Lista de Exercícios 2

① Uma gota esférica de chuva evapora a uma taxa proporcional à área de sua superfície (seja α essa constante de proporcionalidade). Escreva a EDO que governa o volume da gota $V(t)$ como função do tempo t e calcule o tempo de evaporação de uma gota inicialmente com volume V_0.

② A temperatura T no interior de uma casa totalmente fechada satisfaz, numa primeira aproximação, a seguinte EDO, em função do tempo t:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a),$$

onde $k > 0$ é uma constante (que depende das propriedades das paredes – quanto melhor o isolamento térmico, menor o valor de k) e T_a é a temperatura do ambiente externo.

(a) No caso em que a temperatura do ambiente externo é uma constante, resolva a EDO acima e discuta o comportamento de $T(t)$;

(b) No caso em que a temperatura do ambiente externo varia periodicamente segundo $T_a(t) = T_m + \Delta\cos(\omega t)$, com T_m, Δ e ω constantes, determine a solução para $T(t)$ e discuta seu comportamento, comparado-o com o da temperatura do ambiente externo. (Por exemplo, mostre que no limite de k "pequeno" – paredes bastante isolantes –, a temperatura interna varia atrasada de $1/4$ de período em relação à temperatura externa.)

③ Considere a EDO $ty' + 2y = \sin t$, para $t > 0$.

(a) Resolva essa EDO usando o método do fator integrante;

(b) Outra maneira de resolver essa EDO é pelo método da *variação dos parâmetros*, que consiste no seguinte. Primeiramente encontre a solução $y_h(t)$ para a EDO *homogênea* associada. Em seguida, reescreva $y(t) = c(t)y_h(t)$, substitua na EDO dada, determine a EDO que $c(t)$ satisfaz e, finalmente, resolva-a, encontrando $c(t)$ e, então, $y(t)$. Compare com a resposta do item anterior.

④ Considere o seguinte sistema de EDOs:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + xy^3 \\ \\ \frac{dy}{dt} = xy \end{cases}$$

sujeito às condições iniciais $x(0) = 2$ e $y(0) = 1$.

(a) Tomando a razão das EDOs acima, obtenha uma EDO para a função $x(y)$ e verifique que a mesma é linear. Qual a condição sobre $x(y)$ imposta pelas condições iniciais acima?

(b) Resolva a EDO obtida no item anterior.

⑤ Resolva as seguintes EDOs:

(a) $y' = x^2/(1 + y^2)$;

(b) $y' = (1 + 3x^2)/(3y^2 - 6y)$, sujeita à condição $y(0) = 1$;

(c) $y' = xy^3/\sqrt{1 + x^2}$, sujeita à condição $y(0) = 1$.

⑥ Se uma EDO para $y(x)$ puder ser colocada na forma

$$y' = f(y/x),$$

onde f é uma função qualquer de *uma* variável, então essa EDO pode ser reescrita na forma de uma EDO separável pelo seguinte procedimento: (i) defina uma nova função $v(x) := y(x)/x$ e (ii) encontre a EDO que $v(x)$ satisfaz. Essa EDO será separável. Portanto, pode-se resolver para $v(x)$ e, depois, encontrar $y(x)$ pela definição de v. Aplique esse procedimento para resolver as EDOs abaixo:

(a) $y' = (x^2 - 3y^2)/(2xy)$;

(b) $x^2y' = x^2 + 3xy + y^2$.

⑦ Coloque cada uma das EDOs abaixo na forma $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ e verifique se é *exata*. Em caso afirmativo, resolva-a; em caso negativo, procure por um fator integrante μ que a torne exata e depois resolva-a. (Se nenhuma sugestão for dada, procure por fatores integrantes nas formas "mais simples" possíveis.)

(a) $y' = -(ax + by)/(bx + cy)$, com a, b, e c constantes;

(b) $(e^x \sin y - 2y \sin x) + (e^x \cos y + 2 \cos x)y' = 0$;

(c) $y' = -(2x^2y + 1)/(x^3 + 2xy)$;

(d) $y^2y' + (2y^3/x - y^2e^x) = 0$ (sugestão: $\mu = \mu(y/x)$).