñar e implementar estrategias adecuadas de control, a través de las siguientes alternativas:

- Utilización de sistemas adecuados de pronósticos de demanda, que permitan estimar con precisión el patrón, el promedio y la variabilidad de la demanda de cada ítem que se mantenga en inventario. De esta forma, los inventarios de seguridad se calculan proporcionalmente a la variabilidad de la demanda, de acuerdo con el nivel de servicio deseado, y no proporcionalmente al promedio de la misma. Debe minimizarse las causas frecuentes de errores excesivos en los pronósticos, tales como la selección del modelo matemático inadecuado, la utilización de datos poco confiables y de *datos de ventas* en lugar de *demandas*, los sesgos en los pronósticos, la inclusión de datos atípicos y la selección errada del período fundamental del pronóstico. Estos temas se tratarán con mayor detalle en el capítulo 3.

- Medición adecuada de los tiempos de reposición y su variabilidad. Desafortunadamente, se ha encontrado en la mayoría de los casos que esto no se hace y simplemente se trabaja con un valor estándar del tiempo de reposición asumido constante y seguro, especialmente de los proveedores, cuando la realidad dista mucho de esto.
- Implementación de la clasificación ABC para establecer prioridades de administración y diferenciar los sistemas de control de ítems en cada categoría. Por ejemplo, una reducción del 25% del inventario de los ítems clase A (alrededor del 20% de todos los ítems, catalogados como “los más importantes”), puede causar una reducción global del 20% del valor del inventario.
- Definición de los lugares más adecuados dentro de la cadena de abastecimiento donde se debe mantener inventarios y determinación de sus niveles correspondientes.
- Consideración de aspectos fundamentales como el ciclo de vida del producto, la naturaleza del proceso productivo bajo estudio, los aspectos administrativos del control de inventarios y los aspectos financieros relacionados con inventarios, tales como los plazos de pago y sus descuentos asociados.
- Generación de indicadores de eficiencia que consideren simultáneamente todas las variables de interés. Es muy común el error, por ejemplo, de sólo medir el desempeño de un sistema de control de inventarios a través de la rotación del mismo y querer mejorarla, incluso, a costa del nivel de servicio ofrecido al cliente.

Además de los puntos anteriores, debe tenerse en cuenta algunas sugerencias para reducir inventarios, sin compromiso de los niveles de servicio, tales como:

- Concentrarse en ítems clase A y los primeros ítems clase B (los de “mediana importancia”) a través de su revisión individual y continua, tamaños de orden más pequeños, pero más frecuentes, y la interacción con los proveedores y clientes para influir en su demanda y reducir sus tiempos de reposición.
- Evitar tamaños excesivos de órdenes, incluso para ítems clase C (los “menos importantes”). En este sentido, un ítem C puede estar desapareciendo del mercado y un tamaño de lote grande podría ocasionar su rápida obsolescencia, generar excesos y problemas de almacenamiento y de saturación de los sistemas de información.
- Depurar periódicamente el inventario, eliminando excesos e ítems obsoletos y de muy bajo movimiento que carezcan de importancia para la organización y para los consumidores.

- Controlar las compras de grandes volúmenes sin los beneficios financieros adecuados.
- Controlar y rastrear continuamente: el nivel de servicio ofrecido a los consumidores a través de indicadores adecuados; el valor, rotación, cobertura y grado de obsolescencia del inventario; el porcentaje de precisión del inventario físico y la influencia del nivel de inventarios sobre indicadores financieros como el retorno sobre la inversión.
- Racionalizar la compra inicial de ítems nuevos y hacerles un seguimiento exhaustivo.

Todos los anteriores conceptos serán analizados con detalle a lo largo de los próximos capítulos, “con énfasis en los sistemas de control de demanda independiente”. Los sistemas de control de demanda dependiente se tratan principalmente en textos de control y administración de las operaciones en sistemas de producción, mediante técnicas como *MRP* (*Material Requirements Planning*).

LA GRAN PREGUNTA: ¿QUÉ NIVEL DE INVENTARIOS MANTENER Y EN DÓNDE?

Algunos factores por los cuales los inventarios tienen gran importancia para el funcionamiento de las organizaciones, desde el punto de vista de la gestión administrativa y de la competitividad de la empresa, son los siguientes:

- Los inventarios representan el segundo sistema más importante, después del transporte, para muchas empresas.
- Una gran proporción de los activos corrientes de las empresas está representada en inventarios.
- El mantenimiento y manejo de los inventarios es costoso para las organizaciones; puede representar, junto con el sistema de almacenamiento, entre un 15 y un 30% de los costos totales de logística. Sin embargo, el mantenimiento de los inventarios puede representar ahorros por economías de escala en otros costos, como transporte, compra y producción, incentivando la reducción de los precios de los productos.
- El manejo de los inventarios tiene un impacto significativo en la gestión administrativa, ya que afecta directamente a los estados financieros de la empresa, como son el balance general y el estado de pérdidas y ganancias. Igualmente, algunos indicadores de eficiencia importantes pueden verse significativamente afectados, tales como la relación entre activos corrientes y pasivos corrientes, y el *Retorno sobre la Inversión (ROI)*. Narasimhan *et al.* (1996, p. 94) presentan, por ejemplo, la siguiente expresión para el cálculo del *ROI*:

$$ROI = \frac{\text{Ventas} - \text{Costo de los productos vendidos}}{\text{Existencias físicas} + \text{Cuentas por cobrar} + \text{Inventario}} \quad (1.1)$$

En la Ec. (1.1) se observa la influencia del nivel de inventario sobre este indicador de eficiencia, el cual es muy comúnmente utilizado por la administración. Es importante notar, sin embargo, que actualmente hay mucho debate sobre el papel del mejoramiento del inventario como un indicador del desempeño financiero global de la empresa. Cannon (2008) presenta un estudio para analizar esta correlación; el autor utiliza cuatro indicadores del desempeño global de la empresa: el *ROI*, el retorno sobre los activos (*ROA, Return on Assets*) y otros dos indicadores más complejos basados en mercadeo, los cuales, de acuerdo con el autor, miden de forma más precisa el desempeño global de la empresa que los indicadores meramente contables como el *ROI* y el *ROA*. El principal resultado de este estudio indicó que, en general, no existe relación entre el mejoramiento del inventario y el desempeño global de la empresa. En otras palabras, no siempre el efecto de la reducción de inventarios y del mejoramiento de la rotación del inventario [Ec. (1.2)] conlleva automáticamente al mejoramiento del desempeño global de la organización.

Existen diversas razones por las cuales es ventajoso que una empresa mantenga inventarios de materias primas y/o productos terminados. De acuerdo con Ballou (2004, pp. 328-330), las principales ventajas de mantener inventarios son las siguientes:

- *Mejoramiento del tiempo de respuesta y servicio al cliente*, en el sentido de satisfacer sus órdenes directamente del inventario disponible en forma inmediata, sin producir despachos pendientes u órdenes perdidas. El nivel de respuesta es también un factor fundamental en cualquier cadena de abastecimiento, muy apreciado por los clientes actualmente, y está directamente relacionado con los niveles de inventario que se mantengan en lugares clave de la cadena. Este factor puede, incluso, generar aumento de ventas.
- *Reducción indirecta de costos de producción, de compra y/o de transporte*, a través de la producción o compra de lotes más grandes y más homogéneos, con los cuales se logran economías de escala en la cadena de suministro. Adicionalmente, puede pensarse en realizar compras de lotes mayores a bajo costo actual, en anticipación de un alza de precios en el futuro. Desde este punto de vista, el costo de llevar el inventario es dominado por los ahorros potenciales produ-

cidos por las economías de escala, los bajos precios de compra y las posibles condiciones de pago y financiación de los inventarios.

- *Reducción de costos de operación*, al reducir el impacto de la variabilidad de los tiempos de producción y transporte.
- *Implementación de mecanismos para responder a factores externos o internos inesperados*, como derrumbes en carreteras, huelgas, demoras excesivas en el envío de materiales, desastres naturales, etc.

De manera análoga, Ballou (2004, p. 330) plantea también algunas desventajas de mantener inventarios:

- *Absorción excesiva de capital sin adicionar un valor significativo al producto*. Desde este punto de vista, algunos analistas consideran los inventarios como un desgaste innecesario. En nuestro medio, sin embargo, en la mayoría de las veces se hace necesario mantener inventario para responder a todas las variabilidades que se presentan frecuentemente en la cadena de abastecimiento. La clave es, por lo tanto, definir los niveles adecuados de inventario de tal forma que no se comprometa demasiado capital y, simultáneamente, se le responda al cliente con el nivel de servicio ofrecido.
- *Enmascaramiento de problemas de calidad*, los cuales pueden permanecer ocultos y tardar mucho tiempo en ser corregidos. Esto puede ocurrir cuando se corren lotes muy grandes de producción y no se detectan problemas de calidad del producto a tiempo.
- *Dificultad para el diseño integrado de las cadenas de abastecimiento*, al establecer “islas” con intereses propios que ocasionan la suboptimización del sistema como un todo. Por ejemplo, en las cadenas que tienen muchos puntos de venta, normalmente hay una pugna entre ellos por mantener inventarios para responder a sus metas de ventas y frecuentemente niegan la transferencia de productos a otro punto de venta que puede necesitarlos. De esta forma, no se tiene en cuenta el funcionamiento de la cadena en forma integral.

¿Qué nivel de inventarios es entonces conveniente mantener? La respuesta depende de muchos aspectos, principalmente de la naturaleza de la organización y de la evaluación que la administración haga de las ventajas y desventajas de tenerlos. El punto está, obviamente, en la cantidad de inventario que debe mantenerse y en su correcta administración, con el objeto de mejorar la competitividad de la organización sin sacrificar recursos innecesariamente.

Una idea muy importante: debe recordarse siempre que la disminución arbitraria de los inventarios, para aumentar su rotación, puede ser un gran

error que puede degenerar en un pésimo servicio al cliente y, eventualmente, en la quiebra de la organización. Por ello, la reducción de inventarios debe analizarse cuidadosamente dentro del marco del sistema bajo estudio.

Históricamente, se ha dado un proceso en el que ha cambiado radicalmente el pensamiento humano y el rumbo de las organizaciones con respecto a la tenencia de inventarios:

- Hace alrededor de 300 años, el tener inventarios era una medida de riqueza.
- A comienzos del siglo pasado se enfatizó en la liquidez de los inventarios y la rapidez de la *rotación del inventario*, indicador de eficiencia dado por:

$$\text{Rotación del inventario} = \frac{\text{Ventas al costo periódicas (\$/ período)}}{\text{Inventario promedio durante el período (\$)}} \quad (1.2)$$

Es muy importante notar la inconveniencia de utilizar este indicador en forma aislada, ignorando el nivel de servicio a los clientes y los indicadores financieros de los inventarios. Por ejemplo, podría pensarse en bajar los niveles de inventario al mínimo para tratar de aumentar su rotación (en número de veces/periodo) y posiblemente pudiera lograrse. Pero, con altísima probabilidad, los niveles de servicio se verían tan afectados que habría que reconsiderar dicha decisión. Algunos administradores, en su afán de aumentar la rotación de inventarios, han tratado de reducirlos a cero, con resultados desastrosos.

Ejemplo 1.1. (Rotación del inventario)

Una empresa comercial presenta ventas al costo en un mes determinado por \$15 millones. El primer día del mes, el valor del inventario era de \$10 millones y, el último día contable de dicho mes, el inventario fue de \$4 millones. Calcular la rotación del inventario en número de veces por mes y también en días, asumiendo que 1 mes = 30 días.

De acuerdo con la Ec. (1.2) se debe primero calcular el inventario promedio durante el mes en cuestión. La forma más común de calcular el inventario promedio es la siguiente:

$$\text{Inventario promedio} = \frac{\text{Inventario inicial (al costo)} + \text{Inventario final (al costo)}}{2} \quad (1.3)$$

Posteriormente se estudiará una forma más general y precisa de calcular el inventario promedio. El cálculo aquí viene dado por:

$$\text{Inventario promedio} = (\$10 \text{ millones} + \$4 \text{ millones})/2 = \$7 \text{ millones}$$

Por lo tanto, la rotación del inventario de acuerdo con la Ec. (1.2) sería:

$$\text{Rotación} = (\$15 \text{ millones/mes})/(\$7 \text{ millones}) = 2,14 \text{ veces por mes.}$$

Esta cifra se interpreta como las veces que rota el inventario durante el período en cuestión. En otras palabras, la estantería donde están los productos, en promedio, es renovada 2,14 veces por mes.

El cálculo de la rotación en unidades de tiempo (especialmente dada en días) también es una práctica común. Se le conoce también como *días de inventario a la mano*. Para calcularla se toma el inverso de la Ec. (1.2) y se multiplica por el número de días que hay en el período de referencia. En este caso se tendría:

$$\begin{aligned} \text{Días de inventario a la mano (en promedio)} &= \\ [(\$7 \text{ millones})/(\$15 \text{ millones/mes})] \times [30 \text{ días/mes}] &= 14 \text{ días.} \end{aligned}$$

Es decir, el inventario se renueva en promedio cada 14 días o, también, que cada ciclo de renovación del inventario tarda 14 días en promedio.

- Actualmente, los inventarios son vistos como un riesgo potencial mayor. Han aparecido aspectos, como el riesgo de obsolescencia tecnológica, que hacen a los inventarios cada vez de más cuidado, al presentarse productos con ciclo de vida mucho más cortos, como el caso de teléfonos móviles o de computadores en general. Lo que se trata de hacer, sin embargo, es un equilibrio entre tener y no tener inventarios. El arte del manejo adecuado de los inventarios radica en descubrir su nivel óptimo de acuerdo con cada caso en particular, dependiente del sector productivo, las características propias de la empresa y su localización, su estrategia competitiva y el mercado, entre otros.
- En la globalización actual de la economía, la administración de inventarios, la planeación de la producción, y la estrategia corporativa, están íntimamente ligadas. Esto se conoce como el ajuste estratégico que debe lograrse entre las capacidades competitivas de la empresa y su correspondiente cadena de abastecimiento. Por ejemplo, la diferencia entre la variedad y los niveles de inventario entre una rapitienda y un supermercado grande radica en que, en la primera, los clientes buscan un servicio muy rápido, generalmente ocasional y están dispuestos a pagar un poco más por los productos. Por el

contrario, en un supermercado grande, los clientes disponen de más tiempo, buscan mayor variedad de productos y se detienen a mirar la variedad y sus precios más cuidadosamente. Ambos negocios son similares, pero sus estrategias competitivas están satisfaciendo diferentes necesidades de sus clientes y, por lo tanto, sus políticas de inventarios y precios serán diferentes.

Otra pregunta muy importante es “¿dónde mantener los inventarios?”. Una primera aproximación para dar respuesta a esta pregunta es que hay que distinguir entre los diferentes tipos de inventarios, a saber:

- Materias primas y componentes.
- Productos terminados.
- Inventario en proceso (*WIP = Work in Process*).
- Inventario en tránsito o en el sistema de distribución.

Dependiendo del sector productivo, la concentración de estos tipos de inventarios puede variar significativamente. Por ejemplo, un fabricante de computadores bajo pedido por Internet puede tener un gran porcentaje de sus inventarios como materias primas y componentes, cierto porcentaje como inventario en proceso y en tránsito, y muy bajo inventario de productos terminados. Por el contrario, un fabricante de productos de consumo masivo, en general, tiene la mayoría de sus inventarios como productos terminados en el sistema de distribución.

El control de estos inventarios depende de su tipo y de la concentración en los diversos lugares. Surge aquí también la pregunta acerca del lugar donde debe mantenerse un tipo de inventario específico, como el de productos terminados, dentro de la cadena de suministro. Por ejemplo, una pregunta muy difícil de responder para un comerciante de productos de consumo masivo que posea un centro de distribución y varios puntos de venta es la de cuánto inventario de cada ítem mantener en cada lugar de la cadena. En el capítulo 8 se abordarán estos interrogantes.

ÍTEMES INDIVIDUALES O *STOCK KEEPING UNITS (SKU)*

Las decisiones sobre inventarios se basan, en última instancia, en ítems individuales. El término en inglés *Stock Keeping Unit (SKU)*, para designar una unidad en inventario, se utiliza ampliamente, inclusive en nuestro medio. Un *SKU* es un ítem individual que se puede diferenciar claramente de otro, o sea que tiene diferentes códigos en el sistema de información asociado o, incluso, que aún teniendo el mismo código, se localiza en regiones geográficas diferentes. En algunas ocasiones pueden existir *SKU*

con diferencias en detalles muy pequeños, por ejemplo, en su color. En otras ocasiones, dependiendo de los objetivos que se persigan, la clasificación puede ser más agregada y un *SKU* puede representar familias de artículos semejantes, aunque de diferente color.

Existe una propiedad estadística universalmente conocida como el Principio de Pareto, la cual, para el caso de inventarios que se estudia, se expresa así: “alrededor del 20% de los *SKU* corresponden aproximadamente al 80% de las ventas anuales de la empresa”. Esta característica es muy importante, ya que el nivel de inventario de todos los ítems no debe ser controlado de la misma forma. Esto corresponde a la conocida “clasificación ABC”, la cual se estudia a continuación.

Clasificación ABC

Una forma de realizar la clasificación ABC es con base en el producto $D_i v_i$, el cual mide el valor anual de las ventas (o la demanda) de cada ítem i , donde:

$$\begin{aligned} D_i &= \text{Demanda anual del ítem } i \text{ [unidades/año].} \\ v_i &= \text{Valor unitario del ítem } i \text{ [$/unidad].} \end{aligned}$$

Para definir cuáles ítems deben formar parte de cada clase (A, B o C), se escoge un porcentaje de mayor a menor, de acuerdo con el orden secuencial dado por la mayor utilización de los ítems. Usualmente, los ítems clase A constituyen del 10 al 20% de los primeros ítems dentro de la clasificación, contando con el 60% al 80% del valor total de las ventas anuales; los ítems clase B constituyen entre un 20 y un 40% del total de ítems, contando entre el 20% y el 30% restante del valor anual; y los ítems clase C, usualmente los más numerosos, constituyen el resto, contando con una pequeña parte del total de la inversión en inventario, la cual usualmente no pasa del 10% del total de ventas de la empresa. Algunos autores difieren en la proporción de ítems clase B y C, por ejemplo, Wild (1997, p. 31) recomienda una distribución alrededor de los siguientes valores:

Ítems clase A = 10% del total de ítems, con alrededor del 65% del total de ventas.

Ítems clase B = 20% del total de ítems, con alrededor del 25% del total de ventas.

Ítems clase C = 70% del total de ítems, con alrededor del 10% del total de ventas.

La decisión final sobre estos porcentajes depende de cada caso en particular y de las capacidades de computación que se tengan para el control

de cada tipo de ítem. Por ejemplo, en el caso de productos de consumo masivo es común tener los límites para definir la clasificación de ítems clase A, B y C en el 70%, 90% y 100% del total anual de ventas, respectivamente. La figura 1.1 muestra este comportamiento para un caso real de una organización comercial de medicamentos que maneja alrededor de 8.000 ítems.

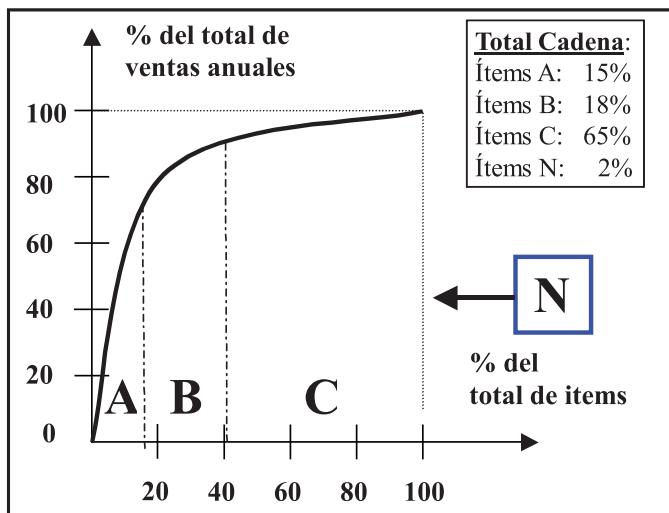


Figura 1.1. Comportamiento del porcentaje de ventas anuales con respecto del porcentaje de ítem: la clasificación ABC

Pueden existir, además, otras clasificaciones que incluyen, por ejemplo, ítems “super-importantes” tipo AA (o AAA), ítems nuevos tipo N (figura 1.1), y, en algunas ocasiones, cuando el número de ítems clase C es muy grande, es conveniente definir un tipo D, para aquellos ítems de muy bajo volumen anual e ítems que están desapareciendo, o que ya no deberían estar activos en el sistema de información de la empresa.

Ejemplo 1.2. (Clasificación ABC)

La tabla 1.1a muestra un conjunto de 20 ítems, con sus correspondientes consumo anual, valor unitario, volumen anual en unidades monetarias (el producto entre la demanda anual y el valor unitario) y el porcentaje del volumen anual en \$ de cada ítem. Con base en esta información, se requiere determinar una posible clasificación ABC para estos ítems.

En la tabla 1.1b se presenta la misma información de la tabla 1.1a, pero ordenada en forma descendente por volumen anual en pesos (o en porcentaje). Con base en esta tabla se determina la clasificación ABC de estos 20 ítems. En este caso se selecciona la siguiente clasificación, dentro de otras posibles:

Tabla 1.1a. Información básica para determinar la clasificación ABC del ejemplo 1.2

Ítem Código	Demanda (U/año)	Valor (\$/U)	Volumen (\$/año)	Volumen anual (%)
D047	597	855	510.435	1,72%
D123	3.960	2.640	10.454.400	35,32%
D709	33	2.350	77.550	0,26%
D768	546	1.115	608.790	2,06%
E010	47	135	6.345	0,02%
E150	116	855	99.180	0,34%
E456	57	1.650	94.050	0,32%
F440	2.508	960	2.407.680	8,13%
F589	19	3.300	62.700	0,21%
F654	34	5.550	188.700	0,64%
F876	91	3.100	282.100	0,95%
F897	5.322	225	1.197.450	4,05%
G006	230	1.540	354.200	1,20%
G021	3.547	95	336.965	1,14%
G567	1.064	2.425	2.580.200	8,72%
G590	8.217	125	1.027.125	3,47%
G777	65	1.235	80.275	0,27%
H108	910	1.235	1.123.850	3,80%
H335	5	1.605.000	8.025.000	27,11%
H643	60	1.400	84.000	0,28%
Total			29.600.995	100,0%

Tabla 1.1b. Ejemplo de clasificación ABC de acuerdo con el valor anual de los 20 ítems (ejemplo 1.2)

Ítem Código	Ítem No.	Demanda (U/año)	Valor (\$/U)	Volumen (\$/año)	Volumen anual (%)	Vol. Acumulado (%)	Clasificación (A, B, C)
D123	1	3.960	2.640	10.454.400	35,32%	35,32%	A
H335	2	5	1.605.000	8.025.000	27,11%	62,43%	
G567	3	1.064	2.425	2.580.200	8,72%	71,14%	
F440	4	2.508	960	2.407.680	8,13%	79,28%	
F897	5	5.322	225	1.197.450	4,05%	83,32%	
H108	6	910	1.235	1.123.850	3,80%	87,12%	B
G590	7	8.217	125	1.027.125	3,47%	90,59%	
D768	8	546	1.115	608.790	2,06%	92,65%	
D047	9	597	855	510.435	1,72%	94,37%	
G006	10	230	1.540	354.200	1,20%	95,57%	
G021	11	3.547	95	336.965	1,14%	96,71%	
F876	12	91	3.100	282.100	0,95%	97,66%	
F654	13	34	5.550	188.700	0,64%	98,30%	
E150	14	116	855	99.180	0,34%	98,63%	
E456	15	57	1.650	94.050	0,32%	98,95%	
H643	16	60	1.400	84.000	0,28%	99,23%	
G777	17	65	1.235	80.275	0,27%	99,50%	
D709	18	33	2.350	77.550	0,26%	99,77%	
F589	19	19	3.300	62.700	0,21%	99,98%	
E010	20	47	135	6.345	0,02%	100,00%	C
Total				29.600.995	100,0%		

El 10% de los ítems (dos ítems) son clase A, representando el 62,43% del volumen anual; el 20% de los ítems (cuatro ítems) son clase B, representando el 24,69% del volumen anual y el 70% restante (14 ítems) son clase C, representando sólo el 12,88% restante del volumen anual. Nótese que los ítems A y B cuentan con casi el 90% del volumen total anual y, por ello, su control podría ser más importante que el control de los ítems clase C.

Obsérvese, igualmente, que un ítem clase A (el D123) tiene un volumen considerable en unidades y un valor unitario de mediana magnitud, mientras que el otro ítem clase A (el H335) presenta un volumen muy bajo en unidades, pero un valor unitario muy alto. El ítem D123 podría corresponder, por ejemplo, a cierto abarrote en un gran almacén, mientras que el ítem H335 podría ser un cierto electrodoméstico en el mismo almacén. Este doble origen que pueden presentar los ítems clase A hace que sus métodos de control puedan ser diferentes, a pesar de ser de la misma clase. Estos conceptos serán ampliados en el capítulo 7.

Aspectos adicionales sobre la clasificación ABC

Una pregunta que siempre surge de la exposición de este tema es la siguiente: ¿por qué no se hace la clasificación ABC con base en “la utilidad neta” o margen de cada ítem, en lugar del volumen de demanda anual? La respuesta es que no hay ningún problema en hacerlo de esta forma, encontrando la utilidad neta anual que cada ítem produce. Sin embargo, es lógico pensar que si una organización basa el 80% de sus negocios en los ítems clase A, sean éstos precisamente los que produzcan la mayor utilidad neta (diferenciar de utilidad unitaria por ítem) y, por lo tanto, la dos clasificaciones deberían ser muy semejantes, tal como se ha podido comprobar empíricamente con algunos estudiantes en algunos casos reales estudiados. Gutiérrez (2006), por ejemplo, realiza la clasificación ABC en una empresa del sector de alimentos y encuentra que dicha clasificación no difiere significativamente si se considera el volumen anual de ventas o el margen anual de los productos.

Por otra parte, la definición de un ítem como clase A no depende necesariamente de su volumen anual de ventas en \$, sino que puede determinarse a partir de otros aspectos por los cuales sea conveniente incluirlo en dicha categoría. Por ejemplo, existen ítems complementarios de bajo valor que son muy importantes en el momento de servir al cliente. Como ilustración, un cliente que llega a una droguería a comprar un medicamento inyectable muy costoso (clase A) estaría muy descontento si en dicha droguería no encuentra la jeringa para su aplicación (ítem clase C por valor). Las jeringas, por lo tanto, deberían también clasificarse como ítems clase A, ya que son un complemento fundamental de otros ítems de gran valor.

Igual cosa ocurre con los medicamentos que son consumidos por gran cantidad de personas, como es el caso de los suministrados por las Entidades Proveedoras de Salud (EPS).

Otro aspecto clave es que se debe ser cuidadoso con los ítems clase C, ya que es probable que ellos, como son muchos, tengan diferentes connexiones dentro de la organización. Por ejemplo, los últimos ítems clase C generalmente tienen un consumo muy bajo y es probable que deban ser removidos del sistema, después de realizar un análisis que suele ser individual. Igualmente, se puede diferenciar entre ítems clase C con demanda estable, pero de muy bajo valor, para los cuales puede funcionar un sistema sencillo de pronósticos como el promedio móvil simple (capítulo 3), y los ítems clase C de muy bajo consumo, con demanda altamente errática para los cuales es posible considerar su consolidación en puntos clave de la cadena. Huiskonen *et al.* (2005) presentan un artículo muy interesante donde definen dos tipos de ítems clase C: los que son vendidos a los clientes más importantes, y aquellos que son vendidos junto con ítems clase A para completar una orden. De esta forma, los autores realizan una categorización cruzando los anteriores criterios de servicio con los criterios normales como el volumen de la demanda y así, a través de un ejemplo, clasifican los ítems clase C en tres grupos: 1) ítems de servicio con disponibilidad local; 2) ítems de respuesta baja con políticas de consolidación, y 3) ítems “no importantes”, los cuales son los candidatos para ser eliminados del inventario y del sistema, convirtiéndose, esta última, en una herramienta de depuración del inventario.

Debe considerarse también el hecho de que un mismo ítem puede tener clasificaciones diferentes de acuerdo con la localización dentro de la cadena de suministro. Por ejemplo, un producto importado costoso puede ser clase A en un supermercado ubicado en una zona de estrato 6, mientras que el mismo producto podría ser B o C en una zona de estrato 4. Este aspecto constituye una complejidad más del análisis ABC.

En el caso de materias primas, la clasificación ABC debe analizarse a fondo, pues, aunque el consumo anual en \$ del material es importante, pueden existir otros factores más importantes para definir la clasificación del ítem, tales como la rotación del ítem y su criticidad, o sea, la dificultad de consecución del ítem, en lo relacionado con el tiempo de reposición y su variabilidad, las características del proceso de producción donde se utiliza el ítem y la facilidad de reacción ante la escasez o la volatilidad de la demanda del ítem. Por ejemplo, en la industria cervecera, el lúpulo es una materia prima importada primordial no conseguible localmente con un largo tiempo de reposición, la cual necesariamente debe clasificarse como A. Por el contrario, un cartón de empaque de cervezas podría no ser una materia prima clase A si se consiguen localmente varios proveedores que

suministren el empaque con cortos tiempos de reposición y con la calidad adecuada.

Existen en la literatura otros conceptos para realizar la clasificación ABC de ítems. Chen *et al.* (2008) introducen una metodología para realizar la clasificación ABC teniendo en cuenta otros factores, como el tiempo de reposición y la criticidad del ítem. Los autores desarrollan un modelo de programación cuadrática para calcular los pesos respectivos. Chu *et al.* (2008) presentan una combinación del análisis ABC tradicional con lógica difusa, denominada “Análisis ABC - Clasificación difusa”, la cual, de acuerdo con los autores, muestra un alto grado de precisión. Ng (2007) propone un modelo simple para la clasificación de ítems multi-criterio, el cual convierte todos los criterios de clasificación en un indicador escalar. Ramanatham (2006) diseña un sistema de clasificación simple, utilizando un modelo sencillo de programación lineal, y Zhou y Fan (2007) complementan su modelo corrigiendo una posible debilidad del modelo original.

ASPECTOS QUE INFLUYEN EN EL DISEÑO DE UN SISTEMA DE ADMINISTRACIÓN DE INVENTARIOS

De acuerdo con Silver *et al.* (1998, pp. 36-44), los aspectos más importantes que influyen en el diseño de un sistema de administración de inventarios son el ciclo de vida de los productos, la naturaleza del proceso productivo y la ubicación del producto dentro de la matriz producto-proceso. Otro aspecto fundamental, al cual muchos autores no le dan la importancia que merece, es todo lo relacionado con las actividades administrativas y de gestión que soportan cualquier sistema de control que se implemente. Estos aspectos administrativos, combinados con las técnicas cuantitativas adecuadas, son los que permiten que el control y la gestión de inventarios produzcan los resultados deseados. A continuación se trata cada uno de estos factores.

El ciclo de vida de los productos

La figura 1.2 muestra el ciclo normal de vida de muchos productos. No es lo mismo el control del inventario de un producto cuando está en su fase de arranque, o introducción al mercado, que cuando está en su fase de madurez. En la fase de introducción debe garantizarse un inventario adecuado en lugares clave que responda a la demanda creciente del producto y le permita su normal desarrollo. En la fase de madurez hay oportunidades de optimización del control del inventario, dejando sólo aquellos lugares clave y racionalizando los niveles de existencias. Si el producto desaparece y no renueva su demanda, en la fase de declive se debe evitar el tamaño excesivo de las órdenes, sin descuidar el nivel de servicio al cliente. En el

caso de productos de corto ciclo de vida, como son los textos escolares, cuyo ciclo de ventas puede durar máximo de 8 a 12 semanas, es fundamental establecer sistemas de control adecuados para evitar el exceso de devoluciones y, a la vez, garantizar el nivel de servicio requerido por los clientes.

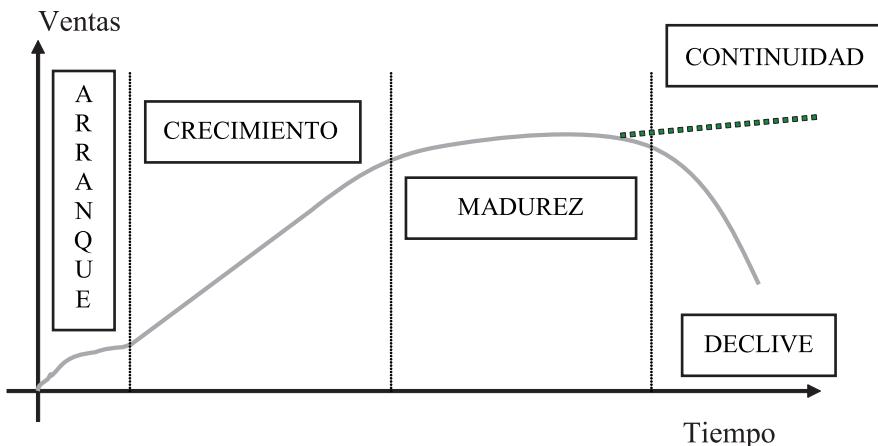


Figura 1.2. Ciclo de vida de un producto

La naturaleza del proceso productivo

La tabla 1.2 muestra los diversos sistemas para planeación y control de producción y su relación con el principal énfasis que debe hacerse en el sistema de gestión y control de inventarios. Dependiendo, entonces, de la naturaleza del proceso productivo, el cual puede variar desde sistemas por órdenes para bajos volúmenes de fabricación, hasta sistemas de alto volumen repetitivo, se requiere hacer especial énfasis en los sistemas de inventarios. Así, para bajos volúmenes de fabricación es fundamental la flexibilidad para responder a una gran cantidad de órdenes diferentes, mientras que para sistemas de ensamblaje y producción por lotes se requiere especial énfasis en el control de inventarios de materiales.

El diseño del sistema de gestión y control de inventarios se ve influenciado por la ubicación del producto dentro de la matriz producto-proceso ilustrada en la figura 1.3. El nivel de complejidad del control del inventario es mayor en la zona ubicada arriba a la izquierda en la figura y va siendo “menos complicado” a medida que se avanza hacia abajo y hacia la derecha. Por ejemplo, en productos que se fabrican por orden, cuyo flujo es discontinuo, el control de inventarios es muy complejo porque prácticamente cada orden es un nuevo producto; los sistemas de transporte de materiales, como correas transportadoras y elevadores, están dentro de esta categoría, ya que cada proyecto de transporte de materiales es diferente.

Tabla 1.2. Tipos de sistemas para planeación y control de producción y administración de inventarios

Sistema	Naturaleza del proceso productivo	Principal énfasis del sistema de gestión y control de inventarios
Trabajo por órdenes (<i>Job Shop</i>)	Bajo volumen de fabricación	Flexibilidad para atender una gran cantidad de órdenes diferentes. Posible concentración de inventarios en materias primas y componentes.
Tamaño óptimo de pedido (<i>Economic Order Quantity, EOQ</i>), punto de reorden	Sistemas no-productivos (cadenas de suministro comerciales)	Reducción de los costos de inventario, manteniendo el nivel de servicio al cliente.
<i>EOQ</i> en sistemas multi-etapas, punto de reorden	Distribución; sistemas gobernados por capacidad	Alta utilización de la capacidad disponible a costo razonable.
<i>Material Requirements Planning (MRP)</i>	Producción por lotes, bajo volumen, ensambles	Coordinación efectiva de materiales
Justo a tiempo <i>Just in Time (JIT)</i>	Alto volumen repetitivo	Minimización de alistamientos (<i>setups</i>) e inventarios, con altos niveles de calidad.

[Fuente: Adaptada de Silver y Peterson (1985), p. 31]

La ubicación del producto dentro de la matriz producto-proceso

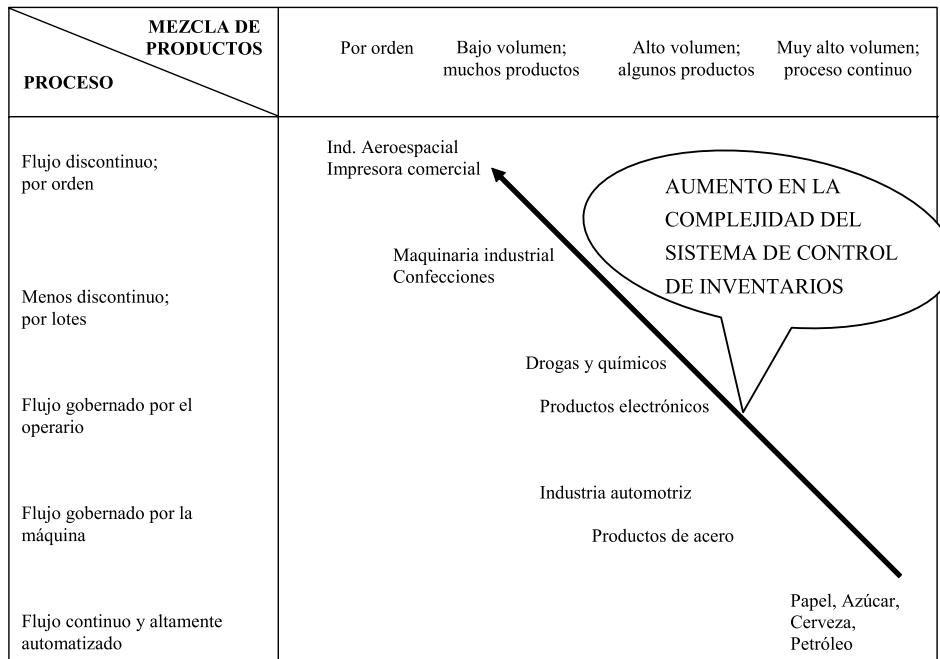


Figura 1.3. La matriz producto-proceso

[Fuente: Adaptada de Silver et al. (1998), p.42]

En estos casos, los sistemas de control pueden privilegiar la gestión de materias primas y componentes y difícilmente existirán inventarios de productos terminados (el caso de *Dell Computer* es un claro ejemplo de este tipo de cadenas). En un artículo muy reciente, Gunasekaran y Ngai (2009) hacen una revisión muy completa de la literatura sobre modelación y análisis de cadenas donde existe fabricación por orden (*Make-to-Order, MTO*).

Por el contrario, en productos de flujo continuo y altamente automatizado, el control de los inventarios de productos terminados debería ser menos complejo, como es el caso de la cerveza, el papel, la gasolina y el azúcar. En estos casos es clara la existencia de significativos inventarios de productos terminados.

Los aspectos administrativos y de gestión de los inventarios

Un tema al que no se le da la importancia que merece y, que muchas veces se ignora en los sistemas de control de inventarios, es el que tiene que ver con la administración o gestión de dichos sistemas. No basta con utilizar técnicas cuantitativas, en ocasiones muy elaboradas, si no se dispone de un marco administrativo robusto en la empresa. Un texto que trata de una forma muy concisa los aspectos administrativos del control de inventarios es el de Wild (1997).

El resto de esta sección está basado en un muy buen artículo por Zomersdijk y de Vries (2003). Primero, los autores presentan las cuatro dimensiones básicas que caracterizan a la organización de un sistema de inventarios:

- *La asignación de tareas.* Esta dimensión comprende el número de personas responsables de la administración de los inventarios, sus funciones específicas y su nivel jerárquico dentro de la organización. Debe tenerse especial cuidado en la concordancia entre las funciones asignadas y el nivel de autoridad de la persona.
- *Los procesos de toma de decisiones.* Estos procesos pueden comprender desde decisiones estratégicas mayores, como la expansión de un centro de distribución o la consolidación del inventario en menos puntos de la cadena, hasta decisiones operacionales del día a día, como puede ser el tamaño de la orden de compra o de producción a emitirse dentro de una hora. Estas decisiones afectan al sistema integral de inventarios y por ello es también importante establecer sus diferentes interrelaciones, no sólo con otras decisiones del resorte de inventarios, sino con cualquier otro actor de la cadena de abastecimiento. Por ejemplo, la decisión de aumentar significativamente la producción de cierto ítem con miras a una campaña publicitaria que se avecina, puede afectar significativamente a varios proveedores de

las materias primas para fabricar el producto a quienes no se les avise oportunamente del aumento intempestivo de la demanda.

- *Los procesos de comunicación.* La información en una cadena de abastecimiento, elemento primordial para que la misma funcione y pueda existir, no tiene sólo que ver con las métricas de la misma. Es decir, no basta solamente con saber el nivel de inventario de cierto producto existente en la bodega, sino que es necesario conocer el estado en el que se encuentra, si está o no comprometido con algún cliente, cuánto tardaría en estar listo para despacho, si cabe en el camión, etc. En varios proyectos se ha podido identificar que muchas personas en las organizaciones pueden estar duplicando actividades, invirtiendo grandes esfuerzos en tratar de resolver un problema que otra persona, en otro departamento, ya resolvió, o incluso, ignorando trabajos de otras personas que se complementan con sus propias funciones y que podrían simplificar la labor de ambos. En muchas ocasiones, las reuniones de trabajo periódicas, para tratar temas que aíslen a las personas de las actividades del día a día, producen un gran efecto para identificar estas graves fallas de comunicación.
- *Las relaciones interpersonales y los aspectos de gestión humana.* Ninguna empresa puede funcionar sin seres humanos, al menos hasta la fecha. El elemento más importante de cualquier organización es su recurso humano. Por ello, todo lo que tiene que ver con los aspectos humanos y sociales influye significativamente el desempeño de cualquier operación, aun, por supuesto, la gestión de inventarios. Algo que se ha observado en *todos* los proyectos de mejoramiento de cadenas de abastecimiento e inventarios, es el fenómeno de “resistencia al cambio” de las personas involucradas en dichos proyectos. Una tendencia muy humana es querer seguir haciendo las cosas como se han venido haciendo por años, así se le demuestre a la persona los beneficios que podría tener si las hace de una forma diferente, cuya conveniencia está garantizada por múltiples experiencias exitosas similares. Afortunadamente, todo ser humano es capaz de recapacitar y cambiar de actitud y, en la mayoría de los casos, se dan estos cambios y la persona acepta modificar sus prácticas de trabajo y utilizar la tecnología de punta como herramienta para la toma de decisiones. A veces, incluso, la persona se vuelve muy dependiente de la nueva tecnología que antes rechazaba acérrimamente, lo cual tampoco es conveniente porque nadie debe ceder su deber de tomar las decisiones a ninguna herramienta tecnológica por más avanzada que sea.

Con base en las cuatro dimensiones anteriores, los autores del artículo diseñan un marco de referencia para resolver problemas administrativos de control de inventarios y mejorar el desempeño de los sistemas de control. La figura 1.4 ilustra la metodología.

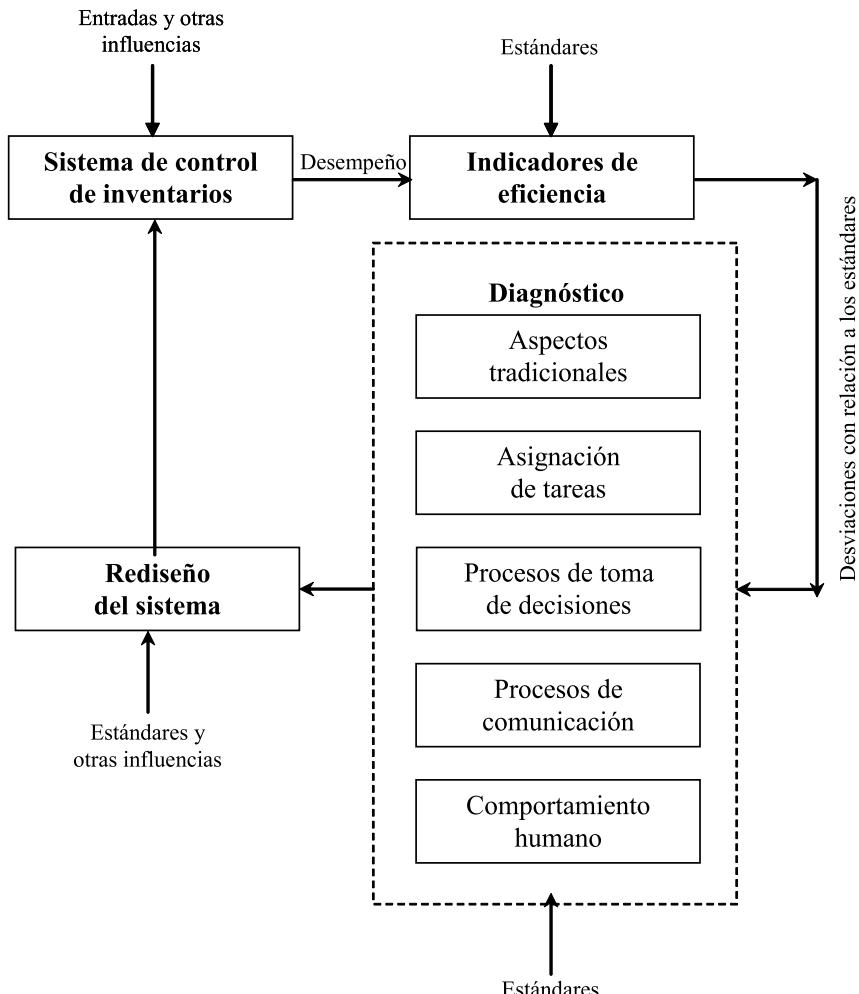


Figura 1.4. Marco de referencia para resolver problemas administrativos de control de inventarios

[Fuente: Traducido de Zomerdijk y de Vries (2003, p. 177)].

Normalmente, se registran indicadores de eficiencia periódicos del sistema de control de inventarios, como costos de faltantes, niveles de servicio, imprecisión del inventario físico, entre otros. Si se observa una

desviación significativa con respecto de los estándares de funcionamiento del sistema (definidos con base en metas alcanzables o por medio de estrategias de *benchmarking*), entonces se debe encontrar un diagnóstico de los problemas y sus causas, con base en los aspectos tradicionales de un sistema de inventarios y en sus cuatro dimensiones, descritas anteriormente. Es fundamental que en este paso haya una comprensión profunda de los problemas y sus causas que contengan, tanto elementos de las cuatro dimensiones organizacionales, como los aspectos tradicionales de la teoría del control de inventarios (sistemas de control utilizados, tamaños de lote, caracterización de la demanda y de los tiempos de reposición, clasificación ABC, niveles de servicio especificados, precisión del inventario físico y de los registros de ventas y demandas no-satisfechas, entre otros posibles).

Las cuatro dimensiones pueden sugerir diversas causas de los problemas, como cantidad y composición del personal asignado a la gestión de los inventarios (por ejemplo, algunos autores sugieren que un administrador no tenga a su cargo más de 300 ítems clase A, o sea, los más importantes); características de la organización tanto vertical como horizontal; balance de las responsabilidades con la autoridad asignada; cantidad, calidad y ambigüedad de la información generada para el proceso de toma de decisiones; racionalidad y consistencia de las decisiones y su relación con otras áreas; naturaleza de los sistemas de reporte y de retroalimentación entre el personal, incluyendo la calidad de la comunicación y la cantidad de “ruido” de la misma y, finalmente, los aspectos relacionados con el comportamiento humano, como juegos de poder, políticas, desmotivación, conflictos, incertidumbre, ambigüedad, incompetencia, problemas personales, etc.

La metodología continúa con el establecimiento de las relaciones entre todas las causas identificadas y sus posibles consecuencias. Aquí se deben incluir otros departamentos de la organización que pueden estar afectando el sistema de control de inventarios. Por ejemplo, una mala comunicación entre el personal de mercadeo y los planeadores de demanda o compradores puede ocasionar faltantes y obsolescencia de ítems. A su vez, esto puede ser consecuencia de malas prácticas de pronósticos de ventas o del establecimiento de metas demasiado ambiciosas. La salida de este análisis es la identificación de las causas principales de los problemas (Principio de Pareto), las cuales, si se les corrige rápidamente, pueden producir resultados de mejoramiento inmediato del sistema. Esta metodología integral, de acuerdo con los autores, produce mejores resultados que la metodología tradicional que ignora las cuatro dimensiones organizacionales.

Así, se ha podido comprobar que todo lo dicho anteriormente es correcto. Es tan importante implementar técnicas cuantitativas de pronósticos y de control de inventarios, como considerar las cuatro dimensiones organi-

zacionales descritas, para que un sistema integrado de control y gestión de inventarios funcione satisfactoriamente. Otro artículo que puede consultarse, relacionado con aspectos organizacionales en la administración de pronósticos de ventas, es el escrito por Davis y Mentzer (2007).

Las técnicas cuantitativas para el control de inventarios

Es claro que el problema de control y gestión de inventarios es complejo. Sin embargo, nos podemos ayudar con una serie de técnicas cuantitativas que permiten facilitar dicho control. La mayoría de las técnicas cuantitativas se basan en técnicas de optimización y modelos matemáticos, los cuales se convierten en herramientas poderosas de apoyo a la toma de decisiones en inventarios.

Este libro privilegia la utilización de modelos matemáticos y el uso de hojas electrónicas para resolver la mayoría de los problemas de inventarios. Es así como el uso de herramientas como el *solver* de Excel™ brinda la opción de resolver un gran número de problemas cuya solución, por otros métodos, puede resultar muy larga y/o tediosa. Además, es innegable el espacio que ha ganado en la academia y en la industria la utilización de hojas electrónicas para casi todos los niveles de planeación. Luego, como se estudiará en el capítulo 3, se tiene una gran oportunidad de mejorar los estimados de demanda optimizando los parámetros de un sistema de pronósticos a través del uso de hojas electrónicas.

Gran parte del control y la gestión de inventarios busca determinar las políticas y parámetros de control para producir el nivel de servicio deseado de la manera más económica posible. Todas las organizaciones, de una u otra forma, controlan sus inventarios. Algunas aplican, con mayor o menor intensidad, ciertas técnicas cuantitativas para este efecto. Pero, siempre, la gran pregunta será, “¿estamos operando con el óptimo nivel de inventario?”. Es muy probable que, dentro de la complejidad que caracteriza a las cadenas de abastecimiento y a la logística, nadie pueda responder con certeza esta pregunta. Lo importante es tratar de que la brecha entre nuestras operaciones y la solución óptima sea la menor posible.

Los inventarios no son malos. Lo malo es tenerlos en exceso para unos ítems y en defecto para otros (el desbalanceo de inventarios del cual ya se habló al comienzo) y dejar su control al azar o a técnicas meramente empíricas. Igualmente, tener cero inventarios es una utopía, especialmente en nuestro medio. Este es el caso específico de la filosofía de “justo a tiempo”, o *Just in Time (JIT)*, o sistema de producción sin inventarios. En este sistema total de manufactura o, más precisamente, en esta filosofía de producción, los inventarios se reducen al mínimo posible para incrementar la productividad (mediante la automatización, por ejemplo), para mejorar la calidad y reducir los ciclos de producción y, por lo tanto, el servicio al cliente.

El sistema *JIT* es adecuado en un ambiente de alto volumen de producción y manufactura repetitiva. Las diferentes etapas de producción están íntimamente ligadas con muy pequeños inventarios en proceso. La necesidad de ensambles finales gobierna el flujo de subensambles, disparando la producción, la que, a su vez, afecta la cadena previa de producción, y así sucesivamente (sistema *pull*). Cada centro de trabajo produce solamente lo que el centro siguiente necesita para satisfacer la producción de ensambles finales.

No todos los sistemas productivos son susceptibles de adoptar un sistema *JIT*. Para lograr la transformación a este tipo de sistema, se requiere que la organización realice los pasos necesarios para adoptar los más altos niveles de calidad, disminuya los alistamientos de las líneas de producción y los tamaños de lote, y seleccione y certifique adecuadamente a sus proveedores.

Los beneficios de la implementación de un sistema *JIT* pueden ser inmensos, dentro de los cuales se encuentran la reducción de costos de mantenimiento y control de los inventarios, con el consiguiente ahorro de espacio físico; el menor capital invertido en inventarios; el incremento de la productividad con altos niveles de calidad y la reducción de los tiempos de producción. A pesar de los impresionantes resultados que ha logrado el *JIT* en varios países, esta filosofía no es la panacea para todas las organizaciones. Para que ella produzca los resultados esperados, se debe tener alto volumen de producción y manufactura repetitiva; niveles de calidad extremadamente altos; excelente gestión humana que permita motivar a la fuerza laboral, mejorar las relaciones de los trabajadores con la empresa y tener una mano de obra altamente calificada y excelente relación con los proveedores.

Para extender los conceptos enunciados hasta este momento, se recomienda leer a Silver (2008), quien realiza un excelente resumen sobre los principales aspectos de administración de inventarios, incluyendo algunas aplicaciones prácticas y sugerencias para investigación futura.

Ejercicios 1.1

1. Discuta la relación que existe entre las políticas de control de inventarios de una compañía (comercial o industrial) y otros aspectos de Logística, como el sistema de transporte y distribución.
2. Suponga que la demanda de cierto producto es determinística y se conoce con gran certeza. Bajo esta situación, alguien opina que no se necesita tener inventario alguno de este producto. ¿Está de acuerdo con esta afirmación? Explique.

3. Explique por qué altos niveles de inventario pueden enmascarar problemas de calidad en un ambiente productivo.
4. Un pequeño negocio mantiene cinco ítems en inventario, con las siguientes características:

Ítem	Precio de venta (\$/unidad)	Inventario a enero 01 (unidades)	Inventario a enero 31 (unidades)	Ventas en enero (unidades)	Margen de utilidad del ítem* (%)
1	15.500	350	564	750	14,7
2	2.400	2.530	565	2.585	8,5
3	38.000	52	3	60	10,2
4	950	5.700	5.000	700	13,5
5	87.500	8	4	12	9,0

*Expresado como el porcentaje de utilidad del ítem sobre el precio de venta

Determine la rotación del inventario de este negocio durante el mes de enero en número de veces por mes y en días. Observe que se pide la rotación conjunta de los cinco ítems.

5. El administrador de una droguería afirma que, si él quisiera, tendría una rotación aproximada de un día comprando sólo lo necesario para vender en un día, reponiéndolo al día siguiente y así sucesivamente. Discuta la viabilidad de esta afirmación desde el punto de vista de la logística y su posible efecto práctico en el negocio y en el servicio al cliente.
6. Un pequeño supermercado quiere establecer una clasificación ABC para cierta familia de productos de aseo personal. Una muestra de 20 artículos es la siguiente:

Ítem No.	Demanda anual (u.)	Valor del ítem (\$/u.)	Ítem No.	Demanda anual (u.)	Valor del ítem (\$/u.)
1	800	2.630	11	300	260
2	350	1.760	12	400	2.760
3	2.000	8.950	13	1.750	15.200
4	1.100	8.770	14	75	400.000
5	4.500	10.560	15	820	3.000
6	100	4.390	16	200	23.550
7	1.000	890	17	50	975
8	2.600	450	18	520	17.500
9	610	7.500	19	1.650	17.500
10	985	900	20	130	7.850

- a. Construya una hoja electrónica que le permita proponer una clasificación ABC para este conjunto de ítems. Tome los cortes del porcentaje acumulado del volumen Dv en 70 y 95 por ciento aproximadamente para establecer el límite entre A y B y entre B y C, respectivamente.
 - b. ¿Qué diferencia observa entre los ítems No. 5 y No. 14, a pesar de estar en la misma clasificación?
 - c. Usted quiere clasificar a un ítem nuevo, No. 21, del cual sólo se conoce la demanda “desde hace un mes que entró al mercado”. Dicha demanda fue de 65 unidades y el ítem tiene un valor de 6.500 \$/unidad. Explique cómo lo haría y en qué clasificación quedaría dicho ítem.
 - d. Si la empresa manejara 6.000 ítems, ¿considera difícil obtener la clasificación ABC de todos los ítems utilizando la misma herramienta computacional que usted diseñó?
7. Comente acerca de la validez de la clasificación ABC para una empresa a través del tiempo. ¿Qué sugeriría para mantener actualizada dicha clasificación? Considere también el caso de ítems nuevos, para los cuales no se conoce historia alguna. ¿Cómo cree usted que deberían tratarse para efectos de su eventual clasificación ABC?
 8. Algunos autores sostienen que la clasificación ABC está perdiendo vigencia e importancia en la actualidad debido a que, con el avance de los sistemas de información y de computación, todos los ítems pueden ser controlados con sistemas relativamente complejos. Discuta esta afirmación.
 9. Uno de los problemas del indicador de rotación del inventario mostrado en la Ec. (1.2) es el hecho de que usted puede tener su bodega llena, aún no ha pagado el inventario y tiene una alta probabilidad de venderlo y recuperar su inversión antes de pagar a sus proveedores. Por lo tanto, realmente el capital que ha invertido en inventarios es muy bajo, pero el indicador de rotación no mostrará esto. Por ello, surge como alternativa el indicador de rotación neta del inventario, definido como [De acuerdo con Grenoble IV (1994), p. 387]:

$$\text{Rotación neta} = \frac{\text{Ventas periódicas al costo } [\$/\text{periodo}]}{\text{Inventario promedio periódico al costo } (\text{Pagado})[\$]} \quad (1.4)$$

$$\text{Inv. promedio pagado} = (\text{Inventario promedio}) - (\text{Cuentas} \times \text{Pagar promedio})$$

- a. Analice las ventajas y desventajas de este nuevo indicador de rotación y aplíquelo en el ejemplo del literal siguiente. Interprete el significado de un valor negativo de este indicador.

- b. Se está negociando la compra de un producto con un plazo de pago de 40 días. El método de control utilizado sugiere comprar 1.000 unidades para dicho tiempo. Al cabo de un mes, se han vendido 850 unidades. Compare la rotación del inventario y la rotación neta durante ese mes, asumiendo un inventario inicial del producto = 100 unidades ya pagadas.
- c) Puede ocurrir que aun el indicador de rotación neta mostrado en la Ec. (1.4) no sea adecuado porque existen muchas empresas que compran grandes cantidades de inventario y lo pagan por adelantado, o en corto tiempo, con el objeto de obtener significativos descuentos por pronto pago, lo que hace al negocio factible económicamente y, por lo tanto, rentable. Proponga nuevos indicadores de gestión de inventarios para estos casos.

LECTURAS ADICIONALES

- CHOPRA y MEINDL (2008): capítulo 3 (pp. 44-64) (Es un capítulo muy interesante que ubica el tema de inventarios dentro de todo el contexto de la cadena de abastecimiento).
- BOWERSOX *et al.* (2007): capítulo 6 (pp. 130-137) (Se trata de una buena lectura introductoria sobre los temas de inventarios).
- SILVER *et al.* (1998): capítulos 1 y 2 (pp. 3-26); capítulo 3 (pp. 27-44) (Introduce al tema de inventarios en forma general).
- SIPPER y BULFIN (1998): capítulo 6 (pp. 311-325) (Este final de capítulo presenta otra visión de la clasificación ABC y de la organización general de un sistema de control de inventarios).
- WILD (1997): capítulo 3 (pp. 29-51) (“Administrando el inventario”; complementa el análisis ABC, principalmente).
- FOGARTY *et al.* (1994): capítulo 5 (pp. 179-208) (Este 50% del capítulo 5 da un panorama general de administración de inventarios, incluyendo la clasificación ABC).
- ROBESON y COPACINO (1994): capítulo 9 (pp. 372-390) (Este capítulo de este Manual de Logística presenta algunos aspectos interesantes sobre medidores de desempeño en inventarios, como la rotación neta del inventario).

PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA

CAPÍTULO 2

ELEMENTOS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN SISTEMAS DE INVENTARIOS

Las decisiones que deben tomarse para la administración de un sistema de inventarios son muy complejas, no sólo por su importancia propia, sino por las interrelaciones con los otros sistemas de la organización. Se trata aquí de ofrecer una introducción que sirva de base para el desarrollo de modelos matemáticos, los cuales se constituyen en poderosas herramientas de ayuda para la toma de decisiones en esta área.

LA DIVERSIDAD DE ÍTEMES Y EL MARCO DE REFERENCIA PARA LAS DECISIONES DE INVENTARIOS

Existen organizaciones comerciales que pueden llevar más de 100.000 ítems en inventario. Una industria de tamaño medio puede tener más de 10.000 tipos diferentes de materias primas, partes y productos terminados. Los ítems en inventario pueden diferir en muchos aspectos. La tabla 2.1 muestra diversos aspectos en los que un ítem puede diferenciarse de otro.

Tabla 2.1. Características para la diferenciación de ítems en inventario

Aspecto	Diferentes características
Costo y apariencia física	Costo, peso, volumen, color, forma, estado físico.
Ítems perecederos	Por deterioro, por robos, por obsolescencia tecnológica.
Modo de almacenamiento	En contenedores, barriles, estantes, estibas, sobre el piso, en cajas de cartón, refrigerados o con condiciones controladas, artículos inflamables, etc.
Modo de empaque	Por unidad, docenas, cientos, millares, promociones, etc.
Localización geográfica	En muchas cadenas de abastecimiento, los ítems pueden diferenciarse por su localización geográfica, así sea el mismo código.

Con respecto del proceso de demanda, los ítems también pueden diferir en cuanto a los siguientes aspectos:

- Demanda por unidades, docenas, cajas, por miles, etc.
- Un ítem puede ser demandado para sustituir a otro.
- Un ítem puede ser complementario, en el sentido de que sólo es aceptado por el cliente si otros ítems son incluidos en la orden.
- Pueden existir diferencias en cuanto al modo de transporte: recogidos por el cliente, en camiones propios, en empresas de carga contratadas, por tren, avión, barco, etc.
- Pueden existir ítems que permitan ser no despachados, para incluirlos en órdenes pendientes, mientras que otros no tengan esta flexibilidad.

Igualmente, la forma como se reciben los ítems puede tener gran variabilidad. El tiempo de despacho, adicionalmente, puede ser horas, días, semanas e, incluso, meses, en el caso de algunos envíos internacionales o cuando se presentan órdenes pendientes.

Así, las decisiones que comprenden los sistemas de producción e inventarios se ven complicadas por la gran variedad de *SKU* que pueden existir, de acuerdo con las clasificaciones anteriores. El arte de la modelación matemática consiste, en parte, en la identificación de las características básicas para diferenciar *SKU*, y en la agregación de los mismos en grupos uniformes que permitan simultáneamente reducir su cantidad y conservar dichas características, de tal forma que los modelos matemáticos que se apliquen sean manejables en la práctica.

Cualquier sistema de administración de inventarios debe resolver tres preguntas fundamentales para cada ítem en particular:

- *¿Con qué frecuencia* debe revisarse el inventario del ítem?
- *¿Cuándo* debe ordenarse el ítem?
- *¿Qué cantidad* del ítem debe ordenarse en cada requisición?

Estas preguntas enmarcan el proceso decisorio general con respecto de los inventarios y serán la clave para definir las características de los diferentes sistemas de control. Un posible marco de referencia que caracterice los procesos decisoriales en inventarios puede estar definido por los siguientes aspectos:

- Como en todo proceso de modelación, es necesario determinar los factores relevantes a tener en cuenta en el proceso decisorio sobre sistemas de inventarios y a eliminar aquellos aspectos que no son significativos para el sistema bajo análisis.

- Cualquier decisión que se tome con respecto a un ítem en particular está enmarcada dentro del siguiente contexto:
 - La relación del ítem en consideración con otros *SKU*.
 - La inversión total en el inventario agregado, probablemente considerando otros ítems de la misma familia.
 - El plan maestro de la organización.
 - Los sistemas de producción/distribución de los proveedores y clientes de la empresa.
 - La cadena de abastecimiento integral de la empresa.
 - La economía regional y mundial como un todo.
- Las decisiones logísticas y de la cadena de abastecimiento obedecen a un nivel jerárquico, el cual regularmente contiene:
 - Decisiones *estratégicas* de largo plazo, como la definición de la localización de una nueva planta manufacturera o un centro de distribución.
 - Decisiones *tácticas* de mediano plazo, como la selección de una empresa transportadora para el próximo semestre o la programación de la producción del próximo mes.
 - Decisiones *operacionales* de corto plazo o inmediatas, como la ruta de los camiones para efectuar los despachos el día de mañana o la programación de los trabajos en cierta máquina para hoy.

Análogamente, las decisiones con respecto de inventarios pueden también estar enmarcadas dentro de esta clasificación:

- Escogencia del sistema general de control (decisión estratégica).
- Selección de parámetros de acuerdo con el sistema general de control escogido, como el nivel de servicio al cliente (decisión táctica). Aquí puede incluirse también la selección del sistema de pronósticos para cada clase o familia de ítems.
- Decisiones operacionales, tales como el sistema de recolección de datos, la determinación de pedidos, el reporte de resultados, la planeación de despachos de bodegas a puntos de venta y la priorización de despachos cuando no hay suficiente cantidad de los productos enviados, entre otras posibles.
- Cuando exista un gran número de *SKU*, éstos deben agregarse y analizarse en grupos homogéneos más reducidos, con el objeto de disminuir el grado de complejidad del problema sin pérdida significativa de la precisión de los modelos utilizados.

- Especial énfasis debe dársele al análisis de las variables más importantes, como los costos de alistamiento y el proceso de demanda, para el cual debe diseñarse un adecuado sistema de pronósticos.

Hay errores frecuentes en el manejo de los inventarios. Uno muy común es el de utilizar el indicador de rotación del inventario de manera uniforme a lo largo de toda una familia de ítems. Muchas veces éstos pueden ser incompatibles o de naturaleza diferente y no es recomendable su comparación directa a través del indicador mencionado. Debe tenerse muy en cuenta que el indicador de rotación de inventarios, tal como fue definido en la Ec. (1.2), y el porcentaje sobre las ventas, son útiles sólo para efectos de reporte de resultados, pero nunca como herramientas de aplicación uniforme para efectos de control. Al tratar de mejorar la rotación de los inventarios de manera forzada, reduciendo drásticamente su nivel, es muy probable que se consiga el efecto contrario, ya que se afectaría el nivel de servicio y, por ende, las ventas, con lo que sería muy difícil conseguir el mejoramiento buscado del indicador. Además, se produciría una pérdida de imagen grave ante los clientes que puede ser irrecuperable. Un proyecto que busque mejorar la rotación del inventario debe ser muy bien planeado y debe aplicar técnicas cuantitativas para evitar el decremento del nivel de servicio.

Otros errores muy comunes en el manejo de inventarios son los siguientes:

- Definir inventarios de seguridad sólo con base en los indicadores de demanda promedio, ignorando la variabilidad de la misma y, más grave aún, ignorando la variabilidad de los tiempos de reposición.
- Imponer controles en categorías de inventarios que han sido definidas sólo para efectos contables.
- Imponer el mismo límite de inventarios con base en un porcentaje de las ventas para todas las divisiones regionales de una organización.

En resumen, el arte del control de inventarios consiste, entonces, en responder a las tres preguntas básicas para cada ítem en cada lugar donde es almacenado, y además:

- Considerando todas las propiedades individuales de cada producto y su relación con otros ítems.
- Realizando un análisis integral sobre los efectos que otras operaciones de la cadena de abastecimiento pueden tener sobre el sistema de control y gestión de inventarios, tales como el sistema de almacenamiento y el sistema de transporte.
- Utilizando un conjunto adecuado de indicadores de gestión de inventarios.

- Categorizando correctamente las decisiones dentro de su respectivo nivel jerárquico.
- Realizando el agrupamiento de ítems cuando sea del caso.
- Evitando los errores frecuentes anteriormente mencionados.

CLASIFICACIÓN FUNCIONAL DE LOS INVENTARIOS

Es muy importante clasificar los inventarios desde el punto de vista funcional, ya que esto contribuye a evitar algunos de los errores frecuentes en la administración de los inventarios. Existen cuatro tipos básicos de inventarios, a saber: inventario cíclico, inventario de seguridad, inventario de anticipación o estacional, e inventario en tránsito. Esta clasificación puede ser útil para abordar la toma de decisiones en inventarios. Éstos se describen a continuación.

Inventario cíclico

Los inventarios cíclicos resultan del hecho de producir u ordenar en lotes, en lugar de unidad por unidad, y están directamente relacionados con la demanda promedio del ítem. La cantidad de inventario disponible en cualquier momento, como resultado de dichos lotes, se denomina *inventario cíclico*. Las principales razones para utilizar producción u órdenes por lotes son: obtener economías de escala al evitar altos costos de alistamiento u ordenamiento, lograr descuentos por cantidad en costos de compra y/o transporte, y satisfacer restricciones tecnológicas de producción por lotes.

Posteriormente se verá que el inventario cíclico en cualquier instante depende de la frecuencia y cantidad con que se realicen los pedidos, y que esto puede determinarse estableciendo la prioridad entre el costo de ordenamiento y el costo de mantenimiento del inventario.

Inventario de seguridad

El inventario de seguridad es el que se conserva disponible para responder a todas las fluctuaciones aleatorias que puedan existir en el sistema. Las más importantes son la variabilidad de la demanda y la variabilidad de los tiempos de reposición. El inventario de seguridad afecta directamente el nivel del servicio al cliente, el cual puede definirse como la frecuencia con que la demanda del cliente es satisfecha del inventario disponible. El inventario de seguridad es un tema fundamental y se tratará con detalle en los capítulos 3 y 5.

Inventario de anticipación o estacional

Este es el inventario acumulado con anterioridad para responder a picos de demanda. Se maneja en empresas para las cuales es más costoso satisfacer dichos picos a partir de la contratación adicional de personal, a

la programación de horas extras y/o a la compra a proveedores externos durante los períodos de alta demanda. También ocurre en empresas donde la naturaleza del producto así lo determina, como en la producción de salsa de tomate en países donde la cosecha ocurre en un tiempo relativamente corto del año, y las empresas que fabrican adornos de Navidad. Este tipo de inventario puede estar presente, finalmente, en situaciones donde se requiere construirlo con anticipación a la demanda, como es el caso de zonas climáticas extremas donde se dificulte la distribución en ciertas épocas del año, períodos de guerra, etc.

Inventario en tránsito (o en proceso)

Este clase incluye productos que se encuentran en tránsito entre diversas estaciones de producción (inventario en proceso), o en los sistemas de transporte entre una instalación y otra, de la cadena de abastecimiento (inventario en tránsito o *pipeline inventory*). El inventario en tránsito es proporcional al nivel de utilización del producto y al tiempo de transporte entre las instalaciones del sistema y se constituye en un elemento importante para la selección de los modos de transporte en una cadena de abastecimiento, especialmente internacional (ver capítulo 5).

Algunos autores mencionan otros tipos de inventarios, como los de *congestión* y los de *separación*. El primero se refiere a los inventarios que se forman antes de un cuello de botella en un proceso productivo y se estudian principalmente en textos de producción y manufactura. El inventario de separación es un nombre que se le da a los inventarios existentes en distintos puntos de la cadena, como en un centro de distribución y en una bodega local. Estos inventarios permiten separar las decisiones de control entre los dos lugares y de allí proviene su nombre.

A continuación se describen los factores principales a tener en cuenta a lo largo de este libro para la gestión y control de inventarios. Se utiliza una notación semejante a la de Silver *et al.* (1998), ya que se ha encontrado como la más adecuada porque brinda mayor claridad, la aplican gran cantidad de investigadores en el área de inventarios, y la mayoría de los nombres de las variables y sus iniciales, coinciden con sus nombres en español.

FACTORES DE IMPORTANCIA PARA LA TOMA DE DECISIONES EN INVENTARIOS

Factores de costo

El valor unitario del ítem, v

El valor unitario de cada ítem v está expresado en \$/unidad, pudiendo ser la “unidad” cualquier medida adecuada de cantidad de producto, como pueden ser litros, metros cúbicos, toneladas, unidades físicas, cajas, etc. Para un comerciante (no-productor) este costo corresponde al precio del artículo pagado al proveedor incluyendo los fletes y costos variables

relacionados. Puede depender del tamaño de pedido, de acuerdo con los descuentos por cantidad.

Para productores, este valor es más difícil de determinar. Sin embargo, rara vez se utiliza el valor en libros del ítem. Se prefiere, en cambio, medir el valor real del dinero invertido en el ítem (costo variable de producción) para hacerlo apto para su utilización, bien sea como producto terminado para el consumidor final, o como componente para otro proceso dentro de la planta. Este costo es muy importante, ya que el costo de llevar el inventario depende de él.

La tasa o rata del costo de llevar o mantener el inventario, r

De acuerdo con Stock y Lambert (2001, pp. 187-225), el costo de mantenimiento del inventario debería incluir sólo aquellos costos que son proporcionales al volumen promedio de inventario que se mantiene. El costo de llevar o mantener el inventario comprende, por lo tanto, los costos de servicio del inventario (almacenamiento y manejo), el costo del espacio utilizado, los costos de capital y los costos de riesgo del inventario (obsolescencia, daños y filtraciones, y los seguros e impuestos).

Los *costos de almacenamiento y manejo* se refieren a los costos de operar la bodega, teniendo en cuenta la mano de obra utilizada, las actividades desarrolladas, como recepción, almacenamiento, inspección, recolección y despacho. Si la operación de almacenamiento es tercerizada, estos costos podrían formar parte del costo global de espacio dado por el arrendatario (descrito a continuación) o podrían ser independientes, expresados en \$/unidad que circula por la bodega. Para el cálculo de r sólo deben tomarse aquellos costos que efectivamente varían con el nivel promedio del inventario y no con el flujo a través de la bodega. Estos últimos pueden ser considerados como costos de almacenamiento.

El *costo de espacio* es el reflejo del uso del volumen dentro del edificio de la bodega. Si la bodega es pública, parte de estos costos pueden ser proporcionales al flujo a través de la bodega (*throughput*) y otra parte puede ser proporcional al nivel de inventario promedio mantenido; sólo estos últimos deberían considerarse como costos de mantenimiento del inventario, mientras que los primeros forman parte del rubro de costos de almacenamiento. Si el espacio es propio de la empresa, generalmente los costos de espacio que dependen del nivel de inventario promedio son despreciables. Todos los costos de operación de la bodega se deberían considerar como costos de almacenamiento y manejo, pero no de mantenimiento del inventario.

Los *costos de capital o costos de oportunidad* representan la mayor proporción de los costos de mantenimiento del inventario. A pesar de esto, es el costo menos tangible de todos los componentes del costo de inventa-

rio, ya que, en realidad, representa la posible pérdida de inversión en otras actividades que la empresa podría tener, donde al menos ganaría su tasa mínima de retorno sobre la inversión. Su determinación no es fácil, ya que depende de muchos factores. Primero, los inventarios pueden tratarse de activos a corto plazo o de activos a largo plazo, dependiendo de su función. Segundo, el costo de capital puede determinarse de un rango amplio de valores que van desde las tasas de interés del mercado, hasta el costo de oportunidad del capital, el cual puede estar representado en el promedio de las tasas mínimas de retorno de la empresa o en las inversiones más rentables a las que la empresa tiene acceso. Stock y Lambert (2001, pp. 193-217) presentan una completa discusión de estos aspectos (ver lecturas adicionales al final de este capítulo). Es importante mencionar que los costos de oportunidad deben expresarse en términos “antes de impuestos”, ya que los demás costos de mantenimiento del inventario se expresan de esa forma. Si el costo de oportunidad se expresa como tasa después de impuestos, su equivalente antes de impuestos se obtiene dividiéndolo entre $(1 - \text{la tasa de impuestos})$.

Los *costos de riesgo* representan los costos de obsolescencia, deterioro y depreciación del inventario. El deterioro puede deberse a condiciones naturales de los ítems en inventario, especialmente si se trata de artículos perecederos. Estos costos pueden determinarse del costo de ítems perdidos, o del costo de actualización mediante trabajo adicional para recobrar el estado normal del producto, o de reponer el producto desde otra localización.

Los *seguros e impuestos* dependen del inventario disponible y por ello forman parte del costo de mantenimiento del inventario. Los seguros se toman como prevención contra incendio, robo, daños, etc. Los impuestos se pagan dependiendo de los sistemas contables particulares de cada región y, generalmente, se cobran de acuerdo con los valores en libros de los inventarios. El tema de valoración de los inventarios para efectos contables no se considera en este libro.

La tabla 2.2 muestra un posible rango de porcentajes de los costos mencionados anteriormente y un ejemplo, al igual que el porcentaje de cada tipo de costo con respecto a la tasa total de costo de mantenimiento del inventario r . Como ilustración, tómese el 30,0% anual de los costos de interés y de oportunidad en el ejemplo (se asume que esta tasa ya está calculada antes de impuestos); la proporción $30,0/36,0 = 83,33\%$, da el porcentaje de este componente con respecto de la tasa total r del ejemplo, igual al 36,0% anual.

Tabla 2.2. Componentes del costo de mantenimiento del inventario

Componente de la tasa de costo de mantenimiento del inventario r	Rango de valores (% anual)	Ejemplo (% anual)	Porcentaje del total en el ejemplo (%)
Interés y costos de oportunidad*	4,0-40,0%	30,0*	83,33
Obsolescencia y depreciación	0,5-2,0	2,0	5,56
Almacenamiento y manejo	0,0-4,0	2,0	5,56
Impuestos	0,5-2,0	1,0	2,78
Seguros	0,0-2,0	1,0	2,77
Total	5,0-50,0%	36,0	100,00

* Esta figura debe estar expresada en porcentaje antes de impuestos para poderse sumar con el resto de costos. El valor antes de impuestos se obtiene dividiendo el valor después de impuestos entre $(1 - \text{tasa de impuestos})$.

[Fuente: Complementada de Bowersox *et al.* (2007), p. 137].

Nótese que los costos de oportunidad y almacenamiento representan la mayor proporción del costo de mantenimiento del inventario, aunque los costos de obsolescencia pueden tomar un lugar importante, especialmente en productos de corto ciclo de vida. Esto, por supuesto, es una guía y en cada caso debe analizarse cuidadosamente cada componente del costo. Las unidades en las que se mide la tasa r son, normalmente, un porcentaje por año [%/año], o, equivalentemente, en [\$/(\$ año)], lo que significa el dinero que hay que pagar por cada peso invertido en inventario cada año o cada período de tiempo que se escoga para el análisis. Regularmente se utiliza el mismo costo de llevar el inventario para todos los ítems o para familias homogéneas de ítems, excepto en los casos en que las diferencias entre diversos ítems sean significativas y ameriten un cálculo independiente.

El costo de mantenimiento del inventario C_m (en \$) se calcula normalmente mediante la siguiente ecuación:

$$C_m = \bar{I}vr \quad (2.1)$$

donde:

I = inventario promedio anual en unidades

Iv = inventario promedio anual expresado en unidades monetarias (\$)

r = tasa del costo de llevar el inventario, expresada en %/año o en $\$(\$ \times \text{año})$

Es muy importante notar la diferencia entre la tasa del costo de mantenimiento del inventario r y el costo de mantenimiento del inventario propiamente dicho C_m . Este último se obtiene al multiplicar la tasa r por el in-

ventario promedio en \$, el cual surge del producto entre el valor del ítem v , en \$/unidad, y su inventario promedio en unidades I . Se aclara esto porque a menudo se habla de r como el “costo de mantenimiento del inventario” y no como una tasa o rata.

La Ec. (2.1) justifica la inclusión en el cálculo de la tasa r de sólo aquellos costos que varían con el nivel promedio de inventario I , ya que dicha expresión se utilizará posteriormente en modelos matemáticos en los cuales se expresa el inventario promedio en función de las variables de decisión. Por ejemplo, para la determinación del tamaño de lote económico, EOQ , el inventario promedio es igual a $Q/2$ y, por lo tanto, la tasa r debería incluir solamente los costos sensibles a las variaciones de Q , por ejemplo, los costos de oportunidad, impuestos sobre el inventario y obsolescencia. Costos como la depreciación de la bodega propia y los intereses pagados por posibles préstamos para su construcción, *no* deberían incluirse en el modelo matemático, sino considerarse como otros rubros contables o financieros, puesto que no dependen del nivel promedio de inventario.

Otros métodos para estimar r han sido desarrollados recientemente. Por ejemplo, Berling (2008) expresa que la investigación reciente ha demostrado que no necesariamente el costo de mantenimiento del inventario varía linealmente con el nivel de inventario promedio. El autor presenta otra metodología basada en elementos microeconómicos, la cual considera el costeo basado en actividades (costeo ABC o *Activity Based Costing*). En este artículo se demuestra que, en algunas ocasiones, el método tradicional puede sobreestimar en más del 15% la tasa del costo de mantenimiento del inventario r .

El costo de ordenamiento o de alistamiento, A

Cada orden para reponer el inventario tiene varios costos asociados, los cuales, en general, son fijos y no dependen del tamaño de la misma. Estos costos corresponden al procesamiento, transmisión, manejo y compra de la orden. Específicamente, para un comerciante (no-productor), el *costo de ordenamiento* puede comprender:

- Costo de preparación de los formatos de las órdenes.
- Costos de correo (o de cualquier sistema que utilice para la transmisión de órdenes, incluyendo fax, EDI, etc.).
- Costos de llamadas telefónicas relacionadas con el pedido.
- Costos de autorización del pedido.
- Costos de recepción e inspección.
- Costos de manejo de las facturas del proveedor.
- Otros costos relacionados con el procesamiento de la orden.
- Costo de transporte de la orden (independiente del tamaño de la misma).

Para un productor, este costo puede incluir los rubros relacionados con el montaje de maquinaria fija, los costos de alistamiento para preparar las máquinas para procesar la orden, la transmisión y control de la orden en la planta. En este caso, se prefiere utilizar el término *costo de preparación o de alistamiento (setup)*.

Es muy importante definir cuáles costos se constituyen en costos *adicionales* o *marginales* para la preparación o procesamiento de una orden, ya sea en un sistema productivo o comercial, ya que, de acuerdo con algunos autores, son los *costos marginales o incrementales* los que deben incluirse en el costo de ordenamiento o preparación. En otras palabras, si el procesamiento de una orden no requiere personal adicional, sino el mismo personal al que debe pagársele su salario, independientemente de que la orden se produzca o no, sólo deberían incluirse los costos marginales para procesar la orden, como el costo de papelería y copiado. Algunos costos de ordenamiento pueden depender del tamaño de la orden y, por lo tanto, su tratamiento matemático varía. Fogarty *et al.* (1994, pp. 208-233) tratan con mayor detalle y extensión el tema de los costos de ordenamiento, al igual que Silver y Peterson (1985, pp. 72-78) y Silver *et al.* (1998, pp. 53-58).

El costo de faltante o de bajo inventario, B

Este costo se produce cuando se recibe una orden y no hay suficiente inventario disponible para cubrirla (puede ser que el ítem esté completamente agotado o que haya bajo inventario). Generalmente se expresa como un porcentaje del valor v del ítem. Los principales tipos de costos de faltantes son los siguientes:

Costo especificado (B_1) por cada ocasión en la que ocurren faltantes. En este caso se asume que el costo de faltante de inventario es constante y se incurre en él sólo por el hecho de ocurrir el rompimiento de inventario. No depende de la magnitud ni de la duración del faltante, sólo del evento de ocurrencia. Por ejemplo, esto puede suceder cuando la inminente ocurrencia de un faltante genera una serie de actividades de emergencia para evitarlo.

Costo especificado (B_2v) por cada unidad de faltante. Aquí se carga una fracción B_2 del costo unitario del ítem debido al faltante. O sea que el costo unitario de faltante es igual a B_2v , donde v es el valor unitario del ítem como se ha definido anteriormente. Este tipo de costo se utiliza cuando el faltante es cubierto mediante horas extras de producción, lo que ocasiona un sobrecosto unitario de producción. También puede ser adecuado cuando la venta se pierde totalmente y el costo es la utilidad unitaria dejada de percibir, más cierto valor por pérdida de imagen ante los clientes.

Costo especificado (B_3v) por cada unidad de faltante por unidad de tiempo. Aquí se carga una cantidad B_3 por cada peso de faltante (o equivalentemente B_3v por unidad de faltante) por unidad de tiempo. Este caso se aplica cuando se trata de faltantes de repuestos que pueden parar la producción de una máquina hasta que el ítem sea entregado al cliente. Nótese que esta medida del costo de faltantes tiene las mismas unidades que la tasa de costo de mantenimiento del inventario r .

Cuando ocurre un faltante pueden suceder tres posibilidades: se genera una orden pendiente, se pierde la venta o se produce una combinación de ambas, como cuando el cliente decide aceptar una orden pendiente parcial. Cualquiera de las tres posibilidades que ocurra, genera un costo de faltante, el cual es muy difícil de estimar debido a su naturaleza intangible.

Cuando se pierde la venta totalmente, puede usarse, como primera aproximación, la utilidad perdida como el costo de faltante de inventario. Cuando se genera una orden pendiente, se debe emprender una serie de acciones especiales, como órdenes adicionales, planeación urgente de producción, transporte especial, etc., lo que aumenta el costo del ítem comparado con el canal normal de distribución. Estos costos no son difíciles de medir, pero el hecho de no tener el inventario disponible puede generar mala imagen y descontento en los clientes, lo cual puede ocasionar pérdida de ventas futuras. Este factor es muy difícil o imposible de cuantificar en forma práctica. Se prefiere, por ello, utilizar valores conservativos, de tal forma que no se generen altos costos de faltantes y el control del inventario mantenga un nivel de servicio alto. También, en algunas ocasiones, se calcula el costo de faltante implicado por cierta política de inventarios y su valor se compara con valores de referencia para determinar si está o no dentro de cierto rango admisible.

Factores relacionados con los tiempos de reposición y con la demanda

Tiempo de reposición (Lead Time), L

El tiempo de reposición o Lead Time (término normalmente usado en nuestro medio) es el tiempo que transcurre entre el momento de expedir una orden (de compra o de producción) y el instante en que se tienen los artículos listos para ser demandados por el cliente. Este factor es de fundamental importancia para el control de los inventarios, ya que es precisamente durante el tiempo de reposición cuando puede ocurrir un faltante de inventario, pues se supone que aquí el nivel de inventario está relativamente bajo, ya que dio lugar a la expedición de una orden.

En un ambiente no productivo, el tiempo de reposición comprende generalmente las siguientes etapas:

- Tiempo administrativo que transcurre entre la decisión de emitir una orden y su correspondiente preparación.
- Tiempo de tránsito de la orden hasta el proveedor.
- Tiempo empleado por el proveedor para procesar la orden, el cual, a su vez, depende de su nivel de inventario y condiciones generales de almacenamiento y producción.
- Tiempo de tránsito entre el proveedor y el lugar donde es solicitada la orden.
- Tiempo de recepción, inspección, ingreso al sistema y almacenamiento en el lugar donde es solicitada la orden.

El tiempo de reposición tiene ciertas implicaciones teóricas complejas; es decir, no es simplemente una diferencia de fechas en una hoja electrónica. Supongamos que a un proveedor le hemos puesto una orden de compra por cinco ítems, 500, 700, 800, 850 y 900 unidades de los ítems 1 al 5, respectivamente. El proveedor promete dos días de tiempo de reposición, al cabo de los cuales efectivamente llega el camión a nuestra bodega. Sin embargo, la entrega se hace por 500, 700, 800, 400 y 0 unidades, respectivamente. Es decir que faltaron 450 unidades del ítem 4 y todas las 900 unidades pedidas del ítem 5. El proveedor se compromete a entregar las cantidades faltantes al cabo de otros tres días, aumentando a cinco días la entrega completa de los ítems 4 y 5. ¿Cuál fue el tiempo de reposición de la orden de compra asociada a este proveedor?

La respuesta a esta pregunta no es fácil y esto ocurre todos los días en nuestro medio. Se podría decir que lo ideal sería llevar un registro de tiempos de reposición *por ítem* y *por proveedor* y no solamente por proveedor o por orden de compra. El problema es que las empresas a menudo no llegan hasta este nivel de detalle en sus sistemas de información e, incluso, ni siquiera se graba la información global por proveedor, de la cual podamos extraer tiempos de reposición promedios y estimar sus desviaciones estándar. Lo negativo es que muy probablemente, en el ejemplo, habrá rompimiento del inventario de los ítems 4 y 5, pues seguramente los cálculos de inventarios cíclicos y de seguridad se hicieron con un tiempo de reposición promedio del proveedor de dos o tres días, el cual no se cumplió para todos los productos. Estas son las complejidades prácticas que se deben sortear a diario y, como se ha podido comprobar, producen un efecto dramático sobre los sistemas de control de inventarios de las empresas. Algo semejante puede ocurrir cuando el proveedor es la propia planta productora, aunque en este caso puede haber mejores oportunidades de control.

Se ha observado, en la práctica, comportamiento de proveedores altamente variables en cuanto a su tiempo de reposición, con distribuciones de frecuencia que pueden fluctuar entre los 2 y los 20 días o más, con una forma muy irregular. Evidentemente, esta situación muestra que los tiempos de reposición rara vez se pueden considerar constantes y conocidos y, por lo tanto, debe incluirse en los análisis alguna aproximación a este problema. El capítulo 5 contempla los sistemas de control de inventarios considerando tiempos de reposición aleatorios.

Tipo y patrón de demanda, D

Se debe considerar, primero, un aspecto muy importante de la demanda, cual es su caracterización como *demandas independiente*, o como *demandas dependiente* o *derivada*. La demanda independiente es generada por entes externos a la empresa, como los clientes que compran los productos terminados que ésta manufactura. La demanda dependiente, por el contrario, como su nombre lo indica, depende de otras. El ejemplo más común es la demanda de materias primas y componentes generada por una demanda independiente de productos terminados. En general, la demanda dependiente es mejor controlada por sistemas *MRP* (*Material Requirements Planning*) y otras técnicas relacionadas. Los casos de demanda dependiente se analizan principalmente en los textos de producción. Este texto se enfoca en los casos de demanda independiente, con excepción del tema de control de inventarios con demanda determinística pero variable con el tiempo, expuesto en el capítulo 4, el cual está muy relacionado con los sistemas *MRP*. Para una descripción interesante sobre la relación entre la demanda independiente y la dependiente, puede consultarse a Gutiérrez (2006).

Otro aspecto de fundamental importancia, para el diseño de un sistema de administración de inventarios, es el patrón que sigue la demanda. El patrón de demanda más simple es el de *demandas constante y conocida*, tema que se analiza en el capítulo 4, el cual, obviamente, se aparta mucho de la realidad. Su utilidad principal radica en que algunos conceptos relacionados con este tipo de demanda, como el tamaño económico de pedido (*EOQ*), son importantes para la comprensión y el desarrollo de casos más complejos y que, de una u otra forma, se emplea en la práctica. La demanda también puede ser variable pero conocida (o sea, *demandas determinísticas*). Esta corresponde al famoso problema del tamaño dinámico de lote (*lot sizing*) y se trata igualmente en el capítulo 4.

La *demandas aleatoria* se presenta de acuerdo con varios patrones claramente identificables. La *demandas perpetua, estable o uniforme*, cuyo promedio se mantiene por largos períodos de tiempo y su fluctuación permanece dentro de rangos “pequeños”. Si el promedio de demanda varía significativamente con el tiempo, se tiene un patrón de demanda con

tendencia (creciente o decreciente), la cual generalmente se toma como lineal. Otro patrón de demanda ocurre cuando se esperan picos en determinadas épocas del año, como los artículos de Navidad o productos relacionados con las estaciones climáticas. Este patrón de demanda se denomina *periódico* o *estacional*. El patrón de *demandas erráticas* presenta grandes variaciones a lo largo del tiempo, pasando de períodos de cero demanda, a grandes picos. La diferencia entre este patrón y el periódico o estacional es que, en el errático, los picos no son predecibles, por lo cual es una de las demandas más complejas de administrar.

Pueden existir patrones de demanda que varían de un período a otro, presentándose combinaciones de los patrones anteriores, como la demanda de cuadernos en nuestro medio. En la época previa a la entrada a los colegios y universidades se presentan picos predecibles de demanda, mientras que, entre estos picos, la demanda puede catalogarse como relativamente estable. La figura 2.1 ilustra algunos patrones de demanda.

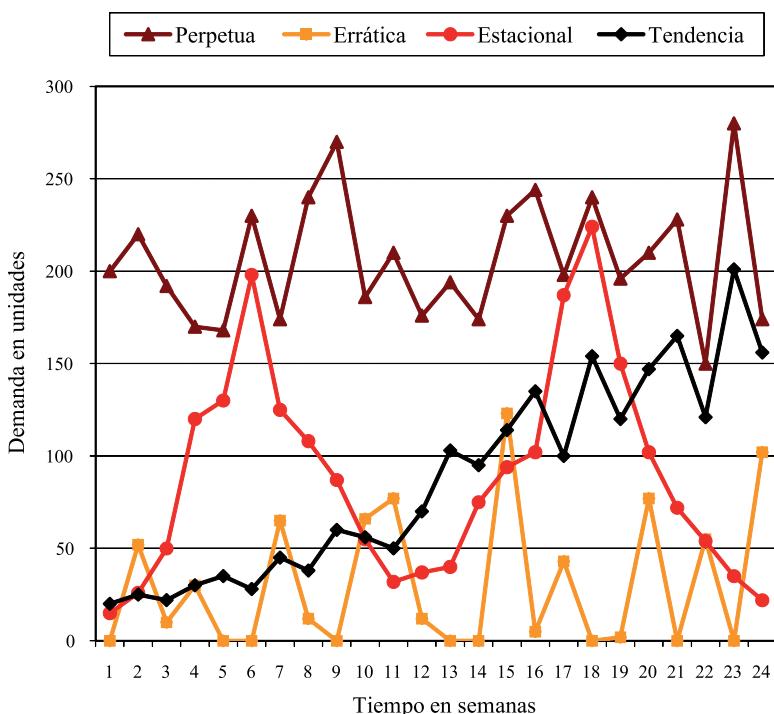


Figura 2.1. Diversos patrones de demanda

Una forma práctica de determinar si una demanda es perpetua o errática constituye en calcular el coeficiente de variación de la distribución de la demanda, definido como:

$$C.V. \text{ de la demanda} = \frac{\text{Desviación estándar de la demanda}}{\text{Demanda promedio}} \quad (2.2)$$

Si el coeficiente de variación es mayor o igual que 1 (100%), la demanda puede catalogarse como errática. En caso contrario, la demanda puede considerarse estacionaria o perpetua. Obviamente, entre menor sea el coeficiente de variación de la demanda, menor es su grado de aleatoriedad. Esto, por supuesto, es una regla muy general y cada caso debe analizarse en forma particular.

Ejemplo 2.1. (Demanda perpetua y demanda errática)

Considere los siguientes registros de demanda (en unidades) para dos ítems:

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ítem 1	54	78	120	15	33	68	102	80	45	17	60	125
Ítem 2	10	95	3	0	3	17	0	0	130	0	2	2

Si x_t es la demanda observada en el período t y n es el número total de períodos de observación (en este caso, 12 semanas), se puede estimar la demanda promedio y su desviación estándar para cada uno de los ítems anteriores, de acuerdo con las siguientes ecuaciones muy conocidas de la estadística:

$$\text{Demanda Promedio } \bar{x} = \frac{\sum_{t=1}^n x_t}{n}$$

$$\text{Desviación Estándar } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (2.3)$$

Al aplicar las Ecs. (2.3) al ejemplo, se obtienen los siguientes resultados:

Ítem	Demandas promedio	Desviación estándar	Coeficiente de variación
1	66,42	36,61	0,55
2	21,83	43,30	1,98

Se puede, entonces, concluir que el ítem 1 sigue un patrón de demanda perpetua, mientras que el ítem 2 presenta un patrón de demanda errática. Esta diferencia puede generar distintos sistemas de pronósticos y políticas de control del inventario de dichos ítems. En casos reales, es posible que se requiera un mayor número de datos para lograr estimaciones más precisas de los parámetros de la distribución de la demanda.

De acuerdo con el patrón que siga la demanda, se debe escoger el sistema de pronósticos adecuado. El objetivo del capítulo 3 es el estudio de diversos sistemas de pronósticos utilizados en el control de inventarios de ítems de demanda independiente.

Ejercicios 2.1

1. Suponga que usted ha sido llamado como asesor para diseñar sistemas de control de inventarios en un gran almacén de departamentos, o sea aquél que tiene secciones de supermercado, electrodomésticos, ropa, ferretería, droguería, papelería, etc.
 - a) Trate de estimar el número de ítems que un almacén de esta naturaleza maneja normalmente en su inventario.
 - b) Proponga posibilidades de agrupación de ítems para reducir su número y así la complejidad de los sistemas de control.
 - c) Diferencie diferentes tipos de ítems, como ítems perecederos, y comente, en general, sobre las dificultades que un sistema de control de inventarios tendría para este caso.
 - d) Dé algunos ejemplos sobre cuáles ítems tendrían muy probablemente demanda perpetua, errática, estacional, combinada, etc. Comente sobre las dificultades de control de cada tipo de ítem.
2. Discuta acerca de la función que desempeña el inventario de seguridad y por qué éste es a menudo, no requerido en ambientes que trabajan bajo *JIT*.
3. Tomando casos de la vida real, dé ejemplos de inventario cíclico, de seguridad, de anticipación y en tránsito. Discuta la utilidad que tiene el definir los tipos de inventarios de acuerdo con su función.
4. Una ferretería que maneja un inventario muy uniforme, en cuanto a su tamaño y manejo, está tratando de determinar su costo de mantenimiento del inventario. El primer acuerdo al que se llega es que los costos de oportunidad pueden tomarse como el 18% anual, de acuerdo con las tasas promedio de colocación a las que tiene acceso la empresa. El inventario promedio que se tuvo el último año fue de alrededor de 3.800 millones de pesos. Se ha determinado que los

costos de almacenamiento y manejo para el año pasado fueron los siguientes:

Instalaciones (Almacén y bodega)	\$	37.000.000
Mano de obra (Manejo de materiales)		57.000.000
Mantenimiento de equipo		17.500.000
Mantenimiento de las instalaciones		20.000.000
Personal de seguridad		27.500.000

Se ha reunido también la siguiente información adicional para el último año:

Daños y pérdidas	\$	33.750.000
Impuestos pagos sobre el inventario		26.550.000
Seguros pagos		42.000.000
Obsolescencia y depreciación estimadas		31.000.000

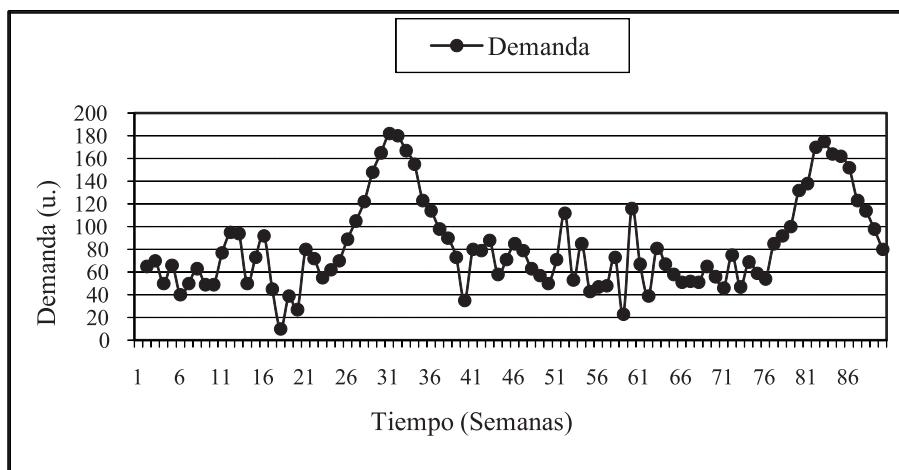
A partir de los datos anteriores, proponga un valor para la tasa del costo anual de mantenimiento del inventario, r , que maneja esta empresa.

5. El inventario de cierta empresa, principalmente compuesto por partes maquinadas, consiste en 6.000 ítems valorados por el departamento de Contabilidad en un promedio de 966 millones de pesos. La compañía había construido recientemente una nueva bodega a un costo de \$426 millones de pesos, financiados mediante un préstamo que paga el 17.5% anual efectivo. El edificio se deprecia en línea recta a 25 años. La compañía calcula un costo de capital del 10% anual. Los principales costos de operación anuales en la nueva bodega se estimaron así:

Impuestos	\$	13.185.000
Seguro de edificios y de inventario		7.360.000
Aire acondicionado		28.750.000
Electricidad y agua		9.578.000
Mano de obra		58.700.000
Filtraciones		11.500.000
Obsolescencia		11.500.000
Total	\$	140.573.000

Recomiende un valor para el costo de mantenimiento del inventario, r , en $\$/\$$ año. [Adaptado de Silver *et al.* (1998), p. 69].

6. Si en el problema No. 4 los artículos de que se habla no hubiesen sido tan “uniformes” en cuanto a su tamaño y manejo, ¿cómo considera usted que debería cambiarse la metodología de cálculo para la tasa del costo de mantenimiento del inventario r ?
7. Lea cuidadosamente el apéndice 5A (Medición de los costos de preparación) del texto de Fogarty *et al.* (1995, pp. 229-233). Discuta acerca de los tres métodos de cálculo de este costo, o sea, el método agregado, el costo estándar y el costo marginal presentados en el apéndice del texto mencionado.
8. Se dispone de datos de la demanda en unidades de cuatro ítems para las últimas 24 semanas, de acuerdo con la tabla 2.3.
 - a) Diseñe una hoja electrónica que le permita determinar el tipo de patrón de demanda que sigue cada uno de los cuatro ítems. Calcule el coeficiente de variación de la demanda para cada uno de ellos y concluya.
 - b) Dé ejemplos de ítems comerciales reales que pudieran seguir cada uno de los patrones de demanda identificados. ¿Qué tiene de especial el patrón de demanda del ítem 3?
 - c) Utilizando sus conocimientos de *regresión lineal simple*, pronostique la *tendencia* de la demanda del ítem 2 para las próximas cuatro semanas.
 - d) De acuerdo con su criterio, ordene los ítems con relación al grado de complejidad del control de inventario de cada uno. Sustente su respuesta.
9. La demanda de cierto ítem se observa gráficamente así:



- a) Dé ejemplos de ítems reales que pudieran seguir este patrón de demanda.
- b) En palabras, ¿cuál cree usted que podría ser un posible sistema de control del inventario de este ítem?

Tabla 2.3. Datos de demanda para el problema No. 8 (ejercicios 2.1)

Semana	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4
1	92	17	17	17
2	74	54	25	3
3	56	35	42	0
4	62	62	85	55
5	48	86	26	14
6	79	79	33	4
7	65	95	52	110
8	73	77	106	64
9	48	105	36	2
10	56	69	48	0
11	97	125	74	130
12	35	98	126	24
13	55	114	52	0
14	56	137	77	0
15	110	99	99	8
16	95	150	154	6
17	62	164	67	144
18	77	135	87	2
19	52	114	115	1
20	82	177	187	7
21	98	129	88	14
22	64	205	97	95
23	33	184	115	0
24	87	177	198	78

LECTURAS ADICIONALES

CHOPRA y MEINDL (2008): capítulo 10 (pp. 294-296) (Presentan de forma muy concisa la estimación de los costos relacionados con el inventario cíclico).

STOCK y LAMBERT (2001): capítulo 5 (pp. 187-225): *Impacto financiero de los inventarios* (Este capítulo es un excelente complemento para el tema de costos de inventario, ya que precisa los conceptos de costo de mantenimiento y su relación con la rotación del inventario).

SILVER *et al.* (1998): capítulo 3 (pp. 44-66) (Este capítulo explica con detalles adicionales el tema de costos de inventario).

FOGARTY *et al.* (1994): capítulo 5 (pp. 179-233) (La última parte de este capítulo presenta un análisis muy interesante sobre costos de inventario en general).

CAPÍTULO 3

PRONÓSTICOS DE DEMANDA

INTRODUCCIÓN

Prácticamente en todo proceso de decisión, en cualquier tipo de organización, debe pronosticarse una o más variables de interés. En una empresa del sector productivo, por ejemplo, es fundamental pronosticar los requerimientos de materiales para producir los bienes que ella manufactura; en un sistema financiero internacional es básico predecir el comportamiento del flujo de dinero y las tasas de cambio; en un sistema de servicios, como un restaurante de comidas rápidas, es muy importante pronosticar la carga de trabajo para asignar el número de personas adecuado que atenderá a los clientes en cierto período; en una empresa que comercializa productos, o sea que compra a un número de proveedores y vende el mismo producto a una población de clientes, se hace necesario pronosticar la *demand*a que dichos clientes van a generar.

En cualquier caso, el sistema de pronósticos es un elemento clave para el cumplimiento de los objetivos de la organización y para el mejoramiento de su competitividad, ya que, de no tomar las decisiones correctas, se puede caer en extremos como el deficiente servicio al cliente, el exceso de inventarios o, peor aún, ambos factores en forma simultánea cuando se presenta el desbalance de los inventarios.

En este capítulo se presentan las principales técnicas de pronósticos de demanda independiente, la mayoría de las cuales han sido utilizadas y evaluadas en casos reales. Inicialmente, se describen las principales características de cualquier sistema de pronósticos, haciendo énfasis en los factores que afectan la precisión de los mismos y en los indicadores de eficiencia del pronóstico. Seguidamente, se presentan los sistemas de pro-

nósticos de promedio móvil y suavización exponencial simple, indicados para patrones de demanda estable, perpetua o uniforme. A continuación se explica el sistema de pronósticos de suavización exponencial doble, útil para casos de demandas con tendencia creciente o decreciente. Posteriormente, se introducen los métodos de pronósticos de demanda estacional o periódica y se incluye el método de Croston para los casos de demanda errática o intermitente. En la sección siguiente se da una introducción al tema del cálculo de inventarios de seguridad con base en la información extractada del sistema de pronósticos. El capítulo concluye presentando el tema de los errores suavizados y las señales de rastreo, de gran utilidad para el control de los sistemas de pronósticos.

NATURALEZA DE LOS SISTEMAS DE PRONÓSTICOS

El primer aspecto que debe tenerse en cuenta es que *los pronósticos de demanda siempre estarán errados*. Esto no es sorprendente ya que cuando se pronostica, se está anticipando lo que ocurrirá en el futuro. La clave del éxito de un sistema de gestión de inventarios es, por lo tanto, conocer a fondo los *errores del pronóstico* y responder a ellos en forma adecuada mediante la utilización de *inventarios de seguridad*.

El segundo aspecto de importancia en un sistema de pronósticos es la definición del tipo de pronóstico a utilizar. Diversos autores reconocen los siguientes métodos de pronósticos:

- *Cualitativos*: son fundamentalmente subjetivos y se utilizan ante la carencia de datos históricos. Son basados prácticamente en la experiencia del analista. Pueden ser muy importantes para el caso de pronósticos de demanda de ítems nuevos. Una extensa revisión de bibliografía y análisis sobre este tema puede encontrarse en Fildes *et al.* (2009) y en Lawrence *et al.* (2006).
- *Series de tiempo*: son métodos cuantitativos estadísticos basados en datos históricos de demanda. Son fundamentales para cualquier sistema de pronósticos que se elija. En este tipo de pronósticos se asume que el comportamiento de la demanda va a ser aproximadamente igual al que se venía presentando en el tiempo, reflejado en los datos históricos disponibles.
- *Causales*: son métodos que asumen alta correlación entre los pronósticos de demanda y ciertos factores externos, como la economía de un país, el crecimiento de la población, la demanda de otros productos que influencian la del que se está analizando, entre otros posibles.
- *Por analogía*: estos métodos se basan en la observación de hechos pasados similares al que se quiere pronosticar. Por ejemplo, cuando

se trata de pronosticar la demanda de una promoción de un producto, se analiza lo que pasó en promociones anteriores semejantes. Lee *et al.* (2007) proveen un extenso análisis acerca del uso de analogías para el pronóstico de demanda.

- *Simulación*: son métodos que generalmente combinan estrategias de series de tiempo con pronósticos causales. En estos métodos se trata de simular el comportamiento de los clientes para inferir los niveles de demanda futuros.
- *Combinación de los anteriores*: tienen un gran potencial y suelen ser los más efectivos en la mayoría de los casos.

A continuación se detallan otros aspectos fundamentales que caracterizan un sistema de pronósticos.

Pasos fundamentales y ambiente general de un sistema de pronósticos

La implementación exitosa de un sistema de pronósticos requiere de ciertos pasos a considerar. Estos son:

- Definir y comprender qué se desea pronosticar y para qué se van a utilizar los pronósticos. No es lo mismo la realización de pronósticos para efectos de control estadístico de la calidad de un producto, que los pronósticos de demanda de un producto para efectos de planeación de compras y despachos.
- Establecer canales de comunicación adecuados entre todos los elementos de la cadena de abastecimiento con el objeto de tomar las decisiones en forma integral. Por ejemplo, si un pronóstico de ventas realizado por el departamento de Mercadeo no se comunica a tiempo a los planeadores de demanda, a los administradores de materias primas y a la planta de producción, muy probablemente dicho pronóstico no se podrá cumplir. A veces resulta increíble, pero en la práctica muchas veces se presenta una gran desinformación entre los departamentos de una misma empresa, lo que causa grandes problemas en la obtención, análisis y utilización de los pronósticos de demanda.
- Analizar detalladamente cualquier factor que pueda afectar al pronóstico. Dentro de estos factores se puede mencionar la forma como el producto se va a adquirir o a producir, la segmentación de los clientes y la naturaleza del producto (consumo masivo, grado de substituidabilidad, perecedero o no, etc.), entre otras posibles.
- Definir un sistema adecuado de pronósticos y de medición del error del pronóstico para cada caso en particular. No es lo mismo pronosticar ítems con demanda estable e ítems con demanda errática. El resto de este capítulo se dedica principalmente a analizar este punto.

La figura 3.1 presenta el ambiente general bajo el cual generalmente se desenvuelve un sistema de pronósticos. Nótese la importancia que tienen los registros históricos de demanda, ya que permiten una mejor selección del modelo a utilizar y su “puesta a punto” para el arranque de los pronósticos, a través de métodos de simulación del pronóstico, los cuales serán explicados posteriormente. Otro aspecto básico que siempre forma parte de un sistema de pronósticos es la intervención humana basada en la experiencia, con la cual se refinan los sugeridos brindados por el sistema, especialmente para los ítems clase A (los más importantes), los cuales requieren de un seguimiento continuo por parte de la administración.

Fildes *et al.* (2006) expresan que los pronósticos son típicamente producidos por la combinación del juicio administrativo y técnicas cuantitativas, dentro de un sistema de soporte para pronósticos. En su artículo, los autores mencionan que a menudo no se da esta integración con los consiguientes efectos negativos en la precisión del pronóstico e identifican factores para disminuir este efecto. Obsérvese dentro de este contexto la importancia de la medición y utilización de los errores de pronóstico, los cuales son la fuente de análisis para determinar la conveniencia del modelo utilizado.

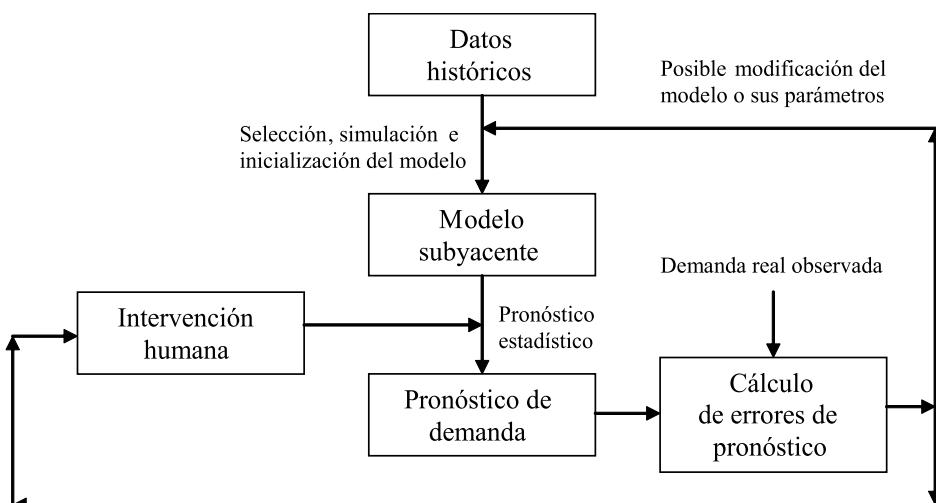


Figura 3.1. Ambiente común de un sistema de pronóstico

[Fuente: Adaptada de Silver *et al.* (1998), p. 75]

Los errores de pronóstico son básicos, principalmente, por tres razones:

- Proveen una forma de estimar la *variabilidad de la demanda* y de determinar el inventario de seguridad adecuado, lo cual es funda-

- mental para balancear los inventarios y evitar el problema de agotados de ítems clave y de exceso de ítems menos importantes.
- Permiten determinar la *conveniencia del modelo* de pronósticos seleccionado o de la posible actualización de sus parámetros.
 - Ilustran al administrador para su *intervención* en el pronóstico.

Otro aspecto inherente a un sistema de pronósticos es el costo total del sistema escogido. Entre más sofisticado sea el sistema de pronósticos, probablemente se podrá pronosticar mejor la demanda y su variabilidad, pero, a la vez, esto tendrá un mayor costo al requerirse mayor esfuerzo humano y de computación. Si, por el contrario, se utiliza un sistema de pronósticos menos complejo, los costos de operación del sistema serán menores, pero la precisión de los pronósticos será menor, lo que puede causar pérdidas debidas a la presencia de mayores fuentes de variabilidad. Claramente, y como se muestra en la figura 3.2, el sistema de pronósticos ideal debería operar cerca de la zona donde el costo total es mínimo y donde exista un equilibrio entre la precisión deseada del pronóstico y el costo asociado de obtenerla. El arte del analista consiste en seleccionar, de acuerdo con esto y con las condiciones particulares de su organización, el mejor sistema de pronósticos.

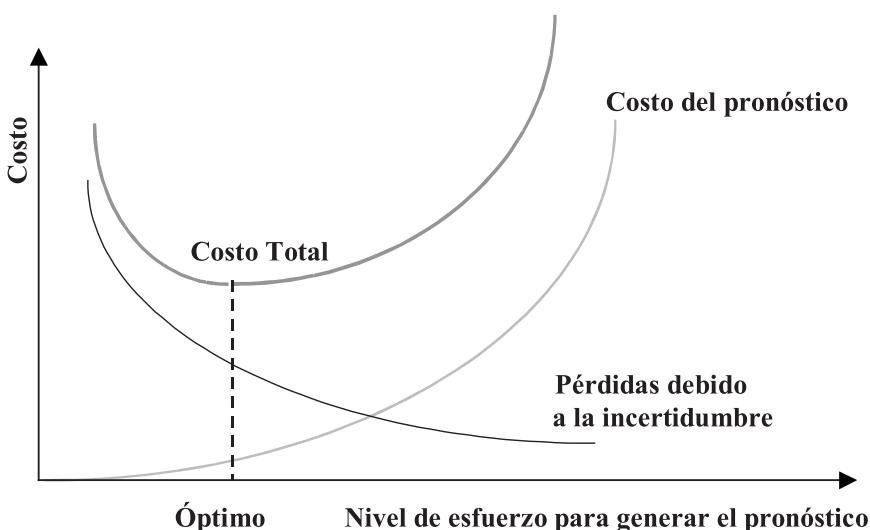


Figura 3.2. Conflicto de costos en un sistema de pronósticos

La importancia de la medición de la demanda no servida

Nótese que desde un comienzo se ha venido hablando de “pronósticos de demanda”. Esto significa que la variable de interés es la demanda de los ítems que hay en inventario. Una práctica muy común es la de pronosticar

las *ventas* y no la demanda. La diferencia es que cuando no ocurre una venta, sí pudo haber ocurrido una demanda, la cual no se pudo satisfacer por no tener disponible el producto o por algún otro motivo. También puede presentarse una venta parcial por no disponer de la totalidad de la cantidad demandada. Esta demanda se denominará de ahora en adelante “demanda no servida” o “demanda no satisfecha”. El impacto que esto puede tener en los pronósticos es significativo y se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1. (Impacto de la demanda no servida)

Consideré los siguientes registros de *ventas* de 12 semanas para un ítem en particular (se incluyen también los registros de demanda del ítem):

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ventas	10	9	3	5	3	3	0	0	0	0	2	2
Demandada	10	9	3	5	3	3	4	7	3	5	2	2

Un método muy sencillo de pronóstico, el cual se analizará más adelante, consiste en calcular el promedio de las ventas de las últimas 12 semanas mediante la Ec. (2.3), y tomar este valor como el estimado de ventas para la semana siguiente, o sea, la semana 13, en este caso. Este promedio es igual a $37/12 = 3,08$ unidades, o sea, 3 unidades aproximadamente. Sin embargo, note que de las semanas 7 a la 10 no se registraron *ventas* de este producto, lo cual pudo haber sido ocasionado por un agotado del producto y pudieron haber existido clientes que sí demandaron el producto, quienes no fueron satisfechos.

Suponga que realmente ocurrieron las siguientes *demandas* para las semanas 7 a la 10: 4, 7, 3 y 5 unidades, respectivamente, como se ilustra arriba. Si se recalcula el promedio, se obtendría $56/12 = 4,67$, o sea, 5 unidades aproximadamente, un 67% más de lo que se había pronosticado anteriormente.

Por otra parte, al calcular la desviación estándar mediante la Ec. (2.3) con los registros de cero ventas, se obtiene 3,40 unidades, contra una desviación estándar de 2,67 unidades al considerar la demanda no servida. El cálculo correcto podría contribuir a un ahorro del 21,5% en inventario de seguridad, si se asume que éste se va a determinar proporcionalmente a la desviación estándar de la demanda. Este simple ejemplo ilustra el gran impacto que puede tener el hecho de no medir la demanda no servida o de medirla sin la máxima precisión posible.

A pesar del impacto significativo que tiene la demanda no servida sobre los pronósticos de demanda, usualmente no es fácil determinarla. Por ejemplo, en un supermercado un cliente se acerca a una góndola y al no encontrar el producto que estaba buscando, probablemente escogerá y com-

prará otro de diferente marca, de acuerdo con su grado de sustitibilidad. Esta demanda no servida del producto de la marca original, sin embargo, no queda registrada en parte alguna. Es por eso que ocasionalmente, en algunos supermercados, al pagar en la caja registradora se le pregunta al cliente si hubo algún producto que estaba buscando y que no encontró y de ser así, éste se anota. Papakiriakopoulos *et al.* (2009) presentan técnicas para desarrollar un sistema de soporte a las decisiones para detectar automáticamente productos que no estén en la góndola. Ellos aclaran que un cliente puede no encontrar el producto porque éste en realidad esté agotado en la góndola o porque esté mal ubicado dentro del punto de venta.

La estimación de la demanda no satisfecha de productos que se distribuyen por múltiples canales, como la goma de mascar, es muy compleja, ya que el canal tradicional (o sea, las tiendas de barrio y las rapitiendas) es atendido por distribuidores quienes generalmente no pueden estimar la demanda no servida con precisión. En otras ocasiones, la demanda no servida puede estimarse en forma más precisa, como es el caso de las droguerías donde generalmente llegan los clientes con prescripciones de donde se puede extraer más fácilmente la información sobre medicamentos agotados y su demanda no servida.

Elementos de tiempo en un sistema de pronósticos

Existen tres factores de tiempo que deben especificarse en cualquier sistema de pronósticos, a saber:

- El período del pronóstico,
- El horizonte de planeación del pronóstico, y
- El intervalo del pronóstico.

