onde $a_0(t)$, $a_1(t)$, …, $a_n(t)$ e $g(t)$ são funções *conhecidas* da variável independente t (com $a_n(t)$ não sendo identicamente nula). Em particular, se a função $g(t)$ for identicamente nula, então a EDO acima é dita ser *homogênea*; caso contrário, é dita ser *inomogênea*.

- Exemplo: Note que a equação do oscilador harmônico, Eq. (4.4), é uma EDO linear homogênea [o que pode ser visto tanto pela própria Eq. (4.4) quanto pela Eq. (4.13)].

As propriedades mais importantes de EDOs lineares são enunciadas nos exercícios a seguir:

- **Exercício:** Mostre que a função identicamente nula, $u(t) \equiv 0$, sempre é solução de uma EDO linear *homogênea*.

- **Exercício:** Considere uma EDO linear *homogênea* de grau n. Mostre que se $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são duas soluções dessa EDO, então uma combinação linear arbitrária $\alpha u_1(t)+\beta u_2(t)$ (com α e β constantes) também é uma solução dessa mesma EDO.

Essa propriedade enunciada no exercício acima significa que as soluções de uma EDO linear homogênea formam um *espaço linear* (sinônimo de *espaço vetorial*).

- **Exercício:** Considere uma EDO linear *inomogênea* de grau n. Mostre que se $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são duas soluções dessa EDO, então uma combinação linear $\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$, com $\alpha + \beta = 1$ (e α e β constantes), também é uma solução dessa mesma EDO.

Uma EDO que *não* possa ser colocada na forma (4.14) é dita ser *não-linear*.

Nesta disciplina lidaremos com EDOs lineares e algumas não-lineares de primeira ordem e EDOs lineares de segunda ordem (embora alguns dos métodos possam ser generalizados facilmente para EDOs lineares de ordem maior). Métodos de solução de EDOs lineares são muito mais desenvolvidos e conhecidos do que de EDOs não-lineares. E isso se deve, em boa medida, às propriedades enunciadas nos exercícios acima.

4.3 Número de soluções de uma EDO

O fato de conseguirmos escrever uma EDO obviamente não significa que necessariamente ela tenha solução. Ou seja, nada garante, *a priori*, que exista uma função (n vezes diferenciável[5]) $u(t)$ tal que a Eq. (4.11), para

[5] Aqui lidaremos apenas com o conceito de *solução clássica* que, em particular, significa que uma solução de uma EDO de ordem n tem que ser pelo menos n vezes diferenciável. Embora isso pareça uma condição óbvia, não se engane: há conceitos mais gerais de solução que abrem mão dessa condição.

uma função F arbitrária de $n+2$ variáveis, seja satisfeita. Evidentemente, se a EDO em questão for obtida pela modelagem de um processo de interesse, onde $u(t)$ descreve alguma característica do processo, é desejável (e até necessário) que ela possua pelo menos uma solução; caso contrário, a modelagem estaria errada. E na verdade, o que normalmente acontece é que as EDOs que modelam processos de interesse possuem *infinitas* soluções. Considere, por exemplo, a EDO que descreve a queda livre vertical, $x''(t) = v'(t) = -g$. No exemplo da pág. 86 resolvemos essa EDO. Note que no processo de solução apareceram duas constantes de integração, que denominamos x_0 e v_0. Embora pelo contexto possamos interpretar essas constantes como sendo a posição e a velocidade iniciais da partícula, a EDO dada é satisfeita quaisquer que sejam os valores dessas constantes. Portanto, há infinitas funções matemáticas distintas que satisfazem essa mesma EDO.

O que a discussão acima ilustra é que uma EDO que modele um fenômeno físico ou outro processo de interesse deve possuir um número "suficientemente grande" de soluções para contemplar todas as possíveis realizações particulares desse fenômeno ou processo (como no exemplo da queda livre vertical, todas as possíveis alturas e velocidades iniciais de lançamento da partícula – que são infinitas). Isso significa que se desejarmos *uma* solução em partícular, aquela que descreve o fenômeno ou processo de interesse *numa* situação específica, devemos impor condições adicionais para determinar univocamente a solução de interesse. Essas condições adicionais são normalmente chamadas de *condições iniciais* ou *condições de contorno*, dependendo do contexto. Como veremos, as EDOs que nos interessam nesta disciplina são tais que o número de condições adicionais necessárias para se fixar univocamente a solução de interesse é igual à ordem da EDO. (Veja, mais uma vez, o exemplo da queda livre: a EDO é de primeira ordem em v – por isso precisa de *uma* condição adicional, $v(t_0) = v_0$, para fixar $v(t)$ – e de segunda ordem em x – por isso precisa de *duas* condições adicionais, $x(t_0) = x_0$ e $v(t_0) = v_0$, para fixar $x(t)$.)

