Introdução à Física Matemática (7600016)

Anotações, exercícios etc

Jefter Santiago

Sumário

Prefácio - Descrição dos conteúdos das anotações

Essas são minhas anotações feitas no decorrer da disciplina de Introdução à Física Matemática no IFSC-USP em 2023. A ementa da disciplina pode ser encontrada no site oficial da USP, o jupiter. De qualquer forma coloquei os conteúdos "previstos" pela ementa abaixo.

- ☑ Números complexos e suas propriedades: interpretações geométricas (cartesiana, polar e vetorial), fórmulas de Euler e de De Moivre.
- ☑ Funções complexas de um parâmetro real: diferenciação e integração.
- ☑ Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem: equações lineares, equações separáveis e equações exatas, fator integrante.
- ☑ Equações diferenciais ordinárias de segunda ordem: soluções linearmente independentes, Wronskiano, método da variação das constantes.
- ☑ Sistemas de equações lineares de primeira ordem: autovalores e autovetores de matrizes, matriz fundamental de sistemas com coeficientes constantes.
- ☑ Transformada de Laplace: propriedades básicas, funções descontínuas e impulsivas (delta de Dirac), relações com a função gama e equações integrais, conceito de convolução.
- ☑ Soluções em séries de equações de segunda ordem: pontos ordinários e singulares regulares (método de Frobenius), ênfase nos polinômios de Legendre.

As anotações são baseadas nos que foi escrito em sala pelo professor Vanzella e nos livros/anotações de aula, que usei para estudar. Essas referências estão listadas no fim do documento.

Capítulo 1:
EDOs de primeira ordem

1.1 EDOs homogêneas, inomogêneas - fator integrante

Para equações homogêneas e inomogêneas lineares com variável independente t e dependente y, queremos saber a cara de $y(t)$ dada na equação $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$

onde a, b e c são funções dadas de t .

■ **Exemplo** : $t^2y' + 5ty = t^3 - 1$ Se $c(t) = 0$ então a EDO é homogênea e caso contrário inomogênea.

■ Caso homogêneo:

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

$$y'(t) + p(t)y(t) = 0, p(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = -p(t) \Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -p(t)$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = -\int p(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = -\int p(t)dt$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{-\int p(t)dt + \mathbb{C}} = e^{-\int p(t)dt}e^{\mathbb{C}}$$

$$\Leftrightarrow |y| = |A|e^{-\int p(t)dt}, |A| = e^{\mathbb{C}}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = Ae^{-\int p(t)dt}$$

O valor de A vai depender das condições iniciais do problema.

■ Caso inomogêneo: **fator integrante**

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

$$y'(t) + p(t)y(t) = r(t), p(t) = \frac{b(t)}{a(t)}, r(t) = \frac{c(t)}{a(t)}$$

A estratégia para resolver com fator integrante é chegar à uma equação que permita-nos escrever o lado esquerdo da equação usando a regra do produto para derivadas, ou seja,

$$\frac{d}{dx}(fg) = g\frac{d}{dx}f + f\frac{d}{dx}g$$

Para tal, precisamos de uma combinação linear do tipo $\mu(t)y'(t)+\mu(t)p(t)y(t)=\mu(t)r(t)$, onde $\mu(t)$ é o fator integrante. A relação

$$\frac{d}{dt}\left(\mu(t)y(t)\right)=\mu(t)y'(t)+\mu(t)p(t)y(t)$$

é válida so e se só $\mu(t)$ obedece a relação

$$\frac{d}{dt}\mu(t)=p(t)\mu(t) \tag{1.1}$$

■ **Exemplo** : $t^2y'(t)+5ty(t)=t^3-1$

$$\Leftrightarrow y'+\frac{5}{t}y=t-\frac{1}{t^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\mu=\mu y'+\frac{5}{t}\mu y=\left(t-\frac{1}{t^2}\right)\mu$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\mu}{dt}=\frac{5\mu}{t}$$

Essa relação é uma EDO homogênea simples, então temos

$$\Leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu}=\frac{5}{t}$$

$$\Leftrightarrow \ln|\mu|=5\ln|t|\Rightarrow \mu=t^5$$

voltando à equação anterior temos

$$\frac{d}{dt}\left(t^5y\right)=t^6-t^3$$

$$t^5y=\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}+\mathbb{C}$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{t^2}{7}-\frac{1}{4t}+\frac{\mathbb{C}}{t^5}$$

1.2 Método de variação de paramêtros

A solução de uma EDO linear inomogênea de primeira ordem é a soma da solução geral da homogênea associada com uma solução particular **qualquer** da EDO inomogênea original. Podemos portanto " construir " a solução de uma EDO inomogênea.

$$y'+p(t)y=r(t)\to y(t)=y_H(t)+y_P(t)$$

onde y_H é a solução da EDO homogênea associada, y_P é a paramétrica obtida a partir da homogênea e y é a solução geral da EDO dada.

■ **Exemplo** $ty' - t^2 = y, t > 0$

$$ty' - y = t^2 \Rightarrow y' - \frac{1}{t}y = t$$

Fator integrante $\mu y' - \frac{\mu}{t}y = \mu t \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mu y) = \mu t$

$$\mu' = -\frac{\mu}{t} \Leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{t} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dt}{t} \Leftrightarrow \ln|\mu| = -\ln|t|$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{A}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{t}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{t}y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{t}y = t + \mathbb{C}$$
$$\Leftrightarrow y(t) = t^2 + \mathbb{C}t$$

Para $y(1) = 0 \Rightarrow 0 = 1^2 + \mathbb{C} \cdot 1 \Rightarrow \mathbb{C} = -1 \Leftrightarrow y(t) = t^2 - t$

Checando a propriedade da variação de paramêtros a partir desse resultado. Chutando $y_P(t) = t^2$ a solução geral da homogênea: $y'_H - \frac{1}{t}y_H = 0$

$$\frac{y'_H}{y_H} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{dy_H}{y_H} = \frac{dt}{t} \Leftrightarrow \ln|y_H| = \ln t + \mathbb{C}$$

$$|y_H(t)| = e^{\mathbb{C}}t \Leftrightarrow y_H(t) = \mathbb{C}t$$
$$\Leftrightarrow y(t) = \mathbb{C}t + t^2$$

1.3 EDOs separáveis

Uma EDO de primeira ordem é dita ser separável se pode ser colocada na forma

$$f(y)y' = g(t) \leftrightarrow M(y)y' + N(t) = 0 \Leftrightarrow M(y)dy + N(t)dt = 0 \tag{1.2}$$

1.4 Modelagem de sistemas usando EDOs

Tratamos as populações a partir de densidades para evitar trabalhar com sistemas discretos que podem levar a descontinuidades. Na realidade quando implementamos alguma simulação podemos tentar considerar as discretizações do sistema. Na teoria estamos tratando dos modelos mais simples possíveis.

