[CDP11] 组会论文笔记

这是前三周小组会上的一篇笔记。

阅读：

- Ronald Cramer, Ivan Damgard and Valerio Pastro. On the **Amortized** Complexity of Zero Knowledge Protocols for Multiplicative Relations

贡献：

- 给出了信息论承诺方案和线性秘密分享方案
- 给出了乘法协议（over field），通信复杂度相比于[CDD99]降低了l倍
- 给出了乘法协议（over integer），相比于[DO97,DF02]，不需要任何假设，并且通信复杂度增加较少。
- 将乘法协议扩展到电路中，给出了验证电路的协议，并给出了利用MPC-in the head进一步降低了通信复杂度的方法。

关键技术：

- 预处理的信息论承诺方案：预处理阶段要使得承诺方和接收方带有**未知随机数**，且二者的未知随机数**相互关联**
- 乘法协议/验证电路协议：将许多相似的陈述的证明合并到一个协议中，使得每个证明的**摊销复杂度**变小
- 验证电路协议：利用MPC-in the head ，将对一些随机数的同态承诺换为对MPC各方的View的承诺（不需要满足同态性），进而降低通信复杂度

1 工具一：信息论承诺

利用添加**预处理**过程，使得信息论安全、简单高效的**同态**承诺方案成为可能。

1.1 有限域上

K 是一个很小的域，L 是其扩域，下面是对 $v_1,\cdots,v_\ell \in K$ 的承诺：

- 预处理阶段：可信第三方发送随机的 $u_1,\cdots,u_\ell \leftarrow K$ 以及对应的 $\{m_i := a\cdot u_i + b_i\}_{i\in[\ell]}$ 给承诺者，发送对应的 $a, b_i \leftarrow L$ 给接收者
  - 可以认为发送者持有 u_i 信息及其 $\mathsf{MAC}_{sk_i}(u_i)$，而接收者持有 $sk_i = (a, b_i)$
- 承诺阶段：发送者发送 $u_i - v_i$ 作为承诺；接收者计算 $\mathsf{MAC}_{sk_i}(u_i - v_i)$
- 打开阶段：发送者发送 $v_i, \mathsf{MAC}_{sk_i}(u_i)$ 作为打开；接收者检验是否有 $a\cdot v_i + \mathsf{MAC}_{sk_i}(u_i - v_i) = \mathsf{MAC}_{sk_i}(u_i)$

此带有处理的承诺具有统计 binding 和统计 hiding 性质：

- 统计 binding：承诺发送者在打开阶段无法打开两个 $v_i \neq v_i'$，否则发送者可以计算出 (a, b_i)，事实上 (a, b_i) 的信息是信息论掩盖的（发送者只收到预处理的 $u_i, \mathsf{MAC}_{sk_i}(u_i)$）
- 统计 hiding：接收者无法判断发送者承诺的是消息 v_i 还是 v_i'，这也是一样的原因，接收者只知道 $sk_i = (a, b_i)$，而没有关于 u_i 的信息

具体地，我们可以计算出打破binding的概率：

- $1/|L|$

同时也容易注意到上述性质是具有同态性的：

- 预处理部分：$u_i + u_j, \mathsf{MAC}_{a,b_i+b_j}(u_i + u_j) := \mathsf{MAC}_{sk_i}(u_i) + \mathsf{MAC}_{sk_j}(u_j)$
- 发送者信息部分：$v_i + v_j$
- 接收者密钥部分：$sk_{ij} := (a, b_i + b_j) = sk_i \oplus sk_j$

- 承诺部分：$(u_i - v_i) + (u_j - v_j)$
- 检验部分：$a \cdot (v_i + v_j) + \mathsf{MAC}_{sk_{ij}}(u_i - v_i + u_j - v_j) = \mathsf{MAC}_{sk_i}(u_i) + \mathsf{MAC}_{sk_j}(u_j)$

1.2 整数上

要承诺 k 比特的数 $m_1, \cdots, m_\ell$：

- 预处理：
  - 发送给承诺者 $u_i \leftarrow [-2^{k+\kappa}, \cdots, 2^{k+\kappa}]$ 和对应的 $\mathsf{MAC}_{a,b_i}(u_i)$
  - 发送给接收者 $a \leftarrow \mathsf{Prime}([-2^{\kappa}, \cdots, 2^{\kappa}])$ 和 $b_i \leftarrow [-2^{k+3\kappa}, \cdots, 2^{k+3\kappa}]$
- 其他的都是类似的

