Álgebra Linear EAD - 2022
Lista de Exercícios

Kaique Matias de Andrade Roberto
Ana Luiza Tenório

11 de janeiro de 2022

1 Noções de Lógica e Conjuntos

Exercício 1.1. Mostre as equivalências abaixo.

a - $\neg(\neg P) \equiv P$.

b - $P \vee P \equiv P$.

c - $P \wedge P \equiv P$.

d - $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$.

e - $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$.

f - $(P \wedge (P \vee Q) \equiv P$.

g - $(P \vee (P \wedge Q) \equiv P$.

h - $P \rightarrow Q \equiv (\neg P) \vee Q$.

i - $\neg(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge (\neg Q)$.

j - $\neg(\forall\, x P(x)) \equiv \exists\, x(\neg P(x))$.

k - $\neg(\exists\, x P(x)) \equiv \forall\, x(\neg P(x))$.

Exercício 1.2. Transforme as sentenças abertas abaixo em sentenças verdadeiras usando quantificadores.

a - $-(-x) = x$.

b - $(a+1)(a-1) = a^2 - 1$.

c - $\sqrt{x^2} = x$.

d - $5a + 4 \leq 11$.

e - $x^2 \leq x$.

f - $a^2 + b^2 \leq 0$.

Exercício 1.3. Diga qual é a negação de cada uma das sentenças abaixo.

a - O Palmeiras tem mundial.

b - Toda fruta é doce e todo remédio é amargo.

c - Todo dia da semana é segunda-feira.

d - Todo final de semana tem um sábado e um domingo.

e - Todo número inteiro primo é impar.

f - Todo triângulo isóceles é equilátero.

g - Existe um losango que não é um quadrado.

h - Existe um número cuja raíz quadrada é zero.

Exercício 1.4. Quando estamos fora do contexto matemático negar uma sentença pode ser uma tarefa relativamente difícil. Afim de ilustrar isso, escreva a negação das sentenças abaixo (que na verdade são ditados da sabedoria popular).

a - Camarão que dorme, a onda leva.

b - Gato escaldado tem medo de água fria.

c - Mente vazia, oficina do diabo.

d - O que não tem remédio, remediado está.

e - O que os olhos não veem, o coração não sente.

f - Quando o dinheiro fala, a verdade se cala.

g - Para quem está se afogando, jacaré é tronco.

h - Vão-se os anéis e ficam os dedos.

i - Para bom entendedor, meia palavra basta.

j - Se conselho fosse bom, a gente não dava, vendia.

Exercício 1.5 **(∗).** Escreva a contra-positiva para as sentenças dos Exercícios 1.3, 1.4 desde que seja possível.

Exercício 1.6. Calcule o conjunto das partes de $A = \{a, b, c, d\}$.

Exercício 1.7. Seja $B = \{a, b, c, d, e\}$. Encontre o conjunto X tal que $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) \cup X$.

Exercício 1.8 **(Propriedades da Inclusão).** Sejam A, B, C três conjuntos quaisquer. Mostre que:

i - $\emptyset \subseteq A$;

ii - $A \subseteq A$;

iii - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$.

Exercício 1.9 **(Propriedades da União).** Sejam A, B, C três conjuntos quaisquer. Mostre que:

i - $A \cup A = A$;

ii - $A \cup \emptyset = A$;

iii - $A \cup B = B \cup A$;

iv - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Exercício 1.10 (Propriedades da Intersecção)**.** Sejam A, B, C três conjuntos quaisquer. Mostre que:

i - $A \cap A = A$;

ii - Se $A \subseteq B$ então $A \cap B = A$;

iii - $A \cap B = B \cap A$;

iv - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

2 Funções

Exercício 2.1. Determine os maiores domínios e contra-domínios possíveis para uma função considerando as regras abaixo. Após isso, determine a imagem de tal função:

a - $f(x) = x^2$;

b - $g(x) = 1 - x$;

c - $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;

d - $z(t) = \dfrac{t^2}{1-t}$;

e - $y(x) = x^3$;

f - $w(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$.

Exercício 2.2. Quais dentre as funções do Exercício 2.1 são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras?

Exercício 2.3. Abaixo há uma lista de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

a - $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$.

b - $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = 1 - 2x$.

c - $f(x) = x^2 + 4x - 1$ e $g(x) = x^2 - 1$.

d - $f(x) = 2$ e $g(x) = 3x - 1$.

Exercício 2.4. Calcule a inversa das seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a - $f(x) = 2x + 3$;

b - $g(x) = \frac{4x-1}{3}$;

c - $h(x) = x^3 + 2$;

d - $p(x) = (x-1)^3 + 2$;

e - $q(x) = \sqrt[3]{x+2}$;

f - $r(x) = \sqrt[3]{x-1}$;

g - $s(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$.

Exercício 2.5. Dê exemplos de uma função:

a - injetora que não é sobrejetora;

b - sobrejetora que não é injetora;

c - não sobrejetora e não injetora.