El *período del pronóstico* es la unidad básica de tiempo para la cual se realiza el pronóstico y depende de la naturaleza del proceso bajo estudio y de la forma como se registran las transacciones en la organización. Por ejemplo, en muchos sistemas es usual tomar como período de tiempo una semana, aunque es posible llevar este pronóstico a diario. Es muy sencillo implementar pronósticos semanales o mensuales a partir de datos diarios de demanda, pero lo contrario no es posible. Por ello, si se piensa que eventualmente se necesitan períodos del pronóstico más cortos, se debería registrar las ventas y la demanda no servida con una base diaria, por ejemplo, así en un comienzo sólo se utilice los datos agrupados en forma semanal o mensual.

En algunas ocasiones, la escogencia del período del pronóstico es crucial para el buen comportamiento del sistema. Usualmente las demandas diarias de productos en un supermercado dependen del día de la semana.

Así, es común que en los días sábados y domingos, o en los días cercanos a la fecha de pago, las ventas de un supermercado se incrementen con relación a los demás días de la semana. Por eso, al escoger un período del pronóstico igual a un día, se podría inducir alta variabilidad en los datos diarios, mientras que si se agrupan las demandas en forma semanal, es posible que dichas variaciones diarias se amortigüen y así la variabilidad del pronóstico disminuya. El estudio detallado de este factor en cada caso es, por supuesto, lo recomendable. Un caso real que considera las diferencias de demanda entre los días de semana puede consultarse en Zamora y Ruiz (2008).

Se sabe de un proyecto de pronósticos de demanda de medicamentos donde los ítems clase C no era recomendable pronosticarlos semanalmente, sino mensualmente, debido a que una gran proporción presentaba demanda altamente errática, con lo que los ceros de demanda semanal se veían compensados si se consideraba el mes completo, disminuyendo así, en gran parte, la variabilidad de los errores del pronóstico. Wild (1997, p. 143) sostiene que es mejor utilizar períodos de tiempo más pequeños, *a menos que las demandas en los períodos se vuelvan no estandarizadas*, como en algunos casos de los días viernes cuando la demanda es diferente del resto de días de la semana, lo que ocasionaría datos, para el sistema de pronósticos, con un pico cada viernes, en caso de escoger un día como el período base. La decisión final sobre cuál período del pronóstico utilizar depende también de las características del sistema de información que se utilice para registrar las ventas y la demanda no servida.

El *horizonte de planeación del pronóstico* es el número de períodos en el futuro cubiertos por el pronóstico. Se puede pronosticar hoy la demanda semanal para las próximas cuatro semanas, sin embargo, usualmente el horizonte de planeación es de un solo período, o sea, la próxima semana, en este caso. El horizonte de planeación no debe ser menor que el tiempo necesario para implementar la decisión correspondiente. Si se está efectuando un pronóstico de demanda con horizonte diario, esto no sería de mucha utilidad si la recepción de las órdenes tardara más de un día.

El *intervalo del pronóstico* es la frecuencia con la que se efectúan los nuevos pronósticos, a medida que se vaya obteniendo información adicional. A menudo este intervalo coincide con el período principal del pronóstico, o sea que para el ejemplo anterior, el pronóstico se actualizaría cada semana. Para la determinación del intervalo del pronóstico es importante tener en cuenta el modo en el que opera el sistema de procesamiento de datos de la organización, el cual provee la información sobre la variable que se pronostica. Si, por ejemplo, la información se actualizara diariamente, cualquier período de tiempo igual o superior a un día podría ser adecuado para escoger el intervalo de pronóstico. Se recomienda, sin embargo, en

cuanto sea posible, hacer coincidir al intervalo del pronóstico con su período base.

Características del proceso que se pronostica y recursos de computación

Todo sistema de pronósticos está enfocado a predecir variables de un proceso claramente determinado. Es, por lo tanto, básico determinar la forma y estabilidad del proceso en cuestión.

Si se sabe que el proceso es muy estable, el sistema de pronósticos debe diseñarse acordeamente, lo cual conducirá a un proceso computarizado con poca intervención humana. Si, por el contrario, se observa que el proceso de demanda es muy errático, debe refinarse el método de pronóstico de acuerdo con la naturaleza propia de la demanda observada y privilegiar la intervención humana basada en la experiencia. En cualquier caso, la información histórica que se posea es fundamental para determinar la naturaleza del proceso (figura 3.1).

Otro aspecto significativo es el conflicto que existe entre la disponibilidad y calidad de los recursos de computación de la organización, y el sistema de pronósticos a utilizar. Si sólo se pronostica un número bajo de variables y en forma no muy frecuente, se pueden escoger métodos de pronóstico altamente sofisticados que consumen mucho tiempo de computación, los cuales probablemente brindarán mejores resultados. Si, por el contrario, se trata de pronosticar un gran número de variables muy frecuentemente, es preferible dedicar más esfuerzo al manejo eficiente de los datos, y a los procedimientos de administración del pronóstico, que al método en sí. Algo semejante a lo anterior sucede cuando se pronostica un bajo número de ítems en comparación con los pronósticos de miles de ítems.

Finalmente, un factor de primordial importancia para el éxito de un sistema de pronósticos es la voluntad de participación activa de la administración y de todo el personal involucrado. La credibilidad del sistema de pronósticos y su conocimiento detallado, por parte de todas las personas, son también factores claves para el éxito de cualquier sistema de pronósticos.

Causas de imprecisión en los sistemas de pronósticos

Se pueden considerar las siguientes causas como las principales para que un sistema de pronósticos y de control de inventarios no produzca los resultados deseados:

- *Utilización de datos poco confiables, desactualizados o insuficientes.* La precisión de los registros del inventario físico existente es fundamental. Un error en el dato del inventario disponible (kárdex, por ejemplo), puede no considerar un ítem importante para el cual el sistema “cree” que aún tiene inventario disponible. Kang y Gershwin

(2005) discuten ampliamente este punto y concluyen que la inexactitud de los inventarios físicos es uno de los grandes obstáculos para la administración de los inventarios en una cadena de abastecimiento. Además, afirman que si no se implementan algunas medidas de control del problema, tales como inventario de seguridad adicional, conteos manuales y corrección de los registros, ajustes automáticos de los registros y medidas directas utilizando tecnologías de identificación de radio frecuencia RFID (*Radio Frequency IDentification*), aun una pequeña fracción de inventario perdido, puede interferir en el proceso de reposición y causar severos faltantes. Por otra parte, la calidad y cantidad (tamaño de muestra) de los datos históricos de ventas y demanda no servida son fundamentales para el éxito del sistema, ya que los resultados de cualquier modelo, por sofisticado que sea, dependen de la información que se le suministre.

- *Utilización de datos de ventas en lugar de datos de demanda real.* Aunque este caso ya ha sido comentado anteriormente con relación a la distorsión de los promedios y la desviación estándar en casos de faltantes sin el adecuado registro de la demanda no servida, vale la pena discutir otro caso. Supóngase, por ejemplo, que la demanda de un ítem para las últimas tres semanas fue de 150, 120 y 85 unidades. Si hubo faltante en las primeras dos semanas, y es posible administrar órdenes pendientes, esta demanda podría cubrirse totalmente en la semana 3 al recibirse el pedido. Sin embargo, el registro del sistema, en cuanto a ventas, sería de 0, 0 y 355 unidades para las semanas 1, 2 y 3, respectivamente. Claramente, la última situación no refleja el comportamiento real de la demanda y puede distorsionar cualquier sistema de pronósticos, ya que, aunque produce el mismo promedio, afecta significativamente el cálculo de la variabilidad de la demanda (la desviación estándar medida para la muestra registrada en el primer caso es 32,53 unidades, mientras que en el segundo caso es 204,96 unidades). Este error de registro puede hacer aumentar el inventario de seguridad innecesariamente.
- *Sesgos en los pronósticos.* Un problema real que afecta cualquier sistema de pronósticos, bien sea basado en técnicas estadísticas o no, es la aparición de sesgos por encima o por debajo de la demanda real. Un sesgo se caracteriza porque el pronóstico es consistentemente superior (o inferior) a la demanda real en varios períodos consecutivos; esto indica claramente que se está sobreestimando (o subestimando) la demanda. En un sistema de pronósticos bien diseñado este problema es manejable a través de técnicas de control y señales de rastreo, las cuales se estudiarán posteriormente. Donde usualmente ocurren estos problemas es en los pronósticos subjetivos, principalmente del

personal de ventas de una organización, ya que se tiende a inflar artificialmente el pronóstico para tratar de disponer siempre de mercancía para la venta. Esta práctica no es la mejor y debe evitarse para el beneficio de toda la organización.

- *Velocidad de respuesta al cambio.* Cualquier sistema real presenta variaciones aleatorias en sus variables. La demanda, aunque puede presentar uniformidad en su tendencia, siempre presentará fluctuaciones. Estas variaciones normalmente no pueden predecirse y en muchas ocasiones causan una reacción exagerada del sistema de pronósticos o de la administración del mismo. Por ejemplo, si durante dos períodos consecutivos la demanda se incrementa significativamente, puede deberse a un cambio real en la tendencia de la demanda, o puede ser una simple variación aleatoria ocasionada por la demanda de uno o varios clientes especiales. Reaccionar a este cambio en forma acelerada puede conllevar a una inestabilidad no deseada del sistema de pronósticos y a sesgos en el mismo. Este fenómeno se conoce también como el “nerviosismo” del sistema de pronósticos.
- *Comportamiento de los proveedores o de los sistemas de producción.* Siempre deberá tenerse en cuenta la eficiencia y eficacia de los proveedores para el correcto manejo de un sistema de inventarios. La velocidad de entrega de los pedidos, la consistencia de los tiempos de reposición y la precisión y cumplimiento total de las órdenes son factores a analizar profundamente cuando se fijan niveles de inventarios de seguridad. Un aumento continuo y consistente de demanda, puede hacer reaccionar al sistema de pronósticos utilizado, pero puede dejar en desventaja a un proveedor de baja capacidad, quien no podrá responder a dicho cambio. Por el contrario, una disminución de demanda puede hacer que un proveedor dilate su tiempo de reposición esperando a completar sus tamaños de lote mínimos, a través de su propia aplicación del principio de posposición de tiempo. Algo semejante sucede en los sistemas productivos.
- *Inclusión de datos atípicos de demanda en el pronóstico.* Frecuentemente la demanda presenta “picos” (*outliers*), especialmente por encima de lo normal. Esto puede ser ocasionado por un pedido especial de un cliente, por ofertas y promociones, o por otras causas. Si estos picos de demanda son puntuales y aislados, no deberían incluirse en el sistema normal de pronósticos, ya que tienden a distorsionar futuras predicciones y la variabilidad de la demanda. Supongamos que la demanda de cierto ítem en una semana dada fue de 1.474 unidades. El promedio de la demanda de las 12 semanas anteriores a dicha semana fue de 102 unidades. Se trató, obviamente, de una venta espe-

cial. Si este valor se incluye en el pronóstico normal, el pronóstico y la estimación de la variabilidad de la demanda se van a ver distorsionados y muy probablemente ocasionarían excesos de inventario. En estos casos, por lo tanto, es preferible ignorar el pico de demanda y reemplazarlo, por ejemplo, por el promedio de demanda que se venía manejando. El arte de este control, por supuesto, consiste en poder identificar en forma automática los picos de demanda y en implementar las soluciones a las que haya lugar. De una u otra forma, no es recomendable tampoco borrar automáticamente todos los datos atípicos de demanda, pues, en algunos casos, pueden corresponder a verdaderos cambios en la tendencia de la misma. Por ello se sugiere, si es posible, analizar detenidamente cada dato atípico de demanda que se presente, especialmente de los ítems clase A.

- *Selección del período del pronóstico.* La teoría sugiere seleccionar períodos de pronóstico lo más pequeños posible, ya que se espera que la variabilidad decrezca a medida que decrece el tamaño de este período. Así, podría ser recomendable analizar pronósticos diarios en vez de los semanales. Sin embargo, el esfuerzo de computación adicional puede no ser justificado, especialmente si se cuenta con expresiones matemáticas aproximadas para inferir las variaciones semanales a partir de las variaciones diarias o viceversa. Como se mencionó anteriormente, puede ocurrir también que en un día especial, por ejemplo, los sábados, se presenten pico o bajas de demanda, lo que adiciona variabilidad al sistema y entonces sería mejor tomar períodos de una semana, los cuales podrían ser más uniformes. La decisión final depende del análisis más profundo de los datos históricos disponibles.
- *Otros factores.* Frazelle (2002, pp. 114-115) incluye otros factores como posibles fuentes de errores de los pronósticos. Ellos son: 1) La *negación* que frecuentemente hacen las empresas de los procesos de pronósticos por considerarlos inútiles e inexactos y la resistencia al cambio de las personas. 2) La *ignorancia* de ciertos factores que pueden ser significativos para realizar el pronóstico como la influencia que tienen algunas ocasiones especiales en la demanda de ciertos productos, tendencias económicas, el comportamiento de ciertos clientes, las demandas de otros productos que afectan la demanda estudiada. Por ejemplo, una empresa productora de llantas debería fijarse en las estadísticas de ventas de vehículos, ciertos períodos de tiempo atrás. 3) La variabilidad que induce el *efecto látigo (bullwhip)*, o sea, cuando las fluctuaciones de demanda aumentan corriente-arriba en la cadena de abastecimiento.

Adicionalmente a las ya mencionadas, Frazelle incluye las siguientes estrategias para aliviar las fuentes de error de los pronósticos:

- *Tratar de eliminar la necesidad de pronosticar.* Hay algunas situaciones en las cuales no es necesario realizar pronósticos, como cuando se tienen sistemas productivos por orden (claro que en este caso habría que pronosticar, probablemente, los componentes y materias primas); cuando se utiliza demanda dependiente, como en el caso del *MRP*, y cuando se busca eliminar o disminuir los tiempos de reposición de los proveedores.
- *Medir la precisión a través de los errores del pronóstico.* Es fundamental medir la precisión de los errores del pronóstico para poder saber cómo está operando el sistema y, además, para definir verdaderos pronósticos de demanda que tengan en cuenta dichas medidas de variabilidad de la demanda (figura 3.1).
- *Tratar de medir la demanda correctamente y en el lugar adecuado.* La demanda debe medirse como las ventas, más la demanda no satisfecha y debe hacerse lo más cerca posible de donde ocurre. Como en el caso de la droguería mencionado anteriormente, y en el control de inventarios de repuestos donde la demanda debería medirse al lado de la máquina que está requiriendo las piezas.
- *Implementar actividades colaborativas.* Uno de los grandes problemas de los pronósticos es que muchas veces se realizan en forma aislada del resto de la cadena y de los otros actores de la misma. Por ejemplo, un centro de distribución que está abasteciendo a varios puntos de venta podría tratar de pronosticar su demanda a través de los pedidos de los detallistas, en lugar de medir la demanda verdadera de los clientes. Esto es lo que genera precisamente el aumento de la variabilidad de la demanda corriente-arriba en la cadena, y es conocido ampliamente como el “efecto látigo” (*bullwhip*) ya mencionado. Existen técnicas de colaboración en la cadena que tratan de aliviar este problema, tanto a nivel de la misma organización, como entre firmas diferentes, como lo que puede ocurrir entre una empresa y sus proveedores externos. Las técnicas de planeación, pronósticos y reposición colaborativos (*Collaborative Planning Forecasting and Replenishment, CPFR*) son unas de las más conocidas.
- *Conseguir información de eventos especiales.* Muchas veces se programan eventos especiales como campañas y promociones, las cuales necesariamente incrementan la demanda de los productos. Obtener información sobre estos eventos es esencial para mejorar su pronóstico y evitar la ocurrencia de faltantes o sobrantes. Otro ejemplo se da en el control de inventarios de repuestos con las acti-

vidades de mantenimiento preventivo, las cuales están programadas y deben ser conocidas por todas las personas encargadas del control de dichos ítems.

- *Implementar actividades rápidas de reacción.* Cuando se presentan faltantes o sobrantes por errores excesivos del pronóstico, es muy importante diseñar estrategias de reacción tanto a la ocurrencia de faltantes, como de sobrantes excesivos (los famosos “planes B”). Por ejemplo, la ausencia inminente de un componente clave en producción puede evitarse por una orden rápida hacia el proveedor y transporte aéreo de los ítems. Equivalentemente, si se genera un exceso de productos después de una promoción, deben programarse rápidamente las devoluciones correspondientes.
- *Escoger el modelo adecuado de pronósticos.* Como se estudiará a continuación, cada modelo de pronósticos está diseñado bajo un modelo subyacente de demanda. Por ejemplo, es un error utilizar un sistema de pronósticos de promedio móvil diseñado para demandas estables, o perpetuas para el pronóstico de un ítem con demanda creciente.

Indicadores de eficiencia de un sistema de pronósticos

Cualquier sistema de pronósticos se justifica si es útil para el proceso de toma de decisiones, por ejemplo, niveles de inventario a mantener, determinación de las cantidades a comprar, etc. Los principales indicadores de eficiencia de un sistema de pronósticos están relacionados, entonces, con los siguientes aspectos:

- Precisión.
- Costo.
- Utilidad de los resultados.
- Estabilidad y respuesta del sistema de pronósticos.

La *precisión* de un pronóstico se mide con base en los errores de éste, los cuales se calculan como la diferencia entre el valor real observado y su pronóstico calculado en algún período anterior al observado. Obviamente, el cálculo del error de pronóstico sólo puede hacerse después de conocerse el valor real observado de la variable que se está estimando. La expresión más común para el cálculo de este error es la siguiente:

$$\text{Error del pronóstico } e_t = x_t - \hat{x}_t \quad (3.1)$$

donde:

e_t = Error del pronóstico de demanda para el período t .

x_t = Valor real u observación de la demanda en el período t .

\hat{x}_t = Pronóstico de demanda para el período t , calculado en algún período anterior, generalmente un período antes.

Por ejemplo, si se pronosticó una demanda de $\hat{x}_t = 150$ unidades de cierto ítem para la semana pasada, y la demanda real fue de $x_t = 135$ unidades, entonces el error de pronóstico es $e_t = x_t - \hat{x}_t = 135 - 150 = -15$ unidades. Nótese que el error de pronóstico definido anteriormente conserva su signo algebraico. Como se mencionó anteriormente, en general, el pronóstico se calcula en el período anterior al período que se está pronosticando; en lo que sigue, se asume esta convención a menos que se especifique lo contrario.

Otros medidores de variabilidad que han demostrado ser más efectivos que el anterior, por cuanto su suma no tiende a cancelarse con signos contrarios, son los siguientes:

$$\text{Error absoluto } |e_t| = |x_t - \hat{x}_t| \quad (3.2)$$

$$\text{Error cuadrático } e_t^2 = (x_t - \hat{x}_t)^2 \quad (3.3)$$

En el ejemplo anterior, el error absoluto sería igual a $|-15| = 15$ unidades y el error cuadrático del pronóstico sería $(-15)^2 = 225$ unidades².

Una medida del error del pronóstico frecuentemente utilizada en la industria es el error absoluto porcentual (*Absolute Percentage Error*), definido usualmente como en la Ec. (3.4) y algunas veces como en la Ec. (3.5):

$$\text{Error Porcentual } APE = 100 \times \left| \frac{x_t - \hat{x}_t}{x_t} \right| \quad (3.4)$$

$$\text{Error Porcentual } APE' = 100 \times \left| \frac{x_t - \hat{x}_t}{\hat{x}_t} \right| \quad (3.5)$$

En la Ec. (3.4), el *APE* se define utilizando el valor absoluto del error porcentual con respecto del valor real de la demanda observada; esta es tal vez la forma más utilizada. Sin embargo, algunos planeadores de demanda utilizan la Ec. (3.5), la cual se ha denominado *APE'*, donde se utiliza el pronóstico de la demanda como la referencia para calcular el porcentaje de desviación. Una hipótesis es que esto se hace así para evaluar qué tan certera es la persona que realiza el pronóstico en lugar de la precisión del pronóstico mismo. Obsérvese, finalmente, que ambos indicadores tienen problemas de estabilidad numérica cuando existen valores de demanda, o

pronósticos cercanos o iguales a cero, especialmente en los casos de demanda intermitente. Para ilustrar, en el ejemplo dado anteriormente, estas medidas del error del pronóstico serían iguales a:

$$APE = 100 \times \left| \frac{135 - 150}{135} \right| = 11,11\%$$

$$APE' = 100 \times \left| \frac{135 - 150}{150} \right| = 10,00\%$$

Evidentemente, el error del pronóstico para un solo período no es muy útil. Por lo tanto, se necesita disponer de errores absolutos, cuadráticos o porcentuales para n períodos, para así obtener el promedio de esos errores sobre dichos períodos. Estos índices se denominan la desviación absoluta media (*Mean Absolute Deviation, MAD*), el error cuadrático medio (*ECM*) (en inglés *Mean Square Error, MSE*) y la desviación absoluta porcentual media (*Mean Absolute Percentage Error; MAPE*). Por ser usualmente utilizado en nuestro medio, usaremos el término en inglés *MAD* para la desviación absoluta media (algunos autores utilizan el término “desviación media absoluta”, pero no se considera adecuado pues la *MAD* es realmente un promedio de errores absolutos).

La *MAD* se define como el promedio de los errores absolutos sobre un número determinado de períodos, de la siguiente forma, donde n es el número de períodos:

$$MAD = \frac{\sum_{t=1}^n |x_t - \hat{x}_t|}{n} \quad (3.6)$$

El *ECM* se define como el promedio de los errores cuadráticos sobre un número determinado de períodos, así:

$$ECM = \frac{\sum_{t=1}^n (x_t - \hat{x}_t)^2}{n} \quad (3.7)$$

Finalmente, la desviación absoluta porcentual media *MAPE* se define mediante las Ec. (3.8) y (3.9), de acuerdo con la correspondiente definición del error porcentual dada anteriormente. Todos estos indicadores se ilustrarán posteriormente con algunos ejemplos.

$$MAPE = \frac{100 \times \sum_{t=1}^n \left| \frac{x_t - \hat{x}_t}{x_t} \right|}{n} \quad (3.8)$$

$$MAPE' = \frac{100 \times \sum_{t=1}^n \left| \frac{x_t - \hat{x}_t}{\hat{x}_t} \right|}{n} \quad (3.9)$$

El *costo* de un sistema de pronósticos se refiere al balance que debe existir entre la precisión obtenida, la cual se refleja en una menor incertidumbre y en la disminución de faltantes, y el esfuerzo invertido para lograrlo (figura 3.2).

De acuerdo con Silver *et al.* (1998, pp. 78-79), la *utilidad de los resultados* se mide principalmente con base en el grado de aceptación, credibilidad y utilización que se le dé al sistema de pronósticos. Idealmente, un sistema de pronósticos debería:

- Estimar la demanda esperada en el corto plazo, pero también proveer mecanismos para estimar dicha demanda en el mediano y largo plazo para efectos de planeación agregada. Este tema corresponde a los denominados pronósticos acumulados, tema que se propone como ejercicio más adelante.
- Estimar adecuadamente los errores de pronóstico.
- Actualizar los pronósticos periódicamente de tal manera que cualquier corrección pueda hacerse rápidamente.
- Balancear el costo de los errores de pronóstico obtenidos contra el costo de generarlos.
- Permitir el juicio y la intervención humanos para refinar y modificar los pronósticos, si así se considerare necesario.
- Ser robusto, o sea, proveer pronósticos que no se vean afectados significativamente por factores incontrolables al sistema, tales como las variaciones aleatorias naturales del proceso bajo estudio.
- Ser comprensible para la administración del sistema y todo el personal involucrado directa o indirectamente en el proceso, en la medida que no sólo deben usarse sus resultados, sino comprender muy bien los mecanismos internos que lo gobiernan. Este problema ocurre cuando se utiliza indiscriminadamente *software* para pronósticos. De hecho, de acuerdo con Sanders y Manrodt (2003), de 240 compañías estadounidenses encuestadas, 48% utilizaban hojas electrónicas para hacer sus pronósticos, mientras que solamente el 10,8%

de las mismas reportaron el uso de *software* comercial de pronósticos. Además, el 60% de las mismas dijeron estar insatisfechas con el comportamiento de su *software* de pronósticos. Las conclusiones principales de este estudio son, por una parte, que las empresas que utilizan procesos más formales de pronósticos obtienen los mejores resultados, y, por otra, que la más probable causa de insatisfacción con los sistemas de pronósticos es la dificultad en comprender los resultados y la dificultad de lectura de los reportes. Esto sugiere que una muy buena opción es la implementación de técnicas de pronósticos formales desarrollados con base en el sistema de información propio de la empresa. Por ello, es recomendable que, en lo posible, la organización genere sus propios programas y técnicas de pronósticos, o, en su defecto, evalúe detalladamente la conveniencia de una u otra alternativa.

La *estabilidad y respuesta* del sistema de pronósticos tiene que ver con el hecho de que no debe ser exageradamente sensible respondiendo aceleradamente a las variaciones aleatorias naturales del proceso bajo estudio, ni tampoco que su respuesta sea tardía o inexistente a cambios reales de la tendencia de la demanda. Más adelante se verá que esto se controla a través de las señales de rastreo y de la actualización de los parámetros del sistema de pronósticos escogido, por ejemplo, con el valor del número de períodos N a considerar para el cálculo del promedio móvil y con la constante de suavización α para el caso de los métodos de suavización exponencial.

El sistema de pronósticos y la clasificación ABC

Como se estudió en el capítulo 1, la clasificación ABC de ítems es una herramienta de gestión muy poderosa para la administración de los inventarios. El sistema de pronósticos, como herramienta fundamental para este control, debe por lo tanto estar alineado con dicha clasificación. Específicamente, los ítems clase A deberían ser examinados continua y rutinariamente por los administradores, en conjunto con técnicas relativamente complejas de pronósticos. Los ítems clase B pueden ser manejados de forma automática, con técnicas adecuadas de pronósticos, en general, no tan complejas como las aplicables a ítems clase A, y con la intervención humana solamente en casos de excepción. Para ítems clase C se pueden utilizar las técnicas más simples de pronósticos, e, incluso, se recomienda en ocasiones que no sean pronosticados. Se debe, sin embargo, ser cuidadosos con estos ítems ya que, aunque representan una fracción baja del porcentaje de ventas totales, pueden ocasionar problemas de manejo en los

centros de distribución, de espacio de almacenamiento en puntos de venta, de saturación de los sistemas de información y otros relacionados.

Para ítems nuevos, debe diferenciarse el estado de desarrollo en el cual se encuentran dentro de su ciclo de vida. Específicamente, si se encuentran en su fase de crecimiento o en su fase de declive, se deben utilizar técnicas de pronósticos que respondan a estos cambios, como la suavización exponencial doble o el promedio móvil progresivo con un valor bajo de N , método descrito posteriormente. En contraste, si el ítem nuevo ya se encuentra en su etapa de equilibrio, puede bastar con técnicas menos sofisticadas, como suavización exponencial simple o promedio móvil. Claro está que cuando un ítem nuevo se encuentre en su etapa de equilibrio, es posible que ya haya sido reclasificado como A o B, y ya opere el sistema normal de pronósticos que se esté utilizando para ellos. La tabla 3.1 presenta las características del manejo de ítems clase A, B y C. Obviamente estas son sugerencias generales, ya que la decisión final depende del caso específico del sistema bajo estudio.

Tabla 3.1. Control de inventarios y sistemas de pronósticos de acuerdo con la clasificación ABC

Características	Políticas de control	Métodos de control
<ul style="list-style-type: none"> • Ítems clase A (los más importantes) • Relativamente pocos ítems • El mayor porcentaje del volumen de ventas (en \$) 	<ul style="list-style-type: none"> • Control estricto con supervisión personal • Comunicación directa con la administración y los proveedores • Aproximación a <i>JIT</i> e inventario balanceado • Cubrimiento de existencias entre 1 y 4 semanas 	<ul style="list-style-type: none"> • Monitoreo frecuente o continuo • Registros precisos • Pronósticos con suavización exponencial doble • Políticas basadas en el nivel de servicio al cliente
<ul style="list-style-type: none"> • Ítems clase B • Ítems importantes • Volumen de ventas (en \$) considerable 	<ul style="list-style-type: none"> • Control clásico de inventarios • Administración por excepción • Cubrimiento de existencias entre 2 y 8 semanas 	<ul style="list-style-type: none"> • Sistema de control computarizado clásico • Pronósticos con suavización exponencial simple • Reporte por excepciones
<ul style="list-style-type: none"> • Ítems clase C • Muchos ítems • Bajo volumen de ventas (en \$), pocos movimientos o ítems de muy bajo valor unitario 	<ul style="list-style-type: none"> • Supervisión mínima • Pedidos bajo orden • Tamaños de orden grandes • Políticas de cero o de alto inventario de seguridad • Cubrimiento de existencias entre 3 y 20 semanas 	<ul style="list-style-type: none"> • Sistema de control simple • Promedio móvil (aceptar el pronóstico) • Evitar agotados y exceso de inventario • Larga frecuencia de órdenes • Sistema automático

[Fuente: Diseñada parcialmente con base en Wild (1997), pp. 33, 41 y 161].

ANÁLISIS DE DATOS HISTÓRICOS Y PATRONES DE DEMANDA

El análisis de los datos históricos de demanda es fundamental para la correcta selección del método de pronósticos. Existen muy diversos patrones de demanda, algunos de los cuales se presentaron en la figura 2.1. Las figuras 3.3 a 3.7 han sido adaptadas de casos reales e ilustran algunos de los patrones mostrados en la figura 2.1 y combinaciones de los mismos. En ellas se han representado los datos de demanda contra tiempo y se ha dibujado la tendencia de la demanda mediante regresión lineal simple. Es muy importante, para el diseño de cualquier sistema de pronósticos, construir los gráficos que representan los datos históricos de demanda, ya que su sola observación permite hacerse a una idea de cuál método puede ser el más adecuado. Así, existe un método de pronósticos apropiado para cada patrón de demanda, el cual debe experimentarse y evaluarse con la utilización de datos históricos, como se ilustrará posteriormente. Debe resaltarse que en estas y otras figuras que se presentan en este capítulo, la demanda se asume discreta por cada período y, por lo tanto, las líneas que unen los marcadores de demanda se utilizan como ayuda visual solamente y no representan un proceso continuo de demanda.

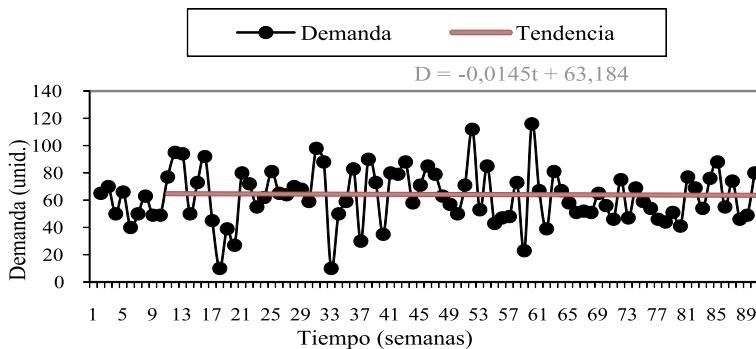


Figura 3.3. Demanda perpetua, estable o uniforme

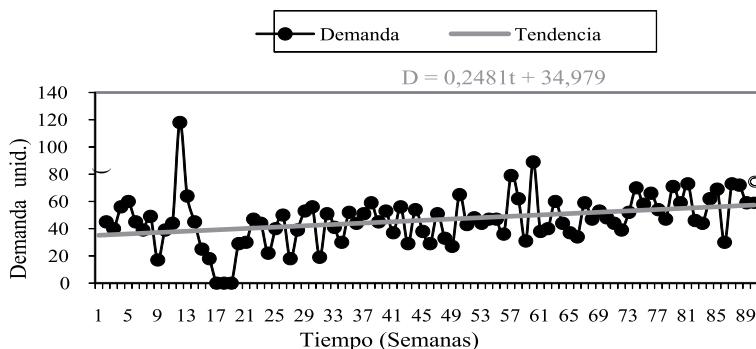


Figura 3.4. Demanda con tendencia creciente

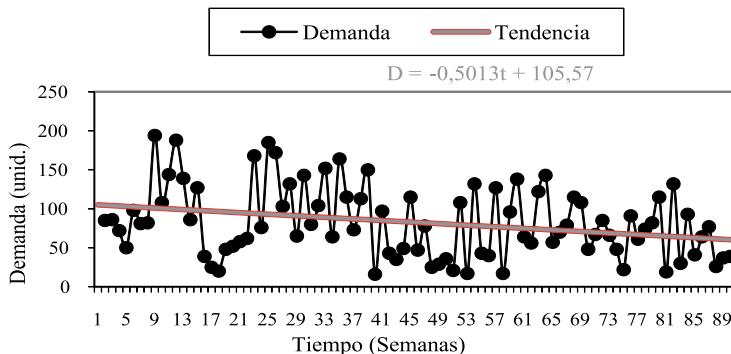


Figura 3.5. Demanda con tendencia decreciente

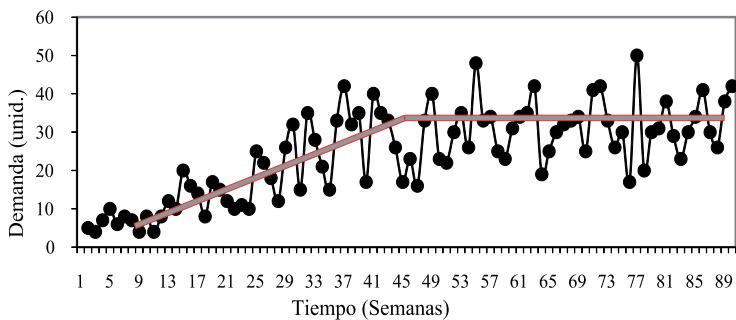


Figura 3.6. Demanda creciente y luego uniforme o perpetua (puede tratarse de un ítem que acaba de completar la etapa de crecimiento de su ciclo de vida)

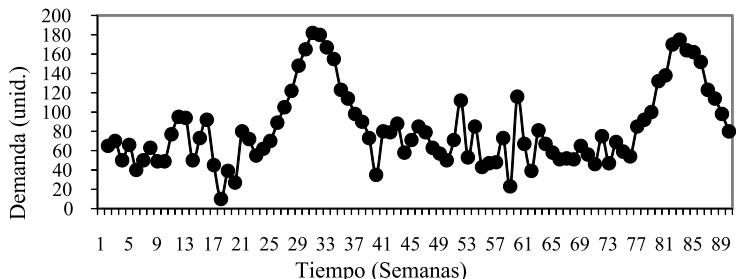


Figura 3.7. Combinación de demanda uniforme con estacional o periódica

Selección del sistema de pronósticos y simulación de pronósticos

Aunque la tabla 3.1 es una buena base para la selección del sistema de pronósticos, la decisión final debe tomarse con base en información adicional del sistema bajo estudio. En primera instancia, la selección del período de pronóstico, del horizonte de planeación y del intervalo de pronóstico, debe hacerse de acuerdo con el sistema bajo estudio y sus características

particulares. En muchos casos de empresas comerciales, por ejemplo, un período de pronóstico de una semana es satisfactorio, ya que no es ni muy corto, como para incurrir en excesivos costos de generación de los pronósticos y de actualización de parámetros de control, ni muy largo, como para incurrir en pronósticos obsoletos o posiblemente con alta variabilidad. Si se requieren pronósticos de menor tiempo, por ejemplo, diarios, la transformación de los pronósticos semanales a diarios (o viceversa) es relativamente sencilla y puede hacerse mediante ecuaciones sencillas deducidas empíricamente, las cuales han demostrado un buen comportamiento en la práctica. [ver las Ec. (3.49) adelante].

Cuando se dispone de datos históricos suficientes, se puede realizar lo que se denomina una *simulación del pronóstico*, lo cual es muy útil para escoger y aplicar el sistema de pronósticos adecuado. El método comprende, en general, cinco pasos, a saber:

1. Inicialización del sistema.
2. Simulación del pronóstico.
3. Optimización de los parámetros del modelo utilizado.
4. Utilización del sistema de pronósticos en tiempo real.
5. Seguimiento y administración del sistema implementado.

El proceso inicia tomando los datos observados en un cierto período de tiempo anterior al presente, el cual se utiliza para estimar los parámetros de inicio del modelo de pronósticos que se va a aplicar. El proceso de pronósticos se inicia, entonces, a partir de cierto tiempo anterior al presente, y se simula como si se hubiera hecho en forma real, con la ventaja de que ya se dispone de datos reales de demanda, pues ésta ya ocurrió. Esto permite evaluar el comportamiento del sistema de pronósticos bajo análisis a través del cálculo de los errores de pronóstico, variando ciertos parámetros hasta obtener aquellos valores que producen los menores errores. Después de realizado este proceso, se fijan los parámetros óptimos hallados y se inicia el pronóstico real propiamente dicho.

Una vez se esté trabajando en tiempo real, debe hacerse un seguimiento continuo del sistema de pronósticos a través de señales de rastreo y de diversas acciones administrativas que garanticen el correcto funcionamiento del sistema, tales como el aseguramiento de la calidad y actualidad de la información suministrada, la actualización periódica de los parámetros óptimos del sistema de pronósticos y la garantía de la integralidad de los programas, entre otras acciones posibles.

Esta metodología permite comparar diversos métodos de pronósticos entre sí y diversos parámetros de un método específico. Para cada uno de

los métodos de pronósticos que se presentan en las secciones siguientes, se ilustrará este procedimiento.

Como guía, el sistema de pronósticos a escoger depende en gran parte del patrón de demanda observado a través de datos históricos. La tabla 3.2 resume las relaciones más comunes entre el sistema de pronósticos y el patrón de demanda, aunque, de nuevo, se trata de una primera aproximación a la decisión definitiva, ya que ésta siempre depende de la naturaleza del sistema bajo estudio.

Tabla 3.2. Los sistemas de pronósticos y el patrón de demanda observado

Patrón de demanda observado	Sistema de pronóstico recomendado
Perpetua, estable o uniforme	Promedio móvil o suavización exponencial simple
Con tendencia creciente o decreciente	Regresión lineal simple o suavización exponencial doble
Estacional o periódica	Modelos periódicos de Winters
Demandas altamente correlacionadas	Métodos integrados de promedios móviles auto-regresivos (ARIMA)
Errática (Por ejemplo, en ítems clase A de bajo movimiento)	Pronóstico combinado de tiempo entre la ocurrencia de demandas consecutivas y la magnitud de las transacciones individuales (Método de Croston y relacionados)

Como ayuda para la decisión final pueden consultarse las tablas 3.1 y 3.2 y analizar profundamente los patrones de demanda de ítems representativos de cada clase, realizando experimentos de simulación de pronósticos y, obviamente, monitoreando los pronósticos a través de las técnicas que se describen en la sección siguiente.

Ejercicios 3.1

Considere el conjunto de datos de demanda para cierto ítem, mostrado en la tabla 3.3. Se presenta información para 89 semanas.

Tabla 3.3. Datos de demanda para el problema No. 1 (ejercicios 3.1)

Semana	Demanda	Semana	Demanda	Semana	Demanda	Semana	Demanda
1	12	23	9	45	7	67	9
2	11	24	26	46	13	68	11
3	13	25	6	47	3	69	8
4	17	26	15	48	2	70	5
5	15	27	10	49	14	71	13
6	14	28	7	50	11	72	9
7	15	29	14	51	19	73	21
8	17	30	6	52	10	74	1
9	11	31	3	53	6	75	1
10	16	32	2	54	9	76	4
11	13	33	12	55	13	77	12
12	23	34	14	56	13	78	9
13	5	35	19	57	10	79	14
14	7	36	12	58	8	80	11
15	2	37	1	59	1	81	6
16	19	38	10	60	1	82	8
17	20	39	21	61	4	83	11
18	18	40	12	62	17	84	4
19	9	41	13	63	4	85	2
20	6	42	1	64	13	86	4
21	17	43	15	65	7	87	9
22	21	44	16	66	15	88	13
						89	5

- Dibuje el gráfico de la demanda en unidades contra el tiempo en semanas y discuta acerca del tipo de patrón de demanda observado.
 - Encuentre el promedio semanal de la demanda durante las primeras 52 semanas y utilice este único valor para pronosticar la demanda de las 37 semanas restantes. Calcule el error de pronóstico, el error absoluto, el error cuadrático, la *MAD* y el *ECM* para cada una de las últimas 37 semanas. Discuta sobre la utilidad de este método de pronóstico.
2. Suponga que un ítem clase A está presentando una demanda altamente estable, prácticamente sin tendencia alguna. De acuerdo con la tabla 3.1, debería utilizarse suavización exponencial doble para su pronóstico, ya que se trata de un ítem clase A. Por otra parte, de acuerdo con la tabla 3.2, se podría utilizar suavización exponencial simple e, incluso, promedio móvil. ¿Es esto contradictorio? ¿Qué sugeriría usted? ¿De qué dependería la decisión final?
3. Discuta acerca de métodos para medir demandas no servidas de diferentes productos, en diferentes contextos. ¿Qué estrategias, por

ejemplo, podrían utilizarse para medir la demanda no servida en un supermercado, donde los clientes tienen autoservicio?

SISTEMA DE PRONÓSTICOS DE PROMEDIO MÓVIL

Este sistema es uno de los más simples que existen, pero no menos útil. A través de él se van a ilustrar varios aspectos que son comunes a cualquier método para pronosticar. El promedio móvil es adecuado para patrones de demanda estables o perpetuos, con poca o ninguna tendencia. El modelo subyacente para este tipo de procesos es el siguiente:

$$x_t = b + e_t \quad (3.10)$$

donde:

- x_t = Valor real u observación de la demanda en el período t (tal como se definió anteriormente).
- b = Una constante que representa el proceso de demanda uniforme que se lleva a cabo.
- e_t = Una variable aleatoria normal con media cero y varianza $\sigma_e^2 > 0$ desconocida. Esta variable representa la parte aleatoria del proceso, imposible de pronosticar.

Lo que se trata de estimar, en este caso, es el parámetro b . Aunque la parte aleatoria de la demanda no puede estimarse, se responde a ella definiendo inventarios de seguridad adecuados, como se verá más adelante.

El método de promedio móvil estima el valor de b por medio del cálculo del promedio de las últimas N observaciones, mediante la estadística M_T , definida como:

$$M_T = \frac{x_T + x_{T-1} + x_{T-2} + \dots + x_{T-N+1}}{N} \quad (3.11)$$

El subíndice T representa el período actual, a partir del cual se calcula el promedio, devolviéndose N períodos, o sea, hasta el período $T - N + 1$. Esta expresión no es más que el promedio simple de las últimas N observaciones de demanda, donde x_T es la más reciente demanda conocida.

Usualmente un valor de $N = 12$ es adecuado, aunque se debe probar con varios valores hasta determinar el que produzca el menor error de pronóstico sobre un período dado. El valor del promedio M_T se utiliza para pronosticar la demanda del período siguiente o de cualquier período posterior,

dado que la demanda es perpetua. Cuando transcurre el próximo período y se conoce su demanda, entonces el promedio móvil “se corre” un período. Por esta razón, el valor M_T se puede calcular también con la siguiente ecuación, la cual puede ser más adecuada para implementar en una hoja electrónica, ya que el nuevo M_T se genera a partir del anterior, M_{T-1} .

$$M_T = M_{T-1} + \frac{x_T - x_{T-N}}{N} \quad (3.12)$$

Obsérvese que M_T es un estimador insesgado de b , ya que su valor esperado $E(M_T)$ es:

$$E(M_T) = E\left(\frac{x_T + x_{T-1} + x_{T-2} + \dots + x_{T-N+1}}{N}\right) = \frac{1}{N} E\left(\sum_{k=0}^{N-1} x_{T-k}\right) = \frac{1}{N}(Nb) = b \quad (3.13)$$

Además:

$$\begin{aligned} Var(M_T) &= \frac{1}{N^2} Var\left(\sum_{k=0}^{N-1} x_{T-k}\right) = \frac{N}{N^2} (\sigma_\varepsilon^2) \\ Var(M_T) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{N} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Es importante notar que el valor de N tiene un efecto doble. Primero, nótese que, para el cálculo del pronóstico de acuerdo con la Ec. (3.11), el peso que se le da a cada uno de los N datos de demanda es igual a $1/N$. Es decir, que un dato de demanda reciente pesa lo mismo que uno más antiguo para el cálculo del pronóstico. Además, de acuerdo con la Ec. (3.14), la varianza del estimador M_T es inversamente proporcional al valor de N .

Este resultado ilustra una característica general de los sistemas de pronósticos: existe un conflicto entre el grado de respuesta del sistema de pronósticos ante cambios de tendencia de demanda y la precisión del mismo. Por ejemplo, tómese $N = 15$. Así, el peso de los últimos datos de demanda sería $1/N = 1/15$ y se tendría un denominador igual a 15 en la expresión de la varianza del estimador. Supóngase que se cambia ahora a un valor de $N = 6$; de esta forma, aumentaría el nivel de respuesta del sistema de pronósticos, pues los últimos datos de demanda tendrían un peso mayor = $1/6$, pero, a su vez, se incrementaría la variabilidad del estimador, de acuerdo con la Ec. (3.14). El arte del diseño de un sistema de pronósticos consiste, entonces, en seleccionar los parámetros del sistema, en este caso, el valor de N , de tal forma que se tenga un buen grado de respuesta, sin que la precisión del estimador se vea muy afectada.

Ejemplo 3.2. (Simulación de pronósticos de promedio móvil)

Considere el ítem mostrado en la figura 3.3 anterior, del cual se dispone de una historia de demandas de 89 semanas. Se considera que la historia antes de la semana 40 es demasiado antigua y puede no ser recomendable tenerla en cuenta en el sistema de pronósticos. Por lo tanto, sólo se van a considerar los datos a partir de la semana 40.

Las demandas de este ítem para las semanas 40-51 (12 semanas) fueron, respectivamente, 80, 79, 88, 58, 71, 85, 79, 63, 57, 50, 71 y 112 unidades, como se muestra en la tabla 3.4. Es importante observar que la semana 51 se considera como el período $T = 0$. Estos valores se van a utilizar para iniciar la simulación del sistema de pronósticos a partir de la semana 52, con el promedio que se muestra sombreado M_0 de 74,42 unidades, valor que se toma como el pronóstico para la semana 52 ($T = 1$). A partir de este punto, se toma el promedio de las 12 semanas anteriores, “corriendo” el pronóstico una semana cada vez, a medida que nuevos datos son observados. De ahí que este sistema de pronósticos se denomine de “promedio móvil”.

La demanda real de la semana 52 ($T = 1$) fue 53 unidades y su error de pronóstico es $e_1 = 53,00 - 74,42 = -21,42$ unidades. El pronóstico para la semana 53 ($T = 2$) sería entonces el promedio de las demandas de las semanas 41-52, el cual también se puede calcular de acuerdo con la Ec. (3.12) como $M_1 = 74,42 + (53,00 - 80,00)/12 = 72,17$ unidades. Se continúa así, en la simulación, hasta la semana 89. Obsérvese que, si se asume que el tiempo presente es la semana 89, y que este es el último dato de demanda disponible, entonces la semana 90 sería el tiempo futuro, cuya demanda no se conoce aún, y se estaría efectuando este pronóstico en tiempo real. Una vez pase la semana 90, entonces se podrá observar su demanda real y así calcular su error de pronóstico respectivo y el pronóstico en tiempo real para la semana 91, y así sucesivamente.

Una pregunta obvia que surge es, ¿por qué se escogió aquí calcular el promedio móvil con las últimas $N = 12$ semanas? ¿Por qué no se tomó $N = 6$ ó 10 semanas? La respuesta a este interrogante la dan los indicadores de precisión del pronóstico, como la *MAD*, el *ECM*, la *MAPE* o la *MAPE'*, los cuales también se muestran en la base de la tabla 3.4, calculados mediante las Ec. (3.6) a (3.9), respectivamente. Debe escogerse el valor de N , por lo tanto, que minimice un indicador especificado de precisión del pronóstico. Para hacer este ejercicio, se puede variar N , por ejemplo, desde 6 hasta 15, aunque algunos autores sugieren hacerlo entre 6 y 20. Valores inferiores a 6 pierden demasiada información histórica de demanda y pueden tornar el pronóstico demasiado “nervioso” al darle demasiado peso a los últimos datos de demanda; por el contrario, valores superiores a 20 pueden estar considerando historia de demanda muy antigua que ya no refleja la situación actual del sistema. La tabla 3.5 muestra el resultado de este experimento para cada uno de los indicadores de precisión del pronóstico.

**Tabla 3.4. Simulación de un sistema de pronósticos de promedio móvil
(ejemplo 3.2)**

S I M U L A C I Ó N	D E L P R O N Ó S T I C O	I N I C I A L I Z A C I Ó N	Semana	Per. T	Demanda	Pronóstico	e_T	$ e_T $	e_T^2	APE	APE'
			40		80						
			41		79						
			42		88						
			43		58						
			44		71						
			45		85	Promedio de estas 12 semanas = 74,42					
			46		79						
			47		63						
			48		57						
			49		50						
			50		71						
			51	0	112						
			52	1	53	74,42	-21,42	21,42	458,67	40,41%	28,78%
			53	2	85	72,17	12,83	12,83	164,69	15,10%	17,78%
			54	3	43	72,67	-29,67	29,67	880,11	68,99%	40,83%
			55	4	47	68,92	-21,92	21,92	480,34	46,63%	31,80%
			56	5	48	68,00	-20,00	20,00	400,00	41,67%	29,41%
			57	6	73	66,08	6,92	6,92	47,84	9,47%	10,47%
			58	7	23	65,08	-42,08	42,08	1,771,01	182,97%	64,66%
			59	8	116	60,42	55,58	55,58	3,089,51	47,92%	92,00%
			60	9	67	64,83	2,17	2,17	4,69	3,23%	3,34%
			61	10	39	65,67	-26,67	26,67	711,11	68,38%	40,61%
			62	11	81	64,75	16,25	16,25	264,06	20,06%	25,10%
			63	12	67	65,58	1,42	1,42	2,01	2,11%	2,16%
			64	13	58	61,83	-3,83	3,83	14,69	6,61%	6,20%
			65	14	51	62,25	-11,25	11,25	126,56	22,06%	18,07%
			66	15	52	59,42	-7,42	7,42	55,01	14,26%	12,48%
			67	16	51	60,17	-9,17	9,17	84,03	17,97%	15,24%
			68	17	65	60,50	4,50	4,50	20,25	6,92%	7,44%
			69	18	56	61,92	-5,92	5,92	35,01	10,57%	9,56%
			70	19	46	60,50	-14,50	14,50	210,25	31,52%	23,97%
			71	20	75	62,42	12,58	12,58	158,34	16,78%	20,16%
			72	21	47	59,00	-12,00	12,00	144,00	25,53%	20,34%
			73	22	69	57,33	11,67	11,67	136,11	16,91%	20,35%
			74	23	59	59,83	-0,83	0,83	0,69	1,41%	1,39%
			75	24	54	58,00	-4,00	4,00	16,00	7,41%	6,90%
			76	25	46	56,92	-10,92	10,92	119,17	23,73%	19,18%
			77	26	44	55,92	-11,92	11,92	142,01	27,08%	21,31%
			78	27	51	55,33	-4,33	4,33	18,78	8,50%	7,83%
			79	28	41	55,25	-14,25	14,25	203,06	34,76%	25,79%
			80	29	77	54,42	22,58	22,58	510,01	29,33%	41,50%
			81	30	69	55,42	13,58	13,58	184,51	19,69%	24,51%
			82	31	54	56,50	-2,50	2,50	6,25	4,63%	4,42%
			83	32	76	57,17	18,83	18,83	354,69	24,78%	32,94%
			84	33	88	57,25	30,75	30,75	945,56	34,94%	53,71%
			85	34	55	60,67	-5,67	5,67	32,11	10,30%	9,34%
			86	35	74	59,50	14,50	14,50	210,25	19,59%	24,37%
			87	36	46	60,75	-14,75	14,75	217,56	32,07%	24,28%
			88	37	49	60,08	-11,08	11,08	122,84	22,62%	18,45%
			89	38	80	60,33	19,67	19,67	386,78	24,58%	32,60%
			90	39	?	63,33	← Pronóstico en tiempo real				
						Sumas	-62,25	549,92	12,728,58	1,041,50%	889,27%
						MAD, ECM, MAPE y MAPE'	→	14,47	334,96	27,41%	23,40%
						Desviación estándar estimada	→	18,14	18,30		

Tabla 3.5. Valor óptimo de N para el sistema de pronósticos de promedio móvil (ejemplo 3.2)

N	MAD	ECM	MAPE	MAPE
6	15,27	368,93	28,05%	25,37%
7	15,69	380,52	29,11%	25,95%
8	15,64	364,81	29,34%	25,50%
9	14,77	336,67	27,76%	24,06%
10	15,14	351,27	28,39%	24,62%
11	14,83	342,20	27,93%	24,04%
12	14,47	334,96	27,41%	23,40%
13	14,70	338,47	27,96%	23,67%
14	14,88	342,52	28,33%	23,85%
15	14,95	341,33	28,45%	23,95%

Como se puede observar, en este caso todos los indicadores de eficiencia mínimos producen un valor óptimo de $N = 12$ semanas. Esto no es así siempre, pues puede ocurrir que el N óptimo varíe de acuerdo con el indicador de precisión que se escoja como criterio de minimización. Es importante notar que se debe hacer una revisión periódica del valor óptimo de N , ya que puede variar con el tiempo. Por otra parte, se ha observado, en la práctica, que cuando se seleccionan los parámetros del pronóstico de esta forma, a la vez que se logra la máxima precisión, el nivel de respuesta que se alcanza es satisfactorio.

Finalmente, en la figura 3.8 se han representado los resultados del sistema de pronósticos de promedio móvil con $N = 12$. Obsérvese que lo que el sistema de pronósticos siempre trata de seguir es precisamente la *tendencia* de la demanda, pero es imposible pronosticar las variaciones aleatorias de ésta, representadas por la variable aleatoria e_t en el modelo (3.10).

Por ejemplo, la demanda de la semana 58 fue de 23 unidades, mientras que la demanda de la semana 59 fue de 116 unidades. Si alguien fuera a pronosticar la demanda de la semana 60 con base en estas observaciones, no podría nunca decir con absoluta certeza cuál podría ser; podría de nuevo ser tan baja como 20 unidades, o tan alta como 100 unidades o ser igual a un valor intermedio. En efecto, la demanda de la semana 60 fue de 67 unidades, un valor intermedio.

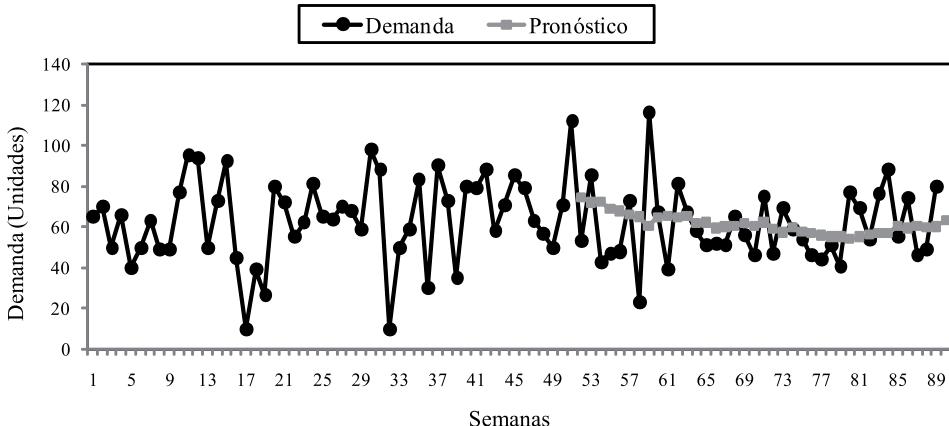


Figura 3.8. Pronóstico basado en promedio móvil con $N = 12$ (ejemplo 3.2)

Se hace énfasis en los conceptos anteriores porque hay casos de la vida real donde se le exige a los planeadores de demanda “una cifra específica del pronóstico de demanda para el próximo mes, por ejemplo”. Sólo Dios podría hacer esto. ¿Qué hacer entonces? Bueno, es cierto que no se puede pronosticar el valor exacto de la demanda, pero lo que sí se puede hacer, con base en los errores de los pronósticos, es acotar, con cierto grado de precisión, un límite superior de la demanda con cierto nivel de confiabilidad y así definirlo como *inventario de seguridad*. Por ejemplo, para el caso mencionado anteriormente, sería válido decir que, con un nivel de certeza del 95%, la demanda de la semana 60 no va a ser superior a 95 unidades. Por lo tanto, si se mantiene esta cantidad en inventario y si el promedio de demanda está alrededor de 65 unidades (pronóstico de la semana 60 en la tabla 3.4), las 30 unidades adicionales operarían como un inventario de seguridad. En efecto, para este caso, al ser la demanda de la semana 60 igual a 67 unidades, no se hubiera generado un agotado. La explicación del cálculo del inventario de seguridad será introducida posteriormente y se profundizará en el capítulo 5.

Estimación de la desviación estándar de los errores del pronóstico

Una cantidad fundamental para definir los inventarios de seguridad es la desviación estándar de los errores del pronóstico, s_1 . La razón de utilizar esta notación con el número “1” radica en el hecho de que esta desviación estándar se estima con base en el sistema de pronósticos que utiliza un período básico (puede ser 1 día, 1 semana, 1 mes, etc.). Más adelante se verá que la desviación estándar s_1 , para un período básico del pronóstico, se transforma a una desviación estándar sobre el tiempo de reposición L o

sobre el tiempo de reposición L más el intervalo de revisión del inventario R , mediante la aplicación de ecuaciones empíricas.

La desviación estándar s_1 está relacionada con la MAD , de acuerdo con el siguiente análisis. Supóngase que la variable aleatoria que representa el error del pronóstico, e , se distribuye normalmente con media μ y desviación estándar s_1 . Por definición, la MAD es:

$$\begin{aligned} MAD &= \int_{-\infty}^{\infty} |e - \mu| \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{e - \mu}{\sigma_1}\right)^2\right] de \\ MAD &= 2 \int_{\mu}^{\infty} (e - \mu) \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{e - \mu}{\sigma_1}\right)^2\right] de \end{aligned}$$

Mediante la sustitución:

$$z = \frac{e - \mu}{\sigma_1}$$

se obtiene el siguiente resultado:

$$MAD = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \sigma_1$$

O, equivalentemente:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times MAD \cong 1,2533 \times MAD \quad (3.15)$$

Por otra parte, considerando la definición de la desviación estándar, es fácil concluir que s_1 se puede estimar también mediante la ecuación:

$$\sigma_1 = \sqrt{ECM} \quad (3.16)$$

La Ec. (3.15) supone que los errores de pronóstico se distribuyen normalmente, mientras que la Ec. (3.16) no tiene supuesto alguno acerca de su distribución probabilística. Ambas estimaciones se han hecho en la última fila de la tabla 3.4 y su proximidad es satisfactoria (18,14 y 18,30, con base en la MAD y en el ECM , respectivamente). La proximidad de los dos valores de la desviación estándar calculada con base en la MAD y en el

ECM indica un buen comportamiento del sistema de pronósticos y sugiere la normalidad de los errores de pronóstico. Montgomery *et al.* (1990, p. 208) sostienen que la Ec. (3.15) es muy aproximada, incluso cuando los errores del pronóstico no se distribuyen normalmente, pero otros autores recomiendan utilizar, en la práctica, preferiblemente, la Ec. (3.16). La utilidad de la estimación de s_1 será clara más adelante cuando se introduce el tema del cálculo de inventarios de seguridad.

Ejercicios 3.2

1. Construya la hoja electrónica del ejemplo 3.2 y genere la tabla 3.5.
2. En la tabla 3.6 se muestran los valores de demanda de un ítem para las últimas 50 semanas.
 - a) Para las primeras 12 semanas (semana 1-12), determine el valor de arranque del pronóstico basado en el promedio móvil. Calcule el pronóstico para el resto de semanas (semana 13-50); diseñe una hoja electrónica para este ejercicio.
 - b) Para cada semana pronosticada, calcule el error del pronóstico, el error absoluto, el error cuadrático, el *APE* y el *APE'* y estime la *MAD*, el *ECM*, la *MAPE* y la *MAPE'*. A través de las Ec. (3.15) y (3.16), estime la desviación estándar de los errores del pronóstico. Grafique la demanda y el pronóstico en forma semejante a la figura 3.8.
3. Con los datos del ejercicio anterior, tome ahora, como primer período a pronosticar, la semana 21 (cuya demanda real fue de 117 unidades). Pruebe el comportamiento del pronóstico con valores de N desde 6 hasta 20, devolviéndose el número correspondiente de semanas, desde la 20 (inclusive) hacia atrás. Por ejemplo, para calcular el promedio de arranque con $N = 6$, tomaría el promedio de demanda de las semanas 20, 19, 18, 17, 16 y 15, y éste sería el pronóstico para la semana 21. Determine el N óptimo a partir del valor del *ECM*. Es clave la construcción de una hoja electrónica para este ejercicio.

Al observar la Ec. (3.11) se concluye que el promedio móvil le da el mismo peso de $1/N$ a cada una de las últimas N demandas observadas. Esta característica es una desventaja del promedio móvil en aquellos casos en los cuales se debe reaccionar rápidamente a un cambio en el patrón de demanda o, análogamente, cuando es importante la estabilidad del sistema de pronósticos. El método de suavización exponencial simple trata de corregir esta situación y se aplica también al mismo modelo definido en la Ec. (3.10). Este método se describe a continuación.

Tabla 3.6. Datos para el problema No. 2 (ejercicios 3.2)

Semana	Demanda	Semana	Demanda
1	92	26	72
2	127	27	85
3	117	28	105
4	88	29	109
5	114	30	96
6	99	31	98
7	122	32	109
8	96	33	85
9	84	34	103
10	64	35	124
11	117	36	114
12	127	37	97
13	92	38	89
14	80	39	144
15	105	40	94
16	121	41	105
17	99	42	113
18	120	43	96
19	50	44	125
20	190	45	118
21	117	46	97
22	99	47	135
23	128	48	147
24	119	49	110
25	113	50	103

SUAVIZACIÓN EXPONENCIAL SIMPLE

Aquí se trata de nuevo de estimar el parámetro b para, posteriormente, definir un inventario de seguridad adecuado que responda a las variaciones aleatorias representadas por el término e_t , ya que esta parte no se puede pronosticar. La ecuación básica de la suavización exponencial aplica un peso α a la última observación de demanda y un peso $(1-\alpha)$ al pronóstico anterior, mediante el siguiente operador:

$$S_T = \alpha x_T + (1-\alpha)S_{T-1} \quad (3.17)$$

donde:

S_T = Pronóstico realizado al final del período T , es decir, la estimación del parámetro b al final del período T .

S_{T-1} = Pronóstico anterior, es decir, la estimación del parámetro b realizado al final del período $T-1$.

- $x_T =$ Demanda real observada al final del período actual T .
 $\alpha =$ Constante de suavización (inicialmente definida en el intervalo $0 \leq \alpha \leq 1$).

Nótese que la Ec. (3.17) es equivalente a la siguiente expresión:

$$S_T = \alpha x_T + S_{T-1} - \alpha S_{T-1} = S_{T-1} + \alpha(x_T - S_{T-1}) \quad (3.18)$$

la cual tiene una interpretación muy interesante, en cuanto que la estimación actual del parámetro b , o sea S_T , es igual a la estimación anterior S_{T-1} , más α veces el *error del pronóstico anterior*.

La estadística S_T puede interpretarse como un promedio ponderado de las observaciones anteriores. Para observar esto, se reemplaza S_{T-1} en la Ec. (3.17) por su expresión equivalente, y se continúa el proceso de reemplazo, así:

$$\begin{aligned} S_T &= \alpha x_T + (1-\alpha)S_{T-1} \\ S_T &= \alpha x_T + (1-\alpha)[\alpha x_{T-1} + (1-\alpha)S_{T-2}] \\ S_T &= \alpha x_T + \alpha(1-\alpha)x_{T-1} + (1-\alpha)^2 S_{T-2} \\ S_T &= \alpha x_T + \alpha(1-\alpha)x_{T-1} + (1-\alpha)^2 [\alpha x_{T-2} + (1-\alpha)S_{T-3}] \\ S_T &= \alpha x_T + \alpha(1-\alpha)x_{T-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{T-2} + (1-\alpha)^3 S_{T-3} \end{aligned}$$

Si se siguen expandiendo los términos de la misma forma, se obtiene la siguiente ecuación general:

$$S_T = \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k x_{T-k} + (1-\alpha)^T S_0 \quad (3.19)$$

Nótese que a medida que se retrocede en el tiempo, los pesos aplicados a cada dato real observado disminuyen exponencialmente con una razón geométrica igual a $(1-\alpha)$; este es el origen del nombre de este sistema de pronósticos. Por ejemplo, si $\alpha = 0,1$, el peso que se le aplica al último dato de demanda es 0,1; a la demanda anterior es $0,1 \times 0,9 = 0,09$; al anterior es $0,1 \times (0,9)^2 = 0,081$ y así sucesivamente. Se puede también demostrar que la suma de estos pesos es igual a 1, y, por lo tanto, se trata de un promedio ponderado de todos los datos disponibles de demanda, desde donde se inició el pronóstico.

Al igual que M_T , S_T es también un estimador insesgado de b , en el límite, ya que:

$$E(S_T) = E\left[\alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k x_{T-k} + (1-\alpha)^T S_0\right] = \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k E(x_{T-k}) + (1-\alpha)^T S_0$$

Si $T \rightarrow \infty$, entonces:

$$E(S_T) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1-\alpha)^k E(x_{T-k}) = \alpha b \frac{1}{1-(1-\alpha)} = b$$

Es interesante, por otra parte, calcular la varianza de S_T :

$$Var(S_T) = Var\left[\alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k x_{T-k} + (1-\alpha)^T S_0\right] = \alpha^2 \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^{2k} Var(x_{T-k})$$

Si $T \rightarrow \infty$, entonces:

$$Var(S_T) = \alpha^2 \sum_{k=0}^{\infty} (1-\alpha)^{2k} \sigma_e^2 = \alpha^2 \sigma_e^2 \frac{1}{1-(1-\alpha)^2}$$

$$Var(S_T) = \frac{\alpha}{2-\alpha} \sigma_e^2$$

Selección de la constante de suavización α

Claramente, los resultados de los pronósticos de suavización exponencial dependen del valor de la constante de suavización α . El valor de α no debe ser ni muy grande, que el pronóstico responda aceleradamente a cambios aleatorios normales del proceso, ni muy pequeño, con el efecto contrario de no responder a posibles cambios reales. Aunque inicialmente lo lógico es definir α en el intervalo $0 \leq \alpha \leq 1$, *la experiencia ha demostrado que valores de α entre 0,01 y 0,30 son más adecuados*. Valores mayores que 0,30 producen “nerviosismo” en el sistema de pronósticos, al responder de manera acelerada a las fluctuaciones normales del proceso ya que se le da un alto peso al último dato disponible de demanda. Por el contrario, valores muy pequeños de α , es decir, menores que 0,01, no responden satisfactoriamente a posibles cambios reales del proceso.

Una forma eficiente de determinar el valor adecuado de α es a través de la simulación del pronóstico, semejante a la presentada en el ejemplo 3.2. Al disponer de datos históricos se pueden tomar los valores iniciales para arrancar el proceso y, con los datos históricos restantes, se evalúa el comportamiento del método para varios valores de α , a través de un indicador como la *MAD* o el *ECM*. El valor de α que minimice estos indicadores será el más adecuado, si las condiciones del proceso se mantienen aproximada-

mente iguales a su comportamiento histórico. Obviamente, si las condiciones del proceso varían significativamente, puede ser necesario redefinir α mediante el análisis de datos históricos más recientes. Una forma muy rápida de optimizar el valor de α es utilizar el *solver* de *Excel*, ya que este programa permite optimizar el valor de una celda (en este caso la *MAD*, el *ECM* o el indicador de eficiencia seleccionado), cambiando el valor de una o más celdas (en este caso α) y teniendo en cuenta ciertas restricciones de las celdas variables (como aquí, la restricción: $0,01 \leq \alpha \leq 0,30$).

Existen otras posibilidades, como usar diferentes valores de α , dependiendo del estado en el que se encuentre el proceso. Por ejemplo, si el proceso se muestra muy estable, se podría utilizar un valor de α bajo, como 0,1. Si se observa un cambio en el proceso con tendencia creciente, se podría incrementar α a 0,25. Estos valores dependerán de la experiencia del analista y de su conocimiento del proceso. Existen otros métodos que cambian el valor de α automáticamente de acuerdo con los cambios del proceso, denominados métodos de pronósticos auto-controlados o auto-adaptivos (problema No. 6 de los ejercicios 3.6). Estos métodos, sin embargo, de acuerdo con diversos autores, no superan a los métodos tradicionales e, incluso, pueden producir efectos indeseados cuando los valores de α llegan a ser muy altos ($> 0,6$).

Finalmente, cuando no se dispone de datos suficientes para iniciar el proceso, o cuando existen dudas acerca de la precisión de los que se tienen, se pueden utilizar valores grandes de α para comenzar los pronósticos, y cuando se logre cierta estabilidad, se puede disminuir el valor de α . Todas estas consideraciones dependen del conocimiento que se tenga del proceso.

Inicialización de la suavización exponencial simple

Si se observa la Ec. (3.19), se concluye que para que el pronóstico de suavización exponencial simple pueda iniciar, se requiere conocer el valor de S_0 . Si se dispone de datos históricos suficientes, este valor se puede estimar como el promedio de las demandas históricas. Si no se dispone de datos históricos, debe recurrirse a un valor subjetivo y así supervisar muy cuidadosamente el pronóstico en su fase de inicio, utilizando probablemente un valor alto de la constante de suavización al comienzo del análisis.

Ejemplo 3.3. (Simulación de pronósticos de suavización exponencial simple)

Considere de nuevo el ítem mostrado en la figura 3.3, el cual fue utilizado para el ejemplo 3.2. Para iniciar el pronóstico de suavización exponencial simple, y para efectos de comparación, se tomaron los datos históricos de las semanas 40-51 y se obtuvo $S_0 = 74,4167$ unidades (redondeado a 74,42 en la tabla 3.7), lo cual coincide con lo realizado en el ejemplo 3.2.

Este valor inicial se establece como el pronóstico de la semana 52. Obsérvese que el número del período se define como $T = 0$ a partir de la semana 51.

Conocido el valor de la demanda de la semana 52, o sea, para el período $T = 1$, $x_1 = 53,00$ unidades, y tomando $\alpha = 0,15$, el cual es un valor razonable de inicio recomendado por diversos analistas, se puede entonces calcular el pronóstico para la semana siguiente, semana 53 ($T = 2$), como:

$$\begin{aligned} S_1 &= \alpha x_1 + (1 - \alpha)S_0 \\ &= 0,15(53,00) + 0,85(74,4167) \\ &= 71,20 \end{aligned}$$

Continuando de esta forma se obtienen los resultados mostrados en la tabla 3.7.

Utilizando la herramienta *solver* de *Excel*, se puede optimizar α , minimizando la celda correspondiente al *ECM*, variando la celda que contiene a α y restringiendo el valor de esta celda entre 0,01 y 0,3 inclusive. Así, se obtienen los resultados mostrados en la tabla 3.8. Obsérvese que la desviación estándar estimada pasa de un valor de 18,84 a un valor de 18,75, cuando se usa el valor óptimo de $\alpha = 0,1063$. Esta disminución de la desviación estándar no es muy significativa en este ejemplo, pero en otros casos puede serlo y, además, cuando se trata de miles de ítems a manejar, pequeños cambios en estas estimaciones pueden producir grandes ahorros en inventarios de seguridad, pues éstos definen proporcionalmente la desviación estándar de los errores del pronóstico.

Si este proceso de optimización de la constante de suavización se realiza minimizando la celda que contiene a la *MAD*, en lugar del *ECM*, se obtiene un $\alpha_{opt} = 0,1454$ con una desviación estándar mínima de 19,06, calculada a partir de la *MAD*, y de 18,83, calculada a partir del *ECM*. En forma semejante, se puede minimizar el valor de la *MAPE* o de la *MAPE'*, de acuerdo con cada situación específica. Se sugiere comprobar que si se minimizan la *MAPE* y la *MAPE'*, se obtiene un $\alpha_{opt} = 0,2458$ y 0,0591, respectivamente. La utilización de uno u otro criterio de optimización depende de las particularidades de cada caso.

Es muy importante notar que, dado que las funciones que se generan aquí pueden tener múltiples mínimos locales, debe repetirse la aplicación del *solver* tomando diferentes valores iniciales en la celda que contiene el valor de α , pues se encuentran casos en los cuales existen dos o más óptimos locales, los cuales podrían ser alcanzados por la subrutina partiendo desde diferentes puntos iniciales de dicha celda variable y, obviamente, lo que se pretende es encontrar el óptimo global dentro del rango de variación de α .

Tabla 3.7. Pronósticos de suavización exponencial simple, ejemplo 3.3 ($\alpha = 0,15$)

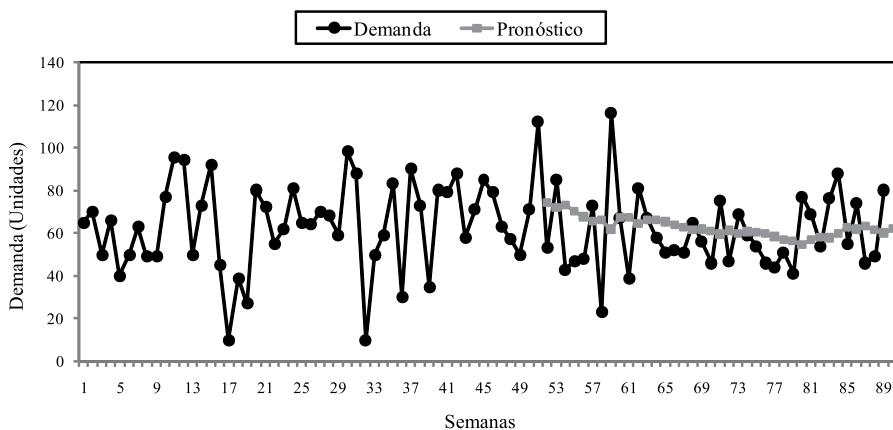
	Semana	Per. T	Demanda	Pronóstico	e_T	$ e_T $	e_T^2	APE	APE'		
S I M U L A C I Ó N I N I C I A L I Z A C I Ó N	40		80								
	41		79								
	42		88								
	43		58								
	44		71								
	45		85	S ₀ se estima con el promedio de demanda de							
	46		79	estas 12 semanas = 74,42							
	47		63								
	48		57								
	49		50								
	50		71								
	51	0	112								
	52	1	53	74,42	-21,42	21,42	458,67	40,41%	28,78%		
	53	2	85	71,20	13,80	13,80	190,33	16,23%	19,38%		
	54	3	43	73,27	-30,27	30,27	916,49	70,40%	41,32%		
	55	4	47	68,73	-21,73	21,73	472,30	46,24%	31,62%		
	56	5	48	65,47	-17,47	17,47	305,29	36,40%	26,69%		
	57	6	73	62,85	10,15	10,15	102,99	13,90%	16,15%		
	58	7	23	64,37	-41,37	41,37	1.711,81	179,89%	64,27%		
	59	8	116	58,17	57,83	57,83	3.344,55	49,86%	99,42%		
	60	9	67	66,84	0,16	0,16	0,02	0,23%	0,24%		
	61	10	39	66,87	-27,87	27,87	776,53	71,45%	41,67%		
	62	11	81	62,69	18,31	18,31	335,39	22,61%	29,21%		
	63	12	67	65,43	1,57	1,57	2,45	2,34%	2,39%		
	64	13	58	65,67	-7,67	7,67	58,80	13,22%	11,68%		
	65	14	51	64,52	-13,52	13,52	182,74	26,51%	20,95%		
	66	15	52	62,49	-10,49	10,49	110,05	20,17%	16,79%		
	67	16	51	60,92	-9,92	9,92	98,34	19,44%	16,28%		
	68	17	65	59,43	5,57	5,57	31,03	8,57%	9,37%		
	69	18	56	60,26	-4,26	4,26	18,19	7,62%	7,08%		
	70	19	46	59,63	-13,63	13,63	185,65	29,62%	22,85%		
	71	20	75	57,58	17,42	17,42	303,41	23,22%	30,25%		
	72	21	47	60,19	-13,19	13,19	174,09	28,07%	21,92%		
	73	22	69	58,22	10,78	10,78	116,31	15,63%	18,53%		
	74	23	59	59,83	-0,83	0,83	0,69	1,41%	1,39%		
	75	24	54	59,71	-5,71	5,71	32,58	10,57%	9,56%		
	76	25	46	58,85	-12,85	12,85	165,17	27,94%	21,84%		
	77	26	44	56,92	-12,92	12,92	167,03	29,37%	22,70%		
	78	27	51	54,99	-3,99	3,99	15,88	7,81%	7,25%		
	79	28	41	54,39	-13,39	13,39	179,23	32,65%	24,62%		
	80	29	77	52,38	24,62	24,62	606,17	31,97%	47,00%		
	81	30	69	56,07	12,93	12,93	167,12	18,74%	23,05%		
	82	31	54	58,01	-4,01	4,01	16,09	7,43%	6,92%		
	83	32	76	57,41	18,59	18,59	345,59	24,46%	32,38%		
	84	33	88	60,20	27,80	27,80	772,93	31,59%	46,18%		
	85	34	55	64,37	-9,37	9,37	87,77	17,03%	14,55%		
	86	35	74	62,96	11,04	11,04	121,81	14,91%	17,53%		
	87	36	46	64,62	-18,62	18,62	346,66	40,48%	28,81%		
	88	37	49	61,83	-12,83	12,83	164,51	26,18%	20,75%		
	89	38	80	59,90	20,10	20,10	403,92	25,12%	33,55%		
	90	39	?	62,92	← Pronóstico en tiempo real						
Sumas											
MAD, ECM, MAPE y MAPE'											
→ 15,21 354,96 28,68% 24,60%											
alpha = 0,15											
Desviación estándar estimada → 19,06 18,84											

Tabla 3.8. Pronósticos de suavización exponencial simple para el ECM_{opt}
 $(\alpha_{opt.} = 0,1063)$

	Semana	Per.	T	Demanda	Pronóstico	e_T	$ e_T $	e_T^2	APE	APE'
INICIALIZACIÓN	40			80						
	41			79						
	42			88						
	43			58						
	44			71						
	45			85	S ₀ se estima con el promedio de demanda de					
	46			79	estas 12 semanas = 74,42					
	47			63						
	48			57						
SIMULACIÓN	49			50						
	50			71						
	51	0		112						
	52	1		53	74,42	-21,42	21,42	458,67	40,41%	28,78%
	53	2		85	72,14	12,86	12,86	165,38	15,13%	17,83%
	54	3		43	73,51	-30,51	30,51	930,68	70,95%	41,50%
	55	4		47	70,26	-23,26	23,26	541,22	49,50%	33,11%
	56	5		48	67,79	-19,79	19,79	391,69	41,23%	29,19%
	57	6		73	65,69	7,31	7,31	53,48	10,02%	11,13%
	58	7		23	66,46	-43,46	43,46	1.889,17	188,98%	65,40%
	59	8		116	61,84	54,16	54,16	2.932,85	46,69%	87,57%
	60	9		67	67,60	-0,60	0,60	0,36	0,90%	0,89%
	61	10		39	67,54	-28,54	28,54	814,37	73,17%	42,25%
	62	11		81	64,50	16,50	16,50	272,13	20,37%	25,57%
	63	12		67	66,26	0,74	0,74	0,55	1,11%	1,12%
	64	13		58	66,34	-8,34	8,34	69,49	14,37%	12,57%
	65	14		51	65,45	-14,45	14,45	208,80	28,33%	22,08%
	66	15		52	63,91	-11,91	11,91	141,94	22,91%	18,64%
	67	16		51	62,65	-11,65	11,65	135,66	22,84%	18,59%
	68	17		65	61,41	3,59	3,59	12,89	5,52%	5,85%
	69	18		56	61,79	-5,79	5,79	33,54	10,34%	9,37%
	70	19		46	61,18	-15,18	15,18	230,29	32,99%	24,81%
	71	20		75	59,56	15,44	15,44	238,33	20,58%	25,92%
	72	21		47	61,20	-14,20	14,20	201,73	30,22%	23,21%
	73	22		69	59,69	9,31	9,31	86,61	13,49%	15,59%
	74	23		59	60,68	-1,68	1,68	2,83	2,85%	2,77%
	75	24		54	60,50	-6,50	6,50	42,30	12,04%	10,75%
	76	25		46	59,81	-13,81	13,81	190,78	30,03%	23,09%
	77	26		44	58,34	-14,34	14,34	205,76	32,60%	24,59%
	78	27		51	56,82	-5,82	5,82	33,86	11,41%	10,24%
	79	28		41	56,20	-15,20	15,20	231,06	37,07%	27,05%
	80	29		77	54,58	22,42	22,42	502,44	29,11%	41,06%
	81	30		69	56,97	12,03	12,03	144,78	17,44%	21,12%
	82	31		54	58,25	-4,25	4,25	18,03	7,86%	7,29%
	83	32		76	57,80	18,20	18,20	331,41	23,95%	31,50%
	84	33		88	59,73	28,27	28,27	799,16	32,12%	47,33%
	85	34		55	62,74	-7,74	7,74	59,84	14,06%	12,33%
	86	35		74	61,91	12,09	12,09	146,09	16,33%	19,52%
	87	36		46	63,20	-17,20	17,20	295,78	37,39%	27,21%
	88	37		49	61,37	-12,37	12,37	153,02	25,24%	20,16%
	89	38		80	60,05	19,95	19,95	397,80	24,93%	33,21%
	90	39		?	62,18	← Pronóstico en tiempo real				
						Sumas	-115,16	580,87	13.364,80	1.114,50%
						MAD, ECM, MAPE y MAPE'	→	15,29	351,71	29,33%
										24,22%
alpha = 0,1063						Desviación estándar estimada	→	19,16	18,75	

Finalmente, si se comparan los resultados de la suavización exponencial simple con los del promedio móvil para este ejemplo, se observa que los de este último método de pronósticos son ligeramente mejores (comparar el *ECM* mínimo = 334,96 del promedio móvil, con el *ECM* mínimo = 351,71 de la suavización exponencial simple). Este resultado no puede generalizarse, pues puede ocurrir también lo contrario. Algunos programas comerciales de pronósticos lo que hacen es buscar el método que produce los mejores resultados para cada ítem; sin embargo, en la práctica se observa que puede ser más ventajoso utilizar siempre el mismo sistema de pronósticos para familias de ítems (por ejemplo, para los ítems clase A), debido a factores administrativos y del cálculo automático de los pronósticos.

Las figuras 3.9 y 3.10 muestran las demandas y los pronósticos cuando se optimiza el *ECM* ($\alpha_{\text{opt}} = 0,1063$) y la *MAPE* ($\alpha_{\text{opt}} = 0,2458$), respectivamente. Obsérvese que, de nuevo, como en el caso de promedio móvil, el pronóstico sigue la tendencia de la demanda, mas no es posible predecir las variaciones aleatorias de la misma. Además, nótese la diferencia entre un α relativamente bajo ($\alpha_{\text{opt}} = 0,1063$) y uno relativamente alto ($\alpha_{\text{opt}} = 0,2458$), dentro del rango de optimización de 0,01 a 0,30. Cuando α es bajo, la curva luce relativamente plana y suavizada, mientras que cuando α se incrementa, el pronóstico se vuelve mucho más responsivo ante posibles cambios, y por ellos la curva luce mucho más quebrada.



*Figura 3.9. Pronóstico de suavización exponencial simple optimizando el ECM
($\alpha_{\text{opt}} = 0,1063$, ejemplo 3.3)*

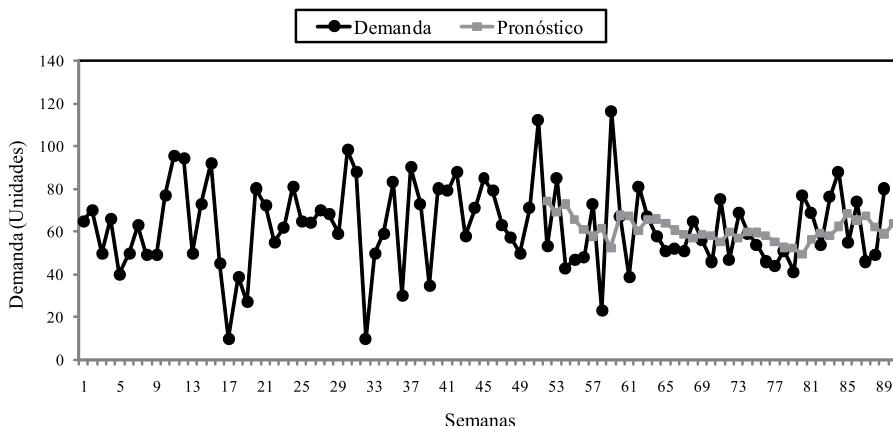


Figura 3.10. Pronóstico de suavización exponencial simple optimizando la MAPE
 $(\alpha_{opt} = 0,2458, \text{ ejemplo 3.3})$

Ejercicios 3.3

1. Considere un ítem cuyas demandas para las semanas 1-38 se muestran en la tabla 3.9. El valor de arranque S_0 ha sido calculado tomando el promedio de las 51 semanas anteriores (no se muestran estos datos) y se ha hallado $S_0 = 128,9450$.
 - a) Con una constante de suavización $\alpha = 0,10$, determine el pronóstico para las 38 semanas mostradas. Calcule igualmente el error del pronóstico, el error absoluto, el error cuadrático, la MAD , el ECM , la $MAPE$ y la $MAPE'$, considerando las 38 semanas. Estime la desviación estándar de los errores de pronóstico con las Ec. (3.15) y (3.16) y grafique la demanda y el pronóstico en función del tiempo (semanas).
 - b) Repita el procedimiento anterior para varios valores de α . Trate de encontrar el valor de α que minimiza la MAD , el ECM , la $MAPE$ y la $MAPE'$ (Ayuda: si maneja Excel , puede utilizar el solver para encontrar este valor; por ejemplo, el valor óptimo que produce la MAD mínima es aproximadamente $\alpha_{opt} = 0,1264$).

Tabla 3.9. Datos para el problema No. 1 (ejercicios 3.3)

Semana	Demanda	Semana	Demanda
1	92	20	109
2	80	21	85
3	105	22	103
4	121	23	124
5	99	24	114
6	120	25	97
7	50	26	89
8	190	27	144
9	117	28	94
10	99	29	105
11	128	30	113
12	119	31	96
13	113	32	125
14	72	33	118
15	85	34	97
16	105	35	135
17	109	36	147
18	96	37	110
19	98	38	103

2. Usted dispone de 38 datos de demanda de un producto que manufactura en su empresa (tabla 3.10). Tomando las primeras 20 semanas para iniciar, y como criterio de optimización, el *ECM*, diseñe un sistema de pronósticos de promedio móvil con el mejor N (entre 6 y 15), y de suavización exponencial simple con el α óptimo, para pronosticar las demandas de las semanas 21-38. De acuerdo con su criterio, escoja el mejor sistema y pronostique la demanda de la semana 39.
3. Las varianzas de los estimadores M_T y S_T fueron determinadas anteriormente. Se dice que un sistema de pronósticos es equivalente a otro, si ambos estimadores del pronóstico producen la misma varianza.
 - a) Desarrolle una expresión que permita determinar cuándo un sistema de pronósticos de promedio móvil es equivalente a un sistema de pronósticos de suavización exponencial simple. Comente acerca del resultado.
 - b) ¿Qué valor de N , en un sistema de pronósticos de promedio móvil, es equivalente a un sistema de pronósticos de suavización exponencial simple con $\alpha = 0,15$? Y a $0,30$?

Tabla 3.10. Datos para el problema No. 2 (ejercicios 3.3)

Semana	Demanda	Semana	Demanda
1	17	20	85
2	132	21	66
3	43	22	48
4	40	23	22
5	127	24	91
6	17	25	61
7	96	26	74
8	138	27	82
9	64	28	115
10	56	29	19
11	122	30	132
12	143	31	30
13	57	32	93
14	70	33	41
15	79	34	64
16	115	35	77
17	108	36	26
18	48	37	37
19	67	38	39

4. La tabla 3.11 muestra los últimos 34 datos de demanda de azúcar en toneladas en una industria alimenticia que está en crecimiento. Con base en los primeros 18 datos de demanda, aplique un sistema de pronósticos de suavización exponencial simple para pronosticar la demanda de las 16 semanas restantes, optimizando la constante de suavización entre 0,01 y 0,30 con base en la *MAPE*. Si usted considera que este no es método adecuado de pronósticos en este caso, ¿qué sugiere para pronosticar el consumo de azúcar en esta industria? Observe los resultados y concluya.
5. Uno de los problemas más complejos en inventarios es la determinación de inventarios de seguridad en varios lugares de una cadena de suministro. Suponga que su empresa tiene tres bodegas ubicadas en Cali, Bogotá y Medellín, atendiendo cada una cierta región del país. Se dispone de los datos mensuales de demanda de cierto producto para el último año (tabla 3.12). Usted tiene la opción de seguir uno de dos métodos. Primero, puede pronosticar la demanda de cada bodega en forma independiente, o, segundo, pronosticar el total de la demanda para las tres bodegas y luego asignar inventarios de seguridad a cada una de las bodegas. *Asuma que los inventarios de seguridad son proporcionales a la desviación estándar de los errores del pronóstico.* Utilice suavización exponencial simple (con la constante

de suavización óptima determinada mediante el *ECM* en cada caso) para tratar de determinar cuál método utilizar. Tome el promedio de los primeros seis meses para inicializar el sistema de pronósticos y simule el pronóstico para los seis meses restantes y concluya acerca de las ventajas y desventajas de uno u otro método. Comente acerca de los problemas administrativos y logísticos de manejo de cada situación.

Tabla 3.11. Demanda de azúcar en toneladas para el problema No. 4 (ejercicios 3.3)

Mes	Demanda (Ton.)	Mes	Demanda (Ton.)
1	77,3	18	188,5
2	125,0	19	190,4
3	52,4	20	187,4
4	51,0	21	150,6
5	83,1	22	226,6
6	58,9	23	195,0
7	117,5	24	211,0
8	136,5	25	178,8
9	134,0	26	194,4
10	110,8	27	207,1
11	104,4	28	228,2
12	96,7	29	206,0
13	113,7	30	279,8
14	119,3	31	177,6
15	191,2	32	236,7
16	145,0	33	220,0
17	144,2	34	246,5

6. En el ejemplo 3.3 (tabla 3.8), de los 50 datos históricos, se tomaron las primeras 12 demandas para iniciar el sistema de pronósticos y los 38 restantes para simular el pronóstico y determinar el α óptimo. Esto se hizo para efectos de comparación con el sistema de pronósticos de promedio móvil. Sin embargo, cabe la pregunta de por qué no tomar un número diferente de datos para iniciar y, por lo tanto, para simular los pronósticos. Por ejemplo, se pueden tomar los primeros 20 datos para iniciar el sistema y simular con los 30 datos restantes, o tomar los primeros 30 datos para inicialización y el resto para simular, y así sucesivamente. Empíricamente se ha encontrado que, primero, un número razonable de datos para iniciar corresponde a aproximadamente el 60% de la historia (30 datos en este caso) y, segundo, que, si las condiciones de la demanda no han

sido muy cambiantes, entonces no hay una gran influencia de este aspecto sobre el comportamiento del sistema de pronósticos. Este ejercicio consiste en simular los pronósticos cambiando el número de datos para iniciar desde 15 hasta 40 (desde un 30% hasta un 80% de los datos), simulando para los restantes 35 hasta 10 datos, respectivamente. Genere una tabla resumen de resultados que contenga el número de datos con que se inicia el sistema de pronósticos, el α óptimo con base en el ECM y todas las medidas del error del pronóstico (MAD , ECM , $MAPE$ y $MAPE'$) calculadas, por supuesto, sobre el número de datos para los que se simula el pronóstico. Analice esta información y concluya.

Tabla 3.12. Datos para el problema No. 5 (en miles de unidades) (ejercicios 3.3)

Mes	Cali	Bogotá	Medellín	Total
Enero	45	33	12	90
Febrero	78	33	12	123
Marzo	57	108	0	165
Abril	44	45	18	107
Mayo	67	58	18	143
Junio	53	22	13	88
Julio	90	57	4	151
Agosto	66	106	18	190
Septiembre	63	45	15	123
Octubre	33	82	7	122
Noviembre	81	62	0	143
Diciembre	57	80	12	149
Total	734	731	129	1.594

SUAVIZACIÓN EXPONENCIAL DOBLE

El sistema de pronósticos de suavización exponencial doble tiene en cuenta la posible tendencia (creciente o decreciente) de la demanda, ya que el modelo subyacente que considera es el siguiente:

$$x_t = b_1 + b_2 + e_t \quad (3.20)$$

donde:

x_t = Valor real u observación de la demanda en el período t (tal como se definió anteriormente).

b_1 = Una constante que representa la componente fija de la demanda.

b_2 = Una constante que representa la componente de tendencia de la demanda (creciente o decreciente, de acuerdo con su signo).

e_t = Una variable aleatoria normal con media cero y varianza $\sigma_e^2 > 0$ desconocida. Esta variable representa la parte aleatoria del proceso, imposible de pronosticar.

Ahora se trata de estimar los dos parámetros b_1 y b_2 para poder pronosticar demandas futuras, ya que éstas presentan la componente constante, determinada por b_1 , y la componente de tendencia, determinada por b_2 . El siguiente desarrollo se ha ampliado y complementado de Montgomery *et al.* (1990, pp. 89-92).

La primera ecuación que rige la suavización exponencial doble es:

$$S_T = \alpha x_T + (1-\alpha)S_{T-1} \quad (3.21)$$

Esta ecuación es la misma utilizada en la suavización simple [Ec. (3.17)]. Si sólo se aplicara esta expresión al modelo subyacente presentado en la Ec. (3.20), se obtendría lo siguiente:

$$\begin{aligned} E(S_T) &= \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k E(x_{T-k}) + (1-\alpha)^T S_0 \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{T-1} \beta^k [b_1 + b_2(T-k)] + \beta^T S_0, \text{ donde } \beta = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Si $T \rightarrow \infty$, entonces:

$$E(S_T) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k [b_1 + b_2 T] - \alpha b_2 \sum_{k=0}^{\infty} k \beta^k$$

Considérese aquí:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{k=0}^{\infty} k \beta^k = \beta + 2\beta^2 + 3\beta^3 + 4\beta^4 + \dots \\ \Rightarrow \beta W &= \beta^2 + 2\beta^3 + 3\beta^4 + \dots \\ \Rightarrow W - \beta W &= \beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \dots \\ \Rightarrow W(1 - \beta) &= \beta(1 + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \dots) = \frac{\beta}{1 - \beta} \\ \Rightarrow W &= \frac{\beta}{(1 - \beta)^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$E(S_T) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k [b_1 + b_2 T] - \alpha b_2 \frac{\beta}{(1-\beta)^2}$$

$$E(S_T) = \alpha(b_1 + b_2 T) \frac{1}{1-\beta} - \alpha b_2 \frac{\beta}{(1-\beta)^2}$$

$$E(S_T) = b_1 + b_2 T - \frac{\beta}{\alpha} b_2$$

Y así:

$$E(S_T) = E(x_T) - \frac{\beta}{\alpha} b_2 \quad (3.22)$$

Obsérvese, por lo tanto, que si S_T se aplicara al modelo descrito en la Ec. (3.20), entonces no sería un estimador insesgado de x_T , ya que su valor esperado es diferente del de la demanda. Para resolver este problema, se aplica de nuevo el operador S_T a la Ec. (3.21), tomándose un nuevo operador:

$$S_T^{[2]} = \alpha S_T + (1-\alpha) S_{T-1}^{[2]} \quad (3.23)$$

La Ec. (3.23) significa que se aplica de nuevo el operador al resultado de la suavización simple, utilizando la misma constante de suavización α . De aquí proviene el nombre de suavización “doble”. Este nuevo operador se bautiza con el nombre de $S_T^{[2]}$ para indicar que se está realizando el mismo proceso por segunda vez (no confundir con la función cuadrática; no se trata del cuadrado de S_T).

Un análisis semejante al realizado anteriormente para S_T revela que:

$$E(S_T^{[2]}) = E(S_T) - \frac{\beta}{\alpha} b_2 \quad (3.24)$$

Despejando $E(x_T)$ de la Ec. (3.22), se obtiene:

$$E(x_T) = E(S_T) + \frac{\beta}{\alpha} b_2 \quad (3.25)$$

Por otra parte, de la Ec. (3.24) se obtiene:

$$b_2 = \frac{\alpha}{\beta} [E(S_T) - E(S_T^{[2]})] \quad (3.26)$$

Por lo tanto, un buen estimador de b_2 sería:

$$\hat{b}_2(T) = \frac{\alpha}{\beta} [S_T - S_T^{[2]}] \quad (3.27)$$

Reemplazando la Ec. (3.26) en la Ec. (3.25) se obtiene:

$$E(x_T) = E(S_T) + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\alpha}{\beta} [E(S_T) - E(S_T^{[2]})]$$

$$E(x_T) = 2E(S_T) - E(S_T^{[2]})$$

Un buen estimador de x_T es, por lo tanto:

$$\hat{x}_T = 2S_T - S_T^{[2]} \quad (3.28)$$

Nótese que:

$$E(\hat{x}_T) = 2E(S_T) - E(S_T^{[2]})$$

$$E(\hat{x}_T) = 2\left(b_1 + b_2 T - \frac{\beta}{\alpha} b_2\right) - \left(b_1 + b_2 T - \frac{\beta}{\alpha} b_2 - \frac{\beta}{\alpha} b_2\right)$$

$$E(\hat{x}_T) = b_1 + b_2 T$$

Este último es el valor esperado de la demanda x_T , de acuerdo con la Ec. (3.20). Por lo tanto, \hat{x}_T es un estimador insesgado de x_T .

Para efectos de pronósticos τ períodos adelante, basados en el período T , una ecuación razonable sería la siguiente:

$$\hat{x}_{T+\tau}(T) = \hat{x}_T + \tau \hat{b}_2(T)$$

Reemplazando las Ec. (3.27) y (3.28) en esta expresión, se llega, finalmente, al siguiente resultado:

$$\hat{x}_{T+\tau}(T) = \left(2 + \frac{\alpha\tau}{1-\alpha}\right) S_T - \left(1 + \frac{\alpha\tau}{1-\alpha}\right) S_T^{[2]} \quad (3.29)$$

Esta ecuación se utiliza en suavización exponencial doble para calcular el pronóstico de demanda τ períodos adelante, basado en los valores S_T y $S_T^{[2]}$ correspondientes al actual período T .

Es importante mencionar que algunos autores presentan la suavización exponencial doble con dos constantes de suavización, una para la compo-

nente constante (también denominada permanente) y la otra para la pendiente de la tendencia lineal (creciente o decreciente, según el caso). Se ha preferido utilizar el método propuesto por Montgomery *et al.* (1990) con una sola constante de suavización ya que se facilita su aplicación práctica, como se pudo constatar en algunos proyectos de optimización de inventarios.

Inicialización de la suavización exponencial doble

Si se observan las Ec. (3.21) y (3.23), se concluye que para poder calcular los pronósticos se requiere estimar valores iniciales de S_0 y $S_0^{[2]}$. Para estimar estos valores se procede de la siguiente forma. En el tiempo T el intercepto con el eje y en el origen se estimaría así:

$$\hat{x}_T = \hat{b}_1(T) + T\hat{b}_2(T)$$

Entonces:

$$\hat{b}_1(T) = \hat{x}_T - T\hat{b}_2(T)$$

Reemplazando las Ec. (3.27) y (3.28) en la ecuación anterior, se obtendría:

$$\hat{b}_1(T) = 2S_T - S_T^{[2]} - T \frac{\alpha}{\beta} (S_T - S_T^{[2]})$$

Si se define el origen de coordenadas para iniciar el pronóstico como $T = 0$, se obtiene, de la anterior expresión y de la Ec. (3.27), el siguiente sistema de ecuaciones, donde $\hat{b}_1(0)$ representa el intercepto con el eje y en el origen de coordenadas desde donde se van a iniciar los pronósticos:

$$\hat{b}_1(0) = 2S_0 - S_0^{[2]}$$

$$\hat{b}_2(0) = \frac{\alpha}{\beta} (S_0 - S_0^{[2]})$$

cuya solución produce:

$$S_0 = \hat{b}_1(0) - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \hat{b}_2(0) \quad (3.30)$$

$$S_0^{[2]} = \hat{b}_1(0) - 2 \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \hat{b}_2(0) \quad (3.31)$$

Es muy importante notar que en las Ec. (3.30) y (3.31) se tiene lo siguiente:

- $\hat{b}_1(0)$ = Estimación del valor constante alcanzado por la demanda (corte con el eje y), determinado con base en la regresión lineal de datos históricos, *referido al sistema de coordenadas desde donde se van a iniciar los pronósticos*, y
- $\hat{b}_2(0)$ = Estimación de la pendiente de la tendencia de la demanda (creciente o decreciente) determinada con base en los datos históricos, la cual no cambia con relación al sistema de coordenadas utilizado.

A partir de datos históricos, se obtiene una primera estimación del corte con el eje y , $\hat{a}_1(0)$, referida al tiempo cero de los datos utilizados para inicialización, y una estimación de la pendiente, $\hat{b}_2(0)$, utilizando regresión lineal simple por mínimos cuadrados. El corte inicial $\hat{a}_1(0)$ con el eje y debe trasladarse al nuevo sistema de coordenadas desde donde se van a iniciar los pronósticos, mediante la siguiente ecuación:

$$\hat{b}_1(0) = \hat{a}_1(0) + m\hat{b}_2(0) \quad (3.32)$$

donde m es el número de períodos históricos utilizados para estimar los valores iniciales $\hat{a}_1(0)$ y $\hat{b}_2(0)$. Los valores de $\hat{b}_1(0)$ y de $\hat{b}_2(0)$, así obtenidos, pueden finalmente utilizarse en las Ec. (3.30) y (3.31) para estimar S_0 y $S_0^{[2]}$ e iniciar el sistema de pronósticos.

Ejemplo 3.4. (Simulación de pronósticos de suavización exponencial doble)

La figura 3.11 muestra el gráfico de demanda (unidades) contra el tiempo (semanas) de un ítem para las últimas 89 semanas. La tendencia creciente de la demanda de este ítem es una clara conclusión de este gráfico. Se muestra la línea de tendencia de la demanda, con su ecuación de regresión lineal correspondiente para los 89 datos, de donde se puede concluir que el promedio de la demanda se ha venido incrementando en alrededor de 0,45 unidades / semana. La tabla 3.13 muestra las demandas del ítem para las primeras 51 semanas, las cuales se utilizarán para la estimación inicial de los parámetros del sistema de pronósticos.

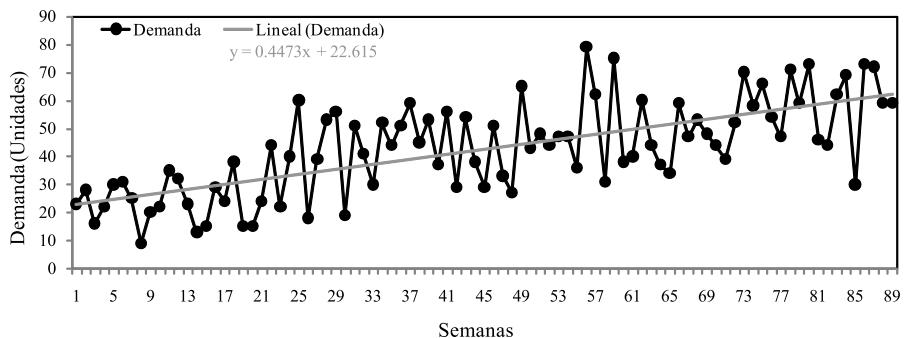


Figura 3.11. Demanda creciente de un ítem para 89 semanas (ejemplo 3.4)

Tabla 3.13. Datos de demanda de las primeras 51 semanas (ejemplo 3.4)

Semana	Demanda	Demanda	Demanda
1	23	26	18
2	28	27	39
3	16	28	53
4	22	29	56
5	30	30	19
6	31	31	51
7	25	32	41
8	9	33	30
9	20	34	52
10	22	35	44
11	35	36	51
12	32	37	59
13	23	38	45
14	13	39	53
15	15	40	37
16	29	41	56
17	24	42	29
18	38	43	54
19	15	44	38
20	15	45	29
21	24	46	51
22	44	47	33
23	22	48	27
24	40	49	65
25	60	50	43
		51	48

Con base en esta información se realiza una regresión lineal simple para estimar los valores de $\hat{a}_1(0)$ y de $\hat{b}_2(0)$, situando el origen de coordenadas inicialmente al comienzo de la semana 1. Esto se realiza con ayuda de

las funciones internas de *Excel INTERSECCION.EJE*, para $\hat{a}_1(0)$ y *PENDIENTE*, para $\hat{b}_2(0)$ (*ESTIMACION.LINEAL* también funciona para esta última). La ecuación de regresión obtenida para los primeros 51 datos de demanda da como resultado un corte con el eje $y = 19,4565$ y una pendiente $\hat{b}_2(0) = 0,5910$. La figura 3.12 ilustra este procedimiento.

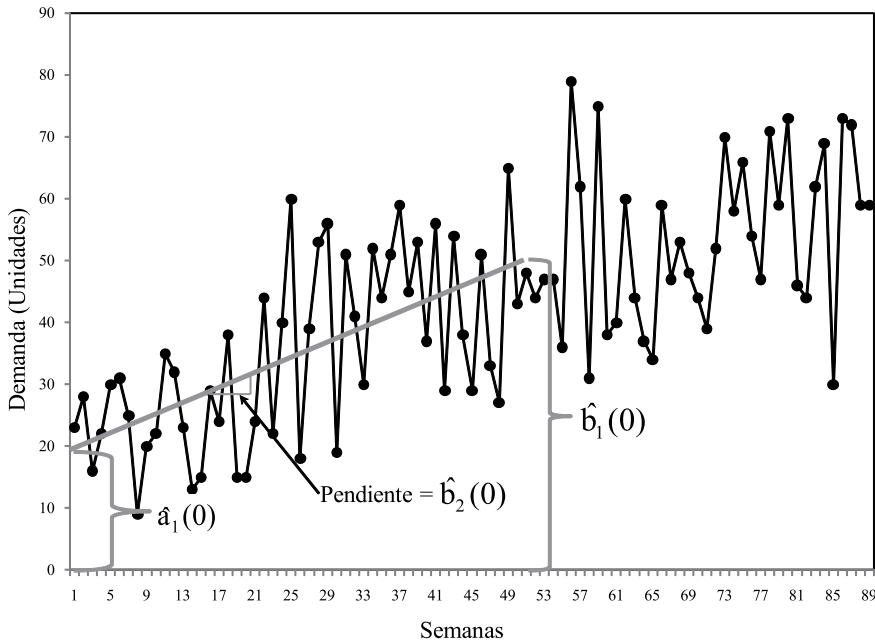


Figura 3.12. Regresión lineal y traslado de corte para inicialización (ejemplo 3.4)

Las demandas del ítem a partir de la semana 52 se muestran en la tabla 3.14. Para iniciar el pronóstico a partir de la semana 52 ($T = 1$) es necesario determinar los valores iniciales S_0 y $S_0^{[2]}$. Sin embargo, debe primero calcularse $\hat{b}_1(0)$ con base en el nuevo sistema de coordenadas localizado al comienzo de la semana 52. El valor de $\hat{b}_2(0)$, calculado mediante la regresión lineal, *no varía* y es igual a 0,5910. Debe estimarse el corte con el eje y al comienzo de la semana 52, o sea, $\hat{b}_1(0)$. Así, con base en la Ec. (3.32), para $m = 51$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\hat{b}_1(0) &= \hat{a}_1(0) + m\hat{b}_2(0) \\ \hat{b}_1(0) &= 19,4565 + (0,5910)(51) \cong 49,60\end{aligned}$$

Tabla 3.14. Datos de demanda para las semanas 52-89 (ejemplo 3.4)

Semana	Demanda	Semana	Demanda
52	44	71	39
53	47	72	52
54	47	73	70
55	36	74	58
56	79	75	66
57	62	76	54
58	31	77	47
59	75	78	71
60	38	79	59
61	40	80	73
62	60	81	46
63	44	82	44
64	37	83	62
65	34	84	69
66	59	85	30
67	47	86	73
68	53	87	72
69	48	88	59
70	44	89	59

Se aplican ahora las Ec. (3.30) y (3.31) para estimar los valores de arranque mencionados (se toma un valor inicial de $\alpha = 0,10$, el cual se optimizará posteriormente):

$$S_0 = 49,5995 - \left(\frac{1-0,10}{0,10} \right) (0,5910)$$

$$S_0 = 44,2802$$

$$S_0^{[2]} = 49,5995 - 2 \left(\frac{1-0,10}{0,10} \right) (0,5910)$$

$$S_0^{[2]} = 38,9608$$

Otra forma de hallar los valores de inicio del pronóstico consiste en estimar S_0 y $S_0^{[2]}$ a partir de la semana 1, es decir, utilizando a $\hat{a}_1(0)$ en lugar de $\hat{b}_1(0)$ en las Ec. (3.30) y (3.31), y actualizándolos mediante las Ec. (3.21) y (3.23) hasta alcanzar la semana 51. Los valores así hallados pueden diferir

ligeramente de los anteriores. Se sugiere comprobar que se obtiene $S_0 = 42,8903$ y $S_0^{[2]} = 39,5120$, los cuales son muy semejantes a los obtenidos anteriormente.

Tomando los valores encontrados inicialmente, se puede aplicar la Ec. (3.29) para simular los pronósticos para las semanas 52-89 (38 semanas en total), cada vez utilizando un valor de $\tau = 1$. Por ejemplo, el pronóstico para la semana $T = 1$ se calcula de la siguiente forma:

$$\text{Pronóstico semana } 1 = \hat{x}_{T+1}(T) = \left(2 + \frac{\alpha(1)}{1-\alpha} \right) S_T - \left(1 + \frac{\alpha(1)}{1-\alpha} \right) S_T^{[2]}$$

$$\text{Pronóstico semana } 1 = \hat{x}_1(T) = \left(2 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) S_0 - \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) S_0^{[2]}$$

$$\text{Pronóstico semana } 1 = \left(2 + \frac{0,1}{0,9} \right) (44,2801) - \left(1 + \frac{0,1}{0,9} \right) (38,9608) = 50,19$$

Los valores de S_1 , $S_1^{[2]}$ para calcular el pronóstico de la semana 2 se determinan con base en las Ec. (3.21) y (3.23), una vez conocida la demanda de la semana 1, x_1 , así:

$$S_T = \alpha x_T + (1-\alpha) S_{T-1}$$

$$S_T^{[2]} = \alpha S_T + (1-\alpha) S_{T-1}^{[2]}$$

$$S_1 = \alpha x_1 + (1-\alpha) S_0$$

$$S_1^{[2]} = \alpha S_1 + (1-\alpha) S_0^{[2]}$$

$$S_1 = (0,1)(44,00) + (0,9)(44,2801)$$

$$S_1^{[2]} = (0,1)(44,2521) + (0,9)(38,9608)$$

$$S_1 = 44,2522$$

$$S_1^{[2]} = 39,4899$$

Con estos nuevos valores se determina el pronóstico de la semana 2, igual a 49,54 unidades, y se continúa así sucesivamente. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 3.15. Por limitaciones de espacio sólo se muestran el error del pronóstico, el error absoluto y el error cuadrático y sus correspondientes *MAD* y *ECM* (si se observan algunas diferencias menores, se deben a errores de redondeo).

Se puede también optimizar el valor de α con base en el *ECM*. Al aplicar el *solver*, se obtiene $\alpha_{opt} = 0,03854$, para una desviación estándar mínima de 13,39 unidades (tabla 3.16 y figura 3.13). Como se mencionó anteriormente para la suavización exponencial simple, en este caso también se pueden presentar múltiples mínimos locales y por ello es conveniente correr el *solver* iniciando con varios valores en la celda cambiante correspondiente a α .

Tabla 3.15. Simulación de un sistema de pronósticos de suavización exponencial doble (ejemplo 3.4; $\alpha = 0,10$)

Semana	Per. T	Demanda	S _T	S _T ^[2]	Pronóstico	e _T	e _T	e _T ²
1		23						
2		28						
3		16						
4		22						
5		30						
6		31						
46		51						
47		33						
48		27						
49		65						
50		43						
51	0	48	44,2802	38,9608	50,19	-6,19	6,19	38,32
52	1	44	44,2522	39,4899	49,54	-2,54	2,54	6,47
53	2	47	44,5269	39,9936	49,56	-2,56	2,56	6,57
54	3	47	44,7743	40,4717	49,55	-13,55	13,55	183,73
55	4	36	43,8968	40,8142	49,55	31,68	31,68	1.003,50
56	5	79	47,4071	41,4735	47,32	8,00	8,00	64,00
57	6	62	48,8664	42,2128	54,00	-25,26	25,26	638,03
58	7	31	47,0798	42,6995	56,26	23,05	23,05	531,45
59	8	75	49,8718	43,4167	51,95	-19,04	19,04	362,68
60	9	38	48,6846	43,9435	57,04	-13,95	13,95	194,67
61	10	40	47,8162	44,3308	53,95	-9,74	9,74	94,83
62	11	60	49,0345	44,8012	51,69	2,21	2,21	4,90
63	12	44	48,5311	45,1742	53,74	-15,26	15,26	232,90
64	13	37	47,3780	45,3945	52,26	-15,58	15,58	242,79
65	14	34	46,0402	45,4591	49,58	12,31	12,31	151,64
66	15	59	47,3362	45,6468	46,69	-2,21	2,21	4,90
67	16	47	47,3026	45,8124	49,21	-1,93	1,93	3,73
68	17	53	47,8723	46,0184	48,96	4,04	4,04	16,34
69	18	48	47,8851	46,2050	49,93	-5,75	5,75	33,08
70	19	44	47,4966	46,3342	49,75	-9,79	9,79	95,81
71	20	39	46,6469	46,3655	48,79	5,04	5,04	25,41
72	21	52	47,1822	46,4471	46,96	22,00	22,00	484,05
73	22	70	49,4640	46,7488	48,00	5,52	5,52	30,46
74	23	58	50,3176	47,1057	52,48	-12,11	12,11	146,74
75	24	66	51,8858	47,5837	53,89	-16,52	16,52	272,75
76	25	54	52,0972	48,0351	56,67	-9,61	9,61	92,37
77	26	47	51,5875	48,3903	56,61	10,52	10,52	110,73
78	27	71	53,5288	48,9042	55,14	-30,96	30,96	958,58
79	28	59	54,0759	49,4213	58,48	17,75	17,75	314,96
80	29	73	55,9683	50,0760	59,25	13,02	13,02	169,60
81	30	46	54,9715	50,5656	62,52	-1,93	1,93	8,61
82	31	44	53,8743	50,8965	59,87	4,82	4,82	23,20
83	32	62	54,6869	51,2755	57,18	-2,67	2,67	7,11
84	33	69	56,1182	51,7598	58,48	-13,75	13,75	189,13
85	34	30	53,5064	51,9344	60,96	17,75	17,75	251,76
86	35	73	55,4557	52,2866	55,25	-2,21	2,21	4,90
87	36	72	57,1102	52,7689	58,98	10,52	10,52	110,73
88	37	59	57,2992	53,2219	61,93	-1,93	1,93	8,61
89	38	59	57,4692	53,6467	61,83	-2,83	2,83	8,01
90	39	?			61,72 ← Pronóstico en tiempo real			
Sumas						-16,63	432,89	7.319,63
MAD y ECM →						11,39	192,62	
Desviación estándar estimada →						14,28	13,88	
ALPHA_2 = 0,1000								

Con base en los primeros 51 datos (Tabla 3.13), se obtiene:

$$a_1(0) = 19,4565$$

$$b_2(0) = 0,5910$$

$$b_1(0) = 49,5995$$

(Nota: No se muestran todos los datos 1-51 por ahorro de espacio)

Tabla 3.16. Simulación de un sistema de pronósticos de suavización exponencial doble (ejemplo 3.4; $\alpha = \alpha_{opt} = 0,0385$)

Semana	Per. T	Demanda	S _T	S _T ^[2]	Pronóstico	e _T	e _T	e _T ²
1		23						
2		28						
3		16						
4		22						
5		30						
6		31						
46		51						
47		33						
48		27						
49		65						
50		43						
51	0	48	34,8545	20,1094	50,19	-6,19	6,19	38,32
52	1	44	35,2070	20,6913	50,30	-3,30	3,30	10,92
53	2	47	35,6615	21,2682	50,63	-3,63	3,63	13,19
54	3	47	36,0984	21,8398	50,93	-14,93	14,93	222,86
55	4	36	36,0946	22,3891	50,35	28,65	28,65	820,85
56	5	79	37,7482	22,9811	53,11	8,89	8,89	79,08
57	6	62	38,6828	23,5862	54,38	-23,38	23,38	546,84
58	7	31	38,3867	24,1566	54,38	21,81	21,81	475,80
59	8	75	39,7978	24,7594	53,19	-17,44	17,44	304,12
60	9	38	39,7285	25,3363	55,44	-14,70	14,70	216,02
61	10	40	39,7390	25,8914	54,70	5,86	5,86	34,32
62	11	60	40,5198	26,4551	54,14	-11,15	11,15	124,28
63	12	44	40,6539	27,0023	55,15	-17,85	17,85	318,72
64	13	37	40,5131	27,5230	54,85	-20,02	20,02	400,96
65	14	34	40,2621	28,0140	54,02	6,00	6,00	35,99
66	15	59	40,9842	28,5139	53,00	-6,95	6,95	48,36
67	16	47	41,2161	29,0034	53,95	-0,92	0,92	0,84
68	17	53	41,6702	29,4916	53,92	-6,34	6,34	40,16
69	18	48	41,9142	29,9703	54,34	-10,34	1,34	106,85
70	19	44	41,9946	30,4337	54,34	-15,02	15,02	225,56
71	20	39	41,8791	30,8748	54,02	-1,32	1,32	1,75
72	21	52	42,2692	31,3140	53,32	16,34	16,34	266,88
73	22	70	43,3379	31,7773	53,66	2,64	2,64	6,96
74	23	58	43,9030	32,2447	55,36	9,97	9,97	99,43
75	24	66	44,7546	32,7268	56,03	-3,26	3,26	10,66
76	25	54	45,1109	33,2041	57,26	-10,50	10,50	110,15
77	26	47	45,1837	33,6657	57,50	13,84	13,84	191,45
78	27	71	46,1786	34,1480	57,16	0,31	0,31	0,10
79	28	59	46,6728	34,6307	58,69	-14,74	14,74	217,39
80	29	73	47,6874	35,1339	59,20	-16,11	16,11	259,56
81	30	46	47,6224	35,6152	60,74	-2,05	2,05	7,02
82	31	44	47,4828	36,0725	60,11	8,99	8,99	80,78
83	32	62	48,0422	36,5338	59,35	-3,28	3,28	971,32
84	33	69	48,8499	37,0085	60,01	13,76	13,76	189,38
85	34	30	48,1235	37,4369	61,17	11,27	11,27	127,07
86	35	73	49,0822	37,8857	59,24	60,73	60,73	9,27
87	36	72	49,9654	38,3512	62,05	-3,05	3,05	10,73
88	37	59	50,3136	38,8122	62,28	Sumas -90,81	420,37	6,814,45
89	38	59	50,6484	39,2684	62,48	MAD y ECM → 11,06	179,33	
90	39	?				Desviación estándar estimada → 13,86	13,39	

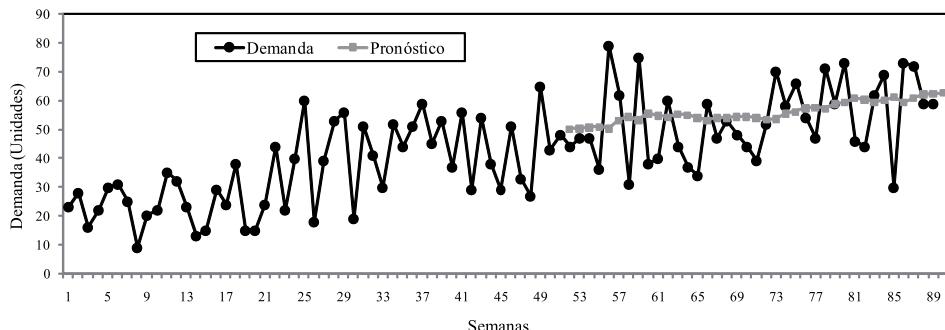


Figura 3.13. Pronóstico de suavización exponencial doble con $\alpha_{opt} = 0,03854$ (ejemplo 3.4)

Las técnicas de suavización exponencial comprenden muchos más métodos diversos que los presentados en este libro. Una excelente revisión del tema es presentada por Gardner Jr. (2006). A pesar de que la suavización exponencial simple es un método de pronóstico propuesto hace mucho tiempo, aún se puede encontrar investigación reciente relacionada con él. Snyder y Koehler (2009) incorporan una señal de rastreo automática a las ecuaciones de la suavización exponencial simple y consiguen un modelo, incluso, de acuerdo con los autores, más consistente que la suavización exponencial doble.