此带有处理的承诺具有统计 binding 和统计 hiding 性质：

- 统计 binding：能否计算 $a \cdot \Delta_1 = \Delta_2$，仅仅知道 $u_i, \mathsf{MAC}_{a,b_i}(u_i)$
  - 这里也可以看出为什么 a, b_i 的范围要如此取，b_i 需要完全 smudge $a \cdot u_i$
  - 需要计算 condition on $u_i, \mathsf{MAC}_{a,b_i}(u_i)$ 下，(a, b_i) 有多少种选择可能：$\Theta(2^\kappa / \kappa)$
- 统计 hiding：使用 smudging lemma

同时也容易注意到上述性质是具有同态性的，但是由于是在 $\mathbb{Z}$ 上的，无法支持无限次操作。

2 工具二：线性秘密分享

下面给出支持打包（packed）线性秘密分享方案的线性代数描述，可以对照**packed shamir sharing**进行理解：（LSSS 是 SS 的一种特殊情况，SS 的完整描述需要对**控制结构**的刻画，例如可以利用布尔电路；而 LSSS 我们可以很方便地使用）

- 下面的描述可以用 packed-Shamir Sharing 作为参考物，一部分 index 上放 secrets（例如可以放在最前面的 index，这部分不会被分发出去！），另外的 index 上放冗余的秘密编码信息（这部分分发出去！）
- C 是秘密分享的编码空间，$C \subset K^m$，假定其维度为 n
- I 表示选定的 index 集合 $I = [m]$
- $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in I} \in K^m$
- **索引限制映射** restriction：$\pi_A : \mathbf{x} \mapsto (x_i)_{i \in A}$
- 【Shares 的分布】关于 C，**称 S 提供了 S-uniformity**（刻画常有的 shares 的**分布**性质）当且仅当 $\pi_S(C) = K^{|S|}$
  - 若把 C 表示为矩阵，由某组基底表出，那么这些基底的索引限制映射在 $K^{|S|}$ 上满秩
- 【Recover 算法的存在】关于 C，**称 A 索引确定了 S 索引**（处理 SS 方案的**冗余**，例如 SS 方案当中的恢复 Recover 算法），有：$\exists\, f\ \forall\, \mathbf{c} \in C, s.t.\ (f \circ \pi_A)(\mathbf{c}) = \pi_S(\mathbf{c})$
  - 用矩阵可以表示为 $\exists\, \mathbf{F}\ \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{F}_{|K|}^{n} : \mathbf{FAC} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{SC} \cdot \mathbf{x}$
  - 即有 $(\mathbf{FA} - \mathbf{S}) \cdot \mathbf{C} = 0$，其含义是可以找到投影算子 $\mathbf{F}$，使得任意向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_{|K|}^{m}$ 有在 $\mathbf{FA}$ 和 $\mathbf{S}$ 二者上的投影在 $\mathbf{C}^\perp$ 的**同一个**陪集上
- 【Privacy 的保证】关于 C，**称 A 索引和 S 索引独立**（刻画两部分的 shares 不相互影响，即 privacy 性质），有：$\pi_{A,S}(\mathbf{c}) = (\pi_A(\mathbf{c}), \pi_S(\mathbf{c}))$ 可以**跑遍** $\pi_A(C) \times \pi_S(C)$
  - 直觉是由于 $\pi_{A,S}$ 映射是 regular 的，对于任意一个投影 $\pi_A(\mathbf{c})$ 都**不会影响**$\pi_S(\mathbf{c})$上的值
  - 矩阵角度：$(\mathbf{AC})^\perp$ 包含 $\mathbf{SC}$ 组成的向量空间，即存在 $\mathbf{F}$, s.t. $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{AC})^\perp = \mathbf{SC}$
- 【编码算法的特殊“转移”性质】关于 C，**称 g 编码函数为 S-generator**，当且仅当：
  - 编码算法：$g : K^{|S|+e} \to C$ 为满射，即 $K^{|S|+e}$ 大于等于 C 的维度，**刻画LSSS的编码算法**（此处 e 是为了放置随机数隐藏秘密s）
  - S 拥有 S-uniformity （被下面的“编码转移特点”蕴涵？有了这个条件也能设计 g 满足“编码转移特点”）

- 编码转移特点：$\pi_{[|S|]} = \pi_S \circ g$，此处可以看作秘密的编码 g 的特点，$K^{|S|+e}$ 中前 $|S|$ 的秘密会迁移到编码后 C 的索引集合 S 上
- g 编码函数的存在性：
  - 关于 C, S 提供 S-uniformity
  - $|S| + e \geq \dim(C)$