1.4.1 EDOs autonômas e crescimento populacional

Sejam

- y: densidade de "entes": Substâncias, presas × predadores, moleculas...
- t: tempo

Supondo $\frac{dy}{dt} \propto y \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = ry, r > 0$, onde r é a taxa de crescimento. Esse é o modelo bem simplificado de um sistema fechado.

Temos

$$\frac{dy}{y} = rdt \Leftrightarrow \ln|y| = rt + \mathbb{C} \Leftrightarrow y(t) = Ae^{rt}$$

supondo $y(t_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = Ae^{rt_0} \Rightarrow A = y_0 e^{-rt_0}$, logo

$$y(t) = y_0 e^{r(t-t_0)}$$

note que para qualquer t a solução é apenas transladada.

1.4.2 Equação logística

Leva em consideração um limite superior para a solução. Isso é mais "realista" já que tem um fator limitante como população cujo crescimento é proporcional.

$$\frac{dy}{dt} = r(y)y = r_0\left(1 - \frac{y}{k}\right)y, r(y) \text{ é decrescente.}$$

[IMAGEM]

Ponto k (valor crítico): a partir desse ponto a taxa de "mortalidade" é menor que a de "natalidade", ou seja, a população decresce.

$$f(y) = \frac{dy}{dt} = r_0\left(1 - \frac{y}{k}\right)y$$

[IMAGEM] [IMAGEM]

1.4.3 Resolvendo a equação logística

$$\frac{dy}{dt} = r_0\left(1 - \frac{y}{k}\right)y \Leftrightarrow y(t) = 0, y(t) = k$$

são soluções, logo $\frac{dy}{y\left(1-\frac{y}{k}\right)} = r_0 dt$ integrar essa relação nos leva à uma integral por fração parcial. A forma de resolver isso está no apendice [citar aqui]

resolvendo a integral temos

$$\ln\left|\frac{y}{y-k}\right| = r_0 t + \mathbb{C}$$

$$\frac{y}{y-k} = Ae^{r_0 t} \Rightarrow y = Ae^{r_0 t}(y-k)$$

$$y\left(Ae^{r_0 t}\right) = -ke^{r_0 t}A$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{K}{-A^{-1}e^{-r_0 t} + 1}$$

1.5 EDOs exatas

Partindo das EDOS separáveis, temos $f(y)dy+g(t)dt=0$, ou seja $F(y)+G(t)=\text{cte}$, $\frac{dF}{dy}=f(y)$, $\frac{dG}{dt}=g(t)$

Generalizando : supondo que existem um classe de EDOS cujas soluções podem ser dadsa por $\psi(t,y(t))=\text{cte}$, onde $\psi(t,y(t))=F(t,y(t))+G(t,y(t))$. A função ψ é um lugar geométrico em x,y, uma curva de nível no plano de forma geral $x=t$ e $y=y(t)$, para $\psi(x,y)$.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi\right)\frac{dx}{dt}+\left(\frac{\partial}{\partial y}\psi\right)\frac{dy}{dt}=0$$

Com $\psi_{,x}=\frac{\partial}{\partial x}\psi, \psi_{,y}=\frac{\partial}{\partial y}\psi$, substituindo na equação acima temos

$$\psi_{,x}+\psi_{,y}y'=0$$

Isso é uma EDO separáel e pode ser escrita como

$$M(x,y)+N(x,y)y'(x)=0$$

onde $M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\psi$ e $N(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\psi$, portanto

$$\psi(x,y(x))=\text{cte}$$

Qualquer EDO que pode ser escrita dessa forma é chamada de EDO exata.

■ Explicação (rasa) sobre essa manipulação:

$$\nabla\psi=\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi,\frac{\partial}{\partial y}\psi\right)$$

identificação de $\frac{\partial}{\partial x}\psi$ e $\frac{\partial}{\partial y}\psi$, vale que $\nabla\times\psi=0\Leftrightarrow\nabla\times\psi=\frac{\partial}{\partial y}\psi-\frac{\partial}{\partial x}\psi=0\Leftrightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. Essa é a condição necessária (e nesse caso suficiente) para encontrar a função ψ.

1.5.1 Caso base

■ **Exemplo** : $(\sin x+x^2e^y-1)y'+(y\cos x+2xe^y)=0$ Verificar validade de $M(x,y)+N(x,y)y'=0$, com $M_{,x}\stackrel{?}{=}N_{,y}$

$$M(x,y)=y\cos x+2xe^y\mapsto\frac{\partial}{\partial y}M=\cos x+2xe^y$$

$$N(x,y)=\sin x+x^2e^y-1\mapsto\frac{\partial}{\partial x}N=\cos x+exe^y$$

$M_{,x}=N_{,y}$, a equação é exata.
Encontrando a função $\psi(x,y)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y\cos x + 2xe^y \Rightarrow \psi(x,y) = y\sin x + x^2e^y + h(y)$$

fazendo $\frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\sin x + x^2e^y + h(y)\right)$

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y) = \sin x + x^2e^y + h'(y) = \sin x + x^2e^y - 1$$

$$\Leftrightarrow h'(y) = -1 \Leftrightarrow h(y) = -y + \mathbb{C}$$

$$\Longrightarrow \psi(x,y) = y\sin x + x^2e^y - y + \mathbb{C}$$

Portanto, a solução é dada pelo $y(x)$ que satistfaz $y(x)\sin x + x^2e^{y(x)} - y(x) = \text{cte}$.

