Exercise 1 (4 points). Justifiquen si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

- **(1 points)** $n^2 - 10n + 25 \neq \omega(n^2)$ ← T
- **(2 points)** $2025n^2 + 20n + 25 = o(n^3)$ ← T
- **(1 points)** $\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{1.5} \rfloor}{1.5} \right\rfloor = \lfloor \frac{n}{2.25} \rfloor$ ← F

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} f(n) = 3 \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 > 0 \text{ tq} \\ n > n_0 \to |f(n) - 3| < \varepsilon \end{array}}$$

Definición del Límite

(1) $n^2 - 10n + 25 \neq \omega(n^2)$

Supongamos por $\to\leftarrow$

$\forall c > 0,\ \exists n_0 > 0$ tq $\forall n \geq n_0 \quad n^2 - 10n + 25 > c\,n^2$

Para $c = 1$

$(n-5)^2 > n^2$ esta premisa es falsa a partir de $n > 6$

$\therefore\ \forall n > n_c \longrightarrow \underbrace{(n-5)^2 > n^2}_{n < 2,5}$ cuando $n < 6$ $(\to\leftarrow)$

Tenemos que todo $n > n_c$, debería cumplir $n < 2,5$

$n = \lceil n_c + 2,5 + 1 \rceil$ ✗

En la contradicción, propones una constante de modo que no cumpla $\forall n > n_0$

(2) $2025n^2 + 20n + 25 = o(n^3)$

$\forall c > 0, \exists n > 0$ tq $\quad 2025n^2 + 20n + 25 < cn^3$

$$\begin{aligned} 2025n^2 &\leq 2025n^2 \\ 20n &\leq 20n^2 \\ 25 &\leq 25n^2 \end{aligned} \quad (+)$$

$f(n) \leq 2070n^2$

$2070\,n^2 < cn^3$

$\frac{2070}{c} < n$

$\Rightarrow \quad n_0 \geq \frac{2070}{c} + 1 \quad$ cumple

③ $\left\lfloor \dfrac{2\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{4n}{9} \right\rfloor$ es Falso por contraejemplo

Exercise 2 (4 points). Resolver la relación de recurrencia **explicitamente**, usando los métodos vistos en clase. Deberás brindar la **solución exacta** para infinitos valores de n. Usar esta información para encontrar y probar el crecimiento asintótico de $T(n)$.

$$T(n) = \begin{cases} n^2 & 1 \leq n < 45 \\ 2025T(\lfloor n/45 \rfloor) + n^2 - 2024 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Puedes asumir que la función $T(n)$ es creciente.

$$T(45^k) = k45^{2k} + 1$$

$3k \geq k+1 \rightarrow k \geq 1 \quad n \geq 45$

Exercise 3 (3 points). Sea T una función de recurrencia definida de la siguiente manera:

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (T(k) + T(n-k) + 2)$$

Para todo entero $n > 1$, y con $T(1) = 0$. Probar que $T(n) = \Omega(2^n)$

$$T(n) \geq c2^n$$

$$T(n) \geq 2n+2 + \sum_{k=2}^{n-1} T(K)$$

$$\geq 2n + 2 + 1 + C\sum_{k=2}^{n-1} T(k)$$

$$\geq 2n + 2T_1 + 1 + c\sum_{k=2}^{n-1} 2^k$$

$$\geq 2n + 2T_1 + \quad 2$$

Exercise 4 (3 points). Considere el siguiente problema:

Input: Un array $A[1 \dots n]$ de enteros positivos, ordenados de forma estríctamente decreciente.

Output: La cantidad de índices i tal que $A[i] + i \neq n + 1$.

Por ejemplo, trabajando con el array $A = [8; 6; 5; 4; 2; 1]$, el output el programa debería ser 4, porque hay 4 índices que no cumplen esa igualdad.