基于上述的线性代数描述的术语，我们下面定义 LSSS 方案：

- $S \subset I, S^* = I \backslash S; S^*$ 上存放分发的分片，被称为**玩家索引集**，而 S 上放上秘密和不会分发出去的分片，被称为**秘密索引集**，$\pi_j(C)$ 被称为第 j 个玩家的 share 份额（若 $j \in S^*$）
- (C, S)-LSSS 是指：关于 C，有 S-uniformity，以及 S^* 决定 S （即 $|S^*| \geq \dim(C)$）
  - 我们关心的 (C, S)-LSSS generator 是针对 C 的 S-generator
  - 产生 shares 的过程：选择 $K^{|S|+e}$ 的前 $|S|$ 位置作为**秘密** $\mathbf{s}$，再随机填充剩下的 e 个位置作为噪声（防止能直接通过 C 的少数个位置的值就可以直接学习到 $\mathbf{s}$），得到 $\rho_\mathbf{s}$，得到 $\mathbf{c} = g(\rho_\mathbf{s}) \in C$，分配 $\pi_{S^*}(\mathbf{c})$ 给诸位玩家
- A-privacy: $A \subset S^*$ 且关于 C，A 索引上的份额和 S 索引上的份额相互独立，即 A 索引集为一个 unqualified set
  - 若对任意 $|A| = t$ 的 A 都有 A-privacy，则称为 t-privacy
- A-reconstruction: A 决定 S，即 A 索引集为一个 qualified set
  - 若对任意 $|A| = r$ 的 A 都有 A-reconstruction，则称为 r-privacy
- 容易验证，对于 LSSS 而言，都具有上述的 threshold 性质

Schur-Product Transform:

$$ST(C) := \left\{ \forall\, m \in \mathbb{N} :\ \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot (\mathbf{x}_i * \mathbf{y}_i) \mid \mathbf{x}_i,\ \mathbf{y}_i \in C,\ a_i \in \mathbb{N} \right\}$$

显然经过该乘积变换后，维数不减；此时 $|S^*| \leq \dim(C)$ 可能并不一定成立，如果仍然成立，我们可有找到 $\hat{r}$-product reconstruction

Sweeping vectors: 如果我们想要找到 C 上 S 索引集上取值为 $(x_1, \cdots, x_{|S|})$ 且unqualified set A 中对应的份额都与分享秘密0的份额一样

- 找到 $\pi_{A,S}(\mathbf{c}_{A,j}) = (\mathbf{0}, e_j)$ 及其在 g 下的原像 $\mathbf{w}_{A,j}$
- 选择 $\rho_\mathbf{0}$ 的前 $|S|$ 位为 0

$$\rho_\mathbf{0} + \sum_{j=1}^{|S|} x_j \cdot \mathbf{w}_{A,j}$$

3 主协议：批量乘法验证

主协议本质的想法，是利用承诺的**同态性**，将验证$\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{z}$转化为验证$\text{Encode}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_\mathbf{x}) * \text{Encode}(\mathbf{y}, \mathbf{r}_\mathbf{y}) = \text{Encode}(\mathbf{z}, \mathbf{r}_\mathbf{z})$，由于有“编码平移性”，所以可以保证 soundness：

- 若没有 $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{z}$，则对于任意的 $\mathbf{r}_\mathbf{x}, \mathbf{r}_\mathbf{y}$ 都找不到 $\mathbf{r}_\mathbf{z}$，使得上述 Encode 的式子成立，那么恶意 prover 无法蒙骗过关，因为 Encode 本身的纠错特性
- 另外一方面，我们也可以注意到 $\mathbf{r}_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}}$ 的加入可以方便地实现 ZK
- Note：事实上，整个 zksnark 中的 PIOP 构造就是关于纠错码的故事；例如上述的编码如果为 RS code，是不是 $[\mathbf{x}]$ 就是最为简单的多项式承诺，即把特定的 evaluation represnetation 承诺起来？

在上述的指导思想下，主协议的设计是简单的：

- NP Relation = $\{([\mathbf{x}], [\mathbf{y}], [\mathbf{z}]; \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \mid [\mathbf{x}], [\mathbf{y}], [\mathbf{z}] \text{ open to } \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \wedge \mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{z}\}$
- pp 当中包含 $M, \hat{M}$