1.5.2 Caso que precisa de fator integrante

■ **Exemplo** : equação não exata e fator integrante para equações não exatas

$$(2x+4y) + (2x-2y)y' = 0$$

Verificar a validade $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$:

$$\begin{cases} M = 2x+4y \\ N = 2x-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{,y} = 4 \\ N_{,x} = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Não satisfazem a condição}$$

Para resolver usamos fator integrante: supondo que $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ é não exata. Encontrar $\mu = \mu(x,y)$, tal que $\mu M + \mu N y' = 0$ seja exata.

$$\widetilde{M} = \mu M, \widetilde{N} = \mu N$$

então $\widetilde{M} + \widetilde{N}y' = 0$, logo

$$(\mu M)_{,y} = (\mu N)_{,x}$$

■ **Exemplo** : $(2\sin(y) - x)\, y' = \tan(y)$

$$M(x,y) = -\tan(y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right) = -\frac{\cos(y)}{\cos(y)} - \frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)} = -1 - \tan^2(y) = -\sec^2(y)$$

$$N(x,y) = 2\sin(y) - x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = -1$$

$$N_x \neq M_y$$

Logo, pela forma que foi dada não é uma equação exata, precisamos encontrar algum fator integrante para resolve-la.

Nessa situação chutamos primeiro fatores integrantes do tipo $\mu(x,y)$ e outras variações que envolvam as duas variáveis ou uma delas, como $\mu(x)$, $\mu(y)$, $\mu(x/y)$, $\mu(xy)$, $[\ldots]$. A partir do fator integrante substituimos e checamos se a equivalência se permanece. Vimos isso na sequência.

Supondo que para essa EDO podemos usar o fator integrante $\mu = \mu(x, y)$, então $\widetilde{M}+\widetilde{N}y'\mu M+\mu N y' = 0$

$$\mu(x, y)\left[2\sin(x) - x\right]y' + \mu(x, y)(-\tan(y)) = 0$$

Checando a validade de $\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{M} = \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{N}$:

$$-\frac{\partial \mu}{\partial y}\tan(y) - \mu\sec^2(y) = \frac{\partial \mu}{\partial x}\left(2\sin(y) - x\right) - \mu(-1)$$

$$\Leftrightarrow (x - 2\sin(y))\frac{\partial \mu}{\partial x} - \tan(y)\frac{\partial \mu}{\partial x} = (\sec^2(y) - 1)\mu$$

$\rightarrow$ **Ansatz** : $\mu = \mu(x) \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'$ e $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 2\sin(y))\mu'(x) = (\tan(y))^2\,\mu(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{(\tan(y))^2}{x - 2\sin(y)}$$

Essa última linha é uma contradição, já que o lado direito não depende explicitamente apenas de x, ou seja, esse chute não é válido.

$\rightarrow$ **Ansatz** : $\mu = \mu(y) \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0, \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'(y)$

$$-\tan(y)\mu' = (\tan(y))^2\,\mu \Rightarrow \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = -\tan(y) \Rightarrow \mu(y) = \cos(y)$$

■ **Exemplo** : $(2\sin(y)\cos(y) - x\cos(y))y' - \sin(y) = 0$

$$M_y = -\cos(y), N_x = -\cos(y)$$

$$M = \psi_x = -\sin(y) \Rightarrow \psi(x, y) = -x\sin(y) + h(y)$$

$$N = \psi_y = \sin(y) - x\cos(y) = -x\cos(y) + h'(y) \Rightarrow h'(y) = \sin(2y) \Rightarrow h(y) = -\frac{1}{2}\cos(2y)$$

$$\psi(x, y) = -x\sin(y) - \frac{1}{2}\cos(2y) + \mathbb{C}$$

Logo, a solução implicita da EDO é

$$-x\sin(y(x)) - \frac{1}{2}\cos(2y(x)) = \mathbb{C}$$

Capítulo 2:
EDOs de segunda ordem

2.1 Lineares homogêneas

Os métodos para resolver as EDOs de segunda ordem lineares são os métodos do Wronskiano (usando o teorema de Abel), redução de ordem, variação de parametros (para as EDOs inomogêneas) e em último caso, método de séries. Nessa etapa vimos todos métodos exceto esse último, que será visto na sequência.

As EDOs de segunda ordem tem a seguinte cara:

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$$

vamos considerar inicialmente só o caso homogêneo por simplicidade e sempre adotar o uso da equação na forma "canônica", isto é, com a derivada de maior ordem multiplicada por 1:

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0, p(t) = \frac{b(t)}{a(t)}, q(t) = \frac{c(t)}{a(t)}$$

As EDOs de segunda ordem são compostas de 2 soluções linearmente independentes, isso significa que podemos construir uma solução geral a partir de outra e em geral é isso que vamos fazer, supor uma possível solução, com base por exemplo na "cara" da EDO.Isto vai ser visto melhor na prática em exemplos desenvolvidos.

Segue propriedades gerais das EDOs de segunda ordem lineares:

Teorema 1 (Linearidade ou principio da superposição) *Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções de uma EDO linear homogênea, então $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, também é solução.*

Teorema 2 (Solução geral) *Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções de uma EDO linear homogênea de $2^{\underline{a}}$ ordem que não são proporcionais uma à outra, então $y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$, com α e β constantes quaisquer é a solução geral da EDO dada.*

Teorema 3 (Wronskiano) *Dadas duas funções quaisquer $y_1(t)$ e $y_2(t)$ define-se o chamado Wronskiano como sendo a função*

$$W[y_1, y_2](t) := y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) \tag{2.1}$$

Expandindo um pouco a ideia do Wronskiano Nota-se que, $W = 0$ só e só se $y_1(t) = f(t)$ e $y_2(t) = cf(t)$.

