

Análisis Probabilístico y Quicksort

Conteo:

$$\begin{aligned} 1.1 \quad \text{Sets} &\rightarrow \mathbb{Z}^+ \\ S &\rightarrow |S| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet |\emptyset| &= 0 \\ \bullet |S| &\geq 0 \end{aligned}$$

$$A, B \text{ disjuntos} \rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$$

Espacio Muestral: Ω

$\Omega: \{w \mid w \text{ es un outcome (resultados)}\}$

Evento: (subconjunto de outcomes)

$$E \subseteq \Omega, E \in 2^{\Omega}$$

Probabilidad:

$$\begin{aligned} P: 2^{\Omega} &\rightarrow [0, 1] \\ E &\rightarrow P(E) \end{aligned}$$

input: un evento

$$\begin{aligned} \bullet P(\emptyset) &= 0 & \bullet P(\Omega) &= 1 \\ \bullet 1 &\leq P(E) \leq 1 \\ \bullet A, B \text{ disjuntos} &\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{aligned}$$

Eventos discretos:

$$P(E) = P\left(\bigcup_{w \in E} \{w\}\right) = \sum_{w \in E} P\{w\}$$

• Si se sabe la probabilidad de cada evento
Se puede saber la probabilidad de todos los eventos

Experimento: lanzar 3 dados

| Prob. | Ω |
|----------|----------|
| $1/8$ | c c c |
| \vdots | c c s |
| \vdots | c s c |
| \vdots | c s s |
| \vdots | s c c |
| \vdots | s c s |
| \vdots | s s c |
| $1/8$ | s s s |

Población de datos numéricos

$\#c$
↑
variable aleatoria

$$E_1 = \{\#c = 1\} \rightarrow \{w \mid \#c(w) = 1\} = (\#c = 1)$$

$$E_2 = \{\#c = 2\}$$

$$E_3 = \{\#c = 3\}$$

$$E_4 = \{\#c = 4\} = \{\}$$

Random Variable (X)

$$\begin{aligned} X: \Omega &\rightarrow \mathbb{Z}_0^+ \\ w &\mapsto X(w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow X = \# \text{ de caras al lanzar 3 monedas} \\ &= \begin{cases} \rightarrow \{w \mid X(w) = c\} \\ \rightarrow (X = c) \end{cases} \end{aligned}$$

- Es una asignación
- Es una función
- Definir un evento formalmente es crear una variable aleatoria

$$\rightarrow P(X = c)$$

$X \rightarrow$ función

$Y \rightarrow$ función

$X + Y \rightarrow$ función

Expected Value

$$E[X] : \text{"media"} \text{ de } X(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \sum_{c=0}^{\infty} c \cdot P(X=c)$$

input: variable aleatoria

| Prob. | Ω | #c | Esperanza |
|-------|----------|----|----------------------|
| $1/8$ | c c c | 3 | $3 \cdot P(\{ccc\})$ |
| $1/8$ | c c s | 2 | $2 \cdot P(\{ccs\})$ |
| $1/8$ | c s c | 2 | $2 \cdot P(\{csc\})$ |
| $1/8$ | c s s | 1 | $1 \cdot P(\{css\})$ |
| $1/8$ | s c c | 2 | $2 \cdot P(\{scc\})$ |
| $1/8$ | s c s | 1 | $1 \cdot P(\{scs\})$ |
| $1/8$ | s s c | 1 | $1 \cdot P(\{ssc\})$ |
| $1/8$ | s s s | 0 | $0 \cdot P(\{sss\})$ |

Se puede agrupar mediante el valor

$$0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) + 4 \cdot P(X=4)$$

Linealidad del valor esperado