

Exercise 1 (4 points). Justifiquen si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

- (1 points)  $n^2 - 10n + 25 \neq \omega(n^2)$   $\leftarrow T$
- (2 points)  $2025n^2 + 20n + 25 = o(n^3)$   $\leftarrow T$
- (1 points)  $\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{1.5} \rfloor}{1.5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2.25} \right\rfloor$   $\leftarrow F$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 3$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0 \text{ t.q.}$$

$$n > n_0 \rightarrow |f(n) - 3| < \varepsilon$$

Definición  
del  
límite

①  $n^2 - 10n + 25 \neq \omega(n^2)$

Supongamos por  $\rightarrow \leftarrow$

$$\forall c > 0, \exists n_0 > 0 \text{ t.q. } \forall n \geq n_0 \quad n^2 - 10n + 25 > c n^2$$

Para  $c = 1$

$$(n-5)^2 > n^2 \text{ esta premisa es falsa a partir de } n > 6$$

$$\therefore \forall n > n_c \rightarrow \underbrace{(n-5)^2 > n^2}_{n < 2,5} \text{ cuando } n < 6 \quad (\rightarrow \leftarrow)$$

Tenemos que todo  $n \geq n_c$ , debería cumplir  $n < 2,5$

$$n = \lceil n_c + 2,5 + 1 \rceil$$

En la contradicción, propones una constante de modo que no cumpla  $\forall n > n_0$

②  $2025n^2 + 20n + 25 = o(n^3)$

$$\forall c > 0, \exists n > 0 \text{ t.q. } 2025n^2 + 20n + 25 < c n^3$$

$$2025n^2 \leq 2025n^2$$

$$20n \leq 20n^2$$

$$25 \leq 25n^2$$

$$f(n) \leq 2070n^2$$

$$2070n^2 < cn^3$$

$$\frac{2070}{c} < n$$

$$\Rightarrow n_0 \geq \frac{2070}{c} + 1 \text{ cumple}$$

③  $\left\lfloor \frac{2 \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4n}{9} \right\rfloor$  es falso por contraejemplo

**Exercise 2 (4 points).** Resolver la relación de recurrencia **explícitamente**, usando los métodos vistos en clase. Deberás brindar la **solución exacta** para infinitos valores de  $n$ . Usar esta información para encontrar y probar el crecimiento asintótico de  $T(n)$ .

$$T(n) = \begin{cases} n^2 & 1 \leq n < 45 \\ 2025T(\lfloor n/45 \rfloor) + n^2 - 2024 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Puedes asumir que la función  $T(n)$  es creciente.

$$T(45^k) = k45^{2k} + 1$$

$$3k \geq k+1 \rightarrow k \geq 1 \quad n \geq 45$$

Exercise 3 (3 points). Sea  $T$  una función de recurrencia definida de la siguiente manera:

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (T(k) + T(n-k) + 2)$$

Para todo entero  $n > 1$ , y con  $T(1) = 0$ . Probar que  $T(n) = \Omega(2^n)$

$$T(n) \geq c2^n$$

$$T(n) \geq 2n+2 + \sum_{k=2}^{n-1} T(k)$$

$$\geq 2n+2 + 1 + c \sum_{k=2}^{n-1} T(k)$$

$$\geq 2n+2T_1 + 1 + c \sum_{k=2}^{n-1} 2^k$$

$$\geq 2n+2T_1 + 2$$

Exercise 4 (3 points). Considere el siguiente problema:

Input: Un array  $A[1 \dots n]$  de enteros positivos, ordenados de forma estrictamente decreciente.

Output: La cantidad de índices  $i$  tal que  $A[i] + i \neq n + 1$ .

Por ejemplo, trabajando con el array  $A = [8; 6; 5; 4; 2; 1]$ , el output el programa debería ser 4, porque hay 4 índices que no cumplen esa igualdad.

- Escribir el pseudocódigo de un algoritmo de división y conquista, con complejidad  $O(n)$ .
- Describa la recurrencia de su algoritmo y justifique su complejidad utilizando el teorema maestro.