- Step 1: Prover 发送 $[\mathbf{r_x}], [\mathbf{r_y}], [\mathbf{r_z}]$
- Step 2: Verifier 选择 Encode 后随机的索引集 $O \subset S^*$ 打开（注意为了保证 ZK，此处 O 需要为 unqualified set，这和 CDS94 的思路一致）
- Step 3: Prover 打开，Verifier 验证：
  - 打开是否正确
  - 对应的打开是否满足乘法关系

Protocol Verify Multiplication

1. The prover chooses two vectors $\mathbf{r_x}, \mathbf{r_y} \in K^e$, and sets $\rho_\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{r_x})$, $\rho_\mathbf{y} = (\mathbf{y}, \mathbf{r_y})$. Define $\mathbf{c_x} = M\rho_\mathbf{x}, \mathbf{c_y} = M\rho_\mathbf{y}$. Now, the prover computes $\widehat{\rho}_\mathbf{z} \in K^{l+\widehat{e}}$ such that $\widehat{\rho}_\mathbf{z}$ is consistent with secret $\mathbf{z}$ and such that $\widehat{M}\widehat{\rho}_\mathbf{z} = \mathbf{c_x} * \mathbf{c_y}$.
   Note that this is possible by solving a system of linear equations, exactly because $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{z}$. We then write $\widehat{\rho}_\mathbf{z} = (\mathbf{z}, \widehat{\mathbf{r}}_\mathbf{z})$ for some $\widehat{\mathbf{r}}_\mathbf{z} \in K^{\widehat{e}}$. Set $\widehat{\mathbf{c}}_\mathbf{z} = \widehat{M}\widehat{\rho}_\mathbf{z}$.
2. The prover sends vectors of commitments $[\mathbf{r_x}], [\mathbf{r_y}], [\widehat{\mathbf{r}}_\mathbf{z}]$ to the verifier. Together with the commitments to $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ and $\mathbf{z}$, the verifier now holds vectors of commitments $[\rho_\mathbf{x}], [\rho_\mathbf{y}], [\widehat{\rho}_\mathbf{z}]$.
3. The verifier chooses t uniform indices $O \subset S^*$ and sends them to the prover.
4. Let $\mathbf{m}_i$ be the i'th row of M and $\widehat{\mathbf{m}}_i$ the i'th row of $\widehat{M}$. For each $i \in O$, using the homomorphic property of the commitments, both prover and verifier compute commitments

$$[(\mathbf{c_x})_i] = [\rho_\mathbf{x}]^{\mathbf{m}_i}, \qquad [(\mathbf{c_y})_i] = [\rho_\mathbf{y}]^{\mathbf{m}_i}, \qquad [(\widehat{\mathbf{c}}_\mathbf{z})_i] = [\widehat{\rho}_\mathbf{x}]^{\widehat{\mathbf{m}}_i}.$$

   The prover opens these commitments to the verifier.
5. The verifier accepts if and only if the opened values satisfy $(\mathbf{c_x})_i \cdot (\mathbf{c_y})_i = (\widehat{\mathbf{c}}_\mathbf{z})_i$ for all $i \in O$.

小问题：$\hat{M}$ 从算法的角度来说，应该如何选择？

我们假定 g 的像空间的一组基底为 $\mathbf{m}_1, \cdots, \mathbf{m}_k$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \mathbf{w}_i\right) * \left(\sum_{i=1}^{k} b_i \cdot \mathbf{w}_i\right)$$

从而我们只需要选择 $(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_k) \otimes (\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_k)$ 的一组基即可

主定理：若使用上述的信息论承诺，则上述算法是完美零知识的，且如果存在 $i, x_i y_i \neq z_i$，能通过的上述协议的概率最多为：

$$((\hat{r}-1)/d)^t + 1/|L|$$

ZK 分析：

- 由于 perfect hiding 性质的存在，我们可以将 $[\mathbf{x}, \mathbf{r_x}]$ 解释为 $[\mathbf{r_1}]$，类似地解释其他的，然后保证乘积关系
- 利用 LSSS 的 Privacy 性质可以证明对应的分布完全相同

Soundness 分析（**此处的分析比起常用的 soundness 性质要弱！**此处直接假定了 $[\mathbf{x}], [\mathbf{y}], [\mathbf{z}]$ 直接对应到 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$）：

- 根据纠错码的性质，我们知道最多有 $\hat{r}-1$ 个相同，能在 $((\hat{r}-1)/d)^t$ 概率内逃过检查
- 或者能够采用新的打开方式（打破 binding）
- 对上述使用 Union Bound

