Capítulo 2

Funções complexas elementares

2.1 Funções complexas: definição

Introduzidos os números complexos, passemos à próxima etapa: estudar *funções* de números complexos: $f : A \to \mathbb{C}$, onde o *domínio* A é um subconjunto de $\mathbb{C}$ (as vezes o próprio $\mathbb{C}$). Na medida do possível, usaremos z para denotar um elemento arbitrário do domínio de f, $z \in A$, e w para um elemento arbitrário da *imagem* de f; ou seja, $f(z) = w \in \mathbb{C}$.[1]

Da mesma maneira que z pode ser representado por $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$ sendo as partes real e imaginária de z, o mesmo pode ser feito para o resultado da função f aplicada a z: $f(z) = w = u + iv$, onde $u, v \in \mathbb{R}$ são as partes real e imaginária do número $w = f(z)$. Como o valor de w depende de z — e, portanto, de x e y —, o mesmo vale para u e v, que podem, então, ser vistas como funções *reais* de x e y:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy.$$

Vê-se, então, que uma função *complexa* de uma variável *complexa* é completamente caracterizada por duas funções *reais*, u e v, de duas variáveis *reais* cada. Ou, em outras palavras, uma função de uma variável complexa pode vista como uma função de (um subconjunto de) $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$. Além disso, da mesma maneira que z pode ser igualmente bem representado por seu módulo $|z| = \rho$ e argumento $\arg(z) = \theta$, $z = \rho e^{i\theta}$, o mesmo vale para $w = f(z)$: $w = Re^{i\Theta}$, onde $R = |w|$ e $\Theta = \arg(w)$. Qual é a representação mais conveniente? Isso varia de caso a caso. Por isso, é bom nos familiarizarmos com todas essas formas.

[1] A menos que dito explicitamente, nos concentraremos basicamente nas chamadas *funções unívocas*: aquelas que associam um *único* valor w a cada elemento z do domínio. No entanto, funções complexas *plurívocas*, que associam mais de um valor w a elementos z do domínio, aparecem frequentemente. Veremos, mais adiante, alguns exemplos importantes delas.

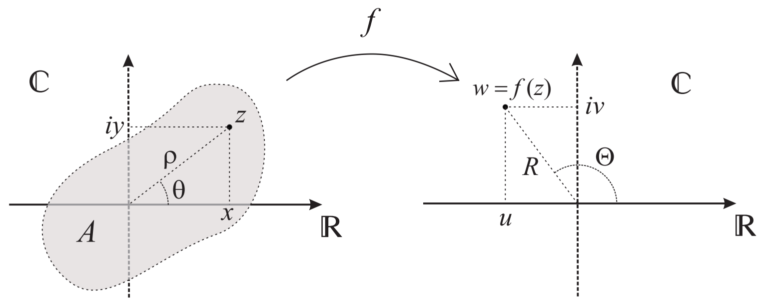

Figura 2.1: Função de uma variável complexa $f : A \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = w$.

- Exemplo: Considere a função $f : A \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = 1/z$, com $z \neq 0$ (ou seja, $A = \mathbb{C}\backslash\{0\}$). Então, na representação cartesiana tanto para o domínio quanto para a imagem:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{(x+iy)}\frac{(x-iy)}{(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = u(x,y) + iv(x,y),$$

de modo que

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Já misturando as representações – por exemplo, polar para o domínio e cartesiana para a imagem – temos para a mesma função:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta} = \rho^{-1}(\cos\theta - i\sin\theta) = u(\rho,\theta) + iv(\rho,\theta),$$

com

$$u(\rho,\theta) = \rho^{-1}\cos\theta, \quad v(\rho,\theta) = -\rho^{-1}\sin\theta.$$

Note que u e v como funções[2] de ρ e θ poderiam também ser facilmente obtidas a partir do resultado anterior em termos de x e y (usando-se $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$).

