Método das séries (Frobenius)

Jefter Santiago

Contents

1 Mini revisão de séries e séries de Taylor

1.1 Multiplicação de duas séries:

Dadas as funões analiticas em x_0 , $f(x)$ e $g(x)$, com

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \text{ e } g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$$

vale a seguinte relação

$$f(x)g(x):=\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n\right]$$

$$f(x)g(x):=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$$

onde $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$.

1.2 Série de taylor em torno de um ponto x_0:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

2 Solução em torno de pontos regulares

2.1 Introdução e analiticidade de séries de potências

Dada a série de potências \$ $\sum$ a_n (x-x_0)^n\$, se a série converge para valores de x num intervalo $x_0-\delta, x_0+\delta$, $\delta>0$, então a série é analitica em $x=x_0$.

- **Exemplo**: Dada a EDO $a(x)y''(x)b(x)y'(x)+c(x)y(x)=0$

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$$

  - 1ž: Escolher o ponto x_0 que vamos analisar.
  - 2ž: Estudar a analiticidade da série.

- **Exemplo**: $(1-x)y''+y=0$

$$y''+\frac{1}{1-x}y=0, p(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

Pelo critério da razão: $\lim_{n\infty}|r_n|=|x|$, convergente no intervalo $(-1,1)$ e convergente no ponto 0 . Escrevendo a EDO em formato de séries:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right]=0$$

2.2 Solução em séries em torno de pontos regulares

2.2.1 Exemplo: $y''(x) + \sin(x)y(x) = 0$

Temos $p(x) = 0$ e $q(x) = \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$, ambas funções são analiticas em torno de x_0. Escolhendo $x_0 = 0$ temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] = 0$$

Nesse tipo de resolução podemos definir uma ordem n e tentar encontrar o termo geral a_n e então retornar à série original de $y(x)$ nas condições iniciais dadas.

Abrindo os somatórios e agrupando os termos a partir das menores potências de x até x^3 ;

$$(2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4x^3 + \cdots) + \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right][a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots]$$

$$2a_2 + (6a_3 + a_0)x + (12a_4 + a_1)x^2 + (20a_5 + a_2 - \frac{a_0}{6})x^3 + \mathcal{O}(x^4) = 0$$

Relação de independência linear, ou seja, os coeficientes **devem** ser nulos.

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ 6a_3 + a_0 = 0 \\ 12a_4 + a_1 = 0 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a_3 &= -\frac{a_0}{3} \\ a_4 &= -\frac{a_1}{12} \\ a_5 &= -\frac{a_0}{120} \end{aligned}$$

Escrevendo $y(x)$ em termo dos coeficientes encontrados:

$$y(x) = a_0 + a_1x - \frac{a_0}{6}x^3 - \frac{a_1}{12}x^4 + \frac{a_0}{120}x^5 + \cdots$$

$$y(x) = a_0\left[1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right] + a_1\left[x - \frac{x^4}{12} + \cdots\right]$$

Onde a_0 e a_1 são as condições de contorno.

2.2.2 Exemplo: $y'' + k^2y = 0, k \in \mathbb{R}$ e $y(x) = ?$

Exemplo de uma EDO que podemos resolver sem o método de séries. Caso do movimento oscilatório. De forma direta, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n] + k^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + k^2a_n\right]x^n = 0$$

$$a_{n+2} = -k^2\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}, n = 0, 1, 2, ...$$

$$a_2 = -k^2\frac{a_0}{2}$$

$$a_3 = -k^2\frac{a_1}{3 \cdot 2}$$

$$a_4 = -k^2\frac{a_2}{4 \cdot 3} = k^4\frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$a_5 = -k^2\frac{a_3}{5 \cdot 4} = k^4\frac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

Separando em termos pares e ímpares:

- n par: $n = 2j, j = 0, 1, 2, ...$

$$a_{2j+2} = -k^2 \frac{a_{2j}}{(2j+2)(2j+1)} = -\frac{k^2}{(2j+2)(2j+1)} \left[-\frac{k^2 a_{2j-2}}{(2j)(2j-1)} \right]$$

$$a_{2j+2} = \frac{(-k^2)(-k^2) \cdot \cdots \cdot (-k^2) a_0}{(2j+2)(2j+1)(2j)(2j-1) \cdots 2)} = \frac{(-k^2)^{j+1} a_0}{(2j+2)!}$$

$$a_{2j+2} = \frac{(-k^2)^{j+1} a_0}{[2(j+1)]!} \Rightarrow \boxed{a_{2j} = (-1)^j \frac{k^{2j} a_0}{(2j)!}}$$

- n ímpar: $n = 2j+1$

$$a_{2j+3} = -\frac{k^2 a_{2j+1}}{(2j+3)(2j+2)} = \frac{(-k^2)(-k^2) a_{2j-1}}{(2j+3)(2j+2)(2j+1)(2j) \cdots}$$

$$a_{2j+3} = \frac{(-k^2)(-k^2) \cdots (-k^2) a_1}{(2j+3)(2j+2)(2j+1) \cdots 3 \cdot 2}$$

$$a_{2j+3} = \frac{(-1)^j (k^2)^{j+1} a_1}{(2j+3)!} \Rightarrow \boxed{a_{2j+1} = (-1)^j \frac{(k)^{2j} a_1}{(2j+1)!}}$$

Voltando à série original, temos

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{\text{n par}} a_n x^n + \sum_{\text{n impar}} a_n x^n$$

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \underbrace{a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n} x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{= \frac{a_1}{k} \left[kx - \frac{k^3 x^3}{3!} + \frac{k^5 x^5}{5!} - \frac{k^7 x^7}{7!} + \cdots \right]}$$

$$y(x) = a_0 \cos(kx) + \frac{a_1}{k} \sin(kx)$$

$$\boxed{y(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)}$$

3 Método de séries para pontos singulares regulares