Lista de Exercícios 1

① Calcule $z^{20} + z^{15} + 1$ para

(a) $z = -i$;
(b) $z = (1 - i\sqrt{3})/2$.

Represente os resultados no plano complexo.

② Considere a equação $|z|+|z-c| = 2a$, onde c é uma constante complexa e a é uma constante real positiva satisfazendo $2a > |c|$.

(a) Esboce, no plano complexo, os pontos z que satisfazem essa equação; (Sugestão: interprete geometricamente o significado da equação dada, reconhecendo o lugar geométrico que ela determina. Se ajudar, comece analisando o caso particular em que $c = 0$ e depois generalize a figura para um valor genérico de c.)
(b) Utilizando a representação polar, $z = re^{i\theta}$, mostre que a equação acima implica que

$$r(\theta) = \frac{(1-\epsilon^2)a}{1 - \epsilon\cos(\theta - \gamma)},$$

onde $\epsilon := |c|/(2a)$ (chamada de *excentricidade*) e γ é o argumento de c (ou seja, $c = |c|e^{i\gamma}$).

③ Encontre todas as soluções da equação $z^8 = -1$ e localize-as no plano complexo.

④ Encontre as raízes do polinômio $P(z) = z^6 - z^3 + 1$ e localize-as no plano complexo.

⑤ Considere a função

$$f(z) := \frac{z^{100} - 2(1+i\sqrt{3})z^{98}}{z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4}.$$

(a) Determine o domínio dessa função;
(b) Determine as raízes dessa função;
(c) Calcule $f(i)$.

⑥ Considere a função $f(z) = e^{ie^z}$. Represente essa função tanto na forma polar quanto na forma cartesiana. (Para o domínio, utilize a representação que julgar mais conveniente.) Em seguida, encontre todas as soluções da equação $e^{ie^z} = 1$ e represente-as no plano complexo.

⑦ Calcule todos os valores possíveis de $\mathrm{Ln}(1+i)$ e represente esses valores no plano complexo.

⑧ Considere a função $f(z) = \mathrm{Ln}(i\cosh z)$. Determine o domínio e as raízes dessa função, representando-as no plano complexo.

⑨ Considere a função

$$f(z) := \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{z^3+1}{z^3-1}\right).$$

(a) Determine o domínio dessa função e esboce no plano complexo os pontos *excluídos* do domínio;

(b) Calcule todos os valores possíveis de $f(-i)$;

(c) Determine a parte real dessa função, $u(x,y) = \mathrm{Re}[f(z)]$, onde $z = x + iy$; (A função u deve ser determinada como uma função *real* das variáveis *reais* x e y, sem nenhuma menção explícita à unidade imaginária i.)

(d) Obtenha a função inversa de f em termos de funções hiperbólicas ou trigonométricas.