Es importante también anotar que existen técnicas de pronósticos basadas en *regresión directa* sobre el conjunto de datos. Entre las más conocidas están la regresión lineal simple (problema No. 4, ejercicios 3.4), la regresión polinomial (cuadrática, cúbica, etc.), el ajuste exponencial (función exponencial), el ajuste logarítmico (función logarítmica) y la regresión de combinación de funciones trigonométricas para demandas estacionales. Estos métodos requieren la determinación de los parámetros de regresión con base en mínimos cuadrados a través de fórmulas, en algunos casos, complicadas, lo que limita su aplicación práctica. Sin embargo, algunos *ERP* (como *Oracle*, por ejemplo) traen módulos de pronósticos que incluyen técnicas de regresión y pueden determinar en forma automática los parámetros del modelo.

Otras técnicas de regresión más sofisticadas son las de *regresión lineal múltiple*, las cuales pueden considerar varias variables independientes que probablemente influyen en la demanda de un producto. Por ejemplo, la demanda diaria de cerveza en un supermercado puede estar influenciada por la temperatura ambiente de cada día y por el precio de venta. Podría pensarse en construir un modelo de regresión lineal doble, cuya variable de respuesta es la demanda diaria de cerveza y las dos variables independientes serían la temperatura ambiente promedio diaria y el precio que se le fije al producto.

Ejercicios 3.4

1. Considere un ítem cuyos datos se muestran en la tabla 3.17. Utilizando un sistema de pronósticos de suavización exponencial doble, resuelva los siguientes puntos:
 - a) Tomando las primeras 22 semanas para iniciar el pronóstico, calcule la demanda para las 16 semanas restantes. Además, determine el error del pronóstico, el error absoluto y el error cuadrático para cada semana. Igualmente, la *MAD*, el *ECM*, la *MAPE* y la *MAPE'*. Estime la desviación estándar de los errores de pronóstico y grafique la demanda y el pronóstico vs. tiempo (semanas) y concluya.
 - b) Con base en la *MAD* y en el *ECM*, determine el valor óptimo de la constante de suavización α .

**Tabla 3.17. Datos problema No. 1
(ejercicios 3.4)**

Semana	Demanda	Semana	Demanda
1	17	20	85
2	132	21	66
3	43	22	48
4	40	23	22
5	127	24	91
6	17	25	61
7	96	26	74
8	138	27	82
9	64	28	115
10	56	29	19
11	122	30	132
12	143	31	30
13	57	32	93
14	70	33	41
15	79	34	64
16	115	35	77
17	108	36	26
18	48	37	37
19	67	38	39

2. Considere un ítem cuyos datos de demanda se muestran en la tabla 3.18.

**Tabla 3.18. Datos problema No. 2
(ejercicios 3.4)**

Semana	Demanda	Semana	Demanda
1	7	20	2
2	2	21	9
3	5	22	3
4	5	23	3
5	4	24	2
6	7	25	2
7	0	26	3
8	6	27	2
9	3	28	2
10	7	29	0
11	5	30	1
12	6	31	1
13	5	32	4
14	5	33	4
15	2	34	2
16	3	35	6
17	8	36	3
18	7	37	2
19	6	38	2

Los datos para el inicio del pronóstico de suavización doble no se muestran, pero se conocen los valores de arranque $S_0 = 2,521614$ y $S_0^{[2]} = 2,592549$. Calcule el pronóstico para las 38 semanas que muestra la tabla y grafique la MAD vs. α para valores de α entre 0,00 y 0,30. Compruebe que existen dos óptimos locales en este intervalo y que la respuesta que da el *solver* depende del punto de partida, es decir, del valor de la celda que contiene a α . Determine el óptimo global buscado. Compruebe que si la celda objetivo es ahora el *ECM*, entonces *no* se presentan los dos óptimos locales mencionados anteriormente.

3. Para el ítem del ejemplo 3.4 aplique suavización exponencial *simple*, estimando S_0 como el promedio de las demandas de las primeras 51 semanas y continuando la simulación del pronóstico con las 38 semanas restantes. Pruebe inicialmente con un valor de $\alpha = 0,01$, luego encuentre el α_{opt} entre 0,01 y 0,30 y grafique los resultados para las 38 semanas (demanda y pronóstico simple). Concluya acerca de la conveniencia de este método de pronóstico para este ítem.
4. La demanda de cierto producto ha venido aumentando gradualmente durante los últimos ocho años, como muestra la tabla 3.19.

**Tabla 3.19. Datos de demanda trimestral para el problema No. 4
(ejercicios 3.4)**

Año	Trimestre	Demanda	Año	Trimestre	Demanda
1	1	28	5	1	147
	2	16		2	142
	3	73		3	134
	4	61		4	159
2	1	57	6	1	181
	2	43		2	168
	3	44		3	168
	4	68		4	188
3	1	68	7	1	186
	2	73		2	189
	3	84		3	184
	4	93		4	224
4	1	128	8	1	207
	2	100		2	223
	3	130		3	210
	4	148		4	245

- a) Grafique los datos y verifique que existe tendencia lineal creciente. Obtenga la recta de regresión de mínimos cuadrados sobre todos los datos.
- b) Tomando los primeros 20 datos (hasta la demanda del último trimestre del año 5) para iniciar el sistema de pronósticos, simule los siguientes métodos de pronósticos, para los 12 trimestres restantes:
- Regresión lineal simple, utilizando la recta de regresión para pronosticar los 12 trimestres restantes. Utilice siempre la misma ecuación de regresión lineal sin actualizarla.
 - Promedio móvil con el óptimo valor de N para los primeros 20 datos (pruebe valores de N entre 6 y 12).
 - Suavización exponencial simple con el α óptimo con base en el ECM .
 - Suavización exponencial doble con el α óptimo con base en el ECM .

En todos estos casos determine los errores de pronóstico, el error absoluto, el error cuadrático, y estime la MAD , el ECM , la $MAPE$, la $MAPE'$ y la desviación estándar de los errores del pronóstico, con base en los 12 trimestres simulados. Concluya acerca del mejor método de pronóstico.

- c) Agrupe las demandas en forma anual y repita todos los literales anteriores, tomando los cinco primeros años como base y simulando los tres años finales. Estime la desviación estándar para cada método con base en el *ECM* y compárela con la hallada en el literal anterior. Comente acerca de la posible relación entre las dos desviaciones estándar.
5. Reconsidere el problema No. 4 de los ejercicios 3.3. Tomando el mismo enunciado del problema, aplique ahora un método de pronósticos de suavización exponencial doble a los datos de la tabla 3.11 y compare los resultados con el sistema de suavización simple.
 6. Aunque el sistema de pronósticos de promedio móvil presentado anteriormente es aplicable a un patrón de demanda perpetua o uniforme, existe un método de promedios móviles que puede ser aplicado a patrones de demanda con tendencia. Investigue este método y aplíquelo en forma adecuada al caso del problema No. 4 de esta sección de ejercicios y compare los resultados con los demás métodos expuestos allí.

SISTEMAS DE PRONÓSTICOS PARA DEMANDA ESTACIONAL

Existen muchos productos para los cuales se presenta demanda estacional o por temporadas, por ejemplo, adornos de Navidad, juguetes, cuadernos, flores, atún, natilla, buñuelos, entre otros. La demanda de este tipo de productos se caracteriza por presentar picos en ciertos períodos de tiempo conocidos y demanda aproximadamente uniforme en los demás períodos. Los modelos que se estudian en esta sección representan demandas puramente estacionales. Se analizará básicamente el método denominado de Holt y Winters, debido a sus autores principales, C.C. Holt (1957) y P.R. Winters (1960), ilustrado en Montgomery *et al.* (1990, pp. 137-145).

El modelo más comúnmente utilizado en demanda estacional es el modelo multiplicativo de Winters, cuyo modelo subyacente se caracteriza mediante la siguiente expresión:

$$x_t = (b_1 + b_2 t)c_t + \varepsilon_t \quad (3.33)$$

donde b_1 , b_2 y ε_t representan una constante, la tendencia y la variación aleatoria, respectivamente, tal como se ha definido para los modelos anteriores, y c_t es un *factor estacional multiplicativo*. Nótese que este modelo es aplicable en patrones de demanda estacional cuya amplitud puede depender del nivel de la serie, o sea, del tiempo. La figura 3.14 muestra un ejemplo de este tipo de patrón. Es posible que el valor de b_2 sea cercano a

cero y, por lo tanto, se tenga un patrón de demanda estacional sin tendencia pero posiblemente con amplitud variable con el tiempo.

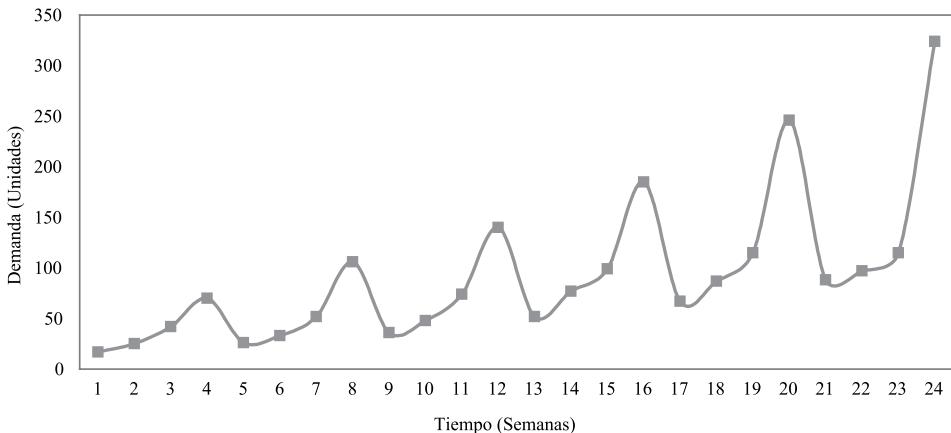


Figura 3.14. Demanda estacional con tendencia y amplitud proporcional al nivel de la serie

La longitud del período estacional es de L períodos y los factores estacionales c_t están definidos de tal forma que:

$$\sum_{t=1}^L c_t = L \quad (3.34)$$

Se denota el nivel del proceso actual *sin considerar el componente estacional*, usualmente denominado *componente permanente*, como:

$$a_1(T) = b_1 + b_2 T$$

y su correspondiente estimación como $\hat{a}_1(T)$. Igualmente, las estimaciones de la pendiente y del factor estacional, al final de cualquier período T , se denotan como $\hat{b}_2(T)$ y $\hat{c}_T(T)$, respectivamente.

La actualización de los parámetros del modelo y de los pronósticos se realiza como sigue. Al final del período T , después de observar la demanda real x_T , se realizan los siguientes cálculos. Primero, se revisa la estimación del componente permanente como:

$$\hat{a}_1(T) = \alpha \frac{x_T}{\hat{c}_T(T-L)} + (1-\alpha) [\hat{a}_1(T-1) + \hat{b}_2(T-1)] \quad (3.35)$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$ es una primera constante de suavización. La división de la demanda x_T entre el factor $\hat{c}_T(T-L)$, el cual es la estimación del factor estacional para el período T , calculada en la estación anterior (L períodos), hace que los datos no incluyan el componente estacional, como es de esperarse para la estimación del componente permanente. En otras palabras, esta expresión desplaza el eje de coordenadas al final del período actual, T . En otros términos esto se conoce como la “desestacionalización” de la demanda.

Segundo, se revisa la estimación de la tendencia (creciente o decreciente), a través de:

$$\hat{b}_2(T) = \beta[\hat{a}_1(T) - \hat{a}_1(T-1)] + (1-\beta)\hat{b}_2(T-1) \quad (3.36)$$

donde $0 \leq \beta \leq 1$ es una segunda constante de suavización, independiente de α . Es decir que en este caso *no se cumple necesariamente* que $\beta = 1 - \alpha$.

Tercero, se revisa la estimación del factor estacional para el período T :

$$\hat{c}_T(T) = \gamma \frac{x_T}{\hat{a}_1(T)} + (1-\gamma)\hat{c}_T(T-L) \quad (3.37)$$

donde $0 \leq \gamma \leq 1$ es una tercera constante de suavización independiente de α y de β . Es posible que al actualizar los valores de $\hat{c}_T(T)$ no se cumpla la Ec. (3.34), por lo cual es conveniente normalizar estos factores al final de cada estación, obligando a que se satisfaga dicha expresión, utilizando la Ec. (3.43), presentada más adelante.

Finalmente, para pronosticar la demanda en cualquier período futuro $T+\tau$, se utiliza la ecuación del pronóstico:

$$\hat{x}_{T+\tau}(T) = [\hat{a}_1(T) + \tau\hat{b}_2(T)]\hat{c}_{T+\tau}(T+\tau-L) \quad (3.38)$$

Recuérdese que la notación entre paréntesis (\bullet), por ejemplo de $\hat{a}_1(T)$ representa el período en el cual se estima el valor de la variable correspondiente, en este caso a_1 , y no representa un producto aritmético.

Al igual que en los sistemas de pronósticos anteriores, este método requiere de valores de arranque del pronóstico para $\hat{a}_1(0)$, $\hat{b}_2(0)$ y $\hat{c}_1(0)$, para $t = 1, 2, 3, \dots, L$. Estas estimaciones pueden hacerse utilizando datos históricos de demanda.

Se supone que se tienen datos para la iniciación de los pronósticos para un total de m estaciones, cada una compuesta por L períodos. Sean \bar{x}_j los promedios de las observaciones de demanda durante las estaciones $j = 1, 2, 3, \dots, m$.

La estimación de la tendencia viene dada por:

$$\hat{b}_2(0) = \frac{\bar{x}_m - \bar{x}_1}{(m-1)L} \quad (3.39)$$

El componente permanente al comienzo del primer período se puede estimar como:

$$\hat{a}_1(0) = \bar{x}_1 - \frac{L}{2} \hat{b}_2(0) \quad (3.40)$$

Los factores estacionales son calculados para cada período $t = 1, 2, \dots, mL$, como la razón entre la actual observación y su valor promedio ajustado estacionalmente y ajustado por la tendencia, mediante la siguiente ecuación:

$$\hat{c}_t = \frac{x_t}{\bar{x}_i - [(L+1)/2 - j] \hat{b}_2(0)}, \text{ para } t = 1, 2, \dots, mL \quad (3.41)$$

donde \bar{x}_i es el promedio para una estación correspondiente al subíndice t , y j es la posición del período t dentro de la estación. Por ejemplo, si $1 \leq t \leq L$, entonces $i = 1$, y si $L + 1 \leq t \leq 2L$, entonces $i = 2$, y así sucesivamente. Igualmente, cuando $t = 1$ y cuando $t = L + 1$, entonces $j = 1$; cuando $t = 2$ y cuando $t = L + 2$, entonces $j = 2$, y así sucesivamente. O sea que $j = t$ para cualquier período $t + kL$, con $k = 0, 1, 2, \dots, m$. La Ec. (3.41) dará m estimaciones del factor estacional para cada período. Por lo tanto, se sugiere calcular el promedio de ellos para obtener una sola estimación para cada período dentro de la estación. Esto se puede llevar a cabo mediante la siguiente ecuación:

$$\bar{c}_t = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \hat{c}_{t+kL}, \text{ para } t = 1, 2, \dots, L \quad (3.42)$$

Finalmente, los factores estacionales deben ser normalizados, de tal forma que su suma sea igual a L , mediante la siguiente expresión:

$$\hat{c}_t(0) = \bar{c}_t \frac{L}{\sum_{t=1}^L \bar{c}_t}, \text{ para } t = 1, 2, \dots, L \quad (3.43)$$

El procedimiento anterior estima $\hat{a}_1(0)$, $\hat{b}_2(0)$ y $\hat{c}_t(0)$ (para $t = 1, 2, \dots, L$), asumiendo que el origen de tiempo se encuentra inmediatamente antes del período 1. Para pronosticar observaciones futuras, se requiere usualmente

estimaciones iniciales de los parámetros con el período mL como el origen de tiempo, en forma análoga a como se realizó en el sistema de pronósticos de suavización exponencial doble. Una forma de hacer esto consiste en estimar la componente permanente para el período mL con la siguiente ecuación, en lugar de utilizar la Ec. (3.40):

$$\hat{a}_1(mL) = \bar{x}_m + \frac{L}{2} \hat{b}_2(0) \quad (3.44)$$

Así, se puede utilizar la expresión anterior y las Ec. (3.39) y (3.43) seguirían siendo válidas para $\hat{b}_2(0)$ y $\hat{c}_t(0)$, respectivamente.

Sin embargo, otra forma que se considera más adecuada para lograr el mismo propósito, es realizar las actualizaciones de $\hat{a}_1(T)$, $\hat{b}_2(T)$ y $\hat{c}_T(T)$, período por período, de acuerdo con las Ec. (3.35)-(3.37) hasta llegar al final del período mL , en forma análoga a como se propuso para la suavización exponencial doble. Así, el origen de tiempo puede ser redefinido para este período y, si se hace más claro, se pueden redefinir los períodos mL , $mL + 1$, $mL + 2$, ..., como los nuevos períodos 0, 1, 2, ..., etc. Una práctica muy utilizada para estimar los valores iniciales de los factores estacionales es simplemente dividir cada observación de demanda entre el promedio de demanda de la estación correspondiente. Este método puede funcionar bien sólo si la componente de tendencia del proceso es despreciable. De lo contrario, el sistema de pronósticos puede verse muy afectado.

Ejemplo 3.5. (Método multiplicativo de Winters)

Como parte de un trabajo realizado en 1994, la tabla 3.20 muestra los consumos de gas natural en los Estados Unidos entre 1987 y 1992, y la figura 3.15 presenta el gráfico correspondiente, reconociéndose fácilmente el carácter estacional de la demanda de gas, debido al aumento progresivo de su uso en los meses de invierno para efectos de calefacción. Dado que se presenta tendencia, el modelo estacional multiplicativo de Winters puede ser adecuado.

**Tabla 3.20. Consumo total de gas natural en los Estados Unidos entre 1987 y 1992
(en trillones de BTU)**

Mes	Demanda	Mes	Demanda	Mes	Demanda
1	1.499,2	13	1.633,2	25	1.361,0
2	1.316,5	14	1.462,6	26	1.416,3
3	1.155,5	15	1.178,1	27	1.265,7
4	926,0	16	830,0	28	851,3
5	630,5	17	606,5	29	604,8
6	520,3	18	513,7	30	474,6
7	531,6	19	543,4	31	507,3
8	586,2	20	604,8	32	519,8
9	518,8	21	528,0	33	471,4
10	704,2	22	671,3	34	694,9
11	878,4	23	889,7	35	901,3
12	1.276,2	24	1.244,0	36	1.482,7

Mes	Demanda	Mes	Demanda	Mes	Demanda
37	1.437,5	49	1.512,9	61	1.395,3
38	1.167,7	50	1.192,0	62	1.194,1
39	1.055,7	51	1.075,6	63	1.070,8
40	824,7	52	763,0	64	834,4
41	598,9	53	551,9	65	575,9
42	483,2	54	434,0	66	458,3
43	478,1	55	472,3	67	431,0
44	523,3	56	438,8	68	441,8
45	498,1	57	448,2	69	462,6
46	635,5	58	617,9	70	700,9
47	834,6	59	900,7	71	996,6
48	1.304,5	60	1.194,3	72	1.344,8

Para realizar la simulación del pronóstico, se van a tomar los primeros cuatro años (1987-1990) para estimar los parámetros de arranque del pronóstico y se van a simular los dos años siguientes (1991-1992). Se identifican, por lo tanto, los siguientes parámetros del modelo, y los promedios de demanda en los años 1-4:

$m = 4$ estaciones disponibles; Longitud de cada estación $L = 12$ meses

$$\bar{x}_1 = 878,6167 \quad \bar{x}_2 = 892,1083$$

$$\bar{x}_3 = 879,2583 \quad \bar{x}_m = \bar{x}_4 = 820,1500$$

Se puede aplicar, entonces, las Ec. (3.39) y (3.40):

$$\hat{b}_2(0) = \frac{\bar{x}_m - \bar{x}_1}{(m-1)L} = \frac{820,15 - 878,6167}{(4-1) \times 12} = -1,62407$$

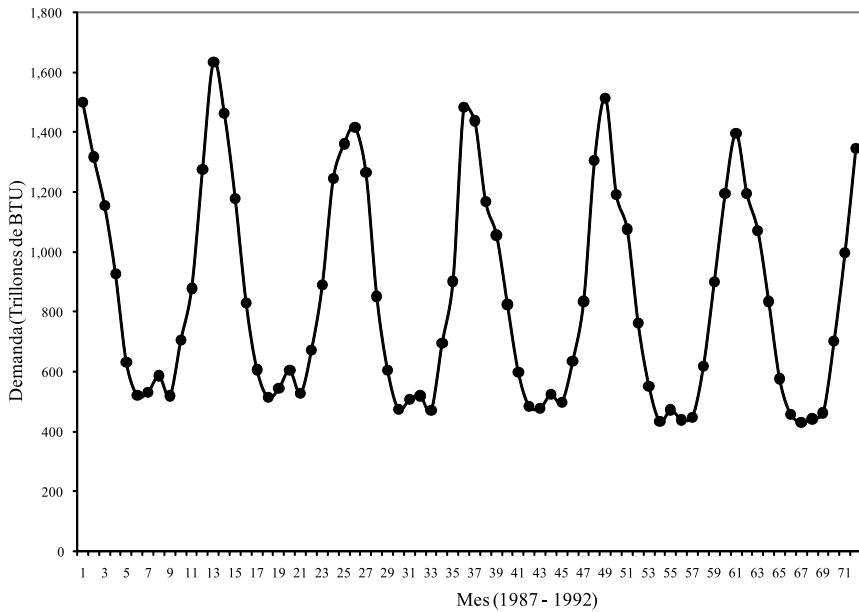


Figura 3.15. Demanda de gas natural en EE.UU. entre 1987 y 1992 (72 meses)

$$\hat{a}_1(0) = \bar{x}_1 - \frac{L}{2} \hat{b}_2(0) = 878,6167 - \frac{12}{2} (-1,62407) = 888,3611$$

Se aplica ahora la Ec. (3.41), la cual producirá $mL = (4)(12) = 48$ valores diferentes de \hat{c}_t . Dada la semejanza de los cálculos para cada año, se ilustran los primeros 12 cálculos para el año $i = 1$, es decir, para $t = 1, 2, \dots, 12$. Nótese que el valor de j representa el mes dentro del año correspondiente, variando desde 1 hasta 12. Los cálculos correspondientes son los siguientes:

$$\hat{c}_t = \frac{x_t}{\bar{x}_i - [(L+1)/2-j]\hat{b}_2(0)}, \text{ para } t=1,2,\dots,mL$$

$$\hat{c}_1 = \frac{x_1}{\bar{x}_1 - [(L+1)/2-j]\hat{b}_2(0)} = \frac{1.499,2}{878,6167 - [(12+1)/2-1](-1,62407)} = 1,689146$$

$$\hat{c}_2 = \frac{1.316,5}{878,6167 - [(12+1)/2-2](-1,62407)} = 1,486017$$

$$\hat{c}_3 = \frac{1.155,5}{878,6167 - [(12+1)/2-3](-1,62407)} = 1,306682$$

De forma semejante se encuentran todos los $mL = 48$ valores para los primeros cuatro años (48 meses) de datos disponibles. La tabla 3.21 muestra los resultados correspondientes.

Tabla 3.21. Valores de \hat{c}_t para el ejemplo 3.5

Período	Valor de j	Estimación	Período	Valor de j	Estimación
1	1	1,689146	25	1	1,532329
2	2	1,486017	26	2	1,597511
3	3	1,306682	27	3	1,430262
4	4	1,049082	28	4	0,963752
5	5	0,715621	29	5	0,685952
6	6	0,591634	30	6	0,539275
7	7	0,605602	31	7	0,577497
8	8	0,669040	32	8	0,592823
9	9	0,593215	33	9	0,538621
10	10	0,806706	34	10	0,795468
11	11	1,008139	35	11	1,033660
12	12	1,467429	36	12	1,703615
13	1	1,812571	37	1	1,733845
14	2	1,626165	38	2	1,411189
15	3	1,312218	39	3	1,278344
16	4	0,926165	40	4	1,000594
17	5	0,677999	41	5	0,728070
18	6	0,575303	42	6	0,588578
19	7	0,609674	43	7	0,583520
20	8	0,679801	44	8	0,639955
21	9	0,594562	45	9	0,610349
22	10	0,757312	46	10	0,780266
23	11	1,005538	47	11	1,026768
24	12	1,408553	48	12	1,608077

A continuación se aplica la Ec. (3.42) para obtener los promedios de los factores estacionales para cada período j dentro de la estación. Esto produce 12 factores estacionales para cada uno de los 12 meses del año, los cuales se obtienen promediando los resultados obtenidos en la tabla 3.21 para cada valor de j . Por ejemplo, para $t = 1$, se toman todos los valores con $j = 1$. Así, se obtiene, por ejemplo, el primer valor aplicando:

$$\bar{c}_1 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \hat{c}_{1+12k}, \text{ para } t = 1$$

$$\bar{c}_1 = \frac{1}{4} (\hat{c}_1 + \hat{c}_{13} + \hat{c}_{25} + \hat{c}_{37}) = \frac{1}{4} (1,689146 + 1,812571 + 1,532329 + 1,733845)$$

$$\bar{c}_1 = 1,691972$$

Obsérvese que los factores \hat{c}_1 , \hat{c}_{13} , \hat{c}_{25} y \hat{c}_{37} presentan el valor $j = 1$ en la tabla 3.21. Repitiendo estos cálculos para los valores restantes de \bar{c}_t y aplicando la Ec. (3.43) para su normalización (suma = $L = 12$), se obtienen los resultados finales para la estimación de los factores estacionales de inicio del pronóstico, $\hat{c}_t(0)$, mostrados en la tabla 3.22.

Tabla 3.22. Estimación de los factores estacionales de inicio $\hat{c}_t(0)$ para el ejemplo 3.5.

Mes	Promedio	Normalizados
1	1,691972	1,693578
2	1,530221	1,531673
3	1,331877	1,333140
4	0,984898	0,985833
5	0,701910	0,702576
6	0,573698	0,574242
7	0,594073	0,594637
8	0,645405	0,646017
9	0,584187	0,584741
10	0,784938	0,785683
11	1,018526	1,019493
12	1,546918	1,548386
SUMAS	11,988623	12,000000

Dado que las estimaciones anteriores están referidas al comienzo del período 1, se necesita trasladarlas al origen de tiempo desde donde se van a simular los pronósticos, o sea, al final del período 48 o, equivalentemente, al comienzo del período 49. Esto se logra aplicando sucesivamente las Ec. (3.35)-(3.37), las cuales se pueden implementar fácilmente en una hoja electrónica. Cuando se llegue al período 48 mediante este proceso se tendrán los valores de inicio del pronóstico simulado propiamente dicho.

Como se requiere conocer el valor de las tres constantes de suavización α , β y γ para aplicar las Ec. (3.35)-(3.37), se utilizó el *solver* para producir el valor mínimo del *ECM* calculado para los 24 meses de simulación del pronóstico, lo cual se explica más adelante. Los valores obtenidos fueron $\alpha = 0,0434$, $\beta = 1,0000$ y $\gamma = 0,7452$, con un $ECM_{mín} = 3.426,20$. La tabla 3.23 ilustra los resultados obtenidos (por simplicidad, no se muestran todas las filas de la tabla para todos los 48 períodos). Las celdas sombreadas en la base de la tabla representan la estimación de los parámetros de inicio utilizados para simular el pronóstico para los dos años 1991 y 1992, es decir, para los períodos 49-72.

Tabla 3.23. Determinación de los valores de inicio con base en el nuevo origen de tiempo (período 48) para el ejemplo 3.5

MES	DEMANDA	a ₁ (T)	b ₂ (T)	c _T (T)	
				1,6936	
				1,5317	
				1,3331	
				0,9858	
				0,7026	
				0,5742	
				0,5946	
				0,6460	
				0,5847	
				0,7857	
				1,0195	
0		888,3611	-1,6241	1,5484	
1	1.499,2	886,6715	-1,6896	1,6915	
2	1.316,5	883,8781	-2,7934	1,5002	
3	1.155,5	880,4633	-3,4148	1,3177	
4	926,0	879,7474	-0,7159	1,0356	
5	630,5	879,8282	0,0809	0,7130	
6	520,3	881,0430	1,2147	0,5864	
7	531,6	882,7663	1,7234	0,6003	
8	586,2	885,4831	2,7168	0,6579	
9	518,8	888,1579	2,6748	0,5843	
10	704,2	891,0693	2,9114	0,7891	
11	878,4	892,5771	1,5078	0,9931	
12	1.276,2	891,0559	-1,5212	1,4618	
13	1.633,2	892,8289	1,7729	1,7942	
.....	
36	1.482,7	841,1922	7,3531	1,6756	
37	1.437,5	850,3100	9,1178	1,6717	
38	1.167,7	853,3305	3,0205	1,4337	
39	1.055,7	851,3184	-2,0121	1,2875	
40	824,7	849,0314	-2,2869	0,9731	
41	598,9	847,2416	-1,7899	0,7046	
42	483,2	846,2888	-0,9527	0,5679	
43	478,1	843,4517	-2,8371	0,5743	
44	523,3	840,3240	-3,1277	0,6240	
45	498,1	838,9099	-1,4141	0,5872	
46	635,5	835,0302	-3,8797	0,7746	
47	834,6	829,2444	-5,7858	1,0202	
48	1.304,5	821,5100	-7,7343	1,6103	

Valores de inicio calculados con las ecuaciones (3.39) a (3.43)

Valores de inicio referidos al comienzo del período 49 para la simulación de los pronósticos a partir de este período, calculados con las ecuaciones (3.35)-(3.37), utilizando:

$$\alpha = 0,0434 \quad \beta = 1,0000 \quad \gamma = 0,7452$$

Como ilustración, los cálculos de la fila correspondiente al mes 1 de la tabla 3.23 son los siguientes (pueden existir pequeños errores de redondeo):

$$\hat{a}_1(T) = \alpha \frac{x_T}{\hat{c}_T(T-L)} + (1-\alpha)[\hat{a}_1(T-1) + \hat{b}_2(T-1)]$$

$$\hat{a}_1(1) = (0,0434) \frac{1.499,2}{1,693578} + (0,9566)[888,3611 + (-1,6241)]$$

$$\hat{a}_1(1) = 886,6715$$

$$\hat{b}_2(T) = \beta[\hat{a}_1(T) - \hat{a}_1(T-1)] + (1-\beta)\hat{b}_2(T-1)$$

$$\hat{b}_2(1) = (1)[886,6715 - 888,3611] + (0)(-1,6241)$$

$$\hat{b}_2(1) = -1,6896$$

$$\hat{c}_T(T) = \gamma \frac{x_T}{\hat{a}_1(T)} + (1-\gamma) \hat{c}_T(T-L)$$

$$\hat{c}_1(1) = (0,7452) \frac{1.499,2}{886,6715} + (0,2548)(1,693578)$$

$$\hat{c}_1(1) = 1,6915$$

**Tabla 3.24. Simulación de pronósticos años 1991 y 1992
(períodos 49-72), ejemplo 3.5.**

MES	DEMANDA	$a_1(T)$	$b_2(T)$	$c_T(T)$	Pronóstico	Error
37				1,6717		
38				1,4337		
39				1,2875		
40				0,9731		
41				0,7046		
42				0,5679		
43				0,5743		
44				0,6240		
45				0,5872		
46				0,7746		
47				1,0202		
48		821,5100	-7,7343	1,6103		
49	1.512,9	817,7307	-3,7793	1,8047	1.360,39	152,51
50	1.192,0	814,7093	-3,0214	1,4556	1.166,93	25,07
51	1.075,6	812,7173	-1,9920	1,3143	1.045,03	30,57
52	763,0	809,5700	-3,1473	0,9503	788,93	-25,93
53	551,9	805,4204	-4,1496	0,6902	568,19	-16,29
54	434,0	799,6672	-5,7532	0,5491	455,01	-21,01
55	472,3	795,1469	-4,5203	0,5890	455,97	16,33
56	438,8	786,8390	-8,3079	0,5746	493,32	-54,52
57	448,2	777,8688	-8,9702	0,5790	457,17	-8,97
58	617,9	770,1488	-7,7200	0,7952	595,56	22,34
59	900,7	767,6514	-2,4974	1,1343	777,80	122,90
60	1.194,3	764,1362	-3,5152	1,5750	1.232,11	-37,81
61	1.395,3	761,1646	-2,9715	1,8259	1.372,67	22,63
62	1.194,1	760,8876	-0,2770	1,5404	1.103,63	90,47
63	1.070,8	762,9569	2,0693	1,3808	999,67	71,13
64	834,4	769,9260	6,9691	1,0497	726,99	107,41
65	575,9	779,3898	9,4638	0,7265	536,18	39,72
66	458,3	790,8365	11,4468	0,5718	433,18	25,12
67	431,0	799,2271	8,3906	0,5519	472,52	-41,52
68	441,8	805,9408	6,7137	0,5549	464,03	-22,23
69	462,6	812,0609	6,1201	0,5720	470,53	-7,93
70	700,9	820,9201	8,8592	0,8389	650,65	50,25
71	996,6	831,8959	10,9758	1,1818	941,22	55,38
72	1.344,8	843,3473	11,4513	1,5896	1.327,52	17,28
						3.426,20 ← ECM
73	?	$\tau =$	1	1,560,75		
74	?		2	1.334,35		
75	?		3	1.211,90		
76	?		4	933,38		
77	?		5	654,28		
78	?		6	521,49		
79	?		7	509,71		
80	?		8	518,81		
81	?		9	541,38		
82	?		10	803,53		
83	?		11	1.145,50		
84	?		12	1.559,03		

$$\alpha = 0,0434 \quad \beta = 1,0000 \quad \gamma = 0,7452$$

Pronósticos en tiempo real
para 1-12 meses adelante:
(Meses 73-84)

Es muy importante notar que para el cálculo del componente estacional $\hat{c}_1(1)$ se toma el coeficiente estacional correspondiente de $L = 12$ meses: $\hat{c}_T(T - L) = 1,693578$ (primera fila de la tabla 3.22) y no el inmediatamente anterior, error que se comete a menudo. Esto es lógico, pues los componentes estacionales del mismo mes (por ejemplo, enero de 1989 y enero de 1990) son los que están relacionados y no los de meses diferentes (por ejemplo, diciembre de 1989 y enero de 1990).

Una vez calculados los valores de inicio con base en el nuevo origen de tiempo, se puede simular el pronóstico para los dos años restantes. Los cálculos para la simulación del pronóstico son semejantes a los realizados anteriormente, con la única diferencia que los nuevos valores de inicio del pronóstico (el componente permanente, la tendencia y los factores estacionales) son las celdas sombreadas mostradas en las últimas filas de la tabla 3.23. Se obtiene entonces la tabla 3.24 al simular el pronóstico para los años 1991 y 1992 (meses 49-72), donde se han reproducido las últimas filas de la tabla 3.23 para mayor claridad.

Para ilustrar el cálculo del pronóstico con base en la Ec. (3.38), se muestra el cálculo del primer pronóstico, aquél para el período 49:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{T+\tau}(T) &= [\hat{a}_1(T) + \tau\hat{b}_2(T)]\hat{c}_{T+\tau}(T + \tau - L) \\ \hat{x}_{49}(48) &= [\hat{a}_1(48) + \hat{b}_2(48)]\hat{c}_{49}(37) \\ \hat{x}_1(0) &= [821,5100 + (-7,7343)] \times 1,6717 \\ \hat{x}_1(0) &= 1,360,39\end{aligned}$$

Este corresponde, por lo tanto, al pronóstico de demanda del mes 49, realizado un período antes, en el período 48. Lo importante es comprender que el factor estacional que debe utilizarse es el estimado en el mismo mes de la estación anterior.

Análogamente, si se fuera a utilizar este sistema de pronósticos en tiempo real, siendo el período 73 el primer período real a pronosticar, se utilizaría la información detallada en la tabla 3.24 en las celdas sombreadas de la base de la tabla. Para pronosticar la demanda del período 73, se tendría:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{T+\tau}(T) &= [\hat{a}_1(T) + \tau\hat{b}_2(T)]\hat{c}_{T+\tau}(T + \tau - L) \\ \hat{x}_{73}(72) &= [\hat{a}_1(72) + \hat{b}_2(72)]\hat{c}_{73}(61) \\ \hat{x}_{73}(72) &= 843,3473 + (11,4513 \times 1,8259) \\ \hat{x}_{73}(72) &= 1,560,75\end{aligned}$$

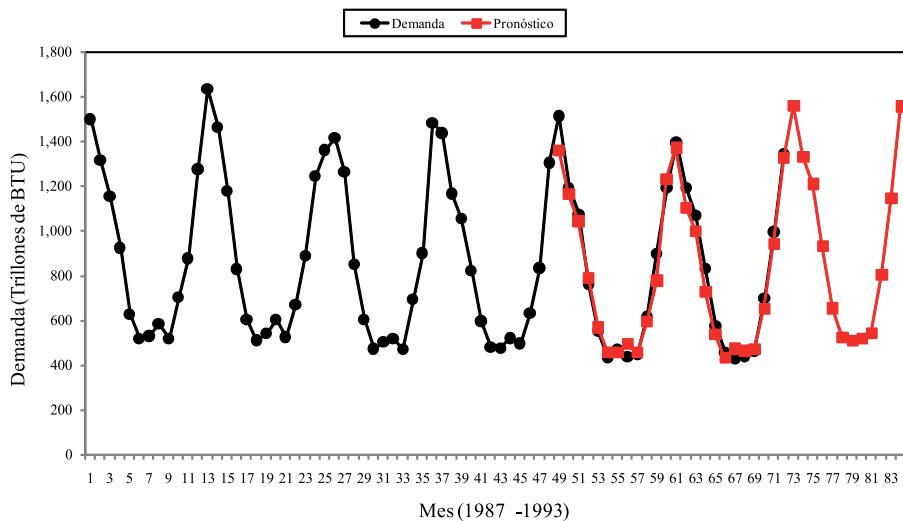
Las demandas de los períodos 74-84 se pronostican con base en los últimos valores disponibles del componente permanente y de la pendiente, variando, τ desde 2 hasta 12 y corriendo período el componente estacional.

Al igual que en los sistemas de pronósticos anteriores, se muestra también en la tabla 3.24 el ECM , calculado con base en los períodos pronosticados, entre el mes 49 y el 72. Se muestran, igualmente, las constantes de suavización óptimas que minimizan este ECM .

Es muy importante observar que aquí el efecto de los múltiples óptimos locales es considerable y debe analizarse con cuidado. Se encontró, por ejemplo, otra solución local con $\alpha = 0,1408$, $\beta = 0,0046$ y $\gamma = 0,5337$, con un $ECM = 3.878,55$. De acuerdo con Silver *et al.* (1998, p. 108), el valor de β debería ser considerablemente menor que el de α para efectos de estabilidad del pronóstico. Así, este segundo óptimo relativo es más conveniente desde este punto de vista y su diferencia en cuanto al ECM no es muy significativa con relación al óptimo encontrado arriba. Por lo tanto, debe probarse el *solver* con diversos puntos de partida en las celdas cambiantes correspondientes a las constantes de suavización para tratar de encontrar el óptimo global o un óptimo relativo adecuado. Así mismo, puede cambiarse el criterio a la minimización de la celda de la MAD , obteniéndose otros múltiples resultados.

Finalmente, la figura 3.16 muestra la demanda y los pronósticos que se obtendrían para los dos años simulados y para el año de pronóstico real. Es importante notar que el pronóstico proyectado para el año 1993 aparece como si la tendencia decreciente no fuera a continuar y, por el contrario, se fuera a presentar una tendencia creciente. La razón de esto es que si se observan las demandas de los dos últimos años (1991 y 1992) a partir del mes de agosto, hubo un incremento en la misma, en 1992. Esto plantea algo muy importante cuando se trata de proyecciones: éstas son muy sensibles a los últimos datos que se tengan disponibles y por ello deben considerarse en conjunto con otros aspectos para llegar a un pronóstico final. En efecto, ocurrió el aumento de demanda de gas natural en 1993, debido principalmente al incremento del consumo en el sector residencial.

Existen otros métodos de pronósticos de demanda estacional, como el modelo aditivo y los métodos de suavización directa. El primero asume que el modelo subyacente es $x_t = b_1 + b_2t + c_t + \varepsilon_t$, cuyos componentes se definen exactamente como en el modelo multiplicativo. El segundo método ajusta directamente diversas funciones matemáticas, como combinaciones de funciones sinusoidales y cosinusoidales a los datos. Estos métodos pueden encontrarse en la literatura descrita en la bibliografía, especialmente en Montgomery *et al.* (1990). El método multiplicativo se considera suficiente para la mayoría de los casos, ya que, por ser tan general, puede manejar prácticamente cualquier caso de demanda estacional.



**Figura 3.16. Demanda y pronósticos ejemplo 3.5
(años 1987-1992 y año proyectado 1993)**

Recientes trabajos han logrado estandarizar los métodos anteriores dentro de modelos más generales. Se destaca la investigación de Gould *et al.* (2008), quienes proponen un nuevo método para el pronóstico de una serie de tiempo con múltiples patrones estacionales. De acuerdo con los autores, en el nuevo modelo se pueden actualizar los componentes estacionales más frecuentemente que en una estación completa, es útil para datos con baja y alta frecuencia y maneja eficientemente los casos de datos dispersos. El artículo viene acompañado de la correspondiente hoja electrónica del método propuesto (disponible en www.sciencedirect.com). Puede también consultarse a Segura y Vercher (2001) quienes aplican hojas electrónicas para optimizar el método de Winters para demanda estacional.

SISTEMAS DE PRONÓSTICOS PARA ÍTEMES CON DEMANDA ERRÁTICA, ÍTEMES NUEVOS Y OTROS TEMAS RELACIONADOS

Demanda errática

El control de inventarios de ítems de demanda errática y de ítems nuevos en el mercado es un problema muy complejo. A los ítems que presentan demanda errática se les puede aplicar los sistemas de pronósticos de suavización exponencial simple y doble, pero su comportamiento no supera al de otros métodos que han sido diseñados especialmente para este tipo de demandas.

Croston (1972) propuso un método para pronosticar demandas erráticas, el cual ha demostrado ser, hasta la fecha, una muy buena alternativa.

Esencialmente, el método de Croston divide los eventos de demanda intermitente en dos. Primero, se pronostica la probabilidad de que ocurra o no una demanda en el período siguiente, de acuerdo con las observaciones anteriores; equivalentemente, esto corresponde a estimar el número de períodos entre ocurrencias de demanda mayores que cero. Seguidamente, se pronostica el posible tamaño de la demanda, de acuerdo con las observaciones anteriores sin tener en cuenta las demandas iguales a cero. Considerese la siguiente notación:

$x_t =$	Demanda observada en el período t .
$y_t =$	Variable binaria igual a 1 si ocurre una demanda mayor que cero en el período t ; igual a cero, de lo contrario.
$z_t = x_t \times y_t =$	Tamaño de la demanda ocurrida en el período t .
$n_t =$	Número de períodos transcurridos desde la última demanda mayor que cero, hasta el período t .
$\hat{n}_t =$	Valor estimado de n al final del período t .
$\hat{z}_t =$	Valor estimado de z al final del período t .

Con base en la anterior notación, al final de cada período t se verifica el valor de x_t . Si $x_t > 0$, cuando ocurre cierta demanda positiva, entonces los estimadores se actualizan de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$\hat{n}_t = \alpha n_t + (1 - \alpha) \hat{n}_{t-1} \quad (3.45)$$

$$\hat{z}_t = \alpha x_t + (1 - \alpha) \hat{z}_{t-1} \quad (3.46)$$

donde α es una constante de suavización (Croston sugiere que $0,1 \leq \alpha \leq 0,2$, aunque en la práctica no hay inconveniente en probar con otros intervalos como $0,01 \leq \alpha \leq 0,30$ e, incluso, con $0 \leq \alpha \leq 1$).

Si $x_t = 0$, entonces no se actualiza, ni el estimador del tamaño de la demanda, ni el estimador de n , o sea que se deja $\hat{n}_t = \hat{n}_{t-1}$ y $\hat{z}_t = \hat{z}_{t-1}$. El valor de n_t sí debe actualizarse en cada período, independientemente de si ocurre o no una demanda positiva, ya que esta variable cuenta el número de períodos, desde la última demanda mayor que cero, hasta el final del período actual. Obsérvese que si no ocurre demanda alguna, este contador se incrementa en 1; por el contrario, si ocurre una demanda positiva, este contador reinicia su valor en 1 (no reinicia su valor en 0, puesto que el mínimo número de períodos entre demandas mayores que cero que puede ocurrir es 1, cuando ocurren dos demandas positivas consecutivas).

Nótese en las Ec. (3.45) y (3.46) que se necesitan valores de inicio \hat{n}_0 y \hat{z}_0 . No se ha encontrado en la literatura referencia sobre cómo estimar estos valores. Se propone, por lo tanto, hacerlo con parte de la historia de demanda del ítem, tal como se ha realizado en las secciones anteriores.

Finalmente, el pronóstico al final del período t , para el período siguiente, se calcula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\hat{x}_{t+1} = \frac{\hat{z}_t}{\hat{n}_t} \quad (3.47)$$

Ejemplo 3.6 (Método de Croston)

Considérense los datos mostrados en la tabla 3.25. Aplíquese el método de Croston, tomando como base, para iniciar el sistema de pronósticos, los primeros 20 datos de demanda.

Tabla 3.25. Datos de demanda errática (ejemplo 3.6)

Semana	Demanda	Semana	Demanda
1	50	26	53
2	0	27	0
3	0	28	0
4	65	29	0
5	5	30	65
6	22	31	0
7	0	32	0
8	0	33	0
9	0	34	0
10	62	35	36
11	0	36	0
12	0	37	15
13	10	38	0
14	55	39	43
15	2	40	0
16	0	41	7
17	0	42	0
18	0	43	24
19	0	44	0
20	34	45	56
21	0	46	0
22	17	47	0
23	0	48	22
24	0	49	0
25	70	50	47

La tabla 3.26 muestra el resultado de la aplicación del método de Croston a los datos mostrados en la tabla 3.25. Se han utilizado algunos contadores auxiliares para lograr que la hoja electrónica sea lo más automática posible y funcione para cualquier conjunto de datos de demanda errática. El único requerimiento es que el primer dato de demanda sea mayor que

cero, como es lógico, pues de lo contrario no se sabría cuándo ocurrió la anterior demanda positiva antes de la semana 1.

Tabla 3.26. Resultados de la aplicación del método de Croston (ejemplo 3.6)

Semana	Dem.	x_t	Cálculo	n_0	Cálculo	$n_{0(2)}$
1	50			1		
2	0			2		0
3	0			3		0
4	65			1		3
5	5			1		1
6	22			1		1
7	0			2		0
8	0			3		0
9	0			4		0
10	62			1		4
11	0			2		0
12	0			3		0
13	10			1		3
14	55			1		1
15	2			1		1
16	0			2		0
17	0			3		0
18	0			4		0
19	0			5		0
20	34			1		5
				\hat{n}_t	\hat{z}_t	
				Contador n _t	Pronóstico	e_t
						$ e_t $
						e_t^2
				2,3750	33,8889	
21	0			2,3750	33,8889	
22	17			2,3713	33,7200	1
23	0			2,3713	33,7200	2
24	0			2,3713	33,7200	1
25	70			2,3713	33,7200	2
26	53			2,3775	34,0828	3
27	0			2,3775	34,0828	1
28	0			2,3638	34,2720	1
29	0			2,3638	34,2720	2
30	65			2,3638	34,2720	3
31	0			2,3801	34,5793	4
32	0			2,3801	34,5793	1
33	0			2,3801	34,5793	2
34	0			2,3801	34,5793	3
35	36			2,4063	34,5935	4
36	0			2,4063	34,5935	5
37	15			2,4063	34,5935	1
38	0			2,4023	34,3975	2
39	43			2,4023	34,3975	1
40	0			2,3982	34,4835	2
41	7			2,3982	34,4835	1
42	0			2,3943	34,2087	2
43	24			2,3943	34,2087	1
44	0			2,3903	34,1066	2
45	56			2,3903	34,1066	1
46	0			2,3864	34,3256	2
47	0			2,3864	34,3256	1
48	22			2,3864	34,3256	2
49	0			2,3925	34,2023	3
50	47			2,3925	34,2023	1
				2,3886	34,3303	2
ALPHA =	0,01					Sumas =
Min Alpha	0,01					MAD o ECM =
Máx Alpha	0,30					Desv. Est. σ_1 =

Datos para iniciar el sistema de pronósticos de Croston:

Se toma el promedio de los valores de n encontrados, recordando que n nunca puede ser igual a cero. Se toma igualmente el promedio de las demandas positivas, sin considerar las demandas nulas, para el cálculo de z_0 .

La estimación de \hat{n}_0 y de \hat{z}_0 (sombreados en la tabla) se hizo con base en los primeros 20 datos de demanda. Para el cálculo automático de \hat{n}_0 se han utilizado dos contadores que llevan la cuenta del número de períodos entre

demandas positivas. Por ejemplo, como la primer demanda positiva ocurre en la semana 1 (50 unidades) y la segunda demanda positiva se observa en la semana 4 (65 unidades), han transcurrido 3 semanas entre estos sucesos. Este sería el primer valor de n a tener en cuenta para el cálculo, como muestra el contador de la segunda columna. Como la siguiente semana positiva ocurre en la semana 5 (5 unidades), se cuenta entonces 1 período entre demandas positivas, siendo el segundo valor a considerar para la estimación del promedio del intervalo entre demandas positivas. Continuando de esta forma, se obtiene la estimación de \hat{n}_0 como el promedio de los valores observados de n , así:

$$\hat{n}_0 = \frac{3 + 1 + 1 + 4 + 3 + 1 + 1 + 5}{8} = 2,375$$

Por otra parte, el tamaño promedio de las demandas *positivas* se estima con base en los valores observados en las primeras 20 semanas, así:

$$\hat{z}_0 = \frac{50 + 65 + 5 + 22 + 62 + 10 + 55 + 2 + 34}{9} = 33,8889$$

De aquí en adelante se aplican las Ec. (3.45) y (3.46) cuando ocurren demandas positivas o no se hace actualización alguna cuando las demandas son iguales a cero. Por ejemplo, en la semana 21 no ocurrió demanda alguna; por lo tanto, no se modifican los valores de \hat{n}_{21} y de \hat{z}_{21} . Por el contrario, como en la semana 22 ocurre una demanda de 17 unidades, entonces aquí sí se actualizan estos valores, de la siguiente forma:

$$\hat{n}_{22} = 0,01n_{22} + (1 - 0,01)\hat{n}_{21} = 0,01(2) + (0,99)(2,375) = 2,3713$$

$$\hat{z}_{22} = 0,01x_{22} + (1 - 0,01)\hat{z}_{21} = 0,01(17) + (0,99)(33,8889) = 33,7200$$

La figura 3.17 muestra la demanda y el pronóstico contra el tiempo. Aparentemente, el pronóstico no luce muy aproximado a la demanda, pero debe recordarse que este pronóstico es el estadístico y no el pronóstico de demanda propiamente dicho, al cual deberá sumársele el inventario de seguridad.

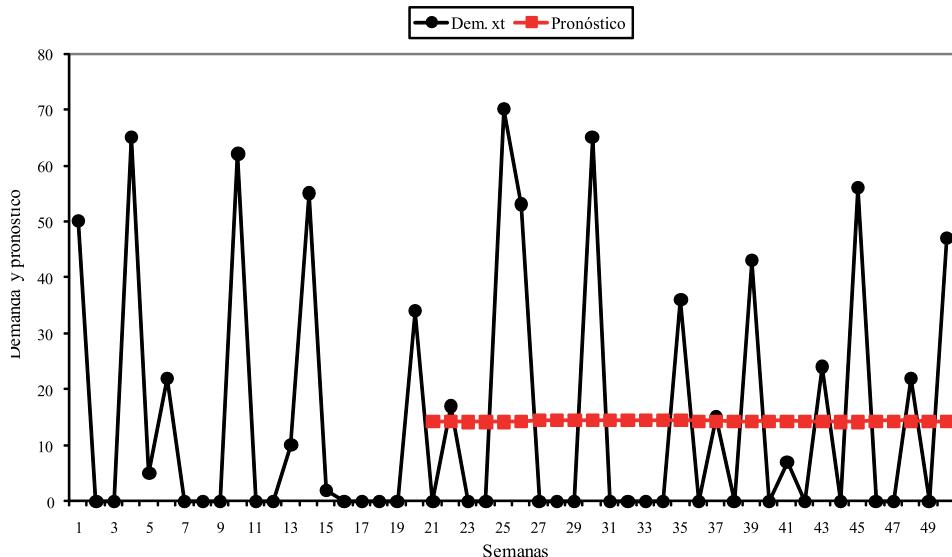


Figura 3.17. Demanda y pronóstico método de Croston (ejemplo 3.6)

A este mismo conjunto de datos se le aplicaron los sistemas de pronósticos de promedio móvil, suavización exponencial simple y suavización exponencial doble (no se muestran explícitamente; ver problema No. 7 de los ejercicios 3.5). Para ser consistentes, en todos los casos se utilizaron los primeros 20 datos para iniciar el sistema y los 30 datos restantes para simular. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 3.27. Nótese que, con base en el indicador del *ECM*, el método de Croston supera en precisión a los demás métodos. El *ECM* es el indicador más adecuado aquí porque, para la demanda errática, los errores de pronósticos se alejan del modelo probabilístico normal.

Tabla 3.27. Comparación entre el método de Croston y otros métodos (ejemplo 3.6)

Método de Pronóstico	Parámetro Óptimo	MAD	ECM
Promedio móvil	$N_{\text{óptimo}} = 16$	19,00	529,65
Suavización exponencial simple	$\alpha_{\text{óptimo}} = 0,01$	18,89	509,92
Suavización exponencial doble	$\alpha_{\text{óptimo}} = 0,0588$	18,43	506,89
Método de Croston	$\alpha_{\text{óptimo}} = 0,01$	18,55	506,45

Algunas publicaciones anteriores, y otras más recientes, sostienen que el método de Croston ha sido mejorado y han propuesto nuevas metodologías, pero aún sigue siendo un tema de gran interés investigativo. Pueden consultarse Johnston y Boylan (1996), Syntetos y Boylan (2001, 2005), Smart (2002), Levén y Segerstedt (2004), Willemain *et al.* (2004) y Teun-

ter y Sani (2009), entre otras posibles. Otros trabajos introducen nuevos métodos para el pronóstico de la demanda intermitente, como Lindsey y Pavur (2009), quienes presentan un método para obtener intervalos de confianza de ítems de muy baja demanda intermitente, basándose en técnicas de confiabilidad de *software*.

Pronósticos de demanda de ítems nuevos

El control de inventarios y los sistemas de pronósticos de demanda de ítems nuevos es un tema de gran interés. El principal problema radica en que no se dispone de información histórica y, en la mayoría de los casos, las proyecciones se hacen con base en estudios de mercado, con métodos causales y/o con base en el análisis del comportamiento de la demanda de ítem semejantes que ya se encuentren en su etapa de madurez.

En algunas ocasiones, las proyecciones de demanda son exageradas y la empresa puede incurrir en pérdidas por excesos de inventarios y por obsolescencia del ítem, especialmente en aquellos ítems de alta tecnología. En otros casos, las proyecciones se pueden quedar cortas y ocasionar demandas perdidas e insatisfacción de los clientes. Por ejemplo, dice el autor del libro: “fui testigo de la gran demanda que tuvo en Estados Unidos un conocido juguete al que se le hacía publicidad por televisión. Cuando fui a comprarlo para mi hijo mayor, el ítem estaba agotado y su tiempo de entrega era de alrededor de tres meses”. En efecto, se entraba en una línea de espera hasta que nueva producción llegara. Esto, de todas formas, oca-
sionó grandes pérdidas de ventas del nuevo producto.

Aunque en el capítulo 7 se tratan los casos especiales de control de inventarios de ítems perecederos y de moda, aquí se quiere mostrar un método que ha producido un buen resultado en una aplicación real de control de inventarios de medicamentos. Cuando un laboratorio produce una sustancia nueva, su demanda es muy incierta y depende de muchos factores. Como al comienzo no hay historia disponible, entonces en cada punto de venta se debe tener disponible la cantidad suficiente de producto para que éste se pueda desarrollar y se minimicen los faltantes. Esta primera cantidad, la cual, en muchos contextos, se denomina la “siembra” del producto, es definida por personas expertas en demandas de medicamentos, con base en información del mercado y de los sistemas de salud, entre otros.

El problema, sin embargo, radica en el sistema de control del inventario una vez el ítem ha sido sembrado en cada punto de venta. Una forma de abordar este problema es construir gradualmente la historia y utilizar el método denominado *promedio móvil progresivo*. Si se asume que el período básico del pronóstico es una semana, el promedio móvil progresivo inicia con $N = 1$, o sea que el primer promedio es equivalente a la demanda experimentada en la primera semana de venta del nuevo producto. Una vez

transcurre la segunda semana, entonces se toma $N = 2$, y así sucesivamente hasta la sexta semana, cuando $N = 6$. En este punto se fija el $N = 6$, ya que el sistema debe tener un buen grado de respuesta para permitir el libre desarrollo del ítem. Una vez el ítem cumple cierto número de semanas de historia, entonces se le puede trasladar de sistema de pronósticos, por ejemplo, a suavización exponencial, ya que se dispone de historia suficiente. Como al comienzo el número de períodos es muy pequeño, entonces no se dispone de información suficiente para estimar la *MAD* o el *ECM* y la desviación estándar asociada. Un buen método es asumir demandas de Poisson y, por lo tanto, mientras dura la fase de crecimiento del ítem, fijar la desviación estándar igual a la raíz cuadrada del pronóstico estadístico del ítem. Esto ha funcionado adecuadamente para la mayoría de los ítems en el caso mencionado (se recomienda revisar también el capítulo 7). El valor máximo de N que se utilice debe ser investigado por el analista.

De una u otra forma, el tema de pronósticos de demanda de ítems nuevos es un tópico de gran interés investigativo. Puede consultarse el trabajo de Rodríguez y Vidal (2009) para una revisión de literatura relacionada con este tema y una descripción de un nuevo método y su aplicación en el control de inventarios de productos de corto ciclo de vida. Un artículo reciente de Wanke (2008) reporta resultados sobre el uso de la distribución uniforme para la administración de inventarios de ítems nuevos. Puede consultarse también a Ozer (2005) para un análisis sobre los factores que influencian la toma de decisiones para la evaluación de productos nuevos.

En cierta forma, las promociones también se pueden considerar como ítems nuevos, ya que un tipo de promoción puede agrupar dos o más ítems maduros en uno con un nuevo código dentro de la base de datos de la empresa. El problema No. 5 de los ejercicios 3.6 propone una situación para el pronóstico de las promociones. Reciente investigación también trata el tema [O'Donnell *et al.* (2009)], haciendo énfasis en algoritmos genéticos para minimizar los efectos de las promociones en la cadena de abastecimiento.

Combinaciones de pronósticos

Cuando se trata de aplicar sistemas de pronósticos en la práctica, siempre se busca obtener el mejor sistema de pronósticos para el caso dado. En algunos casos, es conveniente probar diversos sistemas para los múltiples ítems; el problema con este método es que, ciertos ítems o grupos de ítems, pueden dar diferentes sistemas de pronósticos óptimos, lo cual puede ser muy difícil de implementar debido a que la administración de los sistemas de pronósticos se complica. Por ejemplo, si para un ítem clase A, el mejor pronóstico resulta ser el de suavización simple, pero, para otro, tal vez de su misma familia, resulta ser suavización doble, entonces puede ser muy

difícil hacer esta diferenciación debido, principalmente, a la implementación dentro del sistema de información de la empresa.

Por supuesto que existen desarrollos de *software* de pronósticos que muy probablemente pueden manejar esta diversidad. De acuerdo con Shapiro (2001, p. 261), existen varias clases de *software* de pronósticos:

- *Software* automático, el cual define el mejor método de pronósticos para cada ítem y calcula sus correspondientes parámetros óptimos. Obviamente, el usuario puede adoptar o no el método sugerido.
- *Software* semi-automático, en el cual el usuario selecciona el método de pronósticos de las sugerencias del *software*.
- *Software* manual, en el cual el usuario debe considerar cada método de pronósticos y darle al sistema los parámetros del mismo.

A pesar de estos avances, como se mencionó al comienzo de este capítulo, en la práctica, de acuerdo con Sanders y Manrodt (2003), a pesar de que existen múltiples desarrollos de *software* de pronósticos, sólo el 10,8% de las empresas que ellos encuestaron reportaron estar usando algún programa para pronosticar; el 48% reportó la utilización de hojas electrónicas para pronosticar demanda y el 60% manifestó estar insatisfecho con el comportamiento del *software* de pronósticos. A pesar de estas estadísticas, aquellos que utilizan *software* de pronósticos obtienen los mejores resultados en cuanto al error del pronóstico medido con la *MAPE*.

Se observa que, en grandes empresas, no se utiliza el *software* de pronósticos que viene con el *ERP* que usa la empresa e, incluso, acuden a analistas que planean la demanda en forma manual o con el apoyo de hojas electrónicas sencillas. Igualmente, se ha probado algo muy sencillo y que produce buenos resultados. Se trata de la *combinación de pronósticos*. Como lo mencionan Silver *et al.* (1998, p. 132), combinaciones de pronósticos obtenidos con métodos sencillos producen mejores resultados que los métodos más elaborados; en general, afirman que: “métodos sofisticados no produjeron resultados más precisos que los que produjeron los métodos más simples”. Closs (2004, p. 6) dice que cuando se seleccionan las técnicas de pronósticos, los analistas no deberían asumir inmediatamente que las técnicas más sofisticadas producen los mejores resultados. Una combinación de pronósticos tan sencilla como el promedio de los mismos, en general, produce mejores resultados que cada uno de los métodos en forma individual. Para ir más allá, se pueden probar combinaciones lineales convexas de los pronósticos, optimizando los factores de combinación. Este tópico se ha dejado como ejercicio en el problema No. 5 de los ejercicios 3.5. Puede consultarse también a Chan *et al.* (1999), quienes toman varios pronósticos y calculan los pesos para combinarlos utilizando programación cuadrática.

Ejercicios 3.5

- Los datos de demanda para cuatro años, para cierto tipo de producto de tendencia estacional, se muestran en la tabla 3.28. Construya una hoja electrónica en la cual, utilizando los datos correspondientes a los dos primeros años, inicie un modelo de Winters multiplicativo, para luego simular los dos años restantes. Calcule para estos dos últimos años la *MAD* y el *ECM* y determine las mejores constantes de suavización, α , β y γ . Construya las correspondientes gráficas.

Tabla 3.28. Datos para el problema No. 1 (ejercicios 3.5)

Mes	Demanda	Mes	Demanda
1	150	25	244
2	145	26	236
3	201	27	290
4	235	28	358
5	190	29	310
6	407	30	689
7	475	31	774
8	633	32	959
9	789	33	1.155
10	576	34	939
11	345	35	628
12	230	36	312
13	198	37	258
14	191	38	249
15	265	39	257
16	290	40	378
17	251	41	327
18	537	42	727
19	627	43	817
20	777	44	986
21	1.041	45	1.295
22	760	46	991
23	509	47	663
24	304	48	477

- Para el problema anterior estime los factores estacionales dividiendo cada observación entre su correspondiente promedio estacional y

luego promedie los factores correspondientes a períodos semejantes. Por ejemplo, para estimar $\hat{c}_1(0)$, promedie los factores obtenidos mediante el proceso anterior para los períodos 1 y 13. Realice el resto del ejercicio en forma semejante al anterior y compare los resultados para los mismos valores de constantes de suavización. Utilice, por ejemplo, $\alpha = 0,20$, $\beta = 0,10$ y $\gamma = 0,10$. ¿Considera usted que es bueno estimar los factores estacionales de esta forma?

3. Una empresa productora de tapas herméticas para productos de consumo masivo utiliza un método de moldeo por inyección. El moldeo funciona mejor a una temperatura ambiente de 20° C. La planta está equipada con un horno de gas para clima frío y acondicionadores de aire para clima caliente. Por esta razón, el consumo de energía eléctrica es estacional con picos en los meses de verano y bajas en los meses de invierno. La tabla 3.29 muestra las observaciones de consumo de energía en Kwh.

Tabla 3.29. Consumo de energía en KWh para el problema No. 3 (ejercicios 3.5)

Año	Trimestre	Demanda	Año	Trimestre	Demanda
1	1	2.319	3	1	2.360
	2	4.422		2	3.076
	3	6.498		3	5.793
	4	4.902		4	5.350
2	1	2.300	4	1	2.310
	2	2.696		2	3.600
	3	5.882		3	6.650
	4	4.378		4	5.245

- a) Tomando como base para la determinación de parámetros de cada modelo los primeros tres años, aplique suavización exponencial simple, suavización exponencial doble y el método multiplicativo de Winters para simular el pronóstico para los cuatro trimestres del año 4. Basándose en el *ECM* y en gráficas adecuadas, compare los resultados de los tres modelos. En cada caso optimice las constantes de suavización correspondientes. Concluya.
- b) Utilizando el método multiplicativo de Winters, pronostique el consumo de energía para cada trimestre del año 5 [Ampliado de Sipper y Bulfin (1998), p. 143].
4. *Combinación de patrones de demanda.* Una empresa productora de cuadernos ha recolectado dos años de datos de demanda semanal como muestra la tabla 3.30. Esta demanda es una combinación de

demandas perpetuas con demanda estacional cuando se presentan los ingresos a los colegios y a las universidades. Proponga al menos dos métodos para realizar el pronóstico de este patrón de demanda. Implemente uno de ellos.

5. *Combinación de pronósticos.* Considere el ítem de los ejemplos 3.2 y 3.3, al cual se le aplicó promedio móvil (con $N_{óptimo} = 12$) y suavización exponencial simple (con $\alpha_{óptimo} = 0,1063$), respectivamente. En ambos casos se tomaron los datos de demanda de las semanas 40-51 para iniciar, se pronosticó a partir de la semana 52 y se determinaron los parámetros óptimos con base en el *ECM*. Se pide lo siguiente:

- Implemente un sistema de pronósticos de suavización exponencial doble para este ítem, utilizando los mismos datos mencionados anteriormente para iniciar, para efectos de consistencia. Simule el pronóstico a partir de la semana 52 y determine la constante de suavización óptima con base en el *ECM*.
- Implemente luego un sistema de combinación de pronósticos calculado a partir de los tres sistemas anteriores, o sea, el promedio móvil, la suavización simple y la doble. Utilice un promedio simple para calcular el nuevo pronóstico. Halle el *ECM* y compare los resultados con cada uno de los sistemas de pronósticos individuales.
- Diseñe una hoja electrónica que le permita calcular una combinación lineal convexa de los tres sistemas de pronósticos, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\text{Pron. Combinado} &= a_1 \times \text{Pron. Prom. Móvil} \\ &+ a_2 \times \text{Pron. Suav. Simple} \\ &+ a_3 \times \text{Pron. Suav. Doble}\end{aligned}$$

donde: $0 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 1$; $a_1 + a_2 + a_3 = 1$.

- Pruebe una nueva combinación donde los factores a_i estén entre -1 y 1.

**Tabla 3.30. Demanda semanal de cuadernos para el problema No. 4
(ejercicios 3.5)**

Semana	Demanda	Semana	Demanda
1	65	53	85
2	70	54	43
3	50	55	47
4	66	56	48
5	40	57	73
6	50	58	23
7	63	59	116
8	49	60	67
9	49	61	39
10	77	62	81
11	95	63	67
12	94	64	58
13	50	65	51
14	73	66	52
15	92	67	51
16	45	68	65
17	10	69	56
18	39	70	46
19	27	71	75
20	80	72	47
21	72	73	69
22	55	74	59
23	62	75	54
24	70	76	85
25	89	77	92
26	105	78	100
27	122	79	132
28	148	80	138
29	165	81	170
30	182	82	175
31	180	83	164
32	167	84	162
33	155	85	152
34	123	86	123
35	114	87	114
36	98	88	98
37	90	89	80
38	73	90	77
39	35	91	60
40	80	92	42
41	79	93	70
42	88	94	81
43	58	95	65
44	71	96	66
45	85	97	40
46	79	98	62
47	63	99	76
48	57	100	55
49	50	101	60
50	71	102	90
51	112	103	88
52	53	104	56

6. La demanda mensual de un repuesto relativamente costoso se muestra en la tabla 3.31. Implemente el sistema de pronósticos de suavización exponencial doble y el método de Croston estudiados en este capítulo, tomando los primeros 20 datos de demanda para iniciar los dos sistemas de pronósticos. Simule el pronóstico de los 30 datos restantes, calcule el α óptimo con base en el ECM y grafique la demanda y el pronóstico. Compare los resultados y concluya.

**Tabla 3.31. Demanda mensual de un repuesto para el problema No. 6
(ejercicios 3.5)**

Mes	Demanda	Mes	Demanda
1	30	26	53
2	0	27	0
3	0	28	34
4	75	29	0
5	0	30	65
6	22	31	0
7	0	32	0
8	0	33	0
9	0	34	0
10	57	35	36
11	23	36	11
12	0	37	0
13	0	38	0
14	55	39	70
15	0	40	0
16	0	41	0
17	0	42	0
18	0	43	24
19	28	44	0
20	5	45	33
21	0	46	0
22	17	47	0
23	0	48	44
24	0	49	0
25	0	50	12

7. Muestre que los resultados de la tabla 3.27 son correctos, aplicando los tres sistemas de pronósticos (los que no se mostraron explícitamente en el texto) a los mismos datos de demanda errática del ejemplo 3.6.

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE INVENTARIOS DE SEGURIDAD

En esta sección se presenta una introducción al cálculo de inventarios de seguridad, tema que será tratado más a fondo en el capítulo 5. Se ha decidido introducirlo aquí como una motivación hacia la utilidad que tienen los sistemas de pronósticos estudiados anteriormente.

Antes de continuar, es importante describir los dos tipos más comunes de sistemas de control de inventarios de ítems individuales, los cuales se estudiarán con mayor detalle también en el capítulo 5. En el *sistema de control continuo* (s, Q) se revisa el nivel de inventario efectivo continuamente y cuando éste llega a su *punto de pedido o punto de reorden*, s , entonces se ordena una cantidad constante Q . En el *sistema de control periódico* (R, S) se revisa el nivel de inventario cada R períodos de tiempo y se ordena una cantidad igual a la diferencia entre un inventario máximo, S , y el inventario efectivo en el momento de la revisión (el concepto de inventario efectivo se define en el capítulo 5). El sistema periódico facilita la coordinación del control de varios ítems, aunque genera inventarios de seguridad ligeramente superiores al sistema continuo, ya que el primero debe responder a las fluctuaciones de demanda durante el tiempo de reposición de los proveedores o del sistema de producción, L , más el tiempo entre revisiones, R , mientras que para el sistema continuo los inventarios de seguridad deben responder sólo sobre el tiempo de reposición L .

¿Cómo fijar entonces inventarios de seguridad? Una forma adecuada es definirlos utilizando factores comunes *considerando la variabilidad de la demanda (o de los errores del pronóstico)* de acuerdo con el sistema de control escogido, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Inventario de seguridad } IS &= k\sigma_L && [\text{Sistema continuo } (s, Q)] \\ \text{Inventario de seguridad } IS &= k\sigma_{R+L} && [\text{Sistema periódico } (R, S)] \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde:

- k = Factor de seguridad dependiente del nivel de servicio deseado.
 σ_L = Desviación estándar de los errores de pronóstico de la demanda total sobre un período de duración L (sobre el tiempo de reposición).
 σ_{R+L} = Desviación estándar de los errores de pronóstico de la demanda total sobre un período de duración $R+L$ (sobre el tiempo de reposición, más el intervalo de revisión).

La importancia de la estimación de la desviación estándar de los errores del pronóstico, σ_p , radica en el hecho de que la desviación estándar de los

errores del pronóstico sobre el tiempo de reposición, σ_L , o sobre el tiempo de reposición, más el tiempo de revisión, σ_{R+L} , es decir, sobre aquellos tiempos en los cuales existe el riesgo de tener agotados, se puede estimar mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\sigma_L &= \sigma_1 \sqrt{L}, \text{ para un sistema de control continuo } (s, Q) \\ \sigma_{R+L} &= \sigma_1 \sqrt{R + L}, \text{ para un sistema de control periódico } (R, S)\end{aligned}\quad (3.49)$$

De acuerdo con Silver *et al.* (1998, pp. 114-116), la relación exacta entre σ_L y σ_1 , y entre σ_{R+L} y σ_1 , no es fácil de determinar, pero las Ec. (3.49) se aceptan ampliamente, ya que han dado buenos resultados en la práctica.

En uno de los proyectos en los que participó el autor del libro, tuvo la oportunidad de medir empíricamente la relación entre σ_1 y σ_L para una muestra aleatoria de 164 ítems clase A, a través de una regresión lineal de mínimos cuadrados. Para estos ítems encontró que $\sigma_L = \sigma_1 L^{0.405}$, lo cual es un resultado muy aproximado al mostrado en la primera de las Ec. (3.49). El experimento se realizó para σ_1 diaria y σ_L semanal, es decir, para un tiempo de reposición $L = 1$ semana = 7 días.

Es importante notar que en las Ec. (3.49) las unidades de tiempo en las que se debe expresar L (o $R + L$) deben coincidir con el período de tiempo del pronóstico utilizado para calcular a σ_1 . En otras palabras, L (o $R + L$), dentro del radical, representa *las veces que el tiempo de reposición L (o R + L) cabe en el período básico del pronóstico*, y por ello, lo que hay en el interior del radical es adimensional, explicándose así la consistencia de las ecuaciones. Estas expresiones son válidas para valores de L (o $R + L$) no enteros y también para valores de L (o $R + L$) menores que 1, como, por ejemplo, para pasar de una desviación estándar, con base semanal, a una con base diaria.

Aquí debe hacerse la salvedad de que no es lo mismo la desviación estándar de los errores del pronóstico de demanda, que la desviación estándar de la demanda propiamente dicha. De acuerdo con Montgomery *et al.* (1990, p. 172), la varianza del error del pronóstico σ_1^2 es la suma de las varianzas de la demanda σ_ϵ^2 y la varianza del pronóstico. Esto se ve claramente de la definición del error del pronóstico y del hecho de que la demanda y su pronóstico son variables aleatorias independientes, al igual que las diversas demandas periódicas entre sí. Así, si se tiene un estimado de la varianza de los errores del pronóstico σ_1^2 , y se dispone de una relación matemática entre σ_1^2 y σ_ϵ^2 , de acuerdo con el sistema de pronósticos que se esté utilizando, se puede estimar una de las dos varianzas a partir de

la otra. Para la suavización exponencial simple, por ejemplo, se encontró anteriormente que:

$$Var(S_T) = \frac{\alpha}{2-\alpha} \sigma_{\varepsilon}^2$$

De acuerdo con la relación existente entre las varianzas, puede escribirse (las expresiones son válidas también para los parámetros estimados):

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= \sigma_{\varepsilon}^2 + Var(S_T) = \sigma_{\varepsilon}^2 + \frac{\alpha}{2-\alpha} \sigma_{\varepsilon}^2 \\ \Rightarrow \sigma_1^2 &= \frac{2}{2-\alpha} \sigma_{\varepsilon}^2 \text{ o, equivalentemente,} \\ \sigma_{\varepsilon}^2 &= \frac{2-\alpha}{2} \sigma_1^2\end{aligned}$$

Nótese que si α es pequeño, las dos varianzas y, por ende, las dos desviaciones estándar, son prácticamente iguales. Incluso si α toma el valor límite de 0,3, la relación muestra que ambas desviaciones estándar son cercanas:

$$\begin{aligned}\sigma_{\varepsilon} &= \sqrt{\frac{2-\alpha}{2}} \sigma_1 \\ \sigma_{\varepsilon} &= \sqrt{\frac{2-0.3}{2}} \sigma_1 \\ \sigma_{\varepsilon} &= 0,922 \sigma_1\end{aligned}$$

Para estimar el inventario de seguridad, con base en la desviación estándar de los errores del pronóstico, se pueden aplicar las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}Inventario\ de\ seguridad\ IS &= k\sigma_L = k\sigma_1\sqrt{L} \\ &\quad [\text{Sistema continuo } (s, Q)] \\ Inventario\ de\ seguridad\ IS &= k\sigma_{R+L} = k\sigma_1\sqrt{R+L} \\ &\quad [\text{Sistema periódico } (R, S)]\end{aligned}\tag{3.50}$$

Ahora, el criterio más simple para determinar el valor de k es el de fijar el nivel de servicio de acuerdo con la *probabilidad de “no” tener un agotado en cada ciclo de reposición*. Bajo el supuesto de normalidad, para un

nivel de servicio del 95,0%, k debe fijarse en 1,65 (este valor se obtiene de las tablas de la distribución normal unitaria mostradas en el apéndice A, para un valor de $p_z(k) = 1 - 0,95 = 0,05$. Este tema se tratará en detalle en el capítulo 5). Para un nivel de servicio del 97,5%, k se fija en 1,96, y para un nivel de servicio del 99,0%, $k = 2,33$. Otros criterios para definir el valor adecuado de k serán estudiados ampliamente en el capítulo 5.

Los valores de k dados anteriormente surgen de la teoría estadística de los intervalos de confianza. Aquí se define en realidad un intervalo de confianza superior o de un solo lado, ya que interesa más el hecho de que no haya faltantes, o sea, estimar la demanda máxima, que lo que estamos en estimar una demanda mínima. En este caso, si el promedio de demanda es d , podría decirse que la demanda máxima durante el tiempo de reposición no será superior a $(d \times L) + k\sigma_1\sqrt{L}$ o a $[d \times (R + L)] + k\hat{\sigma}_1\sqrt{R + L}$ durante el tiempo de reposición, más el intervalo de revisión, según sea el sistema de control que se esté utilizando, con un nivel de confianza indicado por el valor de k , de acuerdo con lo expresado al comienzo de este párrafo.

En algunas ocasiones, se puede requerir un intervalo de confianza de dos lados para la demanda, es decir, un límite inferior y uno superior. Por ejemplo, alguna vez un planeador de demanda, perteneciente a una empresa industrial, preguntaba que si podía hallar una forma de estimar la demanda en forma puntual, o sea, de comprometerse con un valor específico de demanda de un producto para el próximo mes. Esto es imposible, pues, para una variable aleatoria continua, la probabilidad de que dicha variable tome un valor específico es igual a cero. Lo que sí puede hacer es comprometerse a través de un intervalo de confianza, con una demanda mínima y una máxima, con un cierto nivel de confianza o de confidencia. En realidad, muchas veces no se reconoce la importancia de la función de los planeadores de demanda y de quienes tienen que ver con pronósticos y sistemas de control de inventarios. En ocasiones hay que defender el tema fuertemente, ya que muchos gerentes piensan que “eso de pronosticar y controlar los inventarios es muy fácil y que por qué se complican tanto”.

Un intervalo de confianza *de dos lados* para la demanda, durante el tiempo de reposición, vendría dado por $(d \times L) \pm k\sigma_1\sqrt{L}$, o por $[d \times (R + L)] \pm k\hat{\sigma}_1\sqrt{R + L}$ durante el tiempo de reposición, más el intervalo de revisión. Aquí, sin embargo, el valor de k cambia respecto del intervalo de confianza de un solo lado. Para un nivel de confianza del 90%, $k = 1,65$; para un nivel de confianza del 95%, $k = 1,96$; para un nivel de confianza del 97,5%, $k = 2,24$; para un nivel de confianza del 99,0%, $k = 2,58$, y así sucesivamente. Esto se explica porque, al haber dos lados en el intervalo de confianza, entonces el nivel de confidencia se divide entre dos. Así, por ejemplo, para un nivel total de confianza del 95%, se tiene que el 5% de riesgo se divide entre los dos extremos, quedando un 2,5%

de riesgo en cada uno, con lo que el valor de k corresponde a un $p_{\tilde{z}}(k) = 0,025$, o sea, $k = 1,96$ (de las tablas del apéndice A). Un texto que trata los temas de intervalos de confianza en forma excelente es el de Navidi (2006, pp. 300-367).

Ejemplo 3.7 (Cálculo de inventarios de seguridad)

Considérese el ejemplo 3.4 anterior, donde se aplicó un sistema de pronósticos de suavización exponencial doble. Supóngase ahora que se va a utilizar un sistema de control periódico (R, S), que el tiempo de reposición L es despreciable y que se está utilizando un intervalo de revisión $R = 1$ semana. En la tabla 3.16 anterior se mostraron los resultados finales de la aplicación del sistema de pronósticos después de optimizar la constante de suavización α . Los indicadores clave obtenidos fueron los siguientes:

$$\alpha_{óptimo} = 0,0385$$

$$MAD = 11,06 \text{ unidades}$$

$$ECM = 179,33 \text{ unidades}^2$$

$$\sigma_1 = 13,86 \text{ (estimada a partir de la } MAD, \text{ o sea, calculada como } \sigma_1 = 1,2533 \times MAD = 1,2533 \times 11,06 = 13,86)$$

$$\sigma_1 = 13,39 \text{ (estimada a partir del } ECM, \text{ o sea, calculada como } \sigma_1 = \sqrt{ECM} = \sqrt{179,33} = 13,39)$$

Así, aplicando la segunda de las Ec. (3.50) se puede determinar el inventario de seguridad y sumárselo al pronóstico para determinar el inventario máximo S a mantener en cada semana. Se ha seleccionado un factor de seguridad $k = 1,96$, correspondiente a un nivel de servicio del 97,5%, y se ha utilizado la desviación estándar estimada mediante la raíz cuadrada del ECM sobre las 38 semanas de simulación del inventario. En otras palabras, el inventario de seguridad vendría dado por:

$$IS = k\sigma_{R+L} = k\sigma_1\sqrt{R+L} \text{ [Sistema periódico } (R,S)]$$

$$IS = (1,96)(13,39)\sqrt{1} = 26,24 \text{ unidades}$$

La tabla 3.32 y la figura 3.18 ilustran los resultados obtenidos. Por interés de este tema y para mayor claridad, sólo se presentan los resultados para las 38 semanas simuladas y para la semana que se estaría pronosticando en tiempo real.

**Tabla 3.32. Cálculo de inventarios de seguridad y de inventarios máximos
(ejemplo 3.7)**

Semana	Per.	T	Demanda	Pronóstico	e_T	$ e_T $	e_T^2	Inv. Máximo	Inv. Máx. - Demanda
52	1	44	50,19	-6,19	6,19	38,32	76,44		32,44
53	2	47	50,30	-3,30	3,30	10,92	76,55		29,55
54	3	47	50,63	-3,63	3,63	13,19	76,88		29,88
55	4	36	50,93	-14,93	14,93	222,86	77,18		41,18
56	5	79	50,35	28,65	28,65	820,85	76,60		-2,40
57	6	62	53,11	8,89	8,89	79,08	79,35		17,35
58	7	31	54,38	-23,38	23,38	546,84	80,63		49,63
59	8	75	53,19	21,81	21,81	475,80	79,43		4,43
60	9	38	55,44	-17,44	17,44	304,12	81,69		43,69
61	10	40	54,70	-14,70	14,70	216,02	80,94		40,94
62	11	60	54,14	5,86	5,86	34,32	80,39		20,39
63	12	44	55,15	-11,15	11,15	124,28	81,40		37,40
64	13	37	54,85	-17,85	17,85	318,72	81,10		44,10
65	14	34	54,02	-20,02	20,02	400,96	80,27		46,27
66	15	59	53,00	6,00	6,00	35,99	79,25		20,25
67	16	47	53,95	-6,95	6,95	48,36	80,20		33,20
68	17	53	53,92	-0,92	0,92	0,84	80,17		27,17
69	18	48	54,34	-6,34	6,34	40,16	80,58		32,58
70	19	44	54,34	-10,34	10,34	106,85	80,58		36,58
71	20	39	54,02	-15,02	15,02	225,56	80,27		41,27
72	21	52	53,32	-1,32	1,32	1,75	79,57		27,57
73	22	70	53,66	16,34	16,34	266,88	79,91		9,91
74	23	58	55,36	2,64	2,64	6,96	81,61		23,61
75	24	66	56,03	9,97	9,97	99,43	82,28		16,28
76	25	54	57,26	-3,26	3,26	10,66	83,51		29,51
77	26	47	57,50	-10,50	10,50	110,15	83,74		36,74
78	27	71	57,16	13,84	13,84	191,45	83,41		12,41
79	28	59	58,69	0,31	0,31	0,10	84,94		25,94
80	29	73	59,20	13,80	13,80	190,51	85,44		12,44
81	30	46	60,74	-14,74	14,74	217,39	86,99		40,99
82	31	44	60,11	-16,11	16,11	259,56	86,36		42,36
83	32	62	59,35	2,65	2,65	7,02	85,60		23,60
84	33	69	60,01	8,99	8,99	80,78	86,26		17,26
85	34	30	61,17	-31,17	31,17	971,32	87,41		57,41
86	35	73	59,24	13,76	13,76	189,38	85,49		12,49
87	36	72	60,73	11,27	11,27	127,07	86,97		14,97
88	37	59	62,05	-3,05	3,05	9,27	88,29		29,29
89	38	59	62,28	-3,28	3,28	10,73	88,52		29,52
90	39	?	62,48	← Pronóstico en tiempo real			88,73	← Inventario máximo en tiempo real	
			Sumas	-90,81	420,37	6.814,45			
			MAD y ECM →		11,06	179,33			
			ALPHA_2 =	0,0385					
			Desv. estándar estimada	$\sigma_1 \rightarrow$	13,86	13,39			
			Valor de k =	1,96					

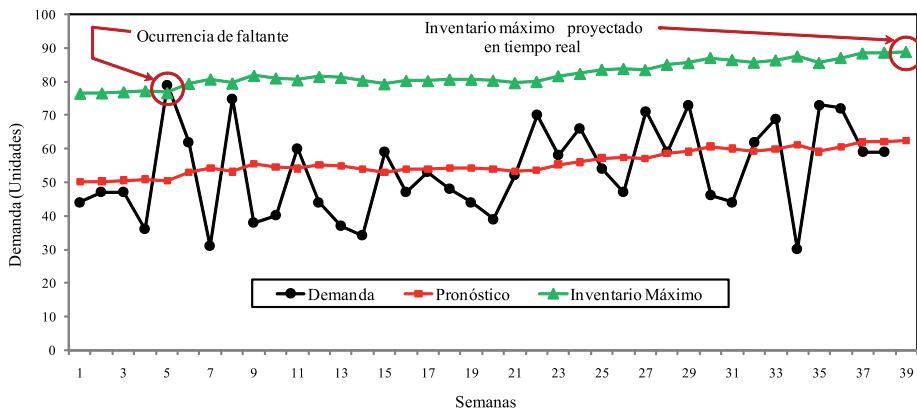


Figura 3.18. Ilustración del cálculo de inventarios de seguridad e inventarios máximos (ejemplo 3.7)

Obsérvese que la curva del inventario máximo es “paralela” a la curva del pronóstico, ya que se encuentra desplazada 26,24 unidades (inventario de seguridad) hacia arriba. Por ejemplo, el inventario máximo para la semana 52 (período 1 simulado) se calcula de la siguiente forma:

$$\text{Inventario máximo} = \text{Pronóstico} + IS = 50,19 + 26,24 = 76,43 \text{ unidades}$$

Si la demanda es superior al inventario máximo en un período dado (o, equivalentemente, si el Inv. Máximo – Demanda < 0), entonces se genera un faltante. En este ejemplo sólo se hubiera generado un faltante de 2 ó 3 unidades en la semana 56 simulada (equivalente al período 5 simulado). El nivel de servicio simulado sería igual a $1 - (1/38) = 97,4\%$, ya que de las 38 semanas sólo en una ocurre faltante. Esto coincide plenamente con el teórico del 97,5% al utilizar $k = 1,96$.

La figura 3.18 se ha elaborado bajo el supuesto que $R + L = 1$ semana. En caso de que esto no sea así, sería necesario estandarizar los períodos de la figura a intervalos iguales a $R + L$ para observar el comportamiento real del sistema de control.

Nótese la importancia que tiene la definición del inventario de seguridad, ya que transforma el pronóstico estadístico en un verdadero pronóstico de demanda, utilizando el inventario máximo en este caso. Estos métodos se constituyen en herramientas muy poderosas, pues, aunque es imposible pronosticar el verdadero valor de la demanda, si se calculan correctamente los inventarios de seguridad y se utilizan los inventarios máximos como las cantidades a mantener cada semana, entonces se lograría

cubrir la mayoría de los picos de demanda y producir el nivel de servicio deseado. Finalmente, obsérvese que la proyección del inventario máximo en tiempo real (período 39 simulado), de aproximadamente 89 unidades, es un verdadero valor de control; si se mantiene este nivel de inventario, entonces la probabilidad de que *no* ocurra faltante durante dicha semana sería aproximadamente del 97,5%.

Si el interés fuera calcular un intervalo de confianza de dos lados para la demanda de la próxima semana en tiempo real, asumiendo que se mantiene el mismo nivel de confianza del 97,5%, entonces el valor de k cambia a aquél para $p_z(k) = 0,025/2 = 0,0125$. De las tablas del Apéndice A se obtiene $k = 2,24$. Así, el intervalo de confianza del 97,5% vendría dado por:

$$[d \times (R + L)] \pm k\hat{\sigma}_1\sqrt{R + L} = (62,48 \times 1) \pm 2,24 \times 13,39 \times \sqrt{1} = 62,48 \pm 30,00$$

Es decir, se podría afirmar que la demanda en unidades de la próxima semana caería en el intervalo [32,48; 92,48] con un nivel de confianza del 97,5%.

Lo realizado en el ejemplo anterior se puede replicar para cualquiera de los métodos de pronóstico estudiados hasta ahora; cuando se dispone del pronóstico estadístico y se estima la desviación estándar de los errores del pronóstico $\hat{\sigma}_1$, se puede calcular el inventario de seguridad requerido para cierto nivel de servicio especificado y definir el punto de reorden o el inventario máximo, según sea el caso.

Aquí el pronóstico es dinámico, en cuanto a que cambia de una semana a otra; sin embargo, el inventario de seguridad es estático, pues permanece constante a lo largo del período de simulación. Esto obliga a que deban revisarse periódicamente todos los parámetros del modelo. Una forma dinámica que puede ser más adecuada para definir inventarios de seguridad se estudiará en la sección siguiente, a través de los errores suavizados y las señales de rastreo.

ERRORES SUAVIZADOS Y SEÑALES DE RASTREO

Errores suavizados

En la práctica puede ser más adecuado definir inventarios de seguridad de forma dinámica, o sea, estimando la desviación estándar de los errores del pronóstico, período a período. En la sección anterior, esta variabilidad se ha estimado con base en la simulación del pronóstico de cierto número de períodos. Sin embargo, es muy útil hacerlo en forma progresiva y continua, a medida que se vaya pronosticando, ya que se tiene la estimación más reciente de la variabilidad y se necesita guardar menos datos en memoria. De hecho, Axsäter (2000, p. 82) sostiene que “En general, es más

práctico actualizar los puntos de reorden y los tamaños de lote al mismo tiempo, inmediatamente después de actualizar los pronósticos”. Una manera de lograr esto es a través de la suavización de los errores del pronóstico, descrita a continuación.

La idea de suavización de los errores de pronóstico es simplemente aplicar el operador de suavización con una constante de suavización diferente. Para el caso del error de pronóstico del período T , denominado $Q(T)$, esta suavización se logra mediante la expresión:

$$\text{Error suavizado } Q(T) = we(T) + (1 - w)Q(T - 1) \quad (3.51)$$

donde w es una constante de suavización diferente a la que se esté utilizando para los pronósticos, la cual, aunque teóricamente cumple con la condición $0 < w < 1$ [Montgomery *et al.* (1990), p. 207], en la práctica se emplea normalmente el rango $0,01 < w < 0,10$ [Silver *et al.* (1998), p. 112], con el valor más comúnmente utilizado de $0,10$ [Axsäter (2000), p. 18], aunque otros autores sugieren un valor único de $0,15$. Dado que el valor esperado de los errores del pronóstico es cero, entonces siempre se define como valor inicial $Q(0) = 0$.

Análogamente, la MAD puede también ser suavizada mediante la ecuación:

$$MAD \text{ suavizada } MAD(T) = w|e(T)| + (1 - w)MAD(T - 1) \quad (3.52)$$

Aquí la MAD inicial, $MAD(0)$ debe estimarse, bien sea a partir de datos históricos o con algunas ecuaciones derivadas en la literatura. Por ejemplo, Montgomery *et al.* (1990, p. 212 y p. 219) presentan las siguientes expresiones para estimar la MAD inicial para un pronóstico de suavización exponencial doble:

$$MAD(0) \cong 0,8\hat{\sigma}_\varepsilon\sqrt{c_1} \quad (3.53)$$

donde:

$$c_\tau = 1 + \frac{\alpha}{(1 + \beta)^3} [(1 + 4\beta + 5\beta^2) + 2\alpha\tau(1 + 3\beta) + 2\alpha^2\tau^2]; \quad \beta = 1 - \alpha \quad (3.54)$$

En esta ecuación, τ representa el número de períodos para los cuales se hace la estimación (normalmente $\tau = 1$ para lo desarrollado hasta esta parte de este capítulo). Además:

$$\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^m (x_t - \hat{x}_t)^2}{m-2}} \quad (3.55)$$

es simplemente la estimación de la desviación estándar de los errores del pronóstico, calculada con base en los residuos de la regresión lineal de los m datos que se toman para inicializar el pronóstico. Obsérvese la semejanza entre la Ec. (3.53) y la Ec. (3.15).

Finalmente, el error cuadrático medio también puede ser suavizado, mediante la siguiente expresión:

$$ECM \text{ suavizado } ECMS(T) = w e^2(T) + (1-w) ECMS(T-1) \quad (3.56)$$

El error cuadrático medio inicial, $ECMS(0)$, puede ser estimado a partir de:

$$ECMS(0) = \frac{\sum_{t=1}^m (x_t - \hat{x}_t)^2}{m-2} \quad (3.57)$$

donde x_t, \hat{x}_t son respectivamente la demanda y su estimación en los primeros m períodos de la historia, utilizados para la inicialización del pronóstico, es decir, con aquellos períodos con los que se realizó la regresión lineal para arrancar la suavización exponencial doble. Con los valores suavizados del $ECMS(T)$ se puede estimar la desviación estándar en cada período, como $\sqrt{ECMS(T)}$, obteniéndose así valores de inventarios de seguridad dinámicos.

Señales de rastreo

Con base en los errores suavizados definidos anteriormente se pueden definir diversas señales de rastreo. El objetivo fundamental de una señal de rastreo es informar acerca de posibles desviaciones, sesgos y problemas del sistema de pronósticos que se está utilizando. La señal de rastreo más comúnmente utilizada, y de más fácil comprensión, se define como:

$$\text{Señal de rastreo en el período } T = \frac{Q(T)}{MAD(T)} \quad (3.58)$$

Nótese, a partir de las Ec. (3.51) y (3.52), que la anterior señal de rastreo no puede ser mayor que 1 en valor absoluto. Un valor absoluto de

esta señal cercano a 1 indica problemas con el pronóstico. En general, se recomienda que cuando *dos o más señales de rastreo_sucesivas* presentan valores mayores que un valor usualmente definido en el rango (0,40 – 0,60), debe revisarse el sistema de pronósticos, ya que puede estar fuera de control.

Una sola señal de rastreo superior al valor permisible puede no indicar un problema en el sistema de pronósticos, sino un dato atípico de demanda que no representa un verdadero cambio en la tendencia de la misma. Por ello se recomienda esperar hasta que ocurran dos señales de rastreo sucesivas fuera del rango permitido. Este rango puede variar de acuerdo con la aplicación específica y puede ser muy estricto en el caso de algunos sistemas de producción (máximo 0,2), o más flexible en el caso de algunos sistemas de pronósticos de ítems comerciales (máximo 0,6).

Dentro de las acciones correctivas más comunes está el recálculo de las constantes de suavización para permitir una reacción más rápida a los cambios de demanda. También, se puede utilizar un sistema de pronósticos auto-adaptivo, que lo que hace es definir la constante de suavización a igual a la señal de rastreo en cada período (problema No. 6 de los ejercicios 3.6). Se ha probado estos métodos en sistemas reales, y no se encontró evidencia de que un método auto-adaptivo sea mejor que la simple reoptimización de la constante o constantes de suavización, coincidiendo con lo expresado por Silver *et al.* (1998, p. 121), quienes, incluso, expresan que un método auto-adaptivo puede conllevar más problemas que ventajas. Sin embargo, se requieren experimentos más exhaustivos para llegar a conclusiones definitivas para cada caso específico.

Un caso más crítico puede ser la necesidad de cambiar de método de pronóstico porque las condiciones iniciales pueden haber cambiado. Por ejemplo, si se tenía un sistema de suavización simple, es posible que se necesite pasar a suavización doble por presentarse una tendencia significativa de la demanda. En cualquier caso, las señales de rastreo servirán como alerta del sistema de pronósticos utilizado.

Algunos autores presentan otras señales de rastreo basadas en los errores acumulados y en el *ECM*. Ver, por ejemplo, Montgomery *et al.* (1990, pp. 214-215) y Silver *et al.* (1998, pp. 116-117). La dificultad con estas señales de rastreo es que normalmente pueden tomar cualquier valor positivo, lo que hace que su calibración e interpretación sean más difíciles. Para efectos prácticos, es suficiente con la señal de rastreo basada en el error y la *MAD* suavizados, descrita anteriormente.

Identificación de datos atípicos de demanda (*outliers*)

Un tema final que debe llamar la atención es el hecho de la identificación de datos atípicos (*outliers*), tanto para la fase de inicio del pronóstico,

como para su fase normal de aplicación. En el primer caso, un dato atípico puede causar un comportamiento no deseado en las primeras etapas del pronóstico. Una forma de controlar esto es identificar los datos atípicos y reemplazarlos por promedios adecuados o, incluso, eliminarlos.

En la fase de inicialización del pronóstico se pueden identificar datos atípicos por medio de la estimación del promedio y la desviación estándar de la demanda en forma directa con base en los datos de demanda disponibles. Se puede, por ejemplo, declarar la presencia de un dato atípico cuando está fuera del rango del promedio $\pm 2,5$ veces la desviación estándar. Si esto ocurre, entonces se procede a eliminar el dato y tomar el promedio del resto de datos para su reemplazo.

Cuando se presentan datos atípicos dentro del proceso normal del pronóstico, entonces se pueden utilizar valores más adecuados de control. Montgomery *et al.* (1990, p. 222), sugieren calcular la expresión:

$$\left| \frac{e(T)}{MAD(T)} \right| \quad (3.59)$$

y declarar la presencia de un dato atípico cuando ésta supere el valor de 5 ó 6, aproximadamente. Sin embargo, no es conveniente eliminar el dato atípico automáticamente, pues puede representar un cambio real en el nivel de la demanda. Es preferible analizar más a fondo la situación específica para determinar la existencia de uno u otro.

Ejemplo 3.8. (Errores suavizados, señales de rastreo y datos atípicos)

Reconsidere el ejemplo 3.4 sobre suavización exponencial doble. Se pretende implementar un sistema de errores suavizados para el cálculo dinámico del inventario de seguridad y de los inventarios máximos ilustrados en el ejemplo 3.7, al igual que mostrar las señales de rastreo para la etapa de simulación del pronóstico de acuerdo con la Ec. (3.58) y los valores que identifican datos atípicos de demanda con base en la Ec. (3.59).

Para iniciar los errores suavizados se requiere calcular los residuos de la regresión lineal que se utiliza para iniciar el sistema de pronósticos. Se toman los primeros 51 datos de demanda para realizar esta regresión. Como se menciona en el ejemplo 3.4, se obtiene un corte con el eje y $\hat{a}_1(0) = 19,4565$ y una pendiente $\hat{b}_2(0) = 0,5910$. Con esta recta de regresión se calcula la demanda estimada. Por ejemplo, la demanda estimada por regresión para la semana 1 ($T = 1$), se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Demanda estimada por regresión lineal } (T = 1) &= \hat{a}_1(0) + T\hat{b}_2(0) \\ &= 19,4565 + (1)(0,5910) = 20,05 \text{ unidades} \end{aligned}$$

De manera semejante se calcula el resto de las demandas estimadas por regresión, simplemente variando el valor de T . Para el cálculo del residuo se toma la diferencia entre la demanda real observada y la pronosticada por la regresión. Para $T = 1$, por ejemplo, este residuo sería igual a $23,00 - 20,05 = 2,95$ unidades. La tabla 3.33 muestra el cálculo completo de los residuos. Con base en estos residuos se puede entonces calcular los valores de $MAD(0)$ y $ECMS(0)$ (recuérdese que $Q(0) = 0$), aplicando las Ec. (3.53)-(3.57), en la siguiente forma:

$$MAD(0) = 0,8 \times \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{51} (x_t - \hat{x}_t)^2}{51-2}} \times \sqrt{1 + \frac{\alpha}{(1+\beta)^3} [(1+4\beta+5\beta^2) + 2\alpha(1+3\beta) + 2\alpha^2]}$$

$$MAD(0) = 9,59 \text{ unidades}$$

$$ECMS(0) = \frac{\sum_{t=1}^{51} (x_t - \hat{x}_t)^2}{51-2} = 136,92 \text{ unidades}^2$$

donde se ha reemplazado el valor de $\alpha = 0,0385$ y $\beta = 1 - \alpha = 0,9615$. El cálculo de las sumatorias se facilita mediante la función interna *SUMA.CUADRADOS* de Excel™.

Calculando los valores iniciales, se puede suavizar el error a partir del primer período en el que se simula el pronóstico. Esto se hace mediante las Ec. (3.51), (3.52) y (3.56). Por ejemplo, los errores suavizados para la semana 52, o sea, para el primer período ($T = 1$) al que se le calcula el pronóstico, se determinan de la siguiente forma (tomando $w = 0,10$):

$$\text{Error suavizado: } Q(1) = we(1) + (1-w)Q(0) = (0,10)(-6,19) + (0,90)(0) = -0,62$$

$$\text{MAD suavizada: } MAD(1) = w|e(1)| + (1-w)MAD(0) = (0,10)(6,19) + (0,90)(9,59) = 9,25$$

$$\begin{aligned} \text{ECM suavizado: } ECMS(1) &= we^2(1) + (1-w)ECMS(0) \\ &= (0,10)(-6,19)^2 + (0,90)(136,92) = 127,06 \end{aligned}$$

Tabla 3.33. Cálculo de los residuos de regresión lineal para iniciar los valores de los errores suavizados (ejemplo 3.8)

Semana	Demanda x_t	Dem. (Regresión) \hat{x}_t	Residuos
1	23	20,05	2,95
2	28	20,64	7,36
3	16	21,23	-5,23
4	22	21,82	0,18
5	30	22,41	7,59
6	31	23,00	8,00
7	25	23,59	1,41
8	9	24,18	-15,18
9	20	24,78	-4,78
10	22	25,37	-3,37
11	35	25,96	9,04
12	32	26,55	5,45
13	23	27,14	-4,14
14	13	27,73	-14,73
15	15	28,32	-13,32
16	29	28,91	0,09
17	24	29,50	-5,50
18	38	30,10	7,90
19	15	30,69	-15,69
20	15	31,28	-16,28
21	24	31,87	-7,87
22	44	32,46	11,54
23	22	33,05	-11,05
24	40	33,64	6,36
25	60	34,23	25,77
26	18	34,82	-16,82
27	39	35,41	3,59
28	53	36,01	16,99
29	56	36,60	19,40
30	19	37,19	-18,19
31	51	37,78	13,22
32	41	38,37	2,63
33	30	38,96	-8,96
34	52	39,55	12,45
35	44	40,14	3,86
36	51	40,73	10,27
37	59	41,32	17,68
38	45	41,92	3,08
39	53	42,51	10,49
40	37	43,10	-6,10
41	56	43,69	12,31
42	29	44,28	-15,28
43	54	44,87	9,13
44	38	45,46	-7,46
45	29	46,05	-17,05
46	51	46,64	4,36
47	33	47,24	-14,24
48	27	47,83	-20,83
49	65	48,42	16,58
50	43	49,01	-6,01
51	48	49,60	-1,60

La tabla 3.34 ilustra estos resultados para todos los períodos simulados. A partir del $ECMS(T)$, para cada período T , se puede estimar la desviación estándar de los errores del pronóstico de una manera dinámica. Debe tenerse cuidado, sin embargo, de utilizar el valor correcto de acuerdo con la simulación. Si se va a estimar la desviación estándar y, por ende, el inventario máximo S para el período T , entonces debe tomarse el $ECMS(T - 1)$. La razón de esto es que como se está realmente pronosticando el inventario a mantener en el período siguiente para producir el nivel de servicio deseado, no se conoce aún la demanda del período siguiente ni el error de su pronóstico. Por ello, la estimación de S se realiza con base en el error suavizado del período anterior. Por ejemplo, el inventario máximo para la semana 52, o $T = 1$, asumiendo un nivel de servicio del 97,5%, $k = 1,96$, y que para este ejemplo $R + L = 1$ semana, al igual que en el ejemplo 3.7, se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Inventario máximo } (T = 1) &= \text{Pronóstico}(T = 1) + SS(T = 1) = \text{Pronóstico}(T = 1) + k\sigma_1\sqrt{R + L} \\ &= \text{Pronóstico}(T = 1) + k\sqrt{ECMS(0)}\sqrt{R + L} = 50,19 + 1,96\sqrt{136,92}\sqrt{1} = 73,13 \text{ unidades} \end{aligned}$$

Igualmente, a partir del error y la MAD suavizados, se determina la señal de rastreo para cada semana, de acuerdo con la Ec. (3.58). Los resultados obtenidos revelan que el sistema de pronósticos utilizado siempre hubiera estado bajo control, ya que ninguna señal de rastreo supera en valor absoluto a 0,60. Finalmente, se muestra también, en la tabla 3.34, el cálculo para el control de datos atípicos de demanda con base en la Ec. (3.59), el cual sugiere que ningún dato se puede declarar como atípico, pues todos los valores son menores que 5.

La figura 3.19 muestra la demanda y el pronóstico, y compara los dos cálculos del inventario máximo, uno con base en el valor constante de la desviación estándar (ejemplo 3.7) y el otro en forma dinámica con base en el $ECMS(T)$. De este ejemplo no es clara la conclusión sobre la utilidad de determinar los inventarios máximos en forma dinámica, pero en la práctica es más sencillo hacerlo así por ahorro de cálculos. Además, intuitivamente se sabe que es mejor mantener actualizada la estimación de la variabilidad de los errores del pronóstico.

Tabla 3.34. Errores suavizados, inventario máximo dinámico, señales de rastreo y control de datos atípicos (ejemplo 3.8)

Semana	Per.	T	Demandada	Pron.	Error e _T	Inv. Máx. basado en ECM(ST)	Error Suav. Q(T)	MAD MAD(T)	Suav. ECM _{ST}	Señal rastreo Q(T)/MAD(T)	Outliers e _T /MAD(T)
51	0						0,00	9,59	136,92		
52	1		44	50,19	-6,19	73,13	-0,62	9,25	127,06	0,07	0,67
53	2		47	50,30	-3,30	72,40	-0,89	8,66	115,45	0,10	0,38
54	3		47	50,63	-3,63	71,69	-1,16	8,15	105,22	0,14	0,45
55	4		36	50,93	-14,93	71,03	-2,54	8,83	116,99	0,29	1,69
56	5		79	50,35	28,65	71,55	0,58	10,81	187,37	0,05	2,65
57	6		62	53,11	8,89	79,94	1,41	10,62	176,55	0,13	0,84
58	7		31	54,38	-23,38	80,43	-1,07	11,90	213,57	0,09	1,97
59	8		75	53,19	21,81	81,83	1,22	12,89	239,80	0,09	1,69
60	9		38	55,44	-17,44	85,79	-0,65	13,34	246,23	0,05	1,31
61	10		40	54,70	-14,70	85,45	-2,05	13,48	243,21	0,15	1,09
62	11		60	54,14	5,86	84,71	-1,26	12,72	222,32	0,10	0,46
63	12		44	55,15	-11,15	84,37	-2,25	12,56	212,52	0,18	0,89
64	13		37	54,85	-17,85	83,43	-3,81	13,09	223,14	0,29	1,36
65	14		34	54,02	-20,02	83,30	-5,43	13,78	240,92	0,39	1,45
66	15		59	53,00	6,00	83,42	-4,29	13,00	220,42	0,33	0,46
67	16		47	53,95	-6,95	83,05	-4,55	12,40	203,22	0,37	0,56
68	17		53	53,92	-0,92	81,86	-4,19	11,25	182,98	0,37	0,08
69	18		48	54,34	-6,34	80,85	-4,41	10,76	168,70	0,41	0,59
70	19		44	54,34	-10,34	79,79	-5,00	10,72	162,51	0,47	0,96
71	20		39	54,02	-15,02	79,01	-6,00	11,15	168,82	0,54	1,35
72	21		52	53,32	-1,32	78,79	-5,53	10,17	152,11	0,54	0,13
73	22		70	53,66	16,34	77,84	-3,35	10,78	163,59	0,31	1,52
74	23		58	55,36	2,64	80,43	-2,75	9,97	147,93	0,28	0,26
75	24		66	56,03	9,97	79,87	-1,48	9,97	143,08	0,15	1,00
76	25		54	57,26	-3,26	80,71	-1,65	9,30	129,83	0,18	0,35
77	26		47	57,50	-10,50	79,83	-2,54	9,42	127,87	0,27	1,11
78	27		71	57,16	13,84	79,33	-0,90	9,86	134,22	0,09	1,40
79	28		59	58,69	0,31	81,40	-0,78	8,90	120,81	0,09	0,03
80	29		73	59,20	13,80	80,74	0,68	9,39	127,78	0,07	1,47
81	30		46	60,74	-14,74	82,90	-0,86	9,93	136,74	0,09	1,48
82	31		44	60,11	-16,11	83,03	-2,39	10,55	149,02	0,23	1,53
83	32		62	59,35	2,65	83,28	-1,88	9,76	134,82	0,19	0,27
84	33		69	60,01	8,99	82,77	-0,80	9,68	129,42	0,08	0,93
85	34		30	61,17	-31,17	83,46	-3,83	11,83	213,61	0,32	2,63
86	35		73	59,24	13,76	87,88	-2,07	12,02	211,19	0,17	1,14
87	36		72	60,73	11,27	89,21	-0,74	11,95	202,77	0,06	0,94
88	37		59	62,05	-3,05	89,96	-0,97	11,06	183,42	0,09	0,28
89	38		59	62,28	-3,28	88,82	-1,20	10,28	166,16	0,12	0,32
90	39	?	62,48			87,75 ← Inventario Máximo proyectado en tiempo real					
				ALPHA = 0,0385		BETA = 0,9615					
				k = 1,96		Valor de w = 0,1					

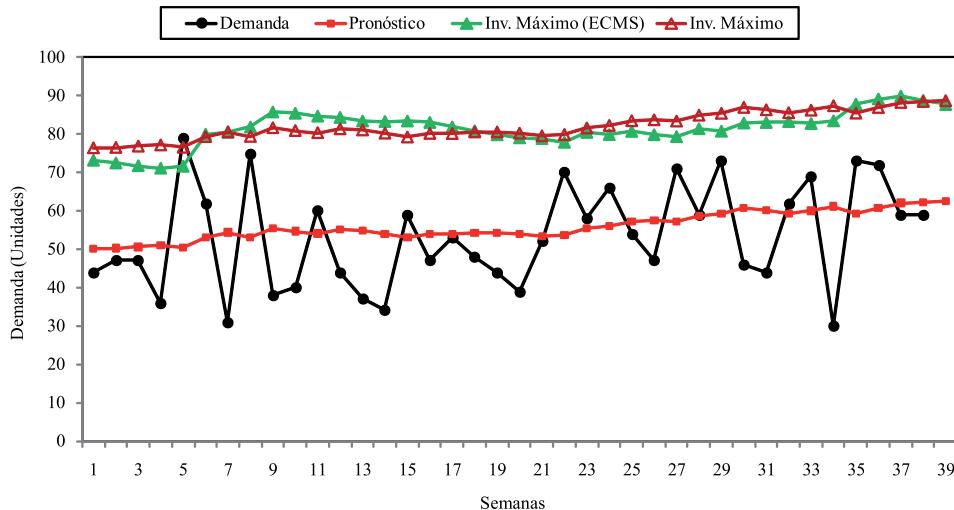


Figura 3.19. Gráfico de demanda, pronóstico, inventario máximo con variabilidad constante e inventario máximo dinámico con base en el ECMS (T) (ejemplo 3.8)

Nota importante: en el apéndice B se hace un resumen de este capítulo, el cual puede ser muy útil como referencia rápida de los temas aquí tratados.

Ejercicios 3.6

1. En los literales siguientes se pide retomar el ejemplo correspondiente, diseñar una hoja electrónica para reproducirlo y realizar una nueva figura semejante a la que se menciona, *pero incluyendo la curva del inventario máximo*. Asuma $k = 1,96$ para un 97,5% de nivel de servicio y considere un sistema periódico con $R + L = 1$ período (generalmente 1 semana). En todos los casos estime σ_1 con base en el *ECM*, utilizando los valores óptimos de N , de α , o de α, β y γ , según sea el caso.
 - a) Promedio móvil: ejemplo 3.2, figura 3.8.
 - b) Suavización exponencial simple: ejemplo 3.3, figura 3.10.
 - c) Suavización exponencial doble: ejemplo 3.4, figura 3.13.
 - d) Método multiplicativo de Winters: ejemplo 3.5, figura 3.16.
 - e) Método de Croston: ejemplo 3.6, figura 3.17.
2. Diseñe una hoja electrónica que le permita desarrollar el ejemplo 3.8 completamente. Realice los siguientes experimentos (cada uno en forma independiente) y concluya:

- a) Suponga que las demandas de las últimas semanas 80-89 aumentan al doble. Observe el comportamiento de las señales de rastreo y del pronóstico para estas semanas y proponga soluciones al problema del sesgo.
- b) Repita el literal anterior, pero asumiendo que las demandas de las semanas 80-89 disminuyen a la mitad.
- c) Suponga que la demanda en la semana 25 no fue de 60 unidades, sino de 1.000 unidades, constituyéndose claramente en un dato atípico. Observe el comportamiento del inventario de seguridad para este caso. Reoptimice la constante de suavización y observe de nuevo el comportamiento. ¿Resuelve esto el problema? ¿Cuál cree entonces que debe ser la solución para esta situación?
- d) Implemente en la hoja electrónica el control de datos atípicos planteado en la Ec. (3.59). Suponga que la demanda en la semana 80 fue de 850 unidades en lugar de 73 unidades. ¿Se identifica un dato atípico aquí? Observe el comportamiento del inventario máximo, incluso después de reoptimizar la constante de suavización. ¿Cuál cree entonces que debe ser la solución a este problema?
3. *Pronósticos acumulados.* El pronóstico acumulado para L períodos adelante viene dado por:

$$\hat{X}_L(T) = \sum_{\tau=1}^L \hat{x}_{T+\tau}(T) \quad (3.60)$$

Suponga que se está utilizando un sistema de pronósticos de suavización exponencial doble, con lo cual cada $\hat{x}_{T+\tau}(T)$ puede ser calculado con base en la Ec. (3.29). De acuerdo con Montgomery *et al.* (1990, p. 212), la desviación estándar de este pronóstico acumulado, σ_L , se puede estimar con base en la siguiente ecuación:

$$\sigma_L = 1,25MAD(T) \sqrt{\frac{p_L}{c_1}} \quad (3.61)$$

donde c_1 viene dado por la Ec. (3.54) para $\tau = 1$, y p_L viene dado por:

$$p_L = L + \frac{\alpha L^2}{2(1+\beta)^3} [5(1+2\beta+\beta^2) + 4L(1-\beta^2) + \alpha^2 L^2]; \quad (3.62)$$

$$\beta = 1 - \alpha$$

- a) Muestre que en la anterior expresión, cuando $L = 1$, o sea, cuando se está pronosticando sólo para el período siguiente, $p_L = c_1$ y, por lo tanto, σ_L se reduce a $\sigma_1 = 1,25MAD(T)$, el cual es el resultado conocido anteriormente en la Ec. (3.15).
- b) Muestre que en la anterior ecuación, cuando se está pronosticando un proceso muy estable, cuando α tiende a cero, la estimación de la desviación estándar sobre L períodos se reduce a $\sigma_L = 1,25MAD(T)\sqrt{L} = \sigma_1\sqrt{L}$, el cual es el resultado conocido anteriormente en la primera parte de la Ec. (3.49).
- c) Con base en las expresiones anteriores, considere de nuevo los datos del ítem del ejemplo 3.8. Suponga que usted ha sido llamado para pronosticar la demanda de este producto para las próximas 1, 2, 3, ..., 10, 11 y 12 semanas adelante, o sea, para las semanas 90; 90 y 91; 90, 91 y 92; 90, 91, 92 y 93; y así sucesivamente hasta completar 12 semanas acumuladas (semanas 90-101). Diseñe una hoja electrónica que le permita calcular estos pronósticos y el inventario de seguridad correspondiente. Utilice siempre la constante de suavización óptima determinada con base en el *ECM*. ¿Qué se observa en el inventario de seguridad para pronósticos de muchas semanas adelante? (Nota: Observe que para aplicar la Ec. (3.60), a través de la Ec. (3.29), usted debería basarse en los últimos valores disponibles de S_T y de $S_T^{[2]}$).
4. Hace 12 semanas se lanzó al mercado un medicamento nuevo y se registraron las 12 demandas semanales para una cadena de droguerías. Éstas fueron, en su orden: 3, 5, 14, 16, 15, 22, 30, 28, 42, 55, 50, 72. Aplique el método propuesto de *promedio móvil progresivo* propuesto en este capítulo, calculando el pronóstico progresivamente desde $N = 1$ hasta $N = 6$ y manteniendo este valor de ahí en adelante. Asuma que la demanda es de Poisson, o sea, que la desviación estándar semanal es igual a la raíz cuadrada del pronóstico semanal. Tomando $k = 2,33$ y asumiendo que se está utilizando un sistema de control periódico con $R + L = 1$ semana, grafique la demanda, el pronóstico y el inventario máximo. Determine si hubo o no faltantes, comente acerca de este método y proponga ajustes.
5. *Pronósticos de promociones*. Uno de los dolores de cabeza más frecuentes, especialmente en la planeación de demanda de productos de consumo masivo, es el pronóstico de la demanda de ítems que están en campañas o promociones. Normalmente, es muy difícil predecir la demanda que va a ocurrir a lo largo de una promoción y el efecto que ésta tendrá sobre otros ítems semejantes que no están en la promoción y sobre la cadena como un todo, ya que las promociones

frecuentemente aceleran el efecto látigo (*bullwhip*). La tabla 3.35 muestra los datos mensuales de demanda durante cuatro años de un ítem de consumo masivo. Se marcan los meses donde se realizaron campañas de promoción, donde evidentemente hubo un incremento de la demanda.