Derivando o Wronskiano:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}[y_1y_2' - y_2y_1'] = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1''$$

$$\frac{dW}{dt} = y_1y_2'' - y_2y_1''$$

$$\frac{dW}{dt} = y_1\left(-p(t)y_2' - q(t)y_2\right) - y_2\left(-p(t)y_1' - q(t)y_1\right)$$
$$\frac{dW}{dt} = -p(t)\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right) = -p(t)W$$

Teorema 4 (Teorema de Abel) *Se y_1 e y_2 são soluções da EDO $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ seu Wronskiano satisfaz $W' + p(t)W = 0$ vale*

$$W[y_1, y_2](t) = W_0 \exp\left(-\int p(t)dt\right) \tag{2.2}$$

■ **Exemplo** : $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0, x > 0, y(x) = ?$ Sabemos que a solução geral deve ser da forma $y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$

$$y'' - \frac{x(x+2)}{x^2}y' + \frac{(x+2)}{x^2}y = 0$$
$$y'' - \left(1 + \frac{2}{x}\right)y' + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{2}{x}\right)y = 0$$
$$W = y_1y_2' - y_2y_1' = W_0 \exp\int\left(1 + \frac{2}{x}\right)dx = W_0 \exp x + 2\ln(x)$$
$$y_1y_2' - y_2y_1' = W_0x^2e^x$$

Chutando uma solução para a EDO: Olhando para a essa EDO podemos chutar uma solução do tipo $y(x) = x^\lambda$, já que derivando duas vezes vamos fazer o coeficiente x^2 sumir da EDO. Primeiro fazemos essa substituição na EDO original e tentar calcular o λ:

$$\begin{cases} y' = \lambda x^{\lambda-1} \\ y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{c} \lambda(\lambda-1)x^\lambda - \lambda(\lambda+2)x^\lambda + (x+2)x^\lambda = 0 \\ x^\lambda\left[\lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2\right] + (1-\lambda)x^{\lambda+1} = 0 \end{array}$$

Se $\lambda = 1$ a relação é válida, logo $y_1(x) = x$ pode ser uma solução.

A partir desse resultado usamos o (2.2) para encontrar a segunda solução. Caimos em uma EDO de primeira ordem e resolvendo ela temos $y_2(x)$, e portanto a solução completa.

$$y_1y_2' - y_2y_1' = W_0x^2e^x$$
$$xy_2' - y_2 = W_0x^2e^x \Longrightarrow y_2' - \frac{1}{x}W_0xe^x, W_0 \neq 0$$
$$\mu = \frac{1}{x} \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{x}\right) = e^x \Longrightarrow \frac{y_2}{x} = e^x + \mathbb{C}$$
$$\Longrightarrow y_2(x) = xe^x$$

Logo, a solução geral da EDO dada é $y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$

$$y(x) = \alpha x + \beta xe^x$$

A partir das condições iniciais podemos definir os coeficientes α e β.

2.1.1 Método de redução de ordem

Partindo de uma EDO de segunda ordem conseguimos encontrar uma solução a partir de outra substituindo por uma EDO de primeira ordem.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Supondo que conhecemos uma das soluções y_1 que obtemos a partir de algum Anzats. Podemos então obter a y_2 por redução de ordem fazendo $y_2 = v(t)y_1(t)$ e substituindo na EDO original

$$\begin{cases} y_2' = v'y_1 + vy_1' \\ y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' \end{cases} \implies \begin{array}{r} a\left(v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''\right) + b\left(v'y_1 + vy_1'\right) + cvy_1 = 0 \\ v\underbrace{\left[ay_1'' + by_1' + cy_1\right]}_{=0} + av''y_1 + 2v'y_1' + bv'y_1 = 0 \end{array}$$

$$av''y_1 + 2v'y_1' + bv'y_1 = 0 \implies v'' + v'\left[\frac{2y_1' + by_1}{ay_1}\right] = 0$$

a partir desse ponto substituimos o y_1, a e b, que são conhecidos e resolvemos a EDO em v'' para depois substituir em y_2. Não continuei essa demonstração porque me parece ser mais útil tratar um exemplo real ao invés.

■ **Exemplo** : $4y'' + 4y' + y = 0$

Supondo $y_1 = e^{rt} \Rightarrow y_1' = ry_1 \Rightarrow y_1'' = r^2y_1$ e disso segue que $y\left(4r^2 + 4r + 1\right) = 0 \Rightarrow (2r+1)^2 = 0 \Rightarrow r = -\frac{1}{2}$ é uma solução. Aplicamos a redução de ordem para encontrar a segunda solução.

$$y_2 = vy_1 \Rightarrow \begin{cases} y_2' = v'y_1 + vy_1' \\ y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' \end{cases}$$

$$\left(v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''\right) + p() + q\left(vy_1\right) = 0$$
$$\Rightarrow v''y_1 + v'\left(2y_1' + py_1\right) = 0$$

Resolvendo essa EDO para encontrar y_2 :

$$y_1' = -\frac{1}{2}y1, y_1'' = \frac{1}{4}y_1$$

$$y_2 = vy_1 \Rightarrow \begin{cases} y_2' = v'y_1 - \frac{v}{2}y_1' \\ y_2'' = v''y_1 - \underbrace{\frac{v'y_1}{2} - \frac{vy_1'}{2}}_{=-vy_1} + \frac{vy_1}{4} \\ \end{cases}$$

Substituindo na equação original:

$$4\left(\, v''y_1 - vy_1 + \frac{v}{4}y_1 + 4\left(v'y_1 - \frac{v}{2}y_1\right) + vy_1 = 0\right.$$
$$\Rightarrow 4v''y_1 = 0 \Rightarrow v'' = 0 \Rightarrow v' = a \Rightarrow v = at + b$$

$$y_2 = vy_1 = ate^{-t/2} + be^{-t/2}$$

2.2 Lineares e inomogêneas

2.2.1 Solução com coeficientes constantes

Para EDOS com a cara

$$ay'' + by' + cy = 0$$

onde a, b e c são constantes, soluções podem sembre ser dadas pelo chute $y_1(x) = e^{rx}$ e a solução geral $y(x) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.

Substituindo na EDO genérica dada:

$$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$e^{rx}\left(ar^2 + br + c\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0$$

Teorema 5 (Equação caractéristica de uma EDO) *Dada uma EDO linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes: $ay''+by'+cy = 0$, a equação $ar^2+br+c = 0$ é a equação caractéristica da EDO dada.*

Sejam r_1 e r_2 solução da equação caractéristica, temos três possíveis casos:

■ **Caso** $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ e $r_1 \neq r_2$: $y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$

■ **Caso** $r_1 = r_2$, usar método do Wronskiano ou redução de ordem.

