Análisis Probabilístico y Quicksort

Conteo:

1.1 $\quad \text{Sets} \longrightarrow \mathbb{Z}^+$

$\quad\quad S \longrightarrow |S|$

- $|\emptyset| = 0$
- $|S| \geq 0$

A, B disjuntos $\rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$

Espacio Muestral: Ω

$\Omega : \{ w \mid w$ es un outcome $\}$
(resultados)

Evento: (subconjunto de outcomes)

$E \subseteq \Omega \,,\quad E \in 2^{\Omega}$

Probabilidad:

$P : 2^{\Omega} \longrightarrow [0,1]$

$\quad E \longrightarrow P(E)$

input: un evento

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $1 \leq P(E) \leq 1$
- A, B disjuntos $\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Eventos discretos:

$$P(E) = P\left(\bigcup_{w \in E} \{w\} \right) = \sum_{w \in E} P\{w\}$$

- Si se sabe la probabilidad de cada evento se puede saber la probabilidad de todos los eventos

Experimento: lanzar 3 dados

Población de datos numéricos

Prob.	Ω	#c
1/8	c c c	3
:	c c s	2
|	c s c	2
|	c s s	1
|	s c c	2
|	s c s	1
1/8	s s c	1
	s s s	0

variable aleatoria

$\mathcal{E}_1 = \{ \#c = 1 \} \longrightarrow \{ w \mid \#c(w) = 1 \} = (\#c = 1)$

$\mathcal{E}_2 = \{ \#c = 2 \}$

$\mathcal{E}_3 = \{ \#c = 3 \}$

$\mathcal{E}_4 = \{ \#c = 4 \} = \{ \}$

Random Variable (X)

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}^+_0$

$\quad w \longmapsto X(w)$

$=$
- $\rightarrow X =$ # de caras al lanzar 3 monedas
- $\rightarrow \{ w \mid X(w) = c \}$
- $\rightarrow (X = c)$

$\rightarrow P(X = c)$

- Es una asignación
- Es una función
- Definir un evento formalmente es crear una variable aleatoria

$X \rightarrow$ función

$Y \rightarrow$ función

$X + Y \rightarrow$ función

Expected Value

$$E[X] : \text{"media" de } X(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \sum_{c=0}^{\infty} c \cdot P(X=c)$$

input: variable aleatoria

Prob.	Ω	#c	Esperanza	
1/8	c c c	3	$3 \cdot P(\{ccc\})$	$3 \cdot 1/8$ +
⋮	c c s	2	$2 \cdot P(\{ccs\})$	$2 \cdot 1/8$
	c s c	2	⋮	⋮
	c s s	1		
	s c c	2		
	s c s	1		
	s s c	1	$X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$	
1/8	s s s	0		$0 \cdot 1/8$

Se puede agrupar mediante el valor

$$0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) + 4 \cdot P(X=4)$$

Linealidad del valor esperado