

NOTA: 8,5

Universidade de São Paulo

Instituto de Física de São Carlos

Laboratório de Física II
Prof. Iouri Poussep

Prática I

Rotações de corpos rígidos e conservação do momento angular

Beatriz Nascimento Pereira nº 12559295
Jefer Santiago Mares nº 12559016
Pedro dos Santos Silva nº 11849028

Sumário

1	Resumo	3
2	Objetivo	3
3	Introdução	3
4	Método Experimental	3
4.1	Experimento 1 - Determinação experimental do momento de inércia de um disco	3
4.1.1	Definindo o momento de inércia usando a conservação de energia	3
4.1.2	Definindo o momento de inércia através da geometria do corpo	4
4.2	Experimento 2 - Choques rotacionais	5
5	Resultados e Discussão	5
5.1	Experimento 1 - Determinação experimental do momento de inércia de um disco	5
5.1.1	Definindo momento de inércia usando a conservação de energia	5
5.1.2	Definindo momento de inércia através da geometria do disco	6
5.2	Experimento 2 - Choques rotacionais	7
6	Conclusão	9
7	Referências	9
8	Apêndices	10
8.1	Saltos acrobáticos	10
8.2	Momento de inércia variável (banquinho giratório)	10
8.3	Banquinho giratório com a roda de bicicleta	10

Lista de Figuras

1	Sistema do experimento 1: (a) Estado inicial em repouso. (b) Estado após um tempo qualquer de descida.	4
2	Roda de Maxwell	4
3	Sistema do experimento 2	5
4	Velocidade ω_1 em função do tempo	7

Lista de Tabelas

2	Velocidade ω_1 em função do tempo	7
3	Energia cinética de rotação em função do tempo	8
4	Velocidades angulares antes e depois das colisões	8
5	Momento de inércia I_2 para cada colisão	8
6	Variação da Energia para cada Execução do Experimento	9

Resumo

Nesta prática verificamos através de dois experimentos alguns fatores relacionados a choques rotacionais, momento de inércia e momento angular. No primeiro experimento, com o intuito de calcular o momento de inércia da peça 1, uma roda de Maxwell através de suas características geométricas, chegamos ao resultado de $(5,6 \pm 0,9) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Já no segundo experimento, calculamos a mesma grandeza da peça 2, um disco perfurado, porém no contexto de choque rotacional entre o disco e a roda, chegando ao resultado de $(4,5 \pm 0,4) \cdot 10^{-3}$. Além disso fizemos uma análise à respeito da variação de energia durante o experimento. Por fim, respondemos questões relacionadas aos vídeos que nos foram fornecidos, explicando algumas situações comuns nas quais há o envolvimento do movimento rotacional.

Objetivo

O principal objetivo dessa prática é estudar a conservação do momento angular e a dinâmica de rotação de corpos rígidos para determinar o momento de inércia da roda de Maxwell e analisar a dinâmica de colisões rotacionais plásticas.

Introdução

No primeiro experimento vamos analisar a conservação de energia do movimento da roda de Maxwell que, além de possuir um movimento translação, possui um movimento de rotação, incluído nos cálculos de energia cinética para que possamos determinar, ao final, a inércia do disco. Para isso, iremos utilizar a conservação da energia mecânica, de maneira que no início existirá apenas energia potencial gravitacional e ao final existirá apenas a energia cinética de translação e de rotação. Além disso, no segundo experimento, iremos estudar a conservação do momento angular em choques de corpos rígidos. Fazendo a simulação de três choques, analisando o momento de inércia e a aceleração angular depois do choque.

