

Exercise 1 (4 points). Justifiquen si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

- (1 points) $n^2 - 10n + 25 \neq \omega(n^2)$ $\leftarrow T$
- (2 points) $2025n^2 + 20n + 25 = o(n^3)$ $\leftarrow T$
- (1 points) $\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{1.5} \rfloor}{1.5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2.25} \right\rfloor$ $\leftarrow F$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 3$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0 \text{ t.q.}$$

$$n > n_0 \rightarrow |f(n) - 3| < \varepsilon$$

Definición
del
límite

① $n^2 - 10n + 25 \neq \omega(n^2)$

Supongamos por $\rightarrow \leftarrow$

$$\forall c > 0, \exists n_0 > 0 \text{ t.q. } \forall n \geq n_0 \quad n^2 - 10n + 25 > c n^2$$

Para $c = 1$

$$(n-5)^2 > n^2 \text{ esta premisa es falsa a partir de } n > 6$$

$$\therefore \forall n > n_c \rightarrow \underbrace{(n-5)^2 > n^2}_{n < 2,5} \text{ cuando } n < 6 \quad (\rightarrow \leftarrow)$$

Tenemos que todo $n \geq n_c$, debería cumplir $n < 2,5$

$$n = \lceil n_c + 2,5 + 1 \rceil$$

En la contradicción, propones una constante de modo que no cumpla $\forall n > n_0$

② $2025n^2 + 20n + 25 = o(n^3)$

$$\forall c > 0, \exists n > 0 \text{ t.q. } 2025n^2 + 20n + 25 < c n^3$$

$$2025n^2 \leq 2025n^2$$

$$20n \leq 20n^2$$

$$25 \leq 25n^2$$

$$f(n) \leq 2070n^2$$

$$2070n^2 < cn^3$$

$$\frac{2070}{c} < n$$

$$\Rightarrow n_0 \geq \frac{2070}{c} + 1 \text{ cumple}$$

③ $\left\lfloor \frac{2 \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4n}{9} \right\rfloor$ es falso por contraejemplo

Exercise 2 (4 points). Resolver la relación de recurrencia **explícitamente**, usando los métodos vistos en clase. Deberás brindar la **solución exacta** para infinitos valores de n . Usar esta información para encontrar y probar el crecimiento asintótico de $T(n)$.

$$T(n) = \begin{cases} n^2 & 1 \leq n < 45 \\ 2025T(\lfloor n/45 \rfloor) + n^2 - 2024 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Puedes asumir que la función $T(n)$ es creciente.

$$T(45^k) = k45^{2k} + 1$$

$$3k \geq k+1 \rightarrow k \geq 1 \quad n \geq 45$$

Exercise 3 (3 points). Sea T una función de recurrencia definida de la siguiente manera:

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (T(k) + T(n-k) + 2)$$

Para todo entero $n > 1$, y con $T(1) = 0$. Probar que $T(n) = \Omega(2^n)$

$$T(n) \geq c2^n$$

$$T(n) \geq 2n+2 + \sum_{k=2}^{n-1} T(k)$$

$$\geq 2n+2 + 1 + c \sum_{k=2}^{n-1} T(k)$$

$$\geq 2n+2T_1 + 1 + c \sum_{k=2}^{n-1} 2^k$$

$$\geq 2n+2T_1 + 2$$

Exercise 4 (3 points). Considere el siguiente problema:

Input: Un array $A[1 \dots n]$ de enteros positivos, ordenados de forma estrictamente decreciente.

Output: La cantidad de índices i tal que $A[i] + i \neq n + 1$.

Por ejemplo, trabajando con el array $A = [8; 6; 5; 4; 2; 1]$, el output el programa debería ser 4, porque hay 4 índices que no cumplen esa igualdad.

- Escribir el pseudocódigo de un algoritmo de división y conquista, con complejidad $O(n)$.
- Describa la recurrencia de su algoritmo y justifique su complejidad utilizando el teorema maestro.

Algo (A, l, r, n) // cantidad de índices tq $A_i + i \neq n + 1$

if $l == r$

return $(A[l] + l \neq n + 1)$

$m = \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$

if $A[n] + n \neq n + 1$

return $(n - l + 1) + \text{Algo}(A, m+1, r, n)$

else

return $\text{Algo}(A, l, m, n)$

Exercise 5 (3 points). Las matrices de Hadamard son matrices H_0, H_1, \dots , definidas de la siguiente manera

- H_0 es la matriz unitaria $[1]$.
- Para $k > 0$, H_k es la matriz de dimensiones $2^k \times 2^k$:

$$H_k = \left[\begin{array}{c|c} H_{k-1} & H_{k-1} \\ \hline H_{k-1} & -H_{k-1} \end{array} \right]$$

Considere el siguiente problema

Input: Un arreglo $A[1..n]$ of integers, donde $n = 2^k$

Output: El arreglo que representa la transpuesta del producto matricial $H_k \cdot A^T$

Diseñe un algoritmo $\Theta(n \log n)$ para resolver el problema anterior. Puede considerar que todos los números envueltos en el producto son lo suficientemente pequeños para que cada producto numérico tome tiempo constante.

INPUT

V_{2^k}



OUTPUT

$H_k \cdot V_{2^k}^T$

↓
 $H_{k-1} \cdot V_{2^{k-1}}^T$

$$\begin{bmatrix} a & a \\ a & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + ay \\ ax - ay \end{bmatrix}$$

Algo(A, n)

if (n==1)

return A[1:1]

else:

X = A[1:n/2]

Y = A[n/2+1:n]

B = Algo(X, n/2)

C = Algo(Y, n/2)

D = B + C

E = B - C

A[1:n/2] = D

A[n/2+1:n] = E

return A

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

$n \lg n$

Input [1 3 -2 5]

$H_k \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$H_k = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$H_k \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Algo(A(1:n), 2)

Algo(A(3:n), 2)

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$

Exercise 6 (3 points). Esta parte es electiva. *Responder solo 1 de las siguientes preguntas (Si respondes más de dos, no te calificaré).*

- Dado un heap de n nodos, n_l nodos en el subarbol izquierdo y n_r nodos en el subarbol derecho, Probar que se cumple la siguiente desigualdad: $n_r \leq n_l \leq 2n_r + 1$
Hint: En este item puede usar sin probar la relación entre la altura de un heap y su cantidad de nodos sin necesidad de probarlo.
- Probar que la cantidad de nodos en un heap de n nodos, que tengal altura como mínimo 3, es exactamente igual a $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$.

} cormen

} cantidad de nodos de altura h