- Proponga un sistema de pronósticos para esta situación, calcule los inventarios de seguridad asumiendo un sistema de control periódico con $R + L = 1$ mes, determine los inventarios máximos y concluya.
- Si existieran dos tipos diferentes de promoción u otros eventos claramente diferenciables, como lo que ocurre con algunos ítems de consumo masivo en los cuales, después del incremento de demanda causado por una promoción, sigue un decrecimiento significativo de la demanda en el mes siguiente, ¿cómo manejaría usted esta situación? Sólo comente sus ideas principales.

Tabla 3.35. Datos mensuales de demanda de un ítem con promociones para el problema No. 5 (ejercicios 3.6)

Año	Mes	Demanda	Evento	Año	Mes	Demanda	Evento
1	Enero	63.595		3	Enero	33.216	
	Febrero	70.176			Febrero	61.056	
	Marzo	62.261			Marzo	150.817	Promoción
	Abril	71.328			Abril	73.580	
	Mayo	84.578			Mayo	52.392	
	Junio	70.954			Junio	74.448	
	Julio	73.729			Julio	106.120	
	Agosto	61.968			Agosto	78.000	
	Septiembre	73.011			Septiembre	95.745	
	Octubre	47.775			Octubre	88.636	
	Noviembre	69.596			Noviembre	86.654	
	Diciembre	132.492	Promoción		Diciembre	139.585	Promoción
2	Enero	73.632		4	Enero	85.935	
	Febrero	57.115			Febrero	43.622	
	Marzo	59.252			Marzo	151.426	Promoción
	Abril	52.752			Abril	90.000	
	Mayo	77.863			Mayo	106.800	
	Junio	81.073			Junio	43.344	
	Julio	52.471			Julio	72.288	
	Agosto	60.769			Agosto	82.548	
	Septiembre	70.324			Septiembre	112.271	
	Octubre	99.240			Octubre	119.520	
	Noviembre	63.120			Noviembre	83.156	
	Diciembre	105.840	Promoción		Diciembre	269.376	Promoción

6. *Métodos auto-adaptivos.* Considere los 50 datos de demanda diaria de un ítem de consumo masivo de gran consumo en un supermercado. La demanda del ítem sufrió un cambio de tendencia en forma relativamente rápida debido a la desaparición de otro ítem semejante que le hacía competencia (tabla 3.36).
- Tome los primeros 20 datos de demanda (días 1-20) para inicialización e implemente una hoja electrónica con suavización exponencial doble para simular el pronóstico de los días restantes (días 21-50). Optimice la constante de suavización con base en el *ECM* para estos 30 últimos días. Recuerde que las gráficas son muy importantes en estos temas.
 - Para los mismos datos y con las mismas condiciones del literal anterior, implemente un método auto-adaptivo que defina en cada período la constante de suavización α igual al valor absoluto de la señal de rastreo del período correspondiente. Repita el cálculo del *ECM* del literal anterior y compare resultados. Tome los mismos valores iniciales de S_0 y de $S_0^{[2]}$ determinados en el literal (a) anterior. Observe que pierde sentido la idea de optimización de α en este caso, pues esta queda definida por la señal de rastreo para cada período.
 - Implemente un método auto-adaptivo que defina la constante de suavización de acuerdo con la siguiente regla: si la señal de rastreo es mayor que 0,30, tome $\alpha = 0,30$. Si la señal de rastreo es menor o igual que 0,30, tome α igual a la señal de rastreo correspondiente. Recalcule el *ECM* como en los casos anteriores, compare resultados y concluya con respecto a estos tres posibles métodos. Este método se propone para evitar el nerviosismo del pronóstico, cuando se presentan señales de rastreo grandes (mayores que 0,6).
 - Finalmente, tome los tres métodos anteriores para calcular el pronóstico y calcule un *promedio simple* de los mismos como su nuevo pronóstico. De nuevo, calcule el *ECM* para los últimos 30 días y concluya respecto del mejor método de pronósticos para este caso. Proponga otras posibilidades para realizar esta combinación de pronósticos.

**Tabla 3.36. Demanda diaria de un ítem de consumo masivo para el problema No. 6
(ejercicios 3.6)**

Día	Demanda	Día	Demanda
1	280	26	630
2	45	27	540
3	305	28	410
4	140	29	330
5	200	30	625
6	130	31	600
7	160	32	480
8	75	33	350
9	240	34	650
10	48	35	390
11	98	36	520
12	280	37	600
13	50	38	635
14	135	39	575
15	230	40	620
16	200	41	475
17	78	42	605
18	155	43	550
19	110	44	620
20	155	45	600
21	48	46	390
22	230	47	450
23	250	48	420
24	170	49	595
25	560	50	640

7. *Intervalos de confianza de demanda.* Considere el ejemplo 3.7. Construya una hoja electrónica que le permita construir un intervalo de confianza de dos lados para la demanda en cada semana ($R + L = 1$ semana), especificando el nivel de servicio deseado. Recuerde que el valor de k se debe calcular teniendo en cuenta que se trata de un intervalo de confianza de dos lados. Grafique los resultados obtenidos en forma semejante a la figura 3.18.

LECTURAS ADICIONALES

BALLOU (2004): capítulo 8 (pp. 287-296) (Presenta una introducción a los pronósticos, especialmente con una tabla que resume los principales métodos, la cual complementa los temas de este capítulo).

- SILVER *et al.* (1998): capítulo 4 (pp. 74-145) (Este capítulo explica muy bien el tema de pronósticos de demanda, incluyendo una bibliografía muy completa al respecto).
- SIPPER y BULFIN (1998): capítulo 4 (pp. 96-174) (Este es un excelente capítulo sobre pronósticos, muy práctico y completo, en español).
- WILD (1997): capítulos 10 y 11 (pp. 147-176) (Estos capítulos describen de una manera muy simple y práctica algunos de los sistemas de pronósticos estudiados aquí).
- NARASIMHAN *et al.* (1996): capítulo 2 (pp. 25-65) (Este es un capítulo relativamente corto en español sobre fundamentos de pronósticos, que puede ser útil para una primera lectura preliminar en el tema). Igualmente el capítulo 3 (pp. 66-86) presenta, en forma breve, aspectos adicionales de pronósticos, incluyendo algunas consideraciones de ítems de demanda errática.
- MONTGOMERY *et al.* (1990): capítulos 1, 2, 3, 4, 6, 7 y 8 (Este es un texto clásico en pronósticos, con diversos detalles adicionales a los presentados aquí y con un tratamiento estadístico mucho más riguroso. Se recomienda como referencia de profundización en temas específicos, especialmente si desea hacerse énfasis en la componente estadística).

CAPÍTULO 4

CONTROL DE INVENTARIOS DE DEMANDA DETERMINÍSTICA

INTRODUCCIÓN

Los problemas de control de inventarios se pueden clasificar de acuerdo con las características de la demanda y de los tiempos de reposición (*Lead Times*). Tanto la demanda como los tiempos de reposición pueden ser determinísticos o aleatorios. La demanda se puede clasificar en: demanda constante y conocida, demanda determinística (variable pero conocida) y demanda probabilística o aleatoria. La *demandas constante y conocida* no tiene mucho interés práctico pues en la vida real ella casi nunca cumple con esta condición; sin embargo, iniciar con el estudio de este tipo de demanda facilita el manejo y comprensión de casos más complejos. La *demandas determinística* ocupa el segundo nivel de complejidad, pues, aunque se trata de demanda variable, ésta se puede conocer con gran precisión antes de que ocurra. Esta demanda se presenta en aquellas situaciones de contratos de venta preestablecidos, repuestos para mantenimiento preventivo, planeación determinística de requerimiento de materiales (*Material Requirements Planning MRP*), entre otros posibles casos. Para la demanda constante y la demanda determinística se asume usualmente que los tiempos de reposición son constantes y conocidos.

La *demandas probabilística o aleatoria* representa la situación más compleja pero también la más aproximada a la realidad. Aquí, la variable aleatoria “demanda” se asume que sigue cierta distribución probabilística y con base en ésta se deducen las expresiones para su control. En este caso, el tiempo de reposición se puede considerar constante y conocido, en primera instancia, y luego se puede definir como aleatorio para llegar al

caso más complejo posible, el cual es el que más se aproxima a la práctica. La figura 4.1 resume estos conceptos sobre la demanda y los tiempos de reposición.

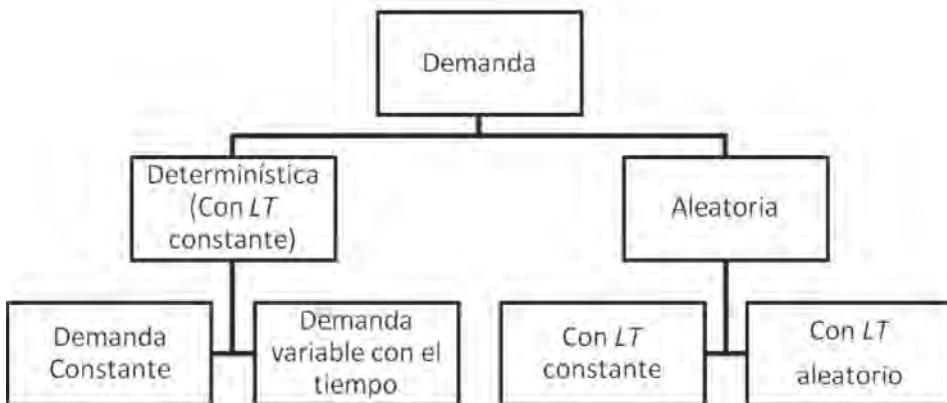


Figura 4.1 Características de la demanda y de los tiempos de reposición en un sistema de control de inventarios

Los sistemas de control presentados en este capítulo, y en el siguiente, se aplican generalmente a ítems clase B y, en algunos casos, a ítems clase A. Sin embargo, para estos últimos, las reglas de decisión pueden transformarse frecuentemente debido a la intervención humana por parte de la administración del sistema. En la primera parte de este capítulo se trata el control de inventarios con demanda aproximadamente constante y conocida, lo que genera el conocido tema del tamaño económico de pedido, *EOQ* (*Economic Order Quantity*). La segunda parte se dedica a la demanda variable con el tiempo, pero conocida con exactitud. Se analizan diversos métodos de solución del problema, incluyendo heurísticos y algoritmos de optimización.

CONTROL DE INVENTARIOS DE DEMANDA CONSTANTE

Se deriva a continuación el caso básico del tamaño económico de pedido (*Economic Order Quantity*), universalmente conocido como *EOQ*. Este modelo funciona de acuerdo con los siguientes supuestos:

- El patrón de demanda es *constante* y *conocido con certeza*.
- No se consideran descuentos en los precios de compra, producción y/o transporte.

- La cantidad de pedido no necesita ser un número entero o un múltiplo de un entero.
- Todos los parámetros de costo son estacionarios o sea que no varían significativamente con el tiempo (se consideran bajas tasas de inflación).
- El ítem se trata de forma independiente de otros.
- La tasa de reposición es infinita o, equivalentemente, los tiempos de reposición son iguales a cero (o a un valor constante conocido), y toda la orden completa es recibida cada vez que se ordene.
- No se consideran faltantes, o sea que no se generan órdenes pendientes ni ventas perdidas.

A primera vista, y de acuerdo con todas las suposiciones anteriores, este modelo aparece ser de importancia mínima para casos reales. Sin embargo, como se verá posteriormente, este caso es importante para comprender y desarrollar otros modelos de mayor complejidad. Además, la mayoría de las suposiciones se irán eliminando a medida que se estudien modelos más complejos.

Recordando las tres preguntas fundamentales de los sistemas de control de inventarios mencionadas en el capítulo 2, aquí puede decirse lo siguiente: primero, la frecuencia de revisión del inventario es continua; segundo, debe ordenarse cuando el nivel de inventario alcance el nivel cero, ya que la demanda es constante y conocida y el tiempo de reposición es cero (el punto de reorden o de pedido es $s = 0$). Si el tiempo de reposición fuera igual a una constante $L > 0$ pero conocida, entonces la respuesta a la segunda pregunta variaría de tal forma que se ordene cuando el nivel de inventario llegue al punto de pedido s , el cual debe determinarse de acuerdo con los datos disponibles (ver problema No. 7, literal d) de los ejercicios 4.1). Finalmente, queda por determinarse la cantidad a pedir Q , la cual se deriva con base en el concepto del costo total relevante descrito a continuación.

El concepto del costo total relevante (CTR)

Se utiliza el concepto del *costo total relevante (CTR)* para diseñar la estructura de la función objetivo. Este costo puede incluir los siguientes componentes:

- Costos de compra o producción.
- Costos de ordenamiento, preparación o alistamiento (*setups*).
- Costos de mantenimiento del inventario (*holding cost*).
- Costos de faltantes de inventario (*shortage cost*), convertidos en ventas perdidas u órdenes pendientes (*lost sales o backorders*).

- Costos de control del sistema.
- Otros costos posibles (administrativos o de planeación de producción).

Los dos últimos costos generalmente no son relevantes para el caso del control del inventario de ítems individuales considerados aquí. De igual manera, el costo de faltantes de inventario no será incluido en el análisis inicial, de acuerdo con las suposiciones establecidas anteriormente. El costo de compra tampoco entra en el análisis porque, como se asume que no hay descuentos, este costo es constante y por ello más adelante no se considera dentro de la función objetivo. Por lo tanto, el *CTR* está dado por los costos de ordenamiento o alistamiento y los de mantenimiento del inventario.

Gráficos y notación

La situación de inventarios típica descrita en esta sección se muestra en la figura 4.2.

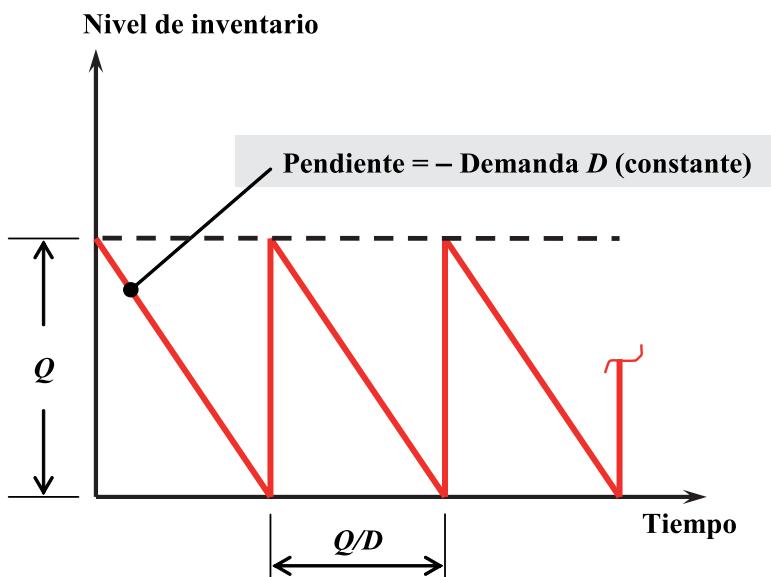


Figura 4.2. Nivel de inventario para determinar el tamaño óptimo de pedido

Considérense los siguientes parámetros, variables y funciones (definidos y explicados en el capítulo 2):

Parámetros

A = El costo fijo de alistamiento u ordenamiento [\$/orden].

D = La tasa de demanda del ítem [unidades/año].

r = El costo de mantener el inventario [%/año o \$/(\$. año)].

v = El valor unitario del ítem [\$/unidad].

Variable de decisión

Q = Tamaño del pedido o de la orden [unidades].

Función objetivo

$CTR(Q) =$ El costo total relevante en función del tamaño de pedido Q [\$/año].

Derivación del tamaño óptimo de pedido

Es importante, primero, pensar por qué se asume *a priori* que la mejor solución es ordenar siempre la misma cantidad Q en cada ciclo. Esto es así gracias al supuesto de que todos los parámetros son estacionarios y que no varían significativamente con el tiempo. Además, dado que la demanda es determinística, asumiendo que el tiempo de reposición es igual a cero y que no se incluyen órdenes pendientes en el análisis, se concluye que lo mejor es ordenar cuando el inventario disponible alcance el nivel cero. Sólo resta determinar la cantidad óptima de pedido $Q^* = EOQ$.

De la figura 4.2 es claro que el tiempo que transcurre entre órdenes es igual a Q/D . Normalmente, se utiliza como tiempo de referencia un año. Aquí se utilizará la notación D (mayúscula) para la demanda *anual* y más adelante se utilizará d (minúscula) para la demanda expresada en unidades por otra unidad de tiempo, según sea el caso. Por lo tanto, el número de pedidos que se realiza en un año es igual a D/Q y su costo anual asociado se obtiene multiplicando por el costo fijo por pedido A . Así, el costo total relevante anual, en función de Q , vendría dado por:

$$CTR = \frac{AD}{Q} + Ivr + Dv \quad (4.1)$$

En la Ec. (4.1) se ha utilizado la Ec. (2.1) del costo de mantenimiento del inventario, Ivr . Dado que el término Dv es constante pues no se consideran descuentos, no es necesario considerarlo en la función objetivo. Por lo tanto, el costo total relevante viene dado por:

$$CTR = \frac{AD}{Q} + Ivr \quad (4.2)$$

En general, el inventario promedio \bar{I} entre un tiempo $t = t_1$ y un tiempo $t = t_2$, $t_2 > t_1$, se define como:

$$\bar{I} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} I(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} dt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} I(t) dt}{t_2 - t_1} \quad (4.3)$$

donde $I(t)$ representa la función del inventario con respecto del tiempo. La Ec. (4.3) corresponde al área bajo la curva del inventario contra el tiempo, dividida entre el tiempo correspondiente. Recuérdese la Ec. (1.3) donde se establece que el inventario promedio es igual a la semisuma del inventario inicial y el inventario final (para un solo ítem es lo mismo considerar dichos inventarios en \$ o en unidades). Esta forma de cálculo sólo es válida cuando la función de inventario contra tiempo es lineal; si este no es el caso, puede haber grandes diferencias entre la Ec. (1.3) y la Ec. (4.3) (ver problema No. 1 de los ejercicios 4.1). Afortunadamente, en la práctica generalmente el cálculo del inventario promedio a través de la Ec. (1.3) no difiere mucho de su cálculo más preciso a través de la Ec. (4.3) y probablemente no valga la pena el esfuerzo computacional necesario para aplicar esta última expresión. De todas formas, debe analizarse cada caso.

Con base en el primer triángulo de la figura 4.2, se puede calcular el inventario promedio. El área del triángulo es $Q^2/2D$; el tiempo transcurrido entre $t_1 = 0$ y $t_2 = Q/D$ es igual a Q/D . Por lo tanto, se deduce fácilmente que el inventario promedio aquí es igual a $Q/2$. Como aquí la función de inventario contra tiempo es lineal, este resultado coincide con la semisuma de los inventarios inicial y final: $(Q + 0)/2 = Q/2$. Así, el costo total relevante viene dado por:

$$CTR = \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2} vr \quad (4.4)$$

El término AD/Q de la Ec. (4.4) representa el costo anual de ordenamiento o reposición, bien sea de ordenamiento o de alistamiento, mientras que el término $Qvr/2$ es el costo anual de mantenimiento del inventario. La figura 4.3 muestra el comportamiento de esta función de costo. Fácilmente se puede encontrar el tamaño económico de pedido EOQ derivando la función de costo con respecto de Q e igualando a cero, obteniéndose:

$$Q^* = EOQ = \sqrt{\frac{2AD}{vr}} \quad (4.5)$$

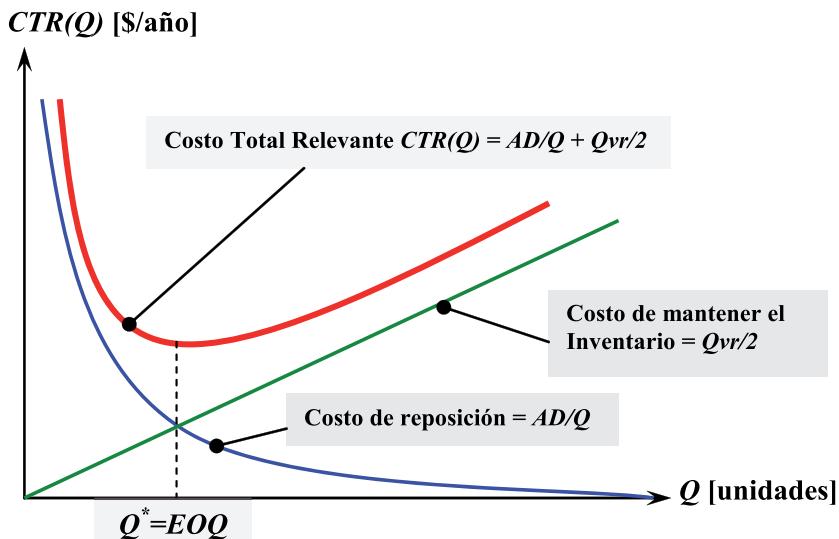


Figura 4.3. Costo total relevante en función del tamaño del pedido

Nota importante: las unidades de tiempo que contienen los parámetros r y D deben ser consistentes para la correcta aplicación de la Ec. (4.5). De acuerdo con nuestra notación, D vendría expresada en unidades/año y r en % anual; si este no es el caso, deberían modificarse las unidades de tiempo de uno de ellos para que coincidan.

Ejemplo 4.1 (Cantidad económica de pedido, EOQ)

Un ítem tiene las siguientes características:

$$\begin{aligned} d &= 1.550 \text{ unidades/mes} \\ v &= 3.500 \$/\text{unidad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 24\% \text{ anual} \\ A &= 10.000 \$/\text{orden} \end{aligned}$$

Determinar la cantidad óptima de pedido, EOQ . Expresar en palabras la política de control del inventario de este ítem.

Recuérdese que las unidades de tiempo de la demanda y del costo de llevar el inventario, deben ser consistentes. Por lo tanto, para aplicar la Ec. (4.5) se debe convertir la demanda d , expresada en unidades/mes, a la demanda D en unidades/año o, equivalentemente, el costo de mantenimiento del inventario r a un porcentaje mensual. Es preferible, sin embargo, hacer lo primero, ya que la demanda es constante y para no entrar en el problema técnico de la conversión de tasas de interés con diferentes unidades de tiempo. Reemplazando los valores anteriores en la Ec. (4.5) se obtiene:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2 \times 10.000 \$ \times (1.550 \times 12 \text{ unidades/año})}{3.500 \$/\text{unidad} \times 0,24 \$/(\$. \text{año})}}$$

$EOQ \approx 666$ unidades (redondeado al entero mayor más cercano)

Se pueden derivar otros valores importantes del resultado anterior:

Número de órdenes por año = $D/EOQ = (1.550 \times 12)/666 = 28$ órdenes/año

Tiempo entre órdenes sucesivas = $EOQ/D = 666/1.550 = 0,43$ meses

13 días

La cantidad de pedido puede también expresarse en unidades de tiempo para el cual durará el pedido. Esto viene expresado como: $T_{EOQ} = EOQ/D = 666 \text{ unidades}/1.550 \text{ unidades/mes} = 0,43 \text{ meses} = 13 \text{ días}$, el cual obviamente coincide con el tiempo entre órdenes sucesivas.

O sea que aproximadamente cada 13 días deben ordenarse 666 unidades del producto, para así obtener el costo total relevante mínimo. Este costo mínimo viene dado por:

$$CTR(EOQ) = \frac{10.000 \$ \times (1.550 \times 12) \text{ u./año}}{666 \text{ u.}} + \frac{666 \text{ u.} \times 3500 \$/\text{u.} \times 0,24 \$/\$. \text{año}}{2}$$

$$CTR(EOQ) \approx 559.000 [\$/\text{año}]$$

La figura 4.4 muestra la gráfica a escala del costo total relevante contra el tamaño de pedido para este problema. Nótese lo plana que es la curva alrededor del óptimo. Este es un hecho muy afortunado y que es válido, en general, pues significa que, para cambios significativos en el tamaño de pedido Q con respecto de su valor óptimo EOQ , el costo total relevante no cambia en la misma proporción. Por ejemplo, se puede probar que cambiando el Q en $\pm 25\%$ del valor óptimo EOQ , el $CTR(Q)$ sólo aumentaría en máximo un 5% con respecto del costo total relevante óptimo (ver problema No. 6, ejercicios 4.1).

La política de control de inventarios de este ítem sería *revisar el inventario continuamente; cuando el nivel del inventario llegue a cero, entonces ordenar una cantidad igual a 666 unidades del producto.*

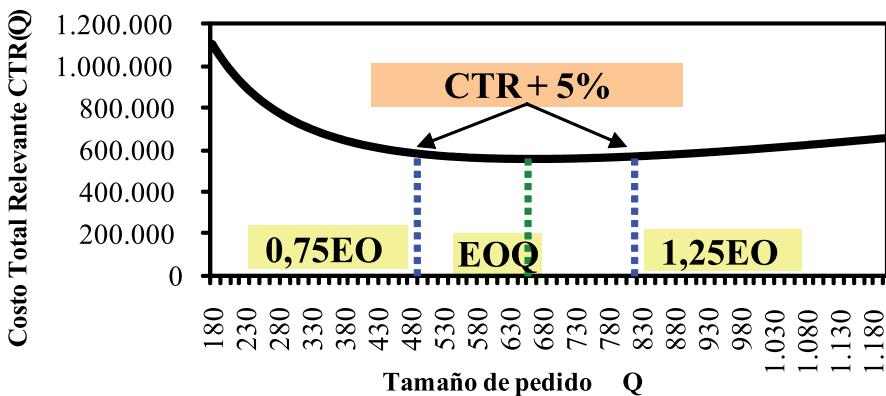


Figura 4.4. Análisis de sensibilidad del EOQ (ejemplo 4.1)

Ejercicios 4.1

1. Una práctica muy común para determinar el inventario promedio sobre un período dado es calcular la semisuma del inventario inicial y el inventario final [ver Ec. (1.3), capítulo 1].
 - a) Establezca qué supuesto básico está considerado en este cálculo y cómo podría diferir del inventario promedio real calculado a partir de la Ec. (4.3).
 - b) Comente acerca de la inconveniencia de aplicar esta práctica en la figura 4.5. Calcule el inventario promedio real en el mes de abril.

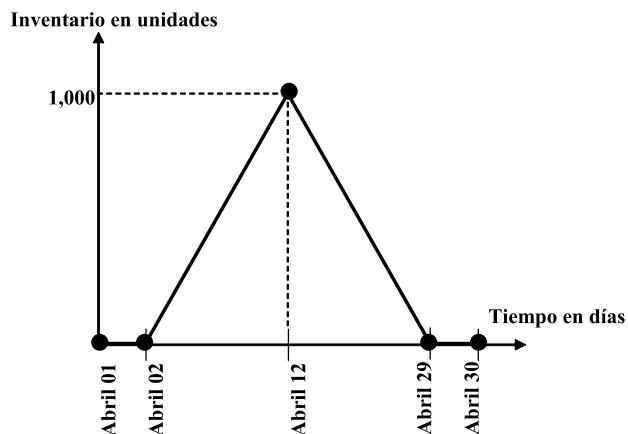


Figura 4.5. Gráfico de inventario contra tiempo problema No. 1 (ejercicios 4.1)

2. Obtenga la Ec. (4.5) derivando $CTR(Q)$ con respecto de Q , igualando a cero y despejando $Q^* = EOQ$. Aplique las condiciones de suficiencia de la segunda derivada para demostrar que se trata de un punto mínimo.
3. Muestre que para el caso del EOQ desarrollado anteriormente, en la solución óptima, los dos componentes del costo, el de ordenamiento o alistamiento y el de mantenimiento del inventario, resultan ser iguales, tal como sugiere la figura 4.3. Verifíquelo para el ejemplo 4.1, teniendo en cuenta que, como el valor del EOQ se redondeó al entero mayor, pueden existir pequeñas diferencias.
4. Muestre que el costo total relevante óptimo viene dado por:

$$CTR(EOQ) = \sqrt{2ADvr}$$

5. Derive una expresión para calcular la rotación del inventario definida en la Ec. (1.2) del capítulo 1, con base en el tamaño óptimo de pedido EOQ . Comente acerca del resultado.
6. *Análisis de sensibilidad.* Investigue la variación del costo total relevante cuando en lugar de ordenar EOQ unidades, se ordenan:

$$Q' = (1 + f) EOQ$$

donde $-1 \leq f \leq 1$ es la desviación porcentual con respecto del óptimo. El porcentaje de penalización del costo, PPC , viene dado por:

$$PPC = \frac{CTR(Q') - CTR(EOQ)}{CTR(EOQ)} \times 100$$

Muestre que:

$$PPC = 50 \left(\frac{f^2}{1+f} \right)$$

Grafique PPC vs. f y escriba sus conclusiones con respecto de los resultados. Verifique que lo escrito en la figura 4.4, con respecto a la sensibilidad del EOQ , es correcto.

7. *Extensiones del caso básico del EOQ.* En cada uno de los siguientes casos, analice las variaciones que habría que implementar al tamaño de orden óptimo, EOQ , para determinar el tamaño del lote óptimo. Encuentre el EOQ en cada caso.

- a) Suponga que el ítem bajo análisis tiene una vida útil de VU unidades de tiempo, debido, por ejemplo a que se trata de un artículo perecedero. ¿Cuál debería ser la cantidad óptima de pedido si ésta es menor (en unidades de tiempo que dura el inventario) a VU ? ¿Y si es mayor?
- b) Asuma que existe una limitación de capacidad (de producción o de almacenamiento, por ejemplo) con relación al tamaño de pedido máximo que puede producirse o comprarse, es decir, que $Q \leq Q_{\max}$. ¿Cuál sería la cantidad óptima de pedido si ésta es mayor que la capacidad disponible Q_{\max} ? Concluya también en el caso cuando existe una cantidad *mínima* de pedido o producción, impuesta por el proveedor o por alguna razón técnica de producción, y el EOQ resulta ser menor que ella. Generalice para la restricción $Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\max}$.
- c) Suponga que el tamaño de la orden debe ser múltiplo de un número entero mayor o igual que 1, hecho causado probablemente por las condiciones de empacado del producto. ¿Cuál sería el procedimiento adecuado para seleccionar la cantidad óptima de pedido?
- d) Complete la figura 4.2 considerando un tiempo de reposición constante $L > 0$, conocido con certeza. ¿Cuál sería, en este caso, la política para el control del inventario del ítem? Escoja cuidadosamente los dos casos posibles con respecto de L y comente sobre ellos.
8. El propietario de un supermercado abre durante 52 semanas/año y tiene la política de ordenar un cierto frasco de aceite de cocina de alta rotación y demanda prácticamente constante, pidiendo en cada ocasión 4 semanas de demanda (2.000 frascos). Usted está seguro de que se puede mejorar esta política, con respecto del costo de ordenamiento, más el costo de mantenimiento del inventario, aplicando un sistema de control basado en el EOQ . Se recopilan los siguientes datos acerca de este ítem:

$$\begin{array}{ll} d = 500 \text{ frascos/semana (constante)} & A = \$10.000/\text{pedido} \\ v = 4.500 \$/\text{frasco} & r = 24\% \text{ anual} \end{array}$$

- a) Como el propietario del supermercado insiste en que su política de pedido de 4 semanas de demanda es mejor, arguyendo que la estimación del valor de A puede no ser muy precisa, ¿cómo podría usted demostrarle que, independientemente del valor de A , siempre la política del EOQ será mejor? ¿Para qué valor de A las dos políticas son equivalentes?

- b) Repita el literal anterior si el argumento del propietario del supermercado es con respecto a la precisión de la estimación de r .
- c) Si el argumento del propietario del supermercado es con respecto a ambas estimaciones, de A y de r simultáneamente, construya una gráfica de parejas de valores (A, r) que hagan las dos políticas equivalentes. Discuta sobre la probabilidad de que cada pareja de valores ocurra simultáneamente en la práctica, haciendo equivalentes las dos políticas.

TAMAÑO DE LOTE ECONÓMICO CON DESCUENTOS POR CANTIDADES DE COMPRA O PRODUCCIÓN

En este caso se elimina uno de los supuestos establecidos anteriormente, en el sentido de que el valor unitario del artículo, v , ahora sí depende del tamaño del pedido Q . Se considera la situación en la cual se obtienen descuentos cuando la cantidad de pedido aumenta, o descuento sobre todas las unidades. Pueden existir descuentos sucesivos incrementales, a medida que el tamaño del pedido se hace mayor.

Considérese, por ejemplo, el caso en el cual si el tamaño del pedido es mayor que cero y menor que un valor de quiebre Q_1 , el valor de cada ítem es v_0 . Si el tamaño del pedido es de Q_1 unidades o más, el valor de cada ítem es $v_1 = v_0(1 - d)$, donde d es la tasa de descuento ($0 < d < 1$). Simbólicamente esto se expresa como:

$$v = \begin{cases} v_0 & \text{si } 0 \leq Q < Q_1 \\ v_1 = v_0(1 - d) & \text{si } Q_1 \leq Q \end{cases}$$

Aquí el producto Dv es fundamental para la ecuación del *CTR*, ya que v depende de Q . Así, el costo total relevante puede escribirse como:

$$CTR(Q) = \frac{AD}{Q} + \frac{Qvr}{2} + Dv \quad (4.6)$$

Por lo tanto, la función del costo total relevante con respecto de Q , de acuerdo con el valor del ítem v , es:

$$CTR(Q) = \frac{AD}{Q} + \frac{Qv_0r}{2} + Dv_0 \quad \text{para } 0 \leq Q < Q_1 \quad (4.7)$$

$$CTR(Q) = \frac{AD}{Q} + \frac{Qv_0(1-d)r}{2} + Dv_0(1-d) \quad \text{para } Q_1 \leq Q \quad (4.8)$$

Obsérvese que en la Ec. (4.8) se ha aplicado el descuento d , tanto al costo de mantenimiento del inventario, como al costo de compra. Algunos autores sostienen, como elemento de discusión, que en el costo de mantenimiento del inventario el valor del producto no debería afectarse con el descuento porque de todas formas el verdadero valor del producto es v_0 , sólo que se está adquiriendo a un valor menor $v_0(1 - d)$. De una u otra forma, es posible analizar cada caso, aunque aquí se tomará el descuento para ambos términos.

Comparando miembro a miembro los términos de las Ec. (4.7) y (4.8), se observa que la curva de Q correspondiente a la última ecuación siempre estará por debajo de la curva correspondiente a la primera ecuación, siempre y cuando $d > 0$. Esto es válido para sucesivos descuentos incrementales de acuerdo con la cantidad de pedido Q .

El tamaño óptimo de pedido Q^* para estos casos puede coincidir con uno de los EOQ calculados para cada valor de v en particular, de acuerdo con la Ec. (4.5), o corresponder a uno de los puntos de quiebre. Las figuras 4.6a, 4.6b y 4.6c ilustran esta situación para el caso de las Ec. (4.7) y (4.8). Nótese que la cantidad óptima de pedido Q^* puede corresponder al tamaño del lote económico $EOQ(v_0)$ para la curva sin descuento, al tamaño del lote económico $EOQ(v_1)$ para la curva con descuento, o al punto de quiebre Q_1 . Los pequeños círculos sin relleno y con relleno en las figuras muestran que la función de costo, por convención, en el punto de quiebre, es válida solamente para la curva inferior, cuando aplica el descuento d .

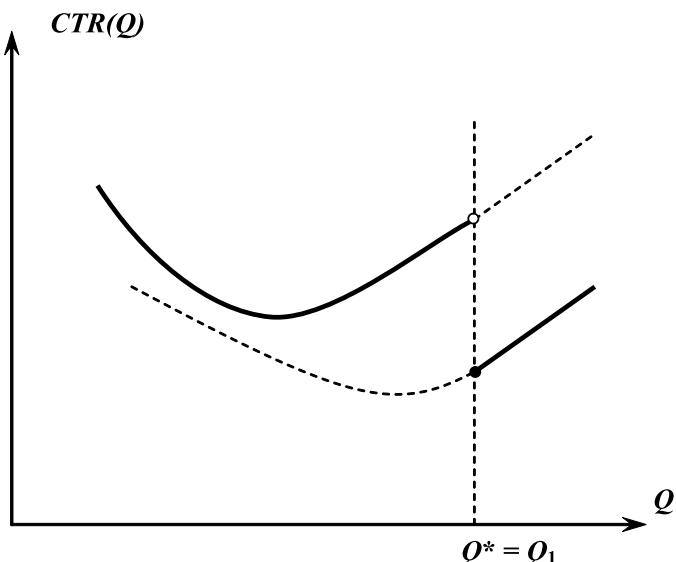


Figura 4.6a. El óptimo ocurre en el punto de quiebre Q_1

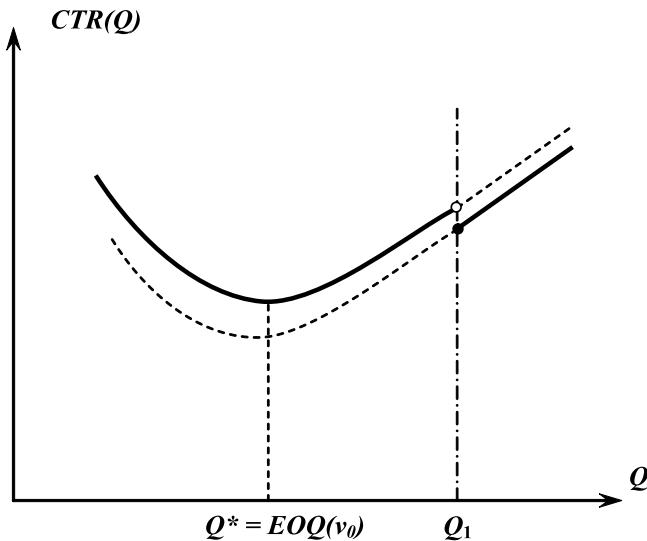


Figura 4.6b. El óptimo ocurre en el EOQ correspondiente al valor v_0

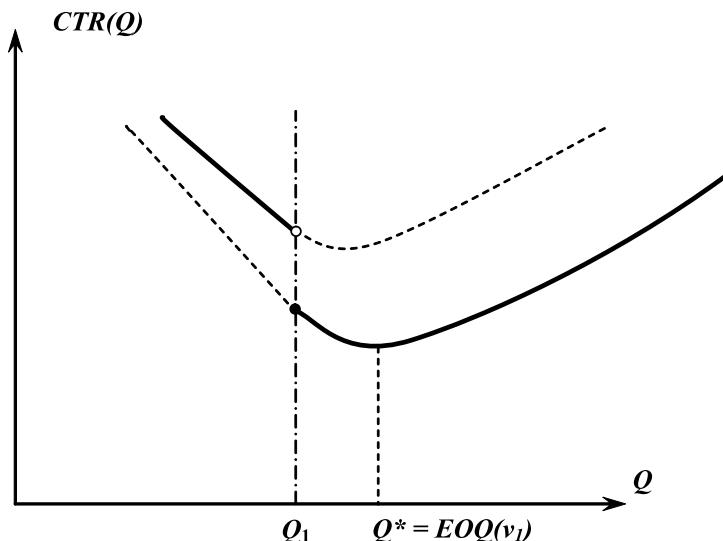


Figura 4.6c. El óptimo ocurre en el EOQ correspondiente al valor v_1

Los casos mostrados en la figura 4.6 (a, b y c) pueden ocurrir con un número mayor de puntos de quiebre de descuentos. Todo lo anterior sugiere el siguiente algoritmo para encontrar el tamaño óptimo de pedido con un número arbitrario k de puntos de quiebre de descuento por cantidades [adaptado de Narasimhan *et al.* (1996), p. 104]:

Paso 1

Calcule el tamaño óptimo de pedido $EOQ(v_0)$ para el valor v_0 (sin descuento) y $EOQ(v_i)$ para cada uno de los valores de descuento v_i ($i = 1, 2, \dots, k$):

$$EOQ(v_i) = \sqrt{\frac{2AD}{v_i r}} \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, k$$

Paso 2

Cada $EOQ(v_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) que caiga fuera del rango de validez del descuento correspondiente, *no* lo considere en el análisis. Igualmente, descarte $EOQ(v_0)$ si $EOQ(v_0) \geq Q_1$. En caso contrario, calcule el correspondiente costo total relevante $CTR[EOQ(v_0)]$ y $CTR[EOQ(v_i)]$, y conserve los valores para las comparaciones del paso 4.

Paso 3

Calcule el costo total relevante $CTR(Q_i)$ para $i = 1, 2, \dots, k$, para cada uno de los puntos de quiebre Q_i , de acuerdo con su correspondiente valor de descuento v_i :

$$CTR(Q_i) = \frac{AD}{Q_i} + \frac{Q_i v_i r}{2} + D v_i$$

Paso 4

Escoja el tamaño óptimo de pedido de acuerdo con el costo total relevante sin descuento, con el costo total relevante de los $EOQ(v_i)$ conservados en el paso 2, y con el costo total relevante de los puntos de quiebre calculados en el paso 3. Aquel tamaño de pedido que proporcione el mínimo costo total relevante es la solución óptima del problema.

Ejemplo 4.2 (EOQ con descuentos)

Considere tres ítems diferentes cuyas características se muestran en la tabla 4.1.

Tabla 4.1. Datos para los tres ítems del ejemplo 4.2

Ítem	D [unidades/año]	v_0 [\$/unidad]	A [\$/orden]	r [%/año]
1	14.500	400.000	6.000	36
2	1.500	15.000	6.000	36
3	139.800	68.000	6.000	36

Un solo proveedor proporciona estos tres ítems y ofrece un descuento del 5% sobre el valor de cada ítem para tamaños de órdenes mayores o iguales que $Q_1 = 200$ unidades para los ítems 1 y 3, y de $Q_1 = 1.000$ unidades para el ítem 2, por ser este último de bajo costo y de baja demanda en comparación con los otros dos. Determinar el tamaño óptimo de pedido para cada uno de los ítems.

a) Ítem 1:

Paso 1

$$EOQ(v_0) = \sqrt{\frac{2(6.000)(14.500)}{(400.000)(0,36)}} \cong 35 \text{ unidades}$$

$$EOQ(v_1) = \sqrt{\frac{2(6.000)(14.500)}{(400.000 \times 0,95)(0,36)}} \cong 36 \text{ unidades}$$

Paso 2

Como el tamaño de lote óptimo, con descuento, no es mayor o igual que $Q_1 = 200$ unidades, no se considera en el análisis. Se calcula solamente el costo total relevante correspondiente al tamaño óptimo sin descuento, utilizando la Ec. (4.7):

$$\begin{aligned} CTR[EOQ(v_0)] &= \frac{(6.000)(14.500)}{35} + \frac{(35)(400.000)(0,36)}{2} + (14.500)(400.000) \\ &= 5.805,01 \text{ millones } \$/\text{año} \end{aligned}$$

Paso 3

Se calcula aquí el costo total relevante para el único punto de quiebre existente, $Q_1 = 200$ unidades:

$$\begin{aligned} CTR(Q_1) &= \frac{(6.000)(14.500)}{200} + \frac{(200)(400.000 \times 0,95)(0,36)}{2} + (14.500)(400.000 \times 0,95) \\ &= 5.524,12 \text{ millones } \$/\text{año} \end{aligned}$$

Paso 4

El CTR_{\min} corresponde al punto de quiebre y, por lo tanto, el tamaño óptimo de pedido es $Q^* = Q_1 = 200$ unidades. El comportamiento de este ítem corresponde a la figura 4.6a.

b) Ítem 2:

Paso 1

$$EOQ(v_0) = \sqrt{\frac{2(6.000)(1.500)}{(15.000)(0,36)}} \cong 58 \text{ unidades}$$

$$EOQ(v_1) = \sqrt{\frac{2(6.000)(1.500)}{(15.000 \times 0,95)(0,36)}} \cong 60 \text{ unidades}$$

Paso 2

Como el tamaño de lote óptimo, con descuento, no es mayor o igual a $Q_1 = 1.000$ unidades, no se considera en el análisis. Se calcula solamente el costo total relevante correspondiente al tamaño óptimo sin descuento, utilizando la Ec. (4.7):

$$\begin{aligned} CTR[EOQ(v_0)] &= \frac{(6.000)(1.500)}{58} + \frac{(58)(15.000)(0,36)}{2} + (1.500)(15.000) \\ &= 22.811.772,41 \text{ \$/año} \end{aligned}$$

Paso 3

Se calcula aquí el costo total relevante para el único punto de quiebre existente, $Q_1 = 1.000$ unidades:

$$\begin{aligned} CTR(Q_1) &= \frac{(6.000)(1.500)}{1.000} + \frac{(1.000)(15.000 \times 0,95)(0,36)}{2} + (1.500)(15.000 \times 0,95) \\ &= 23.949.000,00 \text{ \$/año} \end{aligned}$$

Paso 4

El costo total relevante mínimo corresponde al tamaño de lote óptimo sin descuento y, por lo tanto, el tamaño óptimo de pedido es $Q^* = EOQ(v_0) = 58$ unidades. El comportamiento de este ítem corresponde a la figura 4.6b.

c) Ítem 3:

Paso 1

$$EOQ(v_0) = \sqrt{\frac{2(6.000)(139.800)}{(68.000)(0,36)}} \cong 262 \text{ unidades}$$

$$EOQ(v_1) = \sqrt{\frac{2(6.000)(139.800)}{(68.000 \times 0,95)(0,36)}} \cong 269 \text{ unidades}$$

Paso 2

Como el tamaño de lote óptimo, con descuento, es mayor o igual que $Q_1 = 200$ unidades, debe considerarse en el análisis. El $EOQ(v_o)$ se descarta pues dio mayor que el punto de quiebre igual a 200 unidades. Se calcula, entonces, el costo total relevante correspondiente al $EOQ(v_i)$, utilizando la Ec. (4.8):

$$\begin{aligned} CTR[EOQ(v_i)] &= \frac{(6.000)(139.800)}{269} + \frac{(269)(68.000 \times 0,95)(0,36)}{2} + (139.800)(68.000 \times 0,95) \\ &= 9.037.326.148 \text{ $/año} \end{aligned}$$

Paso 3

Se calcula aquí el costo total relevante para el único punto de quiebre existente, $Q_1 = 200$ unidades:

$$\begin{aligned} CTR(Q_1) &= \frac{(6.000)(139.800)}{200} + \frac{(200)(68.000 \times 0,95)(0,36)}{2} + (139.800)(68.000 \times 0,95) \\ &= 9.037.599.600,00 \text{ $/año} \end{aligned}$$

Paso 4

El costo total relevante mínimo corresponde al tamaño de lote óptimo con descuento y, por lo tanto, el tamaño óptimo de pedido es $Q^* = EOQ(v_i) = 269$ unidades. El comportamiento de este ítem corresponde a la figura 4.6c.

Se puede analizar el hecho de que las curvas de $CTR(Q)$ vs. Q , para descuentos sucesivos, siempre caen debajo de la curva anterior, y ahorrarse algunos cálculos. Por ejemplo, para el ítem 3 del ejemplo 4.2, dado que el $EOQ(v_i) = 269$ unidades es mayor que el punto de quiebre de 200 unidades, es seguro que el costo total relevante del tamaño óptimo sin descuento, y el costo total relevante del punto de quiebre Q_1 , son mayores que el costo total relevante del tamaño óptimo con descuento y, por lo tanto, no es necesario calcularlos.

El ejemplo anterior corresponde al EOQ con descuentos sobre todas las unidades. Hay otro caso que considera los descuentos incrementales, el cual se deja como ejercicio (problemas No. 8 y 9 de los ejercicios adicionales y de repaso de este capítulo).

El tema del EOQ no deja de ser investigado. Por ejemplo, Pentico y Drake (2009) presentan una nueva metodología para modelar el EOQ con órdenes pendientes parciales. Otro tema que ha sido muy estudiado es el efecto que tiene considerar o ignorar el valor del dinero en el tiempo en la metodología tradicional del EOQ . Algunos autores han sostenido que

las diferencias entre la metodología tradicional en la fórmula del *EOQ* y la que utiliza el “valor presente neto” (VPN) son muy pequeñas, incluso para algunos casos extremos [Hadley (1964), Silver *et al.* (1998, pp. 165-167)]. Otros investigadores han encontrado casos en los que se producen diferencias significativas [Park y Son (1989), Haneveld y Teunter (1998), Sun y Queyranne (2002)]. Más recientemente, Smith y Martínez-Flores (2007) encontraron que pueden existir diferencias significativas entre la metodología tradicional y la que considera el VPN en cuanto a los costos y a las políticas de inventario. Los autores diferencian los casos en los cuales se incluyen o no los costos de oportunidad en la tasa r y sugieren explícitamente la utilización del VPN en los casos de modelos de inventarios y producción con períodos de tiempo discretos y costos de alistamiento.

En otro artículo reciente, Eksioglu (2009) analiza una extensión del problema clásico del *EOQ*, en el cual hay múltiples proveedores y múltiples modos de transporte disponibles. El problema incluye, por lo tanto, el instante en que debe ordenarse, la selección de modos de transporte y el tamaño de orden por cada modo seleccionado. Otra referencia interesante es la de Darwish (2008a) quien integra las decisiones de transporte y compra en modelos continuos de control de inventarios.

TAMAÑO DE LOTE ÓPTIMO DE PRODUCCIÓN (*EPQ*)

El supuesto eliminado en este caso es el hecho de que la reposición no se presenta instantáneamente, sino que ocurre progresivamente, de acuerdo con una tasa de reposición o de producción constante, p . Esta tasa puede corresponder a la tasa de producción del ítem o a la forma como el proveedor realiza despachos sucesivos del producto. Este tema también se conoce en la literatura como el tamaño económico de producción (*Economic Production Quantity*, *EPQ*). Obviamente, como no se consideran faltantes de inventario, la tasa de reposición p debe ser mayor que la demanda D , para que el desarrollo siguiente tenga sentido. La figura 4.7 ilustra esta situación. Lo único que cambia con respecto del caso con tasa de reposición infinita, es el inventario promedio, el cual ahora es igual a $Q(1 - D/p)/2$.

El costo total relevante viene dado por:

$$CTR(Q) = \frac{AD}{Q} + \frac{Q(1 - D/p)vr}{2} \quad (4.9)$$

Y el tamaño económico de pedido *EPQ* se obtiene igual a:

$$EPQ = \sqrt{\frac{2AD}{vr(1 - D/p)}} = EOQ \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - D/p}} \quad (4.10)$$

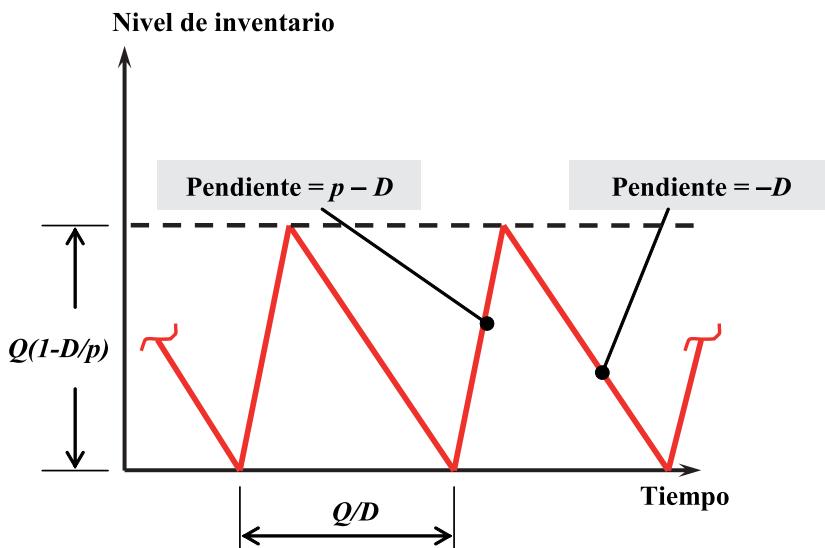


Figura 4.7. Nivel de inventario cuando se considera tasa de reposición finita p

Ejemplo 4.3 (Tamaño de lote óptimo de producción EPQ)

Un fabricante de productos químicos para el aseo produce sus propios envases plásticos para un cierto ítem. Los envases se utilizan en la zona de empaque a razón de 240 unidades/día. El costo de preparación de cada lote de envases es de \$150.000 y su tasa de producción es de 600 unidades/día. El valor de cada envase es de \$15.000 y la compañía utiliza una tasa para el costo de mantenimiento del inventario del 32% anual. Determinar el tamaño óptimo de producción si el fabricante trabaja todo el año (360 días).

El tamaño óptimo de producción puede calcularse de acuerdo con la Ec. (4.10). Si no se tiene en cuenta la tasa de producción finita, el *EOQ* correspondiente sería:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2(150.000)(240 \times 360)}{(15.000)(0,32)}} \cong 2.323,79 \text{ unidades}$$

Y aplicando el factor de corrección por tasa de reposición finita, se obtiene:

$$EPQ = EOQ \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - D/p}} = (2.323,79) \frac{1}{\sqrt{1 - 240/600}}$$

$$EPQ = 3.000 \text{ unidades}$$

Como el tamaño de lote es de 3.000 envases, entonces se producen durante $3.000/600 = 5$ días. Durante estos cinco días, se consumen $5 \times 240 = 1.200$ envases de los 3.000 que se fabrican. Entonces, los 1.800 envases restantes pasan a inventario y duran 7,5 días más. Es decir, el tiempo de ciclo total es de 12,5 días, que corresponden a 5 días del ciclo de producción y consumo, más 7,5 días de consumo solamente.

El tema del *EPQ*, a pesar de ser ampliamente conocido y tratado en la literatura, aún tiene mucho espacio para investigación. Por ejemplo, Pentico *et al.* (2009) presentan un nuevo modelo para el *EPQ* determinístico considerando órdenes pendientes parciales [véase también una nota a este artículo por Zhang (2008)]. En otra publicación, Simmons y Cheng (2008) presentan un cálculo alternativo del tamaño óptimo de producción basado en la maximización de utilidades. En su trabajo, tienen en cuenta los costos de inventario y los costos de producción, determinan una tasa de producción que maximiza las utilidades y, con base en dicho valor, calculan el *EPQ*. Mediante esta técnica, de acuerdo con los autores, se logran aumentos significativos en la utilidad.

En otro trabajo, Ben-Daya *et al.* (2008) diseñan un modelo para el cálculo del *EPQ* teniendo en cuenta los efectos de los cambios en la tasa de producción y eficiencia, debidos a factores que pueden deteriorar la velocidad de producción y la calidad del producto y causar paradas inesperadas. Desde este punto de vista, este modelo es más realista que el presentado en esta sección. Por otra parte, Darwish (2008b) extiende el modelo *EPQ* considerando que existe una relación entre el costo de alistamiento y el tamaño del lote de producción. Esta dependencia puede ocurrir, en la práctica, en aquellos casos en los que hay curvas de aprendizaje (o de olvido), o cuando existe deterioro de los procesos. Considera dos casos, con y sin la inclusión de faltantes, prueba que las funciones obtenidas son convexas, encuentra su solución óptima y demuestra que la relación entre el costo de alistamiento y la longitud de la corrida de producción tiene un impacto significativo sobre el tamaño óptimo de lote y el costo total relevante.

Ejercicios 4.2

1. Una compañía hace pedidos anuales por mil toneladas de cierta materia prima. El costo de mantener el inventario es del 35% anual y el precio de compra es de \$1.100.000 por tonelada. Los costos marginales de tramitar los documentos son de \$10.500/pedido. Para pedidos de 22 toneladas o más, el precio de compra disminuye a \$995.000 por tonelada; para pedidos de 45 toneladas o más, el precio es de \$882.000 por tonelada. ¿Cuál es el tamaño óptimo de pedido?

2. La demanda de cierto artículo es de 10.000 unidades/año. El costo de hacer un pedido es de \$1.875 y el valor de cada pieza es de \$1.125. El costo de mantener el inventario es del 25%/año. Si se compran 1.750 unidades o más, se obtiene un descuento del 5% sobre el valor original de cada pieza. Para pedidos de 4.000 o más unidades, el descuento sube al 8%. Determine la cantidad óptima de pedido.
3. Una compañía minera reemplaza una pieza importante para el funcionamiento de cierto equipo. La demanda se ha estimado en un valor prácticamente constante de 40 unidades/semana. Se ofrece por parte del proveedor el siguiente esquema de descuentos:

Rango de Q	Costo unitario
$0 < Q < 300$ unidades	\$10,0
$300 \leq Q$	\$9,70

El costo fijo de cada reposición se estima en \$25 y el costo de llevar el inventario es del 26% anual. ¿Cuál debe ser el tamaño de cada pedido? Si el proveedor está interesado en hacer que la compañía adquiera al menos 500 unidades cada vez, cuál es el máximo costo unitario que podría cobrar por una orden de 500 unidades? [Silver *et al.* (1998), p. 189].

4. *Análisis de sensibilidad del modelo de tamaño óptimo de pedido con tasa de reposición finita.* Dibuje una gráfica del factor de corrección $(1 - D/p)^{-1/2}$ mostrado en la Ec. (4.10), y del porcentaje de penalización del costo si se utiliza el *EOQ* en lugar del *EPQ*, contra el valor de D/p (semejante a como se definió en el problema No. 6 de los ejercicios 4.1). Comente acerca de los resultados.
5. Un productor de componentes electrónicos desea calcular el tamaño óptimo de cierto ítem que cuesta 115.000 \$/unidad. El ítem se puede producir a razón de 985 unidades/mes y su tasa de consumo es de 195 unidades/mes. La tasa r de la compañía es del 32% anual y los costos de alistamiento de las máquinas son de 460.000/orden de producción.
 - a) Determine el lote óptimo de producción.
 - b) Si se ignora la tasa de producción, ¿cuál sería el tamaño de lote? ¿Cuánto le costaría este tamaño de lote más pequeño a la compañía, con relación al determinado en el literal anterior?
 - c) Dibuje una gráfica de inventario contra tiempo para el caso del literal a), determine el inventario máximo, el intervalo entre corridas de producción y el tiempo de ciclo total.

6. Usted ha creado una fábrica de empaques de cartón. Uno de sus clientes más importantes le está comprando 350 cajas/día para empacar uno de sus productos líderes del mercado. La máquina en la que fabrica esta caja puede producir hasta 2.500 unidades/día. Por lo tanto, si quisiera, podría producir todas las necesidades de su cliente de una semana en un solo día (asuma que su cliente trabaja 7 días/semana). Otro esquema de producción podría ser producir cada día las 350 cajas que necesita su cliente, pero incuriría en el costo de alistamiento de la máquina cada vez que haga la corrida de producción. Si los costos de alistamiento de la máquina son de \$150.000/corrida, el costo de producción variable de cada caja es de 3.000 \$/caja y su costo de mantenimiento del inventario $r = 0,07\%$ diario, ¿cuál es su programa de producción semanal ideal?
7. Deduzca una ecuación semejante a la del problema No. 4 de los ejercicios 4.1 para el $CTR(EPQ)$.

CONTROL DE INVENTARIOS DE DEMANDA CONOCIDA VARIABLE CON EL TIEMPO

En las cuatro secciones anteriores se trató el caso básico del tamaño económico de pedido (EOQ) asumiendo que la demanda puede considerarse uniforme y prácticamente constante a lo largo del horizonte de planeación. En esta sección se elimina este supuesto y se permite que la demanda varíe con el tiempo, aunque continúa siendo determinística, o conocida con certeza. Esta situación es mucho más real, encontrándose frecuentemente en las siguientes situaciones prácticas:

- En sistemas de producción de múltiples etapas, donde se calculen los requerimientos de materiales para ciertos productos de la empresa, de acuerdo con el programa maestro de producción. En estas situaciones, se llega a patrones de demanda con alto grado de certeza, pero variables con el tiempo. Aspectos adicionales de esta situación son abordados por la técnica determinística del *Material Requirements Planning, MRP*.
- Contratos de venta o producción preestablecidos, donde se conocen con certeza las cantidades a producir y/o despachar.
- Productos que tienen una demanda periódica bien establecida, o cierta demanda inducida por campañas publicitarias y de promoción. Este último caso debe analizarse con mayor detalle de acuerdo con lo expresado en el capítulo 3.
- Partes y componentes de productos que estén siendo retirados del mercado por obsolescencia o cualquier otra razón. Estos ítems pue-

den también considerarse como ítems clase C y serán analizados en el capítulo 7.

- Repuestos y componentes cuya demanda es conocida con cierto grado de certeza, tales como las partes necesarias para efectuar mantenimiento preventivo.

La complejidad cuando la demanda es variable

Uno de los principales problemas cuando la demanda varía significativamente con el tiempo es el hecho de que ya no puede considerarse como óptima una *cantidad constante de pedido*. Dicha cantidad puede variar significativamente entre pedidos y debe ser determinada cada vez que una orden va a ser procesada.

Normalmente, en este tipo de situaciones se habla de un período u *horizonte de planeación* determinado, el cual puede ser de un año dividido en 12 meses, o de un semestre dividido en semanas, por ejemplo. Esto depende de la naturaleza del problema específico bajo estudio. En otras ocasiones, no se trata de un valor dado de demanda en cada período, sino de la variación de la *rata de demanda* entre período y período. En cualquier caso, debe especificarse claramente el tipo de análisis que se desea realizar.

Otro factor importante es el hecho de restringir o no los pedidos a instantes determinados de tiempo, por ejemplo, al comienzo de cada semana. En otros casos, el pedido puede hacerse en cualquier instante del tiempo dentro del horizonte de planeación. Sin embargo, en la mayoría de las situaciones prácticas donde se manejen múltiples ítems simultáneamente, es preferible establecer que los pedidos se puedan realizar al *comienzo de cada período* definido para el análisis.

Finalmente, vale la pena destacar la importancia del *inventario al final del horizonte de planeación*. En ocasiones, este inventario debe ser cero, dado que se trata de un contrato establecido de ventas. Contrariamente, en otras situaciones, este valor puede no tener restricciones, debido a que se tomará como inventario inicial de planeación del período siguiente.

Para manejar cualquiera de estos escenarios, se pueden establecer tres posibles métodos claramente diferenciados:

- Utilización de la *cantidad óptima de pedido (EOQ)* para todos los pedidos, calculada con base en la *demandas promedio* durante el horizonte de planeación. Esta estrategia es útil cuando el patrón de demanda no es demasiado variable con el tiempo, ya que así se aproximaría a las situaciones descritas en las secciones anteriores.
- Utilización de la solución exacta de un *modelo matemático* previamente establecido, tal como el algoritmo de Wagner-Whitin (1958), o de modelos de programación lineal entera-mixta. En estos casos se

obtienen soluciones óptimas que consideran algunos costos relacionados con los inventarios.

- Uso de *métodos aproximados o heurísticos*, muy útiles en la práctica, debido a su simplicidad de manejo y facilidad de comprensión.

Supuestos básicos

Los métodos que se van a estudiar en esta sección modelan una demanda válida para las siguientes condiciones:

- La tasa de demanda D_j debe ser satisfecha en el período j ($j = 1, 2, \dots, N$), donde el horizonte de planeación concluye al final del período N . En general, esta demanda puede variar de un período a otro, pero se considera determinística.
- Se asume que los pedidos llegan al comienzo de los períodos donde son requeridos. Si existe un tiempo de reposición para la llegada de los pedidos, este se considera determinístico y sería útil para motivos de planeación de cuándo colocar el pedido, pero no se incluirá explícitamente en el análisis.
- No se consideran descuentos por cantidad pedida.
- Los factores de costo no varían significativamente con el tiempo. Particularmente, se asume que la tasa de inflación permanece baja.
- Se considera cada ítem en forma independiente de otros ítems.
- No se consideran faltantes de inventario o demanda no servida, pues la demanda se conoce anticipadamente.
- La cantidad solicitada en cada pedido es despachada en forma total y no es recibida por lotes o en forma gradual.
- Por facilidad, se considera que el costo de mantener el inventario se carga sobre el inventario al final de cada período. Sin embargo, se puede demostrar que la consideración de utilizar el inventario promedio, o la semisuma del inventario inicial y el inventario final de cada período, coincide con el análisis de fin de período.

Debido a estos supuestos, especialmente al segundo y sexto en el orden anterior, se concluye fácilmente que la mejor situación ocurrirá en los casos en que los pedidos llegan al comienzo de cada período donde el inventario inicial es cero.

Ejemplo 4.4 (Demanda determinística variable con el tiempo)

La tabla 4.2 muestra la demanda requerida en unidades de cierto producto para 12 meses.

Tabla 4.2. Demanda requerida para el caso del ejemplo 4.4

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Demanda	35	165	40	335	400	325	230	141	330	395	600	124	3.120

Se ha estimado un costo fijo de alistamiento A de \$300/pedido, un costo de llevar el inventario r del 1% mensual, y el costo unitario de cada producto v de \$80/unidad. Es importante notar aquí que algunos autores frecuentemente no dan los parámetros v y r separadamente, sino que los multiplican *a priori*, dando el costo de mantenimiento como $h = vr$. En este caso, $h = 80 \text{ \$/unidad} \times 0,01 \text{ \$/\$.mes} = 0,8 \text{ \$/unidad.mes}$.

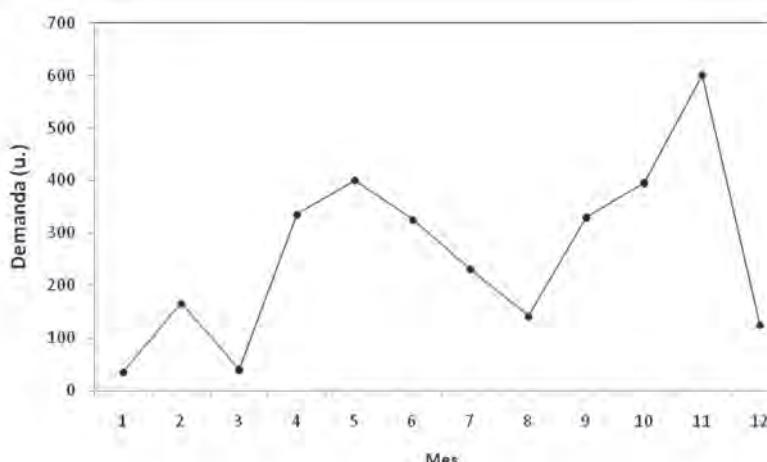
La empresa ha decidido utilizar un criterio para la programación de sus órdenes, estableciendo la producción de *tres meses de requerimientos* cada vez que se produzca. Así, por ejemplo, y asumiendo que el inventario inicial es cero, al comienzo del mes 1 debe estar disponible una orden por $35 + 165 + 40$ unidades = 240 unidades, correspondientes a las necesidades de los meses 1, 2 y 3. Calcular los costos de inventario asociados a esta política de pedidos.

Primero, es interesante analizar el patrón de demanda que tiene el producto, el cual se muestra en la figura 4.8. Para determinar el grado de dispersión de esta demanda se calcula su coeficiente de variación sobre el horizonte de planeación, así:

$$\text{Demanda promedio} = 3.120/12 = 260 \text{ unidades/mes}$$

$$\text{Desviación estándar de la muestra} = 167,82 \text{ unidades}$$

$$\text{Coeficiente de variación} = 167,82/260 = 0,6454 = 64,55\%$$

**Figura 4.8. Patrón de demanda correspondiente al ejemplo 4.4**

Aunque la demanda puede considerarse perpetua, su variación del 64,55% es considerable y, por ende, presenta un patrón de demanda variable con el tiempo. Silver *et al.* (1998, p. 217) definen otro indicador denominado coeficiente de variabilidad *VC*, el cual viene dado por:

$$VC = \frac{\text{Varianza de la demanda por período}}{\text{Cuadrado de la demanda promedio por período}}$$

el cual escriben como:

$$VC = \frac{N \sum_{j=1}^N D_j^2}{\left[\sum_{j=1}^N D_j \right]^2} - 1 \quad (4.11)$$

Este coeficiente se determina asumiendo que la demanda es una variable aleatoria discreta sobre el período de análisis, cada una con probabilidad igual a $1/N$. Aquí se deja como ejercicio obtener esta expresión. El cálculo en este ejemplo da:

$$VC = \frac{(12)(1.120.982)}{(3.120)^2} - 1$$

$$VC = 0,3819$$

Si $VC < 0.2$ entonces se puede utilizar un método basado en el *EOQ* con la demanda promedio (en este caso, 260 unidades/mes) para estimar los tamaños de pedido de cada período. En caso contrario, la demanda se torna más errática y puede ser necesario utilizar otro método heurístico o un método exacto como el modelo de programación lineal entera-mixta que se presentará posteriormente.

Aplicando la política de pedidos de tres meses de requerimientos, se obtiene la tabla 4.3, donde se muestra la distribución de pedidos, requerimientos, e inventarios inicial y final para cada mes.

Tabla 4.3. Comportamiento del inventario en el tiempo mediante la política de tres meses de pedido (ejemplo 4.4)

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Inv. inicial	0	205	40	0	725	325	0	471	330	0	724	124	-
+ Pedido	240	-	-	1.060	-	-	701	-	-	1.119	-	-	3.120
- Demanda	35	165	40	335	400	325	230	141	330	395	600	124	3.120
= Inv. final	205	40	0	725	325	0	471	330	0	724	124	0	2.944

Para calcular los costos asociados a esta política, durante el horizonte de planeación, se procede como sigue:

$$\begin{aligned}
 \text{Costos totales de preparación} &= 4 \text{ pedidos} \times \$300/\text{pedido} = \$1.200,0 \\
 \text{Costos de llevar el inventario} &= 2.944 \text{ unid mes} \times \$80/\text{unid} \\
 &\quad \times 0,01 \$/\$ \text{ mes} = \$2.355,2 \\
 \text{Costos totales anuales de preparación e inventario} &= \$\underline{\underline{3.555,2}}
 \end{aligned}$$

Otros cálculos relacionados con esta política se refieren a la rotación del inventario. Para calcularla, se determina primero el inventario promedio considerado al final de cada mes, así:

$$\text{Inventario promedio (convención final de mes)} = 2.944/12 = 245,33 \text{ unidades.}$$

Y la rotación del inventario vendría dada por:

$$\text{Rotación del inv.} = \text{Demanda anual}/\text{Inv. promedio} = 3.120/245,33 = 12,72 \text{ veces/año}$$

La pregunta obvia que surge es, ¿se puede mejorar este costo mediante la aplicación de una política diferente de inventarios? La respuesta es sí. Algunas estrategias para lograr esto se exponen a continuación.

Uso de la cantidad económica de pedido (*EOQ*)

Una posibilidad de mejorar la situación descrita en el ejemplo 4.4 es la de utilizar la cantidad económica de pedido *EOQ*, calculada con base en la demanda promedio del horizonte de planeación. Sin embargo, como el valor de *VC* calculado anteriormente dio mayor que 0,2, entonces es probable que los resultados no sean buenos. Como la mejor situación corresponde a efectuar pedidos que satisfagan los requerimientos de un número entero de períodos (como ya se mostró anteriormente, de acuerdo con los supuestos), si la cantidad *EOQ* no coincide con los requerimientos para un número entero de períodos, entonces se acerca al valor más próximo, bien sea por exceso o por defecto.

En este caso, el *EOQ* viene dado por:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2AD}{vr}} \quad (4.12)$$

Donde:

\bar{D} = Demanda promedio durante el horizonte de planeación.

Los otros parámetros son los mismos definidos en el capítulo 2. Para este caso, la demanda promedio y el EOQ vienen dados por:

$$\bar{D} = \frac{\text{Requerimientos totales}}{\text{Horizonte de planeación}} = \frac{3.120}{12} = 260 \text{ unidades/mes}$$

$$EOQ = \sqrt{\frac{2(300)(260)}{(80)(0,01)}} = 442 \text{ unidades}$$

La tabla 4.4 muestra los resultados para la política del tamaño óptimo de pedido, teniendo en cuenta que se redondea a los requerimientos de un número entero de períodos. Para el primer pedido, por ejemplo, el EOQ está más cercano a 575 unidades, el requerimiento para los cuatro primeros meses, que lo que está a 240 unidades, el requerimiento para los tres primeros meses. Por esta razón, se escoge 575 como el tamaño del pedido inicial. A partir del mes 5 se repite este mismo procedimiento para determinar el tamaño de pedido.

Tabla 4.4. Comportamiento del inventario en el tiempo mediante la política de pedido para períodos enteros con demanda aproximada al EOQ (ejemplo 4.4)

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Inv. inicial	0	540	375	335	0	0	230	0	330	0	0	0	-
+ Pedido	575	-	-	-	400	555	-	471	-	395	600	124	3.120
- Demanda	35	165	40	335	400	325	230	141	330	395	600	124	3.120
= Inv. final	540	375	335	0	0	230	0	330	0	0	0	0	1.810

En este caso, los costos, el inventario promedio y la rotación del inventario vienen dados por:

$$\begin{aligned}
 \text{Costos totales de preparación} &= 7 \text{ pedidos} \times \$300/\text{pedido} &= & \$ & 2.100,0 \\
 \text{Costos de llevar el inventario} &= 1.810 \text{ unid mes} \times \$80/\text{unid} \\
 &\quad \times 0,01 \$/\$ \text{ mes} &= & & 1.448,0 \\
 \text{Costos totales anuales de preparación e inventario} &= &= & \$ & \underline{\underline{3.548,0}}
 \end{aligned}$$

Inventario promedio (convención final de mes) = $1.810/12 = 150,83$ unidades.
 Rotación del inv. = Demanda anual/Inv. promedio = $3.120/150,83 = 20,69$ veces/año

Como puede observarse, es muy poca la diferencia en cuanto a costos totales de esta política con relación a la de tres meses de pedido.

Otras variaciones del *EOQ*

El *EOQ* se puede aplicar de otras dos formas diferentes a la presentada en la sección anterior. Primero, se puede ordenar la cantidad exacta dada por el *EOQ*, aunque, en general, no coincide con la demanda de un número entero de períodos y, como consecuencia, la cantidad a pedir al final deberá ajustarse para obtener un inventario cero al final del horizonte de planeación; en este caso se debe ordenar de tal forma que se evite un inventario final negativo. La segunda forma es la de convertir el *EOQ* a un número entero de períodos dividiéndolo por la demanda promedio y redondeando al entero más próximo, y así ordenar siempre una cantidad igual a la demanda de ese número de períodos. A continuación se ilustran estos dos métodos.

Utilizando el valor exacto dado por el EOQ

La tabla 4.5 muestra el resultado de esta política de pedidos. Evidentemente, este método no supera a los anteriores en este ejemplo.

Tabla 4.5. Comportamiento del inventario en el tiempo mediante la aplicación de pedidos iguales al *EOQ* para el ejemplo 4.4

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Inv. inicial	0	407	242	202	309	351	26	238	97	209	256	98	—
+ Pedido	442	—	—	442	442	—	442	—	442	442	442	26	3.120
– Demanda	35	165	40	335	400	325	230	141	330	395	600	124	3.120
= Inv. final	407	242	202	309	351	26	238	97	209	256	98	0	2.435

Los costos, el inventario promedio y la rotación del inventario se reducen a:

$$\begin{aligned}
 \text{Costos totales de preparación} &= 8 \text{ pedidos} \times \$300/\text{pedido} = \$2.400,0 \\
 \text{Costos de llevar el inventario} &= 2.435 \text{ unid mes} \times \$80/\text{unid} \\
 &\quad \times 0,01 \$/\$ \text{ mes} = \$1.948,0 \\
 \text{Costos totales anuales de preparación e inventario} &= \$\underline{\underline{4.348,0}}
 \end{aligned}$$

Inventario promedio (convención final de mes) = $2.435/12 = 202,92$ unidades.
 Rotación del inv. = Demanda anual/Inv. promedio = $3.120/202,92 = 15,38$ veces/año

Redondeando el EOQ a un número entero de períodos

Este método es una variación de los dos métodos relacionados con el *EOQ* expuestos anteriormente. Se conoce también con el nombre de *cantidad de orden periódica*. En este caso, la cantidad económica de pedido, *EOQ*, se expresa en unidades de tiempo, de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$T_{EOQ} = \frac{EOQ}{D} = \sqrt{\frac{2A}{Dvr}} \quad (4.13)$$

El T_{EOQ} se redondea al entero más cercano mayor que cero y cada vez se ordena la cantidad necesaria para cubrir dicho número de períodos. Si el número de períodos no es múltiplo del total de períodos del horizonte, N , entonces se ajusta la cantidad a pedir al final del mismo.

En el ejemplo 4.4, el *EOQ* es igual a 442 unidades; esto equivale, con respecto de la demanda promedio de 260 unidades/mes, a tener $442/260$ meses = 1,7 meses = 2 meses (redondeado). La tabla 4.6 muestra el resultado de esta política de pedidos, es decir, cuando se pide siempre para dos meses de demanda.

Tabla 4.6. Comportamiento del inventario en el tiempo mediante la aplicación de un número entero de períodos redondeado a partir del *EOQ* para el ejemplo 4.4 (2 meses)

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Inv. inicial	0	165	0	335	0	325	0	141	0	395	0	124	—
+ Pedido	200	—	375	—	725	—	371	—	725	—	724	—	3.120
— Demanda	35	165	40	335	400	325	230	141	330	395	600	124	3.120
= Inv. final	165	0	335	0	325	0	141	0	395	0	124	0	1.485

Aquí, los costos, el inventario promedio y la rotación del inventario son:

$$\begin{aligned} \text{Costos totales de preparación} &= 6 \text{ pedidos} \times \$300/\text{pedido} = \$1.800,0 \\ \text{Costos de llevar el inventario} &= 1.485 \text{ unid mes} \times \$80/\text{unid} \\ &\quad \times 0,01 \$/\$ \text{ mes} = \$1.188,0 \\ \text{Costos totales anuales de preparación e inventario} &= \$\underline{\underline{2.988,0}} \end{aligned}$$

Inventario promedio (convención final de mes) = $1.485/12 = 123,75$ unidades.

Rotación del inv. = Demanda anual/Inv. promedio = $3.120/123,75 = 25,21$ veces/año

Este último resultado muestra un mejoramiento significativo con respecto de los anteriores.

Otra política muy conocida es la de ordenar exactamente para un período, denominada lote por lote (*lot for lot*). En este caso, el inventario final siempre será cero y se incurrirá sólo en 12 costos de ordenamiento, o sea que el costo total relevante para esta política sería de \$3.600,0.

La pregunta obvia que surge es, ¿cuál es la solución óptima y cómo se puede encontrar? Wagner y Whitin (1958) diseñaron un algoritmo de programación dinámica que encuentra la solución óptima bajo el supuesto de que el inventario al final del horizonte sea preespecificado (generalmente será igual a cero como en el ejemplo 4.4). Este método no se presenta aquí por considerarse que presenta más desventajas que ventajas, especialmente en lo que se refiere a su comprensión y aplicación práctica. Existen paquetes de *software* académico muy conocidos, como el *WinQSB*, que contienen este algoritmo. Investigaciones recientes han resuelto la versión estocástica del algoritmo de Wagner-Whitin, considerando demanda no estacionaria probabilística, especialmente con distribución normal [Vargas (2008)].

En la sección siguiente se presenta un modelo matemático de programación entera-mixta para resolver óptimamente este problema. Su ventaja radica en que se pueden adicionar condiciones y restricciones de diversa naturaleza una vez se construye el modelo, lo que lo hace una herramienta muy poderosa de decisión.

Modelo de programación matemática entera-mixta (método exacto)

Resulta interesante formular un modelo de programación matemática entero-mixto para el problema bajo análisis. Considérense los siguientes parámetros y variables de decisión (los parámetros A , v y r ya han sido definidos anteriormente):

D_i = Demanda del período i , $i = 1, 2, \dots, N$.

X_{ij} = Cantidad ordenada en el período i para ser utilizada para satisfacer la demanda del mes j ; $i = 1, 2, \dots, N$; $j = 1, 2, \dots, N$; $j \geq i$, donde N es el número de períodos considerados en el horizonte bajo análisis.

Y_i = 1, si se realiza un pedido en el período i , $i = 1, 2, \dots, N$; 0, de lo contrario (variable binaria)

Se va a asumir que el inventario inicial, al comienzo del período 1 es cero, lo mismo que el inventario al final del horizonte de planeación, o sea, al final del período N . Bajo estos supuestos, se puede formular el siguiente modelo de programación lineal mixta:

Función objetivo:

Minimizar $CTR = \text{Costos de ordenamiento} + \text{costos de almacenamiento}$

$$= \sum_{i=1}^N AY_i + (vr)(1) \sum_{i=1; j=i+1}^{N-1} X_{ij} + (vr)(2) \sum_{i=1; j=i+2}^{N-2} X_{ij} + \dots + (vr)(N-2) \sum_{i=1; j=i+N-2}^2 X_{ij} + (vr)(N-1) \sum_{i=1; j=i+N-1}^1 X_{ij}$$

Restricciones:

a) Por satisfacción de la demanda:

$$\begin{array}{ll} X_{11} & = D_1 \text{ (} j = 1: \text{ demanda del período 1)} \\ X_{12} + X_{22} & = D_2 \text{ (} j = 2: \text{ demanda del período 2)} \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} & = D_3 \text{ (} j = 3: \text{ demanda del período 3)} \\ \dots & \dots \\ X_{1N} + X_{2N} + X_{3N} + \dots + X_{NN} & = D_N \text{ (} j = N: \text{ demanda del período } N \text{)} \end{array}$$

b) Restricciones lógicas (no se pueden tener unidades disponibles en cada período, sino se ha efectuado un pedido):

$Y_1 = 1$ (en el período 1 se debe hacer un pedido ya que el inv. inicial es cero).

$$\sum_{j=1}^N X_{1j} \leq \left(\sum_{i=1}^N D_i \right) Y_1$$

$$\sum_{j=2}^N X_{2j} \leq \left(\sum_{i=2}^N D_i \right) Y_2$$

$$\sum_{j=3}^N X_{3j} \leq \left(\sum_{i=3}^N D_i \right) Y_3$$

$$\dots$$

$$\sum_{j=N-1}^N X_{N-1,j} \leq \left(\sum_{i=N-1}^N D_i \right) Y_{N-1}$$

$$\sum_{j=N}^N X_{Nj} \leq \left(\sum_{i=N}^N D_i \right) Y_N$$

c) Restricciones obvias:

$$\begin{aligned} X_{ij} &\geq 0 \text{ para toda } i, j. \\ Y_i &\in \{0, 1\} \text{ para toda } i. \end{aligned}$$

El primer término de la función objetivo contiene el total de los costos fijos de pedido. Si se pide en el período i , entonces la variable binaria $Y_i = 1$ y, por lo tanto, el costo fijo A , suma. De lo contrario, no se suma costo fijo alguno porque la variable binaria sería igual a cero. Los términos siguientes de la función objetivo representan el costo de mantenimiento del inventario. Como el modelo tiene la flexibilidad de que se puede pedir en el período i para satisfacer la demanda de cualquier período $j = i, i+1, i+2, \dots, N$, entonces el costo de mantenimiento varía dependiendo del número de períodos que va a estar guardado el inventario. Así, los términos de la función objetivo asociados a este costo se han organizado en orden ascendente para aquellas variables que representen unidades guardadas por 1, 2, 3, ..., $N - 1$ períodos.

El conjunto de restricciones a) asegura que se va a satisfacer exactamente la demanda de cada período. El conjunto de restricciones lógicas b), combinado con las restricciones obvias c) asegura que si no se realiza un pedido en el período i ($Y_i = 0$), entonces todas las variables X_{ij} ($j = i, i+1, i+2, \dots, N$) deben ser iguales a cero y viceversa. Por el contrario, si $Y_i = 1$, o sea que se va a pedir en el período i , el modelo deja la libertad que en el período i se pueda pedir hasta la demanda total para los períodos $i, i+1, i+2, \dots, N$. Nótese que el modelo no restringe un pedido a la demanda de un número entero de períodos. A pesar de que se sabe que la solución óptima cumple con esta propiedad, no se necesita representarla explícitamente en el modelo, pues es resultado del mismo.

La hoja electrónica que representa al modelo luce como se observa en la siguiente página.

La fórmula de la celda objetivo contiene el costo de ordenamiento y el costo de mantenimiento del inventario. En total, hay 90 celdas variables, de las cuales 12 corresponden a las variables binarias de pedido Y_i y 78 a las variables asociadas al tamaño del pedido X_{ij} . Las restricciones de demanda se garantizan adicionando al *solver* de Excel™ una restricción conjunta que iguala el total por columnas de las celdas cambiantes correspondientes a las variables X_{ij} con la demanda del período respectivo. Las restricciones lógicas b) se programan tomando la suma por filas de las celdas cambiantes X_{ij} y haciéndola menor o igual que el producto de la demanda pendiente por satisfacer a partir del período i con la correspondiente variable binaria Y_i . Hay que adicionar una última restricción al *solver* donde se le informa al programa que las variables de pedido Y_i son binarias. Las variables del tamaño de pedido X_{ij} se dejan como continuas mayores o iguales que cero.

DATOS DE ENTRADA =												
Costo fijo A (\$/orden) =												
Tasa mto. inv. r (% por per) =												
Valor ítem v (\$/unidad) =												
Demandas D _i (u.) =												
Costo mto. h = vr (\$/u.per) =												
VARIABLES X _{ij}	Per. 1	Per. 2	Per. 3	Per. 4	Per. 5	Per. 6	Per. 7	Per. 8	Per. 9	Per. 10	Per. 11	Per. 12
Per. 1	35	165	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Per. 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Per. 3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Per. 4	335	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	335
Per. 5	400	325	0	0	0	0	0	0	0	0	0	725
Per. 6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Per. 7	230	141	0	0	0	0	0	0	0	0	0	371
Per. 8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Per. 9	330	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	330
Per. 10	395	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	395
Per. 11	600	124	0	0	0	0	0	0	0	0	0	724
Per. 12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL =	35	165	40	335	400	325	230	141	330	395	600	124
Variables binarias de pedido →	Per. 1	Per. 2	Per. 3	Per. 4	Per. 5	Per. 6	Per. 7	Per. 8	Per. 9	Per. 10	Per. 11	Per. 12
Demandas pendiente →	3.120	3.085	2.920	2.880	2.545	2.145	1.820	1.590	1.449	1.119	724	124
CTR (\$/año) =	2.768,00	← celda objetivo										

Al correr el *solver*, se obtiene la solución óptima mostrada arriba. Para el período 1, por ejemplo, se obtuvo $Y_1 = 1$ (se hace un pedido), $X_{11} = 35$, $X_{12} = 165$, $X_{13} = 40$ y $X_{1j} = 0$ para $j = 4, 5, 6, \dots, 12$. O sea que el pedido total del período 1 se hace por 240 unidades, de las cuales 35 se consumen en el mismo período en el que se piden, 165 se guardan hasta el período 2 y 40 unidades se guardan para satisfacer la demanda del período 3. Nótese que en los períodos 2 y 3 obviamente no se hace pedido alguno ($Y_2 = Y_3 = 0$) y se vuelve a pedir en el período 4 ($Y_4 = 1$), pero solamente para la demanda de este mismo período ($X_{44} = 335$, $X_{4j} = 0$ para $j = 5, 6, 7, \dots, 12$). En forma análoga se interpreta el resultado de las demás variables de decisión. La solución óptima se resume en la tabla 4.7. Estos mismos resultados se pueden encontrar mediante otros programas de interés académico, como el *WinQSB*.

Tabla 4.7. Solución óptima del ejemplo 4.4 mediante la aplicación del modelo de optimización entero-mixto

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Inv. inicial	0	205	40	0	0	325	0	141	0	0	0	124	—
+ Pedido	240	—	—	335	725	—	371	—	330	395	724	—	3.120
— Demanda	35	165	40	335	400	325	230	141	330	395	600	124	3.120
= Inv. final	205	40	0	0	325	0	141	0	0	0	124	0	835

En este caso, los indicadores óptimos vienen dados por:

$$\begin{aligned}
 \text{Costos totales de preparación} &= 7 \text{ pedidos} \times \$300/\text{pedido} &= & \$ & 2.100,0 \\
 \text{Costos de llevar el inventario} &= 835 \text{ unid mes} \times \$80/\text{unid} \\
 &\quad \times 0,01 \$/\$ \text{ mes} &= & \$ & 668,0 \\
 \text{Costo total relevante } CTR \text{ óptimo} &&= & \$ & \underline{\underline{2.768,0}}
 \end{aligned}$$

Inventario promedio (convención final de mes) = $835/12 = 69,58$ unidades.

Rotación del inv. = Demanda anual/Inv. promedio = $3.120/69,58 = 44,84$ veces/año

La tabla 4.8 muestra el resumen de los resultados del ejemplo 4.4, de acuerdo con los diversos métodos de solución de este problema, ordenados de mayor a menor, resultado del costo total relevante. Se han adicionado algunos otros resultados, como, por ejemplo, un solo pedido al comienzo para todo el año, el cual, evidentemente, conduciría a la peor situación en este ejemplo. Una observación muy importante es que, dada la brecha significativa con respecto del óptimo de algunos métodos de solución, los cuales, en ocasiones, se utilizan en la práctica, es muy importante justificar la aplicación de uno u otro método.

Tabla 4.8. Comparación de las soluciones obtenidas mediante los diversos métodos (ejemplo 4.4)

MÉTODO DE SOLUCIÓN	CTR (\$/año)	% del óptimo	Inv. Promedio	Rotación
Un solo pedido al comienzo del horizonte	16,620,8	500,46%	1.700,08	1,84
Pedido igual al EOQ y ajustado al final del horizonte	4.348,0	57,08%	202,92	15,38
Lote por lote (Pedido para un solo período siempre)	3.600,0	30,06%	0,00	No definida
Pedido para tres meses	3.555,2	28,44%	245,33	12,72
Pedido para períodos enteros aproximado al EOQ	3.548,0	28,18%	150,83	20,69
EOQ redondeado a períodos enteros (2 meses)	2.988,0	7,95%	123,75	25,21
Mediante el modelo matemático (Solución óptima)	2.768,0	0,00%	69,58	44,84

El modelo matemático puede ser muy útil, incluso en aplicaciones reales. Precisamente, este modelo es adaptado en la práctica por Gutiérrez (2006). Una vez se construye la hoja electrónica asociada al modelo, se pueden analizar diversas variaciones del mismo e involucrar otro tipo de restricciones. Por ejemplo, restricciones de producción en cada período, tamaños de lote mínimo y máximo por período, capacidades, etc. (problemas No. 15 y 16 de los ejercicios adicionales y de repaso de este capítulo).

El tópico de demanda determinística tratado hasta aquí ha sido motivo de amplia investigación. Se le conoce también como el problema del tamaño de lote (*Lot Sizing*). Por ejemplo, una reciente revisión de literatura sobre el tema incluye los problemas de tamaño de lote de un solo ítem, como el tratado anteriormente; el del tamaño de lote de un solo ítem con restricciones de capacidad (el cual puede ser manejado por el modelo matemático presentado en esta sección) y el del tamaño de lote con demanda dinámica determinística para múltiples ítems [Robinson *et al.* (2009)]. Los autores presentan diversidad de modelos matemáticos que han sido tratados en la literatura. Otra variación del modelo presentado es tratada en Dawande *et al.* (2009), donde se implementan dos tipos de restricciones al modelo. En el primer tipo, se impone una restricción de capacidad de almacenamiento de dos productos al final de cada período; en el segundo, ambos productos tienen un costo conjunto y costos individuales de alistamiento.

Ejercicios 4.3

- La demanda de cierto componente en unidades para el próximo año se ha estimado como sigue:

Enero	32	Julio	7
Febrero	29	Agosto	39
Marzo	40	Septiembre	50
Abril	86	Octubre	78
Mayo	11	Noviembre	29
Junio	38	Diciembre	80

El costo de cada componente es de \$1.250, el costo de ordenamiento se ha estimado en \$3.500/pedido y el costo de mantener el inventario es del 24% anual. Determine el plan de pedidos correspondiente, el CTR, el inventario promedio y la rotación, utilizando las tres reglas del *EOQ* y las siguientes políticas: lote por lote, pedidos para dos períodos y pedidos para tres períodos. Encuentre la solución óptima y compare los resultados.

2. Considere un ítem con el siguiente patrón de demanda determinística, variable con el tiempo:

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Demanda	80	60	180	80	0	0	180	130	10	110	80	230

Suponga que el patrón de demanda termina en la semana 12. El costo de llevar el inventario es de \$115 por cada unidad, por cada semana de estar en inventario. El costo fijo de pedido es de \$35.000. Se considera que el inventario inicial es cero, al igual que el tiempo de reposición. Aplique los siguientes criterios para determinar los tamaños de pedidos y compare los resultados de costos totales y rotación del inventario:

- a) Ordenando cada vez para cuatro períodos consecutivos, iniciando con la semana 1.
 - b) Utilizando los tres métodos vistos relacionados con el *EOQ*.
 - c) El modelo matemático de optimización propuesto en este capítulo.
 - d) Un solo pedido, al comienzo de la semana 1, para satisfacer los requerimientos de las 12 semanas.
 - e) Un pedido al comienzo de cada semana, igual a su demanda (lote por lote).
3. Repita el problema anterior con el siguiente patrón de demanda para 20 períodos de un ítem que está siendo retirado del mercado.

Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Demanda	850	480	304	225	145	100	81	52	38	30

Período	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Demanda	17	13	8	5	5	4	3	2	2	1

Suponga que $A = \$6.000/\text{pedido}$, $v = \$28.000/\text{unidad}$ y $r = 2\%$ por período. Analice los resultados para este patrón de demanda.

- Repita el problema No. 2 para un componente que presenta demanda intermitente, de acuerdo con la siguiente información:

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Demanda	80	5	0	23	0	0	18	0	0	0	180	70

Asuma que $A = \$5.000/\text{pedido}$, $v = \$87.550/\text{unidad}$ y $r = 0,75\%$ semanal. Analice los resultados para este patrón de demanda.

- Consideré el modelo de programación lineal mixta presentado en este capítulo. Implemente cambios en el modelo, de tal forma que se pueda tener en cuenta un inventario inicial conocido I_0 , en general, diferente de cero, e igualmente, un inventario final requerido al final del período N , el cual puede ser diferente de cero.
- Consideré el ejemplo 4.4. Formule un modelo de programación lineal mixta semejante al presentado en este capítulo, pero asumiendo que se trata de un ítem perecedero que no se puede tener en inventario por más de dos períodos (o sea que, por ejemplo, la variable X_{13} debería ser cero). Determine la nueva solución óptima del problema.

Métodos heurísticos clásicos

Dadas las desventajas del método de Wagner-Whitin y la relativa complejidad de los modelos de programación matemática, es útil describir algunas técnicas heurísticas que han demostrado alta eficiencia y eficacia en la solución de problemas prácticos de inventarios con demanda variable con el tiempo. Su importancia radica en su facilidad de comprensión y su simplicidad para ser implementados.

El heurístico de Silver-Meal

Este método fue desarrollado por Silver y Meal (1973) y ha demostrado un funcionamiento satisfactorio cuando el patrón de demanda es muy variable, es decir, cuando el método del lote económico de pedido y otros métodos heurísticos no producen buenos resultados. El criterio básico de este método es el de minimizar los costos de ordenamiento y mantenimiento del inventario *por unidad de tiempo*. Como antes, las cantidades de pedido están restringidas a lo necesario para cubrir un número entero de períodos. Sea $CTR(T)$ el costo total relevante asociado con un pedido que dura T períodos. El costo total relevante por unidad de tiempo, $CTRUT(T)$, será entonces $CTR(T)/T$, o más precisamente:

$$CTRUT(T) = \frac{CTR(T)}{T} = \frac{A + \text{costos de mantenimiento del inventario}}{T} \quad (4.14)$$

El método inicia con el período 1, para el cual $CTR(1)/1 = A/1 = A$; continúa con el período 2, para el cual $CTR(2)/2 = [A + D_2vr(1)]/2$; luego, con el período 3, para el cual $CTR(3)/3 = [A + D_2vr(1) + D_3vr(2)]/3$; y así sucesivamente hasta que se observe que el costo por unidad de tiempo se incrementa de un período a otro. En este momento se detiene el proceso y se define la cantidad a ordenar en el período 1, igual a la suma de las demandas de los períodos para los cuales no se incrementó el costo total relevante por unidad de tiempo. El proceso comienza de nuevo a partir del período T para el cual se incrementó el $CTR(T)/T$ por primera vez, y se continúa de esta manera hasta el final del horizonte de planeación. Este método no garantiza la optimalidad porque puede verse atrapado en un mínimo local, pero ha demostrado tener muy buenos resultados en la práctica.

Los cálculos iniciales de este heurístico para el ejemplo 4.4 se muestran en la tabla 4.9. Se debe comprobar que, para este ejemplo, el algoritmo de Silver-Meal produce la solución óptima.

Tabla 4.9. Cálculos iniciales del algoritmo de Silver-Meal para el ejemplo 4.4.

T	A	$D_2vr(1)$	$D_3vr(2)$	$D_4vr(3)$	Suma de la fila	Suma acumulada	Suma acumulada/ T
1	300				300,00	300,00	300,00
2		165(0,8)(1)			132,00	432,00	216,00
3			(40)(0,8)(2)		64,00	496,00	165,33
4				(335)(0,8)(3)	804,00	1.300,00	325,00

Como puede observarse, el primer período para el cual el costo total relevante por unidad de tiempo se incrementa, es el mes 4. Por lo tanto, el método sugiere ordenar en el mes 1 la demanda correspondiente a los meses 1, 2 y 3. El proceso se reinicia a partir del mes 4. Se sugiere también completar los cálculos hasta el mes 12, y comprobar que este algoritmo produce la solución óptima mostrada en la tabla 4.7.

Cuando la demanda no es muy variable, los resultados de este método y el del *EOQ* no difieren significativamente. Para determinar cuándo utilizar uno u otro método, recuérdese el coeficiente VC definido anteriormente en la Ec. (4.11). Así, se ha encontrado, a través de estudios experimentales, lo siguiente:

- Si $VC < 0,2$, entonces puede utilizarse el método del *EOQ* con la demanda promedio sobre el horizonte de planeación, ya que produce buenos resultados.
- Si $VC \geq 0,2$, entonces se sugiere utilizar el heurístico de Silver-Meal.

La aplicación del heurístico de Silver-Meal en casos para los cuales el patrón de demanda decrece rápidamente con el tiempo a través de varios períodos, o cuando existe un gran número de períodos demanda igual a cero, no produce buenos resultados. Para estos casos, por lo tanto, sería recomendable utilizar el modelo matemático previamente descrito.

El manejo de descuentos por cantidad en el heurístico de Silver-Meal

Una extensión importante del heurístico de Silver-Meal es la de permitir el manejo de descuentos por cantidad. Considérese, por ejemplo, el mismo caso presentado anteriormente, donde el valor unitario del ítem bajo consideración viene dado por:

$$\text{Valor del ítem} = \begin{cases} v & \text{si } 0 \leq Q < Q_1 \\ v(1-d) & \text{si } Q_1 \leq Q \end{cases}$$

Bajo estas condiciones, no necesariamente debe ordenarse una cantidad tal que cubra los requerimientos de un número entero de períodos, ya que es posible que la mejor política sea ordenar una cantidad igual al punto de quiebre, Q_1 , la cual, no necesariamente, cubre una cantidad entera de períodos. Lamarre y Baier (1981) desarrollaron una variante del algoritmo de Silver-Meal para tener en cuenta esta consideración, a través de extensiva experimentación. Sea T_1 el número de períodos (no necesariamente entero) que podría cubrir la cantidad Q_1 , se calcula entonces los costos totales por unidad de tiempo para T_1 :

$$CTRUT(T_1) = \frac{A}{[T_1]} + \frac{vr \sum_{j=1}^{[T_1]} (j-1)D_j + vr(T_1) \left(Q_1 - \sum_{j=1}^{[T_1]} D_j \right) - Q_1 vd}{T_1} \quad (4.15)$$

donde $[T_1]$ es la parte entera de T_1 (por ejemplo, si $T_1 = 4,6$, entonces $[T_1] = 4$) y d es la fracción de descuento obtenida por cantidades iguales o superiores a Q_1 . Igualmente, deben calcularse los costos por unidad de tiempo para cantidades enteras de T , de acuerdo con:

$$CTRUT(T) = \begin{cases} \frac{A + vr \sum_{j=1}^T (j-1)D_j}{T} & \text{para } T < T_1 \\ \frac{A + vr \sum_{j=1}^T (j-1)D_j - vd \sum_{j=1}^T D_j}{T} & \text{para } T \geq T_1 \end{cases} \quad (4.16)$$

Finalmente, se escoge T_1 , o el mejor valor de T , dependiendo del mínimo costo total por unidad de tiempo, calculado de acuerdo con las Ec. (4.15) y (4.16). Bregman y Silver (1993) presentaron una modificación del heurístico de Silver-Meal para manejar compras con descuentos bajo un ambiente MRP. Más recientemente, Pujawan y Silver (2008) consideran la versión de este heurístico con demanda normal, cuyos parámetros pueden cambiar con el tiempo, considerando el aumento en el tamaño de la orden para protegerse contra la variabilidad de la demanda.

El heurístico del balanceo de períodos

El criterio utilizado en este método heurístico es el de escoger el número de períodos a satisfacer con el pedido, de tal forma que el costo total de mantenimiento del inventario se aproxime lo más posible al costo fijo de ordenamiento. Para el ejemplo 4.4, la tabla 4.10 muestra los cálculos para los cuatro primeros períodos.

Tabla 4.10. Resultados de la aplicación del heurístico de balanceo de períodos (ejemplo 4.4)

Período T	Costos de mantenimiento del inventario
1	0
2	$D_2vr = \$132,00 < A = \300
3	$\$132,00 + D_3vr(2) = \$196,00 < \$300$
4	$\$196,00 + D_4vr(3) = \$1.000,00 > \$300$

Como \$196,00 está más cerca de $A = \$300$ que lo que está \$1.000,00, entonces el pedido a realizar en el período 1, de acuerdo con este heurístico, debe cubrir la demanda de los tres primeros meses. El proceso continúa de manera análoga, partiendo del período 4. Se recomienda comprobar que mediante este método se obtiene un costo total relevante de \$2.840,80, lo cual lo hace menos eficiente que el método de Silver-Meal aplicado al mismo ejemplo, pero más eficiente que otros métodos presentados anteriormente.

Ejercicios 4.4

1. Aplique el algoritmo de Silver-Meal y el de balanceo de períodos a los problemas No. 1 y 2 de los ejercicios 4.3. Compare con los resultados anteriores.
2. El heurístico de Silver-Meal escoge el valor de T que minimiza el costo total relevante por unidad de tiempo. Así, se escoge el valor de T que minimiza:

$$\frac{A + vr \sum_{j=1}^T (j-1)D_j}{T}$$

Otro método heurístico es denominado como el de *mínimo costo unitario*, y consiste en seleccionar el tamaño del pedido para cubrir la demanda de T períodos, de tal forma que se minimice el costo total relevante *por cada unidad incluida en el pedido*.

- a) Desarrolle una expresión similar a la del método de Silver-Meal para este heurístico.
- b) Aplique este método al siguiente caso (sólo para determinar el pedido correspondiente al período 1):

$$A = \$7.000; v = \$4.000/\text{unidad}; r = 0,03\$/\text{(\$ mes)}$$

Período j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Demanda D_j	300	250	500	600	380	420	295	750	285	85

- c) Este método difiere significativamente del de Silver-Meal, dependiendo del valor de la demanda del primer período, D_1 . Si la demanda D_1 es mucho más grande en comparación con el resto de las demandas para el horizonte de planeación, ¿qué efecto tendría en cada uno de estos dos métodos heurísticos?

3. Aplique el método heurístico de Silver-Meal al siguiente problema:

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Demandas	48	72	98	115	108	102	97	85	135	80	70	50

Donde $A = \$20.000; v = \$2.000/\text{unidad}$ y $r = 0,025\$/\text{(\$ mes)}$. ¿Produce el heurístico la solución óptima en este caso? Sustente su respuesta.

4. Discuta la lógica de las Ec. (4.15) y (4.16). Aplique el método de Silver-Meal con descuentos al caso del ejemplo 4.4 para determinar el tamaño del pedido en el primer mes si el proveedor da un descuento del 5% sobre todas las unidades para compras mayores o iguales que $Q_1 = 600$ unidades.

EJERCICIOS ADICIONALES Y DE REPASO

1. Considere el caso básico del EOQ , pero, además del costo normal de mantenimiento del inventario basado en el inventario promedio, se cobra anualmente w \$/m³ de espacio que ocupa cada ítem. Si h es el volumen en m³ que ocupa una unidad del ítem y se asume que hay suficiente espacio para almacenar el inventario máximo, encuentre la ecuación que determina correctamente el valor del nuevo EOQ .
2. Un panadero está controlando su inventario de harina de trigo y ha reunido los siguientes datos respecto de este ingrediente (asuma que el panadero trabaja 52 semanas/año y que 1 semana = 7 días):

Demanda semanal d = 42 bultos de 50 kg cada uno (constante)
Tiempo de reposición LT = 3 días (constante)
Costo de inventario r = 27% anual
Precio de compra v = 90.000 \$/bulto
Costo de ordenamiento A = 5.000 \$/orden

- a) Diseñe un método de control del inventario de este ítem basado en el EOQ y en el tiempo de reposición (recuerde que sólo se pueden comprar bultos completos de harina). Escriba claramente la política de control del inventario. Calcule los costos anuales de ordenamiento y de mantenimiento del inventario, y el costo total relevante.
 - b) Debido a una escasez, el tiempo de reposición aumenta a 6 días. ¿Qué problema se genera respecto de la política de control diseñada en a)? Proponga ajustes adecuados en dicha política para que funcione.
3. Usted posee una planta productora en Cali, donde fabrica bolsas de empaque biodegradables, y ha hecho un contrato con un proveedor en Pereira que le suministra la principal materia prima para las bolsas. La demanda de esta materia prima es de 300 rollos/semana. El valor de este ítem en Pereira es de \$80.000/rollo. De acuerdo con el contrato, cada vez que se pide, se incurre en un costo fijo de transporte de \$100.000 independiente del tamaño del envío, más un costo

variable de transporte de \$8.000/rollo transportado. Otros costos fijos de pedido pueden ser ignorados. Si usted mantiene inventario de materia prima en su planta en Cali y su tasa $r = 22,2\%$ anual, determine el tamaño de lote económico a comprarle al proveedor (asuma que 1 año = 52 semanas).

4. En su fábrica de carteras, usted produce un modelo que necesita un tipo especial de cremallera. La demanda constante mensual de carteras es de 180 y *cada una utiliza dos cremalleras*. Actualmente, le compra las cremalleras a un proveedor que le pone en su planta cada una en \$12.000. Cada orden tiene un costo fijo de \$22.500, incluyendo algunas actividades de recepción que deben hacerse. Su tasa r ha sido estimada en 2,4% mensual. A usted le están ofreciendo arrendarle una máquina muy moderna, en \$2.000.000 mensuales (incluyendo el mantenimiento a que haya lugar) para que produzca sus propias cremalleras. La máquina puede producir hasta 500 cremalleras/mes. El costo de producción, incluyendo algunos costos indirectos relacionados, se ha estimado en 5.400 \$/cremallera y el alistamiento de la máquina para cada orden es de \$163.200.
 - a) Determine si debería o no aceptar la oferta de la máquina y el tamaño de lote óptimo de compra o de producción, según la opción escogida, al igual que el costo total relevante asociado.
 - b) Investigue el efecto que tiene sobre el tamaño de lote de producción, y sobre el costo total relevante, el hecho de utilizar la máquina a una tasa de producción menor que 500 cremalleras/mes. Comente acerca de los efectos prácticos de este resultado.
5. Un fabricante de tornillos produce un ítem cuya demanda mensual es de 2.000 unidades. La compañía puede producir 120 unidades/día y hay 25 días/mes de trabajo disponibles (asuma que 1 mes = 30 días). El alistamiento de la línea de producción cuesta \$76.000 y el costo de producción se estima en \$3.800/unidad. La tasa del costo de mantenimiento del inventario por mes es del 2,67%. Determine el tamaño óptimo de producción, el costo total relevante, el tiempo que tarda cada ciclo de producción y el número de veces que debe producirse por año.
6. Un comerciante calcula que el costo de ordenamiento de un ítem es de \$5.000/orden. El costo de llevar el inventario es del 30% anual y la demanda anual se estima en 24.000 unidades. El valor unitario del ítem sin descuento es de \$600. Un proveedor del ítem está ofreciendo el siguiente esquema de descuentos sobre todas las unidades:

Tamaño de la orden (Unidades)	Descuento (%)
Menos de 1.000 unidades	0,0
1.000 - 1.999 unidades	2,0
2.000 - 5.999 unidades	3,0
6.000 - 11.999 unidades	7,0
12.000 unidades o más	10,0

- a) Determine el tamaño óptimo de pedido.
- b) Si el comerciante desea que su tamaño óptimo de pedido sea para seis meses de demanda, ¿cuál descuento mínimo le debería solicitar al proveedor?
7. Asuma que todos los supuestos establecidos para el desarrollo de la fórmula del *EOQ* siguen siendo válidos, con la excepción de que ahora se aceptan órdenes pendientes. O sea, que deliberadamente se puede hacer que el nivel de inventario tenga valores negativos antes de ordenar y cualquier orden pendiente es satisfecha con la reposición que llega. Ahora hay, por lo tanto, dos variables de decisión: Q y s , donde s es el nivel debajo del inventario cero en el cual se ordena.
- a) Grafique esta situación en una figura similar a la figura 4.2 y encuentre el nivel de inventario promedio y el nivel promedio de órdenes pendientes.
- b) Suponga que hay un costo B_2v por cada unidad pendiente de ser entregada, independiente del tiempo que tarda en entregarse, donde B_2 es un factor adimensional. Encuentre el valor óptimo de Q y s como función de A , D , v , r y B_2 .
- c) Repita la parte b) pero con un costo B_3v por unidad pendiente de entregar, *por unidad de tiempo*. Las unidades de B_3 son equivalentes a las unidades de r .
- d) ¿Considera útil los análisis hechos en los literales anteriores para la aplicación práctica del control de inventarios?
8. El caso del *EOQ* con descuentos analizado en este capítulo, corresponde a la situación en la cual se obtienen descuentos sobre *todas las unidades* que se van a adquirir. Un caso diferente es aquél en el cual los descuentos sólo operan sobre las unidades en exceso sobre los puntos de quiebre. Este caso se conoce como *descuento incremental*. Desarrolle un algoritmo que le permita determinar la cantidad óptima de pedido. Tenga en cuenta que aquí debe considerarse es el cos-

- to unitario promedio en cada intervalo de descuentos (Sugerencia: consulte, por ejemplo, la lectura adicional No. 1 de este capítulo).
9. Aplique el algoritmo del problema anterior para resolver el problema No. 6 de estos ejercicios, asumiendo que los descuentos mostrados son incrementales. Esto significa que, si se compran 1.500 unidades, entonces las primeras 999 cuestan \$600/unidad, y las 501 unidades siguientes tienen un descuento del 2%, quedando su costo en \$588/unidad. Compare los resultados.
10. Una empresa manufacturera puede producir un producto o comprarlo a proveedores locales. Si la compañía produce el ítem, incurre en un costo de alistamiento de \$46.000. El valor del producto final es de \$2.830/unidad, y la tasa de producción es de 500 unidades/día. Si el producto es comprado a proveedores locales, su costo es de \$2.900 y el costo fijo de hacer un pedido es de \$6.900/orden. En cualquier caso, la empresa considera un costo de mantenimiento del inventario de 0,24 \$/(\$·año). La demanda aproximada del producto es de 10.000 unidades/año.
- a) Desde el punto de vista del costo total, compuesto por el costo de alistamiento (u ordenamiento), más el costo de mantenimiento del inventario, ¿cuál alternativa debe escoger la empresa?
- b) ¿Cuál es el costo máximo que los proveedores locales deberían fijar al producto para que su empresa escogiera ésta como su mejor alternativa?
11. Un producto es comprado y recibido por lotes de tamaño Q . La demanda del producto es constante, igual a 10.000 unidades/año; el costo fijo de emitir una orden es de \$148.000/orden y el costo de mantenimiento del inventario es del 25% anual. Esta tasa no incluye el costo de arrendamiento del espacio en la bodega, el cual se basa en el inventario máximo, y se calcula en la siguiente forma. Si se almacenan hasta 500 unidades, se cobran \$2.300 por unidad y por año. Por cada unidad almacenada, en exceso de 500 unidades, se pagan \$3.500 por unidad y por año. Calcule el tamaño económico de pedido.
12. Una empresa produce un producto perecedero que se deteriora almacenado. Se ha estimado que la vida útil del producto es de dos semanas. El sistema de producción es tal que se produce en lotes, de tal forma que el lote entero se completa y se adiciona al inventario de una sola vez, en forma instantánea. La demanda es constante a razón de 5.200 unidades/año; el costo de alistamiento es de \$920.000/lote y el costo de mantenimiento del inventario es del 20% anual. El

costo del producto es de \$230.000/unidad y no se aceptan faltantes de inventario. Determine la cantidad económica de pedido, sujeta a la restricción de duración máxima del producto.

13. En el problema No. 6 de los ejercicios 4.1 se mostró que si el EOQ se multiplica por un factor $(1 + f)$, el porcentaje de incremento en los costos variables totales es igual a $50f^2/(1 + f)$. Muestre que se obtiene este mismo resultado si el EOQ se multiplica por un factor $1/(1 + f)$.
14. Un analista de inventarios es responsable del manejo de una familia de productos con cientos de ítems, con un costo agregado anual de compra de $\$C$ y un costo anual variable agregado debido al costo de mantenimiento y ordenamiento del inventario de $\$V$. Los supuestos básicos del EOQ son válidos y se está utilizando el EOQ para definir las cantidades a comprar. Recientemente, el proveedor de los ítems hizo la propuesta al analista de doblar las cantidades actuales de pedido, ofreciendo un descuento sobre todas las unidades, de tal forma que todos los ítems dentro de la familia tendrían el mismo porcentaje de descuento, el cual es sujeto a futuras negociaciones. Estudie este problema y ayude al analista a tomar la decisión proveyéndole de una herramienta cuantitativa con relación al descuento mínimo que debería obtener para aprobar la propuesta.
15. Considere de nuevo el ejemplo 4.4. Suponga que existen ahora diferencias entre los costos variables de producción en cada mes, debido a disponibilidad de materias primas y a otros factores. La información se resume en la tabla siguiente:

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Demanda	35	165	40	335	400	325	230	141	330	395	600	124	3.120
Costo de Producción [\$/unidad]	1,0	1,0	1,1	1,3	1,3	1,3	1,7	1,4	1,3	1,2	1,0	1,0	

Encuentre la solución óptima de este problema mediante un modelo de programación lineal entera-mixta (Sugerencia: modifique el modelo desarrollado en este capítulo).

16. Formule y resuelva un modelo de programación entera-mixta, similar al desarrollado, con la siguiente condición adicional. Debido a un problema de presupuesto, en ninguno de los meses se puede pedir una cantidad superior a 600 unidades. Note, de la solución óptima mostrada en la tabla 4.7, que los pedidos de los meses 5 y 11 no cumplen con esta condición y, por lo tanto, esta solución no sería factible y, por ende, no es la óptima. ¿En qué porcentaje se incrementa el CTR óptimo bajo esta nueva condición?

17. Considere de nuevo el modelo matemático desarrollado en este capítulo. Se pide generalizar el modelo para n ítems, de acuerdo con lo expresado en los siguientes literales.
- Suponga que existe solamente un costo de ordenamiento para cada ítem k , a_k . Se incurre en este costo en cada período donde se ordene el ítem k . ¿Qué característica especial tiene este problema?
 - Considere ahora que, adicionalmente al costo de ordenamiento individual a_k , existe un costo de ordenamiento conjunto A_0 en el que se incurre en cada período si se ordena cualquiera de los n ítems en dicho período. ¿Por qué este problema es más complejo que el correspondiente al literal a)?
 - Considera que el modelo matemático correspondiente al literal b), adicionado con restricciones de capacidad de compra o producción de los n ítems en cada período, sería un modelo útil en la práctica? Discuta acerca de la posibilidad de resolver este modelo cuando el número de ítems aumenta.

LECTURAS ADICIONALES

CHOPRA y MEINDL (2008): capítulo 10 (pp. 275-290) (Los autores presentan un excelente complemento sobre las políticas de descuentos sobre todas las unidades y descuentos incrementales y sobre promociones).

SILVER *et al.* (1998): capítulo 6 (pp. 198-231) (Esta parte profundiza todo lo estudiado en el presente capítulo).

SIPPER y BULFIN (1998): capítulo 6 (pp. 228-273) (Esta parte trata algunos de los temas vistos aquí de forma muy didáctica).

NARASIMHAN *et al.* (1996): capítulo 11 (pp. 364-386) (Esta parte ilustra aspectos adicionales de los tamaños de lote estudiados en la sección 4.5, dentro del ambiente MRP).

PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA

CAPÍTULO 5

CONTROL DE INVENTARIOS CON DEMANDA ALEATORIA

INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se trató el caso de la demanda determinística. Se analizó también, en cierta forma, la sensibilidad de los costos totales relevantes con respecto a posibles cambios en algunos parámetros y variables, demostrándose que los sistemas analizados no son significativamente sensibles a dichos cambios. Sin embargo, dentro del costo total relevante se ignoró un elemento que es significativo en la administración de sistemas reales de inventarios. Este elemento es el *costo de faltantes de inventario* o *stockout*, como comúnmente se le conoce en inglés.

