Probabilidades

- Función probabilidad

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$
$$E \longmapsto P(E)$$

INPUT: un evento
OUTPUT: probabilidad entre 0 y 1

- función Variable Aleatoria

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}_0^+$$
$$\omega \longmapsto X(\omega)$$

INPUT: un outcome
OUTPUT: un valor discreto

$$(X = c) = \{\omega \mid X(\omega) = c\} \qquad P(X=c)$$

- Todos los outcomes que cumplen c
- Es un evento

- Función Valor Esperado

$$E : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X \longmapsto E[X]$$

INPUT: variable aleatoria
OTPUT: Promedio

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \cdot X(\omega)$$

todos los casos

$$= \sum_{c=0}^{\infty} c\, P(X=c)$$

probabilidad de que la variable aleatoria sea ese valor

Resultados agrupados de la variable aleatoria

Experimento: lanzar 2 dados

$$\Omega = (\{1 - 6\})^2 = \{(i,j) \mid 1 \leq i \leq j \leq 6\}$$

X = Suma de las caras que salen al lanzarlos $= \{2, \text{——}, 12\}$

se utilizan los resultados posibles de la variable aleatoria

$$E[X] = \begin{array}{l} X(1,1) \cdot P(1,1) \\ X(1,2) \cdot P(1,2) \\ X(1,3) \cdot P(1,3) \\ \vdots \\ X(6,6) \cdot P(6,6) \end{array} = \begin{array}{l} 2P(X=2) \\ 3P(X=3) \\ 4P(X=4) \\ \vdots \\ 12P(X=12) \end{array}$$

$$X^2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{O}$$
$$\omega \longmapsto [X(\omega)]^2$$

$$X^2(\{1,5\}) = 6^2 = 36$$

$$E[X+Y] = \sum_{c=0}^{\infty} c\, P((x+y)=c)$$

$$= \sum_{c=0}^{\infty} c\, P\left(\bigcup_{i=0}^{c} (X=i) \cap (Y=c-i)\right)$$

$$= \sum_{c=0}^{\infty} c \cdot \sum_{i=0}^{c} P((X=i) \cap (Y=c-i))$$

son independientes ?

$$= \sum_{c=0}^{\infty} c \cdot \sum_{i=0}^{c} P(X=i) \cdot P(Y=c-i)$$

¿Y ahora que?

$$\boxed{E[X+Y] = E[X] + E[Y]}$$

Demostrado por Matemáticos

Siempre funciona sin importar las variables aleatorias

- Se puede utilizar para separar una variable aleatoria como la suma de dos

X_1: resultado de la primera cara

X_2: resultado de la segunda cara

$\Big\{ \; X = X_1 + X_2$

$$E[X_1] = \sum_{i=1}^{6} i\, P(X_1=i) = \sum_{i=1}^{6} i\, \frac{1}{6} = 3{,}5 \rightarrow E[X_2]$$

$$E[X] = 3{,}5 + 3{,}5 = 7$$

HIRING PROBLEM

Contexto:

- Existe un puesto de trabajo en el cual postulan n candidatos
- Hay un costo por entrevistar y hay un costo por contratación
- La empresa busca reducir costos
- El costo depende del número de contratos, lo cual depende del orden en la que se entrevista los candidatos
- Siempre se contrata si un candidato es mejor que el anterior
- Cada día se contrata a un candidato.

```
HIRE-ASSISTANT(n)
best = 0
For i = 1 to n
    interview candidate i
    if candidate i is better than candidate best
        best = i
        hire candidate i
```

Ejemplo: $\Omega = \{1,2,3\}$ $\quad X$: # contratos $\rightarrow$ X_i = # contratos en el día i

Ω	X
1 2 3	3
1 3 2	2
2 1 3	2
2 3 1	2
3 1 2	1
3 2 1	1

$$E[X] = \sum_{c=1}^{n} c\,P(X=c)$$

Es poki

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

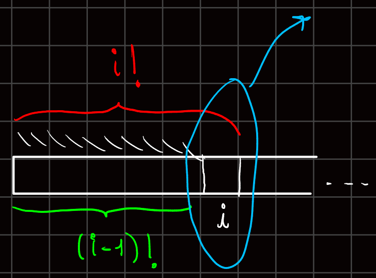
$$E[X_i] = \sum_{c=0}^{\infty} c\,P(X_i=c)$$

$$= \sum_{i=0}^{1} c\,P(X_i=c)$$

$$= 0.P(X_i=0) + 1.P(X_i=1)$$

$$= P(X_i=1)$$

solo te fijas en el i-ésimo día y la probabilidad de escoger ese i es $1/i$



$$\frac{(i-1)!}{i!} = \frac{1}{i}$$

$= P(\#$ contratos en el día $i = 1)$

$= P($contratos en el día $i)$

$= P(A[i] = \max\{A[1 - i]\})$

$= 1/i$

$$= E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln(n) + \Theta(1)$$