Método Experimental

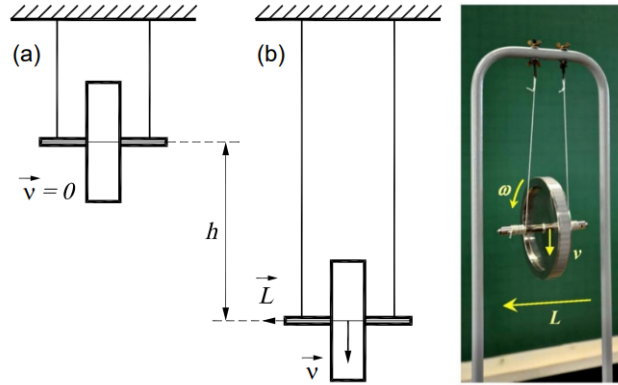
Experimento 1 - Determinação experimental do momento de inércia de um disco

Nesse experimento foram medidos os momentos inércia de duas formas diferentes, pela geometria dos componentes do disco e pela conservação de energia. Após a coleta de dados foram feitos os cálculos do momento de inércia para os dois experimentos e por fim checamos sua equivalência utilizando a relação $|x_1 - x_2| < 2(\sigma_1 + \sigma_2)$, com x_1 e x_2 sendo duas medidas quaisquer e σ_1 e σ_2 suas incertezas.

–Definindo o momento de inércia usando a conservação de energia

Sabendo os valores da massa m do disco de giro sob o barbante r , da altura h . Podemos usar a conservação de energia para chegar a uma definição algébrica para o momento de inércia I . Então no estado inicial, temos que a energia total do sistema é a potencial gravitacional, ou seja, $E_a = mgh$. Para o estado final, teremos que $E_b = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, onde o primeiro termo é a energia cinética de translação e o segundo a de rotação. Lembrando que $\omega = \frac{v}{r}$, $h = \frac{1}{2}at^2$ e $v = at$, Então podemos escrever a velocidade do centro de massa como $v = \frac{2h}{t}$. Substituindo em ω temos $gh = \frac{v^2}{2} \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)$. Escrevendo a equação para o momento de inércia, a dedução do momento inércia em função do

Figura 1: Sistema do experimento 1: (a) Estado inicial em repouso. (b) Estado após um tempo qualquer de descida.



tempo de descida entre **a** e **b**, raio de rolamento e massa da roda fica

$$I = \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) mr^2 \quad (1)$$

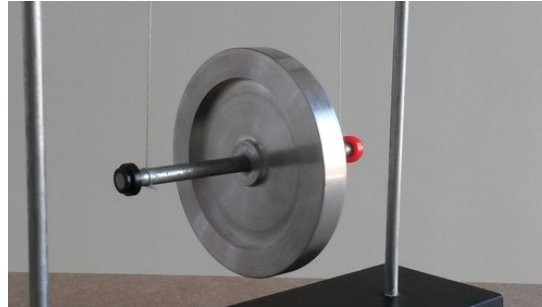
E a incerteza será dada pela propagação de erro

$$\Delta I = (2r\Delta rm + \Delta mr^2) \left(\frac{gt^2}{2h} \right) + \frac{g}{2} \left(\frac{2t\Delta t \cdot h + \Delta h \cdot t^2}{h^2} \right) mr^2 + (2r\Delta rm + \Delta mr^2) \quad (2)$$

–Definindo o momento de inércia através da geometria do corpo

O disco pode ser decomposto em 3 peças cujo momento de inércia é mais fácil de calcular, um anel, um disco e um cilindro.

Figura 2: Roda de Maxwell



1. Cilindro: $I_c = \frac{1}{2}mr^2$
Incerteza: $\Delta I_c = \frac{1}{2}(2r\Delta rm + \Delta mr^2)$
2. Disco e Anel: $I = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$
Incerteza: $\Delta I = \frac{1}{2}[\Delta m(r_1^2 + r_2^2) + 2m(r_1\Delta r_1 + r_2\Delta r_2)]$

O momento de inércia total da roda será a soma

$$I = I_a + I_c + I_d \quad (3)$$

A incerteza do momento de inércia será

$$\Delta I = \Delta I_a + \Delta I_c + \Delta I_d \quad (4)$$

Experimento 2 - Choques rotacionais

Para esse experimento foram fornecidas informações à cerca das características geométricas da peça

O momento de inércia da peça 1 pelas características geométricas é dado pela equação

$$I = \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2) \quad (5)$$

onde r_1 e r_2 são respectivamente raio interno e raio externo. A incerteza do momento de inércia será dada por

$$\Delta I = \frac{1}{2}[(\Delta m(r_1^2 + r_2^2) + 2m(r_1\Delta r_1 + r_2\Delta r_2))]$$