关于 Soundness 的讨论，由于本文的 NP Relation 带有预处理，可能需要定义为如下：

$$\{(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3; \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \mid R_{pp_c}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3; \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 1\}$$

- 这里 statement 是 $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3; \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$
- $(pp_c, pp_r) \leftarrow \mathsf{Setup}(1^\kappa)$ 是隐私的只有 prover (comitter)、verifier (receiver) 拿到的预处理参数
- R_{pp_c} 算法即为利用 pp_c 进行打开并检验 $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{z}$，注意到这里是完美 binding

则此处 soundness 定义和一般的 ZKP 不同，考虑一种带有预处理的 soundness：

$$\Pr[(pp_c, pp_r) \leftarrow \mathsf{Setup}(1^\kappa), view_V \leftarrow \langle \mathcal{A}(pp_c), \mathcal{V}(1^\kappa, pp_r)\rangle : R_{pp_c}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \wedge \mathsf{Verify}_{pp_r}(view_V) = 1] \leq \mathsf{negl}(1^\kappa)$$

接下来，再讨论一点和协议相关的问题：

- O 有两种表示方法：一种是直接表示 O 中的数字，第二种是使用 bitmap
- LSSS 的参数设计：通信复杂度显然是 $\Theta(\kappa_c(e+\hat{e}) + \kappa_o t + d)$
  - 假定我们想要达到 2^{-u} 的安全性，同时能保证
    $$e, \hat{e} = O(u), \hat{r} = O(l+u), t = \Theta(u), d = O(l+u), (\hat{r}-1)/d = 1/2$$
  - 从而可以实现均摊通信复杂性 $O(\frac{u}{l}(\kappa_c + \kappa_o))$, 再注意到之前的信息论承诺方案有 $\kappa_c = O(1), \kappa_o = O(u)$，那么，只要 $l > u^2$，则均摊复杂性可以达到 $O(1)$
  - 一个具体的例子：考虑一个 packed shamir sharing，参数选择如下
    - 求值集合 $\{q_1, \cdots, q_l, p_1, \cdots, p_t, \cdots, p_d\}$
    - $2(t+l-1) < d$
    - 从而为 l-multi-secret K-linear SS of length d, with t-privacy, $(2t+2l-1)$-reconstruction
    - 具体参数选择：$u = l, t = l, d = 8l, |K| > 9l, e = 2l, \hat{e} = 4l-1$，此处唯一无法实现的是 $\kappa_c = O(1)$，即我们需要思考如何在常数大小的域上进行选择
    - 但是如果我们感兴趣的命题是在小域 $K_0 \subset K$ 上的，而我秘密分享方案也是在 K 上的，$[K : K_0] = \mu$，那可以利用添加位置以坐标进行模拟（可以验证仍然可以进行对应的矩阵计算）
  - 更优的参数选择：
    - 此处需要 Algebraic Function Field 理论，可以达到上述期望的参数
- 应用到电路验证问题上：直接对线路进行承诺，然后利用此具有 amortization 的协议

4 协议扩展

本质的想法：

- 将电路中输入和输出之间满足关系进行批量验证。对输入和输出进行编码，编码后原来输入上的一些微小改变在编码后都被放大了，验证者对编码后的值进行随机挑战，若输入和输出不满足特定的关系，则验证者可以以很大的概率捕捉到证明者的谎言。

协议简单描述：

- 与批量乘法协议基本一样，只是将原来要验证的关系 $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{z}$ 拓展到更一般的关系 $D(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_v})$

Protocol Verify Circuit

1. The prover chooses v vectors $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_v \in K^e$, and sets $\rho_j = (\mathbf{x}_j, \mathbf{r}_j)$ for $j = 1, \ldots, v$. Define $\mathbf{c}_j = M\rho_j$. Now, the prover computes $\widetilde{\rho}_{\mathbf{z}} \in K^{l+\tilde{e}}$ such that $\widetilde{\rho}_{\mathbf{z}}$ is consistent with secret $\mathbf{z}$ and such that $\widetilde{M}\widetilde{\rho}_{\mathbf{z}} = D(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_v)$.
   Note that this is possible by solving a system of linear equations, because $D(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_v) = \mathbf{z}$. We then write $\widetilde{\rho}_{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}, \widetilde{\mathbf{r}}_{\mathbf{z}})$ for some $\widetilde{\mathbf{r}}_{\mathbf{z}} \in K^{\tilde{e}}$. Set $\widetilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{z}} = \widetilde{M}\widetilde{\rho}_{\mathbf{z}}$.
2. The prover sends vectors of commitments $[\mathbf{r}_j]$, $j = 1, \ldots, v$ and $[\widetilde{\mathbf{r}}_{\mathbf{z}}]$ to the verifier. Together with the commitments to $\mathbf{x}_j$ and $\mathbf{z}$, the verifier now holds vectors of commitments $[\rho_j]$, $j = 1, \ldots, v$, and $[\widetilde{\rho}_{\mathbf{z}}]$.
3. The verifier chooses t uniform indices $O \subset S^*$ and sends them to the prover.
4. Let $\mathbf{m}_i$ be the i'th row of M and let $\widetilde{\mathbf{m}}_i$ be the i'th row of $\widetilde{M}$. For each $i \in O$, using the homomorphic property of the commitments, both prover and verifier compute commitments