3 Indução

Exercício 3.1. Mostre por indução finita a validade das seguintes fórmulas

a - $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

b - $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$;

c - $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

d - $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Exercício 3.2 (Progressão Aritmética)**.** Uma **progressão aritmética** (PA) é uma sequência de números reais $(a_n)_{n\geq 1}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$a_{n+1} = a_n + r.$$

O número real (fixo) r é chamado **razão**.

a - Mostre que $a_n = a_1 + (n-1)r$.

b - Mostre que
$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Exercício 3.3 ((∗) Progressão Geométrica)**.** Uma **progressão geométrica** (PG) é uma sequência de números reais $(a_n)_{n\geq 1}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ existe $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0, 1$ tal que

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

O número real (fixo) q é chamado **razão**.

a - Mostre que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

b - Mostre que

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Exercício 3.4 ((∗) Binômio de Newton)**.** Seja $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \mathbb{N}$ com $0 \leq i \leq n$. Definimos o **coeficiente binomial** $\binom{n}{i}$ pela regra

$$\binom{n}{i} := \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

a - Calcule $\binom{3}{2}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{n}{n}$.

b - Mostre que para todo $n \geq 1$ e todo $i \in \mathbb{N}$ com $0 \leq i \leq n$ vale

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$$

c - (Relação de Stifel) Mostre que para todo $n \geq 1$ e todo $i \in \mathbb{N}$ com $0 \leq i \leq n$ vale

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}.$$

d - (Binômio de Newton) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + ... + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

e - Mostre que

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n}.$$

Sugestão: use o Binômio de Newton com $a = b = 1$.

Exercício 3.5 ((∗∗) Sequência de Fibonacci)**.** A **sequência de Fibonacci** $(u_n)_{n \geq 1}$ é definida pela recursão

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= 1 \\ u_{n+2} &= u_n + u_{n+1}. \end{aligned}$$

Mostre que valem as seguintes fórmulas

a - $u_1 + u_2 + ... + u_n = u_{n+2} - 1$;

b - $u_1 + u_3 + ... + u_{2n-1} = u_{2n}$;

c - $u_2 + u_4 + ... + u_{2n} = u_{2n+1}$;

d - $u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 = u_n u_{n+1}$.

Aqui você talvez precise da Indução Finita na segunda forma!

Exercício 3.6 (**)**.** Supondo válido o Princípio da Boa Ordem, mostre o Teorema da Indução na primeira forma.

4 Polinômios

Exercício 4.1. Dados os polinômios

$$f(x) = 2 + 3x - 4x^2,\ g(x) = 7 + x^2,\ h(x) = 2x - 3x^2 + x^3,$$

calcule $(f + g)(x), (f + g \cdot h)(x), (g \cdot f + h \cdot f)(x), (f^2)(x), (f + 2g + 3h \cdot f)(x)$.

Exercício 4.2. Determine o quociente e o resto da divisão de f por g nos seguintes casos:

a - $f(x) = x^2 + 5x + 1,\ g(x) = 2x^2 + 4x - 3$;

b - $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x,\ g(x) = x^2 + 2$;

c - $f(x) = 5x + 1,\ g(x) = x^3 + 5$;

d - $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 9,\ g(x) = 3x^2 + 1$;

e - $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1,\ g(x) = 2x^2 + 3$;

f - $f(x) = 2x^5 - 3x + 12,\ g(x) = x^2 + 1$;

g - $f(x) = x^4 - 2x + 13,\ g(x) = x^2 + x + 1$;

h - $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 4x - 3,\ g(x) = x^3 - 2x + 1$.

Exercício 4.3. Encontre as raízes reais dos polinômios abaixo.

a - $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

b - $p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$.

c - $p(x) = x^3 + x^2 + 3x - 5$.

d - $p(x) = x^3 + x^2 + 2x + 3$.

e - $p(x) = x^4 - 8x^2 + 16$.

f - $p(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

g - $p(x) = x^3 - 3x + 2$.

h - $p(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$.

i - $p(x) = x^3 - 9x^2 + 22x - 24$.

j - $p(x) = 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 4x + 3$.

k - $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

l - $p(x) = x^5 - 8x^3 + 6x^2 + 7x - 6$.

m - $p(x) = 2x^6 + x^5 - 13x^4 + 13x^2 - x - 2.$

n - $p(x) = x^6 + 3x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 3x - 4.$

o - $p(x) = 4x^3 - 20x^2 - 33x - 18.$

p - $p(x) = x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 64.$

q - $p(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4.$

r - $p(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2.$

Exercício 4.4 (**)**.** Seja $f \in \mathbb{R}[x]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre que $f(\alpha) = 0$ se e só se existe $t \in \mathbb{R}[x]$ tal que

$$f(x) = (x - \alpha)t(x).$$

Sugestão: use o Algoritmo de Euclides.

Exercício 4.5 (**)**.** Mostre que em $\mathbb{Z}[x]$ não vale o Algoritmo de Euclides. **Sugestão:** tente calcular o quociente de $p(x) = 2x + 1$ por $q(x) = 3x - 1$.

5 Sistemas Lineares

Exercício 5.1. Discuta e resolva os seguintes sistemas lineares:

a - $\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - 7y = 3 \end{cases}$

b - $\begin{cases} 5x - 2y + 2z = 2 \\ 3x + y + 4z = -1 \\ 4x - 3y + z = 3 \end{cases}$

c - $\begin{cases} x + y + z + 3t = 1 \\ x + y - z + 2t = 0 \end{cases}$

d - $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$

e - $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = -3 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$

f - $\begin{cases} 3x + 3y - 2z - t = 2 \\ 5x + 2y + z - 2t = 1 \\ 2x - y + 3z - t = -1 \end{cases}$

g - $\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ x + 4y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

h - $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y - 2z + t = 0 \\ 2x + y + 2z - t = 0 \end{cases}$

i - $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 6y + 3z = 3 \end{cases}$

j - $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = -2 \\ 2y = -3 \end{cases}$

Exercício 5.2. Discuta e resolva os sistemas lineares em função do parâmetro $a \in \mathbb{R}$:

a - $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=2 \\ 3y=a \end{cases}$

c - $\begin{cases} ax+2y=6 \\ 3x-y=-2 \\ x+y=0 \end{cases}$

b - $\begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+y-z=2-a \\ x+ay-z=-a \end{cases}$

d - $\begin{cases} x+2y-2z-t=-1 \\ 2x-2y-2z-3t=-1 \\ 2x-2y-z-5t=9 \\ 3x-y-z-at=0 \end{cases}$

Exercício 5.3. Discuta e resolva os sistemas lineares em função dos parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$:

a - $\begin{cases} 3x-7y=a \\ x+y=b \\ 5x+3y=5a+2b \\ x+2y=a+b-1 \end{cases}$

b - $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=a \\ x-y-z=b \end{cases}$

Exercício 5.4. Sejam S_1, S_2 e S_3 sistemas lineares. Mostre que valem as seguintes propriedades:

Reflexiva - $S_1 \sim S_1$;

Simétrica - se $S_1 \sim S_2$ então $S_2 \sim S_1$;

Transitiva - se $S_1 \sim S_2$ e $S_2 \sim S_3$ então $S_1 \sim S_3$.

