Lista de Exercícios 1

① Calcule $z^{20} + z^{15} + 1$ para

(a) $z = i$;

(b) $z = (1+i)/\sqrt{2}$.

② Considere uma elipse com semi-eixo maior $a > 0$ e excentricidade ϵ (com $0 \leq \epsilon < 1$). Com o objetivo de determinar a equação dessa elipse, adota-se um sistema de coordenadas cartesiano $\{(x, y)\}$ cuja origem coincide com um dos focos. Em seguida, considera-se esse plano xy como sendo um plano complexo (da maneira usual: x sendo a parte real e y a parte imaginária de um número complexo z).

(a) Justifique (geometricamente) que a equação dessa elipse é dada por $|z| + |z - c| = 2a$, onde c é uma constante complexa. Representando $c = |c|e^{i\gamma}$, determine $|c|$ em termos de a e ϵ e diga qual a interpretação geométrica de γ;

(b) Usando o item anterior, encontre a equação dessa elipse em termos de x e y;

(c) Mostre que em termos de coordenadas polares r e θ a elipse é dada por[1]

$$r(\theta) = \frac{(1-\epsilon^2)a}{1 - \epsilon\cos(\theta - \gamma)}.$$

③ Calcule todos os valores possíveis de $\mathrm{Ln}(1+i)$ e represente esses valores no plano complexo.

④ Encontre as raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ e localize-as no plano complexo.

⑤ Encontre todas as soluções da equação $x^8 = i$ e localize-as no plano complexo.

⑥ Considere a função

$$f(z) := \frac{z^{99} - (\sqrt{3}+i)z^{98}}{z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4}.$$

[1] Lembre-se dessa expressão para a elipse pois ela será útil em *Mecânica Clássica* quando se tratar de potenciais centrais proporcionais a $1/r$ – como o gravitacional e o de Coulomb.

(a) Determine o domínio dessa função;

(b) Determine as raízes dessa função;

(c) Calcule $f(i)$.

⑦ Considere a função $f(z) = \mathrm{Ln}(i \sinh z)$. Determine o domínio e as raízes dessa função, representando-as no plano complexo.

⑧ Considere a função $f(z) = e^{ie^z}$. Represente essa função tanto na forma polar quanto na forma cartesiana. (Para o domínio, utilize a representação que julgar mais conveniente.) Em seguida, encontre todas as soluções da equação $e^{ie^z} = 1$ e represente-as no plano complexo.

⑨ Considere a função

$$f(z) := \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{z^3+1}{z^3-1}\right).$$

(a) Determine o domínio dessa função e esboce no plano complexo os pontos *excluídos* do domínio;

(b) Calcule todos os valores possíveis de $f(-i)$;

(c) Determine a parte real dessa função, $u(x, y) = \mathrm{Re}[f(z)]$, onde $z = x + iy$; (A função u deve ser determinada como uma função *real* das variáveis *reais* x e y, sem nenhuma menção explícita à unidade imaginária i.)

(d) Obtenha a função inversa de f em termos de funções hiperbólicas ou trigonométricas.

⑩ Mostre que uma reta arbitrária no plano complexo que não passa pela origem é levada, pelo mapeamento de inversão $f(z) = 1/z$, numa circunferência (quase completa) que tangencia a origem.