Algo ( $A, l, r, n$ ) // cantidad de índices tq  $A_i + i \neq n + 1$

if  $l == r$

return  $(A[l] + l \neq n + 1)$

$m = \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$

if  $A[n] + n \neq n + 1$

return  $(n - l + 1) + \text{Algo}(A, m+1, r, n)$

else

return  $\text{Algo}(A, l, m, n)$

Exercise 5 (3 points). Las matrices de Hadamard son matrices  $H_0, H_1, \dots$ , definidas de la siguiente manera

- $H_0$  es la matriz unitaria  $[1]$ .
- Para  $k > 0$ ,  $H_k$  es la matriz de dimensiones  $2^k \times 2^k$ :

$$H_k = \left[ \begin{array}{c|c} H_{k-1} & H_{k-1} \\ \hline H_{k-1} & -H_{k-1} \end{array} \right]$$

Considere el siguiente problema

**Input:** Un arreglo  $A[1..n]$  of integers, donde  $n = 2^k$

**Output:** El arreglo que representa la transpuesta del producto matricial  $H_k \cdot A^T$

Diseñe un algoritmo  $\Theta(n \log n)$  para resolver el problema anterior. Puede considerar que todos los números envueltos en el producto son lo suficientemente pequeños para que cada producto numérico tome tiempo constante.

Algo(A, n)

if (n==1)

return A[1:1]

else:

X = A[1:n/2]

Y = A[n/2+1:n]

B = Algo(X, n/2)

C = Algo(Y, n/2)

D = B + C

E = B - C

A[1:n/2] = D

A[n/2+1:n] = E

return A

INPUT

$V_{2^k}$

→

OUTPUT

$H_k \cdot V_{2^k}^T$

↓  
 $H_{k-1} \cdot V_{2^{k-1}}^T$

$$\begin{bmatrix} a & a \\ a & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + ay \\ ax - ay \end{bmatrix}$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

$n \lg n$

Input [1 3 -2 5]

$H_k \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$H_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$H_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