■ **Caso** $r_1 \neq r_2$ e $r_1 = \overline{r_2} \in \mathbb{C}$: $y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ Nesse caso é necessário fazer uma mudança de coordenadas e passar a trabalhar com coordenadas polares e tratar usando formúla de Euler. Lembrando que as EDOs que estamos trabalhando estão em $\mathbb{R}$, logo temos que sempre tomar cuidado em checar se a solução final está nesse domínio.

2.2.2 Solução para coeficientes não constantes

Equações com a cara

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

Solução geral: $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$

onde y_H é uma solução geral da EDO homogênea associada (obtida substituindo $f(t)$ por zero e resolvendo a EDO homogênea resultante) e y_P é uma solução particular qualquer da EDO inomogênea dada.

Supondo que já resolvemos a EDO homogênea por algum método:

$$y_H(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

onde já conhecemos as funções y_1 e y_2 .

2.2.3 Método da variação de parâmetros para encontrar $y_P(t)$

Reescrevendo a solução particular da inomogênea como :

$$y_P(t) = \alpha(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t)$$

E colocando a EDO original na forma canônica:

$$y_P' = \alpha y_1' + \alpha' y_1 + \beta y_2' + \beta' y_2$$

Impomos a relação:

$$\alpha' y_1 + \beta' y_2 = 0 \tag{2.3}$$

segue que $y_P' = \alpha(t)y_1'(t) + \beta(t)y_2'(t)$

$$y_P'' = \alpha' y_1' + \alpha y_1'' + \beta' y_2' + \beta y_2''$$

Substituindo na EDO dada:

$$y_P'' + py_P' + qy_P = \alpha y_1'' + \alpha' y_1' + \beta y_2'' + \beta' y_2' + p\left(\alpha y_1' + \beta y_2'\right) + q\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right) = r(t)$$
$$\alpha(t)\underbrace{\left[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)\right]}_{=0} + \beta(t)\underbrace{\left[y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)\right]}_{=0} + \alpha' y_1' + \beta' y_2' = r(t)$$

$$\alpha' y_1' + \beta' y_2' = r(t) \tag{2.4}$$

Com as duas equações (2.5) e (2.4) temos o sistema linear:

$$\begin{cases} y_1\alpha' + y_2\beta' = 0 \\ y_1'\alpha' + y_2'\beta' = r(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix}$$

$$\alpha' = \frac{\det\begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ r & y_2' \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}} = -\frac{r(t)y_2(t)}{y_1y_2' - y_2y_1} = -\frac{r(t)y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)}$$

$$\beta' = \frac{\det\begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(t) \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}} = -\frac{r(t)y_1(t)}{y_1y_2' - y_2y_1} = -\frac{r(t)y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)}$$

Integrando as soluções temos α, β , após isso substituimos em $y_P(t) = \alpha(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t)$ e a solução geral da EDO será :

$$y(t) = \left(\alpha_0 + \alpha(t)\right)y_1(t) + \left(\beta_0 + \beta(t)\right)y_2(t)$$

■ **Exemplo** : $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln|x|, y(x) =?, x > 0$

Considerando a EDO homogênea associada temos

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$$

Suponto $y(x) = x^\lambda \Rightarrow y' = \lambda x^{\lambda-1} \Rightarrow y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$

$$x^\lambda [\lambda(\lambda-1) - 3\lambda + 4] = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

Logo, $\lambda = 2$ e uma das soluções da EDO homogenea associada é $y_1(x) = x^2$

Usando método do Wronskiano para encontrar $y_2(t)$

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = W_0 e^{-\int p(x)dx}, p(x) = -\frac{3}{x}$$

$$x^2y_2' - 2xy_2 = e^{3\ln x} = e^{x^3}$$

$$y_2' - \frac{2}{x}y_2 = x \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^2}$$

$$(\mu y_2)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{y_2}{x^2} = \ln x + \mathbb{C} \Rightarrow y_2(x) = x^2\ln x + x^2\mathbb{C}$$

Fazendo $\mathbb{C} = 0$, temos que $y_2(x) = x^2 \ln x$ uma possível solução é $y_2(x) = x^2 \ln x$ e a outra é $y_1(x) = x^2$

Para encontrar $y_P(x)$ impomos:

$$y_P(x) = \alpha(x)y_1(x) + \beta(x)y_2(x) = \alpha(x)x^2 + \beta(x)x^2\ln x$$

$$y_P'(x) = \alpha' x^2 + 2\alpha x + \beta' x^2 \ln x + \beta(2x + x)$$

impondo também $\alpha' x^2 + \beta' x^2 \ln x = 0$

$$y_P' = 2\alpha x + \beta(2x\ln x + x)$$

$$y_P'' = 2\alpha' x + 2\alpha + \beta'(2x\ln x + x) + \beta(2\ln x + 3)$$

Substituindo na EDO:

$$y_P'' - \frac{3}{x}y_P' + \frac{4}{x^2}y_P = \ln x$$

$$\Leftrightarrow [2\alpha' x + 2\alpha + \beta'(2x\ln x + x) + \beta(2\ln x + 3)] - \frac{3}{x}[2\alpha x + \beta(2x\ln x + x)] + \frac{4}{x^2}\left(\alpha x^2 + \beta x^2 \ln x\right) = \ln x$$

$$2\alpha' x + (2x\ln x + x)\beta' = \ln x$$

Temos então o sistema

$$\begin{cases} x^2\alpha' + 2x\ln x\beta' = 0 \\ 2\alpha' x + (2x\ln x + x)\beta' = \ln x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' + \ln x\beta' = 0 \\ 2\alpha' + (2\ln x + 1)\beta' = \frac{\ln x}{x} \end{cases}$$

$$\alpha' = -\beta' \ln x$$

$$-\beta' \ln x + 2\ln x \beta' + \beta' = \frac{\ln x}{x}$$

$$\beta' = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \alpha' = -\frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$\beta = \int \frac{\ln x}{x} dx \text{ e } \alpha = -\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

$$\beta = \frac{(\ln x)^2}{2} \text{ e } \alpha = -\frac{(\ln x)^3}{3}$$

$$y_P(x) = -\frac{(\ln x)^3 x^2}{3} + \frac{(\ln x)^2 x^2 \ln x}{2}$$

$$y_P(x) = \frac{x^2 (\ln x)^3}{6}$$

A solução geral é:

$$y(x) = \alpha_0 x^2 + \beta_0 x^2 \ln x + \frac{x^2(\ln x)^3}{6}$$

onde α_0 e β_0 são as condições de contorno.

