Método das séries (Frobenius)

Jefter Santiago

Contents

1 Mini revisão de séries e séries de Taylor

1.1 Multiplicação de duas séries:

Dadas as funões analiticas em x_0 , $f(x)$ e $g(x)$, com

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \text{ e } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$$

vale a seguinte relação

$$f(x)g(x) := \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n\right]$$

$$f(x)g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$$

onde $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$.

1.2 Série de taylor em torno de um ponto x_0:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}$$

2 Solução em torno de pontos regulares

2.1 Introdução e analiticidade de séries de potências

Dada a série de potências \$ $\sum$ a$_n$ (x-x$_0$)^n\$, se a série converge para valores de x num intervalo $x_0 - \delta, x_0 + \delta$, $\delta > 0$, então a série é analitica em $x = x_0$.

- **Exemplo**: Dada a EDO $a(x)y''(x)b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0$

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

  - 1ž: Escolher o ponto x_0 que vamos analisar.
  - 2ž: Estudar a analiticidade da série.

- **Exemplo**: $(1 - x)y'' + y = 0$

$$y'' + \frac{1}{1-x}y = 0, p(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Pelo critério da razão: $\lim_{n\infty} |r_n| = |x|$, convergente no intervalo $(-1, 1)$ e convergente no ponto 0 . Escrevendo a EDO em formato de séries:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n + 2)(n + 1)a_{n+2}x^n + \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\right] = 0$$

2.2 Solução em séries em torno de pontos regulares

2.2.1 Exemplo: $y''(x) + \sin(x)y(x) = 0$

Temos $p(x) = 0$ e $q(x) = \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$, ambas funções são analiticas em torno de x_0. Escolhendo $x_0 = 0$ temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right] = 0$$

Nesse tipo de resolução podemos definir uma ordem n e tentar encontrar o termo geral a_n e então retornar à série original de $y(x)$ nas condições iniciais dadas.

Abrindo os somatórios e agrupando os termos a partir das menores potências de x até x^3 ;

$$(2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + 5 \cdot 4x^3 + \cdots) + \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right]\left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\right]$$

$$2a_2 + (6a_3 + a_0)x + (12a_4 + a_1)x^2 + (20a_5 + a_2 - \frac{a_0}{6})x^3 + \mathcal{O}(x^4) = 0$$

Relação de independência linear, ou seja, os coeficientes **devem** ser nulos.

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ 6a_3 + a_0 = 0 \\ 12a_4 + a_1 = 0 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a_3 &= -\frac{a_0}{3} \\ a_4 &= -\frac{a_1}{12} \\ a_5 &= -\frac{a_0}{120} \end{aligned}$$

Escrevendo $y(x)$ em termo dos coeficientes encontrados:

$$y(x) = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{6}x^3 - \frac{a_1}{12}x^4 + \frac{a_0}{120}x^5 + \cdots$$

$$y(x) = a_0\left[1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right] + a_1\left[x - \frac{x^4}{12} + \cdots\right]$$

Onde a_0 e a_1 são as condições de contorno.

2.2.2 Exemplo: $y'' + k^2 y = 0, k \in \mathbb{R}$ e $y(x) = ?$

Exemplo de uma EDO que podemos resolver sem o método de séries. Caso do movimento oscilatório. De forma direta, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n] + k^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + k^2 a_n\right]x^n = 0$$

$$a_{n+2} = -k^2\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}, n = 0, 1, 2, ...$$

$$a_2 = -k^2\frac{a_0}{2}$$

$$a_3 = -k^2\frac{a_1}{3 \cdot 2}$$

$$a_4 = -k^2\frac{a_2}{4 \cdot 3} = k^4\frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$a_5 = -k^2\frac{a_3}{5 \cdot 4} = k^4\frac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

Separando em termos pares e ímpares:

- n par: $n = 2j, j = 0, 1, 2, ...$

$$a_{2j+2} = -k^2 \frac{a_{2j}}{(2j+2)(2j+1)} = -\frac{k^2}{(2j+2)(2j+1)} \left[-\frac{k^2 a_{2j-2}}{(2j)(2j-1)} \right]$$

$$a_{2j+2} = \frac{(-k^2)(-k^2)\cdots\cdot(-k^2)a_0}{(2j+2)(2j+1)(2j)(2j-1)\cdots 2)} = \frac{(-k^2)^{j+1}a_0}{(2j+2)!}$$

$$a_{2j+2} = \frac{(-k^2)^{j+1}a_0}{[2(j+1)]!} \Rightarrow \boxed{a_{2j} = (-1)^j \frac{k^{2j}a_0}{(2j)!}}$$