[2]Nota aos "cricas" de plantão: Aqui tomei a liberdade de ser impreciso com a notação em prol da simplicidade. Utilizei as mesmas letras, u e v, para representar as partes real e imaginária de $f(z)$ tanto em termos de x e y quanto em termos de ρ e θ. A rigor, $u(x,y)$ e $u(\rho,\theta)$, por exemplo, são funções matemáticas diferentes (pois $u(\rho,\theta)$ não é obtida a partir de $u(x,y)$ apenas substituindo $x \mapsto \rho$ e $y \mapsto \theta$) e portanto não deveriam ser representadas pela mesma letra u. O mesmo vale para $v(x,y)$ e $v(\rho,\theta)$. Mais preciso seria utilizar outras letras, digamos U e V, para as partes real e imaginária de $f(z)$ em termos de ρ e θ, onde teríamos $U(\rho,\theta) = u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ e $V(\rho,\theta) = v(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Mas como isso tornaria a notação mais trabalhosa, tomo a liberdade de usar as mesmas letras para grandezas que tenham a mesma *interpretação* (a não ser quando isso causar muita confusão). Para quem não entendeu a razão desta nota, apenas ignore-a (embora fosse esperado que você entendesse).

- **Exercício:** Complete o exemplo anterior, fornecendo as representações que faltam para a função $f(z) = 1/z$: (i) cartesiana para o domínio e polar para a imagem e (ii) polar tanto para o domínio quanto para a imagem.

- **Exercício:** Refaça o exemplo anterior para a função $f(z) = z^3/\bar{z}$.

- **Exercício:** Refaça mais uma vez o exemplo anterior para a função exponencial $f(z) = e^z$.

Pode parecer, com isso, que poderíamos reduzir a análise de funções complexas a uma questão de "Cálculo II", onde funções reais de mais de uma variável real já foram estudadas. No entanto, embora os conceitos introduzidos em "Cálculo II" sejam importantes na análise de funções complexas, vocês verão em *Física-Matemática* que, *felizmente*, as funções complexas podem carregar uma estrutura mais rica do que a de meras funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Digo "felizmente" porque essa estrutura adicional trará consigo propriedades interessantes que facilitarão incrivelmente algumas tarefas que seriam mais complicadas apenas em termos da estrutura real. Mas isso é tema para outra disciplina.

2.2 Funções elementares

Algumas funções complexas aparecem com tanta frequência e são tão facilmente obtidas a partir de funções reais que já conhecemos bem que merecem o nome de *funções elementares*. São elas[3]:

2.2.1 Funções polinomiais

Uma função f é dita ser *polinomial* de *grau* n ($\in \mathbb{N}$) se puder ser colocada na forma

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \tag{2.1}$$

onde a_0, a_1, ..., a_n são constante complexas (com $a_n \neq 0$). Note que não é necessária nenhuma restrição de domínio para que uma função polinomial seja bem definida; podemos adotar todo o plano complexo $\mathbb{C}$ como domiínio de f.

[3]Na verdade, qualquer combinação envolvendo um número finito de adições, subtrações, produtos e divisões dessas funções que apresentaremos a seguir também é chamada de função elementar.

2.2.2 Funções racionais

Uma função f é dita ser *racional* se puder ser colocada na forma

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{2.2}$$

onde $P(z)$ e $Q(z)$ são ambas funções polinomiais.

Devido ao já mencionado *teorema fundamental da álgebra* (vide Sec. 1.1), que garante que todo polinômio de grau $n \geq 1$ tem pelo menos uma raiz complexa, vê-se que o domínio de uma função racional deve ser restringido de modo a não incluir as raízes de $Q(z)$ (a não ser que $Q(z)$ seja constante, caso em que f cai numa função polinomial). Tirando esses "pontos-problema" isolados, não há necessidade de restrições adicionais ao domínio de uma função racional.

- **Exercício:** Determine o maior domínio de definição da função

  $$f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^3 + 1},$$

  representando-o no plano complexo.