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

Solução geral: $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$

onde y_H é uma solução geral da EDO homogênea associada (obtida substituindo f(t) por zero e resolvendo a EDO homogênea resultante) e y_P é uma solução particular qualquer da EDO inomogênea dada.

Supondo que já resolvemos a EDO homogênea por algum método:

$$y_H(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

onde já conhecemos as funções y_1 e y_2 .

Método da variação de parâmetros para encontrar $y_P(t)$

Reescrevendo a solução particular da inomogênea como :

$$y_P(t) = \alpha(t) y_1(t) + \beta(t) y_2(t)$$

E colocando a EDO original na forma canônica:

$$y_P' = \alpha y_1' + \alpha' y_1 + \beta y_2' + \beta' y_2$$

Impomos a relação:

$$\alpha' y_1 + \beta' y_2 = 0 \tag{2.5}$$

segue que $y_P' = \alpha(t) y_1'(t) + \beta(t) y_2'(t)$

$$y_P'' = \alpha' y_1' + \alpha y_1'' + \beta' y_2' + \beta y_2''$$

Substituindo na EDO dada:

$$y_P'' + py_P' + qy_P = \alpha y_1'' + \alpha' y_1' + \beta y_2'' + \beta' y_2' + p\left(\alpha y_1' + \beta y_2'\right) + q\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right) = r(t)$$

$$\alpha(t)\underbrace{\left[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)\right]}_{=0} + \beta(t)\underbrace{\left[y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)\right]}_{=0} + \alpha' y_1' + \beta' y_2' = r(t)$$

$$\alpha' y_1' + \beta' y_2' = r(t) \tag{2.6}$$

Com as duas equações (**??**) e (2.4) temos o sistema linear:

$$\begin{cases} y_1\alpha' + y_2\beta' = 0 \\ y_1'\alpha' + y_2'\beta' = r(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix}$$

$$\alpha' = \frac{\det\begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ r & y_2' \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}} = -\frac{r(t)y_2(t)}{y_1y_2' - y_2y_1} = -\frac{r(t)y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)}$$

$$\beta' = \frac{\det\begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(t) \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}} = -\frac{r(t)y_1(t)}{y_1y_2' - y_2y_1} = -\frac{r(t)y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)}$$

Integrando as soluções temos α, β , após isso substituimos em $y_P(t) = \alpha(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t)$ e a solução geral da EDO será :

$$y(t) = \left(\alpha_0 + \alpha(t)\right)y_1(t) + \left(\beta_0 + \beta(t)\right)y_2(t) \tag{2.7}$$

■ **Exemplo** : $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2\ln|x|, y(x) = ?, x > 0$

Considerando a EDO homogênea associada temos

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$$

Supondo $y(x) = x^\lambda \Rightarrow y' = \lambda x^{\lambda-1} \Rightarrow y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$

$$x^\lambda\left[\lambda(\lambda-1) - 3\lambda + 4\right] = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

Logo, $\lambda = 2$ e uma das soluções da EDO homogenea associada é $y_1(x) = x^2$

Usando método do Wronskiano para encontrar $y_2(t)$

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = W_0e^{-\int p(x)dx}, p(x) = -\frac{3}{x}$$

$$x^2y_2' - 2xy_2 = e^{3\ln x} = e^{x^3}$$

$$y_2' - \frac{2}{x}y_2 = x \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^2}$$

$$(\mu y_2)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{y_2}{x^2} = \ln x + \mathbb{C} \Rightarrow y_2(x) = x^2\ln x + x^2\mathbb{C}$$

Fazendo $\mathbb{C} = 0$, temos que $y_2(x) = x^2 \ln x$

uma possível solução é $y_2(x) = x^2\ln x$ e a outra é $y_1(x) = x^2$

Para encontrar $y_P(x)$ impomos:

$$y_P(x) = \alpha(x)y_1(x) + \beta(x)y_2(x) = \alpha(x)x^2 + \beta(x)x^2\ln x$$

$$y_P'(x) = \alpha'x^2 + 2\alpha x + \beta'x^2\ln x + \beta(2x + x)$$

impondo também $\alpha'x^2 + \beta'x^2\ln x = 0$

$$y_P' = 2\alpha x + \beta(2x\ln x + x)$$

$$y_P'' = 2\alpha'x + 2\alpha + \beta'(2x\ln x + x) + \beta(2\ln x + 3)$$

Substituindo na EDO:

$$y_P'' - \frac{3}{x}y_P' + \frac{4}{x^2}y_P = \ln x$$

$$\Leftrightarrow [2\alpha'x + 2\alpha + \beta'(2x\ln x + x) + \beta(2\ln x + 3)] - \frac{3}{x}\left[2\alpha x + \beta\left(2x\ln x + x\right)\right] + \frac{4}{x^2}\left(\alpha x^2 + \beta x^2\ln x\right) = \ln x$$

$$2\alpha'x + \left(2x\ln x + x\right)\beta' = \ln x$$

Temos então o sistema

$$\begin{cases} x^2\alpha' + 2x\ln x\beta' = 0 \\ 2\alpha'x + \left(2x\ln x + x\right)\beta' = \ln x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' + \ln x\beta' = 0 \\ 2\alpha' + \left(2\ln x + 1\right)\beta' = \frac{\ln x}{x} \end{cases}$$

$$\alpha' = -\beta'\ln x$$

$$-\beta'\ln x + 2\ln x\beta' + \beta' = \frac{\ln x}{x}$$

$$\beta' = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \alpha' = -\frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$\beta = \int \frac{\ln x}{x} dx \text{ e } \alpha = -\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

$$\beta = \frac{(\ln x)^2}{2} \text{ e } \alpha = -\frac{(\ln x)^3}{3}$$

$$y_P(x) = -\frac{(\ln x)^3 x^2}{3} + \frac{(\ln x)^2 x^2 \ln x}{2}$$

$$y_P(x) = \frac{x^2 (\ln x)^3}{6}$$

A solução geral é:

$$y(x) = \alpha_0 x^2 + \beta_0 x^2 \ln x + \frac{x^2 (\ln x)^3}{6}$$

onde α_0 e β_0 são as condições de contorno.

