## 2.3 Mapeamentos

Agora, abordaremos a questão de como podemos "visualizar" da maneira mais concreta possível uma função complexa. Uma das maneiras mais úteis de se representar uma função é através de seu *gráfico*. O gráfico de uma função $f : A \to B$ é definido como o subconjunto $\Gamma_f$ de $A \times B$ (produto cartesiano de $A$ com $B$) dado por $\Gamma_f := \{(a, b) \in A \times B;\ a \in A,\ b = f(a)\}$. Note que essa definição é tão geral que se aplica igualmente bem quaisquer que sejam os conjuntos $A$ e $B$ (de números, de vetores, de matrizes, ..., de frutas, de animais, ...). Mas é claro que essa representação é ainda mais útil quando podemos visualizar $A \times B$ como um subconjunto de $\mathbb{R}^3$, pois assim temos chance de *ver* o gráfico $\Gamma_f$. É o que acontece para funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cujos gráficos, que nos são tão familiares, podem ser representados numa folha de papel (subconjunto de $\mathbb{R}^2$; vide Fig. 2.5).

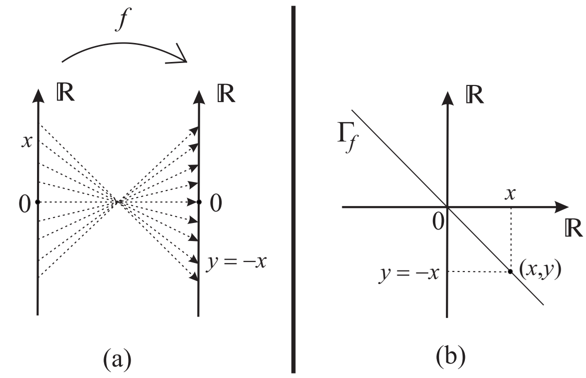


Figura 2.5: (a) Associação entre os elementos de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ feita pela função $f(x) = -x$; (b) Gráfico $\Gamma_f = \{(x, -x);\ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ dessa mesma função.

Infelizmente, não temos como representar de maneira tão clara o gráfico de uma função complexa genérica, pois não temos como "desenhar" de maneira natural um espaço de dimensão (real) quatro ($\mathbb{C}^2$) num espaço de dimensão três ($\mathbb{R}^3$). Por isso, teremos que encontrar uma outra maneira de visualizar funções complexas.

Isso pode ser feito de mais de uma maneira. Mas aqui nos restringiremos a visualizar as funções complexas como *mapeamentos* de subconjuntos de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$. O método consiste no seguinte: no domínio da função $f$ escolhemos um subconjunto $S$ conveniente (normalmente uma curva ou uma figura geométrica simples) e, então, "mapeamos" esse subconjunto através de $f$ no contra-domínio desta última, obtendo o subconjunto $f[S] := \{w = f(z);\ z \in$

$S\}$. Se repetirmos isso para alguns (ou vários, dependendo da função $f$ e da nossa experiência) subconjuntos $S$, podemos ter uma boa idéia da ação da função $f$ através da totalidade dos mapeamentos $S \mapsto f[S]$.

- Exemplo: Consideremos a função $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$. Então, representando $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$, temos

$$w = f(z) = z^2 = x^2 + 2xiy + (iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy = \rho^2 e^{2i\theta}.$$

Logo, representando o resultado como $w = u + iv = Re^{i\Theta}$ vemos que

$$u = x^2 - y^2, \;\; v = 2xy,$$

$$R = \rho^2, \;\; \Theta = 2\theta.$$

Então, retas $x = \text{const.}$ e $y = \text{const.}$ no domínio são mapeadas em parábolas no contra-domínio[7] (vide Fig. 2.6):

$$\left\{ \begin{array}{l} x = c_1 = \text{const.} \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = c_1^2 - y^2 \\ v = 2c_1 y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = c_1^2 - \frac{v^2}{4c_1^2} \\ v \in \mathbb{R} \end{array} \right. , \quad (2.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = c_2 = \text{const.} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 - c_2^2 \\ v = 2xc_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{v^2}{4c_2^2} - c_2^2 \\ v \in \mathbb{R} \end{array} \right. . \quad (2.34)$$