Sabendo que o sistema conserva o momento angular $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$, para uma colisão perfeitamente inelástica com a velocidade angular $\omega_2 = 0$ inicial, temos que $I_1\omega_1 = (I_1 + I_2)\omega$. Como queremos calcular o momento de inércia da peça 2 e sabemos o da peça 1, escrevemos a relação

$$I_2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega} - 1\right) I_1 \quad (6)$$

onde I_1 é o valor obtido pela geometria do objeto na (5). A incerteza será

$$\Delta I_2 = \frac{\Delta I_1 \cdot \omega_1 + \Delta \omega_1 \cdot I_1}{\omega^2} + \Delta I_1 \quad (7)$$

Outra relação importante que pode ser tirada apenas reorganizando os termos é a da velocidade final adquirida pelo conjunto:

$$\omega = \frac{I_1 \cdot \omega_1}{I_1 + I_2} \quad (8)$$

E a incerteza propagada para essa fórmula será:

$$\Delta \omega = \frac{(\Delta I_1 \cdot \omega_1 + \Delta \omega_1 \cdot I_1)(I_1 + I_2) + (\Delta I_1 + \Delta I_2)(I_1 \cdot \omega_1)}{(I_1 + I_2)^2} \quad (9)$$

Também foram calculadas as variações de energia cinética rotacional das peças, afim de constatar se houve ou não conservação de energia no sistema.

A energia cinética na rotação é dada por

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (10)$$

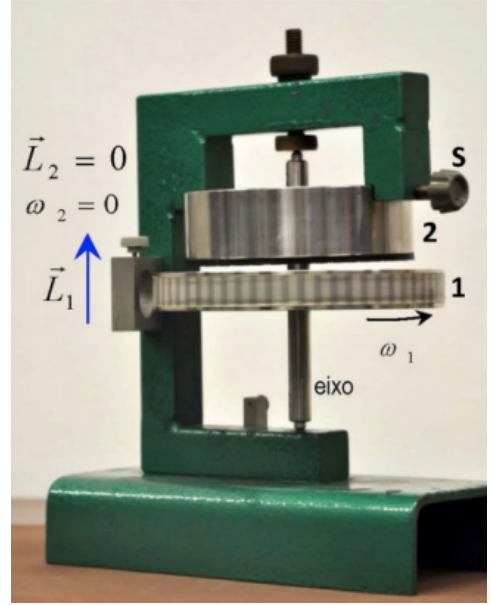


Figura 3: Sistema do experimento 2

Resultados e Discussão

Experimento 1 - Determinação experimental do momento de inércia de um disco

–Definindo momento de inércia usando a conservação de energia

Esses são os dados que foram fornecidos no vídeo. 2

n	$t \pm 0,01$ (s)
1	3,13
2	3,15
3	3,14

Tabela 1: Medidas de tempo da descida.

Calculamos o desvio padrão para as 3 medidas de tempo e encontramos um valor para o tempo igual a $t = (3,14 \pm 0,01)s$. A partir dessa medida podemos fazer o cálculo do momento de inércia em função do tempo usando as equações (1) e (2). O momento de inércia será

$$I_{exp} = [(5,6 \pm 0,013) \cdot 10^{-3}] kg \cdot m^2$$

–Definindo momento de inércia através da geometria do disco

1. Cilindro

(a) Raio = $[(0,6 \cdot 10^{-2} \pm 1 \cdot 10^{-4})]m$


(b) Massa = $(0,12125 \pm 1 \cdot 10^{-5})kg$

$$I_c = [(2,18 \pm 0,072) \cdot 10^{-6}] kg \cdot m^2$$

2. Disco

(a) Raio externo = $(0,6 \cdot 10^{-2} \pm 1 \cdot 10^{-4})m$

(b) Raio interno = $(6,25 \cdot 10^{-2} \pm 1 \cdot 10^{-4})m$


(c) Massa = $(0,4707 \pm 1 \cdot 10^{-5})kg$ 

$$I_d = [(9,2 \pm 0,029) \cdot 10^{-4}] kg \cdot m^2$$

3. Anel

(a) Raio interno = $[(6,25 \cdot 10^{-2} \pm 1 \cdot 10^{-4})]m$

(b) Raio externo = $[(6,60 \cdot 10^{-2} \pm 1 \cdot 10^{-4})]m$

(c) Massa = $(9,238 \cdot 10^{-1} \pm 1 \cdot 10^{-5})kg$ 

$$I_a = [(4,5 \pm 0,013) \cdot 10^{-3}] kg \cdot m^2$$

A partir das equações (3) e (4) podemos calcular o valor total do momento de inércia do disco.

