

## QUICKSORT (A, p, r)

```
1: if p < r
2:   q = PARTITION(A, p, r)
3:   QUICKSORT(A, p, q-1)
4:   QUICKSORT(A, q+1, r)
```

Línea 3:



Luego de la línea 4 y 5:



Complejidad?

$$n_L + n_R = n - 1$$

$$T(n) = T(n_L) + T(n_R) + \theta(n)$$

¿Cuándo está ordenado creciente o decreciente?



$$T(n) = T(n-1) + n = \mathcal{O}(n^2)$$



$$T(n) = T(n-1) + n = \mathcal{O}(n^2)$$

## PARTITION(A, p, r)

```
x = A[r]
i = p-1
for j = p to r-1
  if A[j] ≤ x
    i = i+1
    exchange A[j] with A[i]
exchange A[r] with A[i+1]
return i+1
```

Invariante:



# Análisis de complejidad

$$T(n) = O(n^2)$$

$$T(n) = \Omega(n \lg n)$$

Proof 1:

- $W(n)$  = # ejecuciones en el peor de los casos
- $B(n)$  = # ejecuciones en el mejor de los casos

$$\underline{n \lg n} \leq B(n) \leq T(n) \leq W(n) \leq \underline{n^2}$$

$$W(6) = \begin{cases} W(0) + W(5) \\ W(1) + W(4) \\ W(2) + W(3) \\ \vdots \\ W(5) + W(0) \end{cases} \quad W(6) \leq \max_{i=0}^5 (W(i) + W(5-i)) + 6$$

Para el peor caso

$$W(n) \leq \Theta(n) + \max_{q=1}^n \{ W(q-1) + W(n-1-q) \}$$

Probaremos x inducción en  $n$  que  $W(n) = O(n^2)$   
 $W(n) \leq \underline{\quad} n^2$

C.B:

$$\begin{aligned} W(0) = 0 &\leq \underline{5} \cdot 0^2 \\ W(1) = 1 &\leq \underline{5} \cdot 1^2 \end{aligned}$$

H.I: Supongamos que  $W(k) \leq \underline{\quad} k^2 \quad \forall 0 \leq k \leq n-1 \rightarrow \hat{?} W(n) \leq \underline{\quad} n^2?$

$$W(n) \leq \underline{5}n + \max_{q=1}^n \{ W(q-1) + W(n-1-q) \}$$

*¿?* →

$$\leq 5n + \max_{q=1}^n \left\{ \underline{5} (q-1)^2 + \underline{5} (n-1-q)^2 \right\}$$

$$\leq 5n + \underline{5} \max_{q=1}^n \{ (q-1)^2 + (n-1-q)^2 \}$$

$$\leq 5n + \underline{5} (n-1)^2 \quad \leftarrow \text{Lista de ejercicios}$$

$$= 5(n^2 - n + 1) \leq 5n^2 \quad T(n) = O(n^2)$$

Si  $f$  es convexa  $\rightarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)$  Desigualdad de Johnson

Para el mejor caso:

$$B(n) \geq \theta(n) + \min_{q=1}^n \{B(q-1) + B(n-1-q)\}$$

Probaremos x inducción en  $n$  que  $w(n) = O(n^2)$   
 $w(n) \leq -n^2$

C.B.:

$$w(0) = 0 \leq \frac{5}{-1} 0^2$$

$$w(1) = 1 \leq \frac{5}{-1} 1^2$$

H.I.: Supongamos que  $B(k) \geq -k \lg k \quad \forall 1 \leq k \leq n-1 \rightarrow \text{¿} B(n) \geq -n \lg n \text{?}$

$$B(n) \geq n + \min_{q=1}^n \{B(q-1) + B(n-1-q)\}$$

$$\geq n + \min_{q=1}^n \{- (q-1) \lg (q-1) + (n-1-q) \lg (n-1-q)\}$$

$$\geq n + \frac{1}{2} (n-1) \lg \left(\frac{n-1}{2}\right) \quad \times \lg x \text{ es convexa}$$

$$\geq \frac{1}{4} n \lg n$$