E hipérboles no domínio que têm como assíntotas os eixos coordenados ou as bissetrizes dos quadrantes são mapeadas em retas $v = \text{const.}$ e $u = \text{const.}$, respectivamente (vide Fig. 2.6). Além disso, qualquer região do domínio contida no setor anular entre os argumentos $\theta_1$ e $\theta_2$ e entre os módulos $\rho_1$ e $\rho_2$ é mapeada numa região no contra-domínio contida no setor anular entre os argumentos $\Theta_1 = 2\theta_1$ e $\Theta_2 = 2\theta_2$ e entre os módulos $R_1 = \rho_1^2$ e $R_2 = \rho_2^2$ (vide Fig. 2.6). Todas essas informações juntas nos dão uma boa idéia da ação da função $f(z) = z^2$.

- Exemplo: Consideremos, agora, a função logaritmo, $f(z) = \text{Ln}\, z$. Da Eq. (2.19) vemos que a maneira mais conveniente de expressar essa função é utilizando as representações polar para o domínio, $z = \rho e^{i\theta}$, e cartesiana para a imagem, $w = \text{Ln}\, z = u + iv$. Assim, temos:

$$u(\rho, \theta) = \ln \rho, \quad v(\rho, \theta) = \theta + 2n\pi, \;\; n \in \mathbb{Z}.$$

Vemos, então, que mantendo $\theta$ fixo e variando-se o valor de $\rho$ (o que determina uma semi-reta no domínio; vide Fig. 2.7), obtemos, no contra-domínio, retas paralelas ao eixo real ($v = \text{const.}$; uma reta

[7] As retas no domínio que coincidem com os eixos $x$ e $y$, $y = 0$ e $x = 0$ respectivamente, são casos particulares em que as parábolas se degeneram nos semi-eixos real positivo e real negativo do contra-domínio, respectivamente.

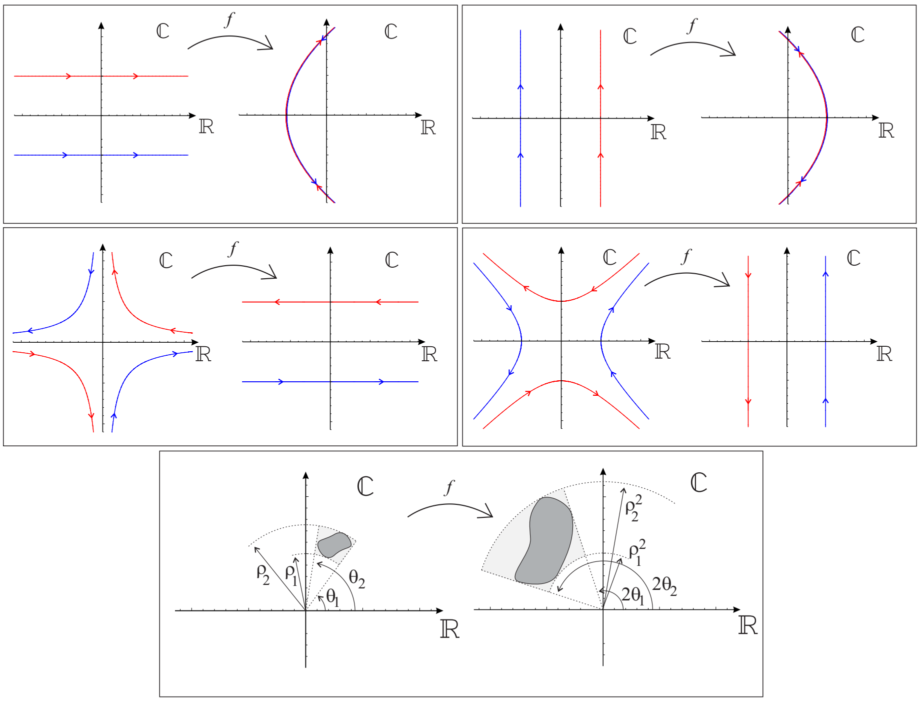


Figura 2.6: Alguns mapeamentos no plano complexo dados pela função $f(z) = z^2$.