2.2.3 Funções exponenciais

Uma função f é dita ser *exponencial* de base a (com $a \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$) se for da forma

$$f(z) = a^z. \tag{2.3}$$

Aqui precisamos ser mais claros sobre o significado da expressão acima. Diferentemente das funções polinomiais e racionais, que envolviam apenas uma combinação *finita* das quatro operações básicas entre números complexos, a exponenciação por um número complexo deve ser definida a partir das propriedades da exponenciação por números reais, de modo que a Eq. (2.3) na verdade é apenas uma notação compacta que, quando aberta em detalhes, significa:

$$\begin{aligned} f(z) &= a^z = (|a|e^{i\alpha})^z = |a|^z e^{i\alpha z} = e^{z \ln|a|}\, e^{i\alpha x - \alpha y} \\ &= e^{(x \ln|a| - \alpha y)}\, e^{i(y \ln|a| + \alpha x)} \\ &= e^{(x \ln|a| - \alpha y)} \left[\cos\left(y \ln|a| + \alpha x\right) + i \sin\left(y \ln|a| + \alpha x\right)\right], \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde, por conveniência, representamos a na forma polar ($a = |a|e^{i\alpha}$) e z na forma cartesiana ($z = x + iy$). Frequentemente tem-se em mãos o caso particular da função exponencial de base e, de modo que a expressão acima se reduz à que já encontramos no último exercício da seção anterior:

$$f(z) = e^z = e^x\, e^{iy} = e^x\left(\cos y + i \sin y\right). \tag{2.5}$$

Note que não é necessária nenhuma restrição no domínio de funções exponenciais.

2.2.4 Funções trigonométricas

Diferentemente das funções anteriores, cujas motivações são basicamente algébricas, as funções trigonométricas usuais (ou seja, de variável real) possuem uma motivação primordialmente geométrica: a relação entre o comprimento α de um arco no circulo unitário e suas várias projeções ($\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$; vide Fig. 2.2, onde o círculo trigonométrico é representado no plano euclidiano real). Como o comprimento de um arco é sempre

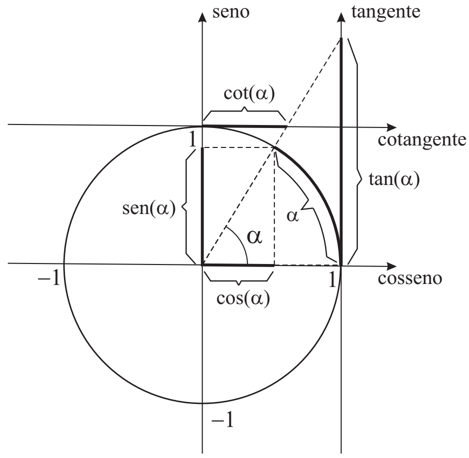

Figura 2.2: Relações trigonométricas entre um arco de comprimento α no círculo unitário e suas projeções. Essa figura representa um plano euclidiano real, não um plano complexo.

um número real, pode parecer difícil, num primeiro momento, achar uma maneira de generalizar as funções trigonométricas para valores complexos. No entanto, isso não é verdade. Um maneira natural de se definir essas funções trigonométricas de um número complexo z seria através das séries de Taylor dessas funções. Por exemplo, podemos definir $\sin z$ e $\cos z$ através das Eqs. (1.7) e (1.8), bastanto substituir $\theta \in \mathbb{R}$ por $z \in \mathbb{C}$ no lado direito dessas expressões. Mas uma maneira ainda mais prática de fazer isso é através da fórmula de Euler. Pela Eq. (1.10) vemos que

$$\cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},$$

$$\sin\theta = \mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Como exponenciais de números complexos já foram definidas anteriormente, podemos simplesmente trocar $\theta \in \mathbb{R}$ por $z \in \mathbb{C}$ nas segundas igualdades acima, chegando, finalmente, às *definições*:

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{2.6}$$

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{2.7}$$

A partir daí, todas as outras funções trigonométricas — tangente, cotangente, secante, cossecante — podem igualmente ser estendidas para uma variável complexa substituindo-se $\sin\theta \mapsto \sin z$ e $\cos\theta \mapsto \cos z$ em suas definições.

- **Exercício:** Obtenha explicitamente as partes real e imaginária de cada uma das funções $\cos z$ e $\sin z$ em termos das partes real e imaginária de $z = x + iy$. Além disso, encontre todos os "zeros" (i.e., raízes) dessas funções e localize-os no plano complexo.

- **Exercício:** Com base em informações obtidas no exercício anterior, determine o maior domínio de definição das funções cosseno, seno, tangente, cotangente, secante e cossecante.