$$[(\mathbf{c}_j)_i] = [\rho_j]^{\mathbf{m}_i}, \text{ for } j = 1, \ldots, v, \qquad [(\widetilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{z}})_i] = [\widetilde{\rho}_{\mathbf{z}}]^{\widetilde{\mathbf{m}}_i}.$$

   The prover opens these commitments to the verifier.
5. The verifier accepts if and only if the opened values satisfy
   $D((\mathbf{c}_1)_i, \ldots, (\mathbf{c}_v)_i) = (\widetilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{z}})_i$ for all $i \in O$.

Using a similar proof as for theorem 1, one easily shows

开销:

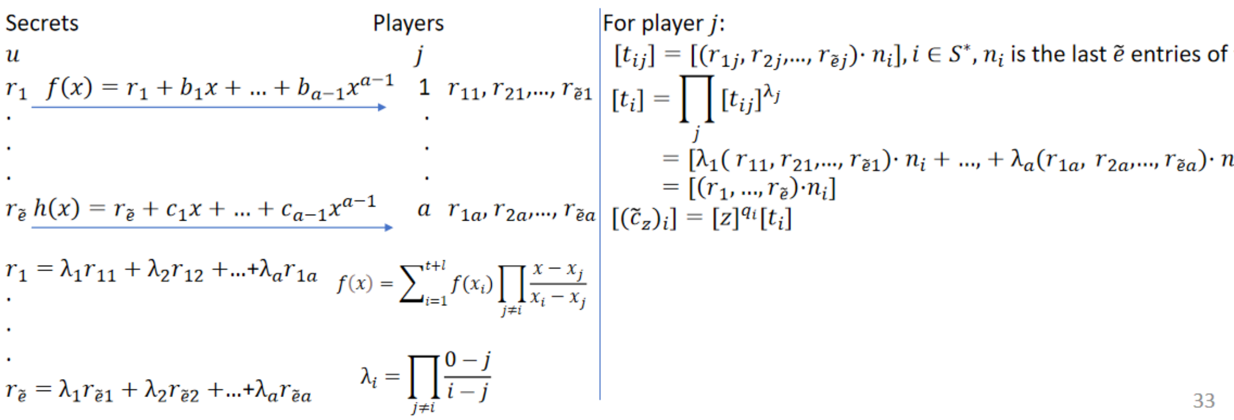
- 若电路的乘法深度为 δ,电路的输入个数为 v ,若保证错误概率为 2^{-l},则摊销复杂度为 $O(2^\delta\kappa + v\kappa + \delta logl)$