$$I_{geo} = [(5,3 \pm 0,016)10^{-3}] kg \cdot m^2$$

Constatamos a equivalência dos dois resultados I_{exp} e I_{geo} por meio da expressão $|x_1 - x_2| < 2 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)$, que é verdadeira para as medidas com as incertezas encontradas. Fazendo uma média entre eles temos que o momento inércia será em torno de $[(5,6 \pm 0,9) \cdot 10^{-3}] kg \cdot m^2$.

Já era esperada uma variação entre os dois valores medidos pois tivemos duas maneiras diferentes de calcular o momento de inércia. Os erros que foram encontrados estão dentro de uma margem de erro aceitável e se dão principalmente pela precisão dos instrumentos utilizados em cada forma de medir. Também já era esperado que a incerteza do momento de inércia encontrada pela medida direta fosse mais precisa, pois foi encontrada através de medidas diretas.

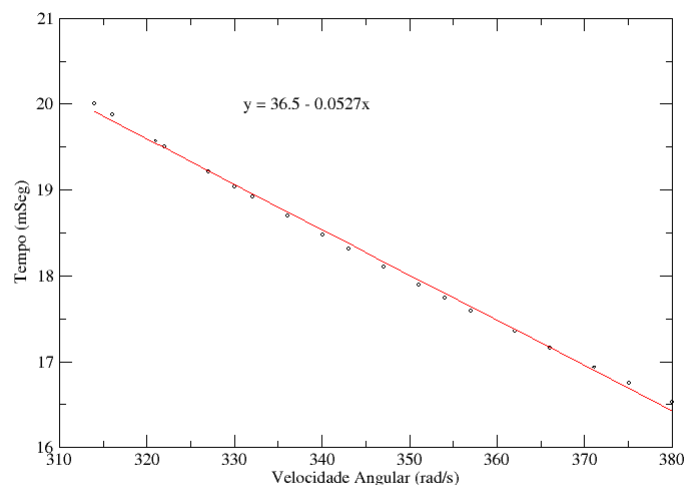
Experimento 2 - Choques rotacionais

Ao girar livremente, percebemos que a velocidade angular ω_1 decai em função do tempo, como podemos observar na tabela 2 e no gráfico, na imagem 4.

Tabela 2: Velocidade ω_1 em função do tempo

$t \pm 0,001$ (s)	$\omega \pm 0,001$ (rad/s)
314	20,010
316	19,883
321	19,574
322	19,513
327	19,215
330	19,040
332	18,925
336	18,700
340	18,480
343	18,318
347	18,107
351	17,901
354	17,749
357	17,600
362	17,357
366	17,167
371	16,936
375	16,755
380	16,535

Figura 4: Velocidade ω_1 em função do tempo



Esse decaimento é dado pela função $y = -0,0527x + 36,5$, com erro associado de 0,0007 no coeficiente angular e 0,2 no coeficiente linear. Isso significa que a desaceleração média é de $52,7 \pm 0,7 \text{ rad/s}$.

Podemos ainda montar a tabela 3 que relaciona a energia cinética com o tempo. Para isso, basta utilizarmos a equação 10:

Tabela 3: Energia cinética de rotação em função do tempo

$t \pm 0,001$ (s)	$E \pm 0,006$ (J)
0,314	1,061
0,316	1,048
0,321	1,015
0,322	1,009
0,327	0,978
0,330	0,960
0,332	0,950
0,336	0,927
0,340	0,905
0,343	0,889
0,347	0,869
0,351	0,850
0,354	0,835
0,357	0,821
0,362	0,798
0,366	0,781
0,371	0,760
0,375	0,744
0,380	0,725

E com isso, podemos concluir que a cada ciclo há uma variação média de energia cinética de $-0,018 \pm 0,006$ J. Essa variação é de aproximadamente 3% do valor da energia cinética do sistema em cada ponto. Assim, é uma variação muito pequena, e por conta disso, a análise poderá ser realizada com boa precisão (dentro do erro associado).