En este capítulo se analizan los sistemas de control de inventarios cuando la demanda es probabilística. Se concentra la atención en aquellos casos en los cuales la *demand promedio* permanece aproximadamente constante a lo largo del tiempo, aunque ya se demostró en el capítulo 3 que un sistema de pronósticos bien diseñado puede cambiar dinámicamente los parámetros que fluctúen a lo largo del tiempo.

Un concepto clave que se retoma en este capítulo es el de *inventario de seguridad (Safety Stock)*, el cual protege contra las posibles fluctuaciones de la demanda y de los tiempos de reposición. Además, se definirá el concepto de servicio al cliente y diversas formas de tratar los costos de faltante de inventario, los cuales han demostrado ser muy difíciles de estimar.

También se usa una notación semejante a la utilizada por Silver *et al.* (1998) por considerarse de uso muy frecuente a nivel local e internacional y porque la mayoría de los parámetros y de las variables coinciden con sus correspondientes nombres en español.

DEFINICIONES BÁSICAS

Definiciones acerca del nivel de inventario

Es necesario definir claramente algunos conceptos sobre el inventario. Es tan importante el inventario físico visible en las estanterías de la bodega o del almacén, al cual llamaremos *inventario a la mano*, como el *inventario efectivo o posición del inventario* (*Inventory Position*), el cual puede considerarse como un inventario virtual y se define como:

$$\begin{aligned} \text{Inventario efectivo} = & \text{ Inventario a la mano} \\ & + (\text{Pedidos pendientes por llegar de los proveedores o del sistema de producción propio}) \\ & - (\text{Requisiciones pendientes de entregar o comprometidas con los clientes}) \end{aligned}$$

El inventario efectivo es un concepto fundamental para el control de inventarios, ya que es con base en él que se deben tomar las decisiones de control, como cuándo y cuánto pedir.

Se denomina *inventario neto* a la diferencia entre el inventario a la mano y las requisiciones pendientes con los clientes. Por otra parte, el *inventario de seguridad* es el inventario neto promedio justo antes de que llegue un pedido. Un valor positivo del inventario de seguridad permite tener unidades en inventario para responder a demandas mayores que la demanda promedio durante el tiempo efectivo que tarda en llegar un pedido, o sea, durante el tiempo de reposición. El inventario de seguridad depende de las fluctuaciones de la demanda durante el tiempo de reposición, o, equivalentemente, de la desviación estándar de los errores del pronóstico de la demanda total sobre el tiempo de reposición. Intuitivamente, esto se explica porque si los pronósticos fueran absolutamente seguros, entonces no habría razón para tener inventarios de seguridad, así se tuviera demanda determinística variable con el tiempo como la tratada en el capítulo anterior.

Órdenes pendientes o ventas perdidas

Cuando ocurre una ruptura de inventario, existen dos posibilidades extremas con respecto a lo demandado por el cliente. Primero, el cliente puede aceptar que su orden completa sea clasificada como requisición pendiente (*backorder*), y esperar a que sea satisfecha. Segundo, el cliente puede cancelar la orden completa y la venta total se perdería. Ambas situaciones ocasionan costos adicionales para la organización, ya que, en el primer caso, se incurre en gastos adicionales para cumplir con la orden urgentemente y, en el segundo, se deja de percibir la utilidad neta de la venta perdida, más otros costos intangibles como pérdida de imagen e, incluso, pérdida de clientes.

En la práctica, es más común encontrar situaciones intermedias entre los dos extremos descritos, como la cancelación parcial de una orden por parte del cliente. Todos los métodos desarrollados para la administración de inventarios tienen en cuenta los costos de uno u otro extremo, pero no tratan aquellas situaciones, debido principalmente a que la estimación de los costos de faltantes de inventario para dichos casos se torna muy difícil. Afortunadamente, si se trabaja a niveles de servicio muy altos para el cliente, la ocurrencia de faltantes de inventario no es muy común y, por lo tanto, el sistema no es muy sensible a cambios en estos costos. De hecho, en las cadenas de abastecimiento actuales es imprescindible tener niveles de servicio muy altos.

Preguntas básicas para el control de inventarios

Como se explicó en el capítulo 2, hay tres preguntas claves a responder en cualquier sistema de control de inventarios:

- *¿Con qué frecuencia* debe revisarse el nivel de inventario?
- *¿Cuándo* debe ordenarse?
- *¿Qué cantidad* debe ordenarse en cada pedido?

Para el caso de demanda determinística, la primera pregunta es trivial porque si se conoce el nivel de inventario en cualquier instante, se puede determinar dicho nivel en cualquier otro instante dentro del horizonte de planeación. Recuérdese que la segunda pregunta se respondió igualmente ordenando justamente cuando el nivel de inventario es cero y, finalmente, la última pregunta fue el motivo del desarrollo de todos los métodos del capítulo anterior, al calcular el tamaño óptimo de pedido para las diferentes situaciones.

Para el caso de la demanda probabilística, estas tres preguntas son mucho más difíciles de responder. La respuesta a la primera pregunta implica altos costos de revisión frecuente del nivel de inventario, comparados con los costos de mantener inventario de seguridad para responder a la demanda durante el tiempo de reposición. Para responder la segunda pregunta debe tenerse en cuenta el equilibrio entre los costos de mantenimiento de inventario al ordenar anticipadamente y el nivel de servicio que se quiere dar al cliente. Finalmente, la respuesta a la tercera pregunta tiene en cuenta de nuevo el costo total relevante y, para algunos casos, está muy relacionada con la segunda pregunta.

FORMAS DE REVISIÓN DEL NIVEL DE INVENTARIO

La primera pregunta anterior, relacionada con la frecuencia de revisión del inventario efectivo, se enmarca dentro de dos sistemas básicos: la *re-*

visión continua y la *revisión periódica*. Lo que trata de determinarse es el intervalo de tiempo que transcurre entre dos revisiones sucesivas del nivel de inventario efectivo. La tabla 5.1 compara los dos métodos en forma general.

Tabla 5.1. Comparación entre los sistemas de revisión continua y los de revisión periódica

Revisión continua	Revisión periódica
<ul style="list-style-type: none"> • Es muy difícil en la práctica coordinar diversos ítems en forma simultánea. 	<ul style="list-style-type: none"> • Permite coordinar diversos ítems en forma simultánea, lográndose así economías de escala significativas, por ejemplo, cuando se le compran al mismo proveedor.
<ul style="list-style-type: none"> • La carga laboral es poco predecible, ya que no se sabe exactamente el instante en que debe ordenarse. 	<ul style="list-style-type: none"> • Se puede predecir la carga laboral con anticipación a la realización de un pedido, ya que se sabe cuándo va a ocurrir.
<ul style="list-style-type: none"> • La revisión es más costosa que en el sistema periódico, especialmente para ítems de alto movimiento. 	<ul style="list-style-type: none"> • La revisión es menos costosa que en la revisión continua, ya que, en general, es menos frecuente.
<ul style="list-style-type: none"> • Para ítems de bajo movimiento, el costo de revisión es muy bajo, pero el riesgo de información sobre pérdidas y daños es mayor. 	<ul style="list-style-type: none"> • Para ítems de bajo movimiento, el costo de revisión es muy alto, pero existe menos riesgo de falta de información sobre pérdidas y daños.
<ul style="list-style-type: none"> • Asumiendo un mismo nivel de servicio al cliente, este sistema requiere un menor inventario de seguridad que el sistema de revisión periódica (Protección sobre L). 	<ul style="list-style-type: none"> • Asumiendo un mismo nivel de servicio al cliente, este sistema requiere un mayor inventario de seguridad que el sistema de revisión continua (Protección sobre $R + L$).

En la *revisión continua*, como su nombre lo indica, teóricamente se revisa el nivel de inventario en todo momento. Sin embargo, obviamente, esto no es posible en la práctica. Lo que se hace es revisar el inventario cada vez que ocurre una transacción (despacho, recepción, demanda, etc.) y por ello también se le conoce como “sistema de reporte de transacciones”. En un sistema de revisión continua es difícil coordinar las actividades de control y el control de varios ítems simultáneamente, pero este sistema necesita un menor inventario de seguridad que el sistema periódico, ya que la protección sólo debe hacerse sobre el tiempo de reposición L .

En los sistemas de *revisión periódica*, el nivel del inventario se consulta cada R unidades de tiempo. Obviamente, si $R = 0$, este sistema se convierte en uno de revisión continua. En general, este sistema permite coordinar las actividades y el control de ítems en forma simultánea, pero requiere de un mayor inventario de seguridad que el sistema continuo, ya que la pro-

tección debe garantizarse para un intervalo de tiempo igual al tiempo de reposición, más el intervalo de revisión ($R + L$).

TIPOS DE SISTEMAS DE CONTROL

Existen diversos tipos de sistemas probabilísticos de control de inventarios. Los cuatro más comunes se describen a continuación. La notación básica que se utiliza aquí es la siguiente:

s = Punto de reorden o de pedido; el nivel de inventario efectivo para el cual debe emitirse una nueva orden.

Q = Cantidad a ordenar en cada pedido.

R = Intervalo de revisión del nivel de inventario efectivo.

S = Nivel máximo de inventario efectivo hasta el cual debe ordenarse.

Sistema continuo (s, Q)

En este sistema, cada vez que el inventario efectivo es igual o menor al punto de reorden s , se ordena una cantidad fija Q . Se denomina también el “sistema de los dos cajones” (*two-bin system*), ya que se puede implementar físicamente teniendo dos cajones para el almacenamiento de un ítem. La demanda se satisface normalmente del primer cajón, hasta que se agota. Tan pronto sea necesario abrir el segundo cajón, el cual contiene tantas unidades como el punto de reorden s lo indique, se emite una orden por la cantidad fija Q establecida. Cuando llega la orden, el segundo cajón se llena de nuevo con las unidades equivalentes al punto de reorden s , y el resto de deposita en el primer cajón, iniciándose otro ciclo. Nótese que este sistema funciona adecuadamente siempre y cuando no exista más de un pedido de reposición pendiente en cualquier instante de tiempo. Obviamente, el sistema puede utilizarse ajustando la cantidad a pedir, Q , hasta que ésta sea considerablemente mayor que la demanda promedio durante el tiempo de reposición.

Las ventajas de este sistema son las siguientes:

- Es muy fácil de comprender, especialmente en la forma de “dos cajones” descrita anteriormente.
- La cantidad fija a ordenar Q minimiza posibles errores en el pedido y facilita la administración de los mismos.

Su principal desventaja ocurre cuando algunas transacciones individuales son de considerable magnitud. Así, es posible que la cantidad a ordenar Q no incremente el inventario efectivo por encima del punto de reorden s y un segundo pedido o más sean necesarios. En estos casos, sin embargo,

se pueden ordenar múltiples enteros de Q hasta que el nivel de inventario efectivo sea superior al punto de reorden s . La utilización del concepto de inventario efectivo es clave para el correcto funcionamiento de este sistema de control.

Sistema continuo (s, S)

En este sistema de control continuo, cada vez que el inventario efectivo cae al punto de reorden s , o por debajo de él, se ordena una cantidad tal que se incremente el inventario efectivo hasta el nivel de inventario máximo S . La cantidad a ordenar depende del inventario efectivo y del nivel máximo, por lo tanto, puede variar entre un período y otro. Si las transacciones de demanda son siempre unitarias, entonces este método de control es exactamente igual al anterior, ya que apenas el nivel de inventario efectivo sea igual a s , entonces se ordena una cantidad constante $Q = S - s$. Sin embargo, en la práctica, la demanda no ocurre necesariamente a niveles unitarios, y, por lo tanto, las cantidades a ordenar pueden ser variables. Este sistema se denomina usualmente un sistema *min-max*, ya que normalmente el nivel de inventario efectivo permanece entre un valor máximo S y un valor mínimo s , excepto por una caída de inventario temporal bajo el punto de reorden s cuando la demanda no ocurre en forma unitaria.

Se puede demostrar que el mejor sistema de control (s, S) tiene costos totales de pedido, mantenimiento de inventario y faltante de inventario menores o iguales que aquellos del mejor sistema (s, Q) . Sin embargo, el esfuerzo computacional para encontrar el mejor sistema (s, S) no justifica su aplicación para ítems clase B, e, incluso, para no todos los ítems clase A. Por ser muy fácil de comprender y lógico intuitivamente, este método se encuentra a menudo en la práctica, pero los parámetros de control se fijan usualmente de forma arbitraria. Una desventaja potencial del sistema (s, S) es su susceptibilidad de errores debido a que los tamaños de orden son variables.

Sistema periódico (R, S)

Este sistema se conoce también como el sistema del ciclo de reposición y se encuentra en organizaciones que no utilizan control sistematizado de los inventarios. Aquí, cada R unidades de tiempo, se revisa el inventario efectivo, y se ordena una cantidad tal que este inventario suba al valor máximo S .

La principal ventaja de este método es la de permitir el control coordinado de diversos ítems relacionados entre sí, bien sea por ser proporcionados por el mismo proveedor, por compartir un mismo sistema de transporte, por ser producidos en la misma línea de manufactura, o por cualquier otra razón que permita obtener economías de escala en la adquisición o

producción del pedido. Igualmente, el nivel máximo de inventario S puede ser ajustado fácilmente si el patrón de demanda tiende a cambiar con el tiempo. Su principal desventaja es que para un mismo nivel de servicio al cliente, este sistema presenta costos de mantenimiento del inventario mayores que aquellos de los sistemas continuos, ya que el nivel de inventario de seguridad requerido es mayor. Esto se da porque, entre un período de revisión y otro, no se tiene información acerca del inventario efectivo, pudiendo caer a niveles indeseables si no se tiene el inventario de seguridad adecuado y, por lo tanto, debe cubrir fluctuaciones de demanda para un tiempo igual al período de revisión R , más el tiempo de reposición L ($R + L$).

Sistema (R, s, S)

Este es una combinación de los sistemas (s, S) y (R, S) y podría considerarse como un sistema híbrido. Consiste en, cada R unidades de tiempo, revisar el inventario efectivo. Si es menor o igual que el punto de reorden s , entonces se emite un pedido por una cantidad tal que el inventario efectivo se recupere hasta un nivel máximo S . Si el nivel de inventario efectivo es mayor que s , no se ordena cantidad alguna hasta la próxima revisión que tendrá lugar en R unidades de tiempo. Nótese que el sistema (s, S) es un caso particular de este sistema, cuando $R = 0$. Análogamente, el sistema (R, S) es un caso especial de este sistema cuando $s = S - 1$.

Se ha demostrado en varios estudios que el mejor sistema (R, s, S) , bajo algunos supuestos generales con respecto del patrón de demanda y de los costos involucrados, produce un costo total relevante (ordenamiento + mantenimiento + faltante de inventario) menor que el mejor de cualquiera de los otros sistemas descritos. Sin embargo, el cálculo de los parámetros óptimos de control puede ser no indicado para los ítems clase B. Adicionalmente, este método es más difícil de comprender y aplicar, lo que lo hace más susceptible de errores humanos.

CRITERIOS PARA LA SELECCIÓN DE INVENTARIOS DE SEGURIDAD PARA ÍTEMES INDIVIDUALES

En el capítulo 3 se introdujo el tema del cálculo de inventarios de seguridad; aquí se precisan los principales conceptos y se amplía el análisis. Dada la variabilidad de la demanda y de los tiempos de reposición, es imposible garantizar que todos los pedidos sean satisfechos con el inventario a la mano. Si, por ejemplo, la demanda es inusualmente alta, deben darse acciones de emergencia para satisfacerla. Por el contrario, si la demanda resulta ser muy baja, se puede presentar un exceso de inventario. El arte del control de inventarios consiste en balancear estos dos extremos de tal forma que se tenga el nivel de servicio adecuado al cliente, con el mínimo

costo total posible. Dentro de este control, la determinación de los inventarios de seguridad es precisamente un punto fundamental. A continuación se exponen algunos métodos para este efecto.

Inventario de seguridad basado en factores constantes

Este método involucra la utilización de un factor constante de tiempo para determinar el inventario de seguridad de todos los ítems. Por ejemplo, se puede decir que se va a tener siempre al menos “dos semanas de inventario de seguridad”. También, se puede definir con base en un factor constante multiplicado por la demanda promedio del ítem bajo consideración. Este método tiene una *grave falla conceptual* al ignorar la variabilidad de la demanda del ítem respectivo. Wild (1997, p. 91), por ejemplo, indica claramente que “Basar la variabilidad (y el inventario de seguridad) en un cálculo de cubrimiento del inventario (refiriéndose a cuando se habla de inventario en términos de tiempo con base en la demanda promedio) es una metodología común pero incorrecta. Este método produce el balance de inventario completamente errado”. Así, esta política puede ser adecuada para ciertos ítems, pero totalmente insatisfactoria para otros, bien sea por exceso o por escasez de inventario.

En la figura 5.1 se ilustra un ítem cuya demanda promedio es de 100 unidades/semana y su tiempo de reposición $L = 1$ semana. Se ha decidido definir el inventario de seguridad como “una semana de inventario”, o sea igual a 100 unidades (o, en otras palabras, igual a “una vez la demanda promedio”). Por lo tanto, una vez se ordene un pedido, se tendrá un inventario igual a $s = 100$ unidades (promedio) + 100 unidades (inventario de seguridad) = 200 unidades para responder a la demanda de la semana siguiente, tiempo en el cual llegará el pedido solicitado. Todo parece estar bien, ya que se tiene “el doble del promedio” de la demanda en dicha semana. Sin embargo, al hacer esto, se ha ignorado por completo la variabilidad de la demanda, o sea, la distribución probabilística de la demanda sobre el tiempo de reposición.

La figura 5.1 muestra tres posibles distribuciones de la demanda durante el tiempo de reposición. Obsérvese que si la distribución de la demanda del ítem sobre el tiempo de reposición estuviera representada por la curva 1, entonces el riesgo de tener agotados, definido como la probabilidad de que la demanda durante el tiempo de reposición sea mayor que s , estaría dentro de los límites normales (probablemente entre un 2% y un 5% de acuerdo con la figura). Sin embargo, si la distribución representativa fuera la curva 2, la probabilidad de tener agotados sería prácticamente igual a cero (el área de riesgo no alcanza a notarse en la figura) y se estaría incurriendo en un exceso innecesario de inventario de seguridad. Finalmente, si la distribución estuviera representada por la curva 3, el riesgo de tener

agotados sobre el tiempo de reposición sería muy alto y se generaría agotados del ítem.

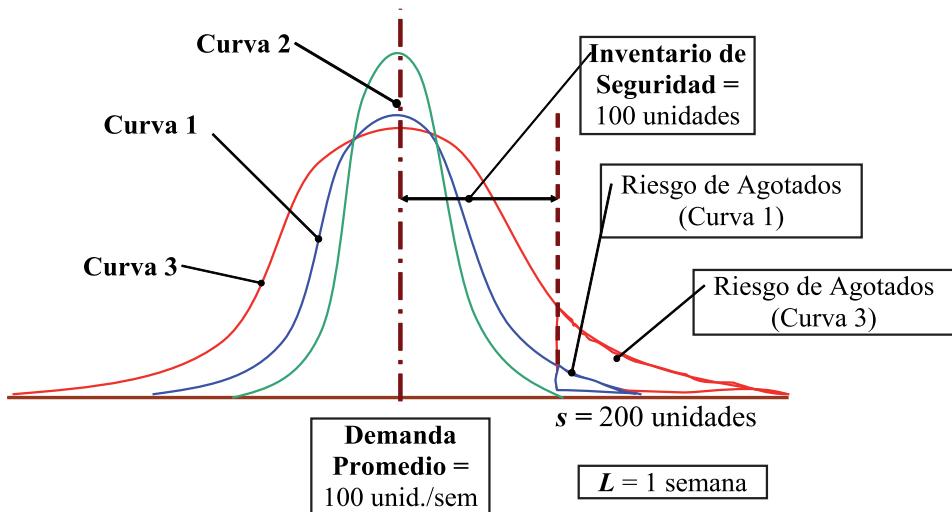


Figura 5.1. El error conceptual de definir el inventario de seguridad sólo con base en la demanda promedio o a través de cierto cubrimiento expresado en tiempo

El problema radica en que quien define el inventario de seguridad de esta forma ignora por completo la variabilidad de la demanda del ítem y sólo en algunas ocasiones ocurrirá la casualidad de “caer” en la curva 1. Lo que puede hacerse es balancear los inventarios de seguridad de tal forma que el dinero invertido en excesos de inventarios de ítems con poca variabilidad pueda invertirse en inventarios de seguridad de ítems de alta variabilidad. Así se logra aumentar los niveles de servicio sin invertir un peso adicional en inventarios o, incluso, disminuyendo costos, como se verá en el capítulo 6.

Se debe recordar que el cálculo del inventario de seguridad, basado en la desviación estándar de los errores del pronóstico, se puede calcular así:

$$\begin{aligned} \text{Inventario de seguridad } IS &= k\sigma_L = k\sigma_1\sqrt{L} \\ &\quad [\text{Sistema continuo } (s, Q)] \\ \text{Inventario de seguridad } IS &= k\sigma_{R+L} = k\sigma_1\sqrt{R+L} \\ &\quad [\text{Sistema periódico } (R, S)] \end{aligned} \tag{5.1}$$

Aquí es importante el papel que juega el sistema de pronósticos para estimar la desviación estándar de los errores del pronóstico σ_1 basada en un período básico del pronóstico. Se sugiere revisar el ejemplo 3.7 del capítulo 3. Posteriormente, se aplicarán las Ec. (5.1) para ilustrar los cálculos necesarios para implementar los sistemas de control de inventarios continuo y periódico.

Inventario de seguridad basado en el costo de faltantes

Aquí se tiene en cuenta el costo de faltante de inventario para definir el factor de seguridad k , de acuerdo con las diversas formas expuestas en el capítulo 2. Se asume que se conoce con cierta precisión cada uno de los costos de faltantes. Esto constituye una desventaja de esta forma de definición de inventarios de seguridad. La descripción detallada se presenta más adelante.

Inventario de seguridad basado en el servicio al cliente

Debido a que es extremadamente difícil estimar con precisión los costos de faltante de inventario descritos anteriormente, una alternativa puede ser la definición del nivel de servicio requerido. Las definiciones más comunes utilizadas con respecto al nivel de servicio son las que se describen a continuación. Esta forma de definir los inventarios de seguridad es la de más fácil aplicación en la práctica.

Probabilidad especificada (P_1) de no tener un faltante por cada ciclo de reposición

Esta definición es equivalente a la fracción de ciclos en los cuales no ocurren faltantes. El faltante de inventario ocurre cuando el inventario a la mano se reduce a cero. Como se expondrá más adelante, la especificación de un factor común P_1 para diversos ítems es equivalente al uso de un factor de seguridad k común para ellos. Este nivel de servicio (o su complemento $= 1 - P_1 =$ nivel de riesgo) es precisamente el que se representa en la figura 5.1.

Fracción o proporción especificada (P_2) de la demanda a ser satisfecha rutinariamente del inventario a la mano (cuando no se pierde la venta o no se satisface mediante una requisición pendiente)

Esta es una de las definiciones de servicio al cliente que más se utiliza en la práctica, y se le conoce comúnmente como *fill rate*. Algunos autores traducen este término como “tasa de llenado” o “tasa de surtido”. Sin embargo, no se considera muy adecuado y no se utilizará en este libro. Por ello se definirá como nivel de servicio P_2 o como *fill rate* simplemente. Esta forma de definir inventarios de seguridad se profundizará posteriormente.

Tiempo promedio especificado (TEF) entre ocurrencias de faltantes

Este indicador representa el valor promedio deseado de ocurrencias de faltantes por año. Si cada ocasión en la que ocurre un faltante se maneja mediante operaciones de emergencia, entonces un valor específico de *TEF* puede ser seleccionado, de tal forma que se tenga un número tolerable de acciones de emergencia. Este criterio es útil para el control de inventarios de ítems clase C. Su inverso se utiliza también en forma equivalente.

Así, se presentan a continuación los dos sistemas de control más conocidos, como el continuo (s, Q) y el periódico (R, S). Para cada uno de ellos se definirá el inventario de seguridad con base en P_1 y P_2 .

EL SISTEMA DE CONTROL CONTINUO (s, Q)

Recuérdese que en este sistema de revisión continua, tan pronto el *inventario efectivo* llega al nivel de reorden s , se emite un pedido por la cantidad Q . Gráficamente, la figura 5.2 representa el proceso del nivel de inventario con respecto del tiempo. La cantidad de pedido Q se considera fija y determinada con anterioridad, con base en uno de los métodos expuestos en el capítulo anterior, por ejemplo, con base en el *EOQ* utilizando la demanda promedio. Aunque en la figura se muestran diferentes tiempos de reposición (L_1 y L_2), en este sistema de control se asume inicialmente que el tiempo de reposición es constante, conocido e igual a L . Se representa de esta forma sólo por mostrar el caso más general cuando el tiempo de reposición puede ser en sí una variable aleatoria, lo cual será estudiado más adelante.

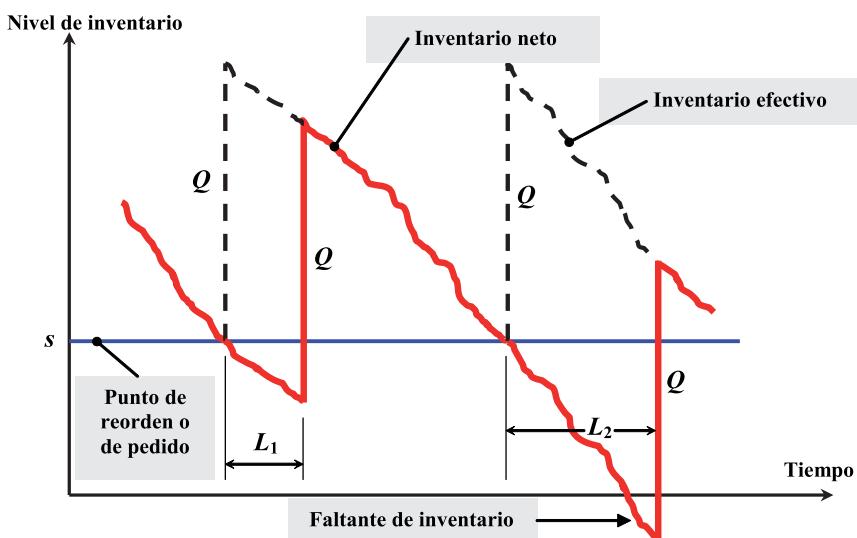


Figura 5.2. El control de inventario (s, Q)

Nótese que en este sistema lo deseable es emitir un pedido cuando el inventario es aún adecuado para evitar un faltante durante el tiempo de reposición L . Si, por ejemplo, el pedido se hace cuando el nivel de inventario efectivo es exactamente igual al punto de reorden s , entonces *no* ocurrirá un faltante si y solo si la *demandada durante el tiempo de reposición* es menor o igual que el punto de reorden s .

En la figura 5.2 se ha supuesto que máximo un pedido de reposición esté pendiente en todo momento. Sin embargo, es posible que dos o más pedidos estén pendientes en un momento dado. Cada orden se emite cuando el *inventario efectivo* sea menor o igual que el punto de reorden s . El nivel de inventario neto no influye en la decisión de ordenar un pedido, pero es posible que un bajo nivel de inventario neto genere acciones de emergencia para acelerar uno o varios pedidos pendientes, de tal forma que se pueda evitar un faltante inminente.

No necesariamente el nivel de inventario efectivo, inmediatamente antes de efectuar un pedido, tiene que ser igual a s . Debido al carácter discreto de las transacciones, es probable que una transacción de demanda disminuya el nivel de inventario por debajo del punto de reposición s , momento en el cual se revisa su nivel. Supóngase que el nivel de inventario baja u unidades por debajo de s . Por lo tanto, *no* ocurrirá un faltante si y solo si (u + la demanda durante el tiempo de reposición) es menor o igual que s , o, equivalentemente, si la demanda durante el tiempo de reposición es menor que $s - u$. Para efectos del desarrollo de las secciones siguientes, se asumirá que la magnitud de u es muy pequeña, de tal forma que puede ser ignorada. Esto es equivalente a decir que el patrón de demanda del ítem no es demasiado errático.

Supuestos básicos y notación

Los siguientes supuestos deben tenerse en cuenta en esta sección, independientemente del criterio utilizado para medir el nivel de servicio, y de la distribución probabilística de la demanda durante el tiempo de reposición (o del error de los pronósticos):

- Se asume que la demanda *promedio* varía muy poco con el tiempo; es estacionaria. Si este no es el caso, los parámetros de los métodos de control aquí descritos pueden redefinirse periódicamente y adaptarse a la nueva situación, tal como se ilustró en el capítulo 3 con los sistemas de pronósticos, mediante, por ejemplo, la aplicación de los errores suavizados.
- Los pedidos se realizan cuando el nivel de inventario efectivo es exactamente igual al punto de reorden s . Esto es equivalente a decir que la demanda ocurre en incrementos unitarios, o que la magnitud

de la variable u descrita anteriormente es despreciable. En otras palabras, la demanda no es errática.

- Si hay dos o más pedidos pendientes en el mismo instante de tiempo, éstos se reciben en la misma secuencia en la que fueron ordenados. El caso especial del tiempo de reposición L constante satisface este requerimiento.
- Los costos unitarios de faltante de inventario son tan altos que en un procedimiento práctico el nivel promedio de órdenes pendientes (para el cliente) es muy pequeño comparado con el nivel promedio del inventario a la mano. Esto es equivalente a decir que estos sistemas son adecuados para niveles de servicio altos, lo que es precisamente deseable en la práctica en las cadenas de abastecimiento actuales.
- Los errores de pronóstico tienen una distribución normal sin sesgo, con una desviación estándar σ_L sobre un tiempo de reposición igual a L . Obviamente, la desviación estándar σ_L no se conoce con certeza y, por lo tanto, se utiliza su valor estimado $\hat{\sigma}_L$, el cual es proporcionado por el sistema de pronósticos mediante la conocida expresión $\hat{\sigma}_L = \hat{\sigma}_1 \sqrt{L}$. Se ha demostrado empíricamente, y con modelos de simulación, que el uso del valor estimado produce buenos resultados en la mayoría de los casos prácticos.
- Se asume que el tamaño del pedido Q ha sido predeterminado y es independiente del punto de reorden s . Esto ha demostrado ser muy útil en la práctica, especialmente para el caso de los ítems clase B. Una forma de determinarlo es utilizar el *EOQ*. Esto significa que la única variable a determinar es el punto de reorden s . En el capítulo 7 este supuesto será eliminado, pues Q será también definida como una variable de decisión.

Notación

D = Rata de demanda, en unidades/año.

$G_z(k)$ = Función especial de la distribución normal unitaria $N(0, 1)$.

$$= G_z(k) = \int_k^{\infty} (z - k) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \quad (5.2)$$

k = Factor de seguridad.

L = Tiempo de reposición.

$p_z(k)$ = Probabilidad de que la normal unitaria $z \sim N(0, 1)$ tome un valor mayor o igual que k .

$$= p_z(k) = \int_k^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

- Q = Tamaño del pedido, en unidades.
 r = Tasa del costo de mantenimiento del inventario, en %/año.
 s = Punto de reorden, en unidades.
 IS = Inventario de seguridad, en unidades.
 v = Valor unitario del ítem, en \$/unidad.
 \hat{x}_L = Estimación de la demanda esperada sobre el tiempo de reposición L , en unidades.
 σ_L = Estimación de la desviación estándar de los errores de los pronósticos sobre el tiempo de reposición L , en unidades.

Metodología general para determinar el punto de reorden s

La forma más utilizada para determinar el punto de reorden s es mediante la ecuación:

$$s = \hat{x}_L + IS = \hat{x}_L + k\sigma_L = \hat{x}_L + k\sigma_1\sqrt{L} \quad (5.3)$$

donde el inventario de seguridad IS se define de acuerdo con la Ec. (5.1). La figura 5.3 ilustra la metodología general para establecer el punto de reorden s y muestra los cuatro componentes fundamentales que deben conjugarse para un correcto diseño de un sistema de control de inventarios, los cuales son: el sistema de pronósticos, el sistema de control propiamente dicho, el sistema que administra y coordina los dos anteriores y el sistema de información que tenga la organización. Este último es muy importante para que un sistema de pronósticos y de control de inventarios funcione adecuadamente en la práctica. Por ejemplo, en un sistema real de una organización que maneja alrededor de 8.000 ítems en cerca de 100 puntos de venta y un centro de distribución, es clave el registro y grabación diario de las ventas por ítem por punto de venta para alimentar el sistema de pronósticos y luego el de control. Sin un adecuado sistema de información y una correcta administración del sistema, esta tarea sería imposible. Muchas veces en la práctica se desconoce la estrecha relación que existe entre estos cuatro sistemas.

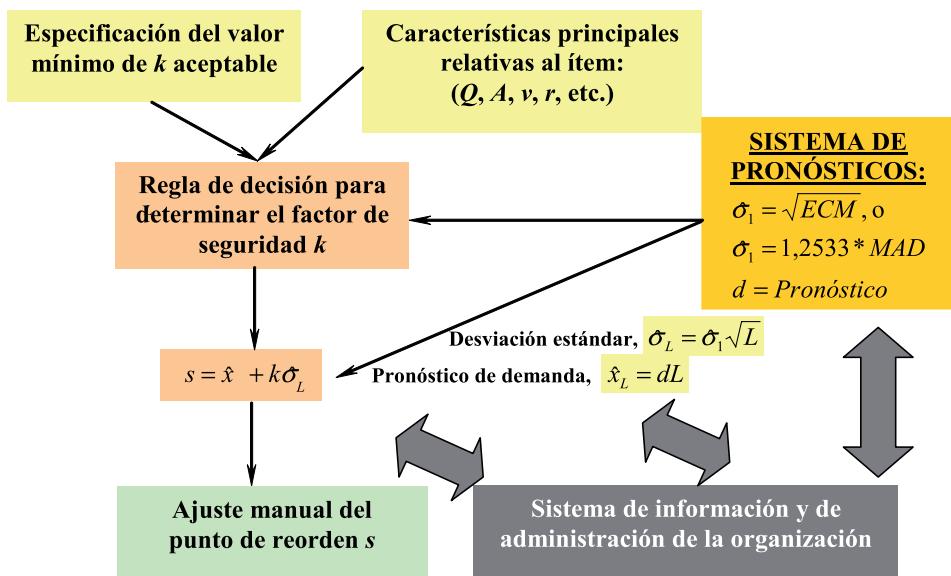


Figura 5.3. Metodología general para determinar el punto de reorden s

[Fuente: complementada de Silver *et al.* (1998), p. 256]

Algunos trabajos recientes mencionan la necesidad de incluir en la relación entre el sistema de pronósticos y el sistema de control del inventario aspectos adicionales a las medidas tradicionales del error del pronóstico [Tiacci y Saetta (2008)]. Los autores sugieren hacer una evaluación sobre la base de costos totales y nivel de servicio del sistema global de control de inventarios en la cadena de abastecimiento. Otro artículo que trata sobre la relación entre el método de Croston, para demandas intermitentes, y un sistema de control de inventarios, es el de Teunter y Sani (2008). En este trabajo se derivan ecuaciones para calcular el valor esperado y la varianza de la demanda durante el tiempo de reposición, incluyendo las caídas por debajo del punto de reorden y las covarianzas de los errores del pronóstico.

Supóngase que la función de probabilidad de la demanda x durante el tiempo de reposición es $f(x)$. De acuerdo con varios autores, las siguientes expresiones son válidas para cualquier distribución probabilística de la demanda durante el tiempo de reposición:

- Inventory of safety $IS = E(\text{inventario neto inmediatamente antes de llegar un pedido}) = \int_0^\infty (s - x)f(x)dx$, donde el símbolo E representa el valor esperado de la variable aleatoria bajo consideración.
- Probability of a shortage during the replenishment time:

$$\Pr\{x \geq s\} = \int_s^{\infty} f(x)dx \quad (5.4)$$

c) Número esperado de unidades del faltante en cada ciclo de reposición:

$$EUFCR = \int_s^{\infty} (x - s)f(x)dx \quad (5.5)$$

d) Inventario neto (o a la mano) promedio:

$$\bar{I} = \frac{Q}{2} + IS = \frac{Q}{2} + k\sigma_L \quad (5.6)$$

e) Valor esperado del número de reposiciones por año = D/Q (5.7)

Se enfatiza que las ecuaciones anteriores son válidas para cualquier distribución probabilística de la demanda durante el tiempo de reposición (o de los errores de los pronósticos). A continuación se presentan las reglas de decisión del sistema (s, Q), asumiendo que dicha distribución es normal con media x_L y desviación estándar σ_L .

Regla de decisión para un nivel de servicio P_2 especificado

Se presenta esta regla, inicialmente, debido a su fácil interpretación y a su uso frecuente en la práctica. Primero, se deduce la expresión para el número esperado de unidades faltantes por cada ciclo de reposición, $EUFCR$. De acuerdo con la Ec. (5.5):

$$EUFCR = \int_s^{\infty} (x - s)f(x)dx$$

Como la distribución de la demanda se asume normal con media x_L y desviación estándar σ_L , se tiene que:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_L \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x - x_L)^2}{\sigma_L^2}\right]$$

Así,

$$EUFCR = \int_{x_L + k\sigma_L}^{\infty} (x - x_L - k\sigma_L) \frac{1}{\sigma_L \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x - x_L)^2}{\sigma_L^2}\right] dx$$

Para transformar esta integral se necesita hacer el siguiente cambio de variable:

$$z = \frac{x - x_L}{\sigma_L}$$

lo que implica:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sigma_L}$$

y así la integral se transforma a:

$$EUFCR = \sigma_L \int_k^{\infty} (z - k) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz,$$

o, equivalentemente, de acuerdo con la Ec. (5.2):

$$EUFCR = \sigma_L G_z(k) \quad (5.8)$$

La deducción de la regla varía si se supone que los faltantes se convierten, completamente, en órdenes pendientes, o, totalmente, en ventas perdidas.

Faltantes convertidos totalmente en órdenes pendientes

En este caso, la fracción de la demanda que se convierte en órdenes pendientes es:

$$\frac{EUFCR}{\text{Valor esperado de la demanda en cada ciclo}} = \frac{EUFCR}{Q} \quad (5.9)$$

Por lo tanto, la fracción de la demanda satisfecha directamente del inventario a la mano es:

$$P_2 = 1 - \frac{EUFCR}{Q} = 1 - \frac{\sigma_L G_z(k)}{Q} \quad (5.10)$$

Equivalentemente, debe escogerse el factor de seguridad k de tal forma que:

$$G_z(k) = \frac{Q}{\sigma_L} (1 - P_2) \quad (5.11)$$

De acuerdo con Silver *et al.* (1998, pp. 268 y 292), la Ec. (5.11) subestima el verdadero *fill rate* cuando $Q/\sigma_L < 1$ porque cuenta, en forma doble, los pedidos pendientes de un ciclo previo que no son satisfechos al comienzo del ciclo siguiente. De acuerdo con los autores, una ecuación más precisa es $G_z(k) - G_z(k + Q/\sigma_L) = (Q/\sigma_L) \times (1 - P_2)$. Sin embargo, para efectos prácticos, la Ec. (5.11) es suficiente.

Faltantes convertidos totalmente en ventas perdidas

Lo único que cambia bajo este supuesto es el valor esperado de la demanda en cada ciclo. Como se asume que las demandas en exceso se pierden, este valor esperado viene dado por:

$$\text{Valor esperado de la demanda en cada ciclo} = Q + EUFCR,$$

con lo cual se concluye que el factor de seguridad k debe escogerse de tal forma que:

$$G_z(k) = \frac{Q}{\sigma_L} \left(\frac{1 - P_2}{P_2} \right) \quad (5.12)$$

La diferencia entre las Ec. (5.11) y (5.12) es mínima, ya que se tiene el supuesto de altos niveles de servicio, con lo cual $P_2 \approx 1$. Así, la regla de decisión se implementa en dos pasos:

Paso 1

Seleccione el factor de seguridad k de la siguiente forma (teniendo en cuenta que sea por lo menos igual al mínimo establecido por la administración):

- Utilizando la Ec. (5.11), si todos los faltantes se transforman en órdenes pendientes.
- Utilizando la Ec. (5.12), si todos los faltantes se convierten en ventas perdidas.

Paso 2

Calcule el punto de reorden s utilizando la Ec. (5.3).

Regla de decisión para una fracción especificada P_1 de no-ocurrencia de faltantes por ciclo de reposición

La regla de decisión, en este caso, es muy sencilla y consiste en los siguientes pasos:

Paso 1

Seleccione el factor de seguridad k de tal forma que (teniendo en cuenta que sea por lo menos igual al mínimo establecido por la administración):

$$p_z(k) = 1 - P_1 \quad (5.13)$$

Paso 2

Calcule el punto de reorden s utilizando la Ec. (5.3).

Ecuaciones para calcular el costo total relevante (CTR)

Como se ha expresado en los capítulos anteriores, el costo total relevante es importante para comparar diferentes políticas de control de inventarios. En este capítulo se le adiciona el componente del costo de faltantes [recordar la Ec. (4.4) del capítulo 4]. Por consiguiente, el *CTR* se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Costo total relevante (CTR)} &= \text{Costo anual de ordenamiento} \\ &\quad + \text{Costo anual de mantenimiento del inventario basado} \\ &\quad \text{en el inventario promedio} \\ &\quad + \text{Costo anual de los faltantes} \end{aligned}$$

El *costo anual de ordenamiento* viene dado por la ya conocida expresión AD/Q . En el caso de demanda probabilística, el costo anual de mantenimiento del inventario contiene el inventario cíclico promedio $Q/2$ y el inventario de seguridad $k\sigma_L$, cuya suma constituye el inventario promedio, y puede expresarse como:

$$\text{Costo de mantenimiento del inventario} = \bar{I}vr = (Q/2 + k\sigma_L)vr \quad (5.14)$$

El costo anual de faltantes varía dependiendo de la definición que se haga del costo de faltantes. Aquí se utilizarán dos expresiones para el costo total relevante, dependiendo del costo de faltantes que se conozca con mayor certeza y/o de la aplicación específica:

$$CTR_1 = \frac{AD}{Q} + \left(\frac{Q}{2} + k\sigma_L \right) vr + \frac{D}{Q} B_1 p_z(k) \quad (5.15)$$

$$CTR_2 = \frac{AD}{Q} + \left(\frac{Q}{2} + k\sigma_L \right) vr + \frac{D}{Q} (B_2 v) \sigma_L G_z(k) \quad (5.16)$$

El costo de faltantes contenido en la Ec. (5.15) puede explicarse de la siguiente forma. Ya que D/Q es el valor esperado del número de ciclos o de veces que se pide en un año, $(D/Q) \times p_z(k)$ representa el valor esperado del número de ciclos en el año, en los cuales se presentan faltantes, ya que $p_z(k)$ es la probabilidad de que dichos faltantes ocurran en cada ciclo de reposición. Finalmente, al multiplicar por el costo B_1 en el que se incurre por cada ocasión de faltante, $(D/Q) \times p_z(k) \times B_1$ representa el costo esperado de faltantes por año. La Ec. (5.15) es útil para estimar el CTR anual en aquellas situaciones en donde se puede estimar B_1 y donde el costo de faltantes no depende de las unidades que queden en órdenes pendientes, de las ventas perdidas o del tiempo que tarde el faltante, sino, simplemente, del evento u ocurrencia de faltante. El caso más adecuado para utilizar la Ec. (5.15) es cuando se prevé la ocurrencia de un faltante y se implementan acciones de emergencia para evitarlo a cierto costo fijo B_1 .

Es necesario tener en cuenta algunas observaciones hechas en un reciente artículo por Lau y Lau (2008) respecto de posibles imprecisiones en la Ec. (5.15), la cual es presentada por Silver *et al.* (1998, p. 260, pp. 295-296, pp. 325-326). De acuerdo con estos autores, la ecuación pasa por alto los siguientes factores: 1) la probabilidad de tener más de una ocasión de faltante por cada ciclo de reposición; 2) la transformación del sistema en uno que considere ventas perdidas, ya que las órdenes pendientes han sido eliminadas por las acciones de emergencia, y 3) la necesidad de manejar las caídas de inventario por debajo del punto de reorden en el caso de demandas erráticas. De todas formas, los supuestos que se enunciaron antes desvirtúan en cierta forma estos factores, como se muestra a continuación.

El primer factor se minimiza al suponer que los niveles de servicio son altos, puesto que si la probabilidad de que ocurra una ocasión de faltante por cada ciclo es muy baja, entonces la probabilidad de que ocurran dos sucesos de estos en un mismo ciclo de reposición (considerados independientes) es aún más baja y puede despreciarse para efectos prácticos. Por ejemplo, si la probabilidad de que ocurra un faltante en cada ciclo es de 0,025, entonces la probabilidad de que ocurran dos faltantes será de $(0,025)^2 = 6,25 \times 10^{-4}$, la cual es muy baja y puede ser despreciada. El segundo factor se controla porque, si se asume que las acciones de emergencia evitan la ocasión de faltante, no habrá ni órdenes pendientes ni tampoco ventas perdidas. Finalmente, el tercer factor ha sido considerado en uno de los supuestos anteriormente presentados; evidentemente, si en

realidad la demanda es errática merece análisis adicionales como los que se presentan en el capítulo 7.

El término $(D/Q)(B_2v)\sigma_L G_z(k)$ en la Ec. (5.16) se explica de la siguiente forma. De acuerdo con la Ec. (5.8), $\sigma_L G_z(k)$ representa el valor esperado de *unidades faltantes en cada ciclo de reposición (EUFCR)*. Al multiplicar esta expresión por el valor esperado de ciclos/año D/Q , se obtiene entonces que $(D/Q)\sigma_L G_z(k)$ es el valor esperado de las unidades faltantes en un año. Finalmente, al multiplicar por el costo unitario de faltantes B_2v , se llega al valor esperado del costo de faltantes por año. La Ec. (5.16) es adecuada en aquellos casos en los que se puede estimar cuánto cuesta cada unidad de faltante debido a rompimientos de inventario. Por ejemplo, es útil para el caso de productos de consumo masivo altamente sustituibles, para los cuales, si no están en la góndola, se pierde la venta, dejándose de percibir el margen del producto. El valor de B_2 , por lo tanto, puede tener un límite inferior en el porcentaje de margen del producto, ya que puede ser mucho mayor debido a la pérdida de imagen e, incluso, a la pérdida de clientes por faltantes frecuentes y bajo nivel de servicio.

La ecuación de costo total relevante, para el caso del costo de faltantes B_3 (o B_3v expresado en \$ por unidad de producto y por unidad de tiempo), no tiene una forma tan simple como las Ec. (5.15) y (5.16). Axsäter (2000, p. 62-65) presenta las ecuaciones para este caso.

Ejemplo 5.1 [Sistema (s, Q) con P , especificado]

Se tiene la siguiente información para cierto ítem:

Demanda mensual pronosticada d	= 12.000 unidades/mes
Desviación estándar de los errores del pronóstico σ_1 (basada en pronósticos con período mensual)	= 3.100 unidades
Tiempo de reposición L	= 1,5 meses
Valor unitario del ítem v	= 14.000 \$/unidad
Costo de ordenamiento A	= 1.000.000 \$/pedido
Costo de llevar el inventario r	= 20% anual
Nivel de servicio deseado P_1	= 90%
Fracción estimada del costo de faltante B_2	= 0,09

Determinar el tamaño de pedido Q con base en el tamaño óptimo de pedido, EOQ , el punto de reorden s para una política de control (s, Q) y el costo total relevante de esta política; y establecer claramente la política de control de inventario diseñada.

Primero, el tamaño de pedido Q se calcula mediante la Ec. (4.5), tomando la demanda anual (por comodidad se van a trabajar v y A en miles de \$):

$$Q = EOQ = \sqrt{\frac{2AD}{vr}} = \sqrt{\frac{2(1.000)(12.000 \times 12)}{(14)(0,20)}}$$

$$Q = 10.142 \text{ unidades}$$

Para aplicar la primera de las Ec. (5.1), se estima la desviación estándar de los errores del pronóstico sobre el tiempo de reposición. Nótese que se utiliza el valor estimado de la desviación estándar con base en el pronóstico mensual, σ_1 , y que el tiempo de reposición L viene expresado en meses, lo cual hace consistente la siguiente ecuación:

$$\sigma_L = \sigma_1 \sqrt{L} = \sigma_1 \sqrt{\frac{L \text{ meses}}{1 \text{ mes}}} = (3.100 \text{ unidades}) \times \sqrt{1,5} = 3.797 \text{ unidades}$$

Para determinar el factor de seguridad, k , se utiliza la Ec. (5.13), así:

$$p_z(k) = 1 - P_1 = 1 - 0,90 = 0,10$$

De las tablas del apéndice A, se encuentra $k = 1,28$. La demanda estimada durante el tiempo de reposición viene dada por:

$$\hat{x}_L = dL = (12.000)(1,5) = 18.000 \text{ unidades}$$

El punto de reorden, de acuerdo con la Ec. (5.3), estaría dado por:

$$s = \hat{x}_L + k\sigma_L = (18.000) + (1,28)(3.797) = 22.861 \text{ unidades}$$

La política de control del inventario sería ordenar $Q = 10.142$ unidades una vez el nivel de inventario “efectivo” se reduzca a $s = 22.861$ unidades. En este ejemplo, el tamaño de pedido Q es mucho menor que el punto de reorden s y que la demanda durante el tiempo de reposición, \hat{x}_L . Esto ocasiona que muy probablemente haya que colocar un nuevo pedido antes de recibir el pedido anterior. Se sugiere analizar esta situación e interpretar el significado y la utilidad del inventario efectivo para el control de inventarios.

El nivel de servicio P_2 logrado mediante esta política puede obtenerse mediante la Ec. (5.10), asumiendo que todos los faltantes se convierten en órdenes pendientes, y determinando $G_z(k)$ para el factor de seguridad $k = 1,28$ hallado anteriormente. Del apéndice A, se halla $G_z(k) = 0,047498$. Así, el nivel de servicio P_2 vendría dado por:

$$P_2 = 1 - \frac{\sigma_L G_z(k)}{Q} = 1 - \frac{(3.797)(0,047498)}{10.142} = 0,9822.$$

Luego, el 98,22% de las unidades demandadas podrán ser satisfechas del inventario a la mano (en promedio).

El costo total relevante anual de esta política se calcula con la Ec. (5.16):

$$\begin{aligned} CTR_2 &= \frac{(1.000)(12.000 \times 12)}{10.142} + \left[\frac{10.142}{2} + (1,28)(3.797) \right] (14)(0,20) \\ &\quad + \frac{(12.000 \times 12)}{10.142} (0,09 \times 14)(3.797)(0,047498) \text{ miles de \$/año} \end{aligned}$$

$$CTR_2 = 14.198,4 + 27.807,2 + 3.226,5 \text{ miles de \$/año} = 45.232,1 \text{ miles de \$/año}$$

Nótese que para efectos de comparación con el ejemplo que viene a continuación, se han separado los diversos tipos de costo que constituyen el *CTR*. Es decir, el costo anual de ordenamiento para esta política es de 14.198,4 miles de \\$/año; el de mantenimiento del inventario es de 27.807,2 miles de \\$/año, y el de faltantes es de 3.226,5 miles de \\$/año, para el total mostrado de 45.232,1 miles de \\$/año.

Ejemplo 5.2 [Sistema (s , Q) con P_2 especificado]

Considérese el ejemplo 5.1 anterior. El valor de $Q = 10.142$ unidades ya ha sido determinado mediante el *EOQ*. Asumiendo que todos los faltantes se convierten en órdenes pendientes, determinar el punto de reorden para un nivel de servicio P_2 igual al 95%. Determinar también el nivel de servicio P_1 obtenido mediante la aplicación de esta política y su costo total relevante.

Los cálculos de $\hat{x}_L = 18.000$ unidades y de $\sigma_L = 3.797$ unidades, no sufren variación. La diferencia radica en que para hallar k se requiere aplicar la Ec. (5.11):

$$G_z(k) = \frac{Q}{\sigma_L} (1 - P_2) = \frac{10.142}{3.797} (1 - 0,95) = 0,1336$$

Del apéndice A, para un valor de $G_z(k) = 0,1336$, se obtiene un valor de $k = 0,74$. El punto de reorden, de acuerdo con la Ec. (5.3), viene dado por:

$$s = \hat{x}_L + IS = \hat{x}_L + k\sigma_L = (18.000) + (0,74)(3.797) = 20.810 \text{ unidades}$$

La política de inventario (s , Q) es, por lo tanto, ordenar $Q = 10.142$ unidades tan pronto el nivel de inventario “efectivo” alcance un valor $s = 20.810$ unidades. Mediante esta política se logrará satisfacer los pedidos de los clientes del inventario a la mano en un 95% de las veces.

Para un valor de $k = 0,74$, se encuentra que $p(k) = 0,2297$, o sea que el nivel de servicio P_1 sería de $1 - 0,2297 = 0,7703$ ó 77,03%. Este valor se considera muy bajo en la práctica pues el nivel de riesgo de agotados es casi del 23%, el cual es inaceptable. *Por lo tanto, se recomienda en la práctica especificar valores más altos de P_2 , no menores del 98%, o preferiblemente especificar valores de P_1 no menores que el 95%*. Se sabe de casos reales en los que se especifica un mínimo de $P_1 = 97,5\%$ (o sea $k = 1,96$) con resultados totalmente satisfactorios. Además, al mejorar el nivel de servicio no necesariamente se incrementa el *CTR*, como se muestra a continuación.

El costo total relevante anual de la política del ejemplo 5.2 se calcula con la Ec. (5.16):

$$\begin{aligned} CTR_2 &= \frac{(1.000)(12.000 \times 12)}{10.142} + \left[\frac{10.142}{2} + (0,74)(3.797) \right] (14)(0,20) \\ &\quad + \frac{(12.000 \times 12)}{10.142} (0,09 \times 14)(3.797)(0,1336) \text{ miles de \$/año} \end{aligned}$$

$$CTR_2 = 14.198,4 + 22.066,2 + 9.075,2 \text{ miles de \$/año} = 45.339,8 \text{ miles de \$/año}$$

Es muy importante observar que, a pesar de que en el ejemplo 5.1 el nivel de servicio es superior ($P_1 = 90\%$ y $P_2 = 98,22\%$), el *CTR* es menor que en el ejemplo 5.2, cuyo nivel de servicio es claramente inferior ($P_1 = 77,03\%$ y $P_2 = 95\%$). El aumento en el costo de mantenimiento del inventario en el ejemplo 5.1 (22.807,2 miles de \\$/año contra 22.066,2 miles de \\$/año en el ejemplo 5.2) se ve compensado con la disminución en el costo de los faltantes (3.226,5 miles de \\$/año contra 9.075,2 miles de \\$/año) y el efecto neto es una disminución del *CTR* (45.232,1 miles de \\$/año contra 45.339,8 miles de \\$/año). Lo interesante de esta idea es que es posible mejorar el nivel de servicio y, a la vez, disminuir el costo total relevante.

Se debe comprobar, sin embargo, que para un nivel de servicio $P_2 = 0,99$, el costo total relevante anual de nuevo aumenta a 46.584,3 miles de \\$/año. ¿Cómo podría, entonces, hallarse el valor óptimo del nivel de servicio para que el *CTR* tome el valor mínimo posible? Se sugiere construir una hoja electrónica para responder a esta pregunta, también, repetir el ejemplo 5.2 asumiendo que los faltantes se convierten en ventas perdidas y medir el impacto de esta consideración.

Regla de decisión para un costo especificado B_1 , por cada ocurrencia de faltantes

La regla de decisión, en este caso, viene dada por (la deducción de esta regla se deja como ejercicio en el problema No. 1 de los ejercicios 5.1):

Paso 1

$$\text{Es } \frac{DB_1}{\sqrt{2\pi}Qv\sigma_L r} < 1? \quad (5.17)$$

Si la respuesta es *no*, se debe seguir con el paso 2. De lo contrario, se fija el valor de k como el mínimo especificado por la administración y se continúa con el paso 3.

Paso 2

Determine el valor del factor de seguridad mediante la ecuación:

$$k = \sqrt{2 \ln \left(\frac{DB_1}{\sqrt{2\pi}Qv\sigma_L r} \right)} \quad (5.18)$$

Paso 3

Calcule el punto de reorden utilizando la Ec. (5.3).

Ejemplo 5.3 [Sistema (s, Q) con B_1 , especificado]

Tomando de nuevo el ejemplo 5.1, asumiendo que $Q = 10.142$ unidades ya se ha definido mediante la cantidad económica de pedido. Determinar el punto de reorden s para un costo de faltante especificado $B_1 = \$2.800.000$ por cada ocasión de faltantes que ocurra. También, el nivel de servicio P_2 obtenido mediante la aplicación de esta política.

Primero, se calcula el valor de la expresión (trabajando de nuevo en miles de \$):

$$\frac{DB_1}{\sqrt{2\pi}Qv\sigma_L r} = \frac{(12.000 \times 12)(2.800)}{\sqrt{2\pi}(10.142)(14)(3.797)(0,20)} = 1,4918 > 1$$

Como se obtuvo un valor mayor que 1, entonces se calcula k de acuerdo con la Ec. (5.18):

$$k = \sqrt{2 \ln(1,4918)} = 0,8944$$

El punto de reorden viene entonces dado por:

$$s = (18.000) + (0,8944)(3.797) = 21.397 \text{ unidades}$$

El $G_z(k)$ correspondiente es aproximadamente 0,1014. El nivel de servicio P_2 se calcula de nuevo mediante la Ec. (5.10):

$$P_2 = 1 - \frac{\sigma_L G_z(k)}{Q} = 1 - \frac{(3.797)(0,1014)}{10.142} = 0,9620.$$

Y, finalmente, el costo total relevante se calcula con la Ec. (5.15), teniendo en cuenta que para $k = 0,8944$, $p_z(k)$ es aproximadamente igual a 0,185:

$$\begin{aligned} CTR_i &= \frac{AD}{Q} + \left(\frac{Q}{2} + k\sigma_L \right) vr + \frac{D}{Q} B_1 p_z(k) \\ CTR_i &= \frac{(1.000)(12.000 \times 12)}{10.142} + \left[\frac{10.142}{2} + (0,8944)(3.797) \right] (14)(0,20) \\ &\quad + \frac{(12.000 \times 12)}{10.142} (2.800)(0,185) \text{ miles de \$/año} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CTR_i &= 14.198,4 + 23.707,7 + 7.354,8 \text{ miles de \$/año} \\ &= 45.260,9 \text{ miles de \$/año} \end{aligned}$$

Se observa de nuevo en este ejemplo que el nivel de riesgo de agotados en cada ciclo de reposición es alto (18,5%), lo cual no es conveniente en la práctica. Probablemente el costo B_1 especificado no es lo suficientemente alto y por ello se acepta cierto nivel de faltantes. Hoy en día, esta no es una buena práctica logística y debe evitarse especificando altos niveles de servicio como se mencionó anteriormente y reconociendo que los costos de faltantes, B_1 en este caso, pueden llegar a ser muy altos. Obviamente, si el costo B_1 representa acciones para evitar el faltante con anterioridad y así éste no se produce, entonces no habría mala imagen ante los clientes, con lo cual la política podría ser adecuada con el nivel de servicio original del 72,5%. Se recomienda un análisis más profundo en cada caso.

Regla de decisión para una fracción especificada del costo por unidad faltante (B_2)

Cuando se conoce B_2 , la regla de decisión viene dada por (la deducción de esta regla se deja como ejercicio en el problema No. 1 de los ejercicios 5.1):

Paso 1

$$\text{Es } \frac{Qr}{DB_2} > 1? \tag{5.19}$$

Si la respuesta es *no*, continúe con el paso 2. De lo contrario, fije el valor de k como el mínimo especificado por la administración y vaya al paso 3.

Paso 2

Determine el valor del factor de seguridad k de tal forma que:

$$p_z(k) = \frac{Qr}{DB_2} \quad (5.20)$$

Paso 3

Calcule el punto de reorden utilizando la Ec. (5.3).

Ejemplo 5.4 [Sistema (s , Q) con B_2 especificado]

Considere el ejemplo 5.1. Asuma de nuevo que $Q = 10.142$ unidades. Determinar el punto de reorden s asumiendo que $B_2 = 0,09$. Calcular el nivel de servicio P_2 para este caso y el costo total relevante. Comparar con los resultados del ejemplo 5.2.

De acuerdo con la regla de decisión establecida anteriormente, se calcula:

$$\frac{Qr}{DB_2} = \frac{(10.142)(0,20)}{(12.000 \times 12)(0,09)} = 0,1565 < 1$$

Por lo tanto, se selecciona k de tal forma que $p_z(k) = 0,1565$. De las tablas en el apéndice A se obtiene $k = 1,01$. Por lo tanto:

$$s = (12.000)(1,5) + (1,01)(3.797) = 21.835 \text{ unidades.}$$

El nivel de servicio P_2 vendría dado por:

$$P_2 = 1 - \frac{\sigma_L G_z(k)}{Q} = 1 - \frac{(3.797)(0,08174)}{10.142} = 0,9694,$$

donde $G_z(k)$ se obtiene del Apéndice A para $k = 1,01$. Finalmente, el costo total relevante es igual a $CTR_2 = 44.687,6$ miles de \$/año (compruébelo). Obsérvese que si se usa esta regla de decisión se obtiene un nivel de servicio mayor que el especificado en el ejemplo 5.2, con un costo total relevante por debajo del encontrado en dicho ejemplo.

Regla de decisión para una fracción especificada del costo por unidad del faltante y por unidad de tiempo (B_3)

En este caso, la regla de decisión viene dada por (teniendo en cuenta que el k debe ser mayor o igual al mínimo permitido) [Silver *et al.* (1998), pp. 265-266].

Paso 1

Determine el valor del factor de seguridad k de tal forma que:

$$G_z(k) = \frac{Q}{\sigma_L} \left(\frac{r}{B_3 + r} \right) \quad (5.21)$$

Paso 2

Calcule el punto de reorden utilizando la Ec. (5.3).

Ejemplo 5.5 [Sistema (s, Q) con B_3 especificado]

Considere el ejemplo 5.1. Asuma de nuevo que $Q = 10.142$ unidades. Determinar el punto de reorden s asumiendo que $B_3 = 3,8 \$/(\$$ año). Comparar con los resultados del ejemplo 5.2.

De acuerdo con la regla de decisión establecida anteriormente, se calcula:

$$G_z(k) = \frac{10.142}{3.797} \left(\frac{0,20}{3,8 + 0,20} \right) = 0,1336$$

Por lo tanto, todos los cálculos coinciden con los del ejemplo 5.2, ya que se obtiene el mismo valor de $G_z(k)$. Este era el resultado esperado, puesto que esta regla es equivalente a la regla del nivel de servicio P_2 cuando se cumple que:

$$P_2 = \frac{B_3}{B_3 + r} = \frac{3,8}{3,8 + 0,2} = 0,95$$

el cual es precisamente el nivel de servicio establecido en el ejemplo 5.2. Obviamente, esto se hizo intencionalmente para ilustrar la equivalencia de los dos criterios.

Regla de decisión para un tiempo promedio especificado entre ocasiones de fallantes (TEF)

Cuando se especifica TEF, la regla de decisión viene dada por [Silver *et al.* (1998), pp. 270-271].:

Paso 1

$$\text{Es } \frac{Q}{D(\text{TEF})} > 1? \quad (5.22)$$

Si la respuesta es *no*, entonces continúe con el paso 2. De lo contrario, fije el valor de k como el mínimo especificado por la administración y vaya al paso 3.

Paso 2

Determine el valor del factor de seguridad k de tal forma que:

$$p_z(k) = \frac{Q}{D(TEF)} \quad (5.23)$$

Paso 3

Calcule el punto de reorden utilizando la Ec. (5.3). Comparando las Ec. (5.23) y (5.19) se ve claramente la equivalencia entre ambas cuando $TEF = B_2/r$.

Este criterio para fijar inventarios de seguridad es aplicado frecuentemente para el control de inventarios de ítems clase C (ver el capítulo 7).

Ejercicios 5.1

1. Considere las reglas de decisión para un costo especificado B_1 por la ocurrencia de cada ocasión de faltante y la regla de decisión para una fracción especificada del costo por unidad de faltante B_2 . Derive las correspondientes reglas de decisión con base en el costo total relevante para cada una, expresados en las Ec. (5.18) y (5.20). Tenga en cuenta las siguientes propiedades fundamentales de la distribución normal unitaria (mostradas también en el apéndice A):

$$\frac{dp_z(k)}{dk} = -f_z(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-k^2/2} \quad (5.24)$$

$$\frac{dG_z(k)}{dk} = -p_z(k) \quad (5.25)$$

2. Considere un ítem para el cual la demanda estimada en el tiempo de reposición es $\hat{x}_L = 500$ unidades y la desviación estándar de la demanda durante el tiempo de reposición es $\sigma_L = 120$ unidades. Para valores de la probabilidad de no-ocurrencia de un faltante, $P_1 = 0,85, 0,900, 0,950, 0,990, 0,995$ y $0,999$, determine el factor de seguridad k , el inventario de seguridad IS y el punto de reorden s . Grafique el inventario de seguridad IS contra el valor de P_1 y concluya acerca de su tendencia.
3. Un ítem con la siguiente información está siendo controlado por un sistema (s, Q) :

$$D = 3.400 \text{ cajas/año}$$
$$r = 25\%/\text{año}$$

$$A = \$26.000/\text{pedido}$$
$$v = \$2.100/\text{unidad}$$

Toda la demanda durante la ocurrencia de faltantes se trata como órdenes pendientes. Se utiliza el *EOQ* para determinar la cantidad a pedir Q . Actualmente se aplica un sistema de pronósticos simple, cuyo costo de control es de 45.500 \$/año y produce un valor estimado de la desviación estándar de los errores del pronóstico mensual $\sigma_L = 157$ unidades. Uno de los analistas de inventarios ha descubierto un nuevo método de pronósticos que costaría controlarlo 140.000 \$/año y disminuiría el valor de σ_L en un 55%. El ítem presenta un tiempo de reposición de 1,5 meses. Para un nivel de servicio P_2 del 99% y tomando en consideración el costo total relevante, incluyendo el costo de control del sistema de pronósticos, ¿es recomendable aceptar el nuevo sistema de pronósticos? ¿Por qué? ¿Por qué no es necesario conocer el costo de faltantes B_2 para resolver este problema?

4. Considere un ítem con una demanda promedio que no varía significativamente con el tiempo. Suponga que las demandas en semanas consecutivas se pueden considerar como variables aleatorias normales independientes. Durante las últimas 15 semanas se han observado los siguientes valores de demanda: 87, 99, 107, 146, 155, 64, 78, 122, 78, 119, 76, 80, 60, 118 y 96 unidades.
 - a) Estime la media y la desviación estándar de la demanda sobre un período de una semana y use estos valores para establecer el punto de reorden en un sistema de control (s, Q) para este ítem, con un tiempo de reposición $L = 1,5$ semanas. Utilice un valor de $A = \$690.000/\text{pedido}$, $B_2 = 0,30$, $v = 30.000 \$/\text{unidad}$, $r = 24\%$ anual y $D = 5.200 \text{ unidades/año}$, determinando Q mediante la fórmula del *EOQ*.
 - b) En la realidad, los valores de demanda semanal mostrados arriba fueron generados aleatoriamente de una distribución normal con media 100 unidades y desviación estándar 30 unidades. Repita los cálculos del literal a) con estos valores reales de los parámetros y determine el porcentaje de penalización respecto del costo total relevante anual.
5. Un proveedor de computadores por correo tiene un procesador en inventario, el cual vende a clientes alrededor de varios países. El procesador es suministrado por un proveedor japonés utilizando transporte aéreo. El ítem tiene las siguientes características:

$$\begin{array}{ll}
 D = 3.200 \text{ unidades/año} & L = 1,5 \text{ semanas} \\
 r = 0,15 \text{ \$/(\$ año)} & v = 165.000 \text{ \$/u (transporte incluido)} \\
 A = 105.000 \text{ \$/pedido} & B_2 = 0,20 \\
 \sigma_L = 13,8 \text{ unidades (para un período básico de una semana)} &
 \end{array}$$

- a) Diseñe un sistema de control (s, Q) para este ítem para un nivel de servicio $P_2 = 0,975$. Determine el Q mediante el EOQ y calcule el costo total relevante. Asuma que los faltantes se convierten en ventas perdidas.
- b) Suponga que el tiempo de reposición aumenta a 3 semanas, de tal forma que el punto de reorden s resulta ser mayor que la cantidad a pedir Q . Comente acerca de lo que podría ocurrir aquí y cuáles ajustes sugeriría realizar en la política de control.
6. Suponga que una parte para autos en el inventario de un fabricante tiene las siguientes características:
- $$\begin{array}{ll}
 d = 1.250 \text{ cajas/semana} & \sigma_L = 475 \text{ cajas (para un período de} \\
 P_1 = 0,975 & \text{una semana)} \\
 L = 2,5 \text{ semanas} & r = 30\% \text{ anual} \\
 v = 130.000 \text{ \$/caja} & A = 92.000 \text{ \$/pedido} \\
 B_1 = 1.150.000 \text{ \$/ocasión de faltante} &
 \end{array}$$
- a) Diseñe un sistema (s, Q) para este ítem de acuerdo con el nivel de servicio P_1 especificado. Determine el costo total relevante y el nivel de servicio P_2 obtenido. Asuma que el fabricante labora 52 semanas al año.
- b) Repita el literal anterior ignorando el valor de $P_1 = 0,975$, y utilizando la regla de decisión para un costo especificado B_1 por cada ocurrencia de faltantes. ¿Por qué difieren los resultados? Comente y concluya acerca de estas diferencias.
7. El inventario de una materia prima está siendo controlado con un sistema (s, Q). Actualmente se utiliza $s = 520$ ton y $Q = 750$ ton. La demanda mensual de la materia prima sigue una distribución normal con media 200 ton y desviación estándar 50 ton. Actualmente, el proveedor de la materia prima tiene un tiempo de reposición de dos meses. La empresa quiere conocer el impacto de reducir el tiempo de reposición del proveedor.
- a) Si el tiempo de reposición del proveedor se reduce en un 25%, estime su impacto sobre los niveles de servicio P_1 y P_2 , asumiendo

- que se mantiene la política actual de control y que los faltantes de materia prima se convierten en órdenes pendientes. Estime igualmente el nivel de inventario promedio de la materia prima.
- b) Si el tiempo de reposición del proveedor se reduce en un 25% y se mantiene el tamaño de lote Q actual, recalcule el punto de reorden s para obtener el mismo nivel de servicio P_2 que con la política original. Redetermine el nivel de inventario promedio de la materia prima.
 - c) En el literal a), asumiendo que se mantiene la política actual de control, grafique el nivel de servicio P_2 y el nivel de inventario promedio que se mantiene contra la reducción del tiempo de reposición del proveedor, variando ésta desde 0% hasta un 50%.
8. Considere un sistema de inventarios de dos cajones que se lleva en una ferretería para un cierto tipo de tornillo. La demanda del tornillo sobre el tiempo de reposición, el cual es de 1 semana, tiene un valor esperado de 850 unidades y una desviación estándar de 120 unidades. Si el nivel del segundo cajón (el que contiene s unidades) se ha establecido en 1.200 unidades, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran faltantes en cada ciclo de reposición? Comente acerca del valor mínimo del tamaño de lote Q para que este sistema funcione adecuadamente y de su relación con el *fill rate*, asumiendo que los faltantes se convierten en ventas perdidas.

EL SISTEMA DE CONTROL PERIÓDICO (R, S)

Recuérdese que en el sistema de revisión periódica, el inventario se revisa cada R unidades de tiempo y se ordena una cantidad igual a la diferencia entre un valor máximo S y el valor del inventario efectivo en el momento de la revisión. La figura 5.4 representa el proceso del nivel de inventario con respecto del tiempo. El intervalo de revisión R se considera fijo y determinado con anterioridad, con base en el *EOQ* expresado en unidades de tiempo, por ejemplo. Se asume aquí también, inicialmente, que el tiempo de reposición L es constante, aunque en la figura se muestra una situación más general con tiempo de reposición variable.

La selección del intervalo de revisión R óptimo es un problema que no ha sido investigado ampliamente aún. Silver y Robb (2008) mencionan que la selección del mejor intervalo de revisión R y su comportamiento, en relación con los parámetros del modelo de control de inventarios, no han sido comprendidos totalmente. Estos autores investigan con las distribuciones de demanda normal y gamma y concluyen que la función de costo no es necesariamente convexa en relación con el intervalo de revisión, lo que complica el problema.

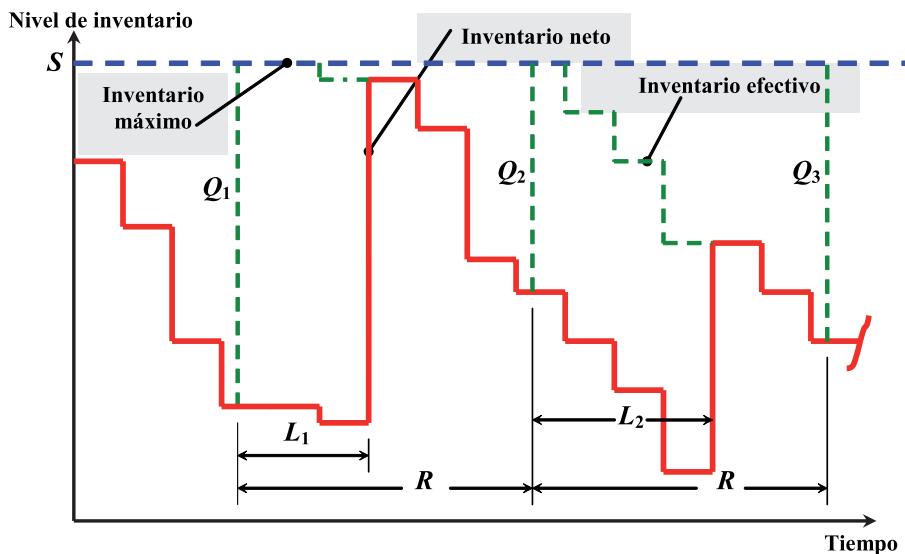


Figura 5.4. El sistema de control del inventario (R, S)

De acuerdo con Silver *et al.* (1998, p. 275), no es necesario el desarrollo de nuevas reglas de decisión en este caso, ya que existe una estrecha relación entre el sistema (R, S) y el sistema (s, Q). Simplemente, en todas las expresiones anteriormente presentadas, se deben hacer las siguientes sustituciones:

<u>Sistema (s, Q)</u>	<u>Sistema (R, S)</u>
s	S
Q	DR
L	$R + L$

Este sistema también opera bajo ciertos supuestos, a saber:

- La tasa de demanda promedio varía poco en el tiempo.
- La probabilidad de tener demanda igual a cero, entre revisiones sucesivas del inventario, es muy pequeña; por lo tanto, se asume que cada vez que se revisa el inventario, se ordena un pedido. En realidad, no hay problema en que no ocurra demanda alguna entre dos revisiones del inventario. Simplemente, no se ordena y se espera hasta la revisión siguiente. Esto ocurre muy a menudo en un sistema de control de inventarios de medicamentos implementado en una cadena de droguerías.
- El tiempo de reposición se asume constante.

- Los costos unitarios de faltante de inventario son tan altos que el nivel promedio de órdenes pendientes (para el cliente) es muy pequeño comparado con el nivel promedio del inventario a la mano. Esto es equivalente a decir que estos sistemas son adecuados para niveles de servicio altos, lo cual es lo deseado en la práctica.
- Los errores de pronóstico tienen una distribución normal sin sesgo, con una desviación estándar σ_{R+L} sobre el intervalo de revisión, más el tiempo de reposición, $R + L$. Obviamente, la desviación estándar σ_{R+L} no se conoce con certeza y, por lo tanto, se utiliza su valor estimado $\hat{\sigma}_{R+L}$, lo cual se hace a través del valor de σ_1 suministrado por el sistema de pronósticos, utilizando la segunda parte de la Ec. (3.49) del capítulo 3.
- El valor de R es pre-determinado.
- Los costos de control del sistema no dependen de la magnitud de S .

Una observación importante radica en el hecho de que, para este sistema, la protección del inventario de seguridad debe darse para un período de tiempo igual a la suma del tiempo de reposición y el intervalo de revisión del inventario, o sea, para el período $R + L$. Un soporte de esta afirmación está dado en Silver *et al.* (1998, pp. 276-278). Además, en muchas ocasiones es conveniente adicionar cierto porcentaje al costo de ordenamiento A , incremento ocasionado por la revisión del inventario. Por esta razón, la notación cambia de acuerdo con los siguientes parámetros:

- A' = Costo fijo de ordenamiento incrementado en el costo de revisión del inventario, en \$/pedido.
 R = Intervalo de revisión pre-especificado (o calculado con base en el EOQ), en unidades de tiempo.
 S = Nivel máximo de inventario hasta el cual se ordena, en unidades.
 \hat{x}_{R+L} = Demanda pronosticada sobre un intervalo de tiempo igual a $R + L$.
 σ_{R+L} = Desviación estándar estimada de los errores de pronósticos sobre un intervalo igual a $R + L$.

Las Ec. (5.15) y (5.16) siguen siendo válidas para calcular el costo total relevante, reemplazando a A , Q y σ_L por A' , DR y σ_{R+L} , respectivamente.

Ejemplo 5.6 [Sistema (R , S) con P_2 especificado]

Diseñar un sistema de inventarios (R , S) para el caso del ejemplo 5.2. Toda la información dada en este ejemplo permanece igual con excepción del costo fijo de pedido A , el cual se supone que se incrementa en un 15% debido al costo adicional de revisión del inventario.

Inicialmente, debe determinarse el intervalo de revisión R , a partir de la cantidad óptima de pedido, redondeado a un valor entero lógico. Por ejemplo, no sería muy práctico, desde el punto de vista administrativo, revisar el inventario cada 3,37 semanas, sino que debería pensarse en hacerlo cada tres (o cuatro) semanas. Así, se tiene:

$$R = \frac{EOQ}{D} = \sqrt{\frac{2A'D}{vr}} \quad (5.26)$$

$$R = \sqrt{\frac{2A'}{Dvr}}$$

Por lo tanto (trabajando en miles de \$):

$$R = \sqrt{\frac{2(1.000 \times 1,15)}{(12.000 \times 12)(14)(0,2)}} = 0,07553 \text{ años} \equiv 4 \text{ semanas}$$

Luego, puede tomarse $R = 4$ semanas = 1/13 de año. Ahora, la desviación estándar de los errores del pronóstico sobre el tiempo de reposición, más el intervalo de revisión, vendría dada por:

$$\sigma_{R+L} = \sigma_1 \times \sqrt{R + L} \quad (5.27)$$

$$\sigma_{R+L} = 3.100 \times \sqrt{\frac{12}{13} + 1,5} = 4.826 \text{ unidades}$$

Nótese que como originalmente σ_1 es la desviación estándar de los errores del pronóstico mensual, entonces el tiempo $R + L$ dentro del radical debe ser expresado en meses.

Análogamente, la demanda pronosticada sobre el tiempo $R + L$ es:

$$\hat{x}_{R+L} = d \times (R + L) \quad (5.28)$$

$$\hat{x}_{R+L} = (12.000 \text{ unidades/mes}) \times \left(\frac{12}{13} + 1,5 \text{ meses} \right) = 29.077 \text{ unidades}$$

Como el tamaño de pedido en este sistema es variable, en vez de utilizar Q es necesario utilizar DR donde dicha cantidad aparezca. Así, el valor de la función $G_z(k)$ vendría dado por:

$$G_z(k) = \frac{DR}{\sigma_{R+L}}(1 - P_2) \quad (5.29)$$

$$G_z(k) = \frac{(12.000 \times 12)(1/13)}{4.826} (1 - 0.95) = 0,1148,$$

de donde se obtiene $k = 0.83$. Así, el valor máximo de inventario S vendría dado por:

$$S = \hat{x}_{R+L} + k\sigma_{R+L} \quad (5.30)$$

$$S = 29.077 + (0,83)(4.826) = 33.083 \text{ unidades.}$$

La política de inventarios (R, S) es, por lo tanto, revisar el inventario cada $R = 4$ semanas y ordenar una cantidad igual a 33.083 unidades menos el “inventario efectivo” al momento de la revisión. Mediante este método, se conseguirá un nivel de servicio aproximado de $P_2 = 95\%$.

La ecuación para calcular el costo total relevante en el sistema (R, S) se transforma a:

$$CTR_2 = \frac{A'}{R} + \left(\frac{DR}{2} + k\sigma_{R+L} \right) vr + \frac{1}{R} (B_2 v) \sigma_{R+L} G_z(k) \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} CTR_2 &= \frac{1.000 \times 1,15}{1/13} + \left[\frac{(12.000 \times 12)(1/13)}{2} + (0,83)(4.826) \right] (14)(0,2) \\ &\quad + \frac{1}{1/13} (0,09 \times 14)(4.826)(0,1148) \end{aligned}$$

$$CTR_2 = 14.950,00 + 26.723,32 + 9.074,93 \text{ miles de } \$/\text{año}$$

$$CTR_2 = 50.748,25 \text{ miles de } \$/\text{año}$$

Este costo es un 11,93% mayor que el costo total relevante de la política (s, Q) discutida en el ejemplo 5.2. Nótese que el aumento proviene fundamentalmente del incremento en el costo de mantenimiento del inventario al aumentar el inventario cíclico y el de seguridad, ya que la cobertura debe ser sobre $R + L$ y no simplemente sobre el tiempo de reposición L . Sin embargo, este aumento de costo debe compararse con los ahorros potenciales que pueden obtenerse al coordinar el control del inventario de

diversos ítems y obtener economías de escala por tamaños de compra, lote de producción y/o transporte en un sistema de control conjunto de ítems.

TIEMPO DE REPOSICIÓN ALEATORIO

En la vida real, el tiempo de reposición L rara vez puede considerarse constante o determinístico. Su grado de aleatoriedad depende de muchos aspectos, como la disponibilidad del proveedor o las características de la línea de producción, el modo de transporte utilizado, la infraestructura de recepción de los productos, entre otras posibles causas.

Hay varias formas de considerar la variabilidad del tiempo de reposición. En la primera forma se asume que el tiempo de reposición L y la tasa de demanda D son variables aleatorias independientes, caso en el cual se dispone de resultados analíticos que serán expuestos más adelante. Podríamos decir que esta es la forma más sencilla de aplicación en la práctica pues se reduce a dos fórmulas relativamente simples.

En el segundo método se pronostica el tiempo de reposición en forma semejante a como se hace con la demanda y, de esta manera, se puede obtener lo que podría denominarse un “tiempo de reposición máximo” con el que se calculan los promedios de demanda y los inventarios de seguridad. Este último método es semejante al que se emplea en la práctica cuando se consideran tiempos de reposición de seguridad, especialmente en la administración de inventarios de materias primas. Los principales sistemas de planeación de recursos (*Enterprise Resource Planning, ERP*) contienen módulos de MRP que permiten implementar esta posibilidad.

En un tercer método, se mide la demanda real sobre cada tiempo de reposición L (o sobre cada tiempo de reposición, más el intervalo de revisión del intervalo, $R + L$), y se utilizan los datos para estimar x_L (o x_{R+L}) y σ_L (o σ_{R+L}) directamente. La aplicación práctica de esta metodología es compleja porque maneja períodos de tiempo aleatorios, dado que como no se sabe el valor exacto del tiempo de reposición, los sistemas de pronósticos son de período variable lo cual es muy difícil de controlar en la práctica dentro de los sistemas de información de las organizaciones.

Considere entonces el primer caso, en el cual se asume que las variables aleatorias demanda y tiempo de reposición son independientes. Defina, entonces, la siguiente notación para un sistema continuo (s, Q) :

- d = Variable aleatoria que representa la tasa o tasa de demanda, en unidades por unidad de tiempo.
- $E(d)$ = Valor esperado de la tasa de demanda, en unidades por unidad de tiempo.

- σ_1 = Desviación estándar de los errores del pronóstico (o de la demanda) referidos al mismo período de tiempo de la tasa de demanda, en unidades.
- w = Demanda aleatoria durante el tiempo de reposición, en unidades.
- $E(w)$ = Valor esperado de la demanda durante el tiempo de reposición, en unidades.
- σ_w = Estimación de la desviación estándar de la demanda durante el tiempo de reposición, en unidades.
- LT = Tiempo de reposición aleatorio, en unidades de tiempo (Nota: se ha cambiado la notación del tiempo de reposición de L a LT para evitar confusiones de notación entre la desviación estándar de los errores del pronóstico durante el tiempo de reposición σ_L y la desviación estándar del tiempo de reposición σ_{LT})
- $E(LT)$ = Valor esperado del tiempo de reposición, en unidades de tiempo.
- σ_{LT} = Estimación de la desviación estándar del tiempo de reposición, en unidades de tiempo.

Un conocido resultado de la teoría de procesos estocásticos compuestos brinda las siguientes ecuaciones [véase, por ejemplo, Ross (1993, pp. 98-99)]:

$$E(w) = E(LT) \times E(d) \quad (5.32)$$

$$\sigma_w = \sqrt{E(LT)\sigma_1^2 + [E(d)]^2\sigma_{LT}^2} \quad (5.33)$$

Todas las ecuaciones presentadas para el sistema (s, Q) son válidas cuando se considera el tiempo de reposición aleatorio, teniendo en cuenta que se debe utilizar $E(w)$ en lugar de \hat{x}_L , y σ_w en lugar de σ_L . Por ejemplo, para calcular el punto de reorden, se aplicaría la ecuación $s = E(w) + k\sigma_w$ en lugar de la ecuación $s = \hat{x}_L + k\sigma_L$. Es muy importante notar que para que la Ec. (5.33) sea consistente, σ_1 debe estimarse a partir de un sistema de pronósticos cuya unidad de tiempo básica sea la misma que la unidad de tiempo del $E(LT)$. Además, la unidad de tiempo de la tasa de demanda $E(d)$ debe coincidir con la unidad de tiempo de σ_{LT} .

Por otra parte, si el tiempo de reposición es constante, como en los casos anteriormente analizados, entonces en la Ec. (5.33) se tendría que $\sigma_{LT}^2 = 0$, con lo que se anula el segundo término dentro del radical y se reproduce el conocido resultado de la primera de las Ec. (3.49). Igualmente, en los casos en los que se puede considerar la demanda muy estable (σ_1

0), pero el tiempo de reposición mantiene su aleatoriedad, la Ec. (5.33) reduce a $\sigma_w = E(d) \times \sigma_{LT}$.

En la práctica es posible que exista cierta correlación entre la demanda y el tiempo de reposición. Por ejemplo, puede haber correlación positiva, como en el caso de alta demanda, la cual genera una alta carga para el proveedor o para la planta, quienes probablemente tardarán más tiempo en satisfacer el pedido. Puede también existir correlación negativa para bajas demandas, con las cuales el proveedor o la planta probablemente esperarán hasta acumular cierto número de pedidos y así satisfacer el tamaño de lote mínimo que les permita despachar y/o producir rentablemente. Sin embargo, la Ec. (5.33) es conservativa, o sea que, en caso de existir correlación, dicha ecuación sobreestima la desviación estándar de la demanda durante el tiempo de reposición. Cada caso en particular debe ser analizado; sin embargo, si estas dos situaciones de alta o baja demanda no se presentan muy a menudo, el supuesto de independencia es razonable.

Ejemplo 5.7 [Sistema (s, Q) con tiempo de reposición aleatorio]

Diseñe un sistema de control de inventarios (s, Q) para el caso del ejemplo 5.2, asumiendo que el tiempo de reposición es aleatorio con $E(LT) = 1,5$ meses y $\sigma_{LT} = 0,20$ meses.

El hecho de tener el tiempo de reposición aleatorio modifica el cálculo del valor esperado de la demanda sobre el tiempo de reposición y de su desviación estándar, de acuerdo con las Ec. (5.32) y (5.33).

$$E(w) = 1,5 \times 12.000 = 18.000 \text{ unidades}$$

$$\sigma_w = \sqrt{(1,5)(3.100)^2 + [12.000]^2(0,20)^2} = 4.492 \text{ unidades}$$

Nótese la consistencia de las unidades del tiempo de reposición, medido en meses, con las de σ_L , medida a partir de un sistema de pronósticos con período mensual. Igualmente, la tasa de demanda es de 12.000 unidades/mes y $\sigma_{LT} = 0,20$ meses, con lo cual la ecuación es consistente.

Así, lo único que debe hacerse es reemplazar a \hat{x}_L por $E(w)$ y a σ_L por σ_w , y repetir los cálculos realizados en el ejemplo 5.2. Para calcular el valor de k se aplica la ecuación:

$$G_z(k) = \frac{Q}{\sigma_w} (1 - P_2) = \frac{10.142}{4.492} (1 - 0,95) = 0,1129$$

Del apéndice A se obtiene $k = 0,84$. Por lo tanto, el punto de reorden sería:

$$s = E(w) + k\sigma_w = 18.000 + (0,84)(4.492) = 21.774 \text{ unidades}$$

Y el costo total relevante viene dado por:

$$CTR_2 = \frac{AD}{Q} + \left(\frac{Q}{2} + k\sigma_w \right) vr + \frac{D}{Q} (B_2 v) \sigma_w G_z(k)$$

$$\begin{aligned} CTR_2 &= \frac{(1.000)(12.000 \times 12)}{10.142} + \left[\frac{10.142}{2} + (0,84)(4.492) \right] (14)(0,20) \\ &\quad + \frac{(12.000 \times 12)}{10.142} (0,09 \times 14)(4.492)(0,1129) \text{ miles de \$/año} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CTR_2 &= 14.198,4 + 24.764,0 + 9.072,8 \text{ miles de \$/año} \\ &= 48.035,2 \text{ miles de \$/año} \end{aligned}$$

Estos resultados representan un aumento en el punto de reorden y en el costo de mantenimiento del inventario, ocasionados por el incremento del inventario de seguridad para responder a la variabilidad adicional del tiempo de reposición. De nuevo, aquí el valor especificado de $P_2 = 95\%$ hace que el nivel de seguridad P_1 sea sólo del 80% (correspondiente al valor de $1 - p_z(k)$ del Apéndice A, a partir de $k = 0,84$), el cual es muy bajo en la práctica. Por lo tanto, como ya se ha dicho, se recomienda especificar valores más altos de P_2 , como 98-99%.

INVENTARIO EN TRÁNSITO Y SU EFECTO SOBRE LA SELECCIÓN DEL MODO DE TRANSPORTE

El concepto de inventario en tránsito fue definido en el capítulo 2. Reúndese que el inventario en tránsito (*pipeline inventory*) es el inventario que se encuentra en los sistemas de transporte entre dos puntos de la cadena de suministro. El nivel del inventario en tránsito es proporcional al tiempo de reposición del producto, ya que éste incluye el tiempo de tránsito, más los otros tiempos necesarios para que el producto llegue a su destino (tiempo de cargue, descargue, nacionalización, manejo en puertos, etc.). Por consiguiente, el inventario en tránsito depende del modo de transporte que se utilice y es, por supuesto, más significativo en un sistema internacional de transporte.

Si se utiliza transporte aéreo, por ejemplo, el tiempo de reposición es relativamente corto y, por lo tanto, serán bajos los niveles de inventario promedio, en tránsito y de seguridad necesarios para alcanzar el nivel de servicio deseado. Sin embargo, el modo aéreo se caracteriza por tener un

alto flete (costo de transporte). Por el contrario, el modo marítimo generalmente produce un tiempo de reposición mucho mayor que el modo aéreo, pero es el modo más económico en cuanto a costo de transporte se refiere. Este conflicto de costos es el que debe resolver el analista para seleccionar el modo de transporte más conveniente desde el punto de vista económico. Es un *error común* escoger el modo de transporte *solamente considerando sus fletes* e ignorando el impacto que las características del modo escogido producen sobre los costos de inventario y sobre los costos totales de logística. El ejemplo 5.8 ilustra una posible forma de abordar el problema de selección de modo de transporte.

Ejemplo 5.8 [Selección del modo de transporte considerando inventario en tránsito, cíclico y de seguridad]

Una empresa comercial localizada en la ciudad de Santiago de Cali importa desde China y distribuye a todo el país, y a algunos países vecinos, cierto tipo de motor eléctrico muy utilizado en la producción de una gran gama de productos. Los datos del motor son los siguientes:

Valor nominal de cada motor = 160 US\$/unidad.

Demanda anual promedio $D = 240.000$ unidades/año.

Desviación estándar diaria estimada de la demanda = 200 unidades.

Peso unitario del motor = 7 kg/unidad.

Factor de seguridad utilizado $k = 2,33$

(para un nivel de servicio $P_1 = 99\%$).

Tasa de costo de mantenimiento del inventario $r = 26\%$ anual.

Costo estimado de faltantes $B_2 = 30\%$.

Tasa mínima de retorno de la empresa = 18% anual.

La empresa ha estado utilizando el transporte por océano para los motores, pero le han ofrecido un nuevo modo llamado “océano rápido”, el cual tiene un mayor flete, pero logra un tiempo de reposición menor, ya que los buques no arriban a todos los puertos en los que atracan viajando por el modo normal. Las características de cada modo de transporte se muestran en la tabla 5.2. Se asume que los tiempos de reposición son estables.

Tabla 5.2. Características de los modos de transporte (ejemplo 5.8)

Modo de transporte	Flete (US\$/kg)	Tiempo de reposición (días)	Intervalo entre envíos (días)
Océano normal (1)	0,40	25	7
Océano rápido (2)	0,60	18	5

La empresa está utilizando un sistema de control de inventarios (s, Q) para este ítem, calculando el tamaño de cada pedido con base en la demanda promedio y el intervalo entre envíos de cada modo de transporte. Se asume que los costos de ordenamiento son despreciables frente a los demás costos. ¿Debería la empresa aceptar la oferta del nuevo modo de transporte?

Para resolver este problema debe primero calcularse la inversión promedio total requerida en inventario por cada modo de transporte y su costo de mantenimiento del inventario asociado. Ilustraremos el caso del *modo océano normal*, ya que el cálculo para el otro modo es semejante.

Primero, para calcular el tamaño de envío Q_1 , de acuerdo con los supuestos, se tiene en cuenta la demanda promedio anual y el intervalo entre envíos. Así:

$$Q_1 = (240.000 \text{ u./año}) / [(365 \text{ días/año}) / (7 \text{ días})] = 4.603 \text{ unidades}$$

Ahora se calculan los tres tipos de inventario asociados con la política actual de control (en unidades):

$$\text{Inventario cíclico promedio} = Q_1 / 2 = 4.603 / 2 = 2.302 \text{ unidades}$$

$$\text{Inventario de seguridad} = k\sigma_1 \sqrt{L_1} = 2,33 \times 200 \times \sqrt{25} = 2.330 \text{ unidades}$$

$$\begin{aligned}\text{Inventario en tránsito} &= (D / 365) \times L_1 = (240.000 / 365) \times 25 \\ &= 16.438 \text{ unidades}\end{aligned}$$

$$\text{Inventario promedio total} = 2.302 + 2.330 + 16.438 = 21.070 \text{ unidades}$$

Nótese la forma de calcular el inventario en tránsito, con base en la demanda promedio diaria y el tiempo de reposición expresado en días. Igualmente, es importante observar que la magnitud del inventario en tránsito es significativa comparada con la de los otros dos tipos de inventario. El supuesto que hay tras este cálculo es el hecho de que las unidades que vienen en camino ya han sido pagadas y son de propiedad de la empresa, lo cual es muy común en el ambiente de los negocios internacionales.

Como ya se calcularon los inventarios en unidades, debe ahora hacerse el traslado a unidades monetarias, en este caso dólares. Así:

$$\begin{aligned}&\text{Inversión requerida en inventario modo océano} \\ &= 21.070 \text{ unidades/año} \times [160 \text{ US$/u} + (0,40 \text{ US$/kg} \times 7,0 \text{ kg/u})] \\ &= 3.430.196 \text{ US$/año}\end{aligned}$$

En este cálculo se ha considerado que el costo de transporte aumenta ligeramente el valor del producto puesto en la bodega de la empresa (pasando de 160 a 162,8 US\$/u). Ahora, es clave observar que se habla de “*inversión requerida en inventario*” si se utiliza el modo de transporte por océano normal. Con esta inversión promedio se puede brindar el nivel de servicio especificado a los clientes. Este inventario cuesta mantenerlo y, por lo tanto, su costo de mantenimiento, aplicando la Ec. (2.1) del capítulo 2, sería:

$$\begin{aligned}\bar{I}vr = (\bar{I}v) \times r &= (3.430.196 \text{ US\$/año}) \times 0,26 \text{ US\$/US\$·año} \\ &= 891.851 \text{ US\$/año}\end{aligned}$$

El otro componente del costo total de logística es el de faltantes, el cual se puede estimar de la siguiente forma [último término de la Ec. (5.16), con $G_z(k) = 0,003352$ para $k = 2,33$]:

$$\begin{aligned}\text{Costo de faltantes} &= \frac{D}{Q_1} (B_2 v) \sigma_1 \sqrt{L_1} G_z(k) = \frac{240.000}{4.603} (0,30 \times 162,8) \times 200 \\ &\quad \times \sqrt{25} \times 0,003352 = 8.536 \text{ US\$/año}\end{aligned}$$

Al igual que lo expresado en el enunciado del problema con respecto a los costos de ordenamiento, este costo es despreciable con relación al costo de mantenimiento del inventario anteriormente calculado. Esto se explica por el alto nivel de servicio que se ha especificado.

El último costo a calcular es el de los fletes por el modo océano normal, así:

$$\begin{aligned}\text{Costo de fletes si se escoge el modo océano normal} \\ &= 240.000 \text{ u/año} \times 0,40 \text{ US\$/kg} \times 7,0 \text{ kg/u} = 672.000 \text{ US\$/año}\end{aligned}$$

Finalmente, se calcula el costo total de logística asociado a la decisión de escoger el modo de transporte por océano normal:

$$\begin{aligned}\text{Costo total de logística si se escoge el modo océano normal} &= \\ 891.851 + 8.536 + 672.000 &= 1.572.387 \text{ US\$/año}\end{aligned}$$

La tabla 5.3 resume los cálculos anteriores y los cálculos para el modo de transporte por océano rápido. Aparentemente el mejor modo de transporte es el océano normal y por ello la oferta del modo por océano rápido debería rechazarse. Sin embargo, hay que tener en cuenta la siguiente observación para realizar un análisis beneficio-costo. La diferencia entre

la *inversión requerida* en inventario y su *costo de mantenimiento* debe ser clara. La inversión compromete recursos de la empresa para adquirir, financiar y luego almacenar y vender los motores eléctricos, mientras que el costo total de logística es un costo real que la empresa debe asumir para poder cumplir sus metas de negocio. Obsérvese que, a pesar de que el modo océano rápido tiene un mayor costo total de logística, también compromete menos recursos de la empresa pues su inversión requerida en inventario es menor. Por lo tanto, se hace necesario realizar un análisis incremental para tomar una decisión final.

Tabla 5.3. Resumen de cálculos para la selección del modo de transporte (ejemplo 5.8)

Modo de transporte	Inversión requerida en inventario (US\$/año)	Costo de mantenimiento del inventario (US\$/año)	Costo de faltantes (US\$/año)	Costo de fletes (US\$/año)	Costo total de logística (US\$/año)
Océano normal (1)	3.430.196	891.851	8.536	672.000	1.572.387
Océano rápido (2)	2.538.039	659.890	10.227	1.008.000	1.678.117

Bajo la premisa que, independientemente del modo de transporte escogido, el nivel de servicio que se preste al cliente va a ser el mismo y que la empresa tiene los recursos suficientes para invertir en inventario de acuerdo con el modo de transporte de mayor inversión, la pregunta es: *¿Vale la pena invertir 3.430.196 – 2.538.039 = 892.157 US\$/año “adicionales” en el modo océano normal para ahorrarse 1.678.117 – 1.572.387 = 105.730 US\$/año en costos totales de logística?*

La respuesta debe darse con base en la tasa mínima de retorno de la empresa. Nótese que los 892.157 US\$ adicionales que se invertirían por año en el modo océano normal redituarían 105.730 US\$/año. Esto corresponde a $105.730/892.157 = 11,85\%$ anual. Como la tasa mínima de retorno de la empresa es del 18% anual, la conclusión es que *no vale la pena hacerlo* puesto que se puede mejor invertir 2.538.039 US\$/año en el modo océano rápido y los 892.157 US\$/año que sobran redituarían más a la tasa mínima de retorno de la empresa (18% anual) que al 11.85% anual que se lograría si se continúa utilizando el modo por océano normal. Así, la sugerencia es que *la oferta debería aceptarse*, a pesar de que el costo total de logística indique lo contrario.

El análisis anterior no se encuentra en ninguno de los textos que se han consultado, pues, en los que se considera este tema, se toma la decisión con base en el costo total de logística mínimo. El único autor encontrado

que aplica esta forma de abordar el problema, es Eichmann (1996). Sería interesante analizar las causas por las cuales se ignora esta opción. Por otra parte, en una referencia reciente por Kutanoglu y Lohiya (2008) se formula un modelo de optimización que integra las decisiones de selección de modo de transporte, nivel de inventario a mantener y servicio al cliente en una cadena de abastecimiento de repuestos y partes.

Ejercicios 5.2

1. Desarrolle reglas semejantes a las mostradas para un costo B_1 y un costo B_2 especificado para un sistema de control periódico (R, S) .
2. Diseñe un sistema de control (R, S) para el ítem del problema No. 5 de los ejercicios 5.1, utilizando los datos dados allí. Determine el valor de R realizando un redondeo razonable a partir del EOQ expresado como unidades de tiempo. Compare los valores de los costos totales relevantes obtenidos por medio de la política (s, Q) en el problema mencionado.
3. Diseñe un sistema de control (R, S) para el ítem del problema No. 6 de los ejercicios 5.1, utilizando los datos dados allí. Determine el valor de R por redondeo a partir del EOQ expresado como unidades de tiempo. Compare los valores de los costos totales relevantes obtenidos por medio de la política (s, Q) en el problema mencionado. Compare también el nivel de servicio P_2 obtenido con ambas políticas de inventario.
4. Resuelva el problema anterior asumiendo que el tiempo de reposición L tiene un valor esperado $E(LT)$ de 2,5 semanas y una desviación estándar σ_{LT} de 0,5 semanas. Observe que aquí debe encontrar una nueva forma de las Ec. (5.32) y (5.33) que sean válidas para un sistema de control (R, S) .
5. Resuelva los problemas No. 5 y No. 6 de los ejercicios 5.1 asumiendo que el tiempo de reposición L tiene un valor esperado $E(LT)$ de 1,5 y 2,5 semanas, respectivamente, y una desviación estándar estimada σ_{LT} de 0,5 semanas para ambos casos. A diferencia del problema anterior, en este punto debe diseñar entonces los sistemas de control (s, Q) , pero con el tiempo de reposición aleatorio.
6. En su empresa, usted fabrica un producto del que tiene un contrato establecido de ventas, en el cual debe entregar una cantidad constante de 1.000 unidades/semana, durante las 52 semanas del año. Alistar la línea de producción para este ítem cuesta alrededor de \$100.000 y usted ha calculado el costo variable de producción del ítem en \$15.000/unidad. La tasa estimada del costo de mantenimiento del inventario es del 30% anual. Su problema es que el tiempo de pro-

ducción de cada lote es bastante impredecible, debido a la naturaleza del producto. Después de revisar extensas estadísticas, usted ha recolectado la siguiente información respecto de los tiempos de producción:

Porcentaje de órdenes de producción	2	5	15	42	23	8	4	1
Tiempo de producción (Días)	1	2	3	4	5	6	7	8

- a) Diseñe un sistema de control continuo (s, Q) para este ítem si usted desea cumplirle al cliente en el 97,5% de las veces.
 - b) Repita el literal anterior si usted, en lugar de tener la información de la tabla, sólo dispone de la siguiente información sobre el tiempo de producción en días: “Se ha observado que el tiempo de producción es de 4,5 días \pm 3,5 días y que es aproximadamente normal.” Repita de nuevo el ejercicio si en vez de decir “normal” dice “uniforme”.
7. En una ferretería, una herramienta de gran rotación se ordena al proveedor cada semana. La herramienta ha tenido una demanda semanal promedio de 100 unidades y se ha estimado su desviación estándar con base semanal en 15 unidades. Se dispone de los siguientes datos adicionales: costo de ordenamiento $A = 1.000 \$/\text{orden}$; valor unitario del ítem $v = 5.000 \$/\text{unidad}$; tasa de costo de mantenimiento del inventario $r = 30\%$ anual; tiempo de reposición $L = 1 \text{ semana}$; precio de venta de la herramienta $p = 9.000 \$/\text{unidad}$.
- a) Diseñe un sistema de control de inventarios para este ítem si usted desea que no haya ocasiones de faltantes en el 97,5% de las veces. Calcule el costo total relevante de la política diseñada incluyendo costos de ordenamiento, de mantenimiento del inventario y de faltantes, y el *fill rate* generado, asumiendo que los faltantes se convierten en ventas perdidas, ya que el cliente no espera al próximo despacho.
 - b) Resuelva el literal anterior si ahora el nivel de servicio se especifica como un *fill rate* $P_2 = 0,9990$. Determine el costo total relevante y el nivel de servicio P_1 generado. Compare con el costo total relevante encontrado en a) y explique el resultado.
 - c) Para el sistema diseñado en el literal (a), a usted le plantean que el intervalo de revisión se debería disminuir de 7 a 5 días, para que “el producto llegue más rápido” y que así habría ahorro en costos.

- ¿Está de acuerdo con este planteamiento desde el punto de vista de costo total relevante y de aspectos administrativos? ¿Por qué?
- d) Le plantean la misma idea de reducir el intervalo de revisión de 7 a 5 días, pero para el caso del literal b), o sea, cuando se especifica $P_2 = 0,9990$. ¿Estaría de acuerdo con implementar el cambio? ¿Qué implicaciones administrativas podría tener?
- e) Encuentre el nivel de servicio óptimo P_2 que produce el mínimo costo total relevante (una hoja electrónica es de gran ayuda para resolver este problema).
8. Se están considerando tres servicios de transporte por camión para hacer repartos desde una de sus plantas manufactureras hacia su centro de distribución. Se dispone de la siguiente información:

Demanda (constante y conocida)	4.500.000 kg/año
Costo de procesamiento de una orden	\$250/pedido
Precio del producto (FOB planta)	\$1,75/kg
Cantidad de envío	Igual al EOQ (constante)
Costo de manejo del inventario en tránsito	20% anual
Costo de manejo del inventario cíclico y de seguridad	30% anual*
Nivel de servicio P_1 durante el tiempo de reposición	97,5% (constante)
Costo de faltantes B_2	Desconocido
Días de venta	365 días/año

* Utilice este costo de manejo para el cálculo del EOQ .

La información sobre los tres transportadores se ilustra a continuación:

Característica	Transportador A	Transportador B	Transportador C
T. de reposición (LT)	6 días	8 días	11 días
Variabilidad del LT (σ_{LT})	2,0 días	1,5 días	1,0 días
Flete	\$0,300/kg	\$0,295/kg	\$0,313/kg

En el centro de distribución se aplica un sistema de control (s, Q) del inventario. La tasa mínima de retorno de la empresa es del 15%.

- a) Construya una hoja electrónica que le permita determinar cuál de los tres transportadores debería seleccionarse con base en lo expuesto en el ejemplo 5.8 y asumiendo que B_2 es despreciable (la hoja electrónica puede comparar parejas de modos de transporte y utilizarse repetidamente, conservando el mejor modo cada vez).

- b) Usted estima que, aunque el transportador C tiene el mayor tiempo de reposición, es el más confiable dada su baja variabilidad. ¿Cuál es el máximo flete que estaría usted dispuesto a pagarle al transportador C para poder adoptar esta opción?
- c) Analice la incidencia que podría tener sobre la decisión un alto costo de faltantes B_2 (en otras palabras, realice un análisis paramétrico en B_2 , tal que $0\% \leq B_2 \leq 100\%$).
9. Una compañía lleva en inventario tres tipos de alfombras muy especiales con las siguientes características:

Tipo de alfombra	Demanda anual (m)	Costo (\$/m)
Tipo A	300	23.000
Tipo B	200	18.400
Tipo C	100	13.800

Las alfombras se ordenan conjuntamente al mismo proveedor. La emisión de cada orden cuesta \$46.000 y se ha estimado una tasa $r = 25\%$ anual. Se ha encontrado que la demanda de cada una de las alfombras es muy estable, al igual que el tiempo de reposición del proveedor.

- a) Determine el intervalo de revisión óptimo R^* común para las tres alfombras, considerando los costos de ordenamiento y del inventario cíclico promedio.
- b) Con base en el valor de R^* determinado anteriormente, estime los tamaños promedio de orden de cada alfombra.
- c) Analice el efecto que tiene el valor de la tasa r sobre el valor óptimo R^* .
- d) ¿Considera conveniente ordenar estas tres alfombras mediante un sistema continuo (s, Q) ?
10. Suponga que usted es el proveedor de la compañía de alfombras del problema anterior. A usted le cuesta \$4.600.000 cada vez que alista sus máquinas para procesar una orden de la compañía. Si su tasa de costo de mantenimiento del inventario es del 37,5% anual, ¿qué tamaños de lote preferiría fabricar de cada tipo de alfombra? Para responder esta pregunta, asuma que la compañía de alfombras es prácticamente la única que consume este tipo de alfombras y que usted calcula el precio de venta de cada tipo adicionándole un 45%

a su costo variable de producción. ¿Cómo conciliaría usted con la compañía los tamaños de lote?

EJERCICIOS ADICIONALES Y DE REPASO

- El siguiente problema ha sido diseñado con base en una muestra de un caso real. Usted ha decidido mejorar el sistema de inventarios que lleva su empresa comercial a través de un análisis integral. Su empresa mantiene en inventario alrededor de 250 ítems, de los cuales ha escogido una muestra de 10 ítems representativos. Para iniciar su análisis, ha recolectado datos sobre la demanda real de estos ítems en las últimas 30 semanas, los cuales se resumen en la tabla 5.4.

Tabla 5.4. Datos de demanda, tipo, valor y proveedor de 10 ítems para el problema No. 1 (ejercicios adicionales y de repaso capítulo 5)

DEMANDA, TIPO, VALOR Y PROVEEDOR PARA DIEZ ÍTEMES SELECCIONADOS:										
Semana	CÓDIGOS DE ÍTEMES									
	P001	P002	P003	P004	P005	P006	P007	P008	P009	P010
1	3.487	2.324	82	110	49	97	16	1.521	14	12
2	3.487	1.942	76	97	16	97	17	1.521	21	27
3	2.622	1.431	72	111	18	102	12	1.154	14	14
4	2.942	1.833	70	171	21	107	22	978	24	0
5	2.994	1.818	98	131	15	130	21	1.120	18	17
6	2.997	1.973	69	86	12	89	26	1.221	20	0
7	3.147	1.751	68	115	12	171	20	1.092	19	13
8	2.832	1.771	74	71	14	101	27	1.573	28	13
9	3.008	1.484	73	101	93	123	23	1.384	11	0
10	3.040	1.424	65	129	76	105	34	1.149	11	11
11	2.817	1.749	62	109	47	144	31	1.269	17	1
12	2.965	2.342	75	117	126	149	12	1.116	15	7
13	3.310	1.792	76	121	164	142	28	1.215	11	0
14	3.406	1.660	74	76	133	122	18	1.285	9	0
15	3.568	2.224	79	94	117	76	17	1.100	17	1
16	3.385	1.815	71	121	123	136	23	1.370	15	8
17	3.036	1.659	80	71	94	119	23	1.023	15	3
18	3.449	1.897	87	91	142	128	31	1.448	12	9
19	3.383	1.712	81	91	156	176	23	1.497	16	3
20	3.510	1.649	87	76	116	148	13	1.448	20	0
21	3.097	1.647	90	82	112	163	22	1.600	29	19
22	3.608	1.327	97	90	120	170	19	1.598	9	4
23	3.625	1.426	72	83	150	170	18	1.353	16	17
24	3.674	1.605	82	88	119	201	24	1.750	11	2
25	3.454	1.507	117	65	85	102	26	1.664	8	21
26	3.114	1.560	72	96	125	219	16	1.625	14	10
27	2.982	1.494	81	69	92	130	27	1.950	28	0
28	3.228	1.650	86	77	129	110	13	1.882	10	20
29	2.879	1.769	63	62	91	186	22	2.056	9	0
30	3.181	1.577	86	55	116	132	21	2.314	15	2
Valor (\$/u.)	1.500	970	850	350	575	7.575	670	890	300	285.000
Tipo	A	B	C	C	C	B	C	B	C	A
Proveedor	Prov1	Prov1	Prov1	Prov1	Prov2	Prov2	Prov2	Prov3	Prov3	Prov3

También ha recolectado información acerca del desempeño de sus proveedores con relación a sus tiempos de reposición, utilizando datos de los últimos 20 despachos recibidos de cada uno (por simplicidad no se consideran diferentes tiempos de reposición para cada ítem). La tabla 5.5 resume esta información.

Después de un detallado análisis sobre costos, ha concluido que un valor del 22% anual es adecuado para el costo de mantenimiento del inventario y que el costo general de hacer un pedido es de \$18.000, independientemente del número de ítems que contenga el pedido. A través de análisis históricos, determinó que ha estado cumpliendo aproximadamente con el 96% de la demanda solicitada por sus clientes de su inventario disponible, pero le gustaría mejorar este nivel de servicio. El 4% restante de la demanda frecuentemente se pierde ya que sus productos son altamente sustituibles. Se ha encontrado además que, en promedio, los productos clase A tienen una rentabilidad del 15% sobre su valor, los productos clase B, del 12%, y los productos clase C, del 10%. Sin embargo, usted sospecha que el costo de faltantes calculado con base en estos datos se puede incrementar en al menos un 30% por la pérdida de imagen de su compañía ante los clientes cuando se pierde una venta.

**Tabla 5.5. Datos de tiempos de reposición de proveedores para el problema No. 1
(ejercicios adicionales y de repaso capítulo 5)**

DATOS DE LEAD TIMES DE LOS PROVEEDORES [días]			
Dato No.	Prov1	Prov2	Prov3
1	5	12	7
2	7	10	7
3	3	9	6
4	6	7	5
5	10	7	7
6	4	6	7
7	2	14	8
8	5	10	6
9	4	11	5
10	8	11	9
11	4	13	7
12	3	7	5
13	11	7	7
14	5	10	7
15	4	16	6
16	3	12	5
17	5	18	5
18	7	7	7
19	12	7	5
20	5	12	8

Usted debe diseñar un buen sistema de pronósticos para todos los ítems de la muestra (estos resultados se harán extensibles, por supuesto, a todos los ítems de su empresa después de su análisis). Aunque ha estado interactuando con sus proveedores, éstos han estado reacios a manejar órdenes demasiado pequeñas u órdenes muy frecuentes con muy pocos ítems, lo que podría ser el resultado de aplicar un sistema de control continuo. Por ello, ha decidido emplear un sistema de control (R, S) para todos los ítems, de tal forma que se facilite la coordinación. Sin embargo, piensa que el intervalo de revisión para los ítems clase A debería ser menor que el de los B, y el de éstos menor que el de los C, para facilitar la administración del sistema y tener menor inventario de seguridad.

Haciendo los supuestos que considere razonables y sustentándolos, diseñe un sistema de control integral de inventarios, basado en la muestra de 10 ítems que se da en las dos tablas anteriores.

2. La empresa ABC está utilizando un sistema de control (s, Q) y tiene la política de fijar los inventarios de seguridad para obtener un nivel de servicio $P_2 = 0,995$ (asuma que todos los faltantes se convierten en órdenes pendientes). Para un ítem con patrón de demanda perpetua, la demanda promedio es de 18.000 unidades/año y se utiliza un tamaño de pedido $Q = 1.500$ unidades (asuma que 1 año = 52 semanas). El proveedor del ítem presenta un tiempo de reposición constante de 3 semanas. El precio actual de compra es de \$15.000/unidad y el costo de ordenamiento se ha estimado en 10.000 \$/orden. Contratando un nuevo medio de transporte, el proveedor ofrece disminuir el tiempo de reposición a un valor constante de 2 semanas, bajo dos condiciones. Primero, incrementará el valor de cada ítem en un 5% y, segundo, la empresa debe aumentar los tamaños de lote a 1.750 unidades. Asumiendo que la desviación estándar semanal de los errores del pronóstico es de 180 unidades y que el costo de mantenimiento del inventario es del 24% anual, ¿debe la empresa aceptar la oferta del proveedor? ¿Por qué? ¿Depende esta decisión del valor del costo de faltantes B_2 ($0 \leq B_2 \leq 1$). ¿Cuál es el máximo valor del producto que puede fijar el proveedor con su oferta para que la empresa pueda aceptarla?
3. Una empresa está usando un sistema de control (s, Q) para un repuesto muy importante utilizado en varias máquinas de producción. Las propiedades del ítem son las siguientes:

$$D = 2.000 \text{ unidades/año}$$

$$v = \$60.000/\text{unidad}$$

$$\hat{x}_L = 150 \text{ unidades}$$

$$P_1 = 97,5\%$$

$$A = \$45.000/\text{pedido}$$

$$r = 20\% \text{ anual}$$

$$\sigma_L = 60 \text{ unidades}$$

Cuando un faltante está a punto de ocurrir, se genera una acción de emergencia que evita la ocurrencia del faltante. El costo de esta acción es de aproximadamente \$600.000, independiente de la magnitud del faltante en unidades. La compañía utiliza el *EOQ* como tamaño de lote.

- a) Determine el *EOQ* y el punto de reorden s .
 - b) ¿Cuál es el costo total relevante esperado, incluyendo costos de ordenamiento, mantenimiento del inventario y acciones de emergencia?
 - c) Se sospecha que la política anterior puede ser mejorada mediante un incremento del tamaño de pedido utilizado. Trate de mejorar la política anterior y discuta los resultados, principalmente con respecto del nivel de servicio alcanzado.
 - d) Discuta otras formas de mejoramiento de la política de inventarios presentada en este caso.
4. Suponga que un ítem controlado bajo un sistema (s, Q) tiene una demanda sobre el tiempo de reposición D_L “uniformemente distribuida” entre a y b .
- a) Determine una fórmula para el punto de reorden s , para producir un nivel de servicio especificado P_1 . Ilustre con $a = 100$, $b = 200$ y $P_1 = 0,975$.
 - b) Para una cantidad especificada Q encuentre una ecuación para calcular el punto de reorden s dado un nivel de servicio *TEF*. Ilustre para $a = 100$, $b = 200$, $Q = 500$ unidades, $D = 1.000$ unidades/año y $TEF = 2$ años.
 - c) Para una cantidad especificada Q encuentre una expresión para determinar el punto de reorden s dado un nivel de servicio P_2 . Ilustre para $a = 100$, $b = 200$, $Q = 500$ unidades, $D = 1.000$ unidades/año y $P_2 = 0,990$.
- (*Sugerencia:* recuerde que las expresiones mostradas en este capítulo son válidas para cualquier distribución probabilística de demanda sobre el tiempo de reposición.)
5. La demanda semanal para cierto tipo de impresoras en un almacén de computadores se distribuye normalmente con una media de 250 unidades y una desviación estándar de 150 unidades. Esta impresora se controla con un sistema (s, Q) , ordenando 1.000 impresoras cada vez que el inventario efectivo baja a 600 impresoras. El tiempo de reposición actual es de dos semanas.