6 Matrizes

Exercício 6.1. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule

$$3\left(A - \frac{1}{2}B\right) + C.$$

Exercício 6.2. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcule AB e BA.

Exercício 6.3. Considere as matrizes

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 5\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},$$
$$D=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}.$$

Verifique se é possível calcular cada uma das matrizes abaixo, e caso afirmativo, faça o cálculo:

a - $A+3D$,

b - $2D-3A$,

c - $B-C$,

d - $B-C^t$,

e - AB,

f - F^2,

g - $DA-AD$,

h - $(I_2-A)^2$.

Exercício 6.4. Dê um exemplo de uma matriz $A\in M_3(\mathbb{R})$ diferente de zero tal que $A^2=0$.

Exercício 6.5 (Propriedades da Soma)**.** Sejam A,B,C matrizes reais $m\times n$. Mostre que:

a - $(A+B)+C=A+(B+C)$;

b - $A+B=B+A$;

c - $A+0=A$;

d - $A+(-A)=0$.

Exercício 6.6 (Propriedades do Produto por Escalar)**.** Sejam A,B matrizes reais $m\times n$ e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Mostre que:

a - $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$;

b - $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;

c - $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;

d - $1A=A$.

Exercício 6.7 (Propriedades do Produto)**.** Sejam A,B,C matrizes $n\times n$ e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Mostre que:

a - $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$;

b - $A(BC)=(AB)C$;

c - $A(B+C) = AB + AC$;

d - $(B+C)A = BA + CA$.

Exercício 6.8 (Propriedades da Transposta)**.** Sejam A, B matrizes reais $n \times n$ e α. Mostre que:

a - $(A+B)^t = A^t + B^t$;

b - $(\alpha A)^t = \alpha A^t$;

c - $(A^t)^t = A$;

d - $(AB)^t = B^t A^t$.

Exercício 6.9. Uma matriz quadrada A é chamada **nilpotente** se existe um inteiro $r \geq 1$ tal que $A^r = 0$. Sejam A e B matrizes nilpotentes do mesmo tamanho e assuma $AB = BA$. Mostre que AB e $A + B$ são nilpotentes.

Exercício 6.10. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, considere a matriz

$$X_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Mostre que $X_\alpha^2 = 2X_\alpha$.

Exercício 6.11 $(*)$**.** Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ considere a matriz

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Mostre que $T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}$. Calcule $T_{-\alpha}$.

Exercício 6.12. Demonstrar que $AB = BA$ se, e somente se $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

Exercício 6.13. Uma matriz quadrada A é dita **simétrica** se $A^t = A$, e **anti-simétrica** se $A^t = -A$. Mostre que

a - a soma de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica;

b - a soma de duas matrizes anti-simétricas é uma matriz anti-simétrica.

Exercício 6.14. O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica? O produto de duas matrizes anti-simétricas é uma matriz anti-simétrica?

Exercício 6.15 $(*)$**.** Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes tais que $AB = 0$. É verdade que $BA = 0$?

Exercício 6.16. Calcule o determinante das matrizes abaixo. Também verifique se as matrizes abaixo são inversíveis e caso positivo, calcule a inversa.

a - $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

b - $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c - $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

d - $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e - $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

f - $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

g - $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

h - $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

i - $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

j - $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício 6.17. Resolva os sistemas de Cramer:

a - $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$

b - $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$

c - $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y + 2z = -4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

d - $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$

e - $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$

f - $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + y - z + t = 1 \\ -x + y + z - t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = 1 \end{cases}$

Exercício 6.18. Mostre que se uma linha (ou coluna) de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é nula então A não é inversível.

Exercício 6.19. Sejam A, B e C matrizes $m \times n$. Mostre que valem as seguintes propriedades:

Reflexiva - $A \sim B$;

Simétrica - se $A \sim B$ então $B \sim A$;

Transitiva - se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$.

Exercício 6.20. Sejam A, B e C matrizes $n \times n$. Mostre que se A tem inversa e $AB = AC$ então $B = C$. Conclua que a inversa de uma matriz caso exista é única.

Exercício 6.21. Mostre que o resultado do exercício anterior é falso se A não tem inversa (dica: pense em $n = 2$).

Exercício 6.22. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Mostre que se B tem inversa e A comuta com B (isto é, $AB = BA$) então A também comuta com a inversa de B.

Exercício 6.23 (∗)**.** É possível que existam duas matrizes quadradas A e B tais que $AB = I_n$ e B não seja a inversa de A?

Exercício 6.24 ((∗∗) Roteiro para a prova do Teorema 1.6 da Aula 05)**.** Uma **matriz elementar** de ordem n é uma matriz E obtida de I_n por meio de uma única operação elementar.

1. Mostre que as matrizes

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   são elementares.

2. Seja E uma matriz elementar de ordem n. Mostre que se aplicarmos em A a sequência de operações elementares que transforma I_n em E obteremos a matriz EA. **Sugestão:** trate cada operação elementar separadamente, como fizemos no estudo de sistemas lineares.

