EDOs de segunda ordem Lineares, homogêneas e inomogêneas

Jefter Santiago

June 26, 2023

Contents

1 EDOs Homogêneas

1.1 Método do Wronskiano

1.2 Redução de ordem

2 EDOs de segunda ordem, lineares e inomogêneas

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

Solução geral: $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$

onde y_H é uma solução geral da EDO homogênea associada (obtida substituindo f(t) por zero e resolvendo a EDO homogênea resultante) e y_P é uma solução particular qualquer da EDO inomogênea dada.

Supondo que já resolvemos a EDO homogênea por algum método:

$$y_H(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

onde já conhecemos as funções y_1 e y_2 .

2.1 Método da variação de parâmetros para encontrar $y_P(t)$

Reescrevendo a solução particular da inomogênea como :

$$y_P(t) = \alpha(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t)$$

E colocando a EDO original na forma canônica:

$$y_P' = \alpha y_1' + \alpha' y_1 + \beta y_2' + \beta' y_2$$

Impomos a relação:

$$\alpha' y_1 + \beta' y_2 = 0 \tag{1}$$

segue que $y_P' = \alpha(t)y_1'(t) + \beta(t)y_2'(t)$

$$y_P'' = \alpha' y_1' + \alpha y_1'' + \beta' y_2' + \beta y_2''$$

Substituindo na EDO dada:

$$y_P'' + p y_P' + q y_P = \alpha y_1'' + \alpha' y_1' + \beta y_2'' + \beta' y_2' + p\left(\alpha y_1' + \beta y_2'\right) + q\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right) = r(t)$$

$$\alpha(t)\underbrace{\left[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)\right]}_{=0} + \beta(t)\underbrace{\left[y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)\right]}_{=0} + \alpha' y_1' + \beta' y_2' = r(t)$$

$$\alpha' y_1' + \beta' y_2' = r(t) \tag{2}$$

Com as duas equações (**??**) e (**??**) temos o sistema linear:

$$\begin{cases} y_1\alpha' + y_2\beta' = 0 \\ y_1'\alpha' + y_2'\beta' = r(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix}$$

$$\alpha' = \frac{\det\begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ r & y_2' \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}} = -\frac{r(t)y_2(t)}{y_1y_2' - y_2y_1} = -\frac{r(t)y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)}$$

$$\beta' = \frac{\det\begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(t) \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}} = -\frac{r(t)y_1(t)}{y_1y_2' - y_2y_1} = -\frac{r(t)y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)}$$

Integrando as soluções temos α, β , após isso substituimos em $y_P(t) = \alpha(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t)$ e a solução geral da EDO será :

$$y(t) = \left(\alpha_0 + \alpha(t)\right) y_1(t) + \left(\beta_0 + \beta(t)\right) y_2(t)$$

- **Exemplo**: $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln|x|, y(x) =?, x > 0$

  Considerando a EDO homogênea associada temos

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$$

  Suponto $y(x) = x^\lambda \Rightarrow y' = \lambda x^{\lambda-1} \Rightarrow y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$

$$x^\lambda \left[\lambda(\lambda-1) - 3\lambda + 4\right] = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

  Logo, $\lambda = 2$ e uma das soluções da EDO homogenea associada é $y_1(x) = x^2$

Usando método do Wronskiano para encontrar $y_2(t)$

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = W_0e^{-\int p(x)dx}, p(x) = -\frac{3}{x}$$
$$x^2y_2' - 2xy_2 = e^{3\ln x} = e^{x^3}$$
$$y_2' - \frac{2}{x}y_2 = x \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^2}$$
$$(\mu y_2)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{y_2}{x^2} = \ln x + \mathbb{C} \Rightarrow y_2(x) = x^2\ln x + x^2\mathbb{C}$$

Fazendo $\mathbb{C} = 0$, temos que $y_2(x) = x^2 \ln x$

uma possível solução é $y_2(x) = x^2 \ln x$ e a outra é $y_1(x) = x^2$

Para encontrar $y_P(x)$ impomos:

$$y_P(x) = \alpha(x)y_1(x) + \beta(x)y_2(x) = \alpha(x)x^2 + \beta(x)x^2\ln x$$
$$y_P'(x) = \alpha' x^2 + 2\alpha x + \beta' x^2 \ln x + \beta(2x + x)$$

impondo também $\alpha' x^2 + \beta' x^2 \ln x = 0$

$$y_P' = 2\alpha x + \beta(2x\ln x + x)$$

$$y_P'' = 2\alpha' x + 2\alpha + \beta'(2x\ln x + x) + \beta(2\ln x + 3)$$

Substituindo na EDO:

$$y_P'' - \frac{3}{x}y_P' + \frac{4}{x^2}y_P = \ln x$$

$$\Leftrightarrow \left[2\alpha' x + 2\alpha + \beta'(2x\ln x + x) + \beta(2\ln x + 3)\right] - \frac{3}{x}\left[2\alpha x + \beta\left(2x\ln x + x\right)\right] + \frac{4}{x^2}\left(\alpha x^2 + \beta x^2 \ln x\right) = \ln x$$

$$2\alpha' x + \left(2x\ln x + x\right)\beta' = \ln x$$

Temos então o sistema

$$\begin{cases} x^2\alpha' + 2x\ln x\beta' = 0 \\ 2\alpha' x + \left(2x\ln x + x\right)\beta' = \ln x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' + \ln x\beta' = 0 \\ 2\alpha' + \left(2\ln x + 1\right)\beta' = \frac{\ln x}{x} \end{cases}$$

$$\alpha' = -\beta' \ln x$$

$$-\beta' \ln x + 2\ln x\beta' + \beta' = \frac{\ln x}{x}$$

$$\beta' = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \alpha' = -\frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$\beta = \int \frac{\ln x}{x} dx \text{ e } \alpha = -\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

$$\beta = \frac{(\ln x)^2}{2} \text{ e } \alpha = -\frac{(\ln x)^3}{3}$$

$$y_P(x) = -\frac{(\ln x)^3 x^2}{3} + \frac{(\ln x)^2 x^2 \ln x}{2}$$

$$y_P(x) = \frac{x^2(\ln x)^3}{6}$$

A solução geral é:

$$y(x) = \alpha_0 x^2 + \beta_0 x^2 \ln x + \frac{x^2(\ln x)^3}{6}$$

onde α_0 e β_0 são as condições de contorno.