- n ímpar: $n = 2j + 1$

$$a_{2j+3} = -\frac{k^2 a_{2j+1}}{(2j+3)(2j+2)} = \frac{(-k^2)(-k^2)a_{2j-1}}{(2j+3)(2j+2)(2j+1)(2j)\cdots}$$

$$a_{2j+3} = \frac{(-k^2)(-k^2)\cdots(-k^2)a_1}{(2j+3)(2j+2)(2j+1)\cdots 3 \cdot 2}$$

$$a_{2j+3} = \frac{(-1)^j(k^2)^{j+1}a_1}{(2j+3)!} \Rightarrow \boxed{a_{2j+1} = (-1)^j \frac{(k)^{2j}a_1}{(2j+1)!}}$$

Voltando à série original, temos

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{\text{n par}} a_n x^n + \sum_{\text{n impar}} a_n x^n$$

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \underbrace{a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{=\frac{a_1}{k}\left[kx - \frac{k^3x^3}{3!} + \frac{k^5x^5}{5!} - \frac{k^7x^7}{7!} + \cdots\right]}$$

$$y(x) = a_0 \cos(kx) + \frac{a_1}{k}\sin(kx)$$

$$\boxed{y(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)}$$

3 Método de séries para pontos singulares regulares

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0$$

Se $p(x)$ e $q(x)$ forem analíticas em $x = x_0$, então $x = x_0$ é um **ponto ordinário** e vale a solução do tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

caso contrário, $x = x_0$ é um ponto singular, portanto precisamos de um outro tratamento para poder escrever a solução no formato de série de potências.

Se $p(x)$ **ou** $q(x)$ não forem analíticas em $x = x_0$, mas $(x - x_0)p(x)$ e $(x - x_0)^2 q(x)$ forem, então $x = x_0$ é dito ser um **ponto singular regular**. Caso contrário $x = x_0$ é um ponto singular irregular(esse caso não é tratado nessa disciplina, então não tentei buscar entender ainda. . .).

- **Exemplo**: $x^2y'' + 2xy' + 3y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 0$

$$xp(x) = 2 \text{ e } x^2q(x) = 3$$

No caso $x = x_0$ ser ponto singular regular, procuramos uma solução em série de potências com a seguinte forma:

$$y(x) = (x - x_0)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, a_0 \neq 0 \tag{1}$$

Impomos que ao menos uma das soluções devem ser dessa forma e caso o $\lambda = 0$, ou seja, conseguimos apenas uma solução a partir dele, podemos chegar à outras soluções por outros métodos como redução de ordem ou Wronksiano...

Expandindo $(x - x_0)p(x)$ e $(x - x_0)^2q(x)$ em séries de potências:

$$\begin{cases} (x - x_0)p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n \\ (x - x_0)^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n \end{cases}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^{n+\lambda}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n + \lambda)a_n(x - x_0)^{n+\lambda-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n + \lambda)(n + \lambda - 1)a_n(x - x_0)^{n+\lambda-2}$$

Saindo da forma canônica multiplicando a EDO por (x - x_0)^2:

$$(x - x_0)^2y'' + (x - x_0)\left[(x - x_0)p(x)\right]y' + \left[(x - x_0)^2q(x)\right]y = 0$$

$$(x - x_0)^2 \sum_{n=0}^{\infty}(n + \lambda)(n + \lambda - 1)a_nx^{n+\lambda-2} + (x - x_0)\sum_{n=0}^{\infty}\left[(x - x_0)p(x)\right]\Big((n + \lambda)a_n(x - x_0)^{n+\lambda-1}\Big)$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\left[(x - x_0)^2q(x)\right]a_n(x - x_0)^{n+\lambda} = 0$$

Fazendo a expansão em série de Taylor para $(x - x_0)p(x)$ e $(x - x_0)^2q(x)$ de forma a considerar apenas o termo mais baixo p_0, q_0, temos que

$$(x - x_0)p(x) = p_0 + (x - x_0)p_1 + (x - x_0)^2p_2 \cdots \Rightarrow p_0 = \lim_{x\to x_0}(x - x_0)p(x)$$

$$q_0 = \lim_{x\to x_0}(x - x_0)^2q(x)$$

Rearranjando as séries acima e simplificando as potências temos a seguinte série:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n + \lambda)(n + \lambda - 1)a_n + [(x - x_0)p(x)](n + \lambda)a_n + [(x - x_0)^2q(x)]a_n\right](x - x_0)^{n+\lambda} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n + \lambda)(n + \lambda - 1) + \left[(x - x_0)p(x)\right](n + \lambda) + \left[(x - x_0)^2q(x)\right]\right]a_n(x - x_0)^{n+\lambda} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+\lambda)(n+\lambda-1)+(n+\lambda)p_0+q_0\right]a_n(x-x_0)^{n+\lambda}$$