3. Use o item anterior para mostrar que toda matriz elementar é inversível.

4. Mostre que se $B \sim A$ então $B = PA$ onde $P = E_1 ... E_n$ e cada E_j é inversível. **Sugestão:** suponha primeiro que $B \sim A$ via uma única operação elementar e prove o desejado neste caso particular. Em seguida use indução para provar o caso geral.

5. Use o item anterior para mostrar que A é inversível se e só se $A \sim I_n$.

6. Mostre que se A for inversível então a sequência de operações elementares que transforma A em I_n quando aplicada em I_n, transforma I_n em A^{-1}.

7 Espaços Vetoriais e Subespaços

Exercício 7.1. Mostre que:

a - $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$;

b - $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$;

c - $\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$;

d - O conjunto das matrizes $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$;

e - O conjunto dos polinômios $\mathbb{R}[x]$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$;

f - O conjunto das funções $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 7.2. Estude se os seguintes são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$:

a - O conjunto de todos os vetores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x, y \geq 0$, com a soma e produto escalar de $\mathbb{R}^2$.

b - O conjunto de todos os vetores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $xy \geq 0$, com a soma e produto escalar de $\mathbb{R}^2$.

c - O conjunto de todos os vetores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x \geq y$, com a soma e produto escalar de $\mathbb{R}^2$.

d - O conjunto de todas as matrizes reais triangulares superiores com a soma e produto escalar das matrizes.

e - O conjunto de todas as matrizes reais $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tais que $ad = 0$, com a soma e produto escalar das matrizes.

f - O conjunto de todas as matrizes reais $n \times n$ antissimétricas, com a soma e produto escalar das matrizes.

Exercício 7.3. Mostre que o espaço $\mathbb{R}_n[x]$ dos polinômios reais de grau menor ou igual a n, incluindo o polinômio nulo, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 7.4. Seja $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab > 0\}$ e definimos as operações $(a, b) \oplus (c, d) = (ac, bd)$ e $\alpha(a, b) = (a^\alpha, b^\alpha)$. V é um espaço vetorial?

Exercício 7.5. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Mostre que $U \times V = \{(u, v) : u \in U \text{ e } v \in V\}$ é um espaço vetorial em relação ao seguinte par de operações:

1. $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$
2. $\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$

Exercício 7.6. Mostre que o conjunto $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, com as seguintes operações:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 3, y_1 + y_2)$$
$$\alpha \odot (x, y) = (\alpha x + 3(\alpha - 1), \alpha y)$$

é um espaço vetorial real.

Exercício 7.7. Utilize os axiomas que definem um espaço vetorial para demonstrar as seguintes afirmações:

a - O vetor nulo de um espaço vetorial é único.

b - Para cada vetor v de um espaço vetorial, existe um único vetor $-v$, oposto de v.

c - Para todo vetor v, temos que $-(-v) = v$.

d - Vale a lei do cancelamento da adição, isto é, se V é um espaço vetorial e $u, v, w \in V$ são tais que $u + v = u + w$, então $v = w$.

Exercício 7.8. Seja V um espaço vetorial. Mostre que para todo $v, w, z \in V$ e todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valem as seguintes propriedades:

i - $\alpha \cdot 0 = 0$ e $0 \cdot v = 0$;

ii - $\alpha v = 0$ se e só se $\alpha = 0$ ou $v = 0$;

iii - $(-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v)$;

iv - $(\alpha - \beta)v = \alpha v - \beta v$;

v - $\alpha(v - w) = \alpha v - \alpha w$.

Exercício 7.9 (∗). Sejam V um espaço vetorial, $v_1, ..., v_n \in V$ e $\beta, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$\beta\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\beta\alpha_i) v_i.$$

Exercício 7.10. Determine se W é um subespaço de V:

a - $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(a, 0, a) | a \in \mathbb{R}\}$.

b - $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(a, -a, 2a) | a \in \mathbb{R}\}$.

c - $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(a, 0, a + b) | a \in \mathbb{R}\}$.

d - $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(a, b, |a|) | a \in \mathbb{R}\}$.

e - $V = M_n(\mathbb{R})$, $W =$ matrizes diagonais $n \times n$.

f - $V = M_n(\mathbb{R})$, $W = \{A \in V | A^2 = A\}$.

Exercício 7.11. Seja B uma matriz fixa $n \times n$ e considere o conjunto

$$W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AB = BA\}.$$

W é um subespaço de $M_n(\mathbb{R})$?

Exercício 7.12. Determine se W é um subespaço de V:

a - $V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = \{bx + cx^2 | b, c \in \mathbb{R}\}$.

b - $V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = \{a + bx + cx^2 | abc = 0 \in \mathbb{R}\}$.

c - $V = \mathbb{R}_3[x]$, $W = \mathbb{R}_2[x]$.

d - $V = \mathbb{R}[x]$, $W = \mathbb{R}_3[x]$.

e - $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $w = \{f \in W : f(-x) = f(x)\}$.

f - $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $w = \{f \in W : f(-x) = -f(x)\}$.

g - $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $w = \{f \in W : f(0) = 1\}$.

h - $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $w = \{f \in W : f(0) = 0\}$.

Exercício 7.13. Sejam m, n inteiros positivos com $m \leq n$. Mostre que $\mathbb{R}_m[x]$ é um subespaço de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercício 7.14. Consideremos um sistema linear homogêneo

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Mostre que as soluções de S são um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Exercício 7.15 (∗). Seja V um espaço vetorial. Se $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma família de subespaços de V, mostre que

$$U = \bigcap_{i \in I} U_i$$

é um subespaço de V. Note que I **não precisa ser finito**.

