Capítulo 1

Números complexos

1.1 Motivação

Os chamados "números complexos" aparecem naturalmente no contexto de *soluções de equações algébricas*[1]. Considere, por exemplo, a equação $3x^2 + 2 = 0$. Pode-se ver prontamente que não existe $x \in \mathbb{R}$ que satisfaça tal equação (afinal, qualquer que fosse $x \in \mathbb{R}$, teríamos $x^2 \geq 0 \Rightarrow 3x^2 + 2 \geq 2$). Então, deparamo-nos com a seguinte situação: nos conformamos com o fato que algumas equações (bastante simples, por sinal) podem não possuir solução *ou* estendemos o universo dos números de modo a incluir "objetos" que possam *consistentemente* ser considerados soluções dessas equações. É assim que os números complexos são introduzidos: escolhe-se uma equação que não possui solução real, por convenção uma das mais simples, $x^2+1 = 0$, e *define-se* sua solução como sendo um novo "número", padronizado quase universalmente pelo símbolo i. Em posse dessa definição, é fácil ver, por exemplo, que a equação mais acima, $3x^2 + 2 = 0$, é resolvida pelo número $x = i\sqrt{2/3}$, pois:

$$3(i\sqrt{2/3})^2 + 2 = 3i^2(2/3) + 2 = 2i^2 + 2 = 2(i^2 + 1) = 0,$$

onde na última passagem utilizamos a definição de i como solução de $x^2+1 = 0$. Na verdade, é um fato digno de nota (tanto que recebe o pomposo nome de *teorema fundamental da álgebra*) que com essa invenção "inocente" *todas* as equações algébricas (com coeficientes que podem até incluir i) passam a ter solução. Esse número i é batizado de *unidade imaginária* e o conjunto estendido de números obtido (multiplicando-se i por reais e somando-o a reais) é o conjunto dos *números complexos*, $\mathbb{C}$.

Num primeiro momento, pode parecer um tanto arbitrário e artificial o procedimento de se definir um novo número pela necessidade de se resolver

[1] Uma *equação algébrica* (ou *polinomial*) na variável x é uma equação do tipo $A_0 + A_1x + A_2x^2 ... + A_nx^n = 0$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $A_n \neq 0$. Os coeficientes constantes $A_0, A_1, A_2, ...$ podem ser números naturais, racionais, reais ou ainda mais gerais.

uma equação que de outra maneira não teria solução. No entanto, isso não é diferente do que acontece com números que estamos bem mais habituados, como, por exemplo, os números negativos e os números fracionários. Tomemos, como exemplo, o número representado por -2 (que é apenas uma notação, assim como i). Esse número é *definido* (a partir dos naturais $0, 1, 2, ...$) como sendo aquele que quando somado a 2 resulta em 0; ou seja, como solução da equação $x + 2 = 0$. Ou ainda considere o número representado por $4/5$. Novamente, $4/5$ é apenas uma notação para um número *definido* como satisfazendo $5x = 4$. Posto isso, não deveríamos achar os números complexos mais "estranhos" ou "artificiais" do que números como os negativos ou os fracionários (na verdade, como qualquer outro número, com exceção, talvez, dos números naturais); pelo menos do ponto de vista lógico.

1.2 Álgebra dos números complexos

Vejamos as propriedades algébricas da unidade imaginária. Pela sua definição tem-se $i^2 = -1$. Unindo-se a isso a convenção $i^0 = 1$, vê-se facilmente que[2]

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \equiv 0 \pmod 4 \\ i, & \text{se } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1, & \text{se } n \equiv 2 \pmod 4 \\ -i, & \text{se } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \tag{1.1}$$

para todo n inteiro (tanto positivo quanto negativo; por exemplo, $i^{-1} = -i$).

- **Exercício:** Demonstre a Eq. (1.1).

Um número complexo arbitrário $z \in \mathbb{C}$ é escrito (de maneira única) como um número real a somado a um múltiplo real b da unidade imaginária: $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. O número real a é dito ser a *parte real* de z, $\mathrm{Re}(z) = a$, e b é dito ser (o coeficiente d)a *parte imaginária* de z, $\mathrm{Im}(z) = b$. Sendo $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$ dois números complexos arbitrários ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$), tem-se:

(i) $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$,
(ii) $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$,
(iii) $z_1/z_2 = (a_1 a_2 + b_1 b_2)/(a_2^2 + b_2^2) - i(a_1 b_2 - a_2 b_1)/(a_2^2 + b_2^2)$ (com $z_2 \neq 0$).

- **Exercício:** Mostre essas três propriedades[3], a partir de propriedades "naturais" da adição e multiplicação, e verifique que a soma e a sub-

[2] A notação $n \equiv r \pmod k$, que se lê "n côngruo a r, módulo k", significa que r é o resto da divisão (inteira) de n por k; em outras palavras, significa que $n - r$ é múltiplo inteiro de k.

[3] De um ponto de vista axiomático, essas podem ser tomadas como *definições* das operações algébricas de soma, subtração, multiplicação e divisão de números complexos.

tração são operações *comutativas* (ou seja, que $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ e $z_1 z_2 = z_2 z_1$) e *associativas* (ou seja, que $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ e $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$).

- **Exercício:** Efetue as seguintes operações, expressando o resultado de cada item na forma $a + bi$ (com $a, b \in \mathbb{R}$):

  (a) $(2 + 3i) + (6 - 2i)$;

  (b) $(2 + i)(-1 + 5i)$;

  (c) $(5 + 7i)/(1 - i)$.

Note, em particular, que $\mathrm{Re}(z_1 \pm z_2) = \mathrm{Re}(z_1) \pm \mathrm{Re}(z_2)$, mas $\mathrm{Re}(z_1 z_2) \neq \mathrm{Re}(z_1)\mathrm{Re}(z_2)$ e $\mathrm{Re}(z_1/z_2) \neq \mathrm{Re}(z_1)/\mathrm{Re}(z_2)$ (a menos que z_1 ou z_2 seja real).

Dado um número complexo $z = a + ib$ qualquer, define-se seu *conjugado complexo* (ou "complexo conjugado") como sendo o número complexo $\bar{z}$ que difere de z apenas pelo sinal da parte imaginária: $\bar{z} = a - ib$. Em termos de z e $\bar{z}$ podemos escrever $\mathrm{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$ e $\mathrm{Im}(z) = (z - \bar{z})/(2i)$.

Como precisamos de dois números reais para determinar completamente (e univocamente) um número complexo (suas partes real e imaginária), podemos representá-lo por um *par ordenado* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, onde convenciona-se que o primeiro elemento do par represente a parte real e o segundo elemento a parte imaginária: $z = a + ib = (a, b)$. Em termos dessa representação, as operações (i), (ii) e (iii) anteriores se escrevem como[4]:

(i') $(a_1, b_1) \pm (a_2, b_2) = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2)$,
(ii') $(a_1, b_1).(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$,
(iii') $(a_1, b_1)/(a_2, b_2) = \big((a_1 a_2 + b_1 b_2)/(a_2^2 + b_2^2), -(a_1 b_2 - a_2 b_1)/(a_2^2 + b_2^2)\big)$ (com $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$).

- **Exercício:** Refaça as operações do exercício anterior mas agora usando a representação de pares ordenados.

Essa associação natural entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ fornece uma visualização geométrica dos números complexos que é muito útil.

[4]Essa abordagem que considera os números complexos como sendo pares ordenados reais munidos das regras de composição definidas por (i'), (ii') e (iii'), juntamente com a regra de conjugação $\overline{(a, b)} = (a, -b)$, é conhecida como *formulação axiomática de Hamilton*.