2.2.5 Funções hiperbólicas

As chamadas funções hiperbólicas, à semelhança das trigonométricas, possuem uma motivação inerentemente geométrica. Então, antes de definir essas funções para uma variável complexa, vamos revisar suas deifnições para uma variável real α. Considere uma hipérbole equilátera unitária dada pela equação $x^2 - y^2 = 1$ (e $x > 0$) — vide Fig. (2.3). Gostaríamos de definir uma variável *adimensional* α de modo que possamos expressar x e y como funções de α de tal forma que a equação da hipérbole, $x(\alpha)^2 - y(\alpha)^2 = 1$, seja *identicamente* satisfeita (ou seja, para qualuer valor de $\alpha \in \mathbb{R}$). Isso é motivado pelo que acontece no caso trigonométrico, onde $x^2 + y^2 = 1$ se torna uma identidade quando escrevemos $x = x(\alpha) = \cos\alpha$ e $y = y(\alpha) = \sin\alpha$. No caso trigonométrico, α tem a interpretação geométrica de ser um comprimento de arco no círculo unitário (vide Fig. 2.2); ou, no caso mais geral de um arco de comprimento l num circulo de raio R, tem-se $\alpha = l/R$ (para garantir que α seja adimensional) que *define* o ângulo (em radianos) subentendido pelo arco l. Porém, no caso hiperbólico, a distância r de um ponto da hipérbole até a origem (que seria o análogo do raio do círculo) *não* é constante, de modo que se quisermos definir um parâmetro α análogo ao caso trigonométrico (onde $\alpha = l/R$) é mais conveniente usarmos uma definição "local" (i.e., infinitesimal): $d\alpha := dl/r$. Desse modo, pela geometria do caso hiperbólico (vide Fig. 2.3), temos (refaça você mesmo!):

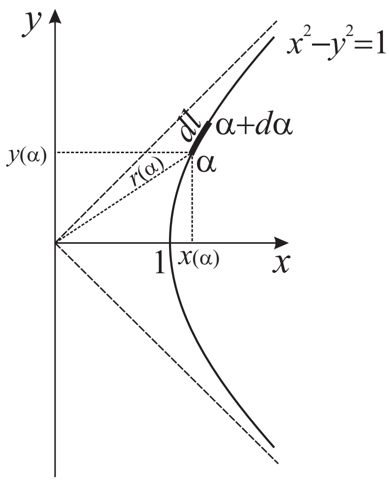

Figura 2.3: Hipérbole equilátera unitária e a definição do "ângulo hiperbólico" α. Novamente, essa figura representa o plano euclidiano real, não o plano complexo.

$$
\begin{aligned}
d\alpha &:= \frac{dl}{r} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{r} = \frac{dy}{r}\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} = \frac{dy}{r}\sqrt{\frac{y^2}{y^2+1} + 1} \\
&= \frac{dy}{r}\sqrt{\frac{2y^2+1}{y^2+1}} = \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}},
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

onde fizemos uso do fato que sobre a hipérbole $x = \sqrt{y^2+1}$ e $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Não é difícil verificar que a função $\ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$ é uma *primitiva* (ou anti-derivada) da função $1/\sqrt{y^2+1}$. Então, integrando ambos os lados da Eq. (2.8), obtemos finalmente a relação entre y e α:

$$
\int_0^\alpha d\alpha' = \int_0^y \frac{dy'}{\sqrt{y'^2+1}} \Rightarrow \alpha = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right), \tag{2.9}
$$

onde, por conveniência, escolhemos $\alpha = 0$ no vértice da hipérbole ($y = 0$). Invertendo essa expressão para obter $y(\alpha)$, temos (faça você mesmo!):

$$
y(\alpha) = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}. \tag{2.10}
$$

Daí, fica fácil encontrarmos $x(\alpha) = \sqrt{y(\alpha)^2 + 1}$:

$$
x(\alpha) = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}. \tag{2.11}
$$