Exercício 7.16 (∗). Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V.

a - Dê um exemplo mostrando que $W_1 \cup W_2$ pode não ser um subespaço de V.

b - Prove que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V se, e somente se $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$.

c - Mostre que $W_1 + W_2$ é o subespaço de V gerado por $W_1 \cup W_2$.

Exercício 7.17 ((∗∗) Lei Modular). Seja V um espaço vetorial. Sejam S, T, U subespaços de V. Mostre que se $U \subseteq S$, então

$$S \cap (T + U) = (S \cap T) + (S \cap U).$$

Exercício 7.18 (∗). Seja V um espaço vetorial e $W \subseteq V$. Mostre que W é um subespaço de V se e só se

a - $0 \in W$;

b - Se $v, w \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então $v + \alpha w \in W$.

8 Geradores e Dependência Linear

Exercício 8.1. Considere

$$U = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - y + z + w = 0, \ -x + 2y + z + w = 0\right\}.$$

Mostre que U é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ e determine um conjunto gerador de U.

Exercício 8.2. Seja $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere o conjunto

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \; : \; x - y - z = 0 \right\}.$$

Mostre que W é subespaço e determine um conjunto gerador de W.

Exercício 8.3. Mostre que o espaço vetorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é gerado pelas matrizes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 8.4. Determine um sistema linear homogêneo para o qual o espaço solução seja exatamente o espaço gerado pelos vetores S, nos seguintes casos:

a - $\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$;

b - $\{(1,1,1),(3,2,-1)\}\,\mathbb{R}^3$;

c - $\{(1,1,0,0),(0,2,1,0),(0,0,0,3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$;

d - $\{(-1,0,1,0),(3,4,-2,5),(1,4,0,9)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Exercício 8.5 $(*)$**.** Sejam $f(x) = \sin^2(x)$ e $g(x) = \cos^2(x)$.

a - Demonstre que as funções constantes pertencem a $\langle f, g\rangle$,

b - Demonstre que a função $\cos(2x)$ pertence a $\langle f, g\rangle$.

Exercício 8.6. Verifique quais dos seguintes subconjuntos são linearmente independente:

a - $\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(1,2,3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$;

b - $\{(1,1,1),(1,2,1),(3,2,-1)\}\,\mathbb{R}^3$;

c - $\{(1,1,0),(1,4,5),(3,6,5)\} \subseteq \mathbb{R}^3$;

d - $\{(1,2,1),(2,4,2),(5,10,5)\} \subseteq \mathbb{R}^3$;

e - $\{(1,1,0,0),(0,2,1,0),(0,0,0,3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$;

f - $\{(1,1,0,0),(0,1,0,0),(2,1,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$;

g - $\{(2,2,0,-1),(3,0,2,1),(-2,3,0,1),(-1,2,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$;

h - $\{(5,-1,1,2),(1,7,3,-4),(3,-15,-5,10)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Exercício 8.7. Verifique quais dos seguintes subconjuntos são linearmente independente em $\mathbb{R}_4[x]$:

a - $\{1,\ x-1,\ x^2+2x+1,\ x^2\}$;

b - $\{x^2-x,\ x,\ 2x^3-x^2\}$;

c - $\{2x, x^2+1, x+1, x^2-1\}$;

d - $\{x^4+x-1, x^3-x+1, x^2-1\}$.

Exercício 8.8. Mostre que as seguintes matrizes são linearmente independentes em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e defina o subespaço gerado:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 8.9. Determine a e b para que os subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ abaixo sejam LI:

a - $\{(3,5a,1),(2,0,4),(1,a,3)\}$;

b - $\{(1,3,5),(2,a+1,10)\}$;

c - $\{(6,2,a),(3,a+b,b-1)\}$.

Exercício 8.10. Seja V um espaço vetorial real e S um subconjunto de V que gera V. Seja T um subconjunto de V que contêm S, ou seja, S é um subconjunto de T. Mostre que T gera V.

Exercício 8.11. Sejam k e l inteiros positivos com $k \leq l$. Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_l$ vetores em $\mathbb{R}^n$ e $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, $T = \{u_1, u_2, \ldots, u_l\}$. Mostre que $\langle S\rangle \subseteq \langle T\rangle$.

Exercício 8.12. Mostre que u, v e w estão em $\langle u, u+v, u+v+w\rangle$.

Exercício 8.13. Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_l$, $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Suponha que cada u_i seja uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Mostre que $\langle u_1, u_2, \ldots, u_l\rangle \subseteq \langle v_1, v_2, ..., v_k\rangle$.

Exercício 8.14. Sejam w_1, w_2 e w_3 vetores linearmente independentes. Mostre que $w_1 - w_3$, $w_1 - w_2$ e $w_2 - w_3$ são linearmente dependentes.

Exercício 8.15. Tendo em mente que vetores $v+w$ e $v-w$ são combinações lineares dos vetores v e w; escreva v e w como combinações lineares de $v+w$ e $v-w$.

Exercício 8.16. Seja V um espaço vetorial, $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ um subconjunto LI e $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}^*$. Mostre que $\{\alpha_1 v_1, ..., \alpha_n v_n\}$ é LI.

Exercício 8.17. Sejam V um espaço vetorial real e $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um subconjunto de V. Mostre que um vetor $v \in S$ é combinação linear dos outros vetores se e somente se S é linearmente dependente.

Exercício 8.18 (∗). Suponha que o conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ seja linearmente independente no espaço vetorial V e seja $v \in V$. Prove que o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ é linearmente independente em V se, e somente se, $v \notin \langle S\rangle$.

Exercício 8.19 (∗). considere os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$: $v = (-1,0,1)$ e $w = (3,4,-2)$. Determine um sistema linear de equações homogêneas para o qual o espaço solução seja exatamente o subespaço gerado por v e w.