para cada valor de $n$). Já mantendo $\rho$ fixo e variando-se $\theta$ de $-\pi$ a $\pi$ (o que determina uma circunferência de raio $\rho$ no domínio), obtemos, no contra-domínio, segmentos de reta de "comprimento" $2\pi$ paralelos ao eixo imaginário ($u =$ const.; um segmento de reta para cada valor de $n$, que, combinados todos, formam uma única reta). A Fig. 2.7 ilustra a função $\operatorname{Ln} z$ em termos de mapeamentos.

- Exemplo: A função $f(z) = 1/z$ define o mapeamento chamado de *inversão*. Esse mapeamento caracteriza-se por mapear o *disco unitário* $|z| < 1$ (com $z \neq 0$) na região $|z| > 1$ (e vice-versa). Vejamos algumas de suas propriedades:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \rho^{-1} e^{-i\theta} = R e^{i\Theta}.$$

  É fácil ver a partir dessa expressão que semi-retas orientadas que partem da origem ($\rho > 0$ e $\theta =$ const.) são mapeadas em semi-retas orientadas que se dirigem à origem, espelhadas em relação ao eixo real ($R = \rho^{-1}$ e $\Theta = -\theta$). Além disso, circunferências de raio $\rho$ centradas na origem são mapeadas em outras circunferências de raio $\rho^{-1}$ também centradas na origem. Mas mais interessante é o que acontece com retas que *não* passam pela origem. Consideremos, por exemplo, uma

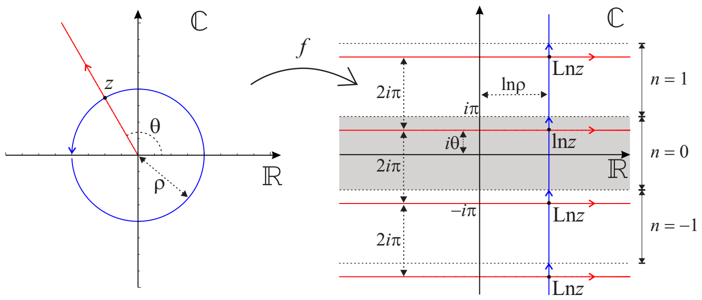


Figura 2.7: Mapeamento da função logaritmo, mostrando em destaque o ramo principal.

reta paralela ao eixo real determinada por pontos da forma $z = x + bi$, onde $x$ varia desde $-\infty$ até $\infty$ e $b \neq 0$ é uma constante real. Sob o mapeamento de inversão, essa reta é mapeada em:

$$f(x+ib) = \frac{1}{x+ib} = \frac{x-ib}{x^2+b^2},$$

o que implica que as partes real e imaginária de $w = f(z) = u + iv$ valem

$$u = \frac{x}{x^2+b^2}, \quad v = \frac{-b}{x^2+b^2}.$$

Para reconhecer que tipo de lugar geométrico é esse, notemos que

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2+b^2} = -\frac{v}{b} \Leftrightarrow u^2 + v^2 + \frac{v}{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u^2 + v^2 + \frac{v}{b} + \frac{1}{4b^2} = \frac{1}{4b^2} \Leftrightarrow u^2 + \left(v + \frac{1}{2b}\right)^2 = \left(\frac{1}{2b}\right)^2.$$