$H_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$H_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2 \\ 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2 \\ 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+2 \\ 6-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-2 \\ 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+4 \\ 8-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-4 \\ 8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12+4 \\ 12-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12-4 \\ 12+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+8 \\ 16-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16-8 \\ 16+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 24 & 8 \\ 8 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24+8 \\ 24-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 16 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 24 & 8 \\ 8 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24-8 \\ 24+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 32 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 32 & 16 \\ 16 & 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32+16 \\ 32-16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 16 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 32 & 16 \\ 16 & 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32-16 \\ 32+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 48 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 48 & 16 \\ 16 & 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48+16 \\ 48-16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 \\ 32 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 48 & 16 \\ 16 & 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48-16 \\ 48+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 64 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 64 & 32 \\ 32 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64+32 \\ 64-32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96 \\ 32 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 64 & 32 \\ 32 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64-32 \\ 64+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 96 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 96 & 32 \\ 32 & 96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96+32 \\ 96-32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128 \\ 64 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 96 & 32 \\ 32 & 96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96-32 \\ 96+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 \\ 128 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 128 & 64 \\ 64 & 128 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128+64 \\ 128-64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 192 \\ 64 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 128 & 64 \\ 64 & 128 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128-64 \\ 128+64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 \\ 192 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 192 & 64 \\ 64 & 192 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 192+64 \\ 192-64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 256 \\ 128 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 192 & 64 \\ 64 & 192 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 192-64 \\ 192+64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128 \\ 256 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 256 & 128 \\ 128 & 256 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 256+128 \\ 256-128 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 384 \\ 128 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 256 & 128 \\ 128 & 256 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 256-128 \\ 256+128 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128 \\ 384 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 384 & 128 \\ 128 & 384 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 384+128 \\ 384-128 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 512 \\ 256 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 384 & 128 \\ 128 & 384 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 384-128 \\ 384+128 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 256 \\ 512 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 512 & 256 \\ 256 & 512 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 512+256 \\ 512-256 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 768 \\ 256 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 512 & 256 \\ 256 & 512 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 512-256 \\ 512+256 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 256 \\ 768 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 768 & 256 \\ 256 & 768 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 768+256 \\ 768-256 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1024 \\ 512 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 768 & 256 \\ 256 & 768 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 768-256 \\ 768+256 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 512 \\ 1024 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 1024 & 512 \\ 512 & 1024 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1024+512 \\ 1024-512 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1536 \\ 512 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 1024 & 512 \\ 512 & 1024 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1024-512 \\ 1024+512 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 512 \\ 1536 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 1536 & 512 \\ 512 & 1536 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1536+512 \\ 1536-512 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2048 \\ 1024 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 1536 & 512 \\ 512 & 1536 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1536-512 \\ 1536+512 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1024 \\ 2048 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 2048 & 1024 \\ 1024 & 2048 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2048+1024 \\ 2048-1024 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3072 \\ 1024 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 2048 & 1024 \\ 1024 & 2048 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2048-1024 \\ 2048+1024 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1024 \\ 3072 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 3072 & 1024 \\ 1024 & 3072 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3072+1024 \\ 3072-1024 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4096 \\ 2048 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 3072 & 1024 \\ 1024 & 3072 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3072-1024 \\ 3072+1024 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2048 \\ 4096 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 4096 & 2048 \\ 2048 & 4096 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4096+2048 \\ 4096-2048 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6144 \\ 2048 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 4096 & 2048 \\ 2048 & 4096 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4096-2048 \\ 4096+2048 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2048 \\ 6144 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 6144 & 2048 \\ 2048 & 6144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6144+2048 \\ 6144-2048 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8192 \\ 4096 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 6144 & 2048 \\ 2048 & 6144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6144-2048 \\ 6144+2048 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4096 \\ 8192 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 8192 & 4096 \\ 4096 & 8192 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8192+4096 \\ 8192-4096 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12288 \\ 4096 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 8192 & 4096 \\ 4096 & 8192 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8192-4096 \\ 8192+4096 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4096 \\ 12288 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 12288 & 4096 \\ 4096 & 12288 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12288+4096 \\ 12288-4096 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16384 \\ 8192 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 12288 & 4096 \\ 4096 & 12288 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12288-4096 \\ 12288+4096 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8192 \\ 16384 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 16384 & 8192 \\ 8192 & 16384 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16384+8192 \\ 16384-8192 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24576 \\ 8192 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 16384 & 8192 \\ 8192 & 16384 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16384-8192 \\ 16384+8192 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8192 \\ 24576 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 24576 & 8192 \\ 8192 & 24576 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24576+8192 \\ 24576-8192 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32768 \\ 16384 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 24576 & 8192 \\ 8192 & 24576 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24576-8192 \\ 24576+8192 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16384 \\ 32768 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 32768 & 16384 \\ 16384 & 32768 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32768+16384 \\ 32768-16384 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49152 \\ 16384 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 32768 & 16384 \\ 16384 & 32768 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32768-16384 \\ 32768+16384 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16384 \\ 49152 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 49152 & 16384 \\ 16384 & 49152 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49152+16384 \\ 49152-16384 