Exercício 8.20 (∗). Seja $a \in \mathbb{R}$. Mostre que o conjunto

$$\{1, x-a, (x-a)^2, ..., (x-a)^n\}$$

é LI em $\mathbb{R}_n[x]$. **Sugestão:** use indução.

9 Base e Dimensão

Exercício 9.1. Encontre uma base para os seguintes espaços.

a - W é o subespaço das matrizes diagonais de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

b - W é o subespaço das matrizes triangulais superiores de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

c - $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0 \text{ e } x - y + 2z = 0\}$.

d - $W = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \ tr(A) = 0\}$.

e - $W = \{A \in M_{3\times 3} : \ a_{11} - 2a_{22} + a_{33} = 0\}$.

f - $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0\}$.

Exercício 9.2. Calcule a dimensão dos seguintes espaços vetoriais:

a - $W = \big\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ A^T = A\big\}$,

b - $X = \big\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ A^T = -A\big\}$.

Exercício 9.3. Considere o $\mathbb{R}$ espaço vetorial das matrizes 2×2 sobre $\mathbb{R}$ e os seguintes subconjuntos de $M_2(\mathbb{R})$:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

a - Mostre que W_1 e W_2 são subespaços de $\mathbb{R}_2$.

b - Encontre as dimensões de $W_1, W_2, W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$.

Exercício 9.4. Encontre uma base e a dimensão do espaço solução do sistema linear homogêneo:

a - $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

c - $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6 = 0 \\ x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

b - $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

d - $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Exercício 9.5. Considere o $\mathbb{R}$ espaço vetorial das matrizes 2×2 sobre $\mathbb{R}$ e os seguintes subconjuntos de $M_2(\mathbb{R})$:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

a - Mostre que W_1 e W_2 são subespaços de $\mathbb{R}_2$.

b - Encontre as dimensões de $W_1, W_2, W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$.

Exercício 9.6. Sejam U e W subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial V. Mostre que $U + W$ tem dimensão finita e

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Exercício 9.7. Seja V um K-espaço vetorial e W um subespaço de V. Mostre que W possui complemento em V, isto é, que existe um subespaço U tal que $V = W \oplus U$.

Exercício 9.8 $(*)$. Seja V um espaço vetorial real de dimensão n. Mostre as seguintes afirmações:

a - Todo subconjunto de V com mais do que n elementos é linearmente dependente.

b - Nenhum conjunto contendo menos de n elementos gera V.

Exercício 9.9. Sejam U e W subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial V. Mostre que $U + W$ tem dimensão finita e

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Exercício 9.10. Seja $V = \mathbb{R}_2[x]$. Mostre que $B = \{1, 2 + x, 3x - x^2, x - x^3\}$ é base de V e escreva as coordenadas de $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ com relação à base B.

Exercício 9.11. Sejam $V = \mathbb{R}_2[x]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ fixo. Definimos

$$f_1(x) = 1, \qquad f_2(x) = x + \alpha, \qquad f_3(x) = (x + \alpha)^2.$$

Mostre que $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ é uma base de V. Seja $g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, quais são as coordenadas de g em relação a esta base ordenada $\mathcal{B}$?

Exercício 9.12. Escreva as matrizes ${}_C M_B$ para as bases a seguir:

a - $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $C = \{(1, 1), (0, 1)\}$ em $\mathbb{R}^2$;

b - $B = \{(1, -1), (1, 1)\}$ e $C = \{(1, 1), (0, 1)\}$ em $\mathbb{R}^2$;

c - $B = \{2, x\}$ e $C = \{1, 1 + x\}$ em $\mathbb{R}_1[x]$;

d - $B = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ e $C = \{(1, 0, 1), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}$ em $\mathbb{R}^3$;

e - $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $C = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ em $\mathbb{R}^3$;

f - $B = \{(1, -1, 1), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ e $C = \{(0, 1, 2), (0, 0, 2), (2, 1, 0)\}$ em $\mathbb{R}^3$;

g - $B = \{(1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 0)\}$ e
$C = \{(2, 2, 2, 2), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ em $\mathbb{R}^4$.

Exercício 9.13. Sejam B_1, B_2 as seguintes bases de $\mathbb{R}_4[x]$:

$$B_1 = \{1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3, 1+x^4\}$$
$$B_1 = \{1, 1+x, x+x^2, x^2+x^3, x^3+x^4\}.$$

Escreva ${}_{B_2}M_{B_1}$ e ${}_{B_1}M_{B_2}$.

Exercício 9.14 (∗). Considere a seguinte matriz de mudança de base em $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$:

$${}_CM_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

onde B é a seguinte base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Determine a base C de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

10 Transformações Lineares

Exercício 10.1. Mostre que a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (z, x + y)$ é transformação linear.

Exercício 10.2. Verifique se a aplicação $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x) = (x, 2)$ é transformação linear.

Exercício 10.3. Verifique se a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x^2 + y^2, x)$ é uma transformação linear.

Exercício 10.4. Seja $V = M_n(\mathbb{R})$ e B uma matriz fixa nesse espaço vetorial.

a - Mostre que a aplicação $F : V \to V$ dada por $F(X) = BX$ é uma transformação linear.

b - A aplicação $G : V \to V$ dada por $G(X) = XB$ é uma transformação linear?

c - É verdade que $F = G$?

d - Dê uma condição necessária e suficiente sobre B para que F e G sejam isomorfismos.

e - Mostre que a dimensão do núcleo e a dimensão da imagem de F e G são múltiplos de n, e que tem relação direta com a dimensão do espaço vetorial gerado pelas colunas (linhas) de B.

Exercício 10.5. Sabendo que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear e que $F(1,2) = (3,-1)$ e $F(0,1) = (1,2)$ achar $F(x,y)$ para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ qualquer?