Capítulo 3:
Método de Séries

3.1 Mini revisão de séries de Taylor

3.1.1 Multiplicação de duas séries

Dadas as funões analiticas em x_0 , $f(x)$ e $g(x)$, com

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \text{ e } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$$

vale a seguinte relação

$$f(x)g(x) := \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n\right]$$

$$f(x)g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$$

onde $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$.

3.1.2 Série de taylor em torno de um ponto x_0:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}$$

3.2 Solução em torno de pontos regulares

3.2.1 Introdução e analiticidade de séries de potências

Dada a série de potências $\sum a_n(x - x_0)^n$, se a série converge para valores de x num intervalo $x_0 - \delta, x_0 + \delta$, $\delta > 0$, então a série é analitica em $x = x_0$.

■ **Exemplo** : Dada a EDO $a(x)y''(x)b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0$

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

Escolher o ponto x_0 que vamos analisar.

Estudar a analiticidade da série.

■ **Exemplo** : $(1-x)y'' + y = 0$

$$y'' + \frac{1}{1-x}y = 0, p(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Pelo critério da razão: $\lim_{n\infty} |r_n| = |x|$, convergente no intervalo $(-1,1)$ e convergente no ponto 0 . Escrevendo a EDO em formato de séries:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] = 0$$

3.2.2 Solução em séries em torno de pontos regulares

■ **Exemplo** : $y''(x) + \sin(x)y(x) = 0$

Temos $p(x) = 0$ e $q(x) = \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$, ambas funções são analiticas em torno de x_0. Escolhendo $x_0 = 0$ temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] = 0$$

Nesse tipo de resolução podemos definir uma ordem n e tentar encontrar o termo geral a_n e então retornar à série original de $y(x)$ nas condições iniciais dadas.

Abrindo os somatórios e agrupando os termos a partir das menores potências de x até x^3 ;

$$(2\cdot 1a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + 5\cdot 4x^3 + \cdots) + \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right]\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\right]$$

$$2a_2 + (6a_3 + a_0)x + (12a_4 + a_1)x^2 + (20a_5 + a_2 - \frac{a_0}{6})x^3 + \mathcal{O}(x^4) = 0$$

Relação de independência linear, ou seja, os coeficientes *devem* ser nulos.

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ 6a_3 + a_0 = 0 \\ 12a_4 + a_1 = 0 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} a_3 = -\dfrac{a_0}{3} \\ a_4 = -\dfrac{a_1}{12} \\ a_5 = -\dfrac{a_0}{120} \end{array}$$

Escrevendo $y(x)$ em termo dos coeficientes encontrados:

$$y(x) = a_0 + a_1x - \frac{a_0}{6}x^3 - \frac{a_1}{12}x^4 + \frac{a_0}{120}x^5 + \cdots$$

$$y(x) = a_0\left[1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right] + a_1\left[x - \frac{x^4}{12} + \cdots\right]$$

Onde a_0 e a_1 são as condições de contorno.

■**Exemplo** : $y'' + k^2 y = 0, k \in \mathbb{R}$ e $y(x) = ?$ Exemplo de uma EDO que podemos resolver sem o método de séries. Caso do movimento oscilatório.

De forma direta, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n] + k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + k^2 a_n\right] x^n = 0$$

$$a_{n+2} = -k^2 \frac{a_n}{(n+2)(n+1)}, n = 0, 1, 2, ...$$

$$a_2 = -k^2 \frac{a_0}{2}$$
$$a_3 = -k^2 \frac{a_1}{3 \cdot 2}$$
$$a_4 = -k^2 \frac{a_2}{4 \cdot 3} = k^4 \frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$
$$a_5 = -k^2 \frac{a_3}{5 \cdot 4} = k^4 \frac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

Separando em termos pares e ímpares:

■ n par: $n = 2j, j = 0, 1, 2, ...$

$$a_{2j+2} = -k^2 \frac{a_{2j}}{(2j+2)(2j+1)} = -\frac{k^2}{(2j+2)(2j+1)} \left[-\frac{k^2 a_{2j-2}}{(2j)(2j-1)}\right]$$

$$a_{2j+2} = \frac{(-k^2)(-k^2) \cdot \cdots \cdot (-k^2) a_0}{(2j+2)(2j+1)(2j)(2j-1) \cdots 2)} = \frac{(-k^2)^{j+1} a_0}{(2j+2)!}$$

$$a_{2j+2} = \frac{(-k^2)^{j+1} a_0}{[2(j+1)]!} \Rightarrow \boxed{a_{2j} = (-1)^j \frac{k^{2j} a_0}{(2j)!}}$$

■ n ímpar: $n = 2j + 1$

$$a_{2j+3} = -\frac{k^2 a_{2j+1}}{(2j+3)(2j+2)} = \frac{(-k^2)(-k^2) a_{2j-1}}{(2j+3)(2j+2)(2j+1)(2j) \cdots}$$

$$a_{2j+3} = \frac{(-k^2)(-k^2) \cdots (-k^2) a_1}{(2j+3)(2j+2)(2j+1) \cdots 3 \cdot 2}$$

$$a_{2j+3} = \frac{(-1)^j (k^2)^{j+1} a_1}{(2j+3)!} \Rightarrow \boxed{a_{2j+1} = (-1)^j \frac{(k)^{2j} a_1}{(2j+1)!}}$$

Voltando à série original, temos

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{\text{n par}} a_n x^n + \sum_{\text{n impar}} a_n x^n$$

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \underbrace{a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{=\frac{a_1}{k}\left[kx - \frac{k^3x^3}{3!} + \frac{k^5x^5}{5!} - \frac{k^7x^7}{7!} + \cdots\right]}$$

$$y(x) = a_0 \cos(kx) + \frac{a_1}{k}\sin(kx)$$

$$\boxed{y(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)}$$

3.3 Método de séries para pontos singulares regulares

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0$$

Se $p(x)$ e $q(x)$ forem analíticas em $x = x_0$, então $x = x_0$ é um **ponto ordinário** e vale a solução do tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

caso contrário, $x = x_0$ é um ponto singular, portanto precisamos de um outro tratamento para poder escrever a solução no formato de série de potências.