A partir disso, podemos agora fazer a análise das colisões, nas quais o disco 1 estará em movimento e o disco 2, com velocidade angular nula será solto, de modo que o sistema assuma nova velocidade angular, conforme a tabela 4, cujo erro associados às medidas é de $\pm 0,001$ rad/s.

Tabela 4: Velocidades angulares antes e depois das colisões

n	$\omega_1(rad/s) \pm 0,001$	$\omega(rad/s) \pm 0,001$
1	14.444	7.453
2	22.765	12.177
3	24.353	13.629

A partir destes dados, assumindo conservação de momento durante a colisão, podemos determinar, pelo uso da equação 5, o momento de inércia I_2 da peça 2. Organizamos os resultados na tabela:

Tabela 5: Momento de inércia I_2 para cada colisão

n	I_2
1	$0,0049 \pm 0,0002$
2	$0,0046 \pm 0,0003$
3	$0,0042 \pm 0,0004$

E portanto, o momento de inércia é de $(4,5 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$. Fazendo o cálculo do momento de inércia da peça 2 a partir de sua geometria, temos, por meio da equação 5, levando em conta que

seu raio interno é $(3,25 \pm 0,01)$ cm, seu raio externo é $(6,0 \pm 0,01)$ cm e sua massa é $(2,2429 \pm 0,0001)$ kg:

$$I_2 = \frac{1}{2}(0,06^2 + 0,0325^2) \cdot 2,2429 = 0,0052217$$

Assim, o valor calculado geometricamente de I_2 é $(0,0052 \pm 0,0002) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

De modo que o resultado observado acima é consideravelmente próximo do valor encontrado pelo método experimental (já era esperado que o método experimental fosse um pouco menor que o geométrico, dada a dissipação de energia).

Embora tenhamos repetido o experimento três vezes, não é vantajoso calcular ω_1 e ω médios, pois isso não traria nenhuma vantagem estatística para a análise, visto que em cada execução uma quantidade de movimento diferente é fornecida.

Por fim, podemos analisar a variação de energia cinética relativa nas três execuções do experimento. Ao calcularmos a energia cinética inicial e final em cada uma das execuções, assim como a porcentagem da variação, podemos construir a tabela 6.

Tabela 6: Variação da Energia para cada Execução do Experimento

n	$\omega_1 \text{ (rad/s)} \pm 0,001$	$\omega \text{ (rad/s)} \pm 0,001$	$E_i \text{ (J)}$	$E_f \text{ (J)}$	Variação (%)
1	14,444	7,4532	$0,553 \pm 0,007$	$0,292 \pm 0,003$	53% $\pm 1\%$
2	22,765	12,1773	$1,37 \pm 0,01$	$0,779 \pm 0,006$	57% $\pm 1\%$
3	24,353	13,629	$1,57 \pm 0,01$	$0,975 \pm 0,006$	62% $\pm 1\%$

E assim, podemos concluir que a variação de energia cinética para o experimento é de $(-57 \pm 5)\%$.

Conclusão

A partir do que foi estudado na presente prática é possível concluir que existe certa efetividade na determinação do momento de inércia de um objeto a partir dos métodos experimentais descritos. Ainda assim, vale ressaltar que a determinação por meio da geometria do objeto sempre será mais eficiente, pois a precisão será tão boa quanto o instrumento utilizado.

No experimento 1 estimamos um momento de inércia experimental $I_{exp} = [(5,6 \pm 0,013) \cdot 10^{-3}] \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e o geométrico $I_{geo} = [(5,3 \pm 0,016) \cdot 10^{-3}] \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Os valores encontrados utilizando os dois métodos (experimental e geométrico) se mostraram equivalentes e com pouca variação, isso ocorreu porque foram feitas aproximações válidas para a conservação de energia mecânica do sistema utilizado.