Em resumo, sobre uma hipérbole equilátera unitária $x^2 - y^2 = 1$ é natural definirmos um parâmetro α, às vezes denominado "ângulo hiperbólico" (embora *não* seja um ângulo verdadeiro), de modo que $x(\alpha)$ e $y(\alpha)$ sejam dados pelas Eqs. (2.10) e (2.11). Além disso, α é definido de tal maneira que o comprimento de um arco infinitesimal dl sobre a hipérbole seja dado por $dl = r(\alpha)d\alpha$, com $r(\alpha) = \sqrt{x(\alpha)^2 + y(\alpha)^2}$. Devido a tantas semelhanças com o caso trigonométrico, as funções que aparecem nas Eqs. (2.10) e (2.11) recebem, respectivamente, os nomes de *seno hiperbólico* e *cosseno hiperbólico*:

$$\sinh \alpha := \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}, \tag{2.12}$$

$$\cosh \alpha := \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}. \tag{2.13}$$

A partir destas, outras funções hiperbólicas são definidas por analogia com o caso trigonométrico (vide Fig. 2.4):

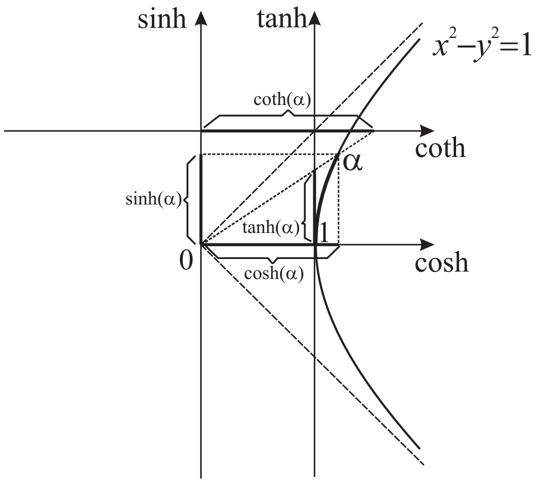

Figura 2.4: Visualização geométrica de algumas funções hiperbólicas.

$$\tanh \alpha := \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha}, \tag{2.14}$$

$$\coth \alpha := \frac{\cosh \alpha}{\sinh \alpha}, \tag{2.15}$$

$$\operatorname{csch} \alpha := \frac{1}{\sinh \alpha}, \tag{2.16}$$

$$\operatorname{sech} \alpha := \frac{1}{\cosh \alpha}. \tag{2.17}$$

Todas essas são chamadas funções hiperbólicas.

Como todas essas funções hiperbólicas são definidas a partir de exponenciais, é bastante simples estendê-las para variáveis complexas, bastando substituir $\alpha \in \mathbb{R}$ por $z \in \mathbb{C}$ em todas as Eqs. (2.12) a (2.17). Ao fazermos isso, podemos ver facilmente que embora as funções hiperbólicas e trigonométricas se refiram a geometrias (reais) completamente diferentes (hipérbole e círculo), há uma estreita conexão entre elas quando expressas em termos de números complexos: $\cosh z = \cos(iz)$ e $\sinh z = -i\sin(iz)$.[4]

- Exemplo: Vamos abrir a expressão para $\cosh z$ em termos das partes real e imaginária de $z = x + iy$:

$$
\begin{aligned}
\cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+iy} + e^{-x-iy}}{2} \\
&= \frac{e^x(\cos y + i\sin y) + e^{-x}(\cos y - i\sin y)}{2} \\
&= \frac{(e^x + e^{-x})\cos y + i\sin y(e^x - e^{-x})}{2} \\
&= \cosh x\cos y + i\sinh x\sin y. \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

  Dessa expressão vemos que embora $\cosh\alpha$ nunca se anule para $\alpha \in \mathbb{R}$, a função $\cosh z$ se anula nos seguintes pontos (raízes): $z = i(\pi/2+n\pi)$, com $n \in \mathbb{Z}$.

- **Exercício:** Faça o mesmo desenvolvimento do exemplo anterior para as funções $\sinh z$, $\tanh z$ e $\coth z$ e encontre todos os "zeros" (ou seja, raízes) dessas funções.

- **Exercício:** Estabeleça o maior domínio possível para cada uma das funções hiperbólicas.