Logo, o lugar geométrico determinado por $w = f(x+ib)$ é uma circunferência de raio $1/(2b)$ centrada em $w_0 = -i/(2b)$: $|w - w_0| = 1/(2b)$ (na verdade, uma circunferência *quase completa*, pois falta o ponto $w = 0$). Por um procedimento semelhante é fácil mostrar que uma reta paralela ao eixo imaginário que não passe pela origem, $z = a + iy$ ($a \neq 0$ sendo uma constante real e $y$ variando de $-\infty$ a $\infty$), é mapeada numa circunferência (quase completa) de raio $1/(2a)$ centrada em $w_0 = 1/(2a)$. A Fig. 2.8 resume todos esses resultados. Esse resultado pode ser generalizado para qualquer reta que não passe pela origem (vide exercício ⑩ abaixo). Note que como a função inversa de $f(z) = 1/z$ é ela própria (ou seja, $f(f(z)) \equiv z$), podemos concluir que circunferências que tangenciam a origem são mapeadas, por inversão, em retas que não passam pela origem. Já para circunferências genéricas, que *não* tangenciam a origem, pode-se mostrar que elas são mapeadas também em circunferências que não tangenciam a origem (tente mostrar isso; é um exercício de geometria analítica).

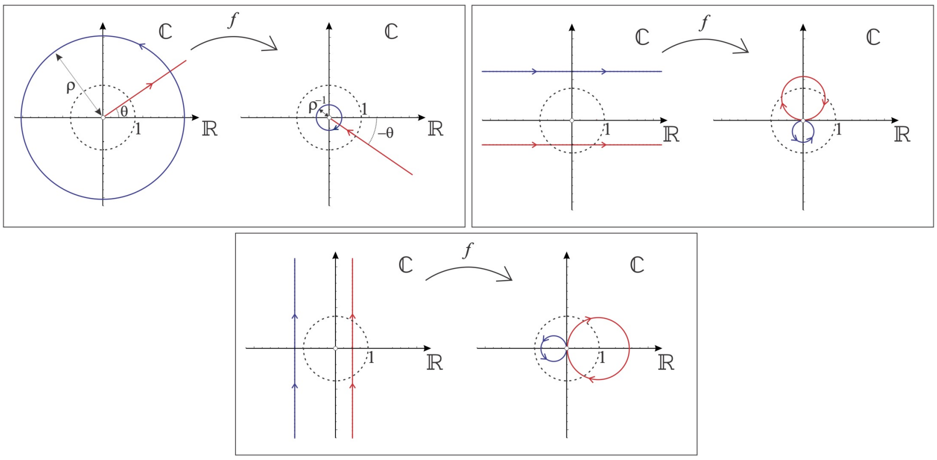


Figura 2.8: Mapeamento *inversão*.

- **Exercício:** Analise a função exponencial $f(z) = e^z$ através do método de mapeamentos. (Faça uso da representação que julgar mais conveniente das encontradas no exercício da página 17.)

- **Exercício:** Analise a função $f(z) = \cosh z$ através do método de mapeamentos. (Sugestão: Lembre-se da Eq. (2.18) e da interpretação geométrica das funções hiperbólicas e trigonométricas reais.)

# • Exercícios

① Calcule $(\cos z)^2 + (\sin z)^2$ para um número complexo $z = x + iy$ arbitrário.

② Calcule $(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2$ para um número complexo $z = x + iy$ arbitrário.

③ Discuta se existe solução $z \in \mathbb{C}$ para a equação $e^z = 0$.

④ Resolva a equação $e^z = -1$, obtendo *todas* as soluções.

⑤ Resolva a equação $\cos z = 2$, obtendo *todas* as soluções.

⑥ Resolva a equação $\cosh z = 1/\sqrt{2}$, obtendo *todas* as soluções.

⑦ Analise, através de mapeamentos, a função $f(z) = z^3$.

⑧ Analise, através de mapeamentos, a função $f(z) = z^i$.

⑨ Analise, através de mapeamentos, a função $f(z) = i^z$. (Como a base é uma constante, você pode optar por fixar *uma* dada representação polar para ela; apenas deixe claro qual e discuta o que mudaria se escolhesse outra representação.)

⑩ Mostre que uma reta arbitrária que *não* passe pela origem é levada, pelo mapeamento de inversão $f(z) = 1/z$, numa circunferência (quase completa) que tangencia a origem.