No experimento 2 podemos fazer um paralelo comparativo entre o momento de inércia I_2 , que quando calculado experimentalmente resultou em $(4,5 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e ao ser calculado por meio da geometria do objeto resultou em $(5,2 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Isso nos mostra que o método da geometria, além de resultar num valor maior, pois não sobre com a dissipação de energia observada no método experimental, garante um erro associado menor. Além disso, no presente documento foi feito um estudo a respeito da variação de energia cinética, que cai mais do que pela metade após a colisão, e que deriva do atrito presente em todo sistema físico real, o que tira certa precisão dos métodos experimentais. No mais, foi possível articular os conhecimentos teóricos já desenvolvidos, como esperado.

Referências

Laboratório de Física II: livro de práticas / compilado por Jose F. Schneider e Eduardo Ribeiro Azevedo. São Carlos: Instituto de Física de São Carlos, 2018.

AZEVEDO, Eduardo Ribeiro de; NUNES, Luiz Antônio de Oliveira; **Conservação da energia no movimento dos corpos rígidos**. Youtube. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=iV7aAS72EVA>.

AZEVEDO, Eduardo Ribeiro de; NUNES, Luiz Antônio de Oliveira; **Conservação do momento angular no movimento dos corpos rígidos**. Youtube. Disponível em: https://youtu.be/_U5cTAZMBXs.

AZEVEDO, Eduardo Ribeiro de; NUNES, Luiz Antônio de Oliveira; **Segunda Lei de Newton para rotação e o movimento de precessão do giroscópio**. Youtube. Disponível em: <https://youtu.be/yatqx002LQg>.

TIPLER, P. A. **Física**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois, 1978. v. 1

Apêndices

Nesta seção abordaremos os conceitos físicos explicando os fenômenos observados nas demonstrações, baseadas nos links fornecidos, das videoaulas sobre a Roda de Bicicleta, o Momento de inércia variável e respondendo as questões formuladas para cada experimento que constam no Roteiro Complementar dessa prática.

Saltos acrobáticos

O momento de inércia expressa o grau de dificuldade em se alterar o estado de movimento de um corpo em rotação, quanto maior for o momento de inércia de um corpo, mais difícil será girá-lo ou alterar sua rotação. Diferentemente de seu equivalente linear, o momento de inércia do corpo não depende somente da massa do objeto, mas também da distribuição da mesma respeitando o eixo de rotação. Pela lei da conservação do momento angular, se a resultante que age sobre um sistema é nula, o momento angular total é constante. Isso é constantemente visto durante a realização de saltos acrobáticos. Quando um atleta realiza giros no ar, os torques externos são praticamente nulos e o momento angular se conserva, ao fechar os braços e pernas, o atleta diminui o momento de inércia, pois sua massa foi concentrada no eixo de rotação. E para que ocorra conservação do momento angular, a velocidade angular do atleta deve aumentar fazendo com que ele possa realizar mais giros no ar, aumentando assim seu desempenho durante o salto.



Momento de inércia variável (banquinho giratório)

A demonstração utilizando o banquinho giratório também pode ser explicada pela conservação do momento angular. O banquinho tem um eixo de rotação, e com o uso de alguns isolamentos, o atrito foi minimizado fazendo com que os torques externos sejam desprezíveis. Assim o experimento, que é feito com uma pessoa sentada no banquinho segurando com os braços esticados dois halteres concentrando os mesmos ao peito, prova que o momento de inércia diminui e consequentemente a velocidade angular tende a aumentar, fazendo o banquinho girar mais rápido.



Banquinho giratório com a roda de bicicleta

Utilizando o mesmo banquinho giratório da última demonstração e consequentemente conversando o sistema, uma pessoa senta-se no banquinho giratório e na mão segura uma roda de bicicleta inicialmente na horizontal que está em movimento angular. Ao levantar a roda na vertical, ela passa a ter uma componente do movimento angular também na vertical e, como o sistema precisa ser

conservado, o banquinho gira criando um momento angular contrário ao da roda. Na situação A, o banquinho gira no sentido horário e a roda no sentido anti-horário, já na situação B isso se inverte.