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65536 \\ 32768 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 49152 & 16384 \\ 16384 & 49152 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49152-16384 \\ 49152+16384 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32768 \\ 65536 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 65536 & 32768 \\ 32768 & 65536 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65536+32768 \\ 65536-32768 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98304 \\ 32768 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 65536 & 32768 \\ 32768 & 65536 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65536-32768 \\ 65536+32768 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32768 \\ 98304 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 98304 & 32768 \\ 32768 & 98304 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98304+32768 \\ 98304-32768 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 131072 \\ 65536 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 98304 & 32768 \\ 32768 & 98304 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98304-32768 \\ 98304+32768 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65536 \\ 131072 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 131072 & 65536 \\ 65536 & 131072 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 131072+65536 \\ 131072-65536 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 196608 \\ 65536 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 131072 & 65536 \\ 65536 & 131072 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 131072-65536 \\ 131072+65536 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65536 \\ 196608 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 196608 & 65536 \\ 65536 & 196608 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 196608+65536 \\ 196608-65536 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 262144 \\ 131072 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 196608 & 65536 \\ 65536 & 196608 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 196608-65536 \\ 196608+65536 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 131072 \\ 262144 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 262144 & 131072 \\ 131072 & 262144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 262144+131072 \\ 262144-131072 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 393216 \\ 131072 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 262144 & 131072 \\ 131072 & 262144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 262144-131072 \\ 262144+131072 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 131072 \\ 393216 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 393216 & 131072 \\ 131072 & 393216 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 393216+131072 \\ 393216-131072 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 524288 \\ 262144 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 393216 & 131072 \\ 131072 & 393216 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 393216-131072 \\ 393216+131072 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 262144 \\ 524288 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 524288 & 262144 \\ 262144 & 524288 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 524288+262144 \\ 524288-262144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 786432 \\ 262144 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 524288 & 262144 \\ 262144 & 524288 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 524288-262144 \\ 524288+262144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 262144 \\ 786432 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 786432 & 262144 \\ 262144 & 786432 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 786432+262144 \\ 786432-262144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1048576 \\ 524288 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 786432 & 262144 \\ 262144 & 786432 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 786432-262144 \\ 786432+262144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 524288 \\ 1048576 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 1048576 & 524288 \\ 524288 & 1048576 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1048576+524288 \\ 1048576-524288 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1572864 \\ 524288 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 1048576 & 524288 \\ 524288 & 1048576 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1048576-524288 \\ 1048576+524288 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 524288 \\ 1572864 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 1572864 & 524288 \\ 524288 & 1572864 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1572864+524288 \\ 1572864-524288 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2097152 \\ 1048576 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 1572864 & 524288 \\ 524288 & 1572864 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1572864-524288 \\ 1572864+524288 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1048576 \\ 2097152 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 2097152 & 1048576 \\ 1048576 & 2097152 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2097152+1048576 \\ 2097152-1048576 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3145728 \\ 1048576 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 2097152 & 1048576 \\ 1048576 & 2097152 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2097152-1048576 \\ 2097152+1048576 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1048576 \\ 3145728 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 3145728 & 1048576 \\ 1048576 & 3145728 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3145728+1048576 \\ 3145728-1048576 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4194304 \\ 2097152 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 3145728 & 1048576 \\ 1048576 & 3145728 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3145728-1048576 \\ 3145728+1048576 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2097152 \\ 4194304 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 4194304 & 2097152 \\ 2097152 & 4194304 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4194304+2097152 \\ 4194304-2097152 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6291456 \\ 2097152 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 4194304 & 2097152 \\ 2097152 & 4194304 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4194304-2097152 \\ 4194304+2097152 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2097152 \\ 6291456 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 6291456 & 2097152 \\ 2097152 & 6291456 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6291456+2097152 \\ 6291456-2097152 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8388608 \\ 4194304 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 6291456 & 2097152 \\ 2097152 & 6291456 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6291456-2097152 \\ 6291456+2097152 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4194304 \\ 8388608 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 8388608 & 4194304 \\ 4194304 & 8388608 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8388608+4194304 \\ 8388608-4194304 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12582912 \\ 4194304 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 8388608 & 4194304 \\ 4194304 & 8388608 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8388608-4194304 \\ 8388608+4194304 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4194304 \\ 12582912 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 12582912 & 4194304 \\ 4194304 & 12582912 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12582912+4194304 \\ 12582912-4194304 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16777216 \\ 8388608 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 12582912 & 4194304 \\ 4194304 & 12582912 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12582912-4194304 \\ 12582912+4194304 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8388608 \\ 16777216 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 16777216 & 8388608 \\ 8388608 & 16777216 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16777216+8388608 \\ 16777216-8388608 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25165824 \\ 8388608 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 16777216 & 8388608 \\ 8388608 & 16777216 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16777216-8388608 \\ 16777216+8388608 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8388608 \\ 25165824 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 25165824 & 8388608 \\ 8388608 & 25165824 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25165824+8388608 \\ 25165824-8388608 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33554432 \\ 16777216 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 25165824 & 8388608 \\ 8388608 & 25165824 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25165824-8388608 \\ 25165824+8388608 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16777216 \\ 33554432 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 33554432 & 16777216 \\ 16777216 & 33554432 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33554432+16777216 \\ 33554432-16777216 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50331648 \\ 16777216 \end{bmatrix}$

$H_2 \begin{bmatrix} 33554432 & 16777216 \\ 16777216 & 33554432 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3355$

**Exercise 6 (3 points).** Esta parte es electiva. *Responder solo 1 de las siguientes preguntas (Si respondes más de dos, no te calificaré).*

- Dado un heap de  $n$  nodos,  $n_l$  nodos en el subarbol izquierdo y  $n_r$  nodos en el subarbol derecho, Probar que se cumple la siguiente desigualdad:  $n_r \leq n_l \leq 2n_r + 1$   
Hint: En este item puede usar sin probar la relación entre la altura de un heap y su cantidad de nodos sin necesidad de probarlo.
- Probar que la cantidad de nodos en un heap de  $n$  nodos, que tengal altura como mínimo 3, es exactamente igual a  $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ .

} cormen

} cantidad de nodos de altura  $h$