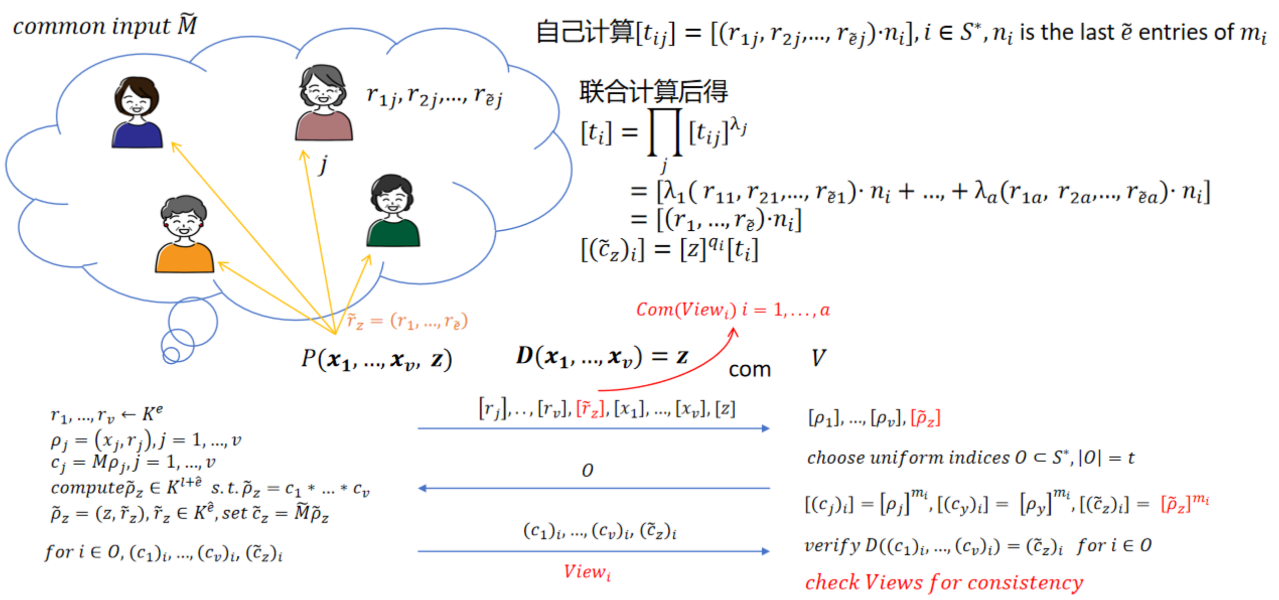
两个变体:

- 乘法门：对电路 D 中的每个乘法门 T,利用 Verify Multiplication protocol进行验证
  - 对乘法门 T 的输入 $\mathbf{x}_T$、$\mathbf{y}_T$ 和输出 $\mathbf{z}_T$ 进行承诺，利用 Verify Multiplication protocol进行验证 $\mathbf{x_T} * \mathbf{y_T} = \mathbf{z_T}$
  - 由于承诺具有**同态性**，在电路 D 中的线性操作可以由验证者自己验证。

    开销：$O(\mu\kappa + v\kappa)$,其中 μ 是电路中乘法门的数量。

    参数选择：当 $\delta = O(logv)$或者 $\delta = O(v)$，且 $\mu > 2^\delta$ 时，使用 Verify Circuit protocol开销更低
- 结合 MPC-in-the-Head:
  - **Purpose**：在 Verify Circuit Protocol中，由于 $\tilde{e} = 2^\delta n + 1 - l$,导致 $\tilde{r}_z = (r_1, \ldots, r_{\tilde{e}})$ 长度比较长，因此利用MPC-in the head的方法， 证明者不直接发送 $[\tilde{r}_z]$,而发送需要的 $[(\tilde{c}_z)_i]$





- 开销：使用MPC-in the head后，验证电路的协议中 $O(\tilde{e}\kappa_c)$部分的开销变为 $O((at+a)\kappa_c)$

5 整数上的补正

本质的想法：

- 将秘密$s_1, \ldots, s_l$和随机数$r_1, \ldots, r_t$看作在固定集合上 $K, |K| = l + t$上的求值，从而确定一个次数小于等于$l + t - 1$的多项式，利用多项式在 $\mathbb{Z} \setminus K$中的求值得到秘密份额（可以看作$s_1, \ldots, s_l$编码后得到的值），验证者选择的挑战$|O| \leq T$，不会泄露关于秘密的任何信息，而且由于LSS的重构性质，保证了若份额之间满足关系 $\text{Encode}(\mathbf{x}, \mathbf{r_x}) * \text{Encode}(\mathbf{y}, \mathbf{r_y}) = \text{Encode}(\mathbf{z}, \mathbf{r_z})$,那么秘密之间以很大的概率满足 $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{z}$。

协议的简单描述：

- LSSS
  - 若使用类似于域上的packed secret sharing scheme，则多项式的系数中可能会出现分数，无法使用整数承诺，因此需要在通过拉格朗日插值后得到的多项式前面乘以 Δ,使其变成整系数多项式。

