

# Probabilidades

- Función probabilidad

$$P: \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

$$E \longmapsto P(E)$$

INPUT: un evento

OUTPUT: probabilidad entre 0 y 1

- función Variable Aleatoria

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}_0^+$$

$$\omega \longmapsto X(\omega)$$

INPUT: un outcome

OUTPUT: un valor discreto

$$(X=c) = \{ \omega \mid X(\omega) = c \}$$

$$P(X=c)$$

- Todos los outcomes que cumplen c
- Es un evento

- Función Valor Esperado

$$E: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X \longmapsto E[X]$$

INPUT: Variable aleatoria

OUTPUT: Promedio

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \cdot X(\omega)$$

todos los  
causes

$$= \sum_{c=0}^{\infty} c P(X=c)$$

probabilidad de que  
la variable aleatoria  
sea ese valor

Resultados agrupados  
de la variable aleatoria

Experimento: lanzar 2 dados

$$\Omega = (\{1, \dots, 6\})^2 = \{ (i, j) \mid 1 \leq i \leq j \leq 6 \}$$

$$X = \text{Suma de los caras que salen al lanzarlos} = \{2, \dots, 12\}$$

$$E[X] = X(1,1) \cdot P(1,1) + X(1,2) \cdot P(1,2) + X(1,3) \cdot P(1,3) + \dots + X(6,6) \cdot P(6,6)$$

=

$$2 P(X=2) + 3 P(X=3) + 4 P(X=4) + \dots + 12 P(X=12)$$

se utilizan los resultados  
posibles de la variable  
aleatoria

$$X^2: \Omega \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$\omega \longmapsto [X(\omega)]^2$$

$$X^2(\{1,5\}) = 6^2 = 36$$

$$E[X+Y] = \sum_{c=0}^{\infty} c P((X+Y)=c)$$

$$= \sum_{c=0}^{\infty} c P\left(\bigcup_{i=0}^c (X=i) \cap (Y=c-i)\right)$$

$$= \sum_{c=0}^{\infty} c \cdot \sum_{i=0}^c P(\underbrace{(X=i) \cap (Y=c-i)}_{\text{son independientes?}})$$

$$= \sum_{c=0}^{\infty} c \cdot \sum_{i=0}^c P(X=i) \cdot P(Y=c-i) \quad \text{¿y ahora que?}$$

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

Demostrado por Matemáticos

Siempre funciona sin importar las variables aleatorias

- Se puede utilizar para separar una variable aleatoria como la suma de dos

$X_1$ : resultado de la primera cara

$X_2$ : resultado de la segunda cara

$$\begin{cases} X = X_1 + X_2 \end{cases}$$

$$E[X_1] = \sum_{i=1}^6 i P(X_1=i) = \sum_{i=1}^6 i \frac{1}{6} = 3,5 \rightarrow E[X_2]$$

$$E[X] = 3,5 + 3,5 = 7$$

# HIRING PROBLEM

Contexto:

- Existe un puesto de trabajo en el cual postulan  $n$  candidatos
- Hay un costo por entrevistar y hay un costo por contratación
- La empresa busca reducir costos
- El costo depende del número de contratos, lo cual depende del orden en la que se entrevista los candidatos
- Siempre se contrata si un candidato es mejor que el anterior
- Cada día se contrata a un candidato

HIRE-ASSISTANT ( $n$ )

```

1 best = 0
2 For i = 1 to n
3   interview candidate i
4   if candidate i is better than candidate best
5     best = i
6   hire candidate i
    
```

Ejemplo:  $\Omega = \{1, 2, 3\}$   $X$ : # contratos  $\rightarrow$   $X_i$ : # contratos en el día  $i$

| $\Omega$ | $X$ |
|----------|-----|
| 1 2 3    | 3   |
| 1 3 2    | 2   |
| 2 1 3    | 2   |
| 2 3 1    | 2   |
| 3 1 2    | 1   |
| 3 2 1    | 1   |

$$E[X] = \sum_{c=1}^n c P(X=c)$$

Es por la

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$E[X_i] = \sum_{c=0}^{\infty} c P(X_i=c)$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$$

$$= \sum_{i=0}^1 c P(X_i=c)$$

$$= 0 \cdot P(X_i=0) + 1 \cdot P(X_i=1)$$

$$= P(X_i=1)$$

$$= P(\text{\# contratos en el día } i = 1)$$

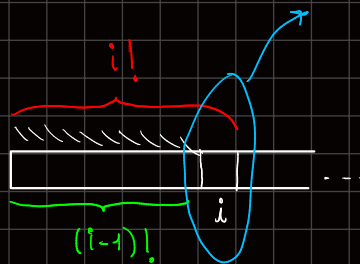
$$= P(\text{contratos en el día } i)$$

$$= P(A_i) = \max\{A_{1-i}\}$$

$$= 1/i$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \ln(n) + \Theta(1)$$

solo de fijar en el  $i$ -ésimo día y la probabilidad de escoger ese  $i$  es  $1/i$



$$\frac{(i-1)!}{i!} = \frac{1}{i}$$