Exercício 10.6. Mostre que a transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x,y,z) = -2x + 3y + 7z$ é linear.

Exercício 10.7. Seja P uma matriz inversível de $M_n(\mathbb{R})$. Mostre que $F : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ dado por $F(X) = P^{-1}XP$ é um operador linear.

Exercício 10.8. Seja $C([0,1])$ o espaço vetorial das funções contínuas definidas no intervalo $[0,1]$. Mostre que a aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to C([0,1])$ dada por $F(x,y) = xe^t + ye^{2t}$ é linear.

Exercício 10.9. Seja $V = C([0,1])$ o espaço vetorial das funções contínuas definidas no intervalo $[0,1]$. Mostre que $F : V \to V$ dado por $F(f) = f\varphi$, onde φ é um elemento fixo de V, é um operador linear.

Exercício 10.10. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ chama-se homotetia definida pelo escalar α a aplicação $H_\alpha : V \to V$ tal que $H_\alpha(u) = \alpha u$. Mostre que H_α é um operador linear.

Exercício 10.11. Num espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$, dado $w \in V$, chama-se translação definida por w a aplicação $T_w : V \to V$ tal que $T_w(u) = w + u$. Mostre que se $w \neq 0$, então T_w não é linear.

Exercício 10.12. Considere as transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (2x, x-y, y)$ e $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x,y,z) = (y-z, z-x)$. Determine $P \circ T$ e $T \circ P$. Determine uma base para $Ker(P \circ T)$ e uma base para $Im(T \circ P)$. Vale que $T \circ P$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^3$?

Exercício 10.13. Sejam U e V K-espaços vetoriais e $T : U \to V$ uma transformação linear.

a - Prove que T é injetora se e somente se, T leva todo subconjunto linearmente independente de U em um subconjunto linearmente independente de V.

b - Prove que se o subconjunto $\{T(u_1), ..., T(u_n)\}$ de V for linearmente independente, então $\{u_1, ..., u_n\}$ é um subconjunto linearmente independente de U.

Exercício 10.14. Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma função. Mostre que T é uma transformação linear se e só se para todo $x, y \in V$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y).$$

11 Matriz de uma Transformação Linear

Exercício 11.1. Determine as matrizes das transformações lineares em relação às bases canônicas dos respectivos espaços:

a - $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $T(x, y, z) = (x + y, z)$;

b - $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ definida por $T(x, y) = (x + y, x, x - y)$;

c - $T \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ definida por $T(x, y, z, w) = 2x + y - z + 3w$;

d - $T \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ definida por $T(x) = (x, 2x, 3x)$;

e - $T \in L(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathbb{R}_3[x])$ definida por

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b) + (c - b)t + (d - a)t^2 + (a + c)t^3.$$

Exercício 11.2. Seja V um espaço vetorial e $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de V. Sejam $T, S \in L(V)$ definidos na base por

$$\begin{cases} T(e_1) = e_1 - e_2 \\ T(e_2) = e_1 + e_3 \\ T(e_3) = e_2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} S(e_1) = 2e_1 + e_3 \\ S(e_2) = e_2 \\ S(e_3) = e_2 - 3e_1 \end{cases}$$

Determine as matrizes em relação à base B dos operadores

$$T,\ S,\ T + S,\ 2T - S,\ T \circ S,\ S \circ T,\ T^2 + S^2.$$

Exercício 11.3. No espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$, seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

uma matriz fixada e considere a função $T_A : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definida pela regra $T_A(X) = AX - XA$.

a - Mostre que T_A é linear.

b - Determine a matriz de T_A com relação à base canônica

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c - Determine $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

Exercício 11.4. Seja T o operador linear do $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 11 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Escreva ${}_BM_{can}$ para as bases

a - $B = \{(1,1,1),(0,0,1),(0,2,1)\}$;

b - $B = \{(1,3,3),(2,5,13),(0,0,1)\}$;

c - $B = \{(0,1,0),(1,0,1),(1,0,2)\}$.

Exercício 11.5. Sejam $T, S \in L(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}_3[x])$ definidos por $T(p(x)) = xp(x) - p(1)$ e $S(p(x)) = (x-1)p(x)$.

a - Mostre que T e S são de fato transformações lineares.

b - Determine a matriz de T em relação às bases $B = \{1, t-1, (t-1)^2\}$ e $C = \{1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ e $\mathbb{R}_3[x]$ respectivamente.

c - Determine a matriz de S em relação às bases $B = \{1, t-1, (t-1)^2\}$ e $C = \{1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ e $\mathbb{R}_3[x]$ respectivamente.

Exercício 11.6. Seja V um K-espaço vetorial de dimensão n, T um operador linear em V tal que $T^n = 0$ e $T^{n-1} \neq 0$. Seja $v \in V$ tal que $T^{n-1}(v) \neq 0$. Prove que o conjunto

$$B = \{v, T(v), T^2(v), ..., T^{n-1}(v)\}$$

é uma base de V. Qual é a matriz $[T]_B$?

Exercício 11.7. Para as matrizes abaixo, encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to R^3$ e bases B, C de $\mathbb{R}^3$ tais que $A = {}_C[T]_B$:

a - $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

b - $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c - $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

d - $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

12 Produto Interno

Exercício 12.1. Sejam $v = (x_1, y_1), w = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}_2$ e considere

$$\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + t x_2 y_2.$$

Para quais valores $t \in \mathbb{R}$ a regra $\langle v, w \rangle$ definida acima é um produto interno?

Exercício 12.2. Sejam V, W espaços vetoriais e $T : V \to W$ um isomorfismo. Mostre que se W tem produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então a regra

$$\langle v_1, v_2 \rangle := \langle T(v_1), T(v_2) \rangle, \; v_1, v_2 \in V$$

define um produto interno em V.