  Let
$$\Delta = \prod_{\substack{i,j=1,\ldots,d,\\ i \neq j}} (i - j),$$
where d is the number of players. Assume that the secrets $s_1, \ldots, s_l$ to be shared satisfy $s_i \in \{-2^k, \ldots, 2^k\}$ for all i, for some k. In order to share them, sample random integers $a_1, \ldots, a_t \in \{-l2^{k+u}\Delta d!, \ldots, l2^{k+u}\Delta d!\}$ (where u is the security parameter) and use Lagrange interpolation over the rationals to find $g \in \mathbb{Q}[X]$ such that
$$g(-i) = s_i \qquad \text{and} \qquad g(-l-j) = a_j,$$
for $i = 1, \ldots, l$ and $j = 1, \ldots, t$. Since there are $t + l$ points to interpolate, g has degree (less or) equal to $t + l$. Define $f = \Delta \cdot g$. It follows that f is indeed a polynomial over the integers, since Δ is a multiple of each denominator appearing in the coefficients of g. The shares are then the values $f(1), \ldots, f(d)$. Given at least $t + l + 1$ shares, one can reconstruct the secrets, simply by doing Lagrange interpolation over $\mathbb{Q}$.

- Protocol

1. The prover chooses $\mathbf{a_x}, \mathbf{a_y} \in \mathbb{Z}^t$ and uses Lagrange interpolation (over the rationals) to generate two polynomials g_x, g_y, having degree $t+l$, such that

$$g_x(-i) = x_i, \qquad g_x(-l-j) = (\mathbf{a_x})_j, \qquad g_y(-i) = y_i, \qquad g_y(-l-j) = (\mathbf{a_y})_j,$$

for $i = 1, \ldots, l$ and $j = 1, \ldots, t$. The prover now sets $\widehat{g}_z = g_x \cdot g_y$, $f_x = \Delta g_x$, $f_y = \Delta g_y$ and $\widehat{f}_z = \Delta^2 \widehat{g}_z$. As explained above, f_x and f_y are polynomials with integral coefficients and have degree at most $t+l$. Notice that $\widehat{f}_z$ is also a polynomial with integral coefficients, but has degree at most $2(t+l)$.
2. The prover sends commitments $[\mathbf{f_x}]$, $[\mathbf{f_y}]$ and $[\widehat{\mathbf{f}_\mathbf{z}}]$.
3. The verifier checks that $[\mathbf{x}]$, $[\mathbf{y}]$ and $[\mathbf{z}]$ are consistent with f_x, f_y and $\widehat{f}_z$: namely for all $i = 1, \ldots, l$ it computes

$$[\mathbf{f_x}]^{\mathbf{ev}(-i)}[\Delta x_i]^{-1}, \qquad [\mathbf{f_y}]^{\mathbf{ev}(-i)}[\Delta y_i]^{-1}, \qquad [\widehat{\mathbf{f}_\mathbf{z}}]^{\mathbf{ev}(-i)}[\Delta^2 z_i]^{-1},$$

and asks the prover to open these commitments to zero. If any of these openings do not agree with the commitments, the verifier quits.
4. *The prover defines the vector* $x_C = ([\mathbf{x}], [\mathbf{y}], [\mathbf{z}], [\mathbf{f_x}], [\mathbf{f_y}], [\widehat{\mathbf{f}_\mathbf{z}}])$ *containing committed values. We think of* x_C *as a vector of instances for the protocol* P_C*. The prover computes a vector* a_C *as the first message for the protocol* P_C *with instance* x_C*. the prover sends* a_C *to the verifier.*
5. The verifier chooses t uniform indices $O \subset \{1, \ldots, d\}$. Similarly as above, the verifier computes

$$[\mathbf{f_x}]^{\mathbf{ev}(i)} = [(\mathbf{b_x})_i], \qquad [\mathbf{f_y}]^{\mathbf{ev}(i)} = [(\mathbf{b_y})_i], \qquad [\widehat{\mathbf{f}_\mathbf{z}}]^{\mathbf{ev}(i)} = [(\widehat{\mathbf{b}}_\mathbf{z})_i],$$

for $i \in O$. *The verifier generates a vector* e_C *as a challenge on* (x_C, a_C) *according to* P_C. The verifier sends e_C *together with* the index set O to the prover.
6. *The prover computes the vector* z_C *as a reply for* (x_C, a_C, e_C) *according to* P_C. The prover sends z_C *together with* the openings of $[(\mathbf{b_x})_i], [(\mathbf{b_y})_i]$ and $[(\widehat{\mathbf{b}}_\mathbf{z})_i]$ for $i \in O$.
7. The verifier accepts if and only if (x_C, a_C, e_C, z_C) *is an accepted conversation for* P_C *and* the opened values satisfy $(\mathbf{b_x})_i \cdot (\mathbf{b_y})_i = (\widehat{\mathbf{b}}_\mathbf{z})_i$ for $i \in O$.