Abrimos as séries e escrevendo as combinações em termos de ordem mais baixa. Isso é útil porque assim podemos fatorar e chagar numa relação para λ:

$$\lambda(\lambda-1)a_0\,(x-x_0)^{\lambda}+p_0\lambda a_0(x-x_0)^{\lambda}+q_0a_0(x-x_0)^{\lambda}+\mathcal{O}(x-x_0)^{\lambda+1}=$$
$$a_0\left[\lambda(\lambda-1)+\lambda p_0+q_0\right](x-x_0)^{\lambda}+\mathcal{O}(x-x_0)^{\lambda+1}=0$$

P odemos escrever a relação:

$$\lambda\,(\lambda-1)+\lambda p_0+q_0=0 \tag{2}$$

- **Exemplo**: $y''+\frac{2}{x}y'+\frac{3}{x^2}y=0, x_0=0$

$$p(x)=\frac{2}{x}\Rightarrow xp(x)=2=p_0+p_1x+p_2x^2+...$$
$$q(x)=\frac{3}{x^2}\Rightarrow x^2q(x)=3=q_0+q_1x+q_2x^2+...$$

Logo, $x_0=0$ é um ponto singular regular e $y(x)=x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

Encontrando o coeficiente λ usando a equação indicial (2) :

$$\lambda(\lambda-1)+p_0\lambda+q_0=0\Rightarrow\lambda^2+\lambda+3=0$$
$$\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}\Rightarrow\lambda_1=-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{11}}{2},\lambda_2=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{11}}{2}$$

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)=x^{\lambda_1}\sum_{n=0}a_nx^n+x^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

3.1 Casos para λ

Esse indice é definido a partir da relação (2) e para cada solução da equação quadrática tem significados diferentes. Eles foram divididos em alguns casos.

Nessa etapa do curso muitos desses resultados não foram rigorosamente justificados e em alguns deles não fui atrás de tentar entender como chegar nessas relações por conta própria. :p

3.1.1 Caso $\lambda\pm\notin\mathbb{R}(\lambda_-=\lambda_+^*)$

A solução de λ é um complexo. Nesse caso o complexo conjugado também é válido, mas como queremos apenas soluções reais $y(x)$, precisamos tratar o caso complexo a fim de conseguir apenas a perte real da solução. Para isso utilizamos as seguintes soluções:

$$y_1(x)=|x-x_0|^{\lambda_+}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, a_0\neq0$$
$$y_2(x)=|x-x_0|^{\lambda_-}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n, b_0\neq0$$

3.1.2 Caso $\lambda\pm \in \mathbb{R}(\lambda_+ \geq \lambda_-)$

1. Subcaso: $\lambda_+ = \lambda_-$

$$y_1(x) = |x - x_0|^{\lambda_+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Nesse caso a segunda solução pode ser construida a partir da primeira e fica em termos de logaritmo e outra série. Só utilizamos o resultado. Se em algum momento eu estudar as demonstrações posso coloca-las aqui.

$$y_1(x) = y_1(x) \ln |x - x_0| + |x - x_0|^{\lambda_+} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

Além disso, para definir os coeficientes b_n é necessário substitutir a solução na EDO original e encontrar o termo geral. Ao menos foi isso que entendi.

2. Subcaso: $\lambda_+ - \lambda_- \in \mathbb{N}^*$

$$y_1(x) = |x - x_0|^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$y_2(x) = \alpha y_1(x) \ln |x - x_0| + |x - x_0|^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

3. Subcaso $0 < \lambda_+ - \lambda_- \notin \mathbb{N}$

$$y_1(x) = |x - x_0|^{\lambda_+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$y_2(x) = |x - x_0|^{\lambda_-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

3.2 **Exemplo**: Equação de Bessel

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 + \nu^2) y = 0; \nu \in \mathbb{R}_+$$

Para $x_0 = 0$

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

$$p(x) = \frac{1}{x}$$

e $q(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x2}$

Não são analiticas em x_0 , encontrando os pontos singulares regulares:

$$xp(x) = 1 \text{ e } x^2 q(x) = x^2 - \nu^2$$

essas funções são analiticas em x_0 . Resolvendo a equação indicial:

$$\lambda(\lambda - 1) p_0 \lambda + q_0 = 0$$

$$p_0 = \lim_{x \to x_0} xp(x) = 1 \text{ e } q_0 = \lim_{x \to x_0} x^2 q(x) = -\nu^2$$

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - \nu^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \nu^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\nu$$

(Se o μ não tivesse sido definido como estritamente positivo a solução seria $\lambda = \pm|\nu|$).

- Exercicio proposto: resolver para $\nu = 0, \nu = \frac{1}{2}, \nu = 1$