- Escribir el pseudocódigo de un algoritmo de división y conquista, con complejidad $o(n)$.
- Describa la recurrencia de su algoritmo y justifique su complejidad utilizando el teorema maestro.

```
Algo (A, l, r, n)      \\ cantidad de indices tq  A_i + i ≠ n+1
  if l == r
     return (A[l] + l ≠ n+1)

  m = ⌊(l+r)/n⌋

  if A[n] + n ≠ n+1
     return (n-l+1) + Algo (A, m+1, r, n)
  else
     return Algo (A, l, m, n)
```

Exercise 5 (3 points). Las matrices de Hadamard son matrices $H_0, H_1, \cdots$, definidas de la siguiente manera

- H_0 es la matriz unitaria [1].
- Para $k > 0$, H_k es la matriz de dimensiones $2^k \times 2^k$:

$$H_k = \left[\begin{array}{c|c} H_{k-1} & H_{k-1} \\ \hline H_{k-1} & -H_{k-1} \end{array}\right]$$

$H_0 = [1]$

$H_1 = \left[\begin{array}{c|c} H_0 & H_0 \\ \hline H_0 & -H_0 \end{array}\right]$

Considere el siguiente problema
Input: Un arreglo $A[1..n]$ of integers, donde $n = 2^k$
Output: El arreglo que representa la transpuesta del producto matricial $H_k \cdot A^T$

Diseñe un algoritmo $\Theta(n \log n)$ para resolver el problema anterior. Puede considerar que todos los números envueltos en el producto son lo suficientemente pequeños para que cada producto numérico tome tiempo constante.

INPUT $\quad$ OUTPUT

$$V_{2^k} \longrightarrow H_k \cdot V_{2^k}^T$$

$$\downarrow$$

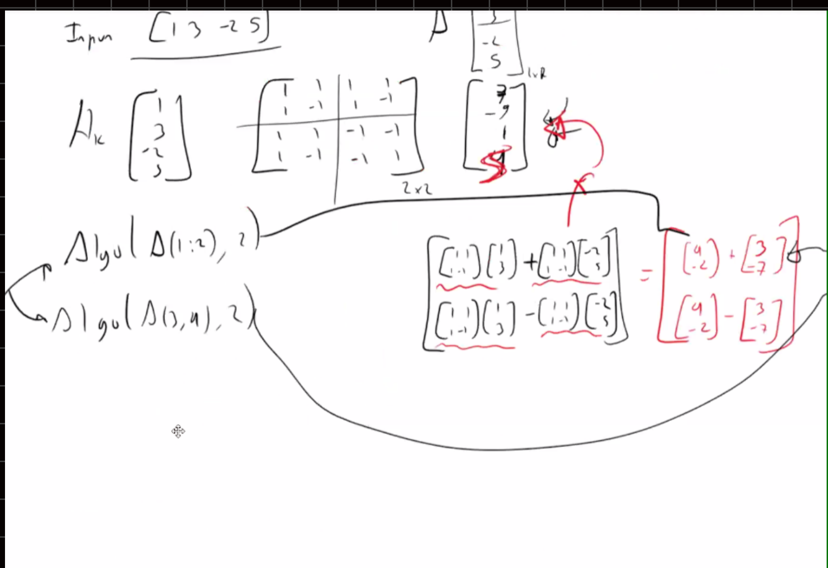
$$H_{k-1} \cdot V_{2^{k-1}}^T$$

$$\begin{bmatrix} a & a \\ a & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + ay \\ ax - ay \end{bmatrix}$$

```
Algo (A, n)
  if (n==1)
     return A[1:1]
  else:
     X = A[1:n/2]
     y = A[n/2+1 : n]
     B = Algo (x, n/2)
     C = Algo (y, n/2)
     D = B + C
     E = B - C
  A[1:n/2] = D
  A[n/2+1 : n] = E
  return A
```

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

$n \lg n$



Exercise 6 (3 points). Esta parte es electiva. *Responder solo 1 de las siguientes preguntas(Si respondes más de dos, no te calificaré).*

- Dado un heap de n nodos, n_l nodos en el subarbol izquierdo y n_r nodos en el subarbol derecho, Probar que se cumple la siguiente desigualdad: $n_r \leq n_l \leq 2n_r + 1$
  Hint: En este item puede usar sin probar la relación entre la altura de un heap y su cantidad de nodos sin necesidad de probarlo.

  cormen

- Probar que la cantidad de nodos en un heap de n nodos, que tengal altura como mínimo 3, es exactamente igual a $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$.

  cantidad de nodos de altura h