Nota = 7/10

Prova 1

Jefter Santiago Mares
n° USP: 12559016

Questão 1

Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolução

Utilizando o teorema de Laplace, podemos escrever o determinante da matriz A como

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A_1} - \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A_2}$$

$$\det(A_1) = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1) = 2(1-2) - (-2-1) \Rightarrow \det(A_1) = 1$$

Como os temos dois zeros na ultima linha da matriz A_2 , pelo teorema de Laplace sabemos que

$$\det(A_2) = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -(2-1) \Rightarrow \det(A_2) = -1$$

Segue que $\det(A) = \det(A_1) - \det(A_2) \Rightarrow \det(A) = 1 - (-1)$

$$\boxed{\det(A) = 2}$$

Questão 2

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & -8 & 28 \end{pmatrix}$$

1. Resolva o sistema $Ax = 0$.
2. É possível resolver este sistema usando o método de Cramer?
3. Encontre uma base para o subespaço gerado pelas soluções do sistema $Ax = 0$.

Resolução

Escrevendo a equação na notação matricial temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & -8 & 28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 5z = 0 \\ 4x + 2y + 3z = 0 \\ -x - 8y + 28z = 0 \end{cases} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\sim} \begin{cases} x + 2y - 5z = 0 \\ -6y + 23z = 0 \\ -6y + 23z = 0 \end{cases}$$

Esse sistema é equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 0 \\ y = \frac{23}{6} z \end{cases}$$

e substituindo y na L_1 para encontrar o x

$$x + 2 \cdot \frac{23}{6} z - 5z = 0 \Rightarrow x = \frac{-8}{3} z$$

(1) : O conjunto solução desse sistema, em função de z é

$$S = \left\{ \left(\frac{-8}{3} z, \frac{23}{6} z, z \right) \right\}$$

(2): O método de Cramer é definido para sistemas possíveis e determinados, pelo conjunto solução S fica evidente que o sistema em questão é possível e indeterminado, portanto o método de Cramer não pode ser usado.

(3): Podemos escrever a solução do sistema como $z \cdot \left(\frac{-8}{3}, \frac{23}{6}, 1 \right)$ e disso temos uma base tal que

$$B = \left\{ \left(\frac{-8}{3}, \frac{23}{6}, 1 \right) \right\}$$

Jefter Santiago Mares
n° USP: 12559016

Questão 3

Seja

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Resolva o sistema $Bx = 0$.
2. É possível resolver este sistema usando o método de Cramer?
3. Encontre uma base para o subespaço gerado pelas soluções do sistema $Bx = 0$.

(1) Escrevendo a equação com a matriz dos coeficientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 5z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 0 + 3z = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0} \\ x + 2y - 5z = 0 \\ 3x = 0 \\ \boxed{x = y = 0} \end{aligned}$$

(2) Como o sistema é homogêneo pode ser resolvido pelo método de Cramer, é o caso trivial. Como a solução do sistema já foi feita, mostrarei apenas que a matriz B é invertivel.

$$B \cdot B^{-1} = In$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a + 2d - 5g & b + 2e - 5h & c + 2f - 5i \\ a - d + 3g & b - e + 3h & c - f + 3i \\ a - d & b - e & c - f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2d - 5g = 1 \\ a - d + 3g = 0 \\ a - d = 0 \\ b + 2e - 5h = 0 \\ b - e + 3h = 1 \\ b - e = 0 \\ c + 2f - 5i = 0 \\ c - f + 3i = 0 \\ c - f = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 3g = 0 \rightarrow g = 0 \\ a + 2d = 1 \rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = d = \frac{1}{3} \\ 3h = 1 \rightarrow h = \frac{1}{3} \\ b = e \rightarrow 3e = 5h \Rightarrow e = b = \frac{5}{9} \\ c - f + 3i = 0 \rightarrow 1 + 3i = 0 \Rightarrow i = \frac{-1}{3} \\ c = 1 + f \rightarrow 1 + f + 2f - 5i = 0 \rightarrow f = 5i - 1 \Rightarrow f = \frac{-8}{9} \\ c = 1 + f \Rightarrow c = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 5/9 & 1/9 \\ 1/3 & 5/9 & -8/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) Esse sistema só aceita a base do tipo $B = \{(0, 0, 0)\}$.

Jefter Santiago Mares
n° USP: 12559016

Questão 4

Considere o conjunto

$$\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R}) : \{f : [0 :, 1] \to \mathbb{R}\}$$

com as operações de soma e produto por escalar definidas para $f, g \in \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ pelas regras:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \text{ e } (\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

Mostre que

1. $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ é um espaço vetorial;
2. $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ não tem dimensão finita.