4.4 Estratégias de resolução de EDOs

Grosseiramente falando, podemos classificar as "estratégias" de resolução de uma EDO em dois tipos: (i) a que utiliza manipulações matemáticas para "inverter" as derivadas, transformando-as em integrais e (ii) a que parte de um *ansatz*[6] para a "cara" da solução e, a partir daí, obtém uma solução válida. Por concisão, e falta de um nome melhor, denominaremos essas duas estratégias de *dedutiva* e *indutiva*, respectivamente.[7] A grande diferença entre elas, então, é que a dedutiva não faz nenhuma hipótese *prévia*

[6] Termo que poderíamos traduzir, de maneira livre, como um "chute educado".

[7] Não se apegue a esses nomes; eles não são padronizados neste contexto. Apegue-se à idéia por trás de (i) e (ii).

sobre a forma da solução, ao contrário da indutiva.

O exemplo da "queda livre vertical" na pág. 86 é uma instância trivial da estratégia dedutiva, onde a EDO original já é dada numa forma pronta para que a derivada seja "invertida". Mas nem todos os exemplos da estratégia dedutiva são tão diretos.

- Exemplo: Considere o caso de um corpo de massa m se movendo horizontalmente num meio viscoso. Se dermos uma velocidade inicial v_0 ao corpo e depois o deixarmos apenas sob a ação da força viscosa $F_v = -bv$ (b sendo uma constante positiva), a EDO que governa seu movimento a partir daí será:

$$m\frac{dv}{dt} = -bv,$$

que é uma EDO linear homogênea de primeira ordem (em v). Evidentemente, não podemos simplesmente integrar o lado direito dessa equação para obter a solução $v(t)$, mas podemos fazer as seguintes manipulações que possibilitam a "inversão" da derivada[8]:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v \Leftrightarrow \frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} \Leftrightarrow \int_0^t \frac{1}{v}\frac{dv}{dt'}dt' = -\int_0^t \frac{b}{m}dt'$$
$$\Leftrightarrow \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{v} = -\int_0^t \frac{b}{m}dt' \Leftrightarrow \ln\left|\frac{v(t)}{v(0)}\right| = -\frac{bt}{m} \Leftrightarrow v(t) = v_0 e^{-bt/m}.$$

Assim, conseguimos resolver a EDO para v sem termos feito nenhuma hipótese sobre a "cara" da solução. Esse é um exemplo de aplicação da estratégia dedutiva.

Não é incomum casos de EDOs em que ambas as estratégias possam ser aplicadas. A EDO do exemplo acima é um desses casos:

- Exemplo: Voltemos à mesma EDO do exemplo anterior:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v.$$

Queremos, então, encontrar uma função $v(t)$ cuja derivada é proporcional à própria função $v(t)$. Mas essa é justamente a propriedade de funções exponenciais, $v(t) = Ae^{Bt}$, onde A e B são constantes quaisquer (até esse momento). Então, *partindo* desse *ansatz* para a solução e substituindo-o na EDO, temos:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Ae^{Bt}\right) = ABe^{Bt} = Bv(t).$$

[8]Evidentemente, $v(t) \equiv 0$ é uma solução (dita trivial) dessa EDO, como já antecipado ocorrer para qualquer EDO linear homogênea. Portanto, nas manipulações que se seguem, estamos interessados apenas nas soluções que não são nulas, embora, no fim, obtenhamos uma expressão que, *neste caso*, também inclui a possibilidade $v(t) \equiv 0$ (basta fazer $v_0 = 0$).

Logo, para que a EDO anterior seja satisfeita basta fazermos $B = -b/m$: $v(t) = Ae^{-bt/m}$. Resta ainda a determinação da constante A, o que é feito pela imposição de que no instante inicial ($t = 0$) a velocidade era v_0: $v(0) = A = v_0$. Assim, finalmente chegamos à mesma solução obtida anteriormente pela estratégia dedutiva, $v(t) = v_0e^{-bt/m}$, mas agora partindo de um *ansatz* para a "cara" da solução (o que caracteriza o que chamamos de estratégia indutiva).

- **Exercício:** Lembrando qual tipo de função possui derivada proporcional a ela mesma, use a estratégia indutiva para resolver a EDO que descreve o oscilador harmônico, Eq. (4.4). Mostre que o número de soluções dessa EDO é infinito mas que bastam duas condições adicionais (iniciais) para fixar uma única solução. Além disso, "quebre a cabeça" um pouco para ver se você consegue pensar numa maneira de aplicar a estratégia dedutiva para resolver essa EDO.

Uma questão natural que aparece quando aplicamos a estratégia indutiva é se a solução que obtemos (caso a obtenhamos), baseada num *ansatz* inicial, é de fato o único tipo de solução possível da EDO em questão. Para EDOs (e EDPs) genéricas essa questão é muito difícil de se responder. Mas para as EDOs que trataremos nesta disciplina veremos que há condições que, se satisfeitas, garantem que nenhuma solução esteja sendo perdida.