2.2.6 Funções logarítmicas

Agora iremos generalizar a função *logaritmo natural* (que denominaremos simplesmente de *logaritmo*) para números complexos. Relembremos que a definição do logaritmo real é a de *função inversa* da função exponencial de base e:

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x.$$

Como e elevado a qualquer número real é sempre um número positivo, o domínio de definição dessa função logaritmo real é o semi-eixo real positivo, $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Como fazer, então, para estender esse domínio não apenas para incluir números negativos mas também números complexos gerais?

A chave para essa generalização é, mais uma vez, a fórmula de Euler. Através dela, sabemos que podemos escrever um número complexo arbitrário

[4] Lembrando da interpretação geométrica no plano complexo da multiplicação por i, vemos que a função "cosh" nada mais é do que a função "cos" atuando no plano complexo rotacionado de $\pi/2$, enquanto que a função "sinh" pode ser vista como a função "sin" atuando no plano complexo rotacionado de $\pi/2$ e depois feita uma rotação inversa de $-\pi/2$ na imagem. Isso é um exemplo da conexão existente entre as geometrias circular e hiperbólica quando estendidas aos números complexos, que encontra aplicações importantes em matemática e física.

como $z = \rho e^{i\theta}$, onde $\rho = |z|$ e $\theta = \arg(z)$. Além disso, se $\rho \neq 0$, podemos rescrever $\rho = e^{\ln \rho}$, onde se fez uso da função logaritmo real usual. Então, o caso complexo parece ser facilmente tratado como:

$$\ln(z) = \ln(\rho e^{i\theta}) = \ln(e^{\ln \rho + i\theta}) = \ln \rho + i\theta \quad (1^{\underline{a}} \text{ tentativa}).$$

No entanto, há um problema com essa definição. Um certo número complexo z pode ser escrito como $z = \rho e^{i\theta}$ mas também pode igualmente bem ser representado por $z = \rho e^{i(\theta + 2n\pi)}$, com n sendo *qualquer* número inteiro. Desse modo, por que escolher a parte imaginária de $\ln(z)$ como sendo θ e não $\theta + 2\pi$ ou $\theta + 4\pi$ dentre todas as infinitas possibilidades? Afinal, o próprio θ poderia ter sido escolhido como qualquer um desses valores. Como saberíamos, apenas dado um ponto z no plano complexo, qual θ utilizar para fornecer o resultado de $\ln(z)$? Para contornar esse problema (de "indefinição") somos obrigados a considerar o resultado do logaritmo de um número complexo z como sendo *todos* esses valores possíveis simultaneamente; ou seja, dado um número complexo $z \neq 0$, que *pode* ser representado como $z = \rho e^{i\theta}$, seu logaritmo será *definido* pelos *múltiplos valores*

$$\mathrm{Ln}(z) \equiv \mathrm{Ln}(\rho e^{i\theta}) := \ln \rho + i(\theta + 2n\pi), \ n \in \mathbb{Z}. \qquad (2.19)$$

Note que utilizamos a primeira letra maiúscula para diferenciar essa *função plurívoca*[5] complexa da função logaritmo real usual, que é unívoca e restrita a valores reais positivos. Por exemplo, enquanto $\ln(e^3)$ assume o único valor 3 como resultado, tem-se que $\mathrm{Ln}(e^3) = 3 + 2n\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$). Com essa adição de $2in\pi$ na definição de Ln na Eq. (2.19) podemos, sem perda de generalidade, restringir o valor de $\theta = \arg(z)$ a pertencer a um intervalo de tamanho 2π; normalmente considera-se $-\pi < \theta \leq \pi$. Com essa convenção, os diversos valores de $\mathrm{Ln}(z)$ diz-se que pertencem a diferentes *ramos* da função logaritmo, onde cada ramo é dado por um valor de n. Em particular, o ramo com $n = 0$ (portanto, com $-\pi < \mathrm{Im}(\mathrm{Ln} z) \leq \pi$) é chamado de *ramo principal* da função logaritmo e será denotado simplesmente por $\ln z$ (já que coincide com o logaritmo usual quando $z \in \mathbb{R}_+^*$) para diferenciá-lo do caso geral (2.19).