Exercício 12.3. Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno e $u, v \in V$. Prove as seguintes afirmações:

1. $\|u\| = \|v\|$ se e somente se $\langle u + v, u - v \rangle = 0$
2. $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ se e somente se $\langle u, v \rangle = 0$
3. $\frac{1}{4}\|u + v\|^2 - \frac{1}{4}\|u - v\|^2 = \langle u, v \rangle$.

Exercício 12.4. Use o processo de Gram-Schimidt para encontrar uma base ortonormal para os seguintes espaços vetoriais de $\mathbb{R}^5$:

1. $V_1 = \langle (1, 0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0, 2), (1, 2, 0, 1, 0) \rangle$;
2. $V_2 = \langle (1, 0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1), (1, 2, 0, 1, 1) \rangle$;
3. $V_3 = \langle (1, 1, 1, 1, 2), (2, 0, 1, 0, 2), (1, 1, 0, 1, 0) \rangle$.

Na sequência, calcule $proj_{V_1}(3, 2, -1, -1, 0)$, $proj_{V_2}(1, 0, 0, 0, 0)$ e $proj_{V_3}(1, 0, 0, 0, 1)$,

Exercício 12.5. Sejam $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z = 0\}$. Determine $U^\perp$ os vetores dos subespaços U e $U^\perp$ que melhor aproximam o vetor $v = (1, 2, 1)$, ou seja determine a projeção de v sobre U e a projeção de v sobre $U^\perp$

Exercício 12.6. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$. Encontre uma base ortogonal para $S^\perp$.

Exercício 12.7. Encontre uma base ortonormal de cada um dos seguintes subespaços S e determine também, em cada caso, o subespaço $S^\perp$.

a - S é o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (0, 1, 1)$, com o produto interno usual.

b - $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$, com o produto interno usual.

c - $S = \{p(t) \in \mathbb{R}_3[x] : xp'(x) = p(x)\}$ e $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

d - $S = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}$ e $\langle A, B \rangle = tr(AB^t)$.

Exercício 12.8. Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno e seja $T : V \to V$ uma transformação linear.

1. Mostre que se T for um isomorfismo, então a seguinte aplicação define um produto interno $f(u, v) =< T(u), T(v) >$, onde $u, v \in V$.
2. Mostre que se valer $< T(u), T(v) >=< u, v >$, para todo $u, v \in V$, então T é injetora. Se além disso valer que V tem dimensão finita, então $T : V \to V$ é um isomorfismo.

Exercício 12.9. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ quaisquer. Mostre, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^n$, que

$$\left(\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n}\right)^2 \leq \frac{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}{n}$$

Exercício 12.10. Sejam U e V subespaços vetoriais de um espaço euclidiano de dimensão finita W.

a - Mostre que se $U \subseteq V$ então $V^\perp \subseteq U^\perp$.

b - Mostre que $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$ e que $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.

Exercício 12.11. Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita e T um operador auto-adjunto de V tal que $\langle T(v), v\rangle = 0$ para todo $v \in V$. Mostre que T é o operador nulo.

Exercício 12.12. Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita e T_1, T_2 operadores auto-adjuntos de V. Mostre que $T_1 \circ T_2$ é auto-adjunto se e só se $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.

Exercício 12.13. Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita. Dizemos que um operador T de V é **positivo** se $\langle T(v), v\rangle > 0$ para todo $v \in V$ não nulo. Seja T um operador positivo e auto-adjunto. Defina a função $\langle\,\rangle_T : V \times V \to \mathbb{R}$ por

$$\langle v, w\rangle_T := \langle T(v), w\rangle.$$

Mostre que $\langle\,\rangle_T$ é um produto interno para V. O mesmo acontece se T não for auto-adjunto ou T não for positivo?

13 Diagonalização

Exercício 13.1. Decida se cada uma das seguintes matrizes é diagonalizável. Caso afirmativo, realize a diagonalização.

a - $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b - $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c - $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d - $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g - $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

h - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

i - $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

j - $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

k - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

l - $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Exercício 13.2. Seja
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
Calcule A^{2021}.

Exercício 13.3. Seja
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Calcule A^{2021}.

Exercício 13.4. Considere a matriz
$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$
Mostre que M é diagonalizável se e só se $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$.

Exercício 13.5. Seja $T : \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ definido por $T(A) = A^t$. Determine um base B de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ de modo que $[T]_B$ seja uma matriz diagonal.

Exercício 13.6. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo K e $T \in L(V)$. Sejam $\lambda \in K$ um autovalor de T e $f(x) \in K[x]$. Mostre que $f(\lambda)$ é um autovalor de $f(T)$.

Exercício 13.7. Sejam V um espaço vetorial e $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de V. Seja $T : V \to V$ o operador linear definido por
$$T(e_1) = e_2 - e_1,\ T(e_2) = e_3 - e_1,\ T(e_3) = e_3 - e_2.$$
Mostre que T não é diagonalizável.

Exercício 13.8. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostre que se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de A, então λ^k é um autovalor de A^k para todo $k \geq 1$.

Exercício 13.9. Mostre que a matriz
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$
com $b \neq 0$ não é diagonalizável.

Exercício 13.10 $(*)$**.** Seja $A \in M_n(K)$ uma matriz diagonalizável. Mostre que A^r é diagonalizável para todo inteiro $r \geq 1$. Exiba uma matriz não diagonalizável tal que A^2 é diagonalizável.

Exercício 13.11 $(**)$**.** Seja $V = C(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas. Seja $T \in L(V)$ tal que para cada $f \in V$, $T(f)$ é a função
$$(T(f))(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$
Mostre que T não tem autovalores.