- a) Determine el inventario de seguridad en unidades que está manteniendo el almacén.
 - b) Determine los niveles de servicio P_1 y P_2 alcanzados mediante esta política.
 - c) Si no está satisfecho con los niveles de servicio anteriores, proponga alternativas de mejoramiento de la política actual de control.
6. En el problema anterior asuma que el tiempo de reposición se distribuye normalmente con media 2 semanas y desviación estándar 2 semanas.
- a) Determine el inventario de seguridad en unidades que debe mantener el almacén para lograr un nivel de servicio $P_2 = 99,5\%$.
 - b) Construya un gráfico del inventario de seguridad requerido para lograr el nivel de servicio planteado en el literal anterior en función de la desviación estándar del tiempo de reposición, variando ésta desde 2 semanas hasta 0 semanas (LT constante), en intervalos de 0,1 semanas. Una hoja electrónica puede ser de gran ayuda para resolver este punto. Comente acerca de los resultados.
7. Cierta materia prima presenta un consumo promedio mensual de 35 toneladas, con una desviación estándar con base mensual estimada en 10 toneladas. Normalmente, el tiempo de reposición del proveedor es de 1 mes con una desviación estándar de 0,25 meses. Actualmente, el punto de reorden se ha fijado en 45 toneladas.
- a) Calcule la probabilidad de tener la materia prima agotada por cada ciclo de reposición.
 - b) Si la administración sugiere aumentar el punto de pedido a 1,5 meses de demanda promedio, ¿estaría de acuerdo?
8. Un ítem controlado con un sistema de control continuo (s, Q) presenta un tiempo de reposición con un valor esperado de 5 semanas y una desviación estándar de 0,5 semanas. La demanda promedio del ítem es de 2.000 unidades/semana. La desviación estándar de la demanda sobre el tiempo de reposición aleatorio, σ_w , es igual a 1.049 unidades y se está utilizando un tamaño de pedido de 4.000 unidades. Se ha especificado un nivel de servicio P_2 de 0,995 y se asume que todos los faltantes se convierten en órdenes pendientes. Usted quiere investigar el efecto del cambio de diversos parámetros

sobre el inventario de seguridad, sin detrimento del nivel de servicio especificado, a saber:

- a) Un aumento del 50% en el tamaño de pedido.
- b) Una disminución del 50% en el valor esperado del tiempo de reposición.
- c) Una disminución del 50% en la desviación estándar del tiempo de reposición.

Comente acerca de los efectos prácticos de los resultados anteriores.

9. En su empresa, usted utiliza un sistema de revisión periódica (R, S) para un ítem que presenta las siguientes características (asuma que 1 año = 52 semanas):

$$D = 25.220 \text{ unidades/año}$$

$$v = \$28.000/\text{unidad}$$

$$LT = 2,5 \text{ semanas}$$

$$P_1 = 96\%$$

$$B_2 = 35\% \text{ del valor del ítem}$$

$$A = \$121.000/\text{pedido}$$

$$r = 24\% \text{ anual}$$

$$\sigma_1 = 100 \text{ unidades}$$

(con base semanal)

Usted ha determinado el intervalo de revisión R a partir de la relación EOQ/D , redondeando al valor más lógico, de acuerdo con el resultado del cálculo mencionado. Asumiendo que actualmente el inventario a la mano del ítem es de 1.154 unidades, que hay un pedido pendiente por llegar de 800 unidades y que no hay pedidos pendientes por satisfacer a los clientes, resuelva los siguientes puntos:

- a) Construya una hoja electrónica para resolver este problema. Determine el intervalo de revisión R a partir del EOQ y redondéelo al valor más lógico de acuerdo con el resultado.
- b) Calcule el inventario máximo S del ítem, de acuerdo con la información suministrada, estime el *fill rate* generado y estime el costo total relevante CTR en \$/año bajo la política de control actual.
- c) Con la información dada, ¿es lógico que haya un pedido pendiente? ¿Por qué sí o por qué no? ¿Esto es una barrera para utilizar este sistema de control?
- d) Con la información dada, determine el tamaño de pedido que debe hacerse (recuerde tener en cuenta el *inventario efectivo* del ítem).
- e) Manteniendo el nivel de servicio P_1 actual, determine el intervalo de revisión óptimo R^* que minimiza el CTR . ¿Está satisfecho con el valor obtenido en el literal a)?

- f) Asuma que el nivel de servicio especificado desde un comienzo es $P_1 = 98\%$ y que mantiene el R calculado en el literal a). Recalcule el CTR . ¿Es sorprendente el resultado? Con base en este resultado, ¿qué es lo mejor que podría recomendar?
10. Para la producción de una máquina, su empresa compra un componente costoso a un proveedor internacional. Los datos que ha recolectado sobre este ítem son los siguientes (asuma que 1 año = 12 meses):

$$\begin{array}{ll} d = 7.500 \text{ unidades/mes} & A = \$230.000/\text{pedido} \\ v = \$860.000/\text{unidad} & r = 30\% \text{ anual} \\ (\text{valor del ítem sin descuento}) & B_2 = 30\% \text{ del valor del ítem} \\ LT = 1 \text{ mes} & P_1 = 97,5\% \\ \sigma_1 = 1.875 \text{ unidades (con base mensual)} & \end{array}$$

Para el control del inventario del ítem, ha escogido un sistema (s, Q) . El proveedor le está ofreciendo el siguiente esquema de descuentos sobre todas las unidades:

Intervalo del tamaño de pedido	Q (u.)	Descuento (%)
Menor o igual que 499		0,00
Mayor o igual que 500 y menor o igual que 999		1,00
Mayor o igual que 1.000 y menor o igual que 2.999		1,50
Mayor o igual que 3.000 y menor o igual que 4.999		1,75
Mayor o igual que 5.000		1,95

- a) Construya una hoja electrónica para resolver este problema. Determine la mejor política (s, Q) para el control de este componente. Es decir, halle el punto de reorden s y el tamaño óptimo de pedido Q que minimice el CTR , considerando los descuentos. Recuerde incluir el costo de compra en el CTR .
- b) Repita el literal anterior, pero especificando un nivel de servicio $P_1 = 99,0\%$. ¿Le sorprenden los resultados? Si para usted un nivel de servicio *mínimo* de P_1 del 97,5% es aceptable, ¿cómo podría reducir aún más el CTR encontrado aquí?

LECTURAS ADICIONALES

CHOPRA y MEINDL (2008): capítulo 11 (pp. 304-318 y 329-332) (En estas páginas se refuerza lo expuesto en este capítulo sobre el cálculo de los inventarios de seguridad). AXSÄTER (2000): capítulo 3 (pp. 49-90) (Esta parte de este capítulo profundiza en algunos aspectos teóricos sobre inventarios de seguridad y tiempos de reposición).

SILVER *et al.* (1998): capítulo 7 (pp. 232-311) (Este capítulo del texto principal de referencia de inventarios expone detalles adicionales de algunos aspectos, brindando una bibliografía muy completa para el estudiante que desee profundizar).

SIPPER y BULFIN (1998): capítulo 6 (pp. 281-311) (Esta parte de este capítulo trata los sistemas de revisión continua y periódica de una forma fácilmente comprensible).

WILD (1997): capítulos 6 y 7 (pp. 85-113) (Estos dos capítulos abordan los temas vistos aquí de una forma muy práctica, brindando otra visión muy interesante del problema. Incluye también un análisis muy completo de los tiempos de reposición y sus efectos).

CAPÍTULO 6

INTRODUCCIÓN AL CONTROL CONJUNTO DE ÍTEMS

GENERALIDADES

Todos los métodos de control estudiados en los capítulos anteriores se refieren a un ítem en particular. Normalmente, la administración está interesada en el control conjunto de varios ítems en forma simultánea. Esto se debe al hecho de que dichos ítems pueden ser suministrados por un mismo proveedor, o comparten un mismo modo de transporte, o son producidos en las mismas máquinas o línea de producción.

Existen diversas ventajas cuando se realiza control conjunto, a saber:

- Ahorros en precios unitarios de compra, ya que al efectuar la coordinación se pueden lograr los tamaños de orden mínimos impuestos por el proveedor para otorgar cierto descuento. Igualmente, se pueden lograr economías de escala al utilizar medios de transporte con cierto volumen mínimo. Si el ambiente es productivo, se puede lograr ahorro en costos de alistamiento innecesarios y mayores corridas de producción para una misma familia de ítems.
- Ahorro en los costos totales de ordenamiento, ya que al incluir más ítems en una orden sencilla, es posible disminuir el número anual de órdenes.
- Facilidad de programación, en cuanto a recepción de materiales, inspección, etc. En efecto, muchas empresas piensan en pedidos realizados por proveedor, en lugar de considerar ítems individuales.

Por otra parte, al realizar la coordinación, también se pueden presentar algunas desventajas:

- Incremento en el nivel promedio de inventario, debido a que algunos ítems pueden ser incluidos en una orden antes de que alcancen su punto de reorden. Esto puede ocurrir, por ejemplo, cuando se está utilizando un sistema (s, S) para varios ítems.
- Incremento en los costos de control, debido a la necesidad misma de la coordinación de varios ítems. Éstos consisten específicamente en los costos de revisión, costos de computador, costos de administración y coordinación, entre otros posibles.
- Reducción de flexibilidad, especialmente con respecto de los niveles de servicio de ítems individuales.

Lo que se presenta a continuación ha sido adaptado de Silver *et al.* (1998), pp. 179-181, 284-294.

CURVAS DE INTERCAMBIO

Normalmente, la administración de un sistema de inventarios está interesada en medidas agregadas de eficiencia, constituidas por varios ítems individuales. Esta idea da más información globalizada para la toma de decisiones. Por ejemplo, es difícil, en muchas ocasiones, determinar valores aproximados del costo de ordenamiento A y del costo de mantenimiento del inventario r . Por lo tanto, se recurre a las denominadas *curvas de intercambio*, las cuales reúnen a varios ítems individuales y pueden servir para estimar valores de A y/o r .

Considerando varios ítems, las medidas agregadas de eficiencia más comunes son las siguientes (generalmente son referidas a un año, pero puede utilizarse otra unidad de tiempo):

- Máximo costo total anual del inventario promedio.
- Máximo costo fijo total (o número total) de reposiciones por año.
- Máximo valor de faltantes por año.
- Máxima demora permitida de órdenes pendientes.

Curvas de intercambio determinísticas

Considérese los siguientes parámetros y variables (asúmase una situación de demanda aproximadamente constante, como la establecida en el capítulo 4):

A = Costo de ordenamiento común para todos los ítems (si este no es el caso, se puede definir un costo de ordenamiento a_i para cada ítem i) en \$/orden.

D_i = Demanda anual del ítem i en unidades/año.

n = Número de ítems considerados en el análisis.

Q_i = Tamaño de pedido del ítem i en unidades.

v_i = Valor unitario del ítem i en \$/unidad.

El inventario cíclico promedio total en \$ viene dado por:

$$ICPT = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i v_i}{2} \quad (6.1)$$

Y el número total de reposiciones o ciclos por año, para todos los ítems, viene dado por:

$$N = \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{Q_i} \quad (6.2)$$

Como se está utilizando la cantidad óptima de pedido EOQ para cada ítem, se tiene que:

$$Q_i = \sqrt{\frac{2AD_i}{v_i r}} \quad (6.3)$$

Por lo tanto, al reemplazar (6.3) en (6.1) y (6.2), se obtiene:

$$ICPT = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{AD_i v_i}{2r}} = \sqrt{\frac{A}{r}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n \sqrt{D_i v_i} \quad (6.4)$$

$$N = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{D_i v_i r}{2A}} = \sqrt{\frac{r}{A}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n \sqrt{D_i v_i} \quad (6.5)$$

Obsérvese que tanto $ICPT$ como N dependen de la relación A/r . Más aún, si se multiplican las dos ecuaciones, miembro a miembro, se obtiene:

$$(ICPT)(N) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sqrt{D_i v_i} \right]^2 \quad (6.6)$$

Esta corresponde a la ecuación de una hipérbola en las variables $ICPT$ y N . La expresión del lado derecho se puede calcular fácilmente cuando se dispone de los datos correspondientes para todos los ítems agrupados. Además, dividiendo, miembro a miembro, las Ec. (6.4) y (6.5), se obtiene:

$$\frac{ICPT}{N} = \frac{A}{r} \quad (6.7)$$

Por lo tanto, se puede dibujar la hipérbola y para cada punto sobre ella calcular la relación de A/r , la cual puede utilizarse para estimar el valor de uno de los parámetros si se ha estimado el otro.

Ejemplo 6.1 (Curvas de intercambio determinísticas)

Considérese la coordinación de cuatro ítems con las características mostradas en la tabla 6.1.

Tabla 6.1. Características de los cuatro ítems del ejemplo 6.1

Ítem <i>i</i>	D_i [unidades/año]	v_i [\$/unidad]
1	7.200	4.000
2	4.000	1.800
3	500	10.000
4	100	1.620

Bajo las políticas actuales de control de inventarios, se están utilizando los siguientes tamaños de pedido para cada uno de los ítems:

$$Q_1 = 17 \text{ unidades}; Q_2 = 278 \text{ unidades}; Q_3 = 61 \text{ unidades}; Q_4 = 17 \text{ unidades}.$$

Primero se calcula, de acuerdo con las Ec. (6.1) y (6.2), los indicadores de eficiencia de la actual política de pedidos:

$$\begin{aligned} ICPT &= \sum_{i=1}^4 \frac{Q_i v_i}{2} = \frac{1}{2} [(17 \times 4.000) + (278 \times 1.800) + (61 \times 10.000) + (17 \times 1.620)] \\ &= 602.970 \text{ $/año} \end{aligned}$$

$$N = \sum_{i=1}^4 \frac{D_i}{Q_i} = \frac{7.200}{17} + \frac{4.000}{278} + \frac{500}{61} + \frac{100}{17} = 452 \text{ pedidos/año}$$

Ahora, para desarrollar la curva de intercambio, se aplica la Ec. (6.6) y se obtiene:

$$(ICPT)(N) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sqrt{D_i v_i} \right]^2 = 57.121.000$$

La curva correspondiente se muestra en la figura 6.1. Se ilustra el punto de operación actual determinado con base en los cálculos anteriores. Se puede observar que existen posibilidades de mejoramiento hacia los puntos P o Q, o hacia cualquier punto sobre la curva localizado entre P y Q, si

se utiliza el EOQ como política de control. Si nos movemos hacia el punto P sobre la curva, entonces se estaría conservando la inversión total en inventario cíclico promedio $ICPT = 602.970 \$/\text{año}$, pero se mejoraría notablemente el indicador de número total de pedidos/año N . Análogamente, si el desplazamiento es vertical hacia el punto Q, se estaría conservando el actual indicador $N = 452$ pedidos/año, pero con una inversión mucho menor en inventario cíclico promedio total. Un movimiento intermedio hacia algún punto de la curva entre P y Q equivaldría a mejorar simultáneamente ambos indicadores.

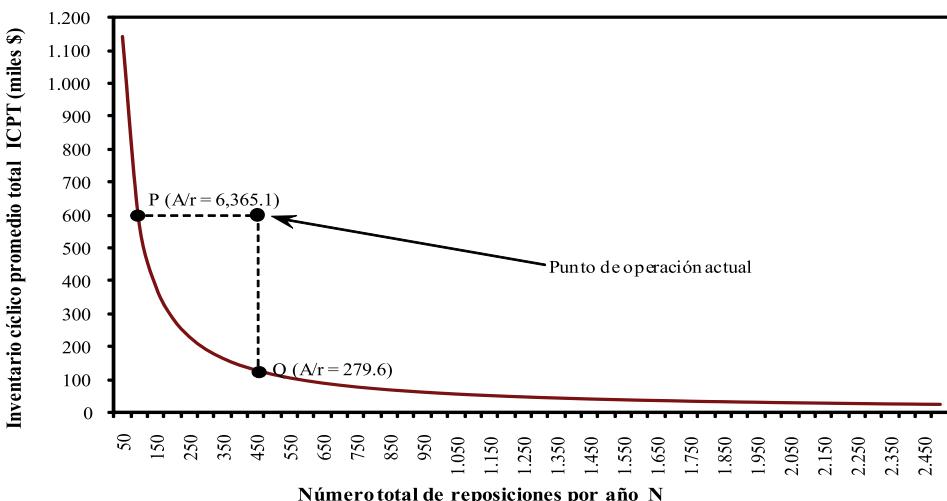


Figura 6.1. Curva de intercambio determinística (ejemplo 6.1)

Obviamente, lo que está ocurriendo aquí es que la política actual de pedidos es deficiente. Esta es una situación muy frecuente en la práctica y por ello siempre existirán oportunidades de mejoramiento.

El punto específico sobre la curva en el cual se estaría operando si se utiliza el EOQ depende claramente de la relación A/r , como se observa en la figura. Los valores de A/r mostrados se calculan con base en las coordenadas de cada punto, aplicando la Ec. (6.7). Supóngase, por ejemplo, que se ha decidido como política mantener el inventario cíclico promedio total anual de $602.970 \$/\text{año}$ para estos cuatro ítems (o sea, desplazarse horizontalmente hacia el punto P). El valor de N vendría dado por $N = 57.121.000/602.970 = 94,73$ ciclos/año. Por lo tanto, el valor de A/r asociado es $A/r = 602.970/94,73 = 6.365,1$. Se sugiere comprobar el valor A/r para el punto Q.

El valor de A/r calculado anteriormente permite determinar uno de los dos parámetros si el otro ha sido estimado. Para ilustrar, considérese que

se ha establecido con cierta precisión $r = 0,20 \$/ (\$ \text{ año})$. Así el valor de A implicado vendría dado por $A = (A/r) \times r = 6.365,1 \times 0,20 = \$1.273,02$. Este valor podría compararse con estimados que se tengan de él.

Con el valor especificado de A/r y los demás datos se puede calcular el nuevo tamaño de pedido para cada ítem mediante la Ec. (6.3). Observando que no se necesita conocer los valores específicos de A y de r , la política corregida produciría los siguientes valores (se ilustra sólo el cálculo de Q_i), los cuales difieren significativamente de los utilizados actualmente:

$$Q_1 = EOQ_1 = \sqrt{\frac{2D_1}{v_1} \left(\frac{A}{r} \right)} = \sqrt{\frac{2 \times 7.200}{4.000} \times 6.365,1} = 152 \text{ unidades}$$

$$Q_2 = EOQ_2 = 168 \text{ unidades}$$

$$Q_3 = EOQ_3 = 25 \text{ unidades}$$

$$Q_4 = EOQ_4 = 28 \text{ unidades}$$

Curvas de intercambio probabilísticas

Las curvas de intercambio probabilísticas son más útiles que las determinísticas debido a su gran aproximación con los sistemas reales de control de inventarios. Es posible generarlas en forma semejante a lo realizado en la sección anterior. Asumiendo normalidad en los errores de pronósticos y teniendo en cuenta los resultados del capítulo 5, se pueden escribir las siguientes expresiones “para cada ítem i ”:

$$\text{Inventario de seguridad en pesos (\$)} = IS_i v_i = k_i \sigma_{L_i} v_i \quad (6.8)$$

$$\text{Valor esperado del número de veces en que ocurre faltantes por año} = \frac{D_i}{Q_i} p_z(k_i) \quad (6.9)$$

$$\text{Valor esperado de faltantes por año (\$)} = \frac{D_i}{Q_i} v_i \sigma_{L_i} G_z(k_i) \quad (6.10)$$

$$\text{Valor esperado del nivel de servicio (P}_2\text{)} = 1 - \frac{\sigma_{L_i} G_z(k_i)}{Q_i} \quad (6.11)$$

$$\text{Valor esperado del nivel de servicio (P}_1\text{)} = 1 - p_z(k_i) \quad (6.12)$$

Para obtener los indicadores para los n ítems bajo consideración, simplemente se realiza la sumatoria sobre todos ellos. Se acostumbra también calcular niveles de servicio ponderados por demanda. Así, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\text{Inventario de seguridad total en pesos } IST (\$) = \sum_{i=1}^n k_i \sigma_{L_i} v_i \quad (6.13)$$

Número total esperado de veces/año en que ocurren faltantes $NTEF =$

$$\sum_{i=1}^n \frac{D_i}{Q_i} p_z(k_i) \quad (6.14)$$

Valor esperado total de unidades en faltante por año $VTEF (\$) =$

$$\sum_{i=1}^n \frac{D_i}{Q_i} v_i \sigma_{L_i} G_z(k_i) \quad (6.15)$$

Nivel de servicio (P_2) ponderado por demanda =

$$\frac{\sum_{i=1}^n D_i \left[1 - \frac{\sigma_{L_i} G_z(k_i)}{Q_i} \right]}{\sum_{i=1}^n D_i} \quad (6.16)$$

Nivel de servicio (P_1) ponderado por demanda =

$$\frac{\sum_{i=1}^n D_i [1 - p_z(k_i)]}{\sum_{i=1}^n D_i} \quad (6.17)$$

La Ec. (6.15), obtenida a partir de la Ec. (6.10), merece dos comentarios. Primero, nótese que no aparece multiplicada por el costo unitario de faltantes del ítem i , $B_{2,i}$, luego esta ecuación representa el valor real de las unidades que se espera que falten, pero no el costo de faltantes exactamente. Sin embargo, es fácil implementar este cambio en la Ec. (6.15) siempre y cuando se disponga de la información suficiente para estimar el costo unitario de faltante de cada ítem. Segundo, en forma semejante al comentario que se hizo de la Ec. (5.11) en el capítulo 5, si $Q/\sigma_L < 1$, entonces es más exacto utilizar la siguiente ecuación en lugar de la Ec. (6.15):

$$VTEF = \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{Q_i} v_i \sigma_{L_i} \left[G_z(k_i) - G_z(k_i + \frac{Q_i}{\sigma_{L_i}}) \right] \quad (6.18)$$

Las dos curvas de intercambio más utilizadas son las siguientes:

- Inventario de seguridad total (IST) contra el número total esperado de veces/año en que ocurren faltantes ($NTEF$).
- Inventario de seguridad total (IST) contra el valor esperado total en pesos de unidades en faltante por año ($VTEF$).

Estas curvas se construyen dependiendo de la regla de decisión correspondiente, ya que cada una de dichas reglas genera diferentes puntos en el gráfico. El ejemplo 6.2 ilustra una de estas curvas.

Ejemplo 6.2 (Curvas de intercambio probabilísticas)

En la tabla 6.2 se muestran las principales características de cuatro ítems. Se asume que la cantidad de pedido mostrada para cada ítem ha sido predeterminada y se considera constante (esta cantidad no necesariamente se basa en el *EOQ*). La política actual de inventarios establece que los “puntos de reorden” s_i se determinen con base en la siguiente regla: reordenar cuando el inventario llegue a 2,5 meses de disponibilidad para cubrir la demanda, asumiéndola constante e igual al promedio D_i mostrado en la tabla 6.2. Por ejemplo, el punto de reorden del ítem 2 se calcula como $s_2 = (D_2/12) \times 2,5 = (8.500/12) \times 2,5 = 1.770,83$ unidades. Obsérvese que, al hacer esto para todos los ítems ignorando la variabilidad de su demanda, se está incurriendo en el error de definir inventarios de seguridad sólo con base en el inventario promedio (ver capítulo 5).

Tabla 6.2. Características de los cuatro ítems del ejemplo 6.2

Ítem <i>i</i>	Demanda D_i [u./año]	Valor unitario v_i [\$/u.]	Tiempo de reposición L_i [meses]	Desviación Estándar σ_{L_i} [u.]	Tamaño de pedido Q_i [u.]	Punto de reorden s_i [u.]
1	12.000	42,0	2,0	70,0	2.000	2.500
2	8.500	20,5	2,0	221,0	3.750	1.771
3	6.000	10,0	2,0	725,5	1.500	1.250
4	2.660	11,2	2,0	120,5	1.330	554

Utilizando las Ec. (6.8) a (6.10) y (6.13) a (6.15) se puede calcular el inventario de seguridad anual, el número esperado de ocasiones de faltantes por año y el valor esperado del costo total de faltantes por año para cada ítem y para todos los ítems.

Para ilustrar, considérese el ítem 2 cuya demanda esperada durante el tiempo de reposición viene dada por:

$$\hat{x}_{L_2} = \frac{D_2}{12} \times L_2 = \frac{8.500}{12} \times 2,0 = 1.416,67 \text{ unidades}$$

Como el punto de reorden para este ítem ya se tiene calculado igual a $s_2 = 1.770,83$ unidades, entonces se puede determinar su valor de k_2 implícito, así:

$$k_2 = \frac{s_2 - \hat{x}_{L2}}{\sigma_{L2}} = \frac{1.770,83 - 1.416,67}{221} \cong 1,6026$$

Dado este valor de k_2 , se puede encontrar fácilmente, de las tablas del Apéndice A o mediante las funciones internas de Excel™, los valores de $p_z(1,6026) = 0,05452$ y $G_z(1,6026) = 0,02310$. Así, mediante las Ec. (6.8) a (6.10) se puede calcular lo dicho anteriormente para todos los ítems, generándose la tabla 6.3 (puede haber pequeñas diferencias en las cifras debido a errores de redondeo).

Tabla 6.3. Indicadores para cada ítem y totales para la política de inventarios actual (ejemplo 6.2)

Ítem <i>i</i>	k_i	$p_z(k_i)$	$G_z(k_i)$	Inventario de seguridad IST_i [\$/año]	No. esperado de ocasiones de faltantes/año (NTEF)	Valor esperado de los faltantes [\$/año] (VTEF)
1	7,1429	0,00000	0,00000	21.000,00	0,00000	0,00
2	1,6026	0,05452	0,02310	7.260,42	0,12357	237,24
3	0,3446	0,36520	0,25010	2.500,00	1,46081	7.257,94
4	0,9198	0,17884	0,09684	1.241,33	0,35769	261,40
Total				32.001,75	1,94206	7.756,57

Nótese el desbalanceo en el nivel de servicio que se presenta, al no tener en cuenta la variabilidad de la demanda de cada ítem sobre su tiempo de reposición para determinar su punto de reorden. Por ejemplo, mientras que la probabilidad de ocurrencia de faltantes en cada ciclo de reposición del ítem 1 es prácticamente igual a cero por tener un factor k_1 muy alto y un $p_z(k_1)$ casi igual a cero, para los ítems 3 y 4 esta probabilidad es del 36,52% y del 17,88%, respectivamente, las cuales son demasiado altas para los niveles de servicio aceptables (esto coincide con la situación presentada en la figura 5.1 del capítulo 5).

Una forma de mejorar esta situación consiste en volver uniforme el nivel de servicio, determinando un nuevo valor de k_i y de $p_z(k_i)$ (y, por lo tanto, del nivel de servicio P_1) común para todos los ítems, suponiendo que el inventario de seguridad total anual IST se va a mantener constante, pero se va asignar de manera diferente a cada uno de los ítems. Así, el valor común k puede calcularse de la siguiente forma:

$$\text{Valor común } k = \frac{\sum_{i=1}^4 k_i \sigma_{L_i} v_i}{\sum_{i=1}^4 \sigma_{L_i} v_i} \quad (6.19)$$

De esta manera, se conserva el valor total anual del inventario de seguridad (\$). En este caso, al aplicar la Ec. (6.19) se obtiene un valor común de $k = 1,9908$. Para este valor de k , los valores comunes de $p_z(k)$ y $G_z(k)$ son 0,02325 y 0,00870, respectivamente. Así, se garantiza un nivel de servicio uniforme para los cuatro ítems de $P_1 = 1 - p_z(k) = 0,977$. Con estos valores se obtienen los resultados mostrados en la tabla 6.4.

Obsérvese cómo, *manteniendo el mismo valor del inventario de seguridad* (32.001,75 \$/año), se ha logrado disminuir el número esperado de ocasiones de faltantes/año en un 82,9% y el valor esperado del costo de faltantes [\$/año] en un 93,3%. Estos resultados pueden verse gráficamente mediante el desarrollo de curvas de intercambio.

Se construyen las curvas de intercambio del costo total del inventario de seguridad anual IST (\$/año) contra el número total de ocasiones de faltantes/año $NTEF$ y contra el costo total del inventario de seguridad (\$/año) $VTEF$. Estas curvas se obtienen generando diversos puntos con igualdad de nivel de servicio para los cuatro ítems, en este caso P_1 . Por ejemplo, la tabla 6.4 representa un punto de la curva del IST contra el $NTEF$ con coordenadas (0,33; 32.001,75), punto que se muestra en la figura 6.2. El resto de puntos para dibujar la curva se obtienen variando el valor de k_i , el cual es el mismo para todos los ítems en cada punto de la curva.

Tabla 6.4. Indicadores para cada ítem y totales para la política de inventarios modificada mediante la uniformización del nivel de servicio entre todos los ítems (ejemplo 6.2)

Ítem i	k_i	$P_z(k_i)$	$G_z(k_i)$	Inventario de seguridad IST_i [\$/año]	No. esperado de ocasiones de faltantes/año ($NTEF$)	Valor esperado de los faltantes [\$/año] ($VTEF$)
1	1,9908	0,02325	0,00870	5.852,85	0,13952	153,52
2	1,9908	0,02325	0,00870	9.019,16	0,05271	89,37
3	1,9908	0,02325	0,00870	14.443,00	0,09301	252,56
4	1,9908	0,02325	0,00870	2.686,74	0,04651	23,49
Total				32.001,75	0,33175	518,95

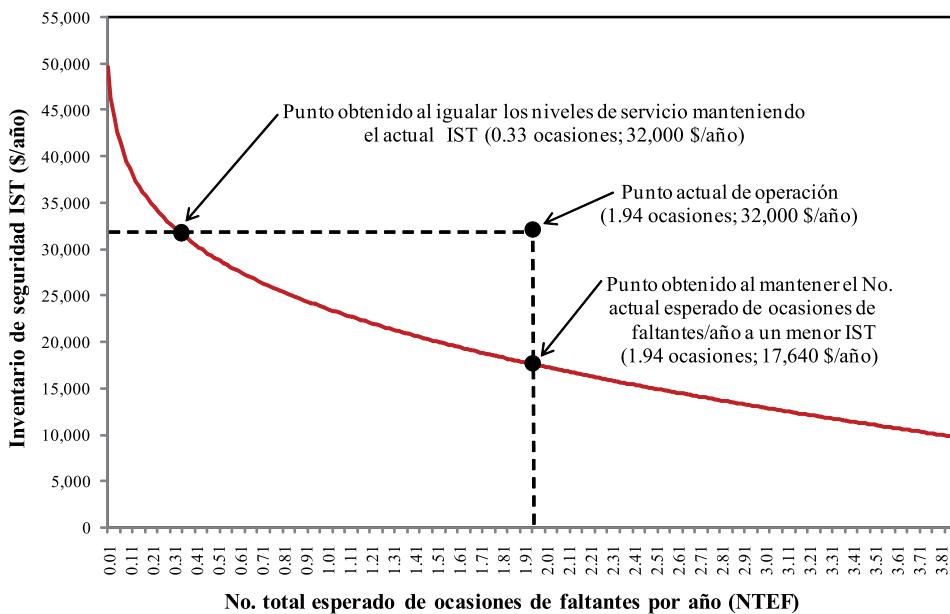


Figura 6.2. Curva de intercambio del inventario total de seguridad anual IST contra el No. total esperado de ocasiones de faltantes por año (NTEF) (ejemplo 6.2)

En forma semejante se construye la curva de intercambio mostrada en la figura 6.3, sólo que ahora se toma como valor de las abscisas el VTEF. El punto (518,95; 32.001,75), representado en la figura 6.3, corresponde a los cálculos realizados en la tabla 6.4. Se recomienda generar otros puntos de estas curvas, incluyendo los que se obtienen manteniendo los indicadores de NTEF y VTEF iguales al valor de la política actual de control, lográndolos con una inversión mucho menor en inventario de seguridad (puntos obtenidos mediante el desplazamiento vertical del punto de operación actual hacia las curvas de intercambio).

Es claro, de ambas curvas, cómo se puede mejorar significativamente los indicadores de gestión de inventarios, manteniendo la inversión anual en inventario de seguridad, reasignando dicho inventario a los cuatro ítems mediante la igualación de los factores de seguridad k_i y la definición correcta del inventario de seguridad a través de la variabilidad de la demanda (o de los errores del pronóstico) σ_{L_i} . Se podría también mantener el indicador de gestión del inventario actual si se considera conveniente, pero con una notable disminución en el inventario de seguridad anual total (desplazamiento vertical del punto de operación actual). También se podría obtener un punto intermedio entre ambos extremos, el cual permita mejorar los indicadores y, simultáneamente, disminuir el dinero comprometido en inventario de seguridad.

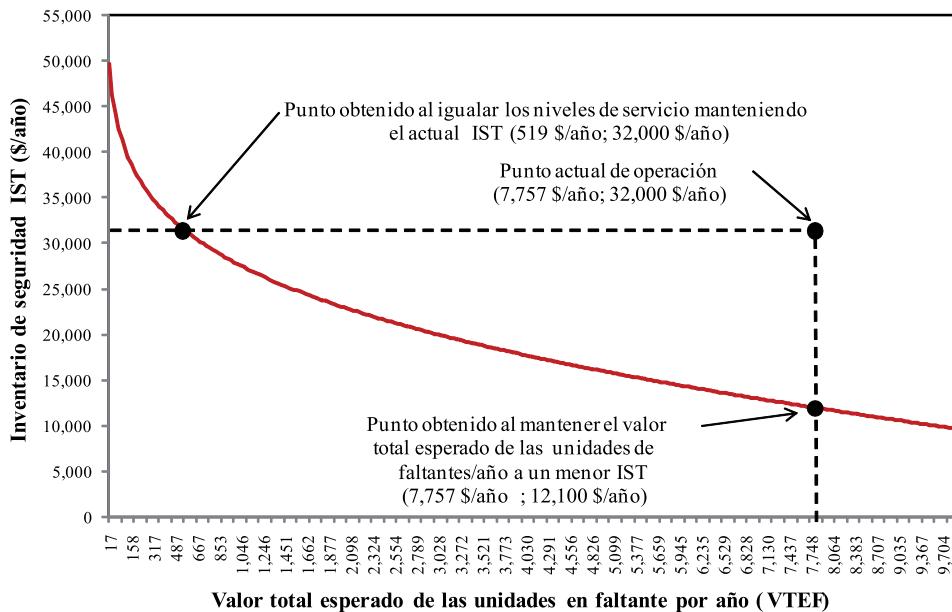


Figura 6.3. Curva de intercambio del inventario total de seguridad anual IST contra el valor esperado total en pesos de unidades en faltante por año (VTEF) (ejemplo 6.2).

Finalmente, al calcular los niveles de servicio ponderados por demanda, de acuerdo con las Ec. (6.16) y (6.17), se encuentra que el nivel de servicio P_1 ponderado, para la política actual de inventarios, es de 0,8926, mientras que para la nueva política de uniformizada es de 0,9768. Al calcular el *fill rate* P_2 ponderado por demanda, se obtiene 0,9739 para la política actual y 0,9988 para la política uniformizada. Como puede observarse, la nueva política es mucho mejor desde todo punto de vista.

De manera semejante se pueden desarrollar curvas de intercambio para diferentes reglas y políticas de inventarios (P_2 , B_1 y B_2 , por ejemplo), siempre igualando los niveles de servicio respectivos como se hizo con P_1 . Silver *et al.* (1998) han encontrado que la regla para P_1 funciona muy bien para los dos tipos de curvas desarrollados en este ejemplo. Esto es afortunado, ya que esta curva es relativamente sencilla de desarrollar y es muy útil.

REABASTECIMIENTO CONJUNTO

En la práctica, es muy difícil, o casi imposible, que las organizaciones controlen sus inventarios de ítems en forma aislada. Esto se debe a múltiples razones, entre las cuales las más importantes son los requerimientos de los tamaños de las órdenes de los proveedores, el medio de transporte utilizado y los procedimientos de compra que tiene la organización. Por

estas razones, las empresas deben controlar el inventario de varios ítems en forma conjunta. El ejemplo clásico es el de aquellos ítems que son suministrados por un mismo proveedor, quien, hoy, no va a aceptar una orden por cantidades relativamente pequeñas de tres ítems, mañana, por otras mínimas cantidades de otros dos ítems, y así sucesivamente. Para efectos prácticos, debe reunirse una orden de un tamaño adecuado para el procesamiento del proveedor y de la organización.

El análisis del control conjunto de inventarios no es sencillo. Los autores tratan este tema de muy diversas formas y presentan diferentes resultados de investigación, los cuales, en muchos de los temas, son muy recientes y otros problemas continúan siendo investigados intensivamente. Por esta razón, es muy difícil tratar todos los temas con algún nivel de detalle. A continuación se presentan algunos resultados importantes y se comenta acerca de la existencia de otros. Afortunadamente, los sistemas de inventarios son tan complejos que normalmente la aplicación de algunas técnicas sencillas no dista mucho de lo que podría ser un análisis exacto del problema. Recuérdese, muchas veces la solución más sencilla puede producir resultados extraordinarios.

Un sistema periódico de reabastecimiento conjunto

Ballou (2004, p. 361) presenta un método relativamente sencillo para el control periódico conjunto de varios ítems, el cual intuitivamente tiene mucho sentido. El procedimiento consiste en determinar un tiempo de revisión común para diversos ítems y ordenar cantidades diferentes para cada ítem, de acuerdo con su inventario efectivo y su inventario máximo. La definición del inventario máximo para cada ítem se realiza de acuerdo con su nivel de servicio deseado (P_1 o P_2) y el costo total relevante se calcula con base, por ejemplo, en la fracción del valor del ítem por unidad, B_2 .

Así, el método comprende primero la determinación del intervalo de revisión común, R , de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$R = \sqrt{\frac{2 \left[A + \sum_{i=1}^n a_i \right]}{r \sum_{i=1}^n D_i v_i}} \quad (6.20)$$

donde el único término diferente de la nomenclatura utilizada en los capítulos anteriores son los a_i , los cuales corresponden a los costos fijos de incluir cada ítem i en una orden, mientras que A es el costo mayor correspondiente al costo fijo de ordenamiento común para toda la familia de ítems. Nótese la semejanza de esta ecuación con la tradicional del *EOQ*

expresado en unidades de tiempo. En muchas ocasiones se puede considerar $a_i = 0$, especialmente si los ítems que se van a ordenar conjuntamente son muy parecidos o uniformes. En el caso de que un ítem i requiera un tratamiento especial, por ejemplo, un proceso de inspección muy complejo que no tienen los demás ítems de su misma familia o proveedor, entonces el a_i de este ítem podría no ser despreciable y debería tenerse en cuenta.

La Ec. (6.20), de acuerdo con su denominador, sugiere que R es bajo para aquellos ítems cuya $\sum D_i v_i$ es alta y que R es alto si $\sum D_i v_i$ es baja. Esto coincide con la apreciación de que las órdenes de los ítems clase A generalmente son más pequeñas pero más frecuentes, mientras que las órdenes de los ítems clase C deberían ser más grandes y con un cubrimiento mayor, dado su relativo bajo costo.

Una vez calculado R , se ajusta a un valor razonable para la administración. Aquí, si $R = 1,4$ semanas, es difícil implementarlo exactamente en la práctica; debería entonces redondearse a 1 o a 2 semanas, analizando las implicaciones administrativas de dicho valor. Seguidamente se determina el inventario máximo de cada ítem, de acuerdo con el nivel de servicio deseado, mediante la conocida expresión:

$$S_i = d_i(R + L_i) + k_i \sigma_{R+L_i} \quad (6.21)$$

donde d_i es la demanda del ítem expresada con respecto de las unidades de tiempo correspondientes al intervalo de revisión, más el tiempo de reposición (si R y L_i vienen dados en años, entonces se utiliza D_i en lugar de d_i). Obviamente, deben considerarse aspectos tales como los ilustrados en la sección anterior, donde la igualación de los niveles de servicio para varios ítems resulta conveniente desde el punto de vista de resultados y también desde el punto de vista práctico. Esto no elimina, sin embargo, la posibilidad de que la administración desee dar a algunos ítems claves un nivel de servicio superior al de otros.

El costo total relevante puede calcularse entonces utilizando la siguiente ecuación, donde se deja la opción de tener el costo de faltante ($B_{2i} v_i$) discriminado por ítem (nótese la similitud de esta ecuación con la Ec. (5.31) del capítulo 5):

$$CTR_2 = \frac{A + \sum_{i=1}^n a_i}{R} + r \left[\frac{R \sum_{i=1}^n D_i v_i}{2} + \sum_{i=1}^n k_i \sigma_{R+L_i} v_i \right] + \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n B_{2i} v_i \sigma_{R+L_i} G_z(k_i) \quad (6.22)$$

Ejemplo 6.3 (Un sistema de reabastecimiento conjunto)

En la tabla 6.5 se muestran las principales características de dos ítems que van a ser ordenados en forma conjunta. Diseñar un sistema de control de inventarios conjuntos basado en los resultados anteriores.

Tabla 6.5. Características de los dos ítems del ejemplo 6.3

Característica	Ítem 1	Ítem 2
Demanda d_i [unidades/día]	100,0	40,0
Desv. Estándar del pronóstico σ_{1i} (referida a un día) [unidades]	25,0	30,0
Tiempo de reposición L_i [días]	14,0	14,0
Costo de ordenamiento relativo al ítem a_i [\$/orden]	0,0	900,0
Nivel de servicio P_{1i}	0,95	0,98
Valor unitario v_i [\$/unidad]	1.500,0	750,0
Costo de faltante B_{2i}	15%	24%

Otros datos relevantes son $r = 30\%$ anual, $A = \$4.000/\text{orden conjunta}$ y se considera un año de 365 días.

Primero se estima el intervalo de revisión común, R , de acuerdo con la Ec. (6.20), teniendo en cuenta las unidades correspondientes de las demandas y del costo de mantener el inventario:

$$R = \sqrt{\frac{2[4.000 + (0 + 900)]}{(0,30/365)[(100)(1.500) + (40)(750)]}} = 8,14 \text{ días} \approx 8 \text{ días}$$

Como revisar el inventario cada ocho días puede ser inconveniente por los fines de semana y los días festivos, entonces se prefiere aproximar a un valor de $R = 7$ días, o sea, una semana exacta, lo cual puede ser mucho más conveniente desde el punto de vista administrativo, pues el inventario de estos dos ítems podría ser revisado, por ejemplo, todos los días martes.

Ahora, para calcular el inventario máximo de cada ítem, se determina primero:

$$\sigma_{R+L_1} = 25\sqrt{7+14} = 114,56 \text{ unidades}$$

$$\sigma_{R+L_2} = 30\sqrt{7+14} = 137,48 \text{ unidades}$$

$$k_1 = 1,6449, \text{ para } p_z(k_1) = 0,05; G_z(1,6449) = 0,020893$$

$$k_2 = 2,0537, \text{ para } p_z(k_2) = 0,02; G_z(2,0537) = 0,007343$$

Así, se calculan los inventarios máximos de acuerdo con la Ec. (6.21):

$$S_1 = 100(7 + 14) + (1,6449)(114,56) = 2.289 \text{ unidades}$$

$$S_2 = 40(7 + 14) + (2,0537)(137,48) = 1.123 \text{ unidades}$$

La política de control consiste en revisar el inventario de ambos ítems cada siete días (cada semana) y ordenar la diferencia entre el nivel máximo de cada ítem S_i y su inventario efectivo correspondiente en el momento de la revisión.

Ahora, el costo total relevante se puede calcular mediante la Ec. (6.22):

$$\begin{aligned} CTR_2 &= \frac{4.000 + (0 + 900)}{(7/365)} \\ &+ (0,30) \left\{ \frac{(7)[(100)(1.500) + (40)(750)]}{2} \right. \\ &\quad \left. + [(1,6449)(114,56)(1.500) + (2,0537)(137,48)(750)] \right\} \\ &+ \frac{1}{(7/365)} [(0,15)(1.500)(114,56)(0,020893) \\ &\quad + (0,24)(750)(137,48)(0,007343)] \\ &= 255.500 + 337.325 + 37.556 = 630.381 \text{ $/año} \end{aligned}$$

Nótese cuidadosamente la correspondencia de unidades que debe existir entre las demandas y el intervalo de revisión, y entre éste y el costo de llevar el inventario. Además, obsérvese que el costo de faltantes es significativamente menor que los otros dos debido al buen nivel de servicio que se estaría obteniendo con la política diseñada.

El *fill rate* P_2 alcanzado por cada ítem puede calcularse de la siguiente forma:

$$P_2 \text{ (ítem 1)} = 1 - \frac{\sigma_{R+L_1} G_z(k_1)}{d_1 R} = 1 - \frac{(114,56)(0,020893)}{(100)(7)} = 0,9966$$

$$P_2 \text{ (ítem 2)} = 1 - \frac{\sigma_{R+L_2} G_z(k_2)}{d_2 R} = 1 - \frac{(137,48)(0,007343)}{(40)(7)} = 0,9964$$

Evidentemente, esta es una muy buena política de control del inventario de estos dos ítems, dado los altos niveles de servicio que se especificaron desde un comienzo. Un ejercicio interesante es encontrar aquellos niveles

de servicio de los dos ítems de tal forma que se minimice el costo total relevante conjunto (problema No. 6, ejercicios 6.1).

Una variación de esta política de control de inventarios es presentada por Silver *et al.* (1998, pp. 425-434) para el caso determinístico con y sin descuentos por cantidad, considerando diferentes períodos enteros para los cuales durará la reposición de cada ítem. Información adicional es presentada también por Fogarty *et al.* (1994, pp. 320-324). Más recientemente, Khouja y Goyal (2008) presentan una amplia revisión de literatura sobre el problema del reabastecimiento conjunto. Ellos concluyen que se ha consumido demasiado tiempo en la búsqueda de soluciones óptimas y que se ha descuidado la aplicación de estas técnicas en la vida real.

Un sistema *min-max* de reabastecimiento conjunto

Un método relativamente sencillo para el control continuo de varios ítems en forma simultánea, muy utilizado en la práctica, puede considerarse como un sistema de control (s, S) o *min-max* para varios ítems, es decir, un método (s_i, S_i) . Cuando el nivel de inventario de uno de los ítems en el grupo alcanza su punto de reorden s_i , se revisa el inventario de los demás ítems, así no hayan alcanzado su punto de reorden, y se ordena una cantidad para cada uno igual a su inventario máximo S_i menos el respectivo inventario efectivo del ítem. Esto se hace para completar tamaños mínimos de orden usualmente requeridos por las condiciones de los proveedores, las características del transporte, el alistamiento de máquinas, etc.

Una forma de determinar s_i y S_i para cada ítem i en la familia es la de calcular inicialmente $Q_i = EOQ_i$ para cada ítem o definir un valor adecuado del tamaño de pedido Q_i de cada ítem, como si se fuera a utilizar un sistema (s, Q) . Luego, se determina el punto de reorden de cada ítem $s_i = (d_i \times L_i) + (k_i \times \sigma_{L_i})$ como en el sistema (s, Q) normal y, finalmente, se halla el inventario máximo de cada ítem $S_i = s_i + Q_i$. Este sistema es de fácil comprensión en la práctica y produce buenos resultados.

Una variación de este método son los sistemas (S_i, c_i, s_i) , en los cuales un ítem de la familia que no haya alcanzado su punto de reorden s_i , sólo es incluido en el pedido conjunto si su inventario efectivo es menor que otro valor límite, c_i . Esto permite ahorros en costos de ordenamiento, ya que si el punto c_i está cercano al punto de reorden s_i del ítem, entonces éste está próximo a disparar otra orden. Por lo tanto, si los ítems cercanos a su punto de reorden se incluyen en la orden actual, se evitará la emisión de la orden siguiente en un tiempo cercano. La determinación adecuada de los tres parámetros de control no es sencilla y los principales autores refieren a artículos especializados en el tema. [ver, por ejemplo, Silver y Peterson (1985), pp. 444-450]. Además, los supuestos para la determinación de dichos parámetros son normalmente muy fuertes. Una alternativa para ana-

lizar un sistema de control de esta naturaleza puede ser la utilización de la simulación discreta.

Límites de capital, de almacenamiento o de transporte con demanda constante

En una orden de abastecimiento conjunta es muy común encontrar, en la práctica, limitaciones por disponibilidad de capital, capacidad de almacenamiento, capacidad de los sistemas de transporte u otros factores. Cuando esto ocurre, es probable que las cantidades que sugiere ordenar el sistema de control de inventarios no se puedan cumplir debido a una u otra limitación. Es necesario modificar las cantidades de pedido para satisfacer dichas limitaciones. Si las cantidades de pedido han sido definidas con base en el *EOQ*, se puede formular un modelo determinístico de optimización restringida para ajustarlas. El problema consiste en minimizar los costos de ordenamiento y de mantenimiento del inventario, sujeto a la limitación de capital, de almacenamiento o de transporte. Se asume que la demanda es muy estable, o sea, aproximadamente constante, con lo cual las ecuaciones del *EOQ* son aplicables. Se asume también que el tiempo de reposición es muy pequeño.

Una situación determinística común es la de tener un sistema de control periódico para n ítems con un intervalo de revisión común R , de tal forma que aproximadamente los ítems se consuman simultáneamente cada R unidades de tiempo. La restricción radica en que los ítems se piden en un camión cuya capacidad en peso no puede sobrepasarse. Supóngase que esta capacidad es W y que se va aprovechar completamente. El problema de optimización puede ser planteado de la siguiente forma:

$$\min \sum_{i=1}^n \frac{a_i D_i}{Q_i} + \sum_{i=1}^n \frac{Q_i v_i r}{2}$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n w_i Q_i = W$$

donde a_i es el costo de ordenamiento de cada ítem i , tal como fue definido anteriormente y w_i es el peso unitario de cada ítem. Como se sabe que en un sistema periódico $Q_i = D_i R$, entonces el problema puede transformarse a:

$$\min \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{R} + \sum_{i=1}^n \frac{D_i v_i r R}{2}$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n w_i D_i R = W$$

La restricción de igualdad puede variarse a otras formas semejantes, por ejemplo, sumando los volúmenes (en unidades cúbicas) de los ítems a ordenar y hacer esta suma menor a una capacidad de almacenamiento dada. Obsérvese que la restricción alude al peso total de cada orden conjunta para los n ítems.

Este problema se puede resolver aplicando la técnica de los multiplicadores de Lagrange. Se construye la función de Lagrange, dada por:

$$\min L(R, \lambda) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n a_i + \frac{rR}{2} \sum_{i=1}^n D_i v_i - \lambda \left(W - R \sum_{i=1}^n D_i w_i \right)$$

Las condiciones necesarias para la existencia de un óptimo vienen dadas por:

$$\frac{\partial L(R, \lambda)}{\partial R} = -\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{R^2} + \frac{r}{2} \sum_{i=1}^n D_i v_i + \lambda \sum_{i=1}^n D_i w_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial L(R, \lambda)}{\partial \lambda} = -\left(W - R \sum_{i=1}^n D_i w_i \right) = 0 \quad (6.24)$$

La estructura de la Ec. (6.24) permite despejar directamente el R óptimo, ya que es común para los n ítems. Por lo tanto, se obtiene:

$$R^* = \frac{W}{\sum_{i=1}^n D_i w_i} \quad (6.25)$$

Con este valor óptimo de R se puede calcular los tamaños óptimos de pedido $Q_i^* = D_i R^*$.

Ejemplo 6.4 (Limitación del modo de transporte en órdenes conjuntas con demanda determinística)

Una compañía tiene tres ítems en inventario, los cuales se compran del mismo proveedor y son despachados en el mismo camión. El camión tiene una capacidad de 18.000 kg. El inventario de los ítems se controla

periódicamente con el mismo intervalo de revisión para todos y el costo de preparar una orden conjunta es de \$80.000 (este costo de pedido puede tomarse como el total para la orden conjunta, incluyendo los a_i para cada ítem i). El costo de llevar el inventario es del 30% anual. Otra información relativa a los ítems se muestra en la tabla 6.6.

Tabla 6.6. Características de los tres ítems del ejemplo 6.4

Característica	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3
Demanda promedio [cajas/semana]	500	1.000	850
Peso del producto [Kg/caja]	15	8	12
Valor unitario [\$/caja]	25.000	9.000	16.000

El peso total del pedido no debe exceder la capacidad del camión para la orden conjunta. Se asume que 1 año = 52 semanas. Determinar los tamaños óptimos de pedido de cada ítem.

Inicialmente, se calcula el intervalo de revisión óptimo sin tener en cuenta la restricción de capacidad del camión, de acuerdo con Ec. (6.20), y se determinan así las cantidades a pedir. Si éstas cumplen con el límite de peso, la solución actual es la óptima. En caso contrario, se procede a aplicar la Ec. (6.25). Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 R &= \sqrt{\frac{2 \left[A + \sum_{i=1}^n a_i \right]}{r \sum_{i=1}^n D_i v_i}} \\
 &= \sqrt{\frac{2 \times 80.000}{\frac{0,30}{52} [(500 \times 25.000) + (1.000 \times 9.000) + (850 \times 16.000)]}} \\
 &= 0,89 \text{ semanas}
 \end{aligned}$$

Nótese la correspondencia que debe haber entre las unidades de tiempo de la tasa r y las unidades de tiempo de la demanda. Se calculan ahora las cantidades implicadas por este intervalo de revisión y su peso total correspondiente:

$$Q_1 = D_1 \times R = 500 \times 0,89 = 445 \text{ cajas} \quad (\text{Peso}_1 = 445 \times 15 = 6.675 \text{ kg})$$

$$Q_2 = D_2 \times R = 1.000 \times 0,89 = 890 \text{ cajas} \quad (\text{Peso}_2 = 890 \times 8 = 7.120 \text{ kg})$$

$$Q_3 = D_3 \times R = 850 \times 0,89 = 757 \text{ cajas} \quad (\text{Peso}_3 = 757 \times 12 = 9.084 \text{ kg})$$

Peso Total = 22.879 kg > 18.000 kg (capacidad del camión)

Por lo tanto, *no* se puede ordenar las cantidades anteriores porque sobrepasan la capacidad del camión. Así, se debe calcular el verdadero R óptimo mediante la Ec. (6.25):

$$R^* = \frac{W}{\sum_{i=1}^n D_i w_i} = \frac{18.000}{(500 \times 15) + (1.000 \times 8) + (850 \times 12)} = 0,7 \text{ semanas}$$

Finalmente, se recalcula el tamaño de la orden de cada ítem:

$$Q_1 = D_1 \times R^* = 500 \times 0,7 = 350 \text{ cajas} \quad (\text{Peso}_1 = 350 \times 15 = 5.250 \text{ kg})$$

$$Q_2 = D_2 \times R^* = 1.000 \times 0,7 = 700 \text{ cajas} \quad (\text{Peso}_2 = 700 \times 8 = 5.600 \text{ kg})$$

$$Q_3 = D_3 \times R^* = 850 \times 0,7 = 595 \text{ cajas} \quad (\text{Peso}_3 = 595 \times 12 = 7.140 \text{ kg})$$

Peso Total = 17.990 kg ≤ 18.000 kg (capacidad del camión)

Es importante notar dos aspectos en este ejemplo. Primero, obsérvese que el $R^* = 0,7$ semanas = 5 días. Este puede ser un valor razonable desde el punto de vista administrativo para revisar el inventario y ordenar las cantidades calculadas (recuérdese que la logística nunca duerme y que si hay que revisar en un fin de semana, debería hacerse). Segundo, para este caso en particular, no se utilizaron las Ec. (6.23) porque no fue necesario calcular el λ óptimo dada la estructura de la Ec. (6.24) que permitió calcular directamente el R^* . Sin embargo, en otras situaciones esto no se presenta y deben resolverse todas las ecuaciones, incluso, en ocasiones, por tanteo o con la ayuda del *solver* de Excel™ (ver problemas No. 10 y 11 de los ejercicios 6.1).

Demanda aleatoria con capacidad limitada del modo de transporte

Carlson y Miltenburg (1988) presentan una metodología para tratar problemas de control conjunto con demanda aleatoria, denominada el método del punto de servicio (*Service Point Method*). El método utiliza revisión periódica del inventario de todos los ítems controlados en forma conjunta cada R unidades de tiempo. Uno de los objetivos de la política de control es que el pedido conjunto llene completamente el camión donde se transportan los ítems (un caso semejante se ve a menudo cuando se requiere llenar un contenedor completo). El tiempo de reposición que tarda el camión se asume constante igual a L . Un segundo objetivo es cumplir con el nivel de servicio P_2^i especificado (a diferencia de los autores, aquí se deja la posibilidad de tener diferentes niveles de servicio para cada ítem). Se conocen la demanda anual promedio D_i y los estimados \hat{x}_{R+L}^i y σ_{R+L}^i de cada ítem $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Se utiliza la siguiente notación adicional a la ya definida:

U_i = Valor esperado del consumo del ítem i en cada ciclo de reposición (esta variable coincide con el tamaño de lote promedio del ítem i).

E_i = Inventario efectivo del ítem i en el momento de la revisión.

n = Número de ítems que se están controlando conjuntamente.

k_i = Factor semejante al factor de seguridad del ítem i , definido de la siguiente forma:

$$k_i = \frac{E_i - \hat{x}_{R+L}^i}{\sigma_{R+L}^i} \quad (6.26)$$

w_i = Peso unitario del ítem i .

Q_i = Valor a ordenar del ítem i (las variables de decisión en este caso).

Básicamente el método consiste en lo siguiente:

1. Calcular los faltantes aceptables por cada ciclo de reposición ($FACR$), definidos como:

$$FACR = \sum_{i=1}^n U_i (1 - P_2^i) \quad (6.27)$$

2. Calcular el factor k_i para cada ítem i , de acuerdo con la Ec. (6.26). Con base en este valor, determinar $G_z(k_i)$ para cada i y calcular los faltantes esperados totales por ciclo $FECR$ en el caso de que no se emita una orden de reposición, de acuerdo con:

$$FECR = \sum_{i=1}^n \sigma_{R+L}^i G_z(k_i) \quad (6.28)$$

3. Si $FECR \leq FACR$, entonces no se emite orden de reposición alguna y se espera hasta la revisión siguiente. En caso contrario, se debe emitir una orden combinada, suficiente para llenar el camión. Además, se trata de ordenar ciertas cantidades Q_i tales que se maximice el tiempo hasta la siguiente reposición. Esto se logra haciendo que el tiempo esperado que dure el inventario de cada ítem, incluyendo su existencia actual, más la cantidad a pedir, $(E_i + Q_i)/D_i$, sea el mismo para cada ítem i . Además, debe garantizarse que $\sum w_i Q_i = C$, donde C es la capacidad del camión. Algo que no incluyen los autores de este método, pero que puede adicionarse al algoritmo, es que puede ocurrir que $FECR \leq FACR$, pero que uno o varios ítems en forma individual presenten sus faltantes esperados mayores que los aceptables, o sea que exista al menos un ítem i tal que $\sigma_{R+L}^i G_z(k_i) > Q_i(1 - P_2^i)$. En

este caso se debería emitir una orden de reposición de acuerdo con el procedimiento anteriormente descrito para evitar deficiencias en el nivel de servicio de aquellos ítems que individualmente no cumplen con la condición.

Ejemplo 6.5 (Limitación del modo de transporte en órdenes conjuntas con demanda aleatoria: el método del punto de servicio)

Una compañía está manejando el inventario de tres ítems en forma conjunta mediante el método del punto de servicio. Los ítems se compran al mismo proveedor y son despachados en el mismo camión, buscando llenar su capacidad cada vez que se pida. El camión tiene una capacidad de 30.000 kg. La información relativa a los ítems se ilustra en la tabla 6.7.

Tabla 6.7. Características de los tres ítems del ejemplo 6.5

Característica de cada ítem	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3
Demanda promedio D_i [unidades/año]	10.000	15.000	8.500
Peso del producto w_i [Kg/unidad]	3,5	6,7	8,3
Consumo promedio por ciclo U_i [unidades]	1.500	2.200	600
Demandas promedio sobre $(R+L)$ \hat{x}_{R+L}^i [unidades]	1.250	1.875	1.065
Desviación estándar estimada sobre $(R+L)$ σ_{R+L}^i [unidades]	144	550	610
Nivel de servicio especificado P_2^i	0,985	0,985	0,985
Inventario efectivo en el momento de la revisión E_i [unidades]	1.200	2.250	1.875

Se van a ilustrar los cálculos para el ítem 1. Los cálculos para los otros ítems son semejantes. Primero, se calcula el valor de k_1 con base en la Ec. (6.26):

$$k_1 = \frac{E_1 - \hat{x}_{R+L}^1}{\sigma_{R+L}^1} = \frac{1.200 - 1.250}{144} = -0,3472$$

Obsérvese que el valor de k puede ser negativo para algunos ítems. Esto ocurre cuando su inventario efectivo, al momento de la revisión, es menor que la demanda esperada durante el intervalo $R + L$. Se calcula ahora las unidades aceptables de faltante para el ítem 1, tomando $U_1(1 - P_2^1) = 1.500(1 - 0,985) = 22,50$ unidades. Las unidades esperadas de faltante para el ítem 1 vienen dadas por $\sigma_{R+L}^1 G_z(k_1) = 144 \times 0,5964 = 85,88$ unidades. Es importante notar que en este último cálculo, la función $G_z(k_1)$ ha sido determinada para un k negativo, el cual no aparece en las tablas del

Apéndice A. Sin embargo, de acuerdo con la Ec. (A7) del mismo apéndice, se cumple que $G_z(-k) = G_z(k) + k$. Así, para $k = -0,3472$, se calcularía como:

$$G_z(-0,3472) = G_z(0,3472) + 0,3472 = 0,5964$$

Los cálculos anteriores se replican para los otros dos ítems, y se obtienen los resultados mostrados en la tabla 6.8.

Tabla 6.8. Resultados de los cálculos iniciales del ejemplo 6.5

Descripción	Item 1	Item 2	Item 3	Total
Factor $k_i =$	-0,3472	0,6818	1,3279	
Función $G_z(k_i) =$	0,5964	0,1473	0,0429	
Faltantes aceptables de cada ítem =	22,50	33,00	9,00	64,50
Faltantes esperados de cada ítem =	85,88	81,03	26,17	193,07

Como $FECR = 193,07$ es mayor que $FACR = 64,50$, entonces debe emitirse una orden. El paso final es determinar los tamaños individuales Q_i de la orden, de tal forma que se cope la capacidad del camión. Además, como se menciona arriba, una buena práctica es igualar los valores de $(E_i + Q_i)/D_i$ para cada ítem i . Esto requiere resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales simultáneas:

$$(E_1 + Q_1)/D_1 = (E_2 + Q_2)/D_2$$

$$(E_2 + Q_2)/D_2 = (E_3 + Q_3)/D_3$$

$$\sum_{i=1}^3 w_i Q_i = C$$

Si se ha diseñado una hoja electrónica para el manejo de este problema, estas ecuaciones se resuelven fácilmente con la ayuda del *solver* de Excel™, mediante la opción de “valores de”. De esta forma, se obtiene el siguiente resultado (redondeado al entero más cercano):

$$Q_1 = 1.947 \text{ unidades}$$

$$Q_2 = 2.470 \text{ unidades}$$

$$Q_3 = 800 \text{ unidades}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 w_i Q_i &= (3,5 \times 1.947) + (6,7 \times 2.470) + (8,3 \times 800) \\ &= 30.003,5 \text{ kg} \cong C = 30.000 \text{ kg} \end{aligned}$$

Con estos valores se cumple que $(E_i + Q_i)/D_i = 0,3147$ años para cada ítem i . Es decir, que el cubrimiento esperado con las cantidades pedidas para los tres ítems es de 0,3147 años, o sea, unos 3,8 meses o 16 semanas.

Obsérvese en la tabla 6.8 que cada ítem presenta sus faltantes esperados (si *no* se realiza un pedido) mayores que sus faltantes aceptables y, por lo tanto, es indudable que se requiere realizar un pedido. Sin embargo, se sugiere comprobar que, en este ejemplo, si los inventarios efectivos hubiesen sido 2.500 u., 2.500 u. y 2.000 u. para los ítems 1, 2 y 3, respectivamente, entonces individualmente los ítems 2 y 3 hubiesen requerido reposición, mas no el ítem 1; a nivel consolidado, el método hubiese determinado que *no* se requeriría un despacho, pero esto causaría problemas de nivel de servicio en los ítems 2 y 3. Por lo tanto, una buena práctica es la de confirmar los niveles de servicio esperados, incluso para ítems individuales, y tomar la decisión también con base en este criterio.

Ejercicios 6.1

1. Considere los cuatro ítems siguientes en un sistema de inventarios de demanda constante:

Ítem i	Demanda anual D_i [unid./año]	Valor unitario v_i [\$/unidad]
1	110	1.650
2	490	10.000
3	3.900	1.800
4	6.950	4.200

El administrador del inventario sostiene que es muy difícil estimar los valores individuales de A y de r . Sin embargo, es aceptable que A/r sea aproximadamente constante para todos los ítems. Se ha estado utilizando una política de ordenar cada vez cuatro meses de demanda (Q_i). El administrador necesita disminuir el nivel de inventario y para ello ha decidido bajar los tamaños de las órdenes a tres meses de demanda.

- a) Desarrolle una curva de intercambio con base en el *EOQ* de cada ítem.
- b) ¿Cuáles son los valores de *ICPT* y N para $A/r = 400.000$?
- c) ¿Qué valor de A/r da el mismo valor de *ICPT* para la política actual?
- d) ¿Qué valor de A/r da el mismo valor de N para la política propuesta?

- e) Use la curva de intercambio para sugerir opciones de mejoramiento que superen a la política propuesta de los tres meses de demanda.
2. Considere dos ítems con las siguientes características:
- | Ítem
<i>i</i> | Demanda anual
<i>D_i</i> [unid./año] | Valor unitario
<i>v_i</i> [\$/unidad] | <i>x_{Li}</i>
[unidades] | <i>σ_{Li}</i>
[unidades] |
|------------------|---|--|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 300 | 20.000 | 100 | 10 |
| 2 | 300 | 2.000 | 100 | 35 |
- Suponga que el administrador del sistema ha fijado el inventario de seguridad de cada uno de los ítems igual a un mes de su demanda correspondiente.
- a) ¿Cuáles son los inventarios de seguridad de cada ítem en unidades y en pesos?
- b) ¿Cuál es el valor de P_1 asociado con cada ítem?
- c) Reasigne el inventario de seguridad total (en pesos) de tal forma que ambos ítems tengan el mismo valor de P_1 .
- d) ¿Qué reducción en inventario de seguridad total es posible si ambos ítems tienen un nivel de servicio $P_1 = 0,95$?
3. Con ayuda de una hoja electrónica, reproduzca la curva de intercambio de inventario de seguridad total (*IST*) contra el valor esperado total en pesos de unidades en faltante por año (*VTEF*) para el ejemplo 6.2.
4. Considere cuatro ítems con las siguientes características:

Ítem <i>i</i>	Demanda anual <i>D_i</i> [unid./año]	Valor unitario <i>v_i</i> [\$/unidad]	<i>Q_i</i> [unidades]	<i>σ_{Li}</i> [unidades]	<i>L_i</i> [meses]
1	8.750	100	4.000	100	3,5
2	12.500	80	6.250	275	3,5
3	3.450	25	1.000	730	3,5
4	20.500	12	3.400	600	3,5

- a) Suponga que la política actual es la de fijar el punto de reorden s_i de cada ítem *i* en cuatro meses de demanda. Construya las curvas de intercambio de *IST* contra *NTEF* y contra *VTEF*, basadas en un mismo valor de P_1 para todos los ítems, resaltando el punto de

operación actual. Proponga una alternativa de mejoramiento de la política actual de inventarios.

- b) Suponga ahora que la política para fijar los puntos de reorden, mencionada en el literal anterior, no se va a seguir utilizando. Se ha decidido entonces asignar un inventario de seguridad total de \$70.000 a los cuatro ítems. Asuma que los errores de los pronósticos están normalmente distribuidos y que se acepta un valor constante de r para los tres ítems. Igualmente, considere que factores de seguridad negativos no son aceptables. Considere las siguientes reglas:

- i) Mismo valor de P_1 para todos los ítems.
- ii) Mismo valor de P_2 para todos los ítems.
- iii) Mismo valor de B_1 para todos los ítems.
- iv) Mismo valor de B_2 para todos los ítems.
- v) Minimización del número total de ocasiones de faltantes por año.
- vi) Minimización del valor total esperado de faltantes por año.
- vii) Inventarios de seguridad determinados por tiempos iguales de demanda.

Para cada una de las reglas anteriores, determine cómo asignar los \$70.000 de inventario de seguridad total a los cuatro ítems, el número total esperado de faltantes/año y el valor total esperado de los faltantes por año.

5. Repita el literal a) del problema anterior, pero construyendo las curvas de intercambio con base en el mismo valor de P_2 para los cuatro ítems.
6. Construya una hoja electrónica que le permita determinar el nivel de servicio que se debe especificar de los dos ítems del ejemplo 6.3, de tal forma que se minimice el costo total relevante conjunto CTR_2 .
7. Un sistema periódico de control de inventarios está siendo utilizado para tres materias primas que se compran simultáneamente al mismo proveedor. El costo de mantenimiento del inventario se ha fijado en el 36% anual y el costo común de ordenamiento en \$500.000/orden. Se tienen los siguientes datos:

Característica	M.P. 1	M.P. 2	M.P. 3
Demanda d_i [ton/mes]	200	50	120
Desv. Estándar del pronóstico σ_{1i} (referida a un mes) [ton]	18	20	90
Tiempo de reposición L_i [meses]	1,5	1,5	1,5
Costo de ordenamiento relativo a la materia prima a_i [\$/orden]	0	0	45.000
Nivel de servicio P_{1i}	0,975	0,975	0,990
Valor unitario v_i [\$/ton]	124.500	275.000	45.000
Costo de faltante B_{2i}	20%	15%	12%

- a) Diseñe un sistema de control periódico conjunto para estos ítems, calculando el *CTR* anual y el *fill rate* P_2 alcanzado por cada materia prima. Redondee el valor obtenido de R a un valor que considere razonable desde el punto de vista administrativo.
- b) Suponga que el intervalo de revisión se fija en dos meses. ¿Cómo cambian las respuestas para la primera parte del problema? Sugerencia: diseñe una hoja electrónica que le permita evaluar varias políticas de inventario periódico, con respecto a varios valores del intervalo de revisión R y de los niveles de servicio P_1 de cada materia prima.
8. Para los ítems del problema No. 4, diseñe un sistema de control *min-max*, utilizando el cálculo secuencial de s y S y asumiendo que los tamaños de orden Q_i son los especificados en el problema.
9. Tres ítems en inventario tienen las siguientes características:

Característica	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3
Demanda promedio [unidades/año]	51.000	25.000	9.000
Costo de ordenamiento [\$/orden]	20.000	20.000	20.000
Valor unitario [\$/unidad]	3.500	6.500	5.000

El costo de llevar el inventario es igual para los tres ítems, $r = 25\%$ anual.

- a) Si el valor total del inventario promedio para los tres ítems no puede exceder de \$15.000.000, determine las cantidades óptimas de pedido.

- b) Repita la pregunta anterior si el límite de la inversión no puede exceder de \$10.000.000.
10. A continuación se muestran las principales características de tres ítems que van a ser ordenados utilizando la política del *EOQ*. Existe un límite en el capital invertido en el *inventario promedio* anual total de $C = \$80.000$. La tasa r es del 36% anual.

Ítem i	Costo de ordenamiento a_i [\$/orden]	Valor unitario v_i [\$/unidad]	Demanda anual D_i [unid./año]
1	420	180	11.500
2	420	70	30.000
3	420	135	7.500

- a. Desarrolle un modelo matemático para este caso semejante al presentado en este capítulo. Muestre que el multiplicador de Lagrange óptimo viene dado por:
- $$\lambda^* = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{2a_i v_i D_i}}{2C} \right)^2 - r$$
- b. Determine las cantidades óptimas de pedido para cada uno de los tres ítems descritos.
- c. Resuelva este problema si el límite de capital a invertir en inventario promedio puede aumentarse a \$100.000.
11. En el problema anterior, asuma que la restricción de capital impuesta es ahora de \$150.000 y no es sobre el inventario promedio anual total, sino sobre la inversión total en inventario en cada ciclo de reposición. Desarrolle un modelo matemático para este caso y encuentre la solución óptima con base en los datos de los tres ítems del problema anterior. Ayuda: la restricción ahora sería:

$$\sum_{i=1}^3 Q_i v_i \leq \$150.000$$

12. En su empresa, usted está controlando conjuntamente el inventario de cuatro ítems con el método del *punto de servicio*. Los datos referentes a los ítems son los siguientes:

Descripción	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4
Demanda promedio D_i (u/año)	2.000	3.500	4.850	3.720
Peso unitario w_i (kg/u)	2,5	4.8	5.6	7.0
Consumo promedio por ciclo U_i (u)	400	550	780	600
Demanda promedio sobre $R+L$ (u)	600	680	1.100	890
Desviación estándar sobre $R+L$ (u)	175	500	330	105
Nivel de servicio P_2 especificado	0,990	0,990	0,990	0,990
Inventario efectivo $E_i =$	800	1.200	1.550	1.150

Los pedidos se consolidan para llenar la capacidad de un camión con capacidad de carga para 20 toneladas. Resuelva los siguientes puntos:

- a) Determine si es necesario realizar un pedido y, si este es el caso, las cantidades a pedir, de acuerdo con el método de control utilizado.
- b) ¿Considera usted que el ítem 4 podría *no* ser incluido en este pedido y así darle más espacio, en el camión, a los demás ítems? Discuta las ventajas y desventajas de esta práctica.
- c) Repita el literal a) asumiendo que los inventarios efectivos son ahora 1.000 u., 1.350 u., 2.000 u. y 1.200 u. para los ítems 1, 2, 3 y 4, respectivamente. ¿Qué puede concluir acerca del ítem 2? ¿Qué decisión tomaría?

LECTURAS ADICIONALES

CHOPRA y MEINDL (2008): capítulo 10 (pp. 264-275) (En estas páginas se aborda el problema de la agregación de múltiples productos en un solo pedido desde el punto de vista determinístico).

AXSÄTER (2000): capítulo 4 (pp. 91-113) (Este capítulo desarrolla algunos aspectos técnicos no estudiados aquí, relacionados con la reposición coordinada de varios ítems, especialmente en ambientes de manufactura).

SILVER *et al.* (1998): capítulo 11 (pp. 423-470) (Este capítulo del texto principal de referencia de inventarios da detalles adicionales, principalmente en ambientes de manufactura, brindando una bibliografía muy completa para el estudiante que desee profundizar).

NARASIMHAN *et al.* (1996): capítulo 7 (pp. 175-207) (Este capítulo desarrolla algunos conceptos adicionales a los estudiados aquí y presenta al final un caso real muy interesante).

FOGARTY *et al.* (1994): capítulo 8 (pp. 315-349) (Este capítulo es una buena lectura para complementar algunos aspectos de los mencionados aquí, principalmente en lo relacionado con los cálculos de costos de inventario).

CAPÍTULO 7

CONTROL DE INVENTARIOS DE ÍTEMES ESPECIALES

CONTROL DE INVENTARIOS DE ÍTEMES CLASE A

Generalidades

Dado que los ítems clase A son generalmente aquellos cuyo producto Dv es mayor que todos los demás ítems (capítulo 1), debe prestarse especial atención en su control. Utilizar el mismo tipo de control para ítems clase A y B se justifica cuando el ahorro logrado en costos de ordenamiento, de llevar el inventario y de faltantes, supera al costo adicional de tener un sistema de control más complejo. Este costo del sistema de control está representado en el costo de recolección de datos, procesamiento de la información, manejo de modelos matemáticos más complejos, generación de reportes especializados, etc.

El producto Dv puede ser alto para un ítem clase A debido a un alto valor de la demanda D , o a un alto valor unitario del ítem v , o a ambos. Generalmente, el sistema de control de un ítem clase A con alta demanda y bajo valor unitario no es igual al sistema de control de otro ítem clase A con muy baja demanda, pero costo unitario alto.

Sugerencias generales para el control de ítems clase A

Los ítems clase A deben concentrar la atención personalizada de la administración, con el apoyo de modelos matemáticos especializados, los cuales se constituyen en una poderosa herramienta de ayuda para la toma de decisiones. Los siguientes puntos son sugerencias generales para el control del inventario de este tipo de ítems:

- Los registros de inventario deben hacerse continuamente basados en las transacciones que vayan ocurriendo. Como generalmente el

número de ítems clase A no es muy grande, el control no necesariamente debe hacerse en forma computarizada, pudiéndose utilizar sistemas manuales basados en hojas electrónicas. Esto constituye una ventaja, por ejemplo, en las pequeñas y medianas empresas.

- Todas las transacciones de ítems clase A deben ser cuidadosamente revisadas por la administración en forma frecuente.
- La demanda debe ser cuidadosamente analizada y, aunque debe basarse en un sistema adecuado de pronósticos, debe tener la influencia personal de la administración, dependiendo del caso particular. Por ejemplo, pueden existir ítems clase A tan especiales que la administración directamente influya en su demanda futura con base en las conversaciones personales con los clientes.
- Para ítems clase A muy costosos y de muy lento movimiento (demanda errática), el pronóstico de la rata de demanda suele ser muy difícil o virtualmente imposible de obtener. Por ello, frecuentemente no se diseña para ellos un sistema de control especial. Este es el caso de los repuestos costosos de máquinas de producción, los cuales son muy bien conocidos por los ingenieros encargados de dirigir el mantenimiento correctivo y preventivo. Si el ítem es de relativa fácil consecución y el daño de la máquina es de tal naturaleza que se dispone de cierto tiempo para obtenerlo, no debería tenerse inventario del ítem. Si, por el contrario, la falta del ítem pudiese ocasionar una parada grave y prolongada en la producción, entonces sí debería considerarse el mantenimiento de cierto inventario del repuesto. Bajo estas condiciones, normalmente los tamaños de órdenes son $Q = 1$ y la disyuntiva está en mantener o no el ítem en inventario. Si el ítem no se mantiene en inventario, entonces debe tenerse muy claro el procedimiento de emergencia a seguir cuando es solicitado para poder cumplirle al cliente. Si se decide mantener al ítem en inventario, el sistema de control es normalmente *ordenar una unidad del ítem tan pronto como la unidad en inventario sea consumida*. Un ejemplo de este tipo de ítems se presenta en los almacenes de los acueductos, donde hay bombas especializadas muy costosas (del orden de \$200 millones cada una), de las cuales se mantiene una unidad en inventario, ya que cualquier eventualidad dejaría sin agua a gran parte de una ciudad por mucho tiempo. Una vez se necesite utilizar la bomba, se ordena de nuevo otra para reponerla y almacenarla de nuevo. Silver *et al.* (1998, pp. 318-325) discuten el control de inventarios de ítems clase A de lento movimiento, cuando no es conveniente asumir normalidad de la demanda, sino que la distribución más adecuada es la de Poisson.

- Para ítems de movimiento lento, pero de valor unitario muy alto, debe prestarse especial énfasis en su aprovisionamiento inicial, ya que un exceso podría resultar muy costoso.
- Debe existir una estrecha relación con los proveedores de ítems clase A para tratar de reducir los tiempos de entrega y su variabilidad.
- Deben revisarse los parámetros de decisión frecuentemente.
- Los tamaños de pedido Q deben determinarse mediante las mejores técnicas disponibles. Por ejemplo, en vez de asumir que Q está pre-determinada, deben aplicarse métodos que optimicen esta decisión en conjunto con la determinación del punto de reorden s .
- Para los ítems clase A es mucho más conveniente afrontar la posibilidad de agotados que tratar de establecer niveles de servicio determinados. En otras palabras, como para estos ítems la administración controla directamente sus transacciones, pueden establecerse pedidos frecuentes y acciones confiables de emergencia, tendientes a evitar o a aliviar una ruptura de inventario inminente. El arte de la administración consiste, aquí, en comparar los costos de tales acciones con respecto de los costos de mantener inventarios de seguridad.

Determinación simultánea de parámetros de control en sistemas (s, Q)

Lo que se discute en esta sección aplica para ítems clase A que no sean de muy lento movimiento; así, el supuesto de normalidad es razonable. En el capítulo 5 se asume que la cantidad de pedido Q está determinada con anterioridad, generalmente igual al EOQ . Posteriormente se determina el valor del factor de seguridad k , para, finalmente, hallar el punto de reorden s . Ahora, por el contrario, Q es también una variable de decisión y se determina su valor en forma óptima. El esfuerzo computacional adicional se justifica sólo, tal vez, para ítems clase A.

Determinación simultánea de s y Q en un sistema (s, Q) con costo de faltantes B_2 conocido

En este caso se utiliza la Ec. (5.16) del capítulo 5 para el costo total relevante CTR_2 . La diferencia radica en el hecho de que ahora Q y k son variables de decisión simultáneas y, por lo tanto, CTR_2 es una función no-lineal de dos variables. Así:

$$CTR_2(k, Q) = \frac{AD}{Q} + \left(\frac{Q}{2} + k\sigma_L \right) vr + \frac{D}{Q} (B_2 v) \sigma_L G_z(k) \quad (7.1)$$

Es bien conocido que las condiciones necesarias para la existencia de un mínimo vienen dadas (se aplican las propiedades de la distribución normal en el apéndice A) por:

$$\frac{\partial CTR_2(k, Q)}{\partial k} = \sigma_L vr - \frac{D}{Q} (B_2 v) \sigma_L p_z(k) = 0$$

$$\frac{\partial CTR_2(k, Q)}{\partial Q} = -\frac{AD}{Q^2} + \frac{vr}{2} - \frac{D(B_2 v) \sigma_L G_z(k)}{Q^2} = 0$$

De la primera de las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$p_z(k) = \frac{Qr}{DB_2}$$

O, equivalentemente,

$$P_1 = 1 - p_z(k) = 1 - \frac{Qr}{DB_2} \quad (7.2)$$

De la segunda ecuación anterior se obtiene:

$$Q = \sqrt{\frac{2D[A + (B_2 v) \sigma_L G_z(k)]}{vr}} \quad (7.3)$$

La solución simultánea de las Ec. (7.2) y (7.3) produce la solución óptima del problema de control de inventarios (s, Q) con B_2 conocido. El algoritmo es, por lo tanto, el siguiente:

Paso 1

Aproxime el valor inicial de Q mediante la fórmula del *EOQ* [Ec. (4.5)]

Paso 2

Calcule la probabilidad de que *no* ocurran faltantes en cada ciclo de reposición (P_1) mediante la Ec. (7.2).

Paso 3

Calcule el valor corregido de Q mediante la Ec. (7.3), determinando previamente, de las tablas de la distribución normal unitaria, el valor de $G_z(k)$ correspondiente al valor de $p_z(k)$ (o de k) hallado en el paso anterior.

Paso 4

Repita los pasos 2 y 3 anteriores hasta que los cambios en P_1 (o en k) y en Q sean despreciables.

Paso 5

Calcule el punto de reorden s con base en la ya conocida Ec. (5.3), el costo total relevante CTR_2 con base en la Ec. (5.16), y el nivel de servicio alcanzado, obteniendo a P_2 de las Ec. (5.10) o (5.12), de acuerdo con el supuesto de faltantes convertidos en órdenes pendientes o en ventas perdidas.

Ejemplo 7.1 (Valor óptimo de Q y k con costo B_2 conocido)

Se va a aplicar el algoritmo anterior para determinar el valor óptimo de Q y de k (y, por ende, de s) al caso del ejemplo 5.1 del capítulo 5 y se compararán los resultados con el nivel de servicio y los costos obtenidos en dicho ejemplo. Ya se tenía calculado el valor del $EOQ = 10.142$ unidades, a partir de la Ec. (4.5) del capítulo 4. A partir de la Ec. (7.2), este valor genera un primer valor de P_1 , así:

$$P_1 = 1 - \frac{(10.142)(0,20)}{(12.000 \times 12)(0,09)} = 0,8435$$

Nótese que no se utiliza el valor especificado de P_1 (90%) en el ejemplo 5.1 porque precisamente se está buscando su valor óptimo en conjunto con el tamaño óptimo de pedido. Ahora, se determina $p_z(k) = 1 - P_1 = 1 - 0,8435 = 0,1565$. Con este valor se encuentra, en las tablas del apéndice A, los valores $k = 1,01$ y $G_z(k) = 0,08174$. Con este último se recalcula Q mediante la Ec. (7.3):

$$Q = \sqrt{\frac{2(12.000 \times 12)[1.000 + (0,09 \times 14)(3,797)(0,08174)]}{(14)(0,20)}} \\ = 11.962 \text{ unidades}$$

Repitiendo los pasos 2 y 3 del algoritmo descrito anteriormente, se obtienen los resultados mostrados en la tabla 7.1.

Tabla 7.1. Resultados del ejemplo 7.1.

Iteración No.	Q [unidades]	P_1	$p_z(k)$	k	$G_z(k)$	$CTR_2(k, Q)$ [miles de \$/año]
1	10.142	0,8435	0,1565	1,01	0,08174	44.687,6
2	11.962	0,8154	0,1846	0,90	0,10040	44.135,7
3	12.340	0,8096	0,1904	0,88	0,10420	44.118,5
4	12.415	0,8084	0,1916	0,87	0,10610	44.117,0
5	12.453	0,8078	0,1922	0,87	0,10610	44.116,9
6	12.453	0,8078	0,1922	0,87	0,10610	44.116,9

Como puede observarse, en la iteración No. 6 se logra la convergencia deseada. El punto de reorden s y el nivel de servicio P_2 (para $Q = 12.453$ unidades y $k = 0,87$) para esta solución, asumiendo que los faltantes se convierten en órdenes pendientes, vienen dados por:

$$s = \hat{x}_L + k\sigma_L = (18.000) + (0,87)(3.797) = 21.304 \text{ unidades}$$

$$P_2 = 1 - \frac{\sigma_L G_z(k)}{Q} = 1 - \frac{(3.797)(0,1061)}{12.453} = 0,9676$$

El costo total relevante mínimo es igual a $CTR_2 = 44.116,9$ miles de \$/año. El costo obtenido en el ejemplo 5.1 fue de 45.232,1 miles de \$/año, o sea que se logra una disminución del 2,47% en el costo total relevante al aplicar el método de determinación óptima de s y Q simultáneamente. Aunque este valor parezca relativamente pequeño, puede ser muy importante para ítems clase A. Compárese también con el resultado obtenido en el ejemplo 5.4 (capítulo 5), donde para la regla de B_2 conocido y $Q = EOQ$ se obtuvo un *fill rate* de 0,9694 y un CTR_2 de 44.687,6 miles de \$/año (igual al costo mostrado en la iteración No. 1 en la tabla 7.1. ¿Por qué?).

Es muy importante notar que, a pesar de que se ha obtenido el costo total relevante mínimo, los niveles de servicio P_1 y P_2 generados no son satisfactorios (un nivel de riesgo del 19,22% en cada ciclo de reposición es inaceptable). Esto debe tenerse muy en cuenta en cada caso para definir qué requiere de mayor cuidado, si el costo total relevante o el nivel de servicio deseado en ítems clase A. La causa más probable de esto es que se tiene un costo de faltantes $B_2 = 0,09$, el cual es muy bajo y, por ende, se justifica económicamente tener faltantes. Se sugiere resolver este ejemplo para valores mayores de B_2 (problema No. 4, ejercicios 7.1).

Determinación simultánea de s y Q en un sistema (s , Q) con costo de faltantes B_1 conocido

Silver *et al.* (1998) desarrollan un algoritmo semejante al anterior cuando se conoce el costo B_1 (\$/ocasión de faltante). La adaptación de dicho algoritmo es la siguiente (en el problema No. 1 de los ejercicios 7.1 se propone deducir las ecuaciones utilizadas aquí):

Paso 1

Aproxime el valor inicial de Q mediante la fórmula original del *EOQ* [Ec. (4.5) del capítulo 4]

Paso 2

Determine el valor de k mediante la Ec. (5.18) mostrada en el capítulo 5:

$$k = \sqrt{2 \ln \left(\frac{DB_1}{\sqrt{2\pi} Q v \sigma_L r} \right)}$$

Paso 3

Calcule el valor corregido de Q , determinando previamente, de las tablas de la distribución normal unitaria en el apéndice A, el valor de $p_z(k)$ correspondiente al valor de k hallado en el paso anterior, mediante la siguiente ecuación:

$$Q = \sqrt{\frac{2AD}{vr}} \sqrt{1 + \frac{B_1}{A} p_z(k)} \quad (7.4)$$

Paso 4

Repita los pasos 2 y 3 anteriores hasta que los cambios en k y Q sean despreciables.

Paso 5

Calcule el punto de reorden s con base en la Ec. (5.3), el costo total relevante CTR_1 con base en la Ec. (5.15) y el nivel de servicio alcanzado, obteniendo a P_2 de las Ec. (5.10) o (5.12), de acuerdo con el supuesto de faltantes convertidos en órdenes pendientes o en ventas perdidas.

Si en el paso 2 anterior se llega a una raíz cuadrada de un número negativo (por ocurrir el logaritmo natural de un número menor que 1), entonces se puede definir k igual al valor mínimo aceptable por la administración.

Ejemplo 7.2 (Valor óptimo de Q y k con costo B , conocido)

Aplique el algoritmo anterior para determinar el valor óptimo de Q y k (y de s) al caso del ejemplo 5.3 del capítulo 5. Si se aplica el algoritmo anterior a este ejemplo con un valor de $B_1 = \$2.800.000/\text{ocasión de faltante}$, el valor óptimo, desde el punto de vista matemático, resulta ser $k = 0$, con un costo total relevante mínimo de 43.992,7 miles de \$/año (comparado con el valor obtenido en el ejemplo 5.3 de 45.260,9 miles de \$/año). Sin embargo, deberá utilizarse el mínimo valor de k admitido por la administración, el cual seguramente será mayor que cero.

Aparentemente, el costo $B_1 = \$2.800.000/\text{ocasión de faltante}$ resulta ser muy bajo y, por lo tanto, el modelo permite tener un alto nivel de faltantes. Por ello, y para efectos ilustrativos del método, se va a resolver el caso del ejemplo 5.3 con un valor de $B_1 = \$4.000.000/\text{ocasión de faltante}$ (recuérdese que uno de los supuestos establece que los costos unitarios de faltantes deben ser muy altos, como es lo normal en la logística moderna).

El EOQ inicial es de nuevo igual a 10.142 unidades. El valor inicial de k se determina como (todos los costos se expresan en miles de \$):

$$k = \sqrt{2 \ln\left(\frac{(12.000 \times 12)(4.000)}{\sqrt{2\pi}(10.142)(14)(3.797)(0.20)}\right)} = 1,23$$

de donde se obtiene $p_z(k) = 0,1093$. El costo total relevante para este caso se calcula como:

$$\begin{aligned} CTR_l(k, Q) &= \frac{(1.000)(12.000 \times 12)}{10.142} + \left(\frac{10.142}{2} + (1,23)(3.797) \right)(14)(0,20) \\ &\quad + \frac{12.000 \times 12}{10.142} (4.000)(0,1093) = 47.681,6 \text{ miles de \$/año} \end{aligned}$$

El valor corregido de Q se calcula entonces como:

$$Q = \sqrt{\frac{2(1.000)(12.000 \times 12)}{(14)(0,20)}} \sqrt{1 + \frac{4.000}{1.000}(0,1093)} = 12.158 \text{ unidades}$$

Repitiendo los pasos 2 y 3 se obtienen los resultados mostrados en la tabla 7.2.

Tabla 7.2. Resultados del ejemplo 7.2.

Iteración No.	Q [unidades]	k	$p_z(k)$	$CTR_l(k, Q)$ [miles de \\$/año]
1	10.142	1,23	0,1093	47.681,6
2	12.158	1,07	0,1423	46.982,7
3	12.705	1,03	0,1515	46.940,2
4	12.853	1,02	0,1539	46.939,0
5	12.891	1,02	0,1539	46.938,8
6	12.891	1,02	0,1539	46.938,8

La convergencia se obtiene en la iteración No. 6, con un valor de $Q = 12.891$ unidades y un valor de $k = 1,02$. El punto de reorden s y el nivel de servicio P_2 vienen entonces dados por:

$$s = \hat{x}_L + k\sigma_L = (18.000) + (1,02)(3.797) = 21.873 \text{ unidades}$$

$$P_2 = 1 - \frac{\sigma_L G_z(k)}{Q} = 1 - \frac{(3.797)(0,08019)}{12.891} = 0,9764$$

De nuevo, si estos niveles de servicio no se consideran satisfactorios deberá entonces evaluarse la conveniencia de usar este punto de reorden. Se recomienda resolver este mismo problema para valores más altos de B_1 (problema No. 5, ejercicios 7.1).

Es importante notar aquí lo expresado en una corta publicación acerca del algoritmo descrito en esta sección. Chung *et al.* (2009) mencionan que este algoritmo no necesariamente converge, o que, cuando sucede, lo puede hacer hacia un óptimo local ya que la función de costo no es necesariamente convexa, como lo afirman Silver, Pyke y Peterson en la página 326. Chung *et al.* (2009) proponen un nuevo método que logra la convergencia hacia el óptimo global. Un ejemplo numérico es presentado en la nota. El resultado de este ejemplo, sin embargo, produce un valor óptimo $k^* = 0,7341$, el cual, de todas formas, se considera muy bajo para efectos prácticos; la causa puede ser que se utiliza en el ejemplo un valor muy bajo de B_1 , lo que, en las condiciones actuales de la logística, puede ser inaceptable y, por lo tanto, más elementos de análisis son necesarios. Curiosamente, un artículo muy parecido al mencionado pero en versión completa, por los mismos tres autores, es publicado en otra revista también en 2009 [Ting *et al.* (2009)].

Sistemas (s, S)

Recuérdese que un sistema (s, S) o *min-max* es aquel sistema de control de inventarios continuo en el cual, cuando el inventario efectivo llega a s unidades o menos, se ordena una cantidad tal que eleva el nivel de inventario efectivo a un inventario máximo S . Los sistemas *min-max* fueron introducidos en el capítulo 6. Debido a que no siempre las transacciones de demanda son unitarias, el inventario efectivo puede bajar en una unidad, o más, por debajo del punto de reorden s y, por lo tanto, el tamaño del pedido es variable y no siempre es igual a $S - s$. Es precisamente esta condición la que hace que estos sistemas sean complejos de manejar. Se tiene, así, dos formas de abordar el problema.

En la primera forma se ignora el hecho de que pueden existir caídas de inventario grandes por debajo del punto de reorden s y se determinan s y S en forma secuencial. Esta forma es la descrita en el capítulo 6.

Ejemplo 7.3 (Determinación secuencial de s y S)

Considérese el ejemplo 5.3 del capítulo 5, pero utilizando un valor de $B_1 = 4.000.000$ \$/ocasión de faltante. El valor de k se estima a través de la

Ec. (5.18) del capítulo 5 (las unidades monetarias se trabajan en miles de \$):

$$k = \sqrt{2 \ln\left(\frac{DB_1}{\sqrt{2\pi}Qv\sigma_L r}\right)} = \sqrt{2 \ln\left(\frac{(12.000 \times 12) \times 4.000}{\sqrt{2\pi} \times 10.142 \times 14 \times 3.797 \times 0.20}\right)} = 1,23$$

Nótese el incremento importante del valor de k al utilizar $B_1 = 4.000.000$ \$/ocasión de faltantes en lugar $B_1 = 2.800.000$ \$/ocasión de faltantes. El punto de reorden viene dado por:

$$s = (d \times L) + (k \times \sigma_L) = (12.000 \times 1,5) + (1,23 \times 3.797) = 22.671 \text{ unidades}$$

Y, finalmente, el inventario máximo es

$$S = s + Q = 22.671 + 10.142 = 32.813 \text{ unidades.}$$

En la segunda forma, más precisa, se considera la distribución de las caídas de inventario por debajo de s o, equivalentemente, la distribución probabilística de los tamaños de las transacciones de demanda. Esta última forma se ilustra a continuación, de acuerdo con los resultados mostrados por Silver *et al.* (1998, pp. 332-336).

Consideración de las caídas de inventario por debajo del punto de reorden s

En este caso se determinan s y S simultáneamente y se tienen en cuenta las caídas del inventario por debajo del punto de reorden s . Dado que aquí ocurre un faltante, siempre y cuando, la suma de la caída del inventario por debajo de s y la demanda durante el tiempo de reposición, superen el punto de reorden s , interesa considerar la variable aleatoria $x' = z + x$, donde z es la variable que representa las caídas de inventario y x es la demanda total sobre el tiempo de reposición.

La distribución probabilística de x se ha asumido normal a lo largo del capítulo 5 y de este capítulo. Sin embargo, la distribución probabilística de z es mucho más complicada y se considera generalmente discreta. Karlin (1958) obtuvo algunos resultados cuando el valor de $S - s$ es considerablemente más grande que el tamaño promedio de cada transacción de demanda. Este autor encontró que:

$$p_z(z_0) = \frac{1}{E(t)} \sum_{t_0=z_0+1}^{\infty} p_t(t_0) \quad (7.5)$$

donde:

- $p_z(z_0)$ = probabilidad de que la caída por debajo de s sea igual a z_0 .
 $p_{t'}(t_0)$ = probabilidad de que la transacción de demanda sea igual a t_0 .
 $E(t)$ = tamaño promedio de las transacciones de demanda.

La Ec. (7.5) puede utilizarse para hallar la media y la varianza de la variable aleatoria z , de la siguiente forma:

$$E(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{E(t^2)}{E(t)} - 1 \right] \quad (7.6)$$

$$\text{var}(z) = \frac{1}{12} \left\{ \frac{4E(t^3)}{E(t)} - 3 \left[\frac{E(t^2)}{E(t)} \right] - 1 \right\} \quad (7.7)$$

Como z y x se asumen como variables aleatorias independientes, se tiene que:

$$E(x') = E(z) + E(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{E(t^2)}{E(t)} - 1 \right] + \hat{x}_L \quad (7.8)$$

$$\text{var}(x') = \text{var}(z) + \text{var}(x) = \frac{1}{12} \left\{ \frac{4E(t^3)}{E(t)} - 3 \left[\frac{E(t^2)}{E(t)} \right] - 1 \right\} + \sigma_L^2 \quad (7.9)$$

Asumiendo que x' sigue una distribución normal con la media y varianza anteriormente mostradas, la regla para el control del inventario sería la siguiente:

Paso 1

Seleccione k y Q de tal forma que se satisfagan simultáneamente las siguientes ecuaciones:

$$Q = \sqrt{\frac{2AD}{vr}} \sqrt{1 + \frac{B_1}{A} p_z(k) - E(z)} \quad (7.10)$$

$$k = \sqrt{2 \ln \left(\frac{DB_1}{\sqrt{2\pi} [Q + E(z)] vr \sqrt{\text{var}(x')}} \right)} \quad (7.11)$$

Paso 2

Calcule:

$$s = E(x') + k \sqrt{\text{var}(x')} \quad (7.12)$$

Paso 3

Calcule $S = s + Q$

Ejemplo 7.4 (Utilización de la distribución probabilística de caídas por debajo de s)

Considérese el ejemplo 5.3 del capítulo 5 (utilizando un valor de $B_1 = \$4.000.000$ /ocasión de faltante). Supóngase que la distribución probabilística del tamaño de las transacciones de demanda es la siguiente distribución discreta:

t_0	500	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000
$p_t(t_0)$	0,05	0,10	0,10	0,20	0,20	0,15	0,15	0,05

El problema consiste en diseñar un sistema de control de inventarios (s, S) para esta situación.

Con base en los datos de la distribución probabilística del tamaño de las transacciones de demanda, se pueden realizar los siguientes cálculos iniciales requeridos por el método descrito anteriormente:

$$E(t) = \sum_{t_0} t_0 p_t(t_0) = 3.725$$

$$E(t^2) = \sum_{t_0} t_0^2 p_t(t_0) = 17.112.500$$

$$E(t^3) = \sum_{t_0} t_0^3 p_t(t_0) = 8,740625 \times 10^{10}$$

De las Ec. (7.8) y (7.9), se obtiene lo siguiente:

$$E(x') = E(z) + E(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{17.112.500}{3.725} - 1 \right] + 18.000$$

$$= 2.296,48 + 18.000 = 20.296,48 \text{ unidades}$$

$$\text{var}(x') = \frac{1}{12} \left\{ \frac{4(8,740625 \times 10^{10})}{3.725} - 3 \left[\frac{17.112.500}{3.725} \right] - 1 \right\} + (3.797)^2$$

$$\text{var}(x') = 22.237.649 \text{ unidades}^2$$

Se continúa entonces con el algoritmo:

Paso 1

Seleccione k y Q de tal forma que se satisfagan simultáneamente las siguientes ecuaciones:

$$Q = (10.141,85)\sqrt{1+4p_z(k)} - 2.296,48$$

$$k = \sqrt{2 \ln \left(\frac{5,76 \times 10^8}{[Q + 2.296,48](33.097,29)} \right)}$$

Utilizando el procedimiento iterativo descrito anteriormente, se obtiene aproximadamente $Q = 12.530$ unidades y $k = 0,57$.

Paso 2

$$\text{Calcule: } s = 20.296,48 + 0,57\sqrt{22.237.649} = 22.985 \text{ unidades}$$

Paso 3

$$\text{Calcule: } S = s + Q = 22.985 + 12.530 = 35.515 \text{ unidades.}$$

Aunque el método del ejemplo 7.4 produce resultados cercanos al óptimo, el método secuencial del ejemplo 7.3 produce resultados aceptables, especialmente si no se tiene demanda errática, para la cual el tamaño de las transacciones de demanda puede tener una gran variabilidad. Se sugiere utilizar el método más preciso cuando σ_1 excede el nivel de demanda d (ambos medidos sobre la misma unidad de tiempo), o sea, cuando el coeficiente de variación de la demanda periódica es mayor que el 100%. Para los datos utilizados aquí, correspondientes al ejemplo 5.1, esto no ocurre pues $\sigma_1 = 3.100$ unidades y $d = 12.000$ unidades, ambos con período base mensual.

Control “min-max” de inventario de ítems con demanda errática

Ballou (2004, p. 366) expresa que el sistema *min-max* puede adaptarse, en la práctica, al control de ítems con demanda errática, como es el caso de aquellos ítems de bajo movimiento. El método *min-max* se puede adaptar de la siguiente forma en estas situaciones:

1. Se puede utilizar una técnica de pronóstico que simplemente determine el promedio de demanda sobre, por lo menos, los últimos 30 períodos, si existen datos disponibles. Calcule igualmente la desviación estándar de la demanda sobre los mismos períodos. Si el coeficiente de variación de la demanda es mayor que 1, declare la demanda como errática y continúe con el paso siguiente.

2. Se calcula el tamaño de la orden Q con cualquiera de los métodos presentados anteriormente.
3. Se aproxima el déficit esperado u como la mitad de la diferencia entre el inventario inicial y el inventario final a la mano, entre sucesivas actualizaciones del inventario a la mano (por ejemplo, con respecto a las ventas diarias).
4. Como el inventario a la mano puede caer significativamente debajo del punto de reorden en el momento de emitir una orden, se ajusta el punto de reorden para responder a este hecho. O sea que, adicionalmente a la demanda durante el tiempo de reposición más el inventario de seguridad que conforman usualmente el punto de reorden s , se suma ahora el déficit o caída esperada u por debajo del punto de reorden.
5. Se calcula el máximo nivel de inventario $S = s + Q - u$.
6. Ejecute el control del inventario en la forma normal; es decir, cuando el inventario efectivo es menor o igual al punto de reorden, ordene una cantidad igual a la diferencia entre el máximo nivel de inventario y el inventario efectivo.

Ejemplo 7.5 (Sistema “min-max” con demanda errática)

Se ha encontrado que cierto ítem tiene una demanda promedio semanal de 200 unidades y una desviación estándar con base semanal igual a 225 unidades (coeficiente de variación = 112,5%). El costo unitario del ítem es 5.000 \$/unidad; el costo de ordenamiento es \$50.000; la tasa r es del 32% anual, y el tiempo de reposición constante es igual a 1 semana. Se desea tener un nivel de servicio $P_1 = 0,95$. Las cantidades a la mano son actualizadas diariamente, y las ventas diarias promedio son de 42 unidades, por lo que se ha estimado el déficit esperado en $u = 21$ unidades. Determine el punto de reorden s y el inventario máximo S para este ítem, con base en las consideraciones establecidas anteriormente.

Claramente, el ítem presenta demanda errática. Q se determina con base en el EOQ :

$$Q = EOQ = \sqrt{\frac{2(50.000)(200)(52)}{(5.000)(0,32)}} = 807 \text{ unidades}$$

El valor de k para $p_z(k) = 1 - 0,95 = 0,05$ es aproximadamente $k = 1,645$. Además:

$$\sigma_L = \sigma_1 \sqrt{L} = 225 \sqrt{1} = 225 \text{ unidades}$$

Por lo tanto, el punto de reorden y el nivel máximo de inventario vienen dados por:

$$s = \hat{x}_L + k\sigma_L + u = (200)(1) + (1,645)(225) + 21 = 591 \text{ unidades}$$

$$S = s + Q - u = 591 + 807 - 21 = 1.377 \text{ unidades}$$

La política de control es, por lo tanto, revisar continuamente el inventario; cuando el inventario efectivo llegue al punto de reorden $s = 591$ unidades, entonces se ordena una cantidad igual al inventario máximo $S = 1.377$ unidades *menos* el inventario efectivo al momento de la revisión. La gran diferencia entre S y s se debe precisamente al factor errático de la demanda.

Sistemas (R, s, S)

Recuérdese que un sistema (R, s, S) es aquel sistema de control de inventarios periódico en el cual se revisa el inventario efectivo cada R unidades de tiempo, y si éste es igual a s unidades o menos, se ordena una cantidad tal que eleva el nivel de inventario efectivo a un valor máximo S . De acuerdo con Silver *et al.* (1998), la determinación simultánea del valor óptimo de los tres parámetros es extremadamente difícil, debido principalmente a la dificultad de considerar la distribución probabilística de las caídas del inventario por debajo del punto de reorden s , las cuales son más significativas bajo este contexto debido a la revisión periódica del inventario. Por esta razón, los autores recomiendan la utilización de métodos heurísticos, uno de los cuales se describe a continuación.

El método que se presenta se conoce con el nombre de *Aproximación exponencial revisada* y se debe originalmente a Ehrhardt (1979), basado en algunos resultados de Roberts (1962), con trabajos adicionales de Naddor (1975) y la revisión implementada por Ehrhardt y Mosier (1984). Aunque se trata de ecuaciones empíricas halladas por extensivos ensayos sobre múltiples casos, se ha encontrado que este método funciona muy bien para la mayoría de las circunstancias que podrían encontrarse en la realidad. Trabaja con base en el costo de faltantes B_3 , aquél dado por unidad de faltante y por unidad de tiempo. La regla de decisión es la siguiente:

Paso 1

Calcule:

$$Q_p = 1.3\hat{x}_R^{0.494} \left(\frac{A}{vr} \right)^{0.506} \left(1 + \frac{\sigma_{R+L}^2}{\hat{x}_R^2} \right)^{0.116} \quad (7.13)$$

$$s_p = 0,973\hat{x}_{R+L} + \sigma_{R+L} \left(\frac{0,183}{z} + 1,063 - 2,192z \right) \quad (7.14)$$

donde:

$$z = \sqrt{\frac{Q_p r}{\sigma_{R+L} B_3}}$$

$$\hat{x}_R = DR$$

$$\hat{x}_{R+L} = D(R + L)$$

B_3 está expresado en \$(/\$ de faltante al final del período de revisión); r está expresado en \$(/\$ por intervalo de revisión); D , usualmente en unidades/año, y R y L en años.

Paso 2

Si $Q_p / \hat{x}_R > 1,5$, entonces calcule:

$$s = s_p$$

$$S = s_p + Q_p$$

De lo contrario, vaya al paso 3.

Paso 3

Calcule:

$$S_0 = \hat{x}_{R+L} + k\sigma_{R+L} \text{ donde } k \text{ satisface la ecuación:}$$

$$p_z(k) = \frac{r}{B_3 + r}. \text{ Y así, calcule finalmente:}$$

$$s = \min \{s_p, S_0\}$$

$$S = \min \{s_p + Q_p, S_0\}$$

Ejemplo 7.6 [Sistemas (R, s, S)]

Considere los ejemplos 5.1 y 5.6 y asuma que se hace revisión del inventario cada $R = 4$ semanas = $1/13$ año (asumiendo que 1 año = 52 semanas). Recuerde los siguientes valores ya dados:

$$\begin{aligned} D &= 144.000 \text{ unidades/año.} \\ L &= 1,5 \text{ meses} = 0,125 \text{ años.} \\ \sigma_{R+L} &= 4.826 \text{ unidades.} \\ A &= 1.000.000 \$/\text{pedido.} \\ v &= 14.000 \$/\text{unidad.} \\ r &= 0,20 \$/(\$ \text{ año}). \end{aligned}$$

En el ejemplo 5.5 se asumió un valor $B_3 = 3,8 \$/(\$ \text{ año})$. Este valor se tomará de nuevo aquí. Estrictamente hablando, tanto r como B_3 deben estar expresados con base en una unidad de tiempo igual al intervalo de revisión del inventario R . Así, se tiene:

$$\begin{aligned} r &= 0,20 \$/(\$ \text{ año}) \times 1/13 \text{ año} = 0,0153846 \$/(\$ \text{ intervalo de revisión}). \\ B_3 &= 3,8 \$/(\$ \text{ año}) \times 1/13 \text{ año} = 0,292308 \$/(\$ \text{ intervalo de revisión}). \end{aligned}$$

Se necesita también calcular previamente los siguientes valores:

$$\hat{x}_R = DR = (144.000)(1/13) = 11.077 \text{ unidades}$$

$$\hat{x}_{R+L} = D(R + L) = 144.000 (1/13 + 0,125) = 29.077 \text{ unidades}$$

Se desarrolla a continuación cada uno de los pasos del método descrito anteriormente.

Paso 1

Se calcula Q_p de acuerdo con la Ec. (7.13), expresando las unidades monetarias de v y de A en miles de \$:

$$Q_p = 1,3(11.077)^{0,494} \left(\frac{1.000}{(14)(0,0153846)} \right)^{0,506} \left(1 + \frac{(4.826)^2}{(11.077)^2} \right)^{0,116}$$

$$Q_p = 9.463 \text{ unidades}$$

Se calcula ahora z :

$$z = \sqrt{\frac{(9.463)(0,20)}{(4.826)(3,8)}} = 0,32125$$

Nótese que en la ecuación para calcular z se puede utilizar los valores originales de r y B_3 dados por año, ya que se cancelarían los factores de conversión. Ahora se calcula s_p con base en la Ec. (7.14):

$$s_p = 0,973(29.077) + (4.826) \left(\frac{0,183}{0,32125} + 1,063 - (2,192)(0,32125) \right)$$
$$s_p = 32.772 \text{ unidades}$$

Paso 2

Se calcula el valor:

$Q_p / \hat{x}_R = 9.463 / 11.077 = 0,8543 < 1,5$. Por lo tanto, debe continuarse con el paso 3.

Paso 3

Se obtiene inicialmente:

$$p_z(k) = \frac{0,20}{3,8 + 0,20} = 0,05. \text{ De donde } k = 1,64. \text{ Y así, finalmente:}$$

$$S_0 = 29.077 + (1,64)(4.826) = 36.992 \text{ unidades}$$

$$s = \minimo \{s_p, S_0\} = \minimo \{32.772; 36.992\} = 32.772 \text{ unidades}$$

$$S = \minimo \{s_p + Q_p, S_0\} = \minimo \{42.235; 36.992\} = 36.992 \text{ unidades}$$

La política de inventarios es, por lo tanto, revisar el inventario cada $R = 4$ semanas (1/13 año) y ordenar la diferencia entre $S = 36.992$ unidades y el inventario efectivo, siempre y cuando éste sea menor o igual a $s = 32.772$ unidades. Es importante notar que el resultado del método ilustrado, en algunos casos, puede ser que la mejor política (R, s, S) sea en realidad una política (R, S) , cuando $s = S$ y, por lo tanto, siempre se pediría al momento de la revisión.

Ejercicios 7.1

1. Considere la determinación simultánea de s y Q en un sistema (s, Q) con costo de faltante B_1 conocido, presentada en este capítulo. Deduzca las ecuaciones mostradas en los diferentes pasos, especialmente la Ec. (7.4).
2. La administradora de una droguería se está preguntando qué tan bueno es el sistema de control que está utilizando para un medicamento importado clase A. Actualmente, ella utiliza un sistema (s, Q) , donde Q se determina previamente mediante el EOQ y el factor de seguridad se selecciona con base en la regla del costo por unidad de faltante, $B_2 v$ [Ec. (7.2)]. Los datos son los siguientes:

$$\begin{array}{ll} D = 12.000 \text{ unidades/año} & B_2 = 50\% \\ v = 50.000 \$/\text{unidad} & L = 1,5 \text{ meses} \\ A = \$100.000 & \sigma_1 = 220 \text{ unidades (base mensual)} \\ r = 32\% \text{ anual} & \end{array}$$

- a) Cuál es el valor de Q y s actualmente usado por la administradora?
 - b) Determine los valores óptimos de Q y s , calculando en cada iteración CTR_2 .
 - c) Cuál es el porcentaje de penalización en el costo total relevante CTR_2 por no usar el método exacto del literal b)?
3. Repita el ejercicio anterior con los mismos datos, pero ahora asuma que la administradora selecciona el factor de seguridad k con base en el costo de faltantes B_1 [Ec. (5.18), capítulo 5]. Tome $B_1 = \$1.000.000/\text{ocasión de faltante}$ y utilice el costo total relevante CTR_1 en los literales b) y c).
 4. Resuelva el ejemplo 7.1 con valores B_2 iguales a 0,30, 0,35 y 0,40. Comente acerca de los resultados del CTR_2 y de los niveles de servicio P_1 y P_2 obtenidos.
 5. Resuelva el ejemplo 7.2 con valores B_1 iguales a 5.000, 7.500 y 10.000 miles de \$/ocasión de faltante. Comente acerca de los resultados del CTR_1 y de los niveles de servicio P_1 y P_2 obtenidos.
 6. Considere el ejemplo 7.4. Resuelva el problema de nuevo, asumiendo que la distribución probabilística de las caídas de inventario es la siguiente:

t_0	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000
$p_r(t_0)$	0,01	0,24	0,25	0,24	0,24	0,02

Repita este problema si se asume que la distribución probabilística de los tamaños de las transacciones de demanda se puede considerar como una distribución uniforme entre 500 y 7.000 unidades.

7. Cierto repuesto tiene una demanda promedio semanal de 2.000 unidades y una desviación estándar con base semanal estimada en 2.250 unidades. El costo del ítem es de 5.000 \$/unidad; el costo de ordenamiento es \$20.000; el costo de mantenimiento del inventario es del 36% anual, y el proveedor mantiene un tiempo constante de entrega de 3 días. Se desea tener un nivel de servicio $P_1 = 0,95$. Las cantidades a la mano son actualizadas diariamente, y el registro del consumo diario en unidades para las últimas cuatro semanas fue el siguiente:

SEMANA	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
1	245	0	0	0	756	1.000	180
2	45	0	67	350	62	567	120
3	0	89	46	240	0	100	80
4	556	0	780	1.350	0	0	612

Diseñe un sistema de control (s, S) adecuado para este ítem.

8. Considere un ítem para el cual se está utilizando una política (R, s, S). El intervalo de revisión es $R = 1$ semana. Otros datos son los siguientes:

$$L = 2 \text{ semanas}$$

$$r = 26\% \text{ anual}$$

$$D = 800 \text{ unidades/año}$$

$$B_3 = 0,30 \text{ $/\$ unidad por semana}$$

$$A = \$40.000$$

$$\sigma_{R+L} = 14,2 \text{ unidades}$$

$$v = 5.000 \text{ $/unidad}$$

Usando el método de *Aproximación exponencial revisado*, encuentre los valores apropiados de s y S (asuma 52 semanas/año). Repita el ejercicio para un ítem con las misma características, excepto con un valor $v = 500.000 \text{ $/unidad}$ [Adaptado y complementado de Silver *et al.* (1998, p. 350)].

CONTROL DE ÍTEMES CLASE C

Aunque de acuerdo con la clasificación ABC los ítems clase C son los “menos importantes”, esto no significa que su control pueda descuidarse o dejarse al azar. Debe recordarse que ellos representan el mayor número de ítems y, por lo tanto, lo que se busca es simplificar lo más posible su

control y administración. Aunque los ítems clase C representan el menor valor Dv de todos, pueden eventualmente convertirse en ítems mucho más importantes, inclusive algunos en clase A. Algunas razones para explicar esto pueden ser que los ítems clase C sean:

- Ítems claves para alguna parte del proceso productivo que, aunque tengan un bajo valor Dv , pueden llegar a tener muy alto costo en caso de faltante.
- Ítems importantes para uno o más clientes claves de la organización, como los medicamentos de EPS en una cadena de droguerías. A un cliente de una droguería le tiene sin cuidado sin un ítem es A, B o C; lo que le interesa es que se le preste el servicio y que el medicamento esté disponible. Por lo tanto, como los ítems clase C son muchos, hay probabilidad de que, si no se tratan adecuadamente, se generen agotados que afecten toda la cadena y la imagen de la empresa.
- Ítems poco costosos, pero pertenecientes a ensambles o subensambles clase A.
- Ítems que pueden ser complementarios con otros debido a su naturaleza. Por ejemplo, una jeringa ayudará a la venta de una ampolla costosa en una droguería, así la primera sea un ítem de muy bajo costo.
- Ítems que originalmente han sido clasificados como C, pero que maduran durante su ciclo de vida y llegan a convertirse en ítems clase A. Por esta razón, la clasificación ABC debe revisarse periódicamente.

Control de ítems clase C con demanda aproximadamente estable

Aunque algunos autores sugieren no llevar registros de los ítems clase C, ni mucho menos pronosticar su demanda, la actual capacidad y versatilidad de los sistemas computacionales y de información permite hacerlo para todos los ítems sin mayor dificultad. Por ejemplo, una cadena de droguerías puede manejar, en total, alrededor de unos 8.000 ítems, de los cuales alrededor de 6.500 son C (ver figura 1.1). Si la cadena consta de un centro de distribución y 100 puntos de venta, los cuales manejan aproximadamente el 50-60% del total de ítems, de acuerdo con el surtido tipo o vectorización de cada droguería, el número real de *SKU* a manejar puede ser superior a 480.000 (recuérdese que se reconoce un *SKU* a un ítem en cada localidad geográfica, así sea el mismo ítem con el mismo código). Sin embargo, se puede llevar registro diario de ventas por ítem y por punto de venta, incluyendo los ítems clase C. Esta información puede procesarse y permite generar pronósticos de promedio móvil que pueden ser muy útiles para el control adecuado de los inventarios, incluso, para demandas erráticas.