Para finalizar nossa discussão a respeito da função $\mathrm{Ln}(z)$, deve-se mencionar que algumas vezes é mais conveniente escolhermos *um* ramo de $\mathrm{Ln}(z)$ e trabalharmos apenas com ele (normalmente o ramo principal). Isso elimina a complicação dos múltiplos valores — cada ramo é rigorosamente uma *função* (ou seja, unívoca) — mas há um preço a se pagar por isso: a função deixa de ser contínua em toda uma curva semi-infinita (chamada de *corte*) que parte de $z = 0$ (chamado de *ponto de ramificação*, que, nesse caso, nem mesmo pertence ao domínio de Ln) e se estende até o infinito. Com a convenção $-\pi < \theta \leq \pi$ mencionada acima, a descontinuidade acontece no semi-eixo

[5]Lembre-se da discussão na nota de rodapé 1 na página 16. Aqui encontramos o primeiro exemplo, entre as funções elementares, de uma função plurívoca.

real negativo (pois é ali que o valor de θ é descontínuo). Pode-se alterar o local do corte (alterando-se a convenção da variação de θ) mas o ponto de ramificação é fixo. Na disciplina de *Física-Matemática* esses conceitos de corte e pontos de ramificação (intimamente relacionados ao conceito de *folhas de Riemann*) serão melhor analisados.

- **Exercício:** Mostre que dado um número complexo $a = |a|e^{i\alpha} \neq 0$ qualquer, o logaritmo complexo na base a é dado pelos múltiplos valores

$$\mathrm{Log}_a(z) = \frac{\ln\rho + i(\theta + 2n\pi)}{\ln|a| + i\alpha}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

onde $\rho = |z| \neq 0$ e $\theta = \arg(z)$.

2.2.7 Funções z^α

Já vimos na Sec. 1.4 como elevar um número complexo a uma potência complexa [vide Eq. (1.12)]. Aqui apenas temos que considerar a possibilidade da base da potência ser uma variável, enquanto que o expoente é mantido constante. Desse modo, sendo $\alpha = \alpha_R + i\alpha_R$ a representação cartesiana do expoente, temos:

$$\begin{aligned} z^\alpha &= \left(\rho e^{i\theta}\right)^{\alpha_R + i\alpha_I} = \rho^{\alpha_R + i\alpha_I} e^{-\theta\alpha_I + i\theta\alpha_R} \\ &= e^{(\alpha_R \ln\rho - \alpha_I\theta)}\, e^{i(\alpha_R\theta + \alpha_I \ln\rho)}. \end{aligned}$$

Mais uma vez, a exemplo da função logaritmo, o resultado depende do valor de $\theta = \arg(z)$ usado para representar a variável complexa z. Por isso, pelo mesmo motivo discutido no caso do logaritmo, somos forçados a considerar que a função z^α é plurívoca, assumindo *todos* os múltiplos valores

$$z^\alpha = e^{(\alpha_R \ln\rho - \alpha_I\theta)}\, e^{i(\alpha_R\theta + \alpha_I \ln\rho)}\, e^{2n\pi(\alpha_I - i\alpha_R)}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.20}$$

Note que apenas no caso em que $\alpha \in \mathbb{Z}$ (que faz com que essa função seja um caso particular de função polinomial ou racional) que essa função volta a ser unívoca.

A mesma discussão de ramos e ponto de ramificação feita no caso logarítmico se aplica também para essa função. Restringindo, sem perda de generalidade, $-\pi < \theta \leq \pi$ na Eq. (2.20), cada valor de $n \in \mathbb{Z}$ representa um ramo da função z^α, com $n = 0$ sendo o ramo principal. Mas vale notar que, assim como para $\alpha \in \mathbb{Z}$ todos os ramos na verdade coincidem (a função z^α é unívoca), para valores de expoente *racionais*, $\alpha \in \mathbb{Q}$, há apenas um número *finito* de ramos distintos.

- Exemplo: Consideremos o caso $\alpha = 1/2$. Há apenas *dois* ramos realmente distintos da função $z^{1/2}$, a saber,

$$z^{1/2} = \begin{cases} \sqrt{\rho}\, e^{i\theta/2} \\ \sqrt{\rho}\, e^{i(\theta/2+\pi)} = -\sqrt{\rho}\, e^{i\theta/2} \end{cases}, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

Todos os outros ramos coincidem com um desses dois. (Entenda o porquê!)