Resolução 1

- **Comutatividade**: Dados $f, g, h \in \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ vamos mostrar que $\underbrace{(f+g)(x)+h(x)}_{\in\mathcal{F}} = \underbrace{(g+h)(x)+f(x)}_{\in\mathcal{F}}$, a soma foi fornecida e como $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ tem imagem nos reais então podemos equivalência é válida $\forall x \in [0,1]$
- **Associatividade**: Dados $f, g \in \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ quero mostrar que $f + g = g + f$. Como f, g estão definidas em $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ podemos usar a operação de soma dada e escrever $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x), \forall x \in [0,1]$
- **Função nula**: Definimos a função nula como $0_{\mathcal{F}}(x) := 0, \forall x \in [0,1]$.
- **Função oposta**: Sejam $f, g \in \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$, mostramos que existe uma função tal que $f + g = 0_{\mathcal{F}}$, usando a definição da soma podemos escrever $f = 0_{\mathcal{F}} - g$ e substituindo o vetor nulo temos que $f = -g \Rightarrow g = -f$ função oposta de $f \in \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$.
- **Associatividade do produto**: Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$. Queremos provar que $(\alpha\beta)\cdot f = \alpha \cdot (\beta f)$. Com definição do produto por escalar podemos escrever $\alpha \cdot \beta = \lambda$ e por propriedades de $\mathbb{R}$ podemos escrever $\alpha \cdot (\beta f) = \alpha \cdot \beta \cdot f$ então $\lambda f = \alpha \cdot \beta \cdot f$.
- **Distributividade**: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ queremos provar que $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$, pela definição da soma fornecida, podemos tratar a função como parte de $\mathbb{R}$ assim podemos escrever a distributividade dessa forma.
- **Elemento neutro da multiplicação**: Quero provar que $1 \cdot f(x) = f(x)$, como essa função está definida no conjunto dos reais, o produto por 1 está definido como o próprio número, como queriamos provar.

Portanto, $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ tem todas operações definidas e é então, um espaço vetorial.

Jefter Santiago Mares
n° USP: 12559016

Questão 10

Discuta e resolva os sistemas lineares em função do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + y - z = 2 - a \\ x + ay - z = -a \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + y - z = 2 - a \\ x + ay - z = -a \end{cases} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \begin{cases} x + y - az = 0 \\ y - ay + a^2z - z = 2 - a \\ -y + ay + az - z = -a \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ temos

$$a^2z + az - 2z = 2 - 2a \Rightarrow z(a^2 + a - 2) = 2(1 - a) \Rightarrow z = \frac{2(1-a)}{a^2 + a - 2}$$

Fatorando o denominador podemos escrever $a^2 + a - 2 = (a - 1)(a + 2)$ e como queremos simplificar a fração, façamos $(a - 1) = -(1 - a)$, então

$$z = \frac{2\cancel{(1-a)}}{-\cancel{(1-a)}(a+2)} \Rightarrow \boxed{z = \frac{-2}{a+2}}$$

O sistema fica

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ y - ay + a^2z - z = 2 - a \\ z = \frac{-2}{a+2} \end{cases}$$

Resolvendo para y: $y - ay + az - z = 2 - a \Rightarrow y(1 - a) + z(a^2 - 1) = 2 - a$

$$y = \frac{(2-a) - z(a^2-1)}{1-a} = \frac{(2-a) + \frac{2}{2+a}(a^2-1)}{1-a} = \frac{\frac{(2-a)(a+2)+2(a^2-1)}{a+2}}{1-a} \Rightarrow \boxed{z = \frac{a^2+2}{(a+2)(1-a)}}$$

Com isso podemos resolver para x usando a equação da L_1: $x + y - az = 0 = az - y$

$$x = \frac{-2a}{a+2} - \frac{a^2+2}{(a+2)(1-a)} = \frac{-2a(1-a) - (a^2+2)}{(a+2)(1-a)} = \frac{-2a + 2a^2 - a^2 - 2}{(a+2)(1-a)} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a^2-2a-2}{(a+2)(1-a)}}$$

Assim, temos a solução do sistema em função do parâmetro a .

$$S = \left\{ \left(\frac{a^2-2a-2}{(a+2)(1-a)}, \frac{a^2+2}{(a+2)(1-a)}, \frac{-2}{a+2} \right) : a \in \mathbb{R} | a \neq 1 \text{ e } a \neq -2 \right\}$$

O sistema é possível e indeterminado para $\forall a \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq 1$ e $a \neq -2$

Jefter Santiago Mares
n° USP: 12559016

Checando se a solução é válida

- Com $a = 1$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y - z = 1 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ Sistema incompátivel.}$$

Logo, $a = 1$ torna o sistema incompátivel.

- Com $a = -2$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -2x + y - z = 4 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases} \quad \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \quad \begin{cases} x + y + 2z0 \\ 3y - 3z = 4 \\ -3y - 3z = 0 \end{cases}$$

Assim temos $y = -z$ e substituindo na L_2 encontramos $z = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ e pela L_1 temos $x = -\frac{8}{3}$, com esses resultados e considerando que $a = -2$ podemos checar essa equivalência fazendo

$$x + y - az = 0 \Rightarrow x + y = az \Rightarrow a = \frac{x + y}{z}$$

$$-2 \overset{?}{=} \frac{-\frac{8}{3} + \frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}}$$

$$-2 \neq 3$$

Portanto, $a = -2$ torna o sistema incompátivel.

Jefter Santiago Mares
n° USP: 12559016