Se puede estimar la variabilidad de los errores de pronóstico con una de las técnicas explicadas en el capítulo 3 y determinar así los inventarios de seguridad. Los factores de seguridad pueden escogerse con base en cualquiera de los criterios establecidos en el capítulo 5. Sin embargo, Silver *et al.* (1998, p. 361) sugieren la utilización de uno en especial, el *TEF* (tiempo promedio especificado entre ocurrencia de faltantes), ya que al parecer es un indicador intuitivo para la administración. Valores de *TEF* entre 5 y 100 años no son extraños y su escogencia dependerá del caso en particular y del deseo de eliminar los faltantes de ítems C. El proceso, entonces, para un sistema (R, S) puede resumirse en los siguientes pasos (obsérvese la analogía con lo descrito en el capítulo 5):

Paso 1

Fije el valor del intervalo de revisión R , de acuerdo con la naturaleza del sistema. Recuérdese que el inventario de los ítems clase C debe revisarse en períodos considerables de tiempo, como si tuviera un cubrimiento grande. Especifique igualmente el valor de *TEF* deseado.

Paso 2

Determine el valor de k de acuerdo con la siguiente ecuación [equivalente a la Ec. (5.23) para un sistema (s, Q)]:

$$p_z(k) = \frac{R}{TEF} \quad (7.15)$$

Paso 3

Determine $\hat{x}_{R+L} = d(R + L)$ y $\sigma_{R+L} = \sigma_1 \sqrt{R + L}$, donde d es la demanda promedio periódica provista por el sistema de pronósticos, y σ_1 es la desviación estándar estimada de los errores de pronóstico calculada con base en la misma unidad de tiempo de R y L .

Paso 4

Calcule el inventario máximo como $S = \hat{x}_{R+L} + k\sigma_{R+L}$.

Si se está utilizando un sistema (s, Q), se puede hacer la analogía mediante la regla de decisión presentada en el capítulo 5. Sin embargo, para ítems clase C tiene más sentido hablar de control periódico, ya que la coordinación aquí es fundamental debido al gran número de ítems bajo control.

Si no se dispone de un sistema formal de pronósticos, entonces aún se puede utilizar el método anterior, estimando obviamente la demanda promedio d por algún otro método más sencillo, calculando $\hat{x}_{R+L} = d \times (R + L)$ y, finalmente, estimando la desviación estándar como $\sigma_{R+L} = \sqrt{\hat{x}_{R+L}} = \sqrt{d \times (R + L)}$

. Esto supone una distribución de Poisson, la cual puede ser adecuada para ítems de lento movimiento, como ocurre frecuentemente con los ítems C.

Ejemplo 7.7 (Sistema (R, S) para ítems clase C)

Un ítem clase C está siendo pronosticado mediante un sistema de promedio móvil con períodos mensuales. El pronóstico d para el próximo mes es de 12,5 unidades y el ECM mensual se ha actualizado a un valor de 96,75 unidades². Se ha escogido un intervalo de revisión $R = 3$ meses y se conoce que el tiempo de reposición $L = 0,5$ meses. Para un $TEF = 20$ años, calcule el inventario máximo S .

De acuerdo con el paso 2 anterior, se calcula:

$$p_z(k) = \frac{R}{TEF} = \frac{3/12 \text{ año}}{20 \text{ años}} = 0,0125$$

De las tablas del apéndice A se obtiene $k = 2,24$. Se calcula ahora:

$$\hat{x}_{R+L} = d(R + L) = 12,5(3 + 0,5) = 43,75 \text{ unidades}$$

$$\sigma_{R+L} = \sigma_1 \sqrt{R + L} = \sqrt{ECM} \sqrt{R + L} = \sqrt{96,75} \sqrt{3 + 0,5} = 18,40 \text{ unidades}$$

Así, se obtiene finalmente:

$$S = \hat{x}_{R+L} + k\sigma_{R+L} = 43,75 + (2,24)(18,40) \approx 85 \text{ unidades}$$

Por lo tanto, el inventario de este ítem debe revisarse cada 3 meses y ordenarse una cantidad igual a 85 unidades, menos el inventario efectivo al momento de la revisión. Con esta política se espera que el tiempo promedio entre ocasiones de faltantes del ítem no sea menor que 20 años.

Nótese que a pesar de que un valor de $TEF = 20$ años parece exagerado, en realidad el factor de seguridad $k = 2,24$ no lo es tanto. Además, como los ítems clase C son de bajo valor, es preferible tener altos inventarios de los mismos cuyo costo puede no ser exagerado, a cambio de disponer de tiempo de administración para dedicárselo a otros ítems, por ejemplo los A, que lo requieren.

Reducción de excesos de inventarios

Una parte fundamental de cualquier sistema de control de inventarios es la eliminación adecuada de excesos de inventarios obsoletos o de muy lento movimiento. Los excesos pueden ser creados por una orden de tamaño exagerado en cualquier etapa de la vida de un producto, por una baja inesperada y consistente de la demanda de un ítem, por su obsolescencia

normal debido a su propia naturaleza, o, simplemente, por la aplicación de controles inadecuados y desbalanceo de inventarios.

La clasificación ABC puede utilizarse como una fuente de identificación de ítems de movimiento nulo o muy bajo, los cuales son candidatos para ser retirados de circulación. Estos ítems se identifican fácilmente en las últimas filas de la clasificación C y, sorprendentemente, en la mayoría de los casos, constituyen un gran número de los ítems manejados por la organización.

Una vez identificados los ítems en exceso, debe buscarse inmediatamente la forma de disponer de ellos. Posibles soluciones a este problema incluyen una o más de las siguientes posibilidades:

- Reacondicionamiento del ítem (*rework*) para su posible uso en otros propósitos. Por ejemplo, un repuesto automotor obsoleto podría rediseñarse y, posiblemente, mediante un trabajo adicional de producción, actualizarse a la nueva forma, especialmente en nuestro medio.
- Muchas veces en las empresas que cuentan con diversos puntos de venta se observa que algunos ítems con movimiento nulo en algunos lugares, pueden aún tener un consumo aceptable en otras localidades. La transferencia de los ítems en exceso, desde los primeros lugares hacia los lugares de mayor consumo, resolverá un gran problema de desbalanceo de inventarios.
- Realización de promociones donde otros ítems de mayor consumo, o más llamativos para el cliente, se utilizan como “gancho” para vender los ítems obsoletos. Por ejemplo, en un supermercado donde se venden productos de diversos sabores, puede ofrecerse un sabor de movimiento muy bajo conjuntamente con otros de movimiento normal (“pague uno, lleve dos”, por ejemplo).
- Los ítems obsoletos pueden ofrecerse con grandes descuentos. Por ejemplo, en los ítems de temporada, una vez ésta concluye, se encuentran los excesos con descuentos que pueden llegar, en ocasiones, hasta un 90% del valor original del ítem.
- Si se ha acordado con el proveedor, una de las mejores formas es la devolución a éste de los ítems en exceso que no han presentado movimiento alguno o muy bajo. Esto también puede manejarse mediante la forma de negociación de “mercancía en consignación”. Este caso ocurre frecuentemente con los ítems nuevos que no tienen buena acogida en el mercado y que nunca maduran en su ciclo de vida.
- Los ítems en exceso pueden ser subastados. Aunque en nuestro medio esto no es muy común, esta posibilidad siempre existe.
- Una última posibilidad puede ser la donación del ítem, si esto es permitido por la ley, o su descarte definitivo atendiendo los requerimientos legales y ecológicos.

Control de inventarios de repuestos y partes para mantenimiento

Los ítems clase C están muy relacionados con el tema del control de inventarios de repuestos y partes de mantenimiento, ya que muchos de éstos tienen muy bajo consumo y se pueden volver obsoletos rápidamente, especialmente cuando la empresa actualiza sus líneas de producción. Un artículo que presenta una revisión de literatura muy bien organizada sobre este tema es el de Kennedy *et al.* (2002). Los autores se refieren a temas como la administración de repuestos, el reemplazo de los ítems basado en su edad, los problemas de inventarios de repuestos en múltiples etapas de una cadena de abastecimiento y los problemas de obsolescencia, entre otros tópicos. Otro ejemplo interesante es el mostrado por Li y Kuo (2008), quienes desarrollan un sistema de soporte de decisiones de redes neuronales difusas (versión mejorada) para el pronóstico de demanda de repuestos automotores en un centro de distribución.

En un artículo muy interesante, Porras y Dekker (2008) comparan diversos métodos de control de inventarios de punto de reorden y los prueban en un caso real en un sistema productivo con 60 instalaciones entre refinerías de petróleo y plantas de productos químicos. La organización posee un centro de distribución que mantiene en inventario 43.000 ítems (de acuerdo con los autores, todos estos datos corresponden al año 2000). Los ítems son clasificados en tres clases, de acuerdo con su criticidad o impacto sobre el sistema productivo. Los más críticos son aquellos cuyos faltantes podrían causar graves paradas de producción y daños a las personas o al medio ambiente. Los de mediana criticidad son aquellos ítems que pueden causar paradas de producción pero que no tienen implicaciones humanas o ecológicas. Finalmente, los ítems de menor criticidad son aquellos cuya ausencia no tiene efectos significativos en el sistema. Un refinamiento de esta clasificación se hace dependiendo de los equipos donde el ítem es utilizado, pero para obtenerla no se utilizan técnicas cuantitativas. Los autores mejoraron la clasificación combinándola con el costo y con la naturaleza de la demanda de los ítems.

Algunas conclusiones de este estudio enfatizan características importantes del control del inventario de repuestos. Específicamente, estos investigadores concluyen que:

- El mantenimiento preventivo ocasiona altas demandas erráticas y por ello es necesario identificar los ítems que sufren esta situación para tener un mejor control de ellos.
- Los repuestos presentan demanda bajas o muy bajas, incluso con observaciones de demanda cero por cinco años, lo que causa mucha dificultad de control.
- Aunque los modelos de control predicen ciertos niveles de servicio, los niveles observados en la realidad difieren significativamente de los teóricos, incluso hasta en un 40%.

- Los sistemas integrados de planificación (*ERP*), de los cuales los autores mencionan uno en particular, no son efectivos en el control de inventarios de repuestos, ya que solamente incluyen el nivel de servicio cíclico como medida de servicio e ignoran el *fill rate*, el cual es muy importante en este caso.
- El problema de control puede complicarse si la demanda es no-estacionaria, o sea, que sus propiedades varían a lo largo del tiempo.
- La aplicación de modelos de inventarios adecuados para estos ambientes pueden generar ahorros significativos y mejorar los niveles de servicio.
- Los modelos probados por los autores, que asumían demanda normal durante el tiempo de reposición, se comportaron muy bien, logrando ahorros del 8,4% sobre el sistema que se estaba utilizando. Este resultado es muy significativo porque valida en cierta forma la utilización de la normalidad de la demanda durante el tiempo de reposición, incluso en aquellos casos en los que ésta se aleja de dicho supuesto. Lo que ocurre, de acuerdo con los autores, es que el supuesto de normalidad es más robusto en cuanto a los niveles de servicio obtenidos (*fill rate*) y produce puntos de reorden conservativos en comparación de otras distribuciones como la de Poisson.

CONTROL DE ÍTEMS PEREcedEROS Y ESTACIONALES

Un tema clave en el control de inventarios es el control de ítems perecederos, estacionales o “de moda”, ya que pueden llegar a un alto grado de obsolescencia en tiempos relativamente cortos. En otras palabras, suelen ser productos de muy corto ciclo de vida, como los teléfonos celulares, las calculadoras e, incluso, los computadores.

El ejemplo clásico lo constituye el problema del vendedor de periódicos (*News Vendor Problem*), quien bien temprano en la mañana adquiere un cierto número de periódicos para vender a lo largo del día (o, tal vez, hasta las 12 m solamente). Si los periódicos se agotan antes de tiempo y no se puede satisfacer cierta demanda, se incurre en un costo por “bajo inventario” (*understock*), generado por la utilidad perdida al no satisfacer la demanda del inventario a la mano. Si, por el contrario, al final del día, el vendedor se queda con un cierto número de periódicos sin vender, sólo puede recuperar una parte de su precio de adquisición (lo que se denomina el *valor de salvamento*), incurriendo en un costo por “exceso de inventario” (*overstock*). El problema consiste, entonces, en determinar el número de periódicos que el vendedor debería adquirir al comienzo del día para maximizar su utilidad total esperada. Una buena revisión de literatura sobre el tema puede encontrarse en Khouja (1999) (no se encontró revisiones

más recientes sobre este tema). Aunque no es actualizada, es muy útil para estudiar el problema clásico del vendedor de periódicos y sus principales extensiones hasta ese año.

Esta misma situación se presenta en una gran variedad de ítems perecederos y estacionales, como diversos tipos de alimentos perecederos (leche, carne, comidas rápidas, etc.), ropa de venta estacional, flores, artículos de Navidad y artículos que se venden en otras festividades especiales, bancos de sangre y computadores, entre otros. A continuación se ilustra, con un ejemplo, el caso más simple, o sea aquel de un solo ítem sin considerar restricción alguna.

El problema del vendedor de periódicos para un solo ítem no-restringido (caso discreto)

Ejemplo 7.8 (Inventario de una revista de circulación semanal)

Suponga que es propietario de una librería y vende cierta revista de circulación semanal muy apetecida. A través de datos de demanda de las últimas 70 semanas, ha logrado establecer cierta distribución de frecuencias de demanda semanal de la revista, con 14 valores discretos de demanda. La correspondiente información se muestra en la tabla 7.3.

Tabla 7.3. Distribución de la demanda semanal de una revista (ejemplo 7.8)

Demanda en unidades [d_i]	Probabilidad de ocurrencia [p_i]	Probabilidad acumulada P_i de que la demanda $d \leq d_i$	Probabilidad de que la demanda $d > d_i$, $P_{d > d_i}$
7	0,01	0,01	0,99
8	0,02	0,03	0,97
9	0,04	0,07	0,93
10	0,08	0,15	0,85
11	0,09	0,24	0,76
12	0,10	0,34	0,66
13	0,17	0,51	0,49
14	0,22	0,73	0,27
15	0,10	0,83	0,17
16	0,10	0,93	0,07
17	0,03	0,96	0,04
18	0,02	0,98	0,02
19	0,01	0,99	0,01
20	0,01	1,00	0,00

La probabilidad acumulada de que la demanda d sea menor o igual a d_i se muestra en la figura 7.1.

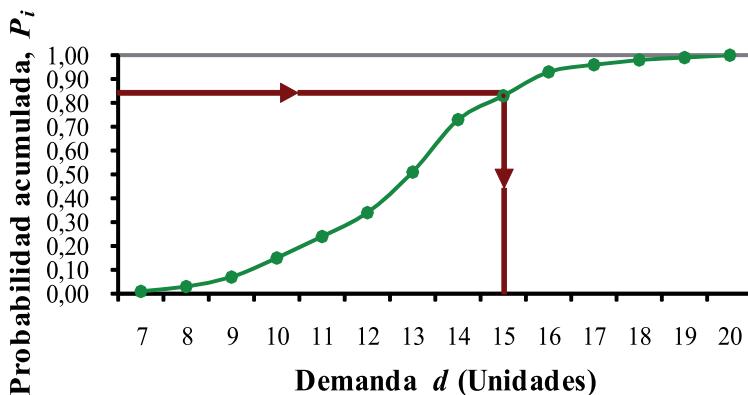


Figura 7.1. Probabilidad acumulada para el ejemplo de la revista (ejemplos 7.8 y 7.9).

Se tiene disponible la siguiente información de costos con respecto de la revista:

v = Costo de adquisición de la revista = \$6.500/unidad.

p = Precio de venta de la revista = \$10.500/unidad.

s = Valor de salvamento de la revista = \$5.700/unidad.

El valor de salvamento s de la revista representa el valor que el editor de la misma está dispuesto a reconocer por cada revista devuelta cada semana. Su problema fundamental es, entonces, ¿cuántas revistas debería usted comprar cada semana para maximizar su utilidad neta esperada?

Supóngase primero que una política de inventarios sea ordenar siempre el valor esperado de revistas que se venden cada semana, el cual viene dado por:

$$E(d) = \sum_{i=1}^{14} d_i p_i = 13,23 \text{ revistas}$$

Luego, la política sería ordenar 13 revistas cada semana. Así, la probabilidad de que la demanda semanal sea igual a 13 revistas, o menos, es 0,51, con lo cual el nivel de servicio sería muy pobre, pues en el 49% de las ocasiones se generaría faltantes de inventario.

Una forma de determinar el número óptimo de revistas a comprar cada semana es la de calcular la utilidad neta esperada $U(x)$ en función de la cantidad ordenada cada semana, x . Obviamente, $7 \leq x \leq 20$. La utilidad neta esperada sería entonces igual a:

$$U(x) = \sum_{i=7}^x \{[d_i(p-v) - (x-d_i)(v-s)]p_i\} + x(P_{d>x})(p-v) \quad (7.16)$$

La anterior expresión puede explicarse con la ayuda de la ley de la probabilidad total [Navidi (2006, p. 77)] y del concepto de valor esperado de una función de una variable aleatoria. Dado que se han ordenado x revistas, los posibles valores de la variable aleatoria d = demanda semanal de la revista se han dividido en dos conjuntos disjuntos: $7 \leq d \leq x$ y $d > x$. Si $7 \leq d \leq x$ y la demanda es igual a d_i , entonces se venden d_i revistas con una utilidad unitaria de $p - v$, pero al final de la semana sobran $x - d_i$ revistas de las cuales se pierde $v - s$ \$/u; todo esto ocurre con una probabilidad p_i . Ahora, si $d > x$, entonces sólo podrán venderse las x revistas que se pidieron con una utilidad unitaria de $p - v$ y con una probabilidad de ocurrencia de $P_{d>x}$. Por ejemplo, si $x = 9$ revistas, se tendría la siguiente utilidad esperada, reemplazando los respectivos valores de x, p, v y s :

$$\begin{aligned} U(9) &= \sum_{i=7}^9 \{[4.000d_i - 800(9-d_i)]p_i\} + 36.000P_{d>9} \\ &= \sum_{i=7}^9 \{[4.800d_i - 7.200]p_i\} + 36.000P_{d>9} \\ &= \{(4.800 \times 7) - 7.200\} \times 0,01 + \{(4.800 \times 8) \\ &\quad - 7.200\} \times 0,02 + \{(4.800 \times 9) - 7.200\} \times 0,04 \\ &\quad + (36.000 \times 0,93) = \$35.808 \end{aligned}$$

El desarrollo de la Ec. (7.16) para cada valor x es relativamente sencillo a través de una hoja electrónica. La tabla 7.4 presenta los resultados de la utilidad neta esperada $U(x)$ en función del número de revistas ordenado x .

Tabla 7.4. Utilidad neta esperada $U(x)$ en función de x (ejemplo 7.8)

x [unidades]	Utilidad esperada $U(x)$ [\$]
7	28.000,00
8	31.952,00
9	35.808,00
10	39.472,00
11	42.752,00
12	45.600,00
13	47.968,00
14	49.520,00
15	50.016,00
16	50.032,00
17	49.568,00
18	48.960,00
19	48.256,00
20	47.504,00

Análogamente, la figura 7.2 muestra la gráfica de $U(x)$ vs. x . Obsérvese que el valor óptimo ocurre cuando $x = x^* = 16$ unidades.

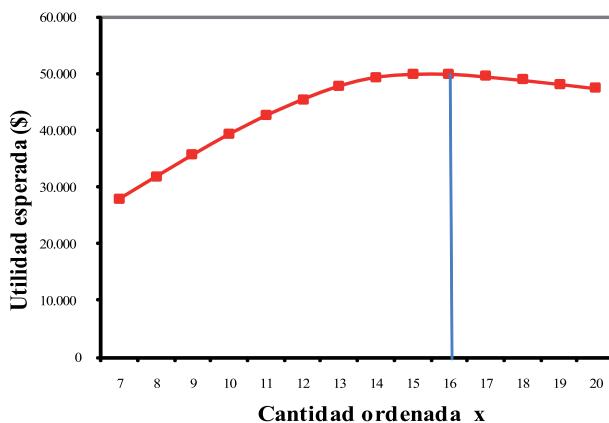


Figura 7.2. Gráfica de utilidad neta esperada $U(x)$ vs. cantidad ordenada x (ejemplo 7.8)

Obsérvese que si se ordenan $x^* = 16$ revistas cada semana, el nivel de servicio óptimo P_1^* será del 93% (la probabilidad de que la demanda sea

menor o igual que 16 revistas leída de la tabla 7.3), mientras que el nivel de servicio P_2 vendría dado por:

$$P_2 = 1 \times \Pr(d \leq x^*) + \sum_{d_i > x^*} (x^* / d_i) p_i \quad (7.17)$$

$$P_2 = (1 \times 0,93) + \left[\frac{16}{17}(0,03) + \frac{16}{18}(0,02) + \frac{16}{19}(0,01) + \frac{16}{20}(0,01) \right]$$

$$P_2 = 0,9924$$

Este es un *fill rate* P_2 satisfactorio.

Un análisis marginal, presentado por Chopra y Meindl (2008, p. 350), revela que el valor óptimo a ordenar, x^* , depende de los costos de bajo inventario y de inventario excesivo. Sean:

$$C_e = \text{Costo unitario de inventario excesivo} = v - s$$

$$C_b = \text{Costo unitario de bajo inventario} = p - v$$

$$P_1^* = \text{Nivel óptimo de servicio (probabilidad de que no haya faltante en cada ciclo).}$$

$$Q^* = \text{Tamaño óptimo de orden correspondiente al nivel de servicio óptimo anterior, así, } P_1^* \text{ es la probabilidad de que la demanda durante el período sea menor o igual que } Q^*.$$

En el nivel de servicio óptimo, la contribución marginal de comprar una unidad adicional es cero. Si el tamaño de orden se aumenta de Q^* a $(Q^* + 1)$, esto se justifica siempre y cuando la demanda sea mayor que Q^* , con probabilidad $(1 - P_1^*)$ y con contribución igual a $(p - v)$. Así, el beneficio esperado de este aumento de una unidad en la compra será:

Beneficio esperado por la compra de la unidad adicional=

$$(1 - P_1^*)(p - v) \quad (7.18)$$

Por otra parte, si la demanda es menor que Q^* , con probabilidad P_1^* , se incurre en un costo de $(v - s)$. Así, este costo vendría dado por:

Costo esperado por la compra de la unidad adicional=

$$P_1^*(v - s) \quad (7.19)$$

La contribución marginal en el óptimo debe ser igual a cero, o, equivalentemente, el beneficio esperado por la compra de la unidad adicional y su

costo esperado respectivo, deben ser iguales. Así, igualando las Ec. (7.18) y (7.19), se obtiene:

$$P_1^* = \text{Probabilidad de que la demanda sea menor que}$$

$$Q^* = \frac{p - v}{p - s} = \frac{C_b}{C_b + C_e} \quad (7.20)$$

Entonces, para encontrar el tamaño óptimo de compra Q^* , debe escogerse un valor tal que la probabilidad acumulada P_i sea igual a $C_b/(C_b + C_e)$. Esta expresión se conoce en la literatura como el *fractil crítico (critical fractile)*. Si no existe un valor entero de d_i que cumpla exactamente con esta condición, debe pasarse al valor más pequeño de demanda de tal forma que P_i sea mayor que $C_b/(C_b + C_e)$. Las demostraciones formales de estos casos pueden verse en Silver *et al.* (1998, pp. 404-408).

Ejemplo 7.9 (Continuación del ejemplo 7.8: análisis marginal)

Considérese el ejemplo 7.8. Se tenía que:

$$C_e = \text{Costo unitario de exceso de Inv.} = v - s = \$6.500 - \$5.700 = \$800/u.$$

$$C_b = \text{Costo unitario de bajo Inv.} = p - v = \$10.500 - \$6.500 = \$4.000/u.$$

O sea que:

$$P_1^* = \text{Probabilidad de que la demanda sea menor que}$$

$$Q^* = \frac{p - v}{p - s} = \frac{C_b}{C_b + C_e}$$

$$P_1^* = \frac{4,000}{4,000 + 800} = 0,8333$$

En la tabla 7.3 puede observarse que el valor de la demanda, cuya probabilidad acumulada es mayor o igual a este valor, es $d = 16$ unidades, con una probabilidad acumulada de 0,93 (observe que $d = 15$ revistas no sirve pues $0,8300 < 0,8333$). Por lo tanto $Q^* = 16$ revistas, tal como se mostró en la tabla 7.4.

La anterior ecuación también puede resolverse en forma gráfica a partir de la figura 7.1. Tal como muestra dicha figura, se marca en el eje y el valor de probabilidad acumulada de 0,8333 y se desplaza horizontalmente hasta tocar la curva, bajando hasta el eje x , encontrando un valor un poco superior a 15 unidades, o sea, $Q^* = 16$ revistas.

El problema del vendedor de periódicos para un solo ítem no-restringido con demanda normal

La Ec. (7.20) es aplicable para cualquier distribución probabilística de demanda [Silver *et al.* (1998, p. 388)]. Para el caso de la distribución normal, recuérdese que $P_1 = 1 - p_z(k)$. Por lo tanto:

$$P_1^* = 1 - p_z(k^*) = \frac{C_b}{C_b + C_e} \quad (7.21)$$

De donde se obtiene:

$$p_z(k^*) = \frac{C_e}{C_b + C_e} \quad (7.22)$$

Con este valor de $p_z(k^*)$ se determina el k^* . Si la distribución de probabilidad de la demanda estacional es normal con media μ y desviación estándar σ , entonces el tamaño óptimo de compra puede obtenerse como:

$$Q^* = \mu + k^* \sigma \quad (7.23)$$

Otra ecuación interesante, presentada por Silver *et al.* (1998, p. 388 y p. 405) tiene que ver con la utilidad esperada dado un valor del tamaño de orden, Q . Dicha ecuación adaptada es la siguiente:

$$E[U(Q)] = (p - s)\mu - (v - s)Q - (p - s)\sigma G_z\left(\frac{Q - \mu}{\sigma}\right) \quad (7.24)$$

Igualmente, Silver *et al.* (1998, p. 389) presentan una forma más simplificada para calcular la utilidad neta esperada óptima, la cual, adaptada, viene dada por:

$$E[U(Q^*)] = (p - v)\mu - (p - s)\sigma f_z(k^*) \quad (7.25)$$

Donde $f_z(k^*)$ es la misma función de la normal definida en el apéndice A, o sea:

$$f_z(k^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-(k^*)^2 / 2] \quad (7.26)$$

Dos resultados importantes son presentados por Chopra y Meindl (2008, p. 352) para calcular los excedentes y los faltantes esperados al final de la

temporada para el caso de la distribución normal de demanda. Adaptando estos resultados a nuestra nomenclatura, se obtiene:

$$\text{Excedentes esperados} = (Q - \mu) \left[1 - p_z \left(\frac{Q - \mu}{\sigma} \right) \right] + \sigma f_z \left(\frac{Q - \mu}{\sigma} \right) \quad (7.27)$$

$$\text{Faltantes esperados} = (\mu - Q) p_z \left(\frac{Q - \mu}{\sigma} \right) + \sigma f_z \left(\frac{Q - \mu}{\sigma} \right) \quad (7.28)$$

Ejemplo 7.10 (problema de la revista con distribución normal de la demanda semanal)

Considérese de nuevo los ejemplos 7.8 y 7.9. Asúmase que la distribución de la demanda semanal de la revista es normal con media $\mu = 13$ revistas y desviación estándar $\sigma = 2,44$ revistas (se han tomado estos valores aproximados a la media y a la desviación estándar de la variable aleatoria discreta de demanda para efectos de comparación). Los costos de exceso y de bajo inventario son los mismos definidos en el ejemplo 7.9. Se tiene, por lo tanto:

$$p_z(k^*) = \frac{C_e}{C_b + C_e} = \frac{800}{4.000 + 800} = 0,1667$$

Del apéndice A, o de la función inversa de la normal unitaria de *Excel*TM, se obtiene:

$$k^* = 0,9674; G_z(k^*) = 0,08862$$

Por lo tanto:

$$Q^* = 13 + (0,9674)(2,44) = 15,36 \cong 15 \text{ o } 16 \text{ revistas}$$

En este caso es relativamente sencillo desarrollar una hoja electrónica para implementar la Ec. (7.24) para varios valores de Q , obteniéndose la tabla 7.5. Obsérvese que es preferible tomar $Q^* = 15$ revistas, ya que la utilidad esperada es mayor que la que se obtiene con un tamaño de compra de 16 revistas. Esta tabla también representa un interesante análisis de sensibilidad alrededor del tamaño óptimo de compra. Por ejemplo, si se decidiera pedir $Q = 17$ revistas para mejorar el nivel de servicio, la utilidad neta esperada sólo disminuiría aproximadamente en el 1%. Se sugiere comprobar que la utilidad esperada óptima se obtiene también al aplicar la

Ec. (7.25), utilizando la mayor precisión posible en la hoja electrónica para determinar el valor de k^* .

Tabla 7.5. Utilidad neta esperada $U(Q)$ en función de Q
(ejemplo 7.10)

Q [unidades]	Utilidad esperada $U(Q)$ [\$]
7,00	27.973,37
8,00	31.912,92
9,00	35.752,06
10,00	39.381,72
11,00	42.640,29
12,00	45.340,59
13,00	47.327,59
14,00	48.540,59
15,00	49.040,29
15,36	49.073,72
16,00	48.981,72
17,00	48.552,06
18,00	47.912,92
19,00	47.173,37
20,00	46.392,94

Los excedentes y faltantes esperados, aplicando las Ec. (7.27) y (7.28), respectivamente, serían los siguientes (para $Q^* = 15$ revistas):

$$\begin{aligned} \text{Excedentes esperados} &= (15 - 13) \left[1 - p_z \left(\frac{15 - 13}{2,44} \right) \right] + 2,44 \times f_z \left(\frac{15 - 13}{2,44} \right) \\ &= (2) [1 - p_z(0,8197)] + \left[2,44 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-(0,8197^2 / 2)] \right] \\ &= 2(1 - 0,2062) + 0,6957 = 2,28 \text{ unidades} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Faltantes esperados} &= (13 - 15) p_z \left(\frac{15 - 13}{2,44} \right) + 2,44 \times f_z \left(\frac{15 - 13}{2,44} \right) \\ &= (-2) p_z(0,8197) + \left[2,44 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-(0,8197^2 / 2)] \right] \\ &= -2(0,2062) + 0,6957 = 0,28 \text{ unidades} \end{aligned}$$

Recuérdese que los excedentes y faltantes son variables aleatorias que muestran sus *valores esperados*, es decir, que si observáramos el comportamiento del sistema por un número suficiente de semanas, en algunas ocasiones habría sobrantes y, en otras, ocurrirían faltantes. Si se calculara el promedio de los excedentes y de los faltantes cuando ocurren, se obtendrían los valores anteriormente mostrados. Así, los dos valores positivos obtenidos no representan contradicción alguna.

De acuerdo con lo estudiado anteriormente, existen varias estrategias obvias para mejorar la rentabilidad de la cadena de abastecimiento en el caso de productos de estilo o de moda. La primera es *aumentar el valor de salvamento s* a través del envío del producto, cuando la estación termine, a otros lugares donde pueda ser demandado.

La segunda es implementar alternativas para *disminuir el costo de bajo inventario*, como identificar fuentes alternas de suministro durante una ocasión de faltante, incluso, comprándole a los competidores. Otra alternativa interesante que se ve en algunas cadenas es la de ofrecer cupones de descuento futuro cuando ocurren faltantes.

La tercera, la más obvia pero, en ocasiones, la más difícil, es la de *disminuir la variabilidad de los errores del pronóstico de demanda*. Esta última alternativa puede combinarse con tácticas como la de permitir dos o más despachos a lo largo de la estación de ventas, capturando información de demanda a medida que ocurre y utilizando tecnología y modos de transporte que permitan posponer la forma final del producto y disminuir los tiempos de reposición [ver Rodríguez y Vidal (2009)].

Una cuarta alternativa es la de tener siempre identificado un *proveedor que permita rápidos despachos*, así sea a un mayor costo. Normalmente, se tienen proveedores con tiempos de reposición más largos, los cuales se utilizan normalmente para la parte más predecible de la demanda. Sin embargo, para la parte de la demanda de mayor incertidumbre, o cuando un rompimiento de inventario es inminente, se puede considerar la utilización del proveedor más flexible de menor tiempo de reposición. Dentro de este contexto, el “proveedor” puede ser obviamente la propia planta de producción.

Un ejemplo clásico que ilustra todas estas estrategias lo mencionan repetidamente Chopra y Meindl (2008). Se trata del caso de Benetton en el sector de las confecciones. Este sector es uno de los más complicados en cuanto al control de inventarios se refiere, debido a la gran incertidumbre de la demanda en cuanto a la diversidad de modelos, texturas, colores y tallas de los ítems. Benetton subcontrata el 65% de la producción siete meses antes de la estación de ventas con plantas de muy bajo costo y con tiempos de entrega de meses; aquí se exige a los clientes (distribuidores) cifras muy precisas en cuanto a su demanda. Para el 35% restante de la

producción, se les permite a los distribuidores que emitan pedidos, incluso después de haberse iniciado la estación, cuando la demanda se conoce con más certeza. Esta producción se hace en una planta de propiedad de Benetton, la cual es muy flexible y brinda tiempos de reposición de semanas, utilizando transporte aéreo en la mayoría de los casos. Además, la empresa ha desarrollado una alternativa tecnológica que permite teñir las prendas después de confeccionadas, con lo que el principio de posposición de forma del producto se utiliza exitosamente disminuyendo inventarios de seguridad, a pesar de que los costos de producción se incrementan en un diez por ciento.

Existen otros casos más complejos, como el problema del vendedor de periódicos restringido, considerando varios ítems. La restricción puede deberse a la disponibilidad de presupuesto de compra, capacidad de almacenamiento, o cualquier otra relacionada. Una referencia interesante sobre este tema puede leerse en Zhang *et al.* (2009).

Otro problema es el del vendedor de periódicos de múltiples períodos y el análisis más profundo de ítems perecederos, considerando la degradación del ítem en períodos de tiempo constantes o la degradación del ítem en tiempo aleatorio. Silver *et al.* (1998, pp. 393-404) discuten estos aspectos y presentan una revisión completa de bibliografía relacionada. Rodríguez y Vidal (2009) presentan un heurístico para el control de inventarios de productos de corto ciclo de vida, aplicado a un caso real de un productor de textos escolares. En estos casos más complejos, de todas formas se aplican algunas de las reglas sencillas presentadas en esta sección y se complementan con técnicas de regresión.

Doble marginalización y contratos de suministro en la cadena de abastecimiento

Un elemento muy importante dentro del contexto del control de inventario de ítems de estilo o de moda es definir quién o quiénes asumen el riesgo. Normalmente, hay dos actores: el proveedor, o productor, y el comprador o distribuidor. En algunas ocasiones, ambos pertenecen a la misma organización. En otras, los dos pertenecen a diferentes empresas, pero el riesgo lo asume uno solo, lo cual no es justo. Por ejemplo, en algunos casos de textos escolares, el productor recibe los pedidos del distribuidor antes del comienzo de la temporada de ventas. El productor despacha los productos y prácticamente los pone en consignación al distribuidor. Esto significa que, al final de la temporada de ventas, el distribuidor puede devolver al productor cualquier exceso no vendido sin pagarla, cancelando solamente lo vendido durante la temporada (el valor de salvamento es el 100% del valor del producto). Esto, por supuesto, causa que el productor asuma todo el riesgo y que el comprador no tenga problema alguno en pedir cualquier cantidad de productos, sabiendo que al final puede devolver todos los sobrantes sin detrimento alguno.

Ejemplo 7.11 (Producción y distribución de textos escolares con demanda normal)

Un fabricante de textos escolares produce cierto libro a un costo variable de producción de 10.000 \$/u y lo transfiere a un distribuidor de la misma firma en 16.000 \$/u. Este, a su vez, vende el texto a clientes externos en 24.000 \$/u. Cualquier texto que sobre después de la temporada de ventas puede ser vendido por el distribuidor en otras localidades por 9.000 \$/u. La demanda del texto en la tienda del distribuidor sigue una distribución normal durante la temporada con media 1.000 libros y desviación estándar 300 libros. Calcular el tamaño óptimo de pedido del distribuidor, su utilidad esperada, la utilidad del fabricante y la utilidad de la cadena como un todo.

Para el distribuidor se tiene que $p = 24.000$ \$/u, $v = 16.000$ \$/u y $s = 9.000$ \$/u. Por lo tanto, $C_b = p - v = 8.000$ \$/u y $C_e = v - s = 7.000$ \$/u. Aplicando la Ec. (7.22) se obtiene $p_z(k^*) = 0,4667$, de donde $k^* = 0,0837$ y, de acuerdo con la Ec. (7.23), $Q^* = 1.025$ unidades.

Con este pedido, la utilidad esperada del distribuidor, aplicando la Ec. (7.24), resulta ser \$6.211.030. Como el distribuidor pide 1.025 textos, entonces el fabricante obtiene una utilidad de $1.025 \times (16.000 - 10.000) = \$6.150.000$. Así, si sumamos la utilidad del distribuidor y del fabricante, obtenemos la utilidad total de la cadena: \$12.361.030.

Si ahora, por el contrario, ambos actores de la cadena, el fabricante y el distribuidor, se reúnen y deciden pensar en forma conjunta como una *cadena integrada*, entonces el precio de transferencia de los textos del fabricante al distribuidor pasa a un segundo plano, pues se cancela internamente.

Para toda la cadena, se tiene lo siguiente: precio de venta a clientes externos $= p = 24.000$ \$/u; costo variable de producción $= v = 10.000$ \$/u; valor de salvamento $s = 9.000$ \$/u. Con estos nuevos valores se obtiene $Q^* = 1.450$ libros y la utilidad total esperada de la cadena sería de \$13.418.120, o sea, un 8,55% mayor que la obtenida inicialmente. Obsérvese que si esta utilidad se repartiera equitativamente entre el fabricante y el distribuidor, cada uno tendría \$6.709.060, es decir, que ambos estarían ganando más que en la situación inicial.

Este ejemplo debería poner a pensar a muchas cadenas en las que las decisiones se toman en forma independiente. El problema aquí radica en que inicialmente el distribuidor está tomando la decisión de compra en forma independiente del fabricante y ocurre lo que se denomina la *doble marginalización* o la *optimización local* en lugar de la *optimización global*, lograda cuando los dos se ponen de acuerdo. En realidad, la utilidad de 14.000 \$/u se estaba repartiendo al comienzo, a través del precio de transferencia de 16.000 \$/u, en \$6.000 para el productor y \$8.000 para el distribuidor.

La segunda parte del ejemplo anterior asume una perfecta relación entre el fabricante y el distribuidor. Cuando esto no se da, puede haber soluciones intermedias a través de ciertos *contratos de suministro*. Un contrato de suministro especifica las cantidades a comprar, los precios, los tiempos de entrega y puede incluir otros aspectos como calidad y condiciones de devolución de productos. Los más importantes se mencionan a continuación.

Contrato de devolución

En este contrato, el fabricante ofrece al distribuidor devolverle un porcentaje del valor del producto por cualquier unidad dejada de vender por el distribuidor al final de la temporada. Esto genera confianza en el distribuidor quien tiende a pedir mayor cantidad, lo que normalmente incrementa la utilidad esperada para ambas partes y para la cadena en forma integral.

Supóngase que el fabricante fija un precio de venta (o transferencia) al distribuidor de t \$/u y un valor de devolución por cada unidad dejada de vender al final de la temporada de d \$/u. Este último, obviamente, se convierte en el nuevo valor de salvamento del distribuidor. A su vez, se supone que el productor puede recuperar s_p por cada unidad retornada por el distribuidor. El precio de venta del distribuidor a clientes externos continúa siendo de p \$/u y el costo unitario de producción sigue siendo v \$/u.

En el caso de demanda normal, para calcular la cantidad óptima de pedido del distribuidor Q^* , se utilizan las Ec. (7.22) y (7.23) con $C_e = t - d$ y $C_b = p - t$. Para calcular la utilidad esperada del distribuidor cuando ordena una cantidad Q (puede ser Q^*), se utiliza la Ec. (7.24) con $s = d$ y $v = t$.

Para calcular la utilidad esperada del productor, se debe tener en cuenta los excesos esperados del distribuidor, de acuerdo con la Ec. (7.27). Así, si el distribuidor ordena Q unidades, entonces la utilidad esperada del productor será:

$$E[U_{prod}] = Q(t - v) - [(d - s_p) \times (\text{Valor esperado de las devoluciones})] \quad (7.29)$$

Ejemplo 7.12 (Contrato de devolución)

Considere el ejemplo 7.11. Todos los datos dados allí se mantienen, excepto que ahora el precio de transferencia t , y el valor de salvamento del productor d , van a ser los ofrecidos por el productor, a través de un contrato de devolución. Se van a probar varias combinaciones de estos valores. Se asume que el productor tiene la posibilidad de recuperar $s_p = 9.000$ \$/u de cualquier unidad retornada por el distribuidor (esto es lógico, pues las oportunidades que originalmente tiene el productor de recuperar cualquier unidad no vendida al final de la temporada se las podría ceder al productor). Los resultados con varios valores de t y d se muestran en la tabla 7.6.

Tabla 7.6. Resultados de varias pruebas
con el contrato de devolución (ejemplo 7.12)

Precio de transferencia t	Valor de devolución d	Tamaño óptimo de pedido Q^*	Excedentes esperados	Util. esperada del distribuidor	Util. esperada del productor	Util. Esperada total cadena
15.000	9.000	1.076	162	7.261.459	5.380.021	12.641.479
15.000	10.000	1.110	183	7.433.053	5.366.629	12.799.682
15.000	12.000	1.202	247	7.856.004	5.270.455	13.126.459
15.000	14.000	1.384	399	8.473.505	4.928.985	13.402.490
16.000	9.000	1.025	133	6.211.030	6.150.573	12.361.603
16.000	10.000	1.054	149	6.351.371	6.175.404	12.526.775
16.000	15.000	1.366	382	7.488.633	5.903.217	13.391.850
17.000	16.500	1.450	459	6.709.060	6.709.060	13.418.120
17.000	16.000	1.345	364	6.505.952	6.869.674	13.375.626
17.000	15.000	1.229	268	6.195.937	6.999.255	13.195.191
18.000	10.000	946	95	4.351.371	7.473.356	11.824.727
18.000	15.000	1.129	195	5.018.281	7.862.393	12.880.674
18.000	16.000	1.202	247	5.237.336	7.889.123	13.126.459
18.000	17.000	1.320	342	5.526.145	7.824.476	13.350.621

Existe una combinación (diseñada a manera de ilustración, pues existen muchas más que producen resultados semejantes) para la cual la utilidad total esperada del distribuidor y de toda la cadena son menores que las obtenidas inicialmente en el ejemplo 7.11. Corresponde a la combinación $t = 18.000$ \$/u y $d = 10.000$ \$/u, con una utilidad esperada del distribuidor de $\$4.351.371 < \$6.211.030$ y una utilidad total cadena esperada de $\$11.824.727 < \$12.361.030$. La utilidad esperada del productor de $\$7.473.356$ sí es mayor que la inicial del ejemplo 7.11 de $\$6.150.000$. Evidentemente, si éstos fueran los términos del contrato, éste no sería una propuesta gana-gana y no debería ser aceptada por el distribuidor.

Obsérvese que la combinación de valores $t = 16.000$ \$/u y $d = 9.000$ \$/u produce la misma utilidad total esperada de la cadena de $\$12.361.030$, del distribuidor y del productor, obtenidas inicialmente en el ejemplo 7.11 (con algunas diferencias por redondeo). Esto es lógico, pues para dichos valores se reproduce la misma situación del ejemplo mencionado. Sin embargo, el resto de combinaciones siempre produce una mayor utilidad esperada total en la cadena.

Lo interesante es que hay combinaciones que producen mayor utilidad a nivel individual que las originales del ejemplo 7.11. Por ejemplo, la combinación $t = 17.000$ \$/u y $d = \$16.000$ \$/u produce una utilidad esperada del distribuidor de $\$6.505.952 > \$6.211.030$, del productor de $\$6.869.674 > \$6.150.000$ y, por supuesto, de la cadena integral de $\$13.375.626 > \$12.361.030$. Lo que esto significa es que, bajo un contrato de devolución con estas condiciones, ambas partes aumentan su utilidad esperada, en una relación indudablemente gana-gana. Gran número de combinaciones producen resultados semejantes al anterior (incluso existe la hipótesis de que hay infinitos valores de d y t que producen una utilidad total esperada específica).

Llama la atención la fila resaltada en la tabla, pues ella corresponde a la solución óptima global que se logra en el ejemplo 7.11 cuando ambas partes actúan como una cadena totalmente integrada. Lo que esto significa es que, incluso, pueden encontrarse valores de d y t , a través de contratos de devolución, que producen la misma solución óptima global. La importancia de este resultado en la práctica es que, aun teniendo dos actores de la cadena que no pertenezcan a la misma organización, *se puede encontrar un contrato de devolución que reproduzca un esquema de colaboración de una cadena totalmente integrada*. Por lo tanto, vale la pena buscar dichos acuerdos en la práctica.

Otro tipo de contrato es el de *utilidades compartidas*, en el cual el distribuidor comparte un porcentaje de las utilidades con el productor, a cambio de que éste le dé un descuento en el precio de compra del producto. Aquí el incentivo es que el distribuidor tiende a comprar mayor cantidad y a

generar una mayor utilidad, la cual, incluso después de compartir con el productor, va a ser mayor que sin el contrato. Igualmente, el productor va a ganar más dado el mayor volumen de ventas y la fracción de utilidad que el distribuidor le comparte.

Un tercer tipo de contrato recibe el nombre de contrato de *cantidades flexibles*. De acuerdo con Simchi-Levi *et al.* (2003, p. 55), en este tipo de contratos el productor ofrece la devolución total del valor del producto al distribuidor, siempre y cuando las unidades retornadas no superen un valor límite previamente acordado. Las unidades retornadas por encima de dicho límite se reconocen a un valor de salvamento menor. La diferencia con el contrato de devoluciones es que en este último se concede un valor de salvamento menor que el valor de los productos sobre todas las unidades retornadas. En contraste, Chopra y Meindl (2008, p. 441) presentan otra modalidad de este tipo de contratos, en los cuales el productor permite al distribuidor cambiar las unidades pedidas después de observar la demanda.

Una última opción que va más allá de un contrato es lo que se conoce como inventario manejado por el proveedor (*Vendor Managed Inventory, VMI*). En esta opción, el fabricante o proveedor es responsable por todas las decisiones de inventario a nivel del distribuidor, incluyendo los pronósticos de demanda y las políticas de control. Esta modalidad ha tomado mucho auge actualmente y se convierte en una opción interesante tanto para el proveedor como para el distribuidor. En Colombia, por ejemplo, algunas cadenas de productos de consumo masivo mantienen altos inventarios de ciertos productos en la forma tradicional. Una forma de aliviar esto, es compartir la información con el proveedor, especialmente la de demanda, y dejar que sea éste quien maneje completamente el inventario. Así, la ventaja para el distribuidor será la liberación de capital de trabajo invertido en inventario y transferir los problemas de pronósticos de demanda y control de inventarios al proveedor. Por su parte, el proveedor puede imponer algunas condiciones, como las del pronto pago de las unidades vendidas en el punto de venta, lo cual, a menudo, tarda mucho en los sistemas tradicionales. De esta forma, los sistemas *VMI* se convierten en verdaderas alianzas gana-gana y en un claro ejemplo de colaboración en la cadena de abastecimiento.

Algunas características y ventajas del *VMI*, mencionadas por diversos autores, son las siguientes:

- Se requiere que la información de demanda del distribuidor sea compartida con el proveedor.
- Se pueden evitar los problemas de doble marginalización ilustrados en el ejemplo 7.11.

- El fabricante o proveedor puede planear su aprovisionamiento con mucha mayor confiabilidad.
- El *VMI* puede tener el problema de que frecuentemente el distribuidor comparte su espacio con productos de la competencia del fabricante o proveedor. Como consecuencia de esto, se pueden ignorar las posibles sustituciones de producto al pronosticar la demanda e incurrir en excesos de inventario. En estos casos, el distribuidor puede estar en mejor posición para tomar las decisiones sobre inventarios.

Simchi-Levi *et al.* (2003, pp. 49-57) y Chopra y Meindl (2008, pp. 436-446) discuten estos temas con mayor profundidad, incluyendo otros tipos de contrato y el efecto de considerar un inventario inicial en el productor y un costo fijo de producción del fabricante. Otras publicaciones recientes que incluyen una revisión explicada de literatura es la de Leng y Zhu (2009), en el caso de contratos, y un caso interesante de *VMI* por Southard y Swenseth (2008). Arshinder y Deshmukh (2008) presentan varias perspectivas de la coordinación en la cadena de abastecimiento, incluyendo *VMI*, y plantean posibilidades de investigación futura en el área.

En cuanto al *control de ítems perecederos*, se han publicado avances recientes. Algunos de éstos mencionan la ventaja de tener tecnologías de identificación de productos como el *RFID* (*Radio Frequency IDentification*) para el control de inventarios de ítems perecederos [Broekmeulen y Van Donselaar (2009)], con lo cual es mucho más fácil registrar la edad del producto en el sistema para así diseñar sistemas eficientes de control de inventarios a bajo costo y con cálculos muy sencillos. Por su parte, Van Donselaar *et al.* (2007) presentan lineamientos para el control de ítems perecederos en supermercados. Kanchanasuntorn y Techanitisawad (2006) investigan el efecto de las políticas de agotados de productos perecederos con vida útil constante sobre el costo total relevante, la utilidad neta, el nivel de servicio y el inventario promedio en un sistema de producción-distribución de dos etapas. Igualmente, los autores desarrollan un modelo de control de este tipo de ítems, el cual logra mejorar significativamente los indicadores de costo y utilidad. A nivel local puede consultarse el trabajo de grado por García y Zúñiga (2006), quienes presentan un sistema de control de inventarios en el área de frutas y verduras.

Otro tema de gran interés en los últimos años ha sido lo que se denomina la fijación dinámica de precios o administración de utilidades (*dynamic pricing* o *revenue management*), lo cual se hace con el objeto de incrementar la utilidad de la organización. En esta sección se ha considerado que el precio de venta del producto p es fijo. Sin embargo, son muchas las situaciones en las cuales esto no es necesariamente cierto. Por ejemplo, un caso muy conocido es el de las líneas aéreas, las cuales deciden dejar

en reserva cierto número de sillas en cada avión hasta minutos antes de despegar, puesto que el precio al cual se puede vender el tiquete se incrementa significativamente con el tiempo antes de que el avión despegue. Por ello, a veces se observan aviones con muchas sillas vacías que se les han negado a ciertos clientes quienes no están dispuestos a pagar más de cierto valor por el tiquete, esperando a que llegue otro tipo de clientes que sí lo hace. Indudablemente, esto representa un riesgo para la empresa, pero cuando se administra adecuadamente produce incrementos en la utilidad en el largo plazo. Las técnicas de administración de utilidades también se han aplicado al caso de los hoteles, alquiler de autos y, más recientemente, hay intensiva investigación de la aplicación de estas técnicas a los negocios por internet. Una excelente revisión de estos tópicos puede leerse en Agatz *et al.* (2008). Por su parte, Chopra y Meindl (2008, pp. 459-481) dedican igualmente un capítulo a este tema.

Ejercicios 7.2

1. Considere un ítem con las siguientes características:

$$D = 70 \text{ unidades/año} \quad v = \$1.150/\text{unidad}$$
$$L = 3 \text{ meses}$$

La distribución probabilística de la demanda se aproxima a una distribución de Poisson.

- a) La política de control actual que utiliza la compañía es la de ordenar una cantidad equivalente a seis meses de demanda, una vez el inventario efectivo sea menor o igual a dos meses de demanda. ¿Qué nivel de servicio *TEF* está utilizando la empresa actualmente?
b) Determine una mejor política (s, Q) para este ítem.
c) Repita el literal anterior si se utiliza un sistema de control (R, S).
2. Un ítem clase C se compra usualmente a un proveedor que suministra también un ítem clase A. Suponga que el ítem A se compra cada dos meses basado en el *EOQ*. La demanda del ítem clase C es aproximadamente constante e igual a 36 unidades/año. El valor del ítem clase C es de \$7.000/unidad. El costo fijo adicional de incluir el ítem C en la orden del ítem clase A es \$2.800. El costo de mantenimiento del inventario es del 30% anual. Es razonable que los tamaños de pedido del ítem clase C tengan un cubrimiento para múltiplos de dos meses, o sea, un múltiplo del cubrimiento esperado del otro

- ítem. Determine cuál de estos cubrimientos es recomendable para este ítem C.
3. Suponga que cierta empresa utiliza la siguiente regla para controlar los ítems clase C. Cuando el inventario efectivo se reduce a dos meses o menos, se ordena una cantidad para seis meses. Para cada uno de los siguientes ítems, ¿cuál es el valor implicado de TEF ? Asuma que la demanda de los ítems se comporta aproximadamente como Poisson.
- Ítem 1: $D = 80$ unidades/año; $L = 1,5$ meses.
 Ítem 2: $D = 80$ unidades/año; $L = 3$ meses.
 Ítem 3: $D = 40$ unidades/año; $L = 1,5$ meses.
 Ítem 4: $D = 40$ unidades/año; $L = 3$ meses.
4. Para un ítem con una demanda $D = 50$ unidades/año, $L = 1$ mes y un tamaño de orden $Q = 20$ unidades, desarrolle una gráfica que le permita encontrar el punto de reorden s en función de TEF . Varíe TEF desde 2 hasta 50 años.
 5. Una empresa manufacturera de artículos de Navidad ha introducido un nuevo árbol al mercado a finales de octubre, esperando que la estación dure hasta alrededor del 15 de diciembre. Se estima una demanda normal del producto con media 100 unidades y desviación estándar 40 unidades. El valor de manufactura de cada árbol es de \$350.000 y el precio de introducción será de \$525.000 para lograr alcanzar el nivel de ventas estimado. Al final de la temporada se estima que cada árbol puede rematarse en \$120.000 y el costo de mantener una unidad en inventario durante la estación es de \$26.000.
 - a) ¿Cuántas unidades debería manufacturar la empresa y cuál es la utilidad esperada correspondiente?
 - b) ¿Cuáles son los niveles de servicio P_1 y P_2 alcanzados mediante esta política?
 - c) La empresa ha decidido realizar un extenso estudio de mercado para este producto, de tal forma que se ha establecido su demanda para la estación como normal, con media 100 unidades y desviación estándar 15 unidades. Repita los literales a) y b) y estime cuánto podría pagarse por dicho estudio de mercado.
 6. Una pequeña distribuidora de flores situada en Santiago de Cali está estimando cuántas docenas de rosas debería tener en inventario durante la época del Día de la Madre. Las rosas son adquiridas a \$6.000/docena y son vendidas a \$10.000/docena. Una vez termi-

nan las festividades del la Madre, las rosas se pueden vender para otros efectos en \$4.000/docena, ya que su vida útil y apariencia les hace perder valor. Además, se carga un costo de manejo durante el período de \$500/docena. La propietaria de la floristería, basada en demandas de años anteriores, ha estimado que la demanda de rosas (en docenas) sigue aproximadamente la distribución de frecuencias observada a continuación:

Demanda de rosas en docenas [d_i]	Frecuencia observada [p_i]
15	0,01
16	0,04
17	0,10
18	0,15
19	0,20
20	0,24
21	0,12
22	0,05
23	0,05
24	0,03
25	0,01

- a) Determine el número de docenas que la propietaria de la distribuidora debería ordenar para la temporada del Día de la Madre, de tal forma que se maximice su utilidad neta esperada, y estime el valor de ésta.
- b) La propietaria desea tener el mejor servicio posible ya que ello le representa clientes futuros para otras ocasiones. Por ello ha decidido establecer un nivel de servicio P_1 igual al 95%. ¿Cuánto le representa este nivel de servicio con relación a la política óptima establecida en el literal anterior?
- c) Usted piensa que sería mejor considerar la demanda de las rosas durante la temporada mencionada siguiendo una distribución normal. Proponga valores para la media y la desviación estándar de dicha distribución normal, de tal forma que los resultados de los literales anteriores sean consistentes. En otras palabras, defina una distribución normal de demanda con media y desviación estándar iguales a la media y desviación estándar de la distribución

- discreta propuesta y repita los literales a) y b). {Ayuda: Recuerde que para cualquier variable aleatoria x , $\text{Var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$ }.
7. Una confeccionista de disfraces para el Día de los Niños (octubre 31) produce un disfraz que gusta mucho y es su principal ítem. Su costo variable de producción es de 8.000 \$/u. Ella le vende cada disfraz a 15.000 \$/u a un almacén que es su principal distribuidor y ha encontrado que la demanda del ítem durante la temporada de ventas en el almacén sigue aproximadamente una distribución normal con media 350 y desviación estándar 140. El precio de venta en los almacenes es de 25.000 \$/u. Actualmente, no hay contrato alguno entre las dos partes. Simplemente, el almacén estima su tamaño óptimo de pedido y ordena dicha cantidad. Cualquier disfraz que no venda el almacén después de la temporada, se puede vender con un descuento del 70% sobre su precio de venta original.
- a) Bajo las condiciones actuales, calcule el tamaño óptimo de pedido del almacén y las utilidades esperadas del almacén, de la confeccionista y de la cadena confeccionista-almacén como un todo.
- c) El almacén le está ofreciendo a la confeccionista el siguiente contrato. Le incrementa el precio de compra de cada disfraz en el 10%, pero, al final de la temporada, el almacén le devuelve todos los disfraces no vendidos y ella le debe reconocer al almacén \$15.000 por cada disfraz devuelto. La confeccionista puede recuperar \$5.600 por cada disfraz que le devuelva el almacén, vendiéndolos en ciertas tiendas de descuento. Asumiendo que el almacén, bajo estas condiciones, le compraría a la confeccionista la cantidad óptima que sugieran las Ec. (7.22) y (7.23), ¿debería ella aceptar la oferta que le están haciendo?
- d) Si el almacén le ofreciera a la confeccionista trabajar como una cadena integrada, eliminando el precio de transferencia de los disfraces y repartiendo las utilidades en partes iguales, ¿en cuánto se incrementaría la utilidad esperada de cada una de las partes?
8. *Problema del vendedor de periódicos para múltiples productos con restricciones de capacidad.* El dueño de un restaurante está planeando la compra de carne de res y de cerdo para la temporada de fin de año (la última semana del año). Dada la gran demanda de esta época, el proveedor de carne del restaurante sólo acepta un pedido al comienzo de la temporada. Por experiencias pasadas, el dueño sabe que durante la temporada, la carne de res tiene una demanda con distribución normal con media 250 kg y desviación estándar 30 kg.

La carne de res se compra a 14.000 \$/kg y se vende en el restaurante a 25.000 \$/kg. Si sobra de esta carne al final de la temporada, se puede utilizar en platos más económicos y venderse a \$10.000 \$/kg. La carne de cerdo tiene una demanda más variable durante la temporada, con una distribución normal con media 140 kg y desviación estándar 100 kg. La carne de cerdo se puede conseguir a 9.500 \$/kg y se vende en el restaurante a 20.000 \$/kg. Si sobra carne de cerdo al final de la temporada, se puede preparar de otras formas y venderse a 7.500 \$/kg.

- a) Calcule el tamaño óptimo de pedido de cada uno de los dos tipos de carne y la utilidad óptima total esperada sin considerar restricción alguna.
- b) Considere ahora que los refrigeradores que tiene el restaurante solamente pueden almacenar un total de 400 kg. ¿Cuál sería ahora la cantidad óptima a comprar de cada tipo de carne y la utilidad óptima total esperada? Aplique el *solver* de Excel™ para resolver este literal.
- c) Ignore ahora la restricción de almacenamiento de los refrigeradores. Considere que el dueño del restaurante sólo dispone de \$5.000.000 para invertir en las carnes al comienzo de la temporada. Con base en la hoja electrónica diseñada, calcule de nuevo los tamaños óptimos de lote y la utilidad óptima total esperada.
- d) Para los literales b) y c), en forma independiente, formule para cada uno un modelo matemático de optimización y discuta sobre la posibilidad de resolverlos como una alternativa para encontrar las cantidades óptimas a comprar en cada caso.

EJERCICIOS ADICIONALES Y DE REPASO

1. Se está manejando un ítem clase A de lento movimiento, con una demanda promedio de 20 unidades por año. El valor unitario del ítem, sin embargo, es de \$1.800.000/unidad. Asuma que la demanda durante el tiempo de reposición está bien representada por una distribución de Poisson. Se tienen además los siguientes datos: $A = \$16.500/\text{orden}$; $r = 35\% \text{ anual}$; $B_2 = 30\%$ y $L = 1 \text{ semana}$ (asuma un año de 52 semanas). Diseñe un sistema de control (s, Q) para este ítem y calcule su costo total relevante.
2. Considere el problema No. 2 de los ejercicios 7.1. Suponga que la administradora de la droguería está estudiando la posibilidad de implementar un nuevo sistema de pronósticos, que lograría reducir σ_1 en un 40%. Basándose en los valores óptimos de s y Q , ¿hasta qué

- cantidad de dinero anual estaría dispuesto a pagar por esta alternativa de mejoramiento?
3. Una empresa está usando un sistema de control (s, Q) para un repuesto muy importante utilizado en varias máquinas de producción. Las propiedades del ítem son las siguientes:

$$\begin{array}{ll} D = 2.000 \text{ unidades/año} & A = \$35.000/\text{pedido} \\ v = \$48.000/\text{unidad} & r = 20\% \text{ anual} \\ \hat{x}_L = 165 \text{ unidades} & \sigma_L = 65 \text{ unidades} \\ P_1 = 97,5\% & \end{array}$$

Cuando un faltante está a punto de ocurrir, se genera una acción de emergencia que evita la ocurrencia del faltante. El costo de esta acción es de aproximadamente \$600.000, independiente de la magnitud del faltante en unidades. La compañía utiliza el EOQ como tamaño de lote.

- a) Determine el EOQ y el punto de reorden s .
 - b) ¿Cuál es el costo total relevante esperado, incluyendo costos de ordenamiento, mantenimiento del inventario y acciones de emergencia?
 - c) Se sospecha que puede existir una política de menor costo total relevante. Trate de encontrarla y discuta los resultados, principalmente con respecto del nivel de servicio alcanzado.
4. Dos ítems clase C con demanda aproximada de Poisson son suministrados por el mismo proveedor y por ello se están controlando en forma conjunta con un sistema periódico (R, S_i). Su intervalo de revisión común R se ha fijado en tres meses y su nivel de servicio en $TEF = 30$ y 40 años para los ítems 1 y 2, respectivamente. Las demandas promedio son 40 y 70 unidades/mes para el ítem 1 y 2, respectivamente. El proveedor de los ítems tarda normalmente un mes en reponerlos. Determine los inventarios máximos de cada ítem y formule su política de control de inventarios.
5. Un fabricante de sombreros vende un tipo especial durante la temporada de ferias, incluyendo la de Cali y Manizales, entre otras. Se acepta que la demanda de estos sombreros durante esta temporada se distribuye normalmente con una media de 4.000 sombreros y una desviación estándar de 1.800 sombreros. Cada sombrero se vende en \$70.000 y cuesta \$35.000 producirlo. Cualquier sombrero que quede en inventario después de la temporada de ferias se puede vender en \$29.200 en la promoción de final de año, pero se agrega \$5.800

a su costo por mantenimiento de inventario hasta la promoción. Se está estudiando la posibilidad de exportar los sombreros sobrantes a otras ferias que se realizan en los primeros meses del año, en lugar de realizar la promoción de fin de año en Colombia. Cada sombrero exportado se puede vender fácilmente en \$41.000 en el exterior. Los costos de envío son de \$5.800 por cada sombrero vendido en el exterior. Asumiendo que el fabricante no quiere abandonar el mercado colombiano, ¿recomendaría usted la opción de exportar el sobrante de sombreros de fin de año? ¿Qué impacto tendría aceptar esta opción? ¿De ser aceptada esta opción, qué número promedio de sombreros por año se estarían exportando?

6. El dueño de una carnicería debe decidir cuántos kilos de pescado congelado le pide al proveedor antes de la temporada de Semana Santa. Cada kg de pescado congelado se vende en \$9.250 y su costo de compra es de \$6.180. La demanda de pescado durante la temporada se puede modelar como una distribución uniforme con un valor mínimo de 75 kg y un valor máximo de 125 kg. Cualquier cantidad que quede en inventario puede ser vendida en promoción en los días siguientes a Semana Santa a la mitad del precio normal de venta. Sin embargo, el hecho de haber tenido el producto guardado hace que el pescado sobrante incurra en un costo adicional de mantenimiento del inventario del 10% sobre su costo de compra original.
 - a) ¿Cuántos kg de pescado congelado debería ordenar el dueño de la carnicería?
 - b) Repita el literal anterior si se asume que la demanda tiene una distribución normal con media 100 kg y desviación estándar 15 kg. Compare los resultados [para efectos de comparación, recuerde que la media de una variable que se distribuye uniformemente $U(a, b)$ es $(a + b)/2$ y su varianza es $(b - a)^2/12$].
7. En el problema No. 7 de los ejercicios 7.2, repita el literal b) si el contrato ofrecido por el almacén es el siguiente. El almacén le mantiene el precio de compra a la confeccionista en 15.000 \$/u, pero le ofrece comprarle una cantidad $Q = 450$ disfraces. Al final de la temporada, el almacén le devuelve todos los disfraces no vendidos y ella le debe reconocer al almacén \$10.000 por cada disfraz devuelto. La confeccionista puede recuperar \$5.600 por cada disfraz que le devuelva el almacén, vendiéndolos en ciertas tiendas de descuento, ¿debería ella aceptar la oferta que le están haciendo? (Ayuda: observe que en este caso la Ec. (7.25) no es aplicable para el almacén).

LECTURAS ADICIONALES

- CHOPRA y MEINDL (2008): capítulo 12 (pp. 346-370) (Este capítulo es excelente para consolidar conceptos sobre control de inventarios de ítems de moda o estilo). Capítulo 14 (pp. 417-454) (Este capítulo es excelente para abordar el tema de aprovisionamiento en la cadena de suministro, selección de proveedores y el tema de contratos de diversa naturaleza).
- SIMCHI-LEVI *et al.* (2003): capítulo 3 (pp. 49-63) (Es útil para el tema de contratos de aprovisionamiento).
- SILVER *et al.* (1998): capítulos 8, 9 y 10 (pp. 315-420) (Estos capítulos presentan un tratamiento completo sobre los sistemas de control de ítems clase A, clase C y perecederos, respectivamente).
- SIPPER y BULFIN (1998): capítulo 6 (pp. 273-281) (Se presenta aquí una breve introducción al control de inventarios de ítems estacionales con demandas durante períodos cortos).

PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA

CAPÍTULO 8

CONTROL DE INVENTARIOS EN CADENAS DE SUMINISTRO

INTRODUCCIÓN

El control de inventarios en múltiples instalaciones dentro de una cadena o red de suministro es uno de los temas más complejos y apasionantes en Logística. Axsäter (2000), por ejemplo, afirma que la determinación de políticas óptimas en este tipo de sistemas es muy compleja o, incluso, imposible. Esto se debe a que una decisión de inventarios en un lugar de la cadena está normalmente relacionada con el inventario existente en toda la red. Estas decisiones, por lo tanto, dependen del grado de centralización de la cadena. Muchas veces lo que se hace es utilizar sistemas de control simples como los vistos en los capítulos anteriores, tratando de coordinar las decisiones particulares entre los diversos lugares de la red.

Uno de los problemas que se presentan en una cadena de abastecimiento es el efecto conocido como efecto látigo (*bullwhip*), que consiste en que, por más estable que sea la demanda en un lugar “corriente-abajo” de la cadena, la demanda en un lugar “corriente-arriba” puede ser altamente errática. Por ejemplo, un lugar corriente abajo puede ser un supermercado que vende productos finales al consumidor, el cual repone su inventario de una bodega local, la cual, a su vez, se surte de un gran centro de distribución (CD). Por más estable que sea la demanda del consumidor final en el supermercado, las demandas inducidas en la bodega y en el CD tienen alta probabilidad de ser erráticas. Esto se puede deber a que las bodegas y centros de distribución atienden a varios puntos de venta, cuya demanda se combina y se torna errática. Posibles estrategias para manejar esta situación incluyen las siguientes:

- Mejoramiento de la comunicación acerca de la demanda al final de la cadena en todos los eslabones de la misma, a través de EDI, por ejemplo.
- Mantenimiento y estabilidad de precios para evitar órdenes de gran tamaño.
- Rediseño del producto que permita la centralización de inventarios en ciertos lugares de la cadena para su posterior acondicionamiento al cliente en particular (principio de posposición de forma).
- Diseño del producto para reciclaje.
- Consolidación de ítems costosos de lento movimiento en centros de distribución donde su variabilidad es mucho menor que en cada uno de los diversos puntos de venta en la cadena.

En este capítulo se tratan algunos de estos temas de control de inventarios en cadenas de abastecimiento, enfocados principalmente a sistemas de distribución. Se incluye también aquí una introducción al tema de simulación de inventarios, como otra alternativa de control en la práctica.

MODELOS DE DEMANDA CONSTANTE

Lo sorprendente del control de inventarios en cadenas de suministro es que, inclusive cuando la demanda es constante, no es fácil encontrar políticas óptimas de control. Uno de los casos que se ha considerado con cierto detalle en la literatura son los sistemas en serie, como los sistemas de producción en que los productos parten de una materia prima y van pasando en serie por cierto número de etapas, hasta llegar a la operación final donde sale el producto terminado. Se puede observar esto también en un sistema de distribución donde una bodega o CD despacha a un punto de venta (PV), quien atiende la demanda externa de los clientes finales (figura 8.1).

Asumiendo que la demanda externa es constante, se va a mostrar la política óptima para este caso. La notación que se va a seguir es la siguiente:

- D = Demanda constante en el punto de venta [unidades/año].
 A_{CD} = Costo fijo de ordenamiento en la bodega o centro de distribución [\$/orden].
 v_{CD} = Valor del ítem en la bodega o centro de distribución [\$/unidad].
 v_{PV} = Valor del ítem en el punto de venta [\$/unidad].
 r = Costo de mantenimiento del inventario [\$/(\$ · año)].
 Q_{CD} = Tamaño de la orden en la bodega o centro de distribución [unidades].
 Q_{PV} = Tamaño de la orden en el punto de venta [unidades].

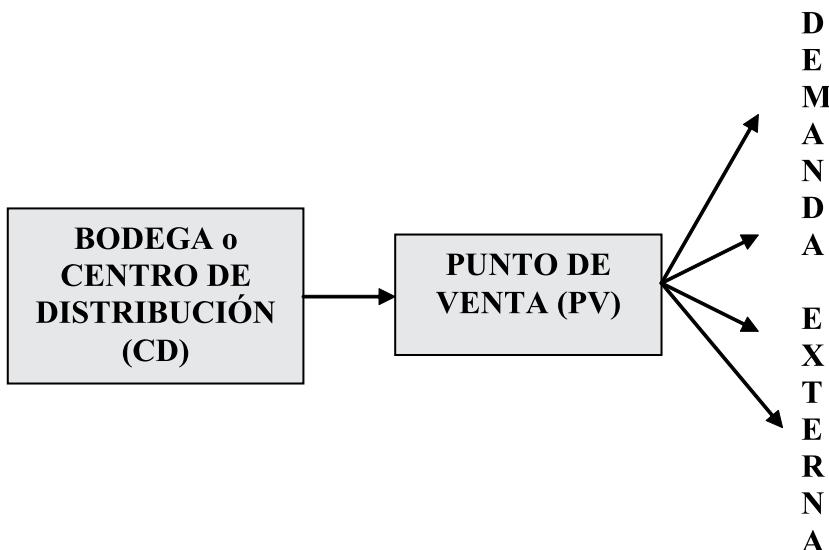


Figura 8.1. Un sistema de distribución en serie

Las dos últimas variables en la notación anterior constituyen las variables de decisión. Se ha encontrado que los tamaños de orden en el CD deberían ser un número entero de veces los tamaños de orden en el PV. La figura 8.2 ilustra el caso para $Q_{CD} = 3Q_{PV}$.

En la figura 8.2 se muestra una idea fundamental para el control de inventarios en cadenas de suministro, esto es el concepto de inventario de escalón (*Echelon Stock*). Este inventario se define en el escalón j como el número de unidades en el sistema que están en, o han pasado por el escalón j , pero que aún no han sido comprometidas con los consumidores externos. Por esta razón, en la figura 8.2, el inventario de escalón en la bodega aparece como una línea recta, pues ésta ha enviado cierta cantidad de unidades al PV, pero que aún no han sido vendidas. Esta idea es clave también en el control en cadenas reales donde la demanda es aleatoria.

El inventario de escalón tiene el problema, sin embargo, que al calcular inventarios en (\$) puede contarse múltiplemente las mismas unidades en diferentes escalones de la cadena. Este problema se resuelve manejando el concepto de *valor agregado* en cada escalón de la cadena. Así, para valorar el inventario en un escalón determinado sólo se considera el valor agregado del producto en el escalón correspondiente. Por ejemplo, en el sistema en serie ilustrado en la figura 8.2, el producto en la bodega tiene un valor igual a $v'_{CD} = v_{CD}$, mientras que el valor a utilizar en el PV sería $v'_{PV} = v_{PV} - v_{CD}$, el cual es el valor agregado al despachar el producto hacia el PV. Esto se puede generalizar a cualquier número de escalones en serie, especialmente en el área de producción, donde en cada etapa se le agrega valor al producto.

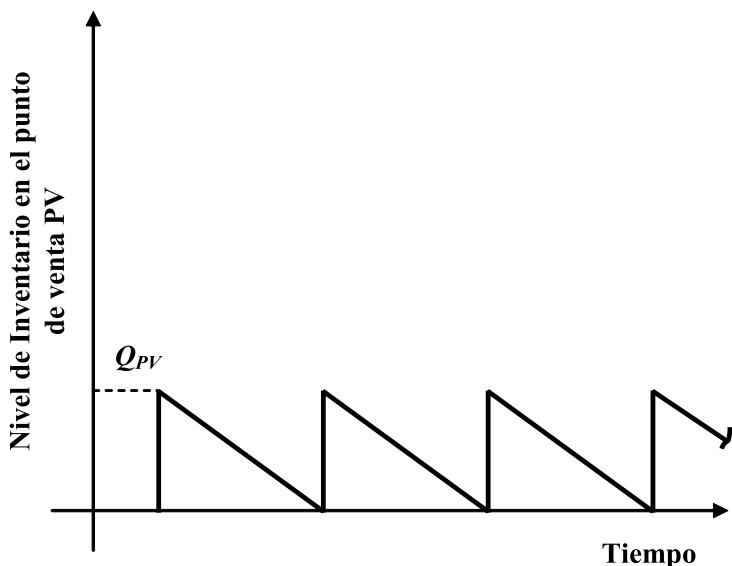
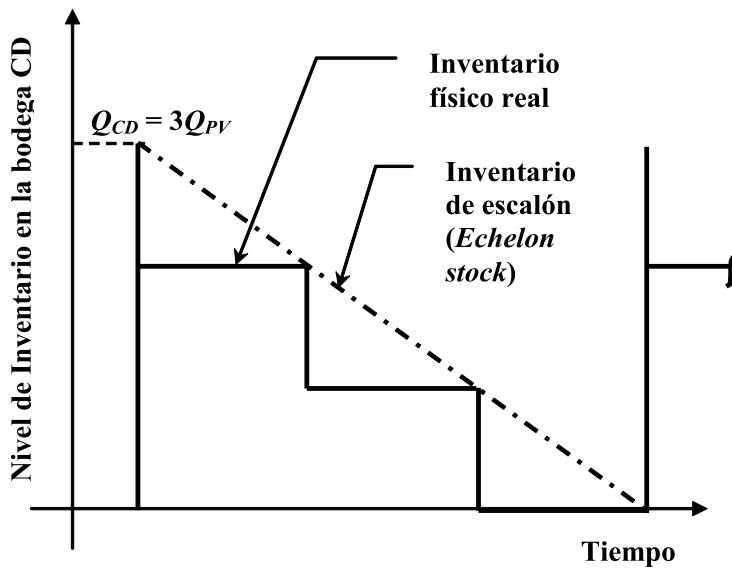


Figura 8.2. Ilustración de un sistema determinístico de distribución en serie

Para el caso en serie de la figura 8.1, se muestran a continuación los resultados analíticos para el sistema de control. El costo total relevante en este caso viene dado por:

$$CTR(Q_{CD}, Q_{PV}) = \frac{A_{CD}D}{Q_{CD}} + I'_{CD}v'_{CD}r + \frac{A_{PV}D}{Q_{PV}} + I'_{PV}v'_{PV}r \quad (8.1)$$

donde I'_{CD} e I'_{PV} son el inventario de escalón promedio en unidades en la bodega o CD y en el PV, respectivamente. Por lo tanto, la función de costo puede transformarse a:

$$\begin{aligned} CTR(n, Q_{PV}) &= \frac{A_{CD}D}{nQ_{PV}} + \frac{nQ_{PV}v'_{CD}r}{2} + \frac{A_{PV}D}{Q_{PV}} + \frac{Q_{PV}v'_{PV}r}{2} \\ CTR(n, Q_{PV}) &= \frac{D}{Q_{PV}} \left[\frac{A_{CD}}{n} + A_{PV} \right] + \frac{rQ_{PV}}{2} [nv'_{CD} + v'_{PV}] \end{aligned} \quad (8.2)$$

puesto que se parte del hecho de que $Q_{CD} = nQ_{PV}$

Dado que la Ec. (8.2) representa una función de dos variables, se pueden aplicar las condiciones necesarias para hallar los valores óptimos:

$$\frac{\partial CTR(n, Q_{PV})}{\partial Q_{PV}} = \frac{-D}{Q_{PV}^2} \left[\frac{A_{CD}}{n} + A_{PV} \right] + \frac{r}{2} [nv'_{CD} + v'_{PV}] = 0 \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial CTR(n, Q_{PV})}{\partial n} = \frac{-D}{Q_{PV}} \frac{A_{CD}}{n^2} + \frac{rv'_{CD}Q_{PV}}{2} = 0 \quad (8.4)$$

De la Ec. (8.3), se obtiene:

$$Q_{PV} = \sqrt{\frac{2D \left[\frac{A_{CD}}{n} + A_{PV} \right]}{r[nv'_{CD} + v'_{PV}]}} \quad (8.5)$$

Y de la Ec. (8.4), se obtiene:

$$Q_{PV} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2DA_{CD}}{rv'_{CD}}} \quad (8.6)$$

La solución simultánea de las Ec. (8.5) y (8.6) daría la solución óptima del problema siempre y cuando n sea un número *entero* mayor o igual que 1. Sin embargo, esto rara vez ocurrirá. Por lo tanto, se puede hacer un análisis con valores enteros de n cercanos a la solución simultánea de las ecuaciones. La forma de encontrar el n^* óptimo se basa, entonces, en los valores obtenidos de la función objetivo, al reemplazar n y Q_{PV} en la Ec. (8.2). El valor óptimo no entero de n se puede encontrar fácilmente con la ayuda del *solver* de Excel™ para resolver las ecuaciones simultáneas (8.5) y (8.6).

Ejemplo 8.1 (Un sistema de dos etapas en serie con demanda constante)

Una empresa compra una materia prima al por mayor, luego la divide, la reempaca y la envía a la planta de producción. Obsérvese que los escalones de la cadena no son lugares físicos reales, sino las dos etapas de producción, o sea, la compra inicial y el fraccionamiento de la materia prima. El CD corresponde a la compra al por mayor y el PV está representado por el producto después de fraccionado y reempacado. Se dispone la siguiente información (los valores monetarios son dados en miles de pesos):

$$D = 6.000 \text{ ton/año.}$$

$$A_{CD} = \$250 \text{ por cada orden de compra al por mayor.}$$

$$A_{PV} = \$10 \text{ por cada proceso de división y reempacado.}$$

$$v'_{CD} = v_{CD} = \$130/\text{ton.}$$

$$v'_{PV} = v_{PV} - v_{CD} = \$35/\text{ton.}$$

$$r = 30\% \text{ anual.}$$

Se calcula inicialmente el n óptimo no entero igualando las Ec. (8.5) y (8.6):

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2D\left[\frac{A_{CD}}{n} + A_{PV}\right]}{r[nv'_{CD} + v'_{PV}]}} &= \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2DA_{CD}}{rv'_{CD}}} \\ \sqrt{\frac{2 \times 6.000 \left[\frac{250}{n} + 10 \right]}{0,30[130n + 35]}} &= \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2 \times 6.000 \times 250}{0,30 \times 130}} \\ \sqrt{\frac{\frac{3 \times 10^6}{n} + 120.000}{39n + 10,5}} &= \frac{277,35}{n} \end{aligned}$$

Esta ecuación se puede resolver con la ayuda del *solver* de Excel™. La solución es $n = 2,5944$. Como n no es un número entero, entonces se prueba para valores enteros cercanos, obteniéndose la tabla 8.1. En esta tabla se ha utilizado la Ec. (8.5) para determinar Q_{PV} dado n , ya que es la que produce los menores valores en la función objetivo. La solución óptima entera es, por lo tanto, $n^* = 3$, $Q_{PV}^* = 94$ ton y $Q_{CD}^* = 3 \times 94 = 282$ ton y $CTR^* = 11.949,90$ miles de \$/año.

Tabla 8.1. Valores óptimos de n y Q_{PV} (ejemplo 8.1)

n	Q_{PV} [Ton]	Q_{CD} [Ton]	$CTR(n, Q_{PV})$ [Miles de \$/año]
1	251	251	12.427,39
2	135	270	11.973,72
3	94	282	11.949,90
4	72	288	12.035,57
5	59	295	12.163,88

Así, la política de inventarios sería comprar 282 toneladas de la materia prima al por mayor; un tercio se procesa, se reempaca inmediatamente y se envía a la planta de producción. Cuando éste se agote, otro tercio se reempaca y se envía; al agotarse éste, se reempaca y envía el último tercio y cuando éste finalmente se consume, se inicia un nuevo ciclo de reposición comprando de nuevo otras 282 toneladas de la materia prima.

Obviamente, un modelo de esta naturaleza funciona siempre y cuando se cumplan los supuestos originales del *EOQ* que se formularon en el capítulo 4. Entre los más destacados estarían el de demanda constante y el de tiempo de reposición constante y conocido. Aquí se deben considerar dos tiempos de reposición, uno entre los proveedores y el CD, y el otro entre éste y la planta de producción. Dado que en la práctica es muy difícil que estos supuestos se cumplan, el método enunciado anteriormente requeriría de ajustes significativos para su correcto desempeño. Más adelante se tratan algunos conceptos importantes sobre sistemas de control de inventarios en cadenas de abastecimiento cuando la demanda es aleatoria.

Otro caso de demanda constante que ha sido extensivamente estudiado es el mostrado en la figura 8.3, el cual corresponde al famoso problema de una bodega y N puntos de venta (*One-Warehouse N-Retailer Problem*). De acuerdo con Schwarz (1973), este caso se vuelve *extremadamente complejo* cuando $N \geq 3$ puntos de venta, *inclusive, cuando la demanda externa es constante*. Muchas aproximaciones a este problema se constituyen en simplificaciones que aproximan el problema complejo mediante situaciones semejantes, pero más simples [véase, por ejemplo, Axsäter (1993a,

1993b y 2000) y Cheng y Zheng (1997)]. Silver *et al.* (1998, pp. 482-485) dan una amplia lista de autores que han estudiado este mismo problema y otros relacionados, como el caso de sistemas de ensamble puro y sistemas arborescentes, tanto para demanda constante, como para demanda determinística variable con el tiempo.

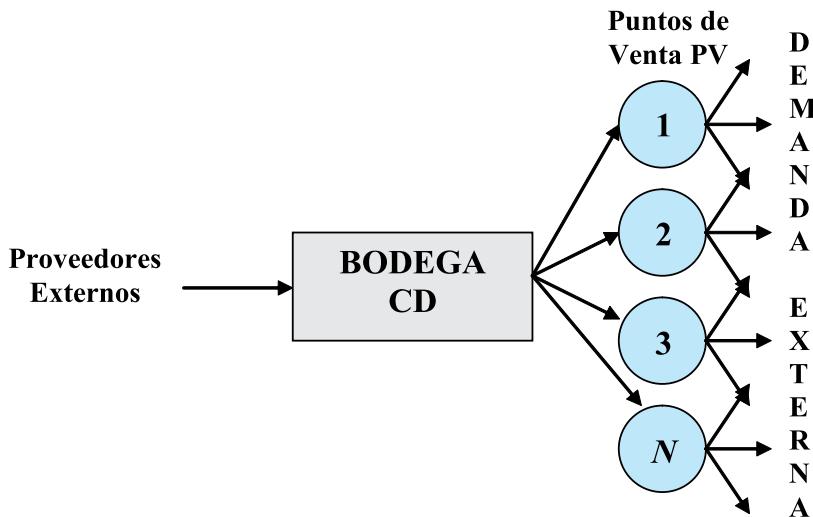


Figura 8.3. Un sistema con una bodega y N puntos de venta

LA COMPLEJIDAD DE LA DEMANDA ALEATORIA

La complejidad de los sistemas de inventarios en cadenas de suministro aumenta notablemente cuando se considera demanda aleatoria y, por supuesto, cuando se incluye también la variabilidad de los tiempos de reposición entre los diferentes eslabones de la cadena. Para una revisión de la literatura reciente sobre el tema puede consultarse a Gutiérrez y Vidal (2008).

Los problemas y fallas comunes del control de inventarios en cadenas de abastecimiento, que se presentan en la práctica, radican principalmente en la aplicación directa de los métodos estudiados en los capítulos anteriores a cada lugar de la cadena en forma aislada. Entre estas fallas y complejidades se encuentran las siguientes:

- La definición de factores de costo y servicio basados solamente en consideraciones particulares de cada escalón de la cadena. El nivel de servicio, por ejemplo, se define con base en el escalón siguiente y no con base en el cliente final, lo cual puede no ser conveniente,

ya que un problema de servicio, en un escalón corriente-arriba en la cadena, produce un efecto sobre el tiempo de reposición que experimenta el escalón corriente-abajo y posiblemente afecte indirectamente el servicio al cliente final.

- Los pronósticos de demanda basados en el siguiente escalón de la cadena. Por ejemplo, en el caso de la figura 8.3 con una bodega y N puntos de venta, el error estaría en planear los inventarios de la bodega basados en los despachos realizados a los puntos de venta. Lo correcto es que la bodega planea sus inventarios con base en la demanda externa real que se presente. Este es un factor clave de control de inventarios en cadenas de abastecimiento.
- La utilización exclusivamente del tiempo de reposición del punto siguiente corriente-arriba de la cadena. El verdadero tiempo de reposición puede ser muy diferente, ya que una decisión corriente-arriba puede afectar todos los tiempos de reposición de los eslabones de la cadena corriente-abajo. Por lo tanto, se puede utilizar dentro de este contexto el concepto de tiempo de reposición de escalón (*echelon lead time*), definido como el tiempo necesario para que el producto llegue al cliente final, desde que el punto de la cadena bajo consideración emita un pedido. Por ejemplo, dependiendo de ciertas condiciones, el tiempo de reposición de escalón de un punto de venta en la figura 8.3 podría ser la suma del tiempo de reposición del proveedor externo hacia la bodega, más el tiempo de reposición de la bodega hacia el punto de venta. Esto ocurriría, por ejemplo, si la bodega no mantiene inventario del ítem solicitado. Estos conceptos se estudian más adelante en el ejemplo 8.2.
- Una complicación adicional es la posibilidad de transferencias entre puntos diversos de la cadena. Por ejemplo, en el caso de la figura 8.3, un PV podría transferir productos a otro punto donde tengan mayor consumo. Obviamente, este desbalanceo podría evitarse si se programa adecuadamente el inventario en cada PV, de acuerdo con su demanda particular.

Dos aspectos fundamentales a considerar en el diseño de un sistema de control de inventarios en cadenas de suministro son el *tipo de información* que se tiene y el *tipo de control*. La información puede ser *global* o *local*. En la primera, todo punto de la cadena conoce las características de los demás puntos, tal como la información sobre demanda del consumidor final. En la segunda, sólo se dispone de información local en cada eslabón de la cadena y con ella se decide. Por otra parte, el tipo de control puede ser *centralizado* o *descentralizado*. Como su nombre lo indica, en el primer tipo de control, las decisiones se toman por un solo ente encargado de

toda la cadena, quien “empuja” los niveles de inventario en toda la cadena (sistemas tipo *push*). El segundo tipo de control implica que las decisiones se pueden tomar en forma independiente para cada lugar de la cadena (sistemas tipo *pull*). La tabla 8.2 ilustra estas ideas junto con los posibles sistemas de control a utilizar.

Tabla 8.2. Sistemas de gestión de inventarios en cadenas de suministro de acuerdo con el tipo de información y control disponibles

Tipo de Control Información	Centralizado	Descentralizado
Global	<ul style="list-style-type: none"> • Inventario manejado por el proveedor (<i>VMI</i>) • Planeación de requerimientos de distribución (<i>DRP</i>) (en algunos casos) • Resultados analíticos para sistemas en serie y arborescentes • Sistemas tipo <i>push</i> 	<ul style="list-style-type: none"> • Planeación de requerimientos de distribución (<i>DRP</i>) (en la mayoría de los casos) • El sistema de <i>control de inventario de base</i>
Local	NO TIENE SENTIDO	<ul style="list-style-type: none"> • Sistemas de control tradicionales para demanda probabilística, utilizando tiempos de reposición aleatorios

[Fuente: Adaptada de Silver *et al.* (1998), p. 489]

De acuerdo con Silver *et al.* (1998, pp. 488-489), los sistemas centralizados con información global son frecuentemente la mejor solución, pero requieren un alto grado de coordinación en la cadena. Además, disponer de información global puede requerir considerables inversiones en sistemas de información.

Los sistemas descentralizados con información global son también muy utilizados en la práctica, pues aprovechan las ventajas de los sistemas tipo *pull* con las ventajas de la información global. Es el caso, por ejemplo, de un sistema de una bodega y N puntos de venta (figura 8.3), en el cual el sistema de control de inventarios en cada PV se hace de acuerdo con su información local de demanda al cliente final (tipo *pull*), y el control de inventarios en la bodega se realiza con base en la información de la demanda externa real que está ocurriendo y no con base en los despachos hacia los puntos de venta. Este sistema se denomina un sistema de *control de inventario de base*.

Vale la pena mencionar las bondades de un sistema de *control de inventario de base* (figura 8.4). El aspecto clave es que la información de demanda del cliente final es compartida en todos los escalones de la cadena. Esto requiere, por supuesto, tener sistemas de información avanzados basados, por ejemplo, en EDI o en POS. Cada punto de la cadena toma decisiones de inventario basándose en la demanda real del cliente final y no en la demanda observada en el escalón siguiente corriente-abajo. Esta práctica disminuye significativamente la variabilidad del sistema, especialmente en ítems costosos de bajo movimiento. Las decisiones de inventario así planteadas pueden tomarse aplicando los métodos estudiados en los capítulos anteriores. Los sistemas (s, S) y (R, S) son especialmente recomendados en este sistema de control, teniendo en cuenta que el inventario efectivo debe basarse en el *inventario de escalón* definido anteriormente, más las órdenes pendientes por recibir, para evitar la doble consideración de inventarios de seguridad en la cadena. Sin embargo, en aquellos casos en los que los tiempos de reposición son muy variables, puede ser riesgoso utilizar el concepto del inventario de escalón en la forma tradicional.

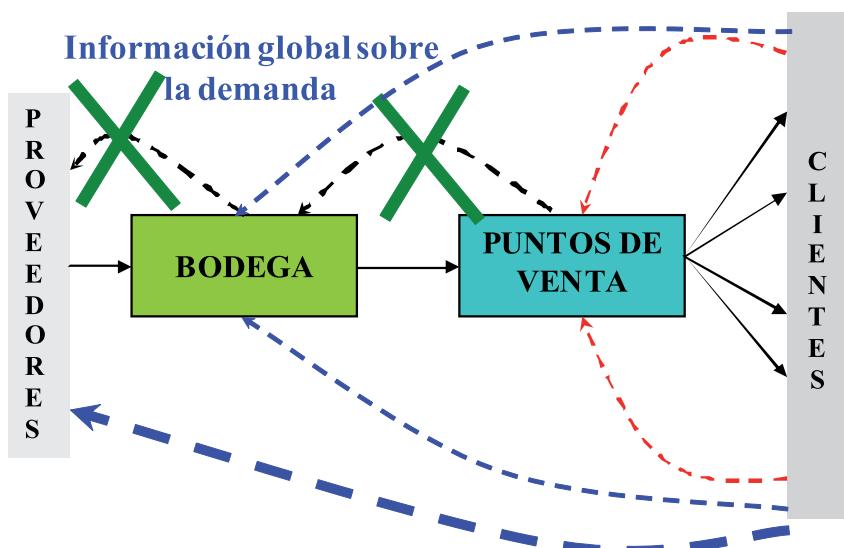


Figura 8.4. Un sistema de control de inventario de base en una cadena con una bodega y N puntos de venta

La figura 8.4 muestra gráficamente un sistema de control de base para un caso real. Anteriormente, la bodega tomaba sus decisiones de control del inventario basándose en la información de los pedidos de los puntos de

venta. Actualmente, cualquier decisión de compra en la bodega se toma de acuerdo con la información consolidada de la demanda real de los clientes. Los proveedores externos aún tienen que guiararse por la información de los pedidos de cada centro de distribución de sus clientes, pero lo ideal sería lo mostrado en la figura, o sea que, a través de técnicas de colaboración, estos proveedores pudieran tener información de la demanda real de sus clientes. Si esto se hiciera realidad, los proveedores podrían planear mucho mejor sus inventarios de materias primas y de productos terminados con lo que se beneficiarían todas las cadenas en forma integral.

Finalmente, un sistema de control descentralizado y con información local se basa en la información local de cada punto de la cadena, que toma decisiones en forma independiente. Este sistema, sin embargo, requiere también compartir información en diversos puntos de la cadena, con lo que puede asemejarse mucho al sistema anterior.

Control de inventarios en sistemas con una bodega y N puntos de venta

Considérese la cadena de abastecimiento con una bodega y N puntos de venta mostrada en la figura 8.3, tema de amplio interés e investigación actual. En estos sistemas, en general, en el CD se planean y realizan compras a un gran número de proveedores externos y los productos se almacenan para su posterior despacho hacia los puntos de venta. Un caso típico local puede comprender más de 200 proveedores diferentes, un gran CD, más de 100 puntos de venta diseminados a lo largo de cierta región del país y cientos de miles de clientes que demandan miles de productos diferentes, generalmente de consumo masivo. Las preguntas clave que surgen para la administración de una cadena de este tipo pueden incluir las siguientes:

- ¿Cómo debe planearse la compra de cada ítem en el CD?
- ¿Cómo deben planearse y realizarse los despachos desde el CD hacia cada uno de los puntos de venta?
- ¿Cuáles de los miles de ítems deberían mantenerse en inventario en cada uno de los diferentes puntos de venta y en el CD mismo?
- ¿Qué nivel de inventario de seguridad de cada ítem debería mantenerse, tanto en el CD, como en cada uno de los puntos de venta?
- ¿Cómo deben administrarse las transferencias de productos entre los diversos puntos de venta?
- ¿De qué manera deben planearse las depuraciones de inventarios en cada uno de los puntos de venta?
- ¿Cómo debe ser el manejo integral de la información a lo largo de toda la cadena?

- ¿Cómo deberían coordinarse las operaciones de compra con las operaciones de recepción y almacenamiento en el CD? ¿Cómo afectan las operaciones de logística y de transporte en la cadena al control de inventarios?
- ¿Cuáles indicadores de eficiencia del sistema deberían manejarse?

Muchos investigadores han abordado este tema. Se destacan los trabajos iniciales realizados por Clark y Scarf (1960) en cadenas en serie y arborescentes, y los de Roundy (1985, 1986) en los sistemas de una bodega y N puntos de venta. Todos estos trabajos son analizados y complementados en un excelente capítulo sobre el tema por Axsäter (2000, pp.115-169). La mayoría de los trabajos para este tipo de cadenas asumen demanda con distribución de Poisson en los puntos de venta y han sido desarrollados para productos de alto valor y lento movimiento [por ejemplo, Forsberg (1995, 1996), Cohen *et al.* (1986), Graves (1996) y Axsäter (1998)]. En otros casos, en ambientes productivos con remanufactura (reparación de productos), se asume también demanda de Poisson o procesos de Poisson compuestos [Sherbrooke (1968)]. Por otra parte, muchos trabajos asumen que los N detallistas son idénticos [véase, por ejemplo, Moinzadeh (2002) y Chen y Samroengraja (2000)]. Silver *et al.* (1998, pp. 498-500) presentan referencias adicionales en las que se ha abordado este tema.

Entre algunas excepciones que asumen demanda normal en los puntos de venta se encuentran Axsäter (2000), quien presenta un análisis exacto para un sistema serial con un solo punto de venta, el cual es una extensión del trabajo de Clark y Scarf (1960). Axsäter sostiene que la metodología utilizada puede ser extendida al caso de una bodega y N puntos de venta, como lo presentado en los artículos de Federgruen y Zipkin (1984) para el caso en que la bodega central actúa como un centro de *cross-docking*, y Matta y Sinha (1995), cuando la bodega central almacena inventario. Otro ejemplo que puede clasificarse dentro de esta categoría es el trabajo de Lee *et al.* (2000).

Axsäter *et al.* (2002) analizan un sistema con un solo proveedor con capacidad infinita, una bodega central y varios detallistas. El objetivo es encontrar políticas que minimicen los costos de mantenimiento del inventario y de las órdenes pendientes. Özer (2003) desarrolla un heuristicó para establecer políticas de inventario efectivas teniendo en cuenta información de demanda conocida con anticipación en un sistema con un solo proveedor supliendo a una bodega que surte a N puntos de venta. El autor muestra que tener información avanzada de demanda produce niveles de inventarios y costos relacionados más bajos, lo cual convierte a esta información en sustituto para inventarios y tiempos de reposición de seguridad. Otro trabajo de importancia es el presentado por Dong y Lee (2003), el cual

reconsidera el trabajo seminal de Clark y Scarf (1960) en un sistema serial multi-eslabón con procesos de demanda correlacionados en el tiempo y demuestra que es mejor invertir en la reducción de tiempos de reposición en un ambiente con este tipo de demandas.

Más recientemente se han publicado investigaciones que tratan de coordinar las decisiones de inventarios en sistemas de una bodega y N puntos de venta con las operaciones de ruteo [por ejemplo, Jung y Mathur (2007)]. Este trabajo, sin embargo, asume demanda constante en los puntos de venta, aunque luego realiza análisis de sensibilidad sobre ella. Otros desarrollos más recientes incluyen también fuertes supuestos, como el caso de Monthatipkul y Yenradee (2008), ya que, aunque suponen demanda aleatoria en los puntos de venta e incluyen faltantes, consideran idénticos a los puntos de venta, asumen un solo proveedor con capacidad infinita que abastece a la bodega y tiempos de reposición constantes. Otro ejemplo es Petrovic *et al.* (2008) quienes consideran el control del inventario de un solo producto.

La aplicación práctica de los trabajos anteriores se ve generalmente limitada por los supuestos descritos (demandas constantes o de Poisson, proveedores idénticos o un solo proveedor de capacidad ilimitada, puntos de venta idénticos, tiempos de reposición constantes, asumir que no hay faltantes, un solo producto, entre otros posibles) y, en ocasiones, por la necesidad de estimar el costo de faltantes por unidad monetaria y por unidad de tiempo en cada uno de los puntos de venta, para cada uno de los productos que se mantienen en inventario. Las múltiples complejidades que un sistema real de una bodega y N puntos de venta presenta, difícilmente podrían incluirse en un modelo integral de control con resultados analíticos. En concordancia, en un artículo de revisión, Gümüs y Güneri (2007) concluyen que la mayoría de los modelos de inventarios en cadenas de abastecimiento son aproximados y que raramente generalizan los hallazgos a N etapas en la cadena de suministro. Por otra parte, Simchi-Levi *et al.* (2005, p. 137) consideran un sistema de una bodega y N puntos de venta suponiendo que hay un solo proveedor con capacidad infinita y asumiendo que los tiempos de reposición desde la bodega hacia los puntos de venta son constantes. En su análisis, asumen que las demandas en los puntos de venta son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (*i.i.d.*) y permiten la existencia de órdenes pendientes. Los autores afirman que, “como el lector comprende sin duda alguna, el análisis estocástico de los modelos de distribución es considerablemente difícil y encontrar una estrategia óptima es prácticamente imposible”. Mencionan la gran dificultad de tratar el problema, incluso asumiendo demanda determinística en los puntos de venta.

Lo que es peor, los sistemas de una bodega y N puntos de venta, en la práctica, pueden tener muchas más complejidades que las enunciadas hasta este punto. Entre dichas complejidades encontradas en estos sistemas se incluyen las siguientes:

- Los sistemas reales de una bodega y N puntos de venta se caracterizan por tener cientos de proveedores con capacidad limitada, con comportamientos diferentes y servicios por operadores logísticos con múltiples características que pueden complicar la operación, especialmente en nuestro medio. Un problema tiene que ver con el comportamiento de los proveedores en cuanto a la variabilidad de su tiempo de reposición y al incumplimiento de las cantidades de las órdenes de compra que recibe. El problema se agrava cuando, en medio de las crisis económicas mundiales, los proveedores deciden cerrar plantas y limitar la distribución en muchos países, como en el caso de algunos laboratorios farmacéuticos en Colombia. Igualmente, el desempeño de los operadores logísticos que transportan los productos hacia los centros de distribución puede ser muy complejo. Por ejemplo, un operador logístico que sirve a un proveedor podría decidir unilateralmente consolidar dos o más órdenes de compra con fechas diferentes en un solo envío (aplicando erradamente el principio de posposición de tiempo), lo que obviamente podría causar agotados en el cliente del proveedor. En otras ocasiones, un mismo operador logístico sirve a varios proveedores y a veces decide esperar a consolidar órdenes de proveedores diferentes para completar un camión y hacer un solo viaje.
- Se manejan cientos de miles de *SKU* con diferentes patrones de demanda en cada punto de venta. Además, no todos los puntos de venta manejan siempre los mismos productos, ya que existe lo que se denomina el “surtido tipo” o la “vectorización” del punto de venta.
- Los puntos de venta son diferentes entre sí y cada uno puede presentar diferentes características en cuanto a la administración del inventario. Por ejemplo, en el caso de medicamentos, no es lo mismo una droguería ubicada dentro de un supermercado que otra ubicada dentro de una clínica, o que otra que sólo es droguería o que tiene el formato de una rapitienda.
- En general, la demanda en los puntos de venta presenta distribuciones probabilísticas diferentes a la de Poisson; en ocasiones no se cumple la independencia de las demandas y, en la mayoría de los casos, ellas no siguen la misma distribución probabilística.
- En algunas cadenas de abastecimiento, existen épocas del año donde se deben hacer pronósticos acumulados en adición a los pronósticos

cíclicos normales. Esto puede ser causado por algunas condiciones que imponen los proveedores. Por ejemplo, en el caso de medicamentos en Colombia, muchos laboratorios farmacéuticos salen a vacaciones en diciembre, con lo cual sus clientes deben proveerse en noviembre hasta comienzos de febrero. Como se sabe, los pronósticos de demanda para largos horizontes de tiempo son más complejos y presentan mayor variabilidad.

- La clasificación ABC es diferenciada por bodega (total cadena) y por puntos de venta, lo que causa que un producto pueda ser A en una droguería, B en otra y C en otra. Esto, en ocasiones, causa confusión en las políticas de control de inventarios y en los sistemas de pronósticos.
- El manejo de productos nuevos y la administración de las promociones es un tema muy complejo. En los primeros, no hay historia disponible y el sistema de pronósticos es un desafío. El manejo de las promociones, por otra parte, causa la creación de ítems con un nuevo código constituidos por ítems maduros, los cuales interfieren con la demanda normal de los ítems originales, causando distorsión en los sistemas de pronósticos (como en los casos de promociones “pague uno lleve dos” o cuando se consolidan en un solo paquete dos productos diferentes).
- La existencia de productos con demanda errática o intermitente, incluso a nivel agregado de demanda en el CD. Esto generalmente causa roces entre los departamentos de mercadeo y logística, ya que, en los casos más graves, el primero desea “tener de todo, en toda parte y en todo momento”, mientras que logística insiste en que una política así es demasiado costosa y extremadamente difícil de administrar.
- Diferentes aspectos administrativos que pueden afectar a los sistemas de control de inventarios, como: el manejo de los despachos manuales y de emergencia, y las transferencias entre puntos de venta; la precisión del inventario físico en puntos de venta y en el CD; la coordinación entre el sistema de compras y el sistema de recepción y almacenamiento en el CD; el manejo de ítems comunes con diferentes presentaciones; la consideración de unidades mínimas de despacho de algunos ítems y la forma como se contabilizan los ítems (por ejemplo, puede ocurrir que una caja de medicamentos contenga diez blísters, cada uno con diez pastillas y el conteo podría llevarse entonces de tres formas distintas: por cajas, por blísters o por pastillas y así podrían generarse tres códigos distintos para el mismo producto); la “canibalización” de la demanda, tanto por ítems relacionados, como por un punto de venta con otro.

Lo anterior sugiere que una muy buena opción es la implementación de técnicas de pronósticos formales combinadas con sistemas heurísticos de control de inventarios desarrollados con base en el sistema de información propio de la empresa, dentro de su mismo ambiente, y considerando las prácticas administrativas de la empresa. Algo fundamental es que la gran cantidad de decisiones administrativas y de casos especiales presentes en un sistema de esta naturaleza, hace que la implementación y el refinamiento de los modelos sean muy complejos.

Cuando la información es global, el CD basa sus decisiones en la demanda real externa observada, consolidada para todos los puntos de venta. Al calcular los tamaños de lote a comprar deberían, por lo tanto, considerarse los inventarios ya existentes en los puntos de venta, puesto que estos han “pasado” por la bodega y aún no han sido comprometidos con clientes finales (concepto de inventario de escalón). Sin embargo, como los tiempos de reposición de los proveedores hacia la bodega y las cantidades despachadas pueden ser inciertos, frecuentemente no es conveniente descontar el 100% de los inventarios existentes en los puntos de venta para responder en cierta forma a estas variabilidades. A medida que se logra estabilizar dichos tiempos de reposición, o que se incluye en los sistemas de control la variabilidad de los tiempos de reposición de los proveedores, se puede descontar un mayor porcentaje del inventario existente en los puntos de venta para tomar decisiones de compras. Es decir, que una cosa es el concepto teórico del inventario de escalón y algo diferente es su aplicación en la práctica, como se ha podido comprobar en el caso real referido en el área de medicamentos.

Un aspecto muy importante es que, para el diseño de un sistema efectivo de administración y control de inventarios, no es necesario, inicialmente, considerar aspectos de costos de mantenimiento del inventario r , de ordenamiento o alistamiento A , ni de faltantes B_1 o B_2 . Esto se debe principalmente a que sistemas de pronósticos adecuados y buenas técnicas de control implican directamente reducción de estos costos, sin necesidad de estimarlos previamente o de considerarlos dentro de la función objetivo de los modelos matemáticos. Lo que se puede hacer es tratar de estimar estos costos *a posteriori* con el objeto de verificar la bondad de los sistemas de control y compararlos con posibles técnicas adicionales de refinamiento, especialmente para el caso de ítems clase A. Este aspecto facilita las aplicaciones en otros sistemas sin la necesidad inicial expresa de estimar dichos costos, lo cual es muy difícil de lograr con precisión en la mayoría de los casos. Además, la mayoría de los sistemas de inventarios son muy robustos en cuanto a cambios en los parámetros mencionados.

Es de resaltar la importancia que tienen los procesos de colaboración en la cadena de abastecimiento (figura 8.4). Por ejemplo, para los proveedo-

res, quienes, a su vez, tienen su propia cadena de suministro de materias primas, sería muy interesante disponer de datos de demanda real de los consumidores y así disminuir el efecto látigo, como ya se comentó anteriormente. Si esta práctica se generalizara a los clientes más importantes de cada proveedor, éste podría pronosticar su demanda con mejor precisión, evitando así faltantes de inventario que comúnmente se presentan y que causan gran problema al romperse el inventario en el CD, ocasionando el deterioro en el servicio al cliente. Este proceso de colaboración se constituye evidentemente en una relación gana-gana si se logran superar las dificultades de confianza y confidencialidad, barreras más prominentes de este tipo de relaciones.

Queda abierta la pregunta de la conveniencia de la adopción de sofisticados sistemas de información, planeación y administración de la cadena de abastecimiento. Muchas veces se convierten en costosos sistemas de información solamente, sin que se puedan explotar todas sus posibilidades. Específicamente, en el área de inventarios, estos sistemas no son utilizados adecuadamente, y sus capacidades de pronósticos y de control no son aprovechadas en todo su potencial. En muchas ocasiones, sistemas sencillos hechos en casa pueden ser la respuesta rápida, parcial o definitiva, a los serios problemas de inventarios que presentan las organizaciones locales y nacionales, en general.

Ante todas las anteriores complejidades, la aplicación directa de los desarrollos teóricos es cuestionable y hace que deba pensarse en métodos heurísticos y prácticos de administración de inventarios, muy posiblemente con sistemas de control y de pronósticos “desarrollados en casa”. Para una descripción más detallada de ejemplos regionales exitosos de implementación real de sistemas de pronósticos y de control de inventarios en una cadena de abastecimiento con una bodega y N puntos de venta, véase Zamora y Ruiz (2008), Londoño (2005) y Vidal *et al.* (2004).

Ejemplo 8.2 (Un sistema de una bodega y cinco puntos de venta desarrollado con base en un caso real)

Una empresa comercial local posee un CD que atiende a cinco puntos de venta en la ciudad. El CD se abastece de varios proveedores, tanto locales, como nacionales e internacionales, y se va a analizar el control del inventario de un producto específico. La tabla 8.3 muestra las demandas de este producto para las últimas 16 semanas en cada PV y la demanda consolidada que observa el CD, al igual que las estadísticas básicas de la demanda de este ítem.

**Tabla 8.3. Demandas de un producto en una cadena con una bodega
y cinco puntos de venta (ejemplo 8.2)**

Semana N.º	P.V. 1	P.V. 2	P.V. 3	P.V. 4	P.V. 5	Consolidado (CD)
1	96	20	345	320	6	787
2	123	25	407	105	18	678
3	103	27	301	400	7	838
4	189	31	320	110	0	650
5	73	30	355	117	5	580
6	69	29	326	140	13	577
7	86	26	332	300	5	749
8	74	43	315	101	6	539
9	58	52	362	86	0	558
10	74	27	287	86	22	496
11	83	52	353	208	2	698
12	57	23	263	172	5	520
13	72	27	311	195	4	609
14	70	21	323	363	0	777
15	83	21	306	92	0	502
16	59	25	296	405	9	794
Promedio =	85,56	29,94	325,13	200,00	6,38	647,00
Desv. Est. =	32,59	10,14	34,27	118,02	6,45	115,16
Coef. de Var. =	38,09%	33,88%	10,54%	59,01%	101,15%	17,80%

El sistema de control de inventarios que se ha establecido es periódico (R, S), tanto para cada PV, como para el CD con la demanda consolidada. En ambos casos se utiliza un intervalo de revisión $R = 1$ semana. El proveedor de este ítem ha mostrado un comportamiento aceptable, con un tiempo de reposición cuyo promedio se ha estimado en $E(LT_{CD}) = 0,5$ semanas y su desviación estándar $\sigma_{LT_{CD}} = 0,13$ semanas. El tiempo de reposición del CD hacia cualquiera de los puntos de venta es muy estable, igual a un día, es decir, $LT_{PV} = 0,143$ semanas. Debido a que un faltante en el CD puede ser más grave que un faltante en algún PV, se ha establecido un nivel de servicio P_1 en el CD del 99%, y en cada PV del 97,5%. Se pide establecer las políticas de control en cada PV y en el CD.

Primero, se va a ilustrar el cálculo de los parámetros de la política de control del PV 1. Ya sabemos que $R = 1$ semana y que el tiempo de reposición que observa el PV es el que brinda el CD, o sea, $LT_{PV} = 0,143$ semanas. El factor de seguridad en cada PV es igual a $k = 1,96$ [para $p_z(k) = 1 - P_1 = 0,025$]. La desviación estándar semanal σ_1 de este ítem se ha estimado a partir de la muestra de las 16 semanas en la tabla 8.3, igual a 32,59 unidades, lo mismo que el promedio de la demanda semanal de este ítem igual a 85,56 unidades. En un sistema real, estos dos últimos parámetros los proveería el sistema formal de pronósticos que se esté utilizando, a través de los errores de los pronósticos.

Con los datos anteriores se puede calcular el inventario máximo del ítem en el PV 1, de acuerdo con la Ec. (5.30) del capítulo 5:

$$\begin{aligned}S_1 &= \hat{x}_{R+L} + k\sigma_{R+L} = [d_1 \times (R + LT_{PV})] + [k \times \sigma_1 \sqrt{R + LT_{PV}}] \\S_1 &= [85,56 \times (1 + 0,143)] + [1,96 \times 32,59 \sqrt{1 + 0,143}] \\S_1 &= 97,8 + 68,3 = 166 \text{ unidades}\end{aligned}$$

Por lo tanto, *la política de control del ítem en el PV 1 será la de revisar su inventario efectivo cada semana y ordenar una cantidad igual a 166 unidades, menos su inventario efectivo al momento de la revisión*. Estos cálculos se pueden realizar en forma automática al igual que los despachos, lo que le da una gran autonomía al sistema.

Los cálculos para el resto de puntos de venta son semejantes y los resultados se muestran en la tabla 8.4. Es importante observar que la revisión del inventario del ítem no necesariamente debe hacerse el mismo día para todos los puntos de venta (puede repartirse por igual de lunes a viernes cada semana). Lo que debe hacerse es respetar los valores del inventario máximo en cada lugar.

Tabla 8.4. Parámetros de control del inventario del ítem en cada punto de venta (ejemplo 8.2)

Parámetro	P.V. 1	P.V. 2	P.V. 3	P.V. 4	P.V. 5
Intervalo de revisión R (sem) =	1	1	1	1	1
Tiempo de reposición del CD (sem) =	0,143	0,143	0,143	0,143	0,143
Demanda promedio d_i (u/sem) =	85,56	29,94	325,13	200,00	6,38
Desviación estándar semanal σ_i (u) =	32,59	10,14	34,27	118,02	6,45
Factor de seguridad k =	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96
Inventario cíclico promedio (u) =	97,8	34,2	371,6	228,6	7,3
Inventario de seguridad (u) =	68,3	21,3	71,8	247,3	13,5
Inventario máximo S_i (u) =	166	55	443	476	21

Algunos autores describen dos versiones para establecer la política de control de inventario de un ítem en el CD dentro de estas cadenas de abastecimiento. Ballou (2004, pp. 370-373) presenta un ejemplo donde, para planear el inventario del almacén, mediante un sistema de control (s, Q) , utiliza solamente el tiempo de reposición de su proveedor y no comenta nada adicional al respecto. Por el contrario, Simchi-Levi *et al.* (2003, pp. 67-68) definen el tiempo de reposición de escalón (*echelon lead time*) que se presentó al comienzo de esta sección y utilizan, para el cálculo del punto de reorden de un sistema (s, S) en el almacén, lo que denominan L^e = tiempo de reposición entre los detallistas y la bodega, más el tiempo de reposición entre la bodega y su proveedor.

Si, para controlar el inventario en el CD, se está considerando la variabilidad de los tiempos de reposición del proveedor y se está utilizando el inventario de escalón (y dentro de éste se está incluyendo el inventario total existente en los PV), entonces debería adoptarse la metodología de Simchi-Levi *et al.* (2003); además, esta política, en cualquier caso, es conservativa porque incrementa el inventario cíclico y el de seguridad. Si en alguna aplicación práctica, como la mencionada en los párrafos anteriores, por falta de información no se considera la variabilidad del tiempo de reposición del proveedor en los cálculos, y por ello, en el inventario de escalón no se incluye el 100% del inventario en los PV, entonces es posible incluir solamente el tiempo de reposición promedio del proveedor (y no el tiempo de reposición entre el CD y los PV), pues, de lo contrario, en el CD se estaría contabilizando doble inventario de seguridad al no descontar todas las unidades en los PV, y fuera de esto, adicionar el tiempo de reposición entre el CD y los PV. En todo caso, este es un tema que merece mayor investigación. En este ejemplo se va a adoptar la metodología de Simchi-Levi *et al.* (2003).

Para determinar el inventario máximo en el CD, es necesario recordar que el tiempo de reposición del proveedor es aleatorio y que se trata de un sistema de control periódico. Por lo tanto, es necesario adaptar las Ec. (5.32) y (5.33) del capítulo 5 para considerar, tanto la variabilidad de la

demandas, como la del tiempo de reposición. Así, estas ecuaciones se transforman de la siguiente manera:

$$E(w)_{\text{periódico}} = [R + E(LT_{CD}) + LT_{PV}] \times E(d_{CD}) \quad (8.7)$$

$$\sigma_{w_{\text{periódico}}} = \sqrt{[R + E(LT_{CD}) + LT_{PV}] \sigma_{CD}^2 + [E(d_{CD})]^2 \sigma_{LT_{CD}}^2} \quad (8.8)$$

Obsérvese que se está utilizando el tiempo de reposición de escalón definido por Simchi-Levi *et al.* (2003) y que los tiempos de reposición de los PV no afectan la varianza del tiempo de reposición de escalón porque son constantes; si no lo fueran, se harían algunos supuestos de independencia entre los tiempos de reposición para transformar la Ec. (8.8). Reemplazando, entonces, los valores dados arriba, se obtiene:

$$E(w)_{\text{periódico}} = [1 + 0,5 + 0,143] \times 647,00 = 1.063,5 \text{ unidades}$$

$$\sigma_{w_{\text{periódico}}} = \sqrt{[1 + 0,5 + 0,143] [115,16]^2 + [647,00]^2 [0,13]^2} = 169,9 \text{ unidades}$$

El factor de seguridad para el CD es $k = 2,33$ para $P_1 = 99\%$. Finalmente, el inventario máximo del ítem en el CD se puede calcular como:

$$S_{CD} = E(w)_{\text{periódico}} + k\sigma_{w_{\text{periódico}}} = 1.063,5 + (2,33 \times 169,9) = 1.460 \text{ unidades}$$

La política de control del inventario del ítem en el CD sería revisar su inventario de “escalón” en el CD cada semana y ordenar una cantidad igual a 1.460 unidades, menos el inventario de “escalón” al momento de la revisión. Se ha resaltado la palabra “escalón” en la política anterior, ya que el inventario de escalón del ítem en el CD viene dado por:

Inventario de escalón del ítem en el CD = Inv. a la mano en el CD + Pedidos pendientes por recibir de parte del proveedor + Inv. a la mano en todos los PV + Cualquier pedido en tránsito hacia los PV – Inv. comprometido con los clientes que no haya sido aún deducido.