No caso em que $\alpha = p/q$, onde ambos p e q são números inteiros primos entre si (ou seja, a fração p/q não pode ser simplificada ainda mais), então o número de ramos distintos de z^α é dado por $|q|$. (Mostre isso!) Para todos os outros valores de expoente ($\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$) a função z^α possui infinitos ramos distintos (assim como a função logaritmo).

- **Exercício:** Refaça a análise do exemplo anterior para a função $z^{2/3}$.

- **Exercício:** Obtenha qual o maior domínio possível para a função z^α. (Sugestão: separe sua análise nos casos $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $\mathrm{Re}(\alpha) \leq 0$.)

2.2.8 Funções trigonométricas inversas

Tendo conseguido expressar as funções trigonométricas em termos de exponenciais complexas, é razoável esperar que as funções trigonométricas *inversas* (arco-seno, arco-cosseno, arco-tangente, ...[6]) possam ser expressas com a ajuda da função logaritmo. De fato, temos no caso do arco-seno:

$$\begin{aligned} & w = \arcsin z \Rightarrow \sin w = z \Leftrightarrow \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z \\ \Leftrightarrow \quad & e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2} \\ \Leftrightarrow \quad & w = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right). \end{aligned}$$

Portanto, temos uma forma explícita para a função arco-seno:

$$\arcsin z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right). \tag{2.21}$$

Note que como as funções logaritmo complexo e raiz quadrada são plurívocas, o mesmo acontece para a função arco-seno (lembre-se que mesmo no caso real, existem infinitos valores θ que levam ao mesmo valor de $\sin\theta$).

- **Exercício:** Calcule *todos* os valores de $\arcsin 2$ e de $\arcsin i$.

Deixaremos como exercício a obtenção explícita das outras funções trigonométricas inversas:

[6]Também é comum a seguinte notação: $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$, ...

- **Exercício:** Mostre, de maneira análoga ao caso do arco-seno, que:

$$\arccos z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \tag{2.22}$$

$$\arctan z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right), \tag{2.23}$$

$$\operatorname{arcsec} z = -i \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z}\right), \tag{2.24}$$

$$\operatorname{arccsc} z = -i \operatorname{Ln}\left(\frac{i + \sqrt{z^2 - 1}}{z}\right), \tag{2.25}$$

$$\operatorname{arccot} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{z + i}{z - i}\right). \tag{2.26}$$

Além disso, determine o maior domínio possível para cada uma das funções trigonométricas inversas.

2.2.9 Funções hiperbólicas inversas

Exatamente o mesmo procedimento que utilizamos para obter as funções trigonométricas inversas pode ser aplicado para se obter as funções hiperbólicas inversas. Mas existe uma maneira ainda mais direta, fazendo uso da relação entre as funções hiperbólicas e trigonométricas.

- Exemplo: Lembremos que $\sinh z = -i \sin(iz)$. Então:

$$\begin{aligned}
& w = \operatorname{arcsinh} z \Rightarrow z = \sinh w = -i \sin(iw) \\
\Leftrightarrow\ & iw = \arcsin(iz) = -i \operatorname{Ln}\left(\sqrt{z^2 + 1} - z\right) \\
\Leftrightarrow\ & w = -\operatorname{Ln}\left(\sqrt{z^2 + 1} - z\right) = \operatorname{Ln}\left(\sqrt{z^2 + 1} + z\right).
\end{aligned}$$

Logo, temos:

$$\operatorname{arcsinh} z = \operatorname{Ln}\left(\sqrt{z^2 + 1} + z\right). \tag{2.27}$$

- **Exercício:** Mostre, pelo método de sua preferência, que:

$$\operatorname{arccosh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \tag{2.28}$$

$$\operatorname{arctanh} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right), \tag{2.29}$$

$$\operatorname{arcsech} z = \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z}\right), \tag{2.30}$$

$$\operatorname{arccsch} z = \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + \sqrt{z^2 + 1}}{z}\right), \tag{2.31}$$

$$\operatorname{arccoth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right). \tag{2.32}$$

Além disso, determine o maior domínio possível para cada uma das funções hiperbólicas inversas.