Como el intervalo de revisión es de una semana, y el tiempo de reposición del proveedor difícilmente va a ser mayor que su promedio, más tres veces su desviación estándar = $0,5 + (3,0 \times 0,13)$ semanas = 0,89 semanas, entonces en este ejemplo es muy raro que ocurra el evento de que en una revisión exista un pedido pendiente por entregar de parte del proveedor. Sin embargo, si esto llegare a ocurrir, el concepto del inventario de escalón lo controlaría, ya que éste consideraría el pedido que está pendiente por recibirse.

Como se mencionó anteriormente, dado que en muchas aplicaciones prácticas es difícil medir y registrar la variabilidad de los tiempos de reposición de los proveedores, no es conveniente descontar el 100% del inventario a la mano en todos los puntos de venta, pues este inventario actúa como una protección ante la fuente de variabilidad no considerada.

Nótese que es buena idea trabajar con la demanda consolidada para el CD porque, dada la variabilidad de la demanda en los puntos de venta, es extremadamente difícil que ocurran altas demandas simultáneamente en todos ellos. Por lo tanto, en una semana dada, puede que en algunos puntos de venta la demanda se incremente, pero, casi con seguridad, en otros puntos bajará, lográndose el equilibrio de la consolidación y permitiendo un adecuado manejo del inventario en toda la cadena.

UN SISTEMA DE CONTROL TIPO PUSH

Los sistemas tipo *push* se caracterizan por su información global y decisiones centralizadas. En ellos, normalmente un lugar clave de la cadena planea los inventarios y los “empuja” hacia otros lugares de la misma, pero con base en la información global. Estos sistemas han demostrado ser muy importantes en aquellos casos en los que se manufactura un producto que no puede ser almacenado en la planta y debe ser enviado de inmediato a bodegas o a puntos de venta a lo largo de la cadena de abastecimiento. Por ejemplo, en la producción de atún, una vez se procese éste en la planta, normalmente se envía hacia los diversos puntos de la cadena de distribución. Igual cosa puede suceder con las cosechas de tomate en los países del Norte, pues éstas solo ocurren durante tres meses del año y toda la producción debe hacerse en esos meses para enviarse totalmente a los lugares de almacenamiento y venta. El ejemplo 8.3 ilustra un caso de un sistema de control tipo *push*.

Ejemplo 8.3 (Un sistema de control tipo push)

Un importador distribuye electrodomésticos en Colombia desde cuatro bodegas ubicadas en Barranquilla, Bogotá, Cali y Medellín. En este mes el importador ha recibido un embarque del exterior de 10.000 computadores. Debido al largo tiempo de importación, es muy difícil balancear la demanda con el suministro, por lo que el importador despacha hacia las bodegas todos los computadores que recibe en cada embarque. Así, la asignación de los computadores a las bodegas se basa en el pronóstico mensual de demanda y en el nivel de servicio deseado en cada bodega (información global). Para el próximo mes se dispone de información mostrada en la tabla 8.5. Basado en el pronóstico mensual y su desviación estándar, ¿cómo deben asignarse los 10.000 computadores a las bodegas?

Tabla 8.5. Información para el problema del sistema push (ejemplo 8.3)

Bodega	Inventario a la mano, I_i [unidades]	Pronóstico de demanda mensual, x_i [unidades]	Desviación estándar del pronóstico mensual, σ_i [unidades]	Nivel de servicio requerido P_{1i} [%]
Barranquilla	53	750	75	97,5
Cali	0	1.200	90	99,0
Bogotá	193	2.650	165	97,5
Medellín	135	1.775	220	97,5
Total	381	6.375		

Lo primero que debe hacerse es calcular los requerimientos totales en cada bodega, así:

$$\text{Requerimientos totales de la bodega } i = x_i + k_i \sigma_i$$

donde k_i se determina con base en el nivel de servicio requerido en cada bodega, P_{1i} , pues $p_z(k_i) = 1 - P_{1i}$. Por ejemplo, los requerimientos totales de la bodega en Barranquilla serían:

$$\begin{aligned} \text{Requerimientos totales bodega B/quilla} &= 750 + (1,96)(75) \\ &= 897 \text{ unidades} \end{aligned}$$

donde el valor de k_1 ha sido tomado de las tablas del apéndice A para $p_z(k_1) = 1 - P_{11} = 0,025$. Una vez determinados los requerimientos totales de cada bodega, se determinan los requerimientos netos, teniendo en cuenta el inventario a la mano en cada una de ellas, así:

$$\text{Requerimientos netos bodega } i = \text{Requerimientos totales bodega } i - I_i$$

Tomando de nuevo la bodega en Barranquilla, se tendría lo siguiente:

$$\text{Requerimientos netos bodega B/quilla} = 897 - 53 = 844 \text{ unidades}$$

Una vez se calculan los requerimientos netos de cada bodega (redondeando al entero superior en caso de ser necesario), se determina si queda algún exceso por repartir, el cual se asigna *proporcionalmente al pronóstico mensual de demanda* de cada bodega. La tabla 8.6 muestra los resultados de la asignación.

Tabla 8.6. Resultados del sistema *push* (ejemplo 8.3)

Bodega	Requerim. totales [unidades]	Inventario a la mano [unidades]	Requerim. netos [unidades]	Asignación de excesos [unidades]	Despacho [unidades]
B/quilla	897	53	844	340	1.184
Cali	1.410	0	1.410	545	1.955
Bogotá	2.974	193	2.781	1.202	3.983
Medellín	2.207	135	2.072	806	2.878
Total	7.488	381	7.107	2.893	10.000

Nótese en la tabla 8.6 que la suma de los requerimientos netos de todas las bodegas es 7.107 unidades y, por lo tanto, queda un sobrante de $10.000 - 7.107 = 2.893$ computadores para repartir entre todas las bodegas. Como la suma de los pronósticos mensuales de todas las bodegas es de 6.375 computadores (ver tabla 8.5), entonces, por ejemplo, a la bodega de Barranquilla, dado que su pronóstico mensual es de 750 computadores, se le asignarían $(750/6.375) \times 2.893 = 340$ computadores adicionales fuera de sus requerimientos netos ya calculados. De esta forma se determina cómo asignar el exceso a cada bodega y, finalmente, el despacho total a enviar a cada una (tabla 8.6).

Obsérvese que, además de los requerimientos netos de cada bodega, se envía a cada una un exceso de inventario de acuerdo con su nivel promedio de demanda, dado por el pronóstico. Por esta razón se denominan a estos sistemas tipo *push*, pues el inventario, aunque realmente no se necesita aún en el lugar de la cadena, se envía anteponiéndose a demandas futuras.

Puede ocurrir que, en lugar de haber un exceso de productos, haya un defecto. Esto sucede cuando los requerimientos netos totales en la cadena de abastecimiento superan la cantidad disponible. En estos casos surge la discusión de cómo asignar lo disponible y existen varias alternativas para hacerlo. Una de ellas, tal vez la más sencilla pero que produce muy buenos resultados, es la de asignar lo disponible proporcionalmente al pronóstico de cada lugar, como se hizo en el ejemplo 8.3 con el exceso de computadores. Una forma, entre otras posibles, puede ser satisfacer los requerimientos del lugar de la cadena que se considere más “importante” y repartir el sobrante entre los demás. Puede consultarse a Bravo *et al.* (2007) para un artículo relacionado con este tema en despachos con limitaciones de transporte.

Dentro de otro contexto, algunas veces se sugiere este método en la creación de nuevos puntos de venta, a los cuales se le asigna cierto presupuesto limitado para surtirlos inicialmente. Como un nuevo PV, se compa-

ra con otros parecidos para efectos de sembrarle su inventario inicial, y así se tienen algunos pronósticos de referencia y con base en ellos se puede asignar el presupuesto para repartirlo entre los miles de ítems que el PV va a manejar.

Silver *et al.* (1998, pp. 500-503) presentan la generalización del sistema *push* ilustrado en el ejemplo 8.3, el cual se describe en la figura 8.5. Obsérvese que el control de inventarios, para determinar órdenes de compra a proveedores externos, se toma con base en la información global del inventario del sistema.

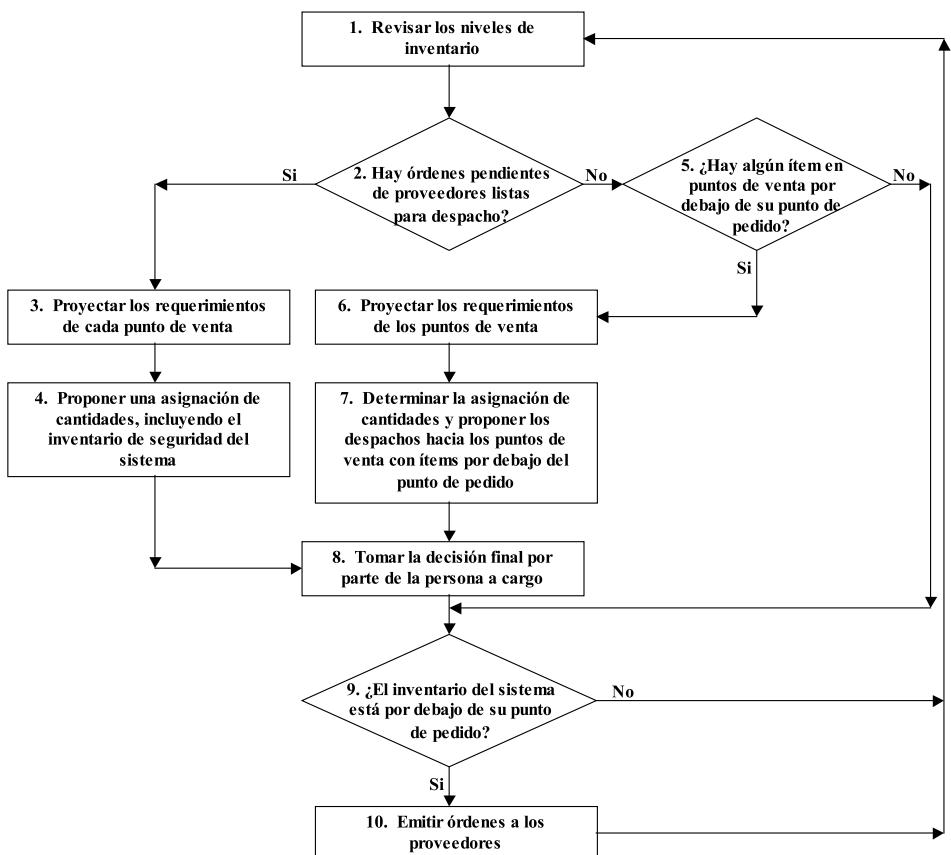


Figura 8.5. Un sistema de control de inventarios tipo push

[Fuente: Traducido de Silver *et al.* (1998), p. 501]

EL IMPACTO DE LA CONSOLIDACIÓN DE INVENTARIOS

Una pregunta que surge en cualquier cadena de abastecimiento es el número de lugares donde se almacene inventario que deben tenerse. Obviamente esta decisión no depende solamente de los costos de inventario, ya que entran a jugar un papel fundamental los costos de transporte, los costos de los sistemas de información, los costos fijos de las instalaciones y el nivel de respuesta al cliente. Dentro de cierto rango, a mayor número de centros de distribución, por ejemplo, los costos de transporte se reducen y el nivel de respuesta al cliente aumenta, pero los niveles de inventario, los costos fijos de las instalaciones y los costos de información, aumentan. Por el contrario, al consolidar varios centros de distribución en un número menor, los costos fijos y el nivel de inventario se disminuyen, pero los costos de transporte y el tiempo de respuesta al cliente, aumentan. Por estas razones, la decisión de cuántos lugares de almacenamiento mantener en la red no depende solamente de los costos de inventario, sino, también, de los otros factores mencionados anteriormente. Este tema forma parte del área de optimización de cadenas de abastecimiento en cuanto a decisiones estratégicas se refiere. Una referencia introductoria a este tema es la de Croxton y Zinn (2005), quienes incluyen los costos de inventario como un elemento explícito para el diseño de redes; otra más reciente, la cual demuestra que estos tópicos están en activa investigación, es la de Üster *et al.* (2008). Aquí los autores integran, en un modelo matemático, las decisiones de localización de bodegas e inventarios en una cadena de abastecimiento con un proveedor, una bodega intermedia y múltiples detallistas.

Es interesante analizar el efecto que tiene sobre los niveles de inventario de seguridad la consolidación de ítems en la cadena de abastecimiento. El ejemplo 8.4 ilustra el posible impacto de la agregación o consolidación de inventarios en la cadena.

Ejemplo 8.4 (Impacto de la agregación de inventarios en la cadena de suministro)

La tabla 8.7 muestra el comportamiento de la demanda de un ítem para las últimas doce semanas, en tres centros de distribución diferentes donde es mantenido en inventario. La demanda de este ítem es muy estable en los tres centros de distribución, lo cual se comprueba al calcular sus respectivos coeficientes de variación en cada lugar donde es almacenado.

Para analizar el efecto de la consolidación, se asume que el ítem se va a mantener en inventario en un solo CD, que el nivel de servicio en cada CD es el mismo y que los tiempos de reposición hacia cada CD son semejantes. De esta forma, el inventario de seguridad resulta proporcional a la desviación estándar de la demanda. Así, se suman las demandas semanales del ítem en los tres lugares, y se recalcula el coeficiente de variación

y la desviación estándar de la demanda consolidada. Se compara, así, la suma de las desviaciones estándar individuales con la desviación estándar consolidada, lo que produce un posible ahorro en inventario de seguridad del 13,38%. Este ahorro puede ser muy bajo comparado con las desventajas que presenta la consolidación en cuanto al aumento de los costos de transporte y administración para poder atender la demanda en los CD que no mantengan el inventario del ítem, y con respecto de la disminución del nivel de respuesta al cliente.

Tabla 8.7. Demanda semanal de un ítem con demanda estable en tres centros de distribución (ejemplo 8.4)

Semana	C.D. 1	C.D. 2	C.D. 3	Total
1	313	558	423	1.294
2	286	539	392	1.217
3	261	522	404	1.187
4	327	515	380	1.222
5	339	534	397	1.270
6	293	543	391	1.227
7	270	566	384	1.220
8	265	511	378	1.154
9	245	497	371	1.113
10	264	515	388	1.167
11	283	531	404	1.218
12	340	591	446	1.377
Total	3.486	6.422	4.758	14.666
Promedio	290,50	535,17	396,50	1.222,17
Desv. Est.	32,24	26,48	20,91	68,98
Coef. Var.	11,10%	4,95%	5,27%	5,64%
Suma de desviaciones estándar individuales:				79,63
Porcentaje de ahorro en inventario de seguridad (%)				13,38%

Considérese ahora el caso del ítem mostrado en la tabla 8.8, cuya demanda presenta un comportamiento mucho más errático que el anterior. Claramente, los efectos que se logran aquí con la consolidación son mucho más significativos, al lograr disminuir notablemente el coeficiente de variación y producir un ahorro en el inventario de seguridad del ítem del 35,41%. Si esto se replica para muchos ítems, los ahorros en inventarios de seguridad pueden ser muy importantes para considerar la consolidación

como una muy buena alternativa. Chopra y Meindl (2001, p. 198) citan los ejemplos de *Dell Computer*, *Gateway* y *Amazon.com* como algunas compañías líderes que han logrado ahorros millonarios en costos de inventario al agregar sus existencias en pocos lugares de la cadena de suministro.

Tabla 8.8. Demanda semanal de un ítem con demanda errática en tres centros de distribución (ejemplo 8.4)

Semana	C.D. 1	C.D. 2	C.D. 3	Total
1	25	34	5	64
2	14	76	0	90
3	120	0	7	127
4	4	234	0	238
5	0	8	0	8
6	35	0	1	36
7	112	97	3	212
8	0	140	23	163
9	7	12	0	19
10	54	49	4	107
11	32	0	0	32
12	114	77	7	198
Total	517	727	50	1.294
Promedio	43,08	60,58	4,17	107,83
Desv. Est.	46,43	70,83	6,53	79,97
Coef. Var.	107,78%	116,92%	156,82%	74,16%
Suma de desviaciones estándar individuales:				123,80
Porcentaje de ahorro en inventario de seguridad (%)				35,41%

El nivel de ahorro en inventario de seguridad depende del grado de independencia de las demandas del ítem en los lugares donde se almacena. Si las demandas están perfectamente correlacionadas, no se consigue ahorro alguno, ya que la suma de las desviaciones estándar individuales sería igual a la desviación estándar de la demanda consolidada. Si, por el contrario, la demanda en regiones geográficas diferentes es independiente y de tamaño aproximado, entonces el inventario de seguridad se reduce aproximadamente de acuerdo con la raíz cuadrada del número de instalaciones que se consolidan. Esto se ve claramente al notar que la varianza de la suma de variables aleatorias independientes (representando las demandas) es igual a la suma de las varianzas individuales.

En la práctica rara vez se presentan los casos extremos de independencia o correlación perfecta y, por lo tanto, se esperan ahorros intermedios entre los dos extremos. El ejemplo 8.4 anterior ilustra estos casos.

La agregación o consolidación del inventario de un producto en la cadena de abastecimiento puede, con alta probabilidad, disminuir los costos totales de logística siempre y cuando se cumpla al menos una de las siguientes condiciones:

- El producto tiene alta incertidumbre en la demanda, como se explicó en el ejemplo 8.4.
- El producto tiene una alta relación valor/peso o valor/volumen, según sea el caso, ya que su inversión en inventario de seguridad es más costosa.
- Las órdenes de los clientes, en los lugares donde no se guarde el inventario, son grandes, puesto que muchas órdenes pequeñas ocasionarían altos costos de transporte desde el lugar donde se consolidó el inventario.

Una situación semejante a la mencionada aquí ocurre cuando una empresa estandariza sus productos, aplicando el principio de posposición de forma, y espera a que la demanda ocurra para adaptarlos a las necesidades particulares de cada cliente, en lugar de mantener inventarios de gran diversidad de productos en todos los lugares de la cadena (problema No. 4 de los ejercicios 8.1). Esto lo que busca, básicamente, son ahorros en inventarios de seguridad. Un ejemplo muy conocido de esta situación ocurrió con *Hewlett Packard*. En forma muy resumida, la empresa mantenía inventario de impresoras en toda Europa, cada una con especificaciones muy diferentes debido a la gran variedad de idiomas y otros aspectos. Se decidió diseñar impresoras estándar que no tuvieran todas las características particulares de cada cliente, consolidarlas en una sola localización y darle la forma final a cada impresora (lo que se denomina la *clientelización* del producto) de acuerdo con el comportamiento de la demanda en cada lugar. Los ahorros obtenidos por esta estrategia fueron millonarios. Para mayor información al respecto se puede consultar a Lee y Billington (1992) y a Lee *et al.* (1993).

Otro aspecto de importancia, en lo que tiene que ver con la localización de inventarios en cadenas de abastecimiento, está muy relacionado, en adición a la variabilidad de la demanda de los ítems, con su consumo y rotación. Como regla general, aquellos ítems de alto consumo y rotación, deberían estar localizados lo más cerca posible del cliente final, por ejemplo, en los puntos de venta. Cuando el consumo y rotación de los ítems es menor, se recomienda consolidarlos en algunos centros de distribución desde donde se despachan hacia los clientes finales, como puede ser el

caso del ítem de la tabla 8.8. Si el consumo del ítem es muy esporádico, como en el caso de algunos repuestos de demanda altamente errática, entonces se debe ir más a la izquierda en la cadena y, muy probablemente, sólo lo mantenga en inventario el fabricante o proveedor del ítem e, incluso, podría ser un ítem de producción sólo bajo pedido del que no se mantiene inventario alguno.

Wanke (2009) presenta un análisis formal sobre el impacto de la consolidación de inventarios. Este estudio considera inventarios de seguridad y cíclicos, y relaja los supuestos de demandas no correlacionadas, incertidumbre de los tiempos de reposición y costos relacionados con los inventarios uniformes.

Una notable excepción a lo presentado en esta sección, que merece más análisis, es la presentada por Chevreux (2010), quien sostiene que tener “un poco de todo en toda parte” ha demostrado el incremento de ventas y la reducción de inventarios sin el aumento de costos.

OTROS SISTEMAS DE CONTROL DE INVENTARIOS

Existen otros sistemas de control conjunto y de control de inventarios en la cadena de abastecimiento en la práctica. Por ejemplo, se conocen sistemas híbridos de control, en los cuales se aplica un sistema periódico (R, S), pero se incluyen también aspectos de control continuo, basados en ciertas “alarmas” que ayudan al administrador del inventario a tomar decisiones anticipadas al período de revisión, principalmente para ítems clase A. Estas alarmas pueden estar basadas, por ejemplo, en cierto porcentaje del inventario de seguridad remanente en inventario, lo cual puede indicar una ocasión inminente de faltantes. Otros métodos de control de inventarios pueden basarse en técnicas de *simulación*.

Simulación de inventarios

La simulación es el arte de desarrollar modelos para imitar el funcionamiento de un sistema, a través de programas de computador especializados, con el objeto de predecir su comportamiento bajo diversas condiciones. Las ventajas de simular sistemas de inventarios son las siguientes:

- Se pueden representar con gran precisión distribuciones de demanda y de tiempos de reposición que no son tratables analíticamente.
- Se puede predecir el comportamiento de diversas políticas de inventarios sin necesidad de experimentar con el sistema mismo.
- La simulación presenta facilidad para controlar condiciones experimentales difíciles de implementar en la realidad, como restricciones reales del sistema debidas a limitaciones de capital y almacenamiento.
- Mediante la simulación se pueden analizar horizontes de tiempo relativamente largos en tiempos relativamente cortos.

Por otra parte, la simulación también presenta desventajas que deben ser tenidas en cuenta antes de emprender un estudio. Ellas pueden ser:

- Cada corrida de un modelo de simulación es una muestra aleatoria de la reacción del sistema bajo las condiciones impuestas. Por lo tanto, se requieren múltiples corridas para poder establecer intervalos de confianza sobre las variables de interés a través del diseño experimental. En otras palabras, los modelos de simulación *no optimizan*, sólo describen el comportamiento del sistema bajo ciertas condiciones. Por este motivo puede ser muy difícil o, incluso, imposible, encontrar soluciones óptimas de problemas bajo un ambiente de simulación.
- Normalmente, los modelos de simulación son costosos y consumen mucho tiempo para su desarrollo.
- Es muy importante tener un alto nivel de confidencia de que los modelos de simulación utilizados son válidos para la toma de decisiones en el sistema bajo estudio. La validación de un modelo de simulación puede ser excesivamente consumidora de tiempo y esfuerzo.

A pesar de las desventajas anteriores, los modelos de simulación son una buena alternativa para analizar sistemas de inventarios reales, especialmente cuando las condiciones del sistema sean demasiado variables o cuando muchos de los supuestos planteados, a lo largo de este libro no se cumplan. El supuesto de normalidad o de Poisson, por ejemplo, permite un trabajo analítico relativamente fácil y elegante. Pero si no se cumple, entonces pueden surgir problemas de aplicación de los métodos vistos. Hay también casos en los cuales las políticas de inventarios son tan complejas que su análisis más adecuado debe hacerse a través de modelos de simulación.

Cuando se simula un sistema de inventarios se prueban varias políticas de control y se generan estadísticas e indicadores de eficiencia, como niveles de servicio y costo total relevante, de tal forma que se puedan evaluar las políticas simuladas y definir estadísticamente la mejor de ellas. Ballou (2004, p. 373) afirma, por ejemplo, que el control de inventarios en cadenas de abastecimiento es un problema tan complejo que se necesita del uso de la simulación para su análisis. Menciona la conveniencia de utilizar algunos paquetes especializados de simulación como *Slam*, *Dynamo* y *Simscrip*, u otros diseñados especialmente para cadenas de abastecimiento tales como *LREPS* (*Long Range Environmental Planning Simulator*) o *Pipeline Manager*, desarrollado por Arthur Andersen & Company. En la actualidad se está dando mucha importancia a la simulación de cadenas de abastecimiento. [ver, por ejemplo, Hicks (1999)]. Algunos paquetes académicos muy conocidos, como el *WinQSB*, tienen un módulo de inventarios, en el cual se puede simular los sistemas más comunes de control de inventarios.

La simulación en inventarios también se ha desarrollado mediante programas escritos en lenguajes básicos, tales como C y Fortran. Law y Kelton (1991, pp. 75-103), por ejemplo, presentan un ejemplo de simulación de un sistema de inventarios con demanda aleatoria discreta, con tiempos entre demandas también aleatorios, con costos de ordenamiento dependientes del tamaño de la orden y con tiempos de reposición con distribución uniforme. Se considera un sistema de control (s, S) , incluyendo costos de faltantes por unidad y por unidad de tiempo. Claramente, el análisis matemático de un sistema de éstos es extremadamente complejo, sino imposible. A través de programas escritos en C, Fortran y Pascal, se desarrolla un modelo de simulación para este problema, el cual permite evaluar diversas políticas (s, S) y ofrecer estadísticas para cada una, tales como el nivel de servicio P_1 y el costo total relevante, para así determinar una “buena” política de control. Banks y Carson (1984, pp. 33-46) presentan ejemplos adicionales de simulación de sistemas periódicos y del problema del vendedor de periódicos, e incluyen un capítulo completo que resume la teoría de inventarios y resalta la importancia de la simulación en casos analíticamente no tratables.

Por su parte, Chopra y Meindl (2008, pp. 381-382) presentan algunas ideas y sugerencias para la simulación de inventarios mediante el uso de hojas electrónicas. Un ejemplo de simulación de inventarios en cadenas de abastecimiento con hojas electrónicas se puede observar en Sezen y Kıtapçı (2007). A nivel local, un proyecto en desarrollo de simulación de un sistema de inventarios de una cadena de abastecimiento con una bodega y N puntos de venta, puede consultarse en Escallón (2009), quien desarrolla un modelo de simulación en ProModel®. Otra alternativa interesante de simulación de inventarios la constituyen las redes de Petri.

Ejercicios 8.1

1. Considere un proceso de producción en serie en dos etapas, en el cual, en la segunda etapa, se realiza una operación menor que le agrega poco valor al producto. Específicamente se tiene la siguiente información:

$$\begin{array}{ll} D = 2.000 \text{ unidades/año} & v_1 = \$11.500/\text{unidad} \\ v_2 = \$13.800/\text{unidad} & r = 24\% \text{ anual} \\ A_1 = \$46.000 & A_2 = \$23.000 \end{array}$$

Los subíndices 1 y 2 se refieren a la primera y segunda etapa de producción, respectivamente. Determine los tamaños de lote Q_1 y Q_2 y el valor de n , de acuerdo con la metodología expuesta en este capítulo. Comente los resultados.

2. Considere el ejemplo 8.3 con todos los datos dados en la tabla 8.5.
- Si el manejo aduanero tarda una semana después que llega el pedido, y el transporte hacia todas las bodegas tarda una semana más en completarse, ¿cómo deben asignarse entonces los 10.000 computadores a las cuatro bodegas? (Sugerencia: calcule los requerimiento totales de cada bodega considerando 1,5 meses, o sea, el intervalo de revisión, más el tiempo de reposición).
 - Suponga que después de un análisis estratégico, se decide cerrar la bodega de Barranquilla y atender sus clientes desde la bodega de Medellín. Haciendo los supuestos que considere necesario, replantee el problema y resuélvalo de nuevo, ahora con las tres bodegas. ¿Qué puede predecir del nivel total de inventario de seguridad antes y después del cierre de la bodega en Barranquilla? ¿Qué información adicional necesita para decidir si ésta es o no una buena decisión?
3. Un gran distribuidor de medicamentos tiene bodegas en varias ciudades de Colombia, desde donde distribuye localmente. Se está haciendo el análisis para un ítem que presenta demanda considerablemente variable en unas ciudades y en otras errática, para determinar si debería consolidarse en una sola bodega a nivel nacional, desde donde se atendería la demanda de todo el país. Cada unidad de este ítem cuesta \$250.000 y la empresa utiliza una tasa $r = 30\%$ anual. Se asume que la demanda mensual en las diferentes ciudades se distribuye normalmente. Cada bodega se provee en forma independiente desde el mismo proveedor, mediante un sistema de control de inventarios (R, S), con $R = 0,5$ meses y un nivel de servicio $P_1 = 0,975$. La información disponible es la siguiente:

Ciudad	Demanda promedio Mensual (u)	Desviación estándar con base mensual (u)	Tiempo de reposición del proveedor (días)
Cali	1.050	680	3
Bogotá	1.740	1.220	2
Medellín	1.550	990	3
Barranquilla	380	450	4
Pereira	890	750	4
Bucaramanga	550	580	5

Asuma que la demanda en todas las ciudades es independiente una de otra y que un mes = 30 días.

- a) ¿Cuánto inventario de seguridad en unidades está manteniendo el distribuidor actualmente?
 - b) Si se piensa consolidar este ítem en la bodega de Bogotá y se asume que el tiempo de reposición del proveedor sigue siendo el mismo, al igual que el nivel de servicio P_1 , ¿cuánto inventario de seguridad en unidades será posible ahorrar al tomar esta decisión?
 - c) Discuta acerca de la información que hace falta para definir si es o no conveniente tomar la decisión de consolidación en la ciudad de Bogotá.
4. Tradicionalmente, un fabricante de ropa ha confeccionado las piezas después de que han sido teñidas con los diferentes colores en los que se venden. Se considera que se tiene ropa en cuatro colores con demandas independientes. Cada pieza se vende a \$115.000, con un costo de manufactura de \$46.000/pieza. Las piezas que no se venden al final de una temporada de moda, se rematan a un precio de \$23.000/pieza. El proceso de manufactura toma 20 semanas, por lo que la empresa pronostica las demandas con 20 semanas de anticipación. La demanda de cada uno de los cuatro colores para la temporada se puede considerar independiente de las otras, con distribución normal con media 1.000 piezas y desviación estándar 500 piezas. Las decisiones de inventario se han hecho entonces 20 semanas antes de la temporada y se han guardado inventarios de seguridad independientes para cada uno de los cuatro colores. Se está estudiando la posibilidad de invertir el proceso de producción, de tal forma que el teñido de las piezas de ropa se pueda posponer después de su confección. Esto añadiría \$4.600/pieza al costo unitario de manufactura, pero permitiría pronosticar con anticipación de 20 semanas la demanda consolidada de piezas sin teñir, proceso que se realizaría una vez se conociera la demanda de cada color. Determine, con base en la utilidad esperada en cada temporada, si se justifica invertir en el proceso de producción. Básese en las expresiones desarrolladas en el capítulo 7.
5. Una bodega de materias primas y componentes atiende a tres plantas productoras. La bodega se provee de varios productores locales. Se va a analizar el control del inventario de un componente específico. Los consumos en unidades y algunas estadísticas de este componente en cada planta para las últimas 16 semanas son los siguientes:

Semana No.	Planta 1	Planta 2	Planta 3
1	92	325	110
2	110	612	134
3	114	409	9
4	112	764	555
5	121	411	30
6	87	420	95
7	108	369	120
8	90	411	122
9	98	664	271
10	96	960	650
11	88	456	121
12	76	192	121
13	103	1.074	92
14	81	842	188
15	64	430	17
16	77	575	129
Promedio =	94,81	557,13	172,75
Desv. Est. =	15,88	245,03	179,97
Coef. de Var. =	16,75%	43,98%	104,18%

Se han estimado, igualmente, los siguientes parámetros relativos al componente en la bodega y en cada planta:

Parámetro	Bodega	Planta 1	Planta 2	Planta 3
Costo de pedido A (\$/pedido)	100.000	25.000	25.000	25.000
Tiempo promedio de reposición desde el proveedor (días)	15	-	-	-
Desviación estándar del tiempo de reposición del proveedor (días)	3	-	-	-
Tiempo promedio de reposición desde la bodega (días)	-	1	3	2
Desviación estándar del tiempo de reposición desde la bodega (días)	-	0,00	0,50	0,25
Valor del componente (\$/unidad)	490	500	530	518
Nivel de servicio P_1 especificado para el componente	0,995	0,980	0,980	0,980
Tasa del costo de mantenimiento del inventario (% anual)	30	30	30	30

- Diseñe un sistema de control de inventarios (s, Q) para la bodega y para cada planta. Asuma que el tamaño de pedido se va a calcular con base en el EOQ en cada instalación (asuma que 1 año = 52 semanas y que 1 semana = 7 días).
- Asuma que ante un inminente faltante en la bodega se implementan alternativas de emergencia que lo evitan, las cuales cuestan \$1.000.000 por cada ocasión en la que ocurre. De la misma forma, se pueden evitar faltantes en cada planta por \$200.000 por cada ocasión. Calcule el costo de ordenamiento, el costo de mantenimiento del inventario, el costo de las alternativas de emergencia para evitar la ocurrencia de faltantes y el costo total relevante CTR (todo en \$/año), para la bodega, para cada PV y para toda la cadena.

- c) Recalcule el CTR de la cadena si se especifican niveles de servicio $P_1 = 95\%$ en toda la cadena. Concluya sobre la conveniencia o no de hacer esto.
6. Una empresa comercial tiene actualmente dos centros de distribución ubicados en Cali y Bogotá, desde donde distribuye a todo el país. Usted está haciendo un estudio sobre la posible consolidación de dos ítems en alguno de los CD existentes. Se conoce la siguiente información de demanda en unidades de cada uno de los ítems en cada CD:

Semana No.	CD UBICADO EN CALI		CD UBICADO EN BOGOTÁ	
	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 1	Ítem 2
1	100	18	284	358
2	130	148	331	50
3	59	75	342	17
4	191	132	324	54
5	147	27	348	298
6	136	144	336	239
7	101	350	350	22
8	65	102	310	61
9	131	33	389	258
10	84	187	299	62
11	116	98	322	45
12	167	121	270	8
13	161	517	334	35
14	210	70	313	328
15	150	160	287	56
16	132	68	262	42

Ambos ítems se están controlando con un sistema continuo (s, Q) en cada uno de los CD (tome 1 año = 52 semanas y 1 semana = 7 días). Se dispone, además, de la siguiente información respecto de cada ítem en cada CD:

Parámetro	CD UBICADO EN CALI		CD UBICADO EN BOGOTÁ	
	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 1	Ítem 2
Costo de pedido A (\$/pedido)	25.000	25.000	30.000	30.000
Tiempo promedio de reposición desde el proveedor (días)	7	4	5	8
Desviación estándar del tiempo de reposición del proveedor (días)	2	1	3	3
Valor del ítem (\$/unidad)	1.250	2.300	1.100	2.550
Tasa de costo de faltante B_2 de cada ítem en cada CD	0,25	0,35	0,30	0,45
Nivel de servicio P_1 especificado para cada ítem en cada CD	0,975	0,990	0,975	0,990
Tasa del costo de mantenimiento del inventario (\$/.año)	0,36	0,36	0,36	0,36

- a) Analice la conveniencia de cada una de las siguientes opciones: 1) consolidar en Cali el inventario del ítem 1 solamente dejando el ítem 2 en ambas ciudades; 2) consolidar el ítem 2 en Cali solamente dejando el ítem 1 en ambas ciudades; 3) consolidar ambos

- ítems en la ciudad de Cali, es decir, sin mantener ítem alguno en Bogotá. Base su decisión sólo en el CTR_2 del sistema de control de inventarios de los ítems.
- b) Repita el literal anterior si la ciudad donde se va a consolidar es Bogotá.
 - c) Pruebe otras opciones de consolidación, como, por ejemplo, consolidar el ítem 1 en Cali solamente y el ítem 2 en Bogotá solamente, o al contrario.
 - d) ¿Qué información falta para poder tomar una decisión definitiva respecto de la consolidación de los ítems?
7. Diseñe una hoja electrónica para simular un sistema de control de inventarios (s, Q) con tiempos de reposición aleatorios. El diseño se hará para una sola localidad (un CD) y un solo ítem con demanda aleatoria. Aunque su diseño podría incluir cualquier distribución del tiempo de reposición (LT), se pide hacerlo para la siguiente distribución discreta:

LT en días	Probabilidad
2	0,025
3	0,075
4	0,150
5	0,500
6	0,100
7	0,125
8	0,025
Suma =	1,000

Algunos aspectos importantes que su diseño debería incluir son los siguientes:

- Se va a utilizar revisión continua, en este caso transaccional diariamente, revisando el inventario al comienzo de cada día.
- La hoja electrónica simula una demanda normal diaria con media y desviación estándar a especificar por parte del usuario. La variable aleatoria demanda durante el tiempo de reposición debe tener en cuenta, tanto la variabilidad de la demanda, como la del tiempo de reposición.
- El inventario inicial del ítem en el CD se debe especificar en la hoja electrónica.
- Se pide simular 365 días de operación.

- Se asume que el tamaño de pedido Q está especificado, que va a permanecer constante a lo largo de la simulación y que no necesariamente es igual al EOQ . De todas formas, deje la opción de calcular el EOQ en la hoja electrónica.
- El nivel de servicio P_1 va a ser especificado por el usuario y con este valor la hoja debe calcular el factor k . Igualmente, se deben calcular el valor esperado y la desviación estándar de la demanda durante el tiempo de reposición de acuerdo con las Ec. (5.32) y (5.33) del capítulo 5, y, por ende, el inventario de seguridad requerido y el punto de reorden s de la política de inventarios. Este valor es el que se compara diariamente con el inventario efectivo para determinar si debe o no realizarse un pedido por Q unidades.
- Como sugerencia, la hoja debería considerar, al menos, las siguientes columnas:
 - Columna de fecha.
 - Columna donde se simula la demanda diaria con la distribución normal que se especifique.
 - Columna donde se calcula la demanda diaria acumulada hasta la fecha dada.
 - Columnas donde se calculan día a día: el inventario a la mano, el inventario neto y el inventario efectivo. Recuerde que el inventario a la mano no puede ser negativo, mientras que el inventario neto sí. Por lo tanto, la hoja electrónica va a tener en cuenta órdenes pendientes para suplirlas cuando llegue un pedido. Una convención que puede utilizarse es que se revisa el inventario efectivo al final de cada día y si dicho inventario es menor o igual que el punto de reorden s , entonces se genera un pedido al comienzo del día siguiente.
 - Se pueden utilizar columnas con variables binarias para saber si se dispara o no un pedido en una fecha dada.
 - Recuerde que debe utilizarse la función *aleatorio()* de Excel™ para generar números uniformes entre 0 y 1 y, con base en estos, proveer columnas y condicionales para generar la distribución probabilística del tiempo de reposición dada al comienzo de este ejercicio.
 - Una columna que calcule la fecha de recepción de cada pedido realizado y otra columna que controle los pedidos recibidos. El manejo de las variables de fecha es clave aquí.
 - Una columna donde se acumula el total de unidades recibidas hasta la fecha para facilitar el cálculo de los tres tipos de inventario (a la mano, neto y efectivo).

- La hoja debe proveer indicadores útiles, tanto teóricos como de la simulación misma, tales como media y desviación estándar de la demanda diaria (calculada a partir de las demandas generadas en la simulación); el número de ocasiones en las que se generan pedidos pendientes (*backorders*); el número de unidades en *backorder*; el *fill rate* teórico y simulado. Si lo desea, puede refinar la hoja, proveyendo, por supuesto, la información necesaria, con el cálculo teórico y simulado del *costo total relevante* de la política de control (en \$/año).
- Es muy útil diseñar un gráfico que incluya el inventario neto y el inventario efectivo cada día, lo cual permite observar cada instancia de la simulación.

LECTURAS ADICIONALES

CHOPRA y MEINDL (2008): capítulo 10 (pp. 290-293) (Estas páginas complementan los conceptos de la administración del inventario multi-escalón con demanda determinística); capítulo 11 (pp. 318-329, 332-335) (Estas páginas complementan el análisis sobre la consolidación de inventarios y la administración de inventarios en cadenas de abastecimiento).

BALLOU (2004): capítulo 9 (pp. 326-423) (Esta parte de este capítulo es muy útil para repasar los principales conceptos de control de inventarios, incluyendo algunos aspectos de control de inventario en la cadena de suministro. El capítulo presenta al final tres casos muy interesantes que integran muchos conceptos, incluyendo un caso sobre control de inventarios en bancos de sangre).

SIMCHI-LEVI *et al.* (2003): capítulo 3 (pp. 67-70) (Contiene el tema de tiempo de reposición de escalón, *echelon lead time*, siendo de los pocos investigadores que tratan este tópico).

AXSÄTER (2000): capítulo 5 (pp. 115-174) (En este extenso capítulo se analizan sistemas adicionales de inventarios en cadenas de abastecimiento, incluyendo un amplio análisis del *MRP*, con los detalles técnicos que caracterizan este investigador).

SILVER *et al.* (1998): capítulo 12 (pp. 471-531) (Este capítulo complementa todo lo estudiado aquí, especialmente en aquellos casos de ambiente de manufactura. Da, además, una extensa bibliografía adicional para el tema).

NARASIMHAN *et al.* (1996): capítulo 8 (pp. 208-249) (Este capítulo recoge los principales aspectos de la administración de inventarios de distribución y presenta un caso real al final muy interesante en una fábrica de vidrio).

FOGARTY *et al.* (1994): capítulo 9 (pp. 351-381) (Este capítulo representa una lectura muy interesante para complementar lo expuesto aquí, especialmente para el sistema de control de distribución, *DRP*).

LAW y KELTON (1991): capítulo 1 (pp. 1-132) (La lectura de este capítulo brinda una excelente introducción a los modelos de simulación en general. Incluye, además, un ejemplo específico sobre simulación de inventarios que ilustra las principales de esta técnica en esta área).

APÉNDICE A

LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

(Fuente: Con base en Silver *et al.* (1998, pp. 719-724).

Tablas construidas por el autor de este texto.)

LA DISTRIBUCIÓN NORMAL UNITARIA Y SUS PROPIEDADES

La distribución normal es de suprema importancia en el control de inventarios ya que en la mayoría de las ocasiones constituye un buen modelo para representar las demandas y los errores del pronóstico. Las principales funciones de la distribución normal unitaria, y sus propiedades, son las siguientes:

$$\text{Función de densidad } f_z(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-k^2/2) \quad -\infty < k < +\infty \quad (\text{A1})$$

Probabilidad de que la variable z sea mayor o igual a un valor dado k :

$$p_z(k) = \text{Prob}(z \geq k) = \int_k^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx \quad (\text{A2})$$

Propiedades de $p_z(k)$:

$$p_z(-k) = 1 - p_z(k) \quad (\text{A3})$$

$$\frac{dp_z(k)}{dk} = -f_z(k) \quad (\text{A4})$$

Función $G_z(k)$:

$$G_z(k) = \int_k^{\infty} (x - k) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx \quad (\text{A5})$$

Propiedades de $G_z(k)$:

$$G_z(k) = f_z(k) - kp_z(k) \quad (\text{A6})$$

$$G_z(-k) = G_z(k) + k \quad (\text{A7})$$

$$\frac{dG_z(k)}{dk} = -p_z(k) \quad (\text{A8})$$

FUNCIONES EN EXCEL™ PARA LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Excel™ trae algunas funciones de la distribución normal muy útiles para el tema de inventarios. Ellas son las siguientes:

- Dado el valor de k , se pueden encontrar $f_z(k)$ y $P_1 = 1 - p_z(k)$, mediante las funciones $1/RAIZ(2*PI())*EXP(-k*k/2)$ y $DISTR.NORM.ESTAND(k)$, respectivamente. Debe tenerse cuidado, ya que esta última función da el valor de $P_1 = 1 - p_z(k)$, o sea que si se desea la función $p_z(k)$, se debe utilizar la fórmula $1 - DISTR.NORM.ESTAND(k)$. Para hallar $G_z(k)$, dado k , se aplica la Ec. (A6), o sea, $G_z(k) = f_z(k) - kp_z(k)$. Ejemplo:

Dado k	$f_z(k)$	$p_z(k)$	$P_1 = 1 - p_z(k)$	$G_z(k)$
1.96	0.05844	0.0250	0.9750	0.009445

$f_z(1.96) = 1/RAIZ(2*PI())*EXP(-1.96*1.96/2)$
 $p_z(1.96) = 1 - DISTR.NORM.ESTAND(1.96)$
 $1 - p_z(1.96) = DISTR.NORM.ESTAND(1.96)$
 $G_z(1.96) = 1/RAIZ(2*PI())*EXP(-1.96*1.96/2) - 1.96 * (1 - DISTR.NORM.ESTAND(1.96))$

- Dado el valor de $P_1 = 1 - p_z(k)$, se puede encontrar k , mediante la función $DISTR.NORM.ESTAND.INV(P_1)$. Equivalentemente, si se da el valor de $p_z(k)$, se puede encontrar k mediante la misma fun-

ción con signo negativo, o sea, $-DISTR.NORM.ESTAND.INV[p_z(k)]$. Ejemplo:

Dado $P_1 = 1 - p_z(k)$	k (Dado P_1)	Dado $p_z(k)$	k [Dado $p_z(k)$]
0.975	1.9600	0.025	1.9600

$k = DISTR.NORM.ESTAND.INV(0.975)$ $k = -DISTR.NORM.ESTAND.INV(0.025)$

3. Para hallar k dado $G_z(k)$, no existe aún una función inversa en *Excel*TM. Entonces debe utilizarse una aproximación con funciones racionales, de la siguiente forma:

$$k = \frac{\sum_{i=0}^3 a_i c^i}{\sum_{j=0}^4 b_j c^j}$$

Donde:

$$c = \sqrt{2 \ln \left[\frac{5}{G_z(k)} \right]}, \text{ dado } G_z(k)$$

Y las constantes a_i y b_j tienen los siguientes valores:

$$\begin{array}{ll} a_0 = -5,3925569 & b_0 = 1 \\ a_1 = 5,6211054 & b_1 = -0,72496485 \\ a_2 = -3,8836830 & b_2 = 0,507326622 \\ a_3 = 1,0897299 & b_3 = 0,0669136868 \\ & b_4 = -0,00329129114 \end{array}$$

Ejemplo:

Aproximación funcional de k dado $G_z(k)$:

a_0	a_1	a_2	a_3
-5.3925569	5.6211054	-3.883683	1.0897299

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
1	-0.72496485	0.507326622	0.0669136868	-0.00329129114

$$c = 3.541668446$$

$$\text{Dado } G_z(k) = 0.009445$$

$$\text{Se obtiene } k = 1.9600$$

$$c = \text{RAIZ}(2 * \ln(5/0.009445))$$

$$k = \frac{a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + a_3 c^3}{b_0 + b_1 c + b_2 c^2 + b_3 c^3 + b_4 c^4}$$

TABLAS DE LAS PRINCIPALES FUNCIONES DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL UNITARIA

k	$f_z(k)$	$p_z(k)$	$G_z(k)$	k
0.00	0.398942	0.500000	0.398942	0.00
0.01	0.398922	0.496011	0.393962	0.01
0.02	0.398862	0.492022	0.389022	0.02
0.03	0.398763	0.488034	0.384122	0.03
0.04	0.398623	0.484047	0.379261	0.04
0.05	0.398444	0.480061	0.374441	0.05
0.06	0.398225	0.476078	0.369660	0.06
0.07	0.397966	0.472097	0.364919	0.07
0.08	0.397668	0.468119	0.360218	0.08
0.09	0.397330	0.464144	0.355557	0.09
0.10	0.396953	0.460172	0.350935	0.10
0.11	0.396536	0.456205	0.346353	0.11
0.12	0.396080	0.452242	0.341811	0.12
0.13	0.395585	0.448283	0.337309	0.13
0.14	0.395052	0.444330	0.332846	0.14
0.15	0.394479	0.440382	0.328422	0.15
0.16	0.393868	0.436441	0.324038	0.16
0.17	0.393219	0.432505	0.319693	0.17
0.18	0.392531	0.428576	0.315388	0.18
0.19	0.391806	0.424655	0.311122	0.19
0.20	0.391043	0.420740	0.306895	0.20
0.21	0.390242	0.416834	0.302707	0.21
0.22	0.389404	0.412936	0.298558	0.22
0.23	0.388529	0.409046	0.294448	0.23
0.24	0.387617	0.405165	0.290377	0.24
0.25	0.386668	0.401294	0.286345	0.25
0.26	0.385683	0.397432	0.282351	0.26
0.27	0.384663	0.393580	0.278396	0.27
0.28	0.383606	0.389739	0.274479	0.28
0.29	0.382515	0.385908	0.270601	0.29
0.30	0.381388	0.382089	0.266761	0.30
0.31	0.380226	0.378280	0.262959	0.31
0.32	0.379031	0.374484	0.259196	0.32
0.33	0.377801	0.370700	0.255470	0.33
0.34	0.376537	0.366928	0.251782	0.34
0.35	0.375240	0.363169	0.248131	0.35
0.36	0.373911	0.359424	0.244518	0.36
0.37	0.372548	0.355691	0.240943	0.37
0.38	0.371154	0.351973	0.237404	0.38
0.39	0.369728	0.348268	0.233903	0.39
0.40	0.368270	0.344578	0.230439	0.40
0.41	0.366782	0.340903	0.227011	0.41
0.42	0.365263	0.337243	0.223621	0.42
0.43	0.363714	0.333598	0.220267	0.43
0.44	0.362135	0.329969	0.216949	0.44
0.45	0.360527	0.326355	0.213667	0.45
0.46	0.358890	0.322758	0.210422	0.46
0.47	0.357225	0.319178	0.207212	0.47
0.48	0.355533	0.315614	0.204038	0.48
0.49	0.353812	0.312067	0.200900	0.49
k	$f_z(k)$	$p_z(k)$	$G_z(k)$	k

k	$f_z(k)$	$p_z(k)$	$G_z(k)$	k
0.50	0.352065	0.308538	0.197797	0.50
0.51	0.350292	0.305026	0.194729	0.51
0.52	0.348493	0.301532	0.191696	0.52
0.53	0.346668	0.298056	0.188698	0.53
0.54	0.344818	0.294599	0.185735	0.54
0.55	0.342944	0.291160	0.182806	0.55
0.56	0.341046	0.287740	0.179912	0.56
0.57	0.339124	0.284339	0.177051	0.57
0.58	0.337180	0.280957	0.174225	0.58
0.59	0.335213	0.277595	0.171432	0.59
0.60	0.333225	0.274253	0.168673	0.60
0.61	0.331215	0.270931	0.165947	0.61
0.62	0.329184	0.267629	0.163254	0.62
0.63	0.327133	0.264347	0.160594	0.63
0.64	0.325062	0.261086	0.157967	0.64
0.65	0.322972	0.257846	0.155372	0.65
0.66	0.320864	0.254627	0.152810	0.66
0.67	0.318737	0.251429	0.150280	0.67
0.68	0.316593	0.248252	0.147781	0.68
0.69	0.314432	0.245097	0.145315	0.69
0.70	0.312254	0.241964	0.142879	0.70
0.71	0.310060	0.238852	0.140475	0.71
0.72	0.307851	0.235762	0.138102	0.72
0.73	0.305627	0.232695	0.135760	0.73
0.74	0.303389	0.229650	0.133448	0.74
0.75	0.301137	0.226627	0.131167	0.75
0.76	0.298872	0.223627	0.128916	0.76
0.77	0.296595	0.220650	0.126694	0.77
0.78	0.294305	0.217695	0.124503	0.78
0.79	0.292004	0.214764	0.122340	0.79
0.80	0.289692	0.211855	0.120207	0.80
0.81	0.287369	0.208970	0.118103	0.81
0.82	0.285036	0.206108	0.116028	0.82
0.83	0.282694	0.203269	0.113981	0.83
0.84	0.280344	0.200454	0.111962	0.84
0.85	0.277985	0.197663	0.109972	0.85
0.86	0.275618	0.194895	0.108009	0.86
0.87	0.273244	0.192150	0.106074	0.87
0.88	0.270864	0.189430	0.104166	0.88
0.89	0.268477	0.186733	0.102285	0.89
0.90	0.266085	0.184060	0.100431	0.90
0.91	0.263688	0.181411	0.098604	0.91
0.92	0.261286	0.178786	0.096803	0.92
0.93	0.258881	0.176186	0.095028	0.93
0.94	0.256471	0.173609	0.093279	0.94
0.95	0.254059	0.171056	0.091556	0.95
0.96	0.251644	0.168528	0.089858	0.96
0.97	0.249228	0.166023	0.088185	0.97
0.98	0.246809	0.163543	0.086537	0.98
0.99	0.244390	0.161087	0.084914	0.99
k	$f_z(k)$	$p_z(k)$	$G_z(k)$	k

k	$f_z(k)$	$p_z(k)$	$G_z(k)$	k
1.00	0.241971	0.158655	0.083315	1.00
1.01	0.239551	0.156248	0.081741	1.01
1.02	0.237132	0.153864	0.080190	1.02
1.03	0.234714	0.151505	0.078664	1.03
1.04	0.232297	0.149170	0.077160	1.04
1.05	0.229882	0.146859	0.075680	1.05
1.06	0.227470	0.144572	0.074223	1.06
1.07	0.225060	0.142310	0.072789	1.07
1.08	0.222653	0.140071	0.071377	1.08
1.09	0.220251	0.137857	0.069987	1.09
1.10	0.217852	0.135666	0.068620	1.10
1.11	0.215458	0.133500	0.067274	1.11
1.12	0.213069	0.131357	0.065949	1.12
1.13	0.210686	0.129238	0.064646	1.13
1.14	0.208308	0.127143	0.063365	1.14
1.15	0.205936	0.125072	0.062104	1.15
1.16	0.203571	0.123024	0.060863	1.16
1.17	0.201214	0.121000	0.059643	1.17
1.18	0.198863	0.119000	0.058443	1.18
1.19	0.196520	0.117023	0.057263	1.19
1.20	0.194186	0.115070	0.056102	1.20
1.21	0.191860	0.113139	0.054961	1.21
1.22	0.189543	0.111232	0.053840	1.22
1.23	0.187235	0.109349	0.052737	1.23
1.24	0.184937	0.107488	0.051653	1.24
1.25	0.182649	0.105650	0.050587	1.25
1.26	0.180371	0.103835	0.049539	1.26
1.27	0.178104	0.102042	0.048510	1.27
1.28	0.175847	0.100273	0.047499	1.28
1.29	0.173602	0.098525	0.046505	1.29
1.30	0.171369	0.096800	0.045528	1.30
1.31	0.169147	0.095098	0.044568	1.31
1.32	0.166937	0.093418	0.043626	1.32
1.33	0.164740	0.091759	0.042700	1.33
1.34	0.162555	0.090123	0.041791	1.34
1.35	0.160383	0.088508	0.040898	1.35
1.36	0.158225	0.086915	0.040020	1.36
1.37	0.156080	0.085343	0.039159	1.37
1.38	0.153948	0.083793	0.038314	1.38
1.39	0.151831	0.082264	0.037483	1.39
1.40	0.149727	0.080757	0.036668	1.40
1.41	0.147639	0.079270	0.035868	1.41
1.42	0.145564	0.077804	0.035083	1.42
1.43	0.143505	0.076359	0.034312	1.43
1.44	0.141460	0.074934	0.033555	1.44
1.45	0.139431	0.073529	0.032813	1.45
1.46	0.137417	0.072145	0.032085	1.46
1.47	0.135418	0.070781	0.031370	1.47
1.48	0.133435	0.069437	0.030669	1.48
1.49	0.131468	0.068112	0.029981	1.49

k	$f_z(k)$	$p_z(k)$	$G_z(k)$	k
1.50	0.129518	0.066807	0.029307	1.50
1.51	0.127583	0.065522	0.028645	1.51
1.52	0.125665	0.064255	0.027996	1.52
1.53	0.123763	0.063008	0.027360	1.53
1.54	0.121878	0.061780	0.026736	1.54
1.55	0.120009	0.060571	0.026124	1.55
1.56	0.118157	0.059380	0.025525	1.56
1.57	0.116323	0.058208	0.024937	1.57
1.58	0.114505	0.057053	0.024360	1.58
1.59	0.112704	0.055917	0.023796	1.59
1.60	0.110921	0.054799	0.023242	1.60
1.61	0.109155	0.053699	0.022699	1.61
1.62	0.107406	0.052616	0.022168	1.62
1.63	0.105675	0.051551	0.021647	1.63
1.64	0.103961	0.050503	0.021137	1.64
1.65	0.102265	0.049471	0.020637	1.65
1.66	0.100586	0.048457	0.020147	1.66
1.67	0.098925	0.047460	0.019668	1.67
1.68	0.097282	0.046479	0.019198	1.68
1.69	0.095657	0.045514	0.018738	1.69
1.70	0.094049	0.044565	0.018288	1.70
1.71	0.092459	0.043633	0.017847	1.71
1.72	0.090887	0.042716	0.017415	1.72
1.73	0.089333	0.041815	0.016992	1.73
1.74	0.087796	0.040930	0.016579	1.74
1.75	0.086277	0.040059	0.016174	1.75
1.76	0.084776	0.039204	0.015777	1.76
1.77	0.083293	0.038364	0.015390	1.77
1.78	0.081828	0.037538	0.015010	1.78
1.79	0.080380	0.036727	0.014639	1.79
1.80	0.078950	0.035930	0.014276	1.80
1.81	0.077538	0.035148	0.013920	1.81
1.82	0.076143	0.034380	0.013573	1.82
1.83	0.074766	0.033625	0.013233	1.83
1.84	0.073407	0.032884	0.012900	1.84
1.85	0.072065	0.032157	0.012575	1.85
1.86	0.070740	0.031443	0.012257	1.86
1.87	0.069433	0.030742	0.011946	1.87
1.88	0.068144	0.030054	0.011642	1.88
1.89	0.066871	0.029379	0.011345	1.89
1.90	0.065616	0.028717	0.011054	1.90
1.91	0.064378	0.028067	0.010770	1.91
1.92	0.063157	0.027429	0.010493	1.92
1.93	0.061952	0.026803	0.010222	1.93
1.94	0.060765	0.026190	0.009957	1.94
1.95	0.059595	0.025588	0.009698	1.95
1.96	0.058441	0.024998	0.009445	1.96
1.97	0.057304	0.024419	0.009198	1.97
1.98	0.056183	0.023852	0.008957	1.98
1.99	0.055079	0.023295	0.008721	1.99

k	$f_z(k)$	$p_z(k)$	$G_z(k)$	k
2.00	0.053991	0.022750	0.008491	2.00
2.01	0.052919	0.022216	0.008266	2.01
2.02	0.051864	0.021692	0.008046	2.02
2.03	0.050824	0.021178	0.007832	2.03
2.04	0.049800	0.020675	0.007623	2.04
2.05	0.048792	0.020182	0.007418	2.05
2.06	0.047800	0.019699	0.007219	2.06
2.07	0.046823	0.019226	0.007024	2.07
2.08	0.045861	0.018763	0.006835	2.08
2.09	0.044915	0.018309	0.006649	2.09
2.10	0.043984	0.017864	0.006468	2.10
2.11	0.043067	0.017429	0.006292	2.11
2.12	0.042166	0.017003	0.006120	2.12
2.13	0.041280	0.016586	0.005952	2.13
2.14	0.040408	0.016177	0.005788	2.14
2.15	0.039550	0.015778	0.005628	2.15
2.16	0.038707	0.015386	0.005472	2.16
2.17	0.037878	0.015003	0.005320	2.17
2.18	0.037063	0.014629	0.005172	2.18
2.19	0.036262	0.014262	0.005028	2.19
2.20	0.035475	0.013903	0.004887	2.20
2.21	0.034701	0.013553	0.004750	2.21
2.22	0.033941	0.013209	0.004616	2.22
2.23	0.033194	0.012874	0.004486	2.23
2.24	0.032460	0.012545	0.004358	2.24
2.25	0.031740	0.012224	0.004235	2.25
2.26	0.031032	0.011911	0.004114	2.26
2.27	0.030337	0.011604	0.003996	2.27
2.28	0.029655	0.011304	0.003882	2.28
2.29	0.028985	0.011011	0.003770	2.29
2.30	0.028327	0.010724	0.003662	2.30
2.31	0.027682	0.010444	0.003556	2.31
2.32	0.027048	0.010170	0.003453	2.32
2.33	0.026426	0.009903	0.003352	2.33
2.34	0.025817	0.009642	0.003255	2.34
2.35	0.025218	0.009387	0.003159	2.35
2.36	0.024631	0.009137	0.003067	2.36
2.37	0.024056	0.008894	0.002977	2.37
2.38	0.023491	0.008656	0.002889	2.38
2.39	0.022937	0.008424	0.002804	2.39
2.40	0.022395	0.008198	0.002720	2.40
2.41	0.021862	0.007976	0.002640	2.41
2.42	0.021341	0.007760	0.002561	2.42
2.43	0.020829	0.007549	0.002484	2.43
2.44	0.020328	0.007344	0.002410	2.44
2.45	0.019837	0.007143	0.002337	2.45
2.46	0.019356	0.006947	0.002267	2.46
2.47	0.018885	0.006756	0.002199	2.47
2.48	0.018423	0.006569	0.002132	2.48
2.49	0.017971	0.006387	0.002067	2.49
k	$f_z(k)$	$p_z(k)$	$G_z(k)$	k

k	$f_z(k)$	$p_z(k)$	$G_z(k)$	k
2.50	0.017528	0.006210	0.002004	2.50
2.51	0.017095	0.006037	0.001943	2.51
2.52	0.016670	0.005868	0.001883	2.52
2.53	0.016254	0.005703	0.001826	2.53
2.54	0.015848	0.005543	0.001769	2.54
2.55	0.015449	0.005386	0.001715	2.55
2.56	0.015060	0.005234	0.001662	2.56
2.57	0.014678	0.005085	0.001610	2.57
2.58	0.014305	0.004940	0.001560	2.58
2.59	0.013940	0.004799	0.001511	2.59
2.60	0.013583	0.004661	0.001464	2.60
2.61	0.013234	0.004527	0.001418	2.61
2.62	0.012892	0.004396	0.001373	2.62
2.63	0.012558	0.004269	0.001330	2.63
2.64	0.012232	0.004145	0.001288	2.64
2.65	0.011912	0.004025	0.001247	2.65
2.66	0.011600	0.003907	0.001207	2.66
2.67	0.011295	0.003793	0.001169	2.67
2.68	0.010997	0.003681	0.001132	2.68
2.69	0.010706	0.003573	0.001095	2.69
2.70	0.010421	0.003467	0.001060	2.70
2.71	0.010143	0.003364	0.001026	2.71
2.72	0.009871	0.003264	0.000993	2.72
2.73	0.009606	0.003167	0.000961	2.73
2.74	0.009347	0.003072	0.000929	2.74
2.75	0.009094	0.002980	0.000899	2.75
2.76	0.008846	0.002890	0.000870	2.76
2.77	0.008605	0.002803	0.000841	2.77
2.78	0.008370	0.002718	0.000814	2.78
2.79	0.008140	0.002635	0.000787	2.79
2.80	0.007915	0.002555	0.000761	2.80
2.81	0.007697	0.002477	0.000736	2.81
2.82	0.007483	0.002401	0.000712	2.82
2.83	0.007274	0.002327	0.000688	2.83
2.84	0.007071	0.002256	0.000665	2.84
2.85	0.006873	0.002186	0.000643	2.85
2.86	0.006679	0.002118	0.000621	2.86
2.87	0.006491	0.002052	0.000600	2.87
2.88	0.006307	0.001988	0.000580	2.88
2.89	0.006127	0.001926	0.000561	2.89
2.90	0.005953	0.001866	0.000542	2.90
2.91	0.005782	0.001807	0.000523	2.91
2.92	0.005616	0.001750	0.000506	2.92
2.93	0.005454	0.001695	0.000488	2.93
2.94	0.005296	0.001641	0.000472	2.94
2.95	0.005143	0.001589	0.000455	2.95
2.96	0.004993	0.001538	0.000440	2.96
2.97	0.004847	0.001489	0.000425	2.97
2.98	0.004705	0.001441	0.000410	2.98
2.99	0.004567	0.001395	0.000396	2.99
k	$f_z(k)$	$p_z(k)$	$G_z(k)$	k

k	$f_z(k)$	$p_z(k)$	$G_z(k)$	k
3.00	0.004432	0.001350	0.000382	3.00
3.01	0.004301	0.001306	0.000369	3.01
3.02	0.004173	0.001264	0.000356	3.02
3.03	0.004049	0.001223	0.000344	3.03
3.04	0.003928	0.001183	0.000332	3.04
3.05	0.003810	0.001144	0.000320	3.05
3.06	0.003695	0.001107	0.000309	3.06
3.07	0.003584	0.001070	0.000298	3.07
3.08	0.003475	0.001035	0.000287	3.08
3.09	0.003370	0.001001	0.000277	3.09
3.10	0.003267	0.000968	0.000267	3.10
3.11	0.003167	0.000935	0.000258	3.11
3.12	0.003070	0.000904	0.000249	3.12
3.13	0.002975	0.000874	0.000240	3.13
3.14	0.002884	0.000845	0.000231	3.14
3.15	0.002794	0.000816	0.000223	3.15
3.16	0.002707	0.000789	0.000215	3.16
3.17	0.002623	0.000762	0.000207	3.17
3.18	0.002541	0.000736	0.000199	3.18
3.19	0.002461	0.000711	0.000192	3.19
3.20	0.002384	0.000687	0.000185	3.20
3.21	0.002309	0.000664	0.000178	3.21
3.22	0.002236	0.000641	0.000172	3.22
3.23	0.002165	0.000619	0.000166	3.23
3.24	0.002096	0.000598	0.000160	3.24
3.25	0.002029	0.000577	0.000154	3.25
3.26	0.001964	0.000557	0.000148	3.26
3.27	0.001901	0.000538	0.000143	3.27
3.28	0.001840	0.000519	0.000137	3.28
3.29	0.001780	0.000501	0.000132	3.29
3.30	0.001723	0.000483	0.000127	3.30
3.31	0.001667	0.000466	0.000123	3.31
3.32	0.001612	0.000450	0.000118	3.32
3.33	0.001560	0.000434	0.000114	3.33
3.34	0.001508	0.000419	0.000109	3.34
3.35	0.001459	0.000404	0.000105	3.35
3.36	0.001411	0.000390	0.000101	3.36
3.37	0.001364	0.000376	0.000097	3.37
3.38	0.001319	0.000362	0.000094	3.38
3.39	0.001275	0.000349	0.000090	3.39
3.40	0.001232	0.000337	0.000087	3.40
3.41	0.001191	0.000325	0.000083	3.41
3.42	0.001151	0.000313	0.000080	3.42
3.43	0.001112	0.000302	0.000077	3.43
3.44	0.001075	0.000291	0.000074	3.44
3.45	0.001038	0.000280	0.000071	3.45
3.46	0.001003	0.000270	0.000069	3.46
3.47	0.000969	0.000260	0.000066	3.47
3.48	0.000936	0.000251	0.000063	3.48
3.49	0.000904	0.000242	0.000061	3.49
k	$f_z(k)$	$p_z(k)$	$G_z(k)$	k

k	$f_z(k)$	$p_z(k)$	$G_z(k)$	k
3.50	0.000873	0.000233	0.000058	3.50
3.51	0.000843	0.000224	0.000056	3.51
3.52	0.000814	0.000216	0.000054	3.52
3.53	0.000785	0.000208	0.000052	3.53
3.54	0.000758	0.000200	0.000050	3.54
3.55	0.000732	0.000193	0.000048	3.55
3.56	0.000706	0.000185	0.000046	3.56
3.57	0.000681	0.000178	0.000044	3.57
3.58	0.000657	0.000172	0.000042	3.58
3.59	0.000634	0.000165	0.000041	3.59
3.60	0.000612	0.000159	0.000039	3.60
3.61	0.000590	0.000153	0.000038	3.61
3.62	0.000569	0.000147	0.000036	3.62
3.63	0.000549	0.000142	0.000035	3.63
3.64	0.000529	0.000136	0.000033	3.64
3.65	0.000510	0.000131	0.000032	3.65
3.66	0.000492	0.000126	0.000031	3.66
3.67	0.000474	0.000121	0.000029	3.67
3.68	0.000457	0.000117	0.000028	3.68
3.69	0.000441	0.000112	0.000027	3.69
3.70	0.000425	0.000108	0.000026	3.70
3.71	0.000409	0.000104	0.000025	3.71
3.72	0.000394	0.000100	0.000024	3.72
3.73	0.000380	0.000096	0.000023	3.73
3.74	0.000366	0.000092	0.000022	3.74
3.75	0.000353	0.000088	0.000021	3.75
3.76	0.000340	0.000085	0.000020	3.76
3.77	0.000327	0.000082	0.000019	3.77
3.78	0.000315	0.000078	0.000019	3.78
3.79	0.000303	0.000075	0.000018	3.79
3.80	0.000292	0.000072	0.000017	3.80
3.81	0.000281	0.000069	0.000016	3.81
3.82	0.000271	0.000067	0.000016	3.82
3.83	0.000260	0.000064	0.000015	3.83
3.84	0.000251	0.000062	0.000014	3.84
3.85	0.000241	0.000059	0.000014	3.85
3.86	0.000232	0.000057	0.000013	3.86
3.87	0.000223	0.000054	0.000013	3.87
3.88	0.000215	0.000052	0.000012	3.88
3.89	0.000207	0.000050	0.000012	3.89
3.90	0.000199	0.000048	0.000011	3.90
3.91	0.000191	0.000046	0.000011	3.91
3.92	0.000184	0.000044	0.000010	3.92
3.93	0.000177	0.000042	0.000010	3.93
3.94	0.000170	0.000041	0.000009	3.94
3.95	0.000163	0.000039	0.000009	3.95
3.96	0.000157	0.000037	0.000009	3.96
3.97	0.000151	0.000036	0.000008	3.97
3.98	0.000145	0.000034	0.000008	3.98
3.99	0.000139	0.000033	0.000007	3.99
k	$f_z(k)$	$p_z(k)$	$G_z(k)$	k

APÉNDICE B

RESUMEN SOBRE PRONÓSTICOS DE DEMANDA

Tema	Principales aplicaciones	Observaciones
Clasificación ABC	<ul style="list-style-type: none">Identificación de ítems clase A (mayor concentración de esfuerzo de administración y control)Identificación de ítems obsoletos (últimos ítems clase C), factibles de eliminar del sistema	Si existen demasiados ítems, es probable incluir otras clasificaciones como AA y AAA (los ítems más importantes de todos) y D (los últimos ítems clase C). Los ítems nuevos deberían tener otra clasificación, por ejemplo N inicialmente, y luego deben reclasificarse.
Factores de importancia para el diseño de sistemas de control de inventarios	<ul style="list-style-type: none">Valor de cada ítem vTasa de costo de mantenimiento del inventario rCosto de alistamiento u ordenamiento ACosto de faltantes de inventario (B_1, B_2 o B_3)Tiempo de reposición o <i>Lead Time L</i>Tipo y patrón de demanda	<p>Los principales patrones de demanda son los siguientes:</p> <ul style="list-style-type: none">• Perpetua, uniforme o estacionaria (se mantiene el promedio a lo largo del tiempo)• Con tendencia (creciente o decreciente)• Estacional• Errática• Combinada

Tema	Principales aplicaciones	Observaciones
Tipos de sistemas de pronósticos	<ul style="list-style-type: none"> • Cualitativos • Series de tiempo (estadísticos) • Causales • Simulación • Sistemas combinados 	Se recomienda, en cuanto sea posible, utilizar una combinación de sistemas de pronósticos, siendo la más común la de series de tiempo con sistemas cualitativos (como el análisis de promociones)
Ambiente general de un sistema de pronósticos	<ul style="list-style-type: none"> • Los pronósticos “siempre” estarán errados. • Por lo tanto, es importante sacar el máximo provecho de los errores del pronóstico, a través de la intervención humana. • Es primordial distinguir entre los <i>pronósticos estadísticos</i> que siguen la “tendencia” de la demanda, y los verdaderos <i>pronósticos de “demanda”</i> que estiman los límites de las demandas futuras con cierto nivel de confianza especificado por el usuario. 	Es fundamental utilizar un sistema de pronósticos acorde con el patrón de demanda. Es un error muy común en la práctica, por ejemplo, aplicar un sistema de pronósticos de promedio móvil simple a un patrón de demanda creciente o decreciente.
Elementos de tiempo de un sistema de pronósticos	<ul style="list-style-type: none"> • El período base del pronóstico • El horizonte del pronóstico • El intervalo del pronóstico 	Normalmente, la actualización del pronóstico (intervalo) coincide con el período base del mismo
Fuentes de imprecisión de los pronósticos	<ul style="list-style-type: none"> • Datos poco confiables • Utilización de datos de ventas en lugar de demanda • Sesgos (modelo equivocado para el patrón de demanda o demasiada influencia subjetiva en el pronóstico) • Poca velocidad de respuesta al cambio (valor alto de N en promedio móvil, o valor bajo de la constante de suavización α en suavización exponencial simple y doble) • Comportamiento de los proveedores (o del sistema de producción) • Selección del período base del pronóstico • La negación de los sistemas de pronósticos y la resistencia al cambio de las personas • La falta de información de hechos importantes para el pronóstico, como en el caso de promociones y campañas de ventas • El efecto látigo en cadenas de abastecimiento 	<ul style="list-style-type: none"> • Se sugiere analizar a fondo cada posible fuente de imprecisión del sistema de pronósticos y tratar de eliminarla o minimizarla.

Tema	Principales aplicaciones	Observaciones
Formas de medir los errores del pronóstico para “un solo período”	<ul style="list-style-type: none"> • Error del pronóstico = Demanda real – Pronóstico de demanda (generalmente, hecho un período antes) • Error absoluto = Valor absoluto del error del pronóstico • Error cuadrático = Cuadrado del error del pronóstico • Error porcentual (1) = Valor absoluto de (Error del pronóstico / Demanda) • Error porcentual (2) = Valor absoluto de (Error del pronóstico / Pronóstico) 	Se debe ser cuidadoso en los casos de demandas erráticas o de promedios de demanda cercanos a cero con la medida porcentual del error de pronóstico, por posible inestabilidad numérica, ya que se estaría dividiendo por valores cercanos a cero.
Formas de medir los errores del pronóstico en forma “agregada”	<ul style="list-style-type: none"> • <i>MAD</i> = Desviación absoluta media (<i>Mean Absolute Deviation</i>) = Promedio de los errores absolutos sobre un número de períodos definido por el usuario • <i>ECM</i> = Error cuadrático medio (<i>Mean Square Error</i>) = Promedio de los errores cuadráticos sobre un número de períodos definido por el usuario • <i>MAPE</i> = Desviación absoluta porcentual media (<i>Mean Absolute Percentage Error</i>) = Promedio de los errores porcentuales sobre un número de períodos definido por el usuario (pueden ser referidos a la demanda observada o al pronóstico) 	<ul style="list-style-type: none"> • Se sugiere tomar, al menos, el 40% de la historia para calcular la <i>MAD</i> o el <i>ECM</i>. • Un sistema de pronósticos se comporta mejor entre menor sea la <i>MAD</i>, el <i>ECM</i> o la <i>MAPE</i> (se puede utilizar uno u otro. Sin embargo, se sugiere utilizar el <i>ECM</i>, a menos que la normalidad de los errores del pronóstico esté garantizada). • La <i>MAPE</i> es muy utilizada en la industria por los planeadores de demanda.

Tema	Principales aplicaciones	Observaciones
Selección del sistema de pronósticos y simulación de pronósticos	<ul style="list-style-type: none"> Si se dispone de suficientes datos de demanda, la historia se divide en dos partes: una se usa para <i>inicializar</i> el sistema de pronósticos, y la otra, para <i>simular</i> los pronósticos y observar cuál hubiera sido su comportamiento si dicho sistema se hubiere implementado en ese momento. Esto es válido para cualquier sistema de pronósticos que se utilice. A continuación se debe encontrar el valor o valores óptimos de los parámetros del sistema de pronósticos (por ejemplo, el N_{opt} en promedio móvil y el α_{opt} en suavización exponencial). Una vez se seleccione el sistema de pronósticos, se puede utilizar en tiempo real y se le debe hacer un seguimiento continuo para la posible re-optimización de parámetros y/o el cambio de modelo si la demanda cambia su patrón de comportamiento. 	Se sugiere utilizar el 60% de la historia para inicializar el pronóstico, y el 40% restante para simular. Por ejemplo, si se dispone de tres años de demanda mensual, entonces se pueden tomar $0,6 \times 36 = 22$ datos mensuales para inicialización y 14 datos mensuales para simulación.
Sistema de pronósticos de promedio móvil	<ul style="list-style-type: none"> Aplicable a patrones de <i>demandas perpetua o uniforme</i> El pronóstico estadístico se calcula como el promedio de los últimos N datos de demanda Entre más pequeño sea N, el sistema responde más rápidamente a posibles cambios de demanda, pero el error del pronóstico puede aumentar. 	Se recomienda hallar el N óptimo para cada ítem, variando N entre 6 y 20 períodos.
Sistema de pronósticos de suavización exponencial simple	<ul style="list-style-type: none"> Aplicable a patrones de <i>demandas perpetua o uniforme</i> El pronóstico estadístico se calcula como α veces la demanda del último período + $(1 - \alpha)$ veces el pronóstico del período anterior Entre mayor sea α, el sistema responde más rápidamente a posibles cambios de demanda, pero el error del pronóstico puede aumentar. 	Se recomienda hallar el α óptimo para cada ítem, variando α entre 0,01 y 0,30.

Tema	Principales aplicaciones	Observaciones
Sistema de pronósticos de suavización exponencial doble	<ul style="list-style-type: none"> Aplicable a patrones de <i>demandas con tendencia</i> (creciente o decreciente) El pronóstico estadístico se calcula con base en dos parámetros inicialmente estimados por medio de regresión lineal Entre mayor sea α, el sistema responde más rápidamente a posibles cambios de demanda, pero el error del pronóstico puede aumentar. 	<ul style="list-style-type: none"> Se recomienda hallar el α óptimo para cada ítem, variando α entre 0,01 y 0,30. En algunos textos este método se presenta con dos constantes de suavización, lo que lo hace un poco más complejo de manejar.
Sistema de pronósticos de Winters (Multiplicativo o aditivo)	<ul style="list-style-type: none"> Aplicable a patrones de <i>demandas estacionales</i> con o sin tendencia El pronóstico estadístico se calcula con base en tres parámetros inicialmente estimados a partir de datos históricos En este caso, el sistema utiliza tres constantes de suavización, α, β y γ. 	Las tres constantes de suavización pueden variar entre 0 y 1. Si se va a utilizar el <i>solver</i> de Excel™ para hallar los valores óptimos de estas constantes, deben probarse varios puntos de partida para tratar de determinar el óptimo global.
Sistema de pronósticos de Croston	<ul style="list-style-type: none"> Aplicable a patrones de <i>demandas erráticas o intermitentes</i> El pronóstico estadístico se calcula con base en la estimación del valor esperado del número de períodos entre ocurrencias de demanda y el valor suavizado de los picos de demanda En este caso el sistema utiliza una constante de suavización, α. 	Se recomienda hallar el α óptimo para cada ítem con demanda errática, variando α entre 0 y 1. Este método puede funcionar mejor que los demás métodos para demandas erráticas e intermitentes.
Sistema de pronósticos Arima	<ul style="list-style-type: none"> Aplicables a <i>demandas altamente correlacionadas</i> 	Puede explotar correlaciones entre demandas, si éstas existen, para mejorar los pronósticos. Su desventaja radica en el gran número de datos necesarios y en la necesidad de utilizar <i>software</i> especializado para su implementación.

Tema	Principales aplicaciones	Observaciones
Métodos de pronósticos auto-adaptivos	<ul style="list-style-type: none"> Aplicables a demandas con tendencia cambiante o con cambios bruscos de tendencia En cada período se modifica la constante de suavización α, haciéndola igual a la señal de rastreo, lo cual puede hacer al pronóstico más responsivo. Pueden existir diferentes versiones de estos sistemas (ver “Señales de rastreo” más adelante) 	No han demostrado ser superiores a los métodos tradicionales donde se mantiene el valor de la constante de suavización α estable durante cierto número de períodos y luego se re-optimiza.
Combinaciones de pronósticos	Se ha encontrado que la combinación de pronósticos, con base en, por ejemplo, el promedio simple de varios pronósticos obtenidos de diversos sistemas adecuados para el caso bajo estudio, se comporta mejor que cada uno de los sistemas en forma individual. Es una alternativa viable y muy poderosa.	Se pueden explorar diversos tipos de combinación, como la combinación lineal convexa. Los parámetros de cada método que se combine ya deberían ser los óptimos.
Pronósticos de demanda de ítems nuevos	Este es uno de los temas más complejos. El sistema de <i>promedio móvil progresivo</i> , el cual asume demanda de Poisson, se comporta satisfactoriamente en el caso de medicamentos nuevos (ver capítulo 3).	Dentro de los ítems nuevos se clasifican los <i>productos de corto ciclo de vida y las promociones</i> .
Cálculo de inventarios de seguridad (IS)	<ul style="list-style-type: none"> Dependen del sistema de control de inventarios utilizado (continuo o periódico). Se pueden calcular mediante las siguientes expresiones (tiempo de reposición constante): $IS = k\sigma_L = k\sigma_1\sqrt{L} \quad [\text{Sistema } (s, Q)]$ $IS = k\sigma_{R+L} = k\sigma_1\sqrt{R + L} \quad [\text{Sistema } (R, S)]$ 	<ul style="list-style-type: none"> Si el tiempo de reposición es aleatorio, deben utilizarse otras expresiones (ver capítulo 5). Para la suavización exponencial doble se cuenta con una fórmula más precisa para estimar a σ_L, la cual depende de α (ver “pronósticos acumulados” más adelante).

Tema	Principales aplicaciones	Observaciones																					
Estimación de la desviación estándar e intervalos de confianza para la demanda	<ul style="list-style-type: none"> La desviación estándar de los errores del pronóstico puede estimarse a partir de la <i>MAD</i> o del <i>ECM</i>, a través de las siguientes expresiones: $\sigma_1 = 1.2533 \times MAD \text{ (Asume normalidad)}$ $\sigma_1 = \sqrt{ECM} \text{ (Cualquier distribución)}$ Se puede generar un intervalo de confianza de la demanda a través de la expresión: $\text{Intervalo} = (d \times L) \pm k\sigma_1\sqrt{L},$ <p>donde:</p> <p><i>d</i> = Pronóstico estadístico de demanda periódica</p> <p><i>L</i> = Número de períodos para los cuales se desea generar el intervalo de confianza</p> <p><i>k</i> = Factor de seguridad que depende del nivel de confianza con que se deseé el intervalo</p> El intervalo de confianza se puede definir como el <i>pronóstico de demanda</i> y puede utilizarse para planeación. 	<ul style="list-style-type: none"> Los valores de <i>k</i> pueden escogerse de acuerdo con la distribución normal, a saber (recuerde que debe tener en cuenta si el intervalo de confianza es de dos o de un solo lado): <table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="884 522 974 577"><u>Nivel de confianza (%)</u></th><th data-bbox="974 522 1013 577"><u><i>k</i></u></th><th data-bbox="1013 522 1051 577"></th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="1013 577 1051 600">90,0</td><td data-bbox="1051 577 1090 600">1,28</td><td data-bbox="1090 577 1129 600"></td></tr> <tr> <td data-bbox="1013 600 1051 624">95,0</td><td data-bbox="1051 600 1090 624">1,65</td><td data-bbox="1090 600 1129 624"></td></tr> <tr> <td data-bbox="1013 624 1051 647">97,5</td><td data-bbox="1051 624 1090 647">1,96</td><td data-bbox="1090 624 1129 647"></td></tr> <tr> <td data-bbox="1013 647 1051 671">99,0</td><td data-bbox="1051 647 1090 671">2,33</td><td data-bbox="1090 647 1129 671"></td></tr> <tr> <td data-bbox="1013 671 1051 695">99,5</td><td data-bbox="1051 671 1090 695">2,58</td><td data-bbox="1090 671 1129 695"></td></tr> <tr> <td data-bbox="1013 695 1051 718">99,9</td><td data-bbox="1051 695 1090 718">3,10</td><td data-bbox="1090 695 1129 718"></td></tr> </tbody> </table> <ul style="list-style-type: none"> No se recomiendan valores de <i>k</i> inferiores a 1,65. Este factor puede variar de un ítem a otro. 	<u>Nivel de confianza (%)</u>	<u><i>k</i></u>		90,0	1,28		95,0	1,65		97,5	1,96		99,0	2,33		99,5	2,58		99,9	3,10	
<u>Nivel de confianza (%)</u>	<u><i>k</i></u>																						
90,0	1,28																						
95,0	1,65																						
97,5	1,96																						
99,0	2,33																						
99,5	2,58																						
99,9	3,10																						
Errores suavizados y señales de rastreo	<ul style="list-style-type: none"> Otra forma de estimar el error del pronóstico, la <i>MAD</i> y el <i>ECM</i>, es a través de los errores suavizados, los cuales se actualizan en cada intervalo del pronóstico. Así, se puede estimar la desviación estándar dinámicamente. La señal de rastreo lo permite al usuario identificar cuándo el sistema de pronósticos está fallando y así establecer los correctivos del caso (reoptimización o redefinición de la constante de suavización α). Cuando <i>dos o más señales de rastreo</i> sucesivas sobrepasan un valor límite establecido por el usuario (0,4 – 0,6), entonces debe re-optimizarse o aumentarse el valor de α (ver capítulo 3). 	<ul style="list-style-type: none"> Es necesario estimar valores de inicio de los errores suavizados, principalmente a través de regresión lineal. En los métodos auto-adaptivos, la señal de rastreo se hace igual a la constante de suavización α en cada período. Pueden existir otras formas de definir la constante de suavización en cada período. 																					

Tema	Principales aplicaciones	Observaciones
Control de datos atípicos (<i>Outliers</i>)	<ul style="list-style-type: none"> • Un dato atípico de demanda (<i>outlier</i>) se presenta cuando ésta es extremadamente grande o extremadamente pequeña comparada con su promedio histórico. • No es fácil identificar un dato atípico de demanda, ya que debe definirse qué es “extremadamente grande o pequeño”. Existe, sin embargo, un método estadístico para hacerlo, bien sea si el <i>outlier</i> aparece en los datos de inicialización del pronóstico o en el pronóstico que se hace en tiempo real (ver wcapítulo 3). 	<ul style="list-style-type: none"> • Cuando se identifica un dato atípico, no debería considerarse para el pronóstico, luego debería reemplazarse, por ejemplo, por el promedio histórico de demanda que venía presentándose. • Los <i>outliers</i> no deben borrarse automáticamente, ya que podrían representar verdaderos cambios de tendencia de demanda. Deben analizarse a fondo en forma individual.
Pronósticos acumulados	<ul style="list-style-type: none"> • Cuando se requiere estimar la demanda para L períodos adelante, deberían utilizarse las fórmulas de pronósticos acumulados (ver problema No. 3 de los ejercicios 3.6, capítulo 3). • La desviación estándar de los pronósticos acumulados aumenta a medida que el horizonte del pronóstico aumenta y para valores de α grandes (cercaos a 0,30). Recuerde que los pronósticos para horizontes de tiempo largos siempre presentan una mayor variabilidad. • Para valores de α pequeños (menores o iguales que 0,1), la fórmula del pronóstico acumulado es equivalente a la fórmula presentada arriba para la estimación del intervalo de confianza de la demanda. • Es recomendable actualizar dinámicamente los pronósticos acumulados a medida que se van conociendo nuevos datos de demanda. 	<ul style="list-style-type: none"> • Las fórmulas que se presentan en el texto son válidas para sistemas de pronósticos de suavización exponencial doble. • Para promedio móvil y suavización simple, el pronóstico para cualquier período adelante es igual al pronóstico para un período adelante y, por lo tanto, el pronóstico acumulado es el producto de éste por el número de períodos que se quiera pronosticar. Esto es válido debido al patrón de demanda estable subyacente.

<i>Tema</i>	<i>Principales aplicaciones</i>	<i>Observaciones</i>
Comentarios adicionales	<ul style="list-style-type: none"> • Se puede utilizar un modelo de mayor nivel, como el método multiplicativo de Winters para un patrón de demanda de menor nivel, por ejemplo un patrón de demanda estable, ya que el modelo subyacente del primer método es más general e incluye al modelo subyacente del segundo método como un caso particular. Sin embargo, de ser posible, se recomienda utilizar el sistema de pronósticos preciso que mejor se adapte al patrón de demanda, ya que se ha encontrado que tiene un mejor desempeño. • Para el caso de demanda combinada, por ejemplo, estable para unos períodos y estacional para otros, se recomienda utilizar dos sistemas de pronósticos de demanda independiente, adaptados a su patrón de demanda respectivo. • El intervalo de confianza de la demanda puede determinarse en cada período T en forma dinámica, con base en los errores suavizados. En este caso se podría utilizar la fórmula: $\text{Intervalo}(T) = (d \times L) \pm k \sqrt{ECMS(T)} \sqrt{L},$ <p>donde $ECMS(T)$ es el error cuadrático medio suavizado correspondiente al período T. Recuerde que k debe seleccionarse adecuadamente teniendo en cuenta que se trata de un intervalo de confianza de dos lados.</p>	Si el patrón combina demanda estable con picos periódicos (por ejemplo, un pico estacional que sólo ocurre en el mes de diciembre), se pueden independizar los dos patrones y utilizar suavización exponencial doble para cada uno de ellos. Esto podría utilizarse también para el pronóstico de promociones, aunque ellas no ocurran en forma estrictamente estacional.

PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA

BIBLIOGRAFÍA

- AGATZ, N.A.H., M. FLEISCHMANN & J.A.E.E. van NUNEN (2008). “E-fulfillment and multi-channel distribution – A review”. *European Journal of Operational Research*, 187(2), 339-356.
- ARSHINDER, A.K. & S.G. DESHMUKH (2008). “Supply chain coordination: Perspectives, empirical studies and research directions”. *Int. J. Production Economics*, 115, 316-335.
- AXSÄTER, S., J. MARKLUND & E.A. SILVER (2002). “Heuristic Methods for Centralized Control of One-Warehouse, N -Retailer Inventory Systems”. *Manufacturing & Service Operations Management*, 4(1), 75-97.
- AXSÄTER, S. (2000). *Inventory Control*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 202 p.
- _____, (1993a), “Continuous Review Policies for Multi-Level Inventory Systems With Stochastic Demand”, En: S. Graves, A. Rinnooy Kan y P. H. Zipkin (Editores), *Logistics of Production and Inventory*, Vol. 4, Amsterdam, Elsevier (North-Holland).
- _____, (1993b), “Exact and Approximate Evaluation of Batch-Ordering Policies for Two-Level Inventory Systems”, *Operations Research*, 41, 777-85.
- _____, (1998). “Evaluation of Installation Stock Based (R, Q)-Policies for Two-Level Inventory Systems with Poisson Demand”. *Operations Research* 46, Supl. No. 3, S135-S145.
- BALLOU, R.H. (2004). *Logística: Administración de la Cadena de Suministro*, 5^a Edición, Prentice-Hall, Pearson Educación, México.
- _____, (1999). *Business Logistics Management: Planning, Organizing, and Controlling the Supply Chain*, 4^a Edición, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- BANKS, J. & J.S. CARSON II (1984). *Discrete-Event Simulation*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- BEN-DAYA, M., M. HARIGA & S.N. KHURSHEED (2008). “Economic Production Quantity Model with a Shifting Production Rate”. *International Transactions in Operational Research*, 15(1), 87-101.
- BERLING, P. (2008). “Holding Cost Determination: An Activity-based Cost Approach”. *Int. J. Production Economics*, 112(2), 829-840.
- BOWERSOX, D.J., D.J. CLOSS & M.B. COOPER (2007). *Administración y logística en la cadena de suministros*. Segunda edición. McGraw-Hill, México.

- BRAVO, J.J., H. TORO & J.C. OSORIO (2007). "Administración de recursos de distribución: Indicadores para la priorización en transporte". *Estudios gerenciales*, 23, 101-118.
- BREGMAN, R.L. & E.A. SILVER (1993). "A Modification of the Silver-Meal Heuristic to Handle MRP Purchase Discount Situations". *Journal of the Operational Research Society*, 44(7), 717-723.
- BROEKMEULEN, R.A.C.M. & K.H. van DONSELAAR (2009). "A Heuristic to Manage Perishable Inventory with Batch Ordering, Positive Lead-times, and Time-varying Demand". *Computers & Operations Research*, doi:10.1016/j.cor.2009.01.017.
- CANNON, A.R. (2008). "Inventory Improvement and Financial Performance". *Int. J. Production Economics*, 115(2), 581-593.
- CARLSON, M. & J. MILTENBURG (1988). "Using the Service Point Model to Control Large Groups of Items". *Omega*, 16(5), 481-489.
- CHAN, C.K., B.G. KINGSMAN & H. WONG (1999). "The Value of Combining Forecasts in Inventory Management – A Case Study in Banking". *European Journal of Operational Research*, 117, 199-210.
- CHASE, R.B. & N.J. AQUILANO (1995). *Dirección y administración de la producción y de las operaciones*. 6^a Edición, McGraw-Hill, México.
- CHASE, R.B., N.J. AQUILANO & FR. JACOBS (2000). *Administración de producción y operaciones: Manufacturas y servicios*. 8^a Edición, McGraw-Hill Interamericana, S.A., Santafé de Bogotá.
- CHEN, Y., K.W. LI, D.M. KILGOUR & K.W. HIPEL (2008). "A Case-based Distance Model for Multiple Criteria ABC Analysis". *Computers & Operations Research*, 35(3), 776-796.
- CHEN, F. & R. SAMROENGRAJA (2000). A Staggered Ordering Policy for One-Warehouse, Multiretailer Systems. *Operations Research*, 48(2), 281-293.
- CHENG, F. & Y. ZHENG (1997). "One-Warehouse Multi-Retailer Systems with Decentralized Stock Information". *Operations Research*, 45(2), 275-87.
- CHEVREUX, L. (2010). "A Little of Everything can go a Long Way". CSCMP Supply Chain Quarterly, Quarter 2.
- CHOPRA, S. & P. MEINDL (2001, 2004, 2007). *Supply Chain Management: Strategy, Planning, and Operation*. Segunda edición, Upper Saddle River, New Jersey.
- _____. (2008). *Administración de la cadena de suministro: Estrategia, planeación y operación*. Tercera edición, Pearson Prentice-Hall, México.
- CHU, C.W., G.S. LIANG & C.T. LIAO (2008). "Controlling Inventory by Combining ABC Analysis and Fuzzy Classification". *Computers & Industrial Engineering*, 55(4), 841-851.
- CHUNG, K.J., P.S. TING & K.L. HOU (2009). "A Simple Cost Minimization Procedure for the (Q, r) Inventory System with a Specified Fixed Cost per Stockout Occasion". *Applied Mathematical Modelling*, 33(5), 2538-2543.
- CLARK, A.J. & H. SCARF (1960). "Optimal Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem". *Management Science*, 5, 475-490.
- CLOSS, D.J. (2004). *Forecasting and Its Uses in Logistics*. CLM Explores (A publication of the Council of Supply Chain Management Professionals CSCMP). Vol. 1.
- COHEN, M., P. KLEINDORFER & H. LEE (1986). "Optimal Stocking Policies for Low Usage Items in Multi-Echelon Inventory Systems". *Naval Research Logistics* 33, 17-38.

- CROSTON, J.D. (1972). "Forecasting and Stock Control for Intermittent Demands". *Operational Research Quarterly* 23(3), 289-303.
- CROXTON, K.L. & W. ZINN (2005). "Inventory Considerations in Network Design". *Journal of Business Logistics*, 26(1), 149-168.
- DARWISH, M.A. (2008a). "Joint Determination of Order Quantity and Reorder Point of Continuous Review Model under Quantity and Freight Rate Discounts". *Computers & Operations Research*, 35(12), 3902-3917.
- _____ (2008b). "EPQ Models with Varying Setup Cost". *Int. J. Production Economics*, 113(1), 297-306.
- DAVIS, D.F. & J.T. MENTZER (2007). "Organizational Factors in Sales Forecasting Management". *International Journal of Forecasting*, 23(3), 475-495.
- DAWANDE, M., S. GAVIRNENI, S. NARANPANAWE & S.P. SETHI (2009). "Discrete Forecast Horizons for Two-product Variants of the Dynamic Lot-size Problem". *Int. J. Production Economics*, doi:10.1016/j.ijpe.2008.11.019.
- DONG, L. & H.L. LEE (2003). "Optimal Policies and Approximations for a Serial Multi-echelon Inventory System with Time Correlated Demand". *Operations Research* 51(6), 969-980.
- EHRHARDT, R. (1979). "The Power Approximation for Computing (s, S) Inventory Policies". *Management Science*, 25(8), 777-786.
- EHRHARDT, R. & C. MOSIER (1984). "Revision of the Power Approximation for Computing (s, S) Policies". *Management Science*, 30(5), 618-622.
- EICHMANN, D.A. (1996). *Mode and Carrier Selection Freight and Transportation Short Course*. The Logistics Institute, Georgia Institute of Technology, Atlanta, USA.
- EKSIOGLU, S.D. (2009). "A Primal-dual Algorithm for the Economic Lot-sizing Problem with Multi-mode Replenishment". *European Journal of Operational Research*, 197(1), 93-101.
- ESCALLÓN, V. (2009). *Un modelo de simulación de inventarios para una cadena de abastecimiento con una bodega y N puntos de venta*. Proyecto de grado en desarrollo, Maestría en Ingeniería con énfasis en Ingeniería Industrial, Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística, Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- FEDERGRUEN, A. & P. ZIPKIN (1984). "Allocation Policies and Cost Approximations for Multilocation Inventory Systems". *Naval Research Logistics* 31, 97-129.
- FILDES, R., P. GOODWIN, M. LAWRENCE & K. NIKOLOPOULOS (2009). "Effective Forecasting and Judgmental Adjustments: An Empirical Evaluation and Strategies for Improvement in Supply-chain Planning". *International Journal of Forecasting*, 25(1), 3-23.
- FILDES, R., P. GOODWIN & M. LAWRENCE (2006). "The Design Features of Forecasting Support Systems and their Effectiveness". *Decision Support Systems*, 42, 351-361.
- FOGARTY, D.W., J.H. BLACKSTONE Jr. & T.R. HOFFMANN (1994). *Administración de la producción e inventarios*. 2^a Edición (primera edición en español), Compañía Editorial Continental, S.A. de C.V., CECSA, México.
- FORSBERG, R. (1995). "Optimization of Order-up-to-S Policies for Two-Level Inventory Systems with Compound Poisson Demand". *European Journal of Operational Research* 81, 143-53.

- _____ (1996). "Exact Evaluation of (R, Q)-Policies for Two-Level Inventory Systems with Poisson Demand". *European Journal of Operational Research* 96, 130-38.
- FRAZELLE, E. (2002). *Supply Chain Strategy: The Logistics of Supply Chain Management*. McGraw-Hill, New York, 358 p.
- GARCÍA, N. & C.A. ZUÑIGA (2006). *Diseño de una metodología para la aplicación de modelos en la gestión de inventarios perecederos con énfasis en frutas y verduras*. Trabajo de grado, Programa académico de Ingeniería Industrial, Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística, Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- GARDNER Jr., E.S. (2006). "Exponential Smoothing: The State of the Art - Part II". *International Journal of Forecasting*, 22, 637-666.
- GOULD, P.G., A.B. KOEHLER, J.K. ORD, R.D. SNYDER, R.J. HYNDMAN & F. VAHID-ARAGHI (2008). "Forecasting Time Series with Multiple Seasonal Patterns". *European Journal of Operational Research*, 191, 207-222.
- GRAVES, S.C. (1996). "A Multiechelon Inventory Model with Fixed Replenishment Intervals". *Management Science* 42(1), 1-18.
- GRAVES, S.C., G.L. NEMHAUSER, A.H.G. RINNOOY KAN & P.H. ZIPKIN (Editores) (1993). *Logistics of Production and Inventory*, Handbooks in Operations Research and Management Science, Volumen 4, North-Holland, Amsterdam.
- GRENOBLE IV, W.L. (1994). "Inventory Control". En: *The Logistics Handbook* (J.F. Robeson, W.C. Copacino & R.E. Howe, Editores). The Free Press, New York.
- GÜMUS, A.T. & A.F. GÜNERI (2007). "Multi-echelon Inventory Management in Supply Chains with Uncertain Demand and Lead Times: Literature Review from an Operational Research Perspective". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers – Part B – Engineering Manufacture*, 221(10), 1553-1570.
- GUNASEKARAN, A. & E.W.T. NGAI (2009). "Modeling and Analysis of Build-to-order Supply Chains". *European Journal of Operational Research*, 195, 319-334.
- GUTIÉRREZ, E.V. (2006). *Modelación de sistemas de inventarios y tiempos de reposición aleatorios en cadenas de abastecimiento regionales*. Proyecto de grado, Magister en Ingeniería área de énfasis en Ingeniería Industrial, Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística, Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- GUTIÉRREZ, E.V. & C.J. VIDAL (2008). "Modelos de gestión de inventarios en cadenas de abastecimiento: Revisión de la literatura". *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*, 43, 134-149.
- HADLEY, G. (1964). "A Comparison of Order Quantities Computed using the Average Annual Cost and the Discounted Cost". *Management Science*, 10, 472-476.
- HADLEY, G. & T. M. WHITIN (1963). *Analysis of Inventory Systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- HANEVELD, W.K.K. & R.H. TEUNTER (1998). "Effects of Discounting and Demand Rate Variability on the EOQ". *Int. J. Production Economics*, 54(2), 173-192.
- HEIZER, J. & B. RENDER (1997). *Dirección de Producción: Decisiones Tácticas*, 4^a Edición, Prentice Hall, Madrid.
- HICKS, D. (1999). "A Four Step Methodology for using Simulation and Optimization Technologies in Strategic Supply Chain Planning". *Proceedings of the 1999 Winter Simulation Conference*.

- HOLT, C.C. (1957). *Forecasting Seasonals and Trends by Exponentially Weighted Moving Averages*, Office of Naval Research, Memorandum No. 52.
- HUISKONEN, J., P. NIEMI & P. PIRTTILÄ (2005). “The Role of C-products in Providing Customer Service - Refining the Inventory Policy According to Customer-specific Factors”. *Int. J. Production Economics*, 93-94, 139-149.
- JOHNSTON, F.R. y J.E. BOYLAN (1996). “Forecasting for Items with Intermittent Demand”. *Journal of the Operational Research Society* 47, 113-121.
- JUNG, J. & K. MATHUR (2007). “An Efficient Heuristic Algorithm for a Two-Echelon Joint Inventory and Routing Problem”. *Transportation Science*, 41(1), 55-73.
- KANCHANASUNTORN, K. & A. TECHANITISAWAD (2006). “An Approximate Periodic Model for Fixed-life Perishable Products in a Two-echelon Inventory-distribution System”. *Int. J. Production Economics*, 100(1), 101-115.
- KANG, Y. & S.B. GERSHWIN (2005). “Information Inaccuracy in Inventory Systems: Stock Loss and Stockout”. *IIE Transactions*, 37, 843-859.
- KARLIN, S. (1958). “The Application of Renewal Theory to the Study of Inventory Policies”. En: *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*. K. Arrow, S. Karlin y H. Scarf (Editores), Stanford, California, Stanford University Press, capítulo 15.
- KENNEDY, W.J., J.W. PATTERSON & L.D. FREDENDALL (2002). “An Overview of Recent Literature on Spare Parts Inventories”. *Int. J. Production Economics*, 76(2), 201-215.
- KHOUJA, M. (1999). “The Single-period (News-vendor) Problem: Literature Review and Suggestions for Future Research”. *Omega*, 27(5), 537-553.
- KHOUJA, M. & S. GOYAL (2008). “A Review of the Joint Replenishment Problem Literature: 1989-2005”. *European Journal of Operational Research*, 186(1), 1-16.
- KRAJEWSKI, L.J. & L.P. RITZMAN (1999). *Administración de operaciones: Estrategia y análisis*. 5^a Edición, Pearson Educación de México S.A. (Prentice-Hall), México.
- KUTANOGLU, E. & D. LOHIYA (2008). “Integrated Inventory and Transportation Mode Selection: A Service Parts Logistics System”. *Transportation Research Part E*, 44, 665-683.
- LAMARRE, R. & H. BAIER (1981). “Lot Sizing under Time Varying Demand and All Units Discount”. Presentado en la conferencia de la *Canadian Operational Research Society, Operational Research Society of America and the Institute for the Management Sciences*, Toronto, Canada.
- LAU, A.H.L. & H.S. LAU (2008). “An Improved (Q, R) Formulation when the Stockout Cost is Incurred on a Per-stockout Basis”. *Int. J. Production Economics*, 111(2), 421-434.
- LAW, A.M. y W.D. KELTON (1991). *Simulation Modeling and Analysis*. Segunda edición, McGraw-Hill, Inc., New York.
- LAWRENCE, M., P. GOODWIN, M. O’CONNOR & D. ÖNKAL (2006). “Judgmental Forecasting: A Review of Progress over the Last 25 years”. *International Journal of Forecasting*, 22(3), 493-518.
- LEE, W.Y., P. GOODWIN, R. FILDES, K. NIKOLOPOULOS & M. LAWRENCE (2007). “Providing support for the use of analogies in demand forecasting tasks”. *International Journal of Forecasting*, 23(3), 377-390.

- LEE, H., K.C. SO & C.S. TANG (2000). "The Value of Information Sharing in a Two-Level Supply Chain". *Management Science* 46(5), 626-643.
- LEE, H.L. & C. BILLINGTON (1992). "Managing Supply Chain Inventory". *Sloan Management Review*, spring, 65-73.
- LEE, H.L., C. BILLINGTON & B. CARTER (1993). "Hewlett-Packard Gains Control of Inventory and Service through Design for Localization". *Interfaces*, Julio-Agosto, 1-11.
- LENG, M. & A. ZHU (2009). "Side-payment Contracts in Two-person Nonzero-sum Supply chain Games: Review, Discussion and Applications". *European Journal of Operational Research*, 196, 600-618.
- LEVÉN, E. & A. SEGERSTEDT (2004). "Inventory Control with a Modified Croston Procedure and Erlang Distribution". *Int. J. Production Economics* 90, 361-367.
- LI, S.G. & X. KUO (2008). "The Inventory Management System for Automobile Spare Parts in a Central Warehouse". *Expert Systems with Applications*, 34(2), 1144-1153.
- LINDSEY, M. & R. PAVUR (2009). "Prediction Intervals for Future Demand of Existing Products with an Observed Demand of Zero". *Int. J. Production Economics*, doi:10.1016/j.ijpe.2009.01.006.
- LONDOÑO, J.C. (2005). *Análisis y modelación de la cadena de suministro de una empresa comercializadora de productos de consumo masivo*. Proyecto de grado, Maestría en Ingeniería de Sistemas, Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística, Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- MATTA, K.F. & D. SINHA (1995). "Policy and Cost Approximations of Two-Echelon Distribution Systems with a Procurement Cost at the Higher Echelon". *IIE Transactions* 27, 638-45.
- MOINZADEH, K. (2002). "A Multi-Echelon Inventory System with Information Exchange". *Management Science* 48(3), 414-426.
- MONTTHATIPKUL, C. & P. YENRADEE (2008). "Inventory/distribution Control System in a One-warehouse/multi-retailer Supply Chain". *Int. J. Production Economics*, 114, 119-133.
- MONTGOMERY, D.C., L.A. JOHNSON & J.S. GARDINER (1990). *Forecasting & Time Series Analysis*. 2^a Edición, McGraw-Hill, Inc., New York, 381 p.
- NADDOR, E. (1975). "Optimal and Heuristic Decisions in Single and Multi-item Inventory Systems". *Management Science*, 21(11), 1234-1249.
- NARASIMHAN, S.L., D.W. McLEAVEY & P.J. BILLINGTON (1996). *Planeación de la producción y control de inventarios*. 2^a Edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., México.
- NAVIDI, W. (2006). *Estadística para ingenieros y científicos*. McGraw-Hill, México, 868 p.
- NG, W.L. (2007). "A Simple Classifier for Multiple Criteria ABC Analysis". *European Journal of Operational Research*, 177(1), 344-353.
- NOORI, H. & R. RADFORD (1997). *Administración de producción y operaciones: Calidad total y respuesta sensible rápida*. McGraw-Hill, Santafé de Bogotá.
- O'DONNELL, T., P. HUMPHREYS, R. McIVOR & L. MAGUIRE (2009). "Reducing the Negative Effects of Sales Promotions in Supply Chains using Genetic Algorithms". *Expert Systems with Applications*, 36(4), 7827-7837.

- OZER, M. (2005). "Factors which Influence Decision Making in New Product Evaluation". *European Journal of Operational Research*, 163(3), 784-801.
- ÖZER, Ö. (2003). "Replenishment Strategies for Distribution Systems under Advance Demand Information". *Management Science* 49(3), 255-272.
- PAPAKIRIAKOPoulos, D., K. PRAMATARI & G. DOUKIDIS (2009). "A Decision Support System for Detecting Products Missing from the Shelf based on Heuristic Rules". *Decision Support Systems*, 46, 685-694.
- PARK, C.S. & Y.K. SON (1989). "The Effect of Discounting on Inventory Lot Sizing Models". *Eng. Cost Prod. Econ.*, 16, 35-48.
- PENTICO, D.W. & M.J. DRAKE (2009). "The Deterministic EOQ with Partial Back-ordering: A New Approach". *European Journal of Operational Research*, 194(1), 102-113.
- PENTICO, D.W., M.J. DRAKE & C. TOEWS (2009). "The Deterministic EPQ with Partial Backordering: A New Approach". *Omega*, 37(3), 624-636.
- PETROVIC, D., Y. XIE, K. BURNHAM & R. PETROVIC (2008). "Coordinated Control of Distribution Supply chains in the Presence of Fuzzy Customer Demand". *European Journal of Operational Research*, 185, 146-158.
- PORRAS, E. & R. DEKKER (2008). "An Inventory Control System for Spare Parts at a Refinery: An Empirical Comparison of Different Re-order Point Methods". *European Journal of Operational Research*, 184(1), 101-132.
- PUJAWAN, I.N. & E.A. SILVER (2008). "Augmenting the Lot Sizing Order Quantity when Demand is Probabilistic". *European Journal of Operational Research*, 188(3), 705-722.
- RAMANATHAM, R. (2006). ABC Inventory Classification with Multiple-criteria using Weighted Linear Optimization". *Computers & Operations Research*, 33, 695-700.
- ROBERTS, D. (1962). "Approximations to Optimal Policies in a Dynamic Inventory Model". En: *Studies in Applied Probability and Management Science*. K. Arrow, S. Karlin y H. Scarf (Editores). Stanford University Press, California, 207-229.
- ROBINSON, P., A. NARAYANAN & F. SAHIN (2009). "Coordinated Deterministic Dynamic Demand Lot-sizing Problem: A Review of Models and Algorithms". *Omega*, 37, 3-15.
- RODRÍGUEZ, J.A. & C.J. VIDAL (2009). "A Heuristic for the Inventory Control of Short-Life Cycle Products". *Ingeniería y competitividad* 11 (1), 37-55 .
- ROSS, S.M. (1993). *Introduction to Probability Models*. 5^a Edición, Academic Press, Inc., Boston.
- ROUNDY, R. (1985). 98%-Effective Integer-Ratio Lot-Sizing for One-Warehouse Multi-Retailer Systems. *Management Science*, 31(11), 1416-1430.
- _____. (1986). 98%-Effective Lot-Sizing Rule for a Multi-Product Multi-Stage Production/Inventory System. *Mathematics of Operations Research*, 11, 699-729.
- SANDERS, N.R. & K.B. MANRODT (2003). "Forecasting Software in Practice: Use, Satisfaction and Performance". *Interfaces* 33 (5), 90-93.
- SCHWARZ, L.B. (1973). "A Simple Continuous Review Deterministic One-warehouse N-retailer Inventory Problem". *Management Science*, 19(5), 555-566.
- SEGURA, J.V. & E. VERCHER (2001). "A Spreadsheet Modelling Approach to the Holt-Winters Optimal Forecasting". *European Journal of Operational Research*, 131(2), 375-388.

- SEZEN, B. & H. KITAPCI (2007). "Spreadsheet Simulation for the Supply Chain Inventory Problem". *Production Planning & Control*, 18(1), 9-15.
- SHAPIRO, J.F. (2001). *Modeling the Supply Chain*. Duxbury Thomson Learning, Pacific Grove, USA, 586 p.
- SHERBROOKE, C.C. (1968). "METRIC: A Multi-Echelon Technique for Recoverable Item Control". *Operations Research*, 16, 122-141.
- SILVER, E.A. & H.C. MEAL (1973). "A Heuristic for Selecting Lot Size Quantities for the case of a Deterministic Time-Varying Demand Rate and Discrete Opportunities for Replenishment". *Production and Inventory Management Journal*, 14(2), 64-74.
- SILVER, E.A. & R. PETERSON (1985). *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning*. 2^a Edición, John Wiley & Sons, New York.
- SILVER, E.A., D.F. PYKE & R. PETERSON (1998). *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*. 3^a Edición, John Wiley & Sons, New York.
- SILVER, E.A. (2008). "Inventory Management: An Overview, Canadian Publications, Practical Applications and Suggestions for Future Research". *INFOR*, 46(1), 15-28.
- SILVER, E.A. & D.J. ROBB (2008). "Some Insights Regarding the Optimal Reorder Period in Periodic Review Inventory Systems". *Int. J. Production Economics*, 112, 354-366.
- SIMCHI-LEVI, D., X. CHEN & J. BRAMEL (2005). *The Logic of Logistics: Theory, Algorithms, and Applications for Logistics and Supply Chain Management*. 2^a edición, Springer Series in Operations Research, New York.
- SIMCHI-LEVI, D., P. KAMINSKY & E. SIMCHI-LEVI (2003). *Designing and Managing the Supply Chain: Concepts, Strategies, and Case Studies*. 2^a Edición. McGraw-Hill/ Irwin, New York.
- SIMMONS, D. & J. CHENG (2008). "An Alternative Approach to Computing Economic Run Quantity". *Int. J. of Production Research*, 46(3), 837-847.
- SIPPER, D. & R.L. BULFIN Jr. (1998). *Planeación y control de la producción*. McGraw-Hill , México.
- SMART, C.N. (2002). *Accurate Intermittent Demand Forecasting for Inventory Planning: New Technologies and Dramatic Results*. White Paper. Disponible en http://www.smartcorp.com/pdf/Intermittent_Demand_Forecasting_WhitePaper.pdf (consultada en enero de 2009).
- SMITH, N. & J.L. MARTÍNEZ-FLORES (2007). "Discrepancies in Solutions Between Traditional and Net Present Value Formulations of Finite Horizon, Discrete-time Economic Lot Size Problems". *Int. J. of Production Research*, 45(24), 5731-5741.
- SNYDER, R.D. & A.B. KOEHLER (2009). "Incorporating a Tracking Signal into a State Space Model". *International Journal of Forecasting*, doi:10.1016/j.ijforecast.2008.12.003.
- SOUTHARD, P.B. & S.R. SWENSETH (2008). "Evaluating Vendor-managed Inventory (VMI) in Non-traditional Environments using Simulation". *Int. J. Production Economics*, 116, 275-287.
- STOCK, J.R. & D.M. LAMBERT (2001). *Strategic Logistics Management*. 4^a Edición, McGraw-Hill Irwin, Boston.
- SUN, D. & M. QUEYRANNE (2002). "Production and Inventory Model Using Net Present Value". *Operations Research*, 50(3), 528-537.

- SYNTETOS, A.A. & J.E. BOYLAN (2005). "The Accuracy of Intermittent Demand Estimates". *International Journal of Forecasting* 21, 303-314.
- SYNTETOS, A.A. & J.E. BOYLAN (2001). "On the Bias of Intermittent Demand Estimates". *Int. J. Production Economics* 71, 457-466.
- TEUNTER, R. & B. SANI (2009). "On the Bias of Croston's Forecasting Method". *European Journal of Operational Research*, 194, 177-183.
- _____ (2008). "Calculating Order-up-to Levels for Products with Intermittent Demand". *Int. J. Production Economics*, doi:10.1016/j.ijpe.2008.08.012.
- TIACCI, L. & S. SAETTA (2008). "An Approach to Evaluate the Impact of Interaction between Demand Forecasting Method and Stock Control Policy on the Inventory System Performances". *Int. J. Production Economics*, doi:10.1016/j.ijpe.2008.08.010.
- TING, P.S., K.L. HOU & K.J. CHUNG (2009). "An Accurate and Reliable Solution Algorithm for the (Q, r) Inventory System with a Fixed Shortage Cost". *Mathematical and Computer Modelling*, 49, 128-135.
- ÜSTER, H., B.B. KESKIN & S. CETINKAYA (2008). "Integrated Warehouse Location and Inventory Decisions in a Three-tier Distribution System". *IIE Transactions*, 40, 718-732.
- Van DONSELAAR, K., T. van WOENSEL, R. BROEKMEULEN & J. FRANSOO (2007). "Inventory Control of Perishables in Supermarkets". *Int. J. Production Economics*, 104, 462-472.
- VARGAS, V. (2008). "An Optimal Solution for the Stochastic Version of the Wagner-Whitin Dynamic Lot-size Model". *European Journal of Operational Research*, doi:10.1016/j.ejor.2008.09.003.
- VIDAL, C.J., J.C. LONDOÑO & F. CONTRERAS (2004). "Aplicación de modelos de inventarios en una cadena de abastecimiento de productos de consumo masivo con una bodega y N -puntos de venta". *Ingeniería y Competitividad* 6(1), 35-52.
- WAGNER, H. & T.M. WHITIN (1958). "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model". *Management Science*, 5(1), 89-96.
- WANKE, P.F. (2009). "Consolidation Effects and Inventory Portfolios". *Transportation Research Part E*, 45(1), 107-124.
- WANKE, P.F. (2008). "The Uniform Distribution as a First Practical Approach to New Product Inventory Management". *Int. J. Production Economics*, 114, 811-819.
- WILD, T. (1997). *Best Practice in Inventory Management*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 226 p.
- WILLEMAIN, T.R., C.N. SMART & H.F. SCHWARZ (2004). "A New Approach to Forecasting Intermittent Demand for Service Part Inventories". *International Journal of Forecasting* 20, 375-387.
- WINTERS, P.R. (1960). "Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages". *Management Science*, 6(3), 324-342.
- ZAMORA, A. & C.R. RUIZ (2008). *Sistema de despacho automático de bodega a puntos de venta para abarrotes en una cadena de supermercados*. Proyecto de grado, Maestría en Ingeniería con énfasis en Ingeniería Industrial, Escuela de Ingeniería Industrial y de Sistemas, Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- ZHANG, B., X. XU & Z. HUA (2009). "A Binary Solution Method for the Multi-product Newsboy Problem with Budget Constraint". *Int. J. Production Economics*, 117, 136-141.

- ZHANG, R-Q. (2008). “A Note on the Deterministic EPQ with Partial Backordering”. *Omega*, doi:10.1016/j.omega.2008.12.008.
- ZHOU, P. & L. FAN (2007). “A Note on Multi-criteria ABC Inventory Classification using Weighted Linear Optimization”. *European Journal of Operational Research*, 182(3), 1488-1491.
- ZOMERSDIJK, L.G. & J. de VRIES (2003). “An Organizational Perspective on Inventory Control: Theory and a Case Study”. *Int. J. Production Economics*, 81-82, 173-183.



Programa *E*ditorial