Se $p(x)$ **ou** $q(x)$ não forem analíticas em $x = x_0$, mas $(x - x_0)p(x)$ e $(x - x_0)^2 q(x)$ forem, então $x = x_0$ é dito ser um *ponto singular regular*. Caso contrário $x = x_0$ é um ponto singular irregular *(esse caso não é tratado nessa disciplina, então não tentei buscar entender ainda...)*.

■ **Exemplo** : $x^2y'' + 2xy' + 3y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 0$

$$xp(x) = 2 \text{ e } x^2 q(x) = 3$$

No caso $x = x_0$ ser ponto singular regular, procuramos uma solução em série de potências com a seguinte forma:

$$y(x) = (x - x_0)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, a_0 \neq 0 \tag{3.1}$$

Impomos que ao menos uma das soluções devem ser dessa forma e caso o $\lambda = 0$, ou seja, conseguimos apenas uma solução a partir dele, podemos chegar à outras soluções por outros métodos como redução de ordem ou Wronksiano...

Expandindo $(x - x_0)p(x)$ e $(x - x_0)^2 q(x)$ em séries de potências:

$$\begin{cases} (x - x_0)p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n \\ (x - x_0)^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n \end{cases}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+\lambda}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_n(x-x_0)^{n+\lambda-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n(x-x_0)^{n+\lambda-2}$$

Saindo da forma canônica multiplicando a EDO por (x - x_0)^2 :

$$(x-x_0)^2 y'' + (x-x_0)\left[(x-x_0)p(x)\right]y' + \left[(x-x_0)^2 q(x)\right]y = 0$$

$$(x-x_0)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n x^{n+\lambda-2} + (x-x_0)\sum_{n=0}^{\infty}\left[(x-x_0)p(x)\right]\left((n+\lambda)a_n(x-x_0)^{n+\lambda-1}\right)$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(x-x_0)^2 q(x)\right]a_n(x-x_0)^{n+\lambda} = 0$$

Fazendo a expansão em série de Taylor para $(x-x_0)p(x)$ e $(x-x_0)^2q(x)$ de forma a considerar apenas o termo mais baixo p_0, q_0, temos que

$$(x-x_0)p(x) = p_0 + (x-x_0)p_1 + (x-x_0)^2 p_2 \cdots \Rightarrow p_0 = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x)$$

$$q_0 = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2 q(x)$$

Rearranjando as séries acima e simplificando as potências temos a seguinte série:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n + [(x-x_0)p(x)](n+\lambda)a_n + [(x-x_0)^2q(x)]a_n\right](x-x_0)^{n+\lambda} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+\lambda)(n+\lambda-1) + \left[(x-x_0)p(x)\right](n+\lambda) + \left[(x-x_0)^2q(x)\right]\right]a_n(x-x_0)^{n+\lambda} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+\lambda)(n+\lambda-1) + (n+\lambda)p_0 + q_0\right]a_n(x-x_0)^{n+\lambda}$$

Abrimos as séries e escrevendo as combinações em termos de ordem mais baixa. Isso é útil porque assim podemos fatorar e chagar numa relação para λ:

$$\lambda(\lambda-1)a_0\,(x-x_0)^{\lambda} + p_0\lambda a_0(x-x_0)^{\lambda} + q_0a_0(x-x_0)^{\lambda} + \mathcal{O}(x-x_0)^{\lambda+1} =$$
$$a_0\left[\lambda(\lambda-1) + \lambda p_0 + q_0\right](x-x_0)^{\lambda} + \mathcal{O}(x-x_0)^{\lambda+1} = 0$$

Podemos escrever a relação:

$$\lambda\,(\lambda-1) + \lambda p_0 + q_0 = 0 \tag{3.2}$$

■ **Exemplo** : $y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 0, x_0 = 0$

$$p(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow xp(x) = 2 = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + ...$$

$$q(x) = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 q(x) = 3 = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + ...$$

Logo, $x_0 = 0$ é um ponto singular regular e $y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Encontrando o coeficiente λ usando a equação indicial (3.2) :

$$\lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda + 3 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{11}}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{11}}{2}$$

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = x^{\lambda_1} \sum_{n=0} a_n x^n + x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

3.3.1 Casos para λ

Esse indice é definido a partir da relação (3.2) e para cada solução da equação quadrática tem significados diferentes. Eles foram divididos em alguns casos.

Nessa etapa do curso muitos desses resultados não foram rigorosamente justificados e em alguns deles não fui atrás de tentar entender como chegar nessas relações por conta própria. :p

Caso $\lambda\pm \notin \mathbb{R}(\lambda_- = \lambda_+^*)$

A solução de λ é um complexo. Nesse caso o complexo conjugado também é válido, mas como queremos apenas soluções reais $y(x)$, precisamos tratar o caso complexo a fim de conseguir apenas a perte real da solução. Para isso utilizamos as seguintes soluções:

$$y_1(x) = |x - x_0|^{\lambda_+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, a_0 \neq 0$$

$$y_2(x) = |x - x_0|^{\lambda_-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, b_0 \neq 0$$

Caso $\lambda\pm \in \mathbb{R}(\lambda_+ \geq \lambda_-)$

- Subcaso: $y_1(x) = |x - x_0|^{\lambda_+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

  Nesse caso a segunda solução pode ser construida a partir da primeira e fica em termos de logaritmo e outra série. Só utilizamos o resultado. Se em algum momento eu estudar as demonstrações posso coloca-las aqui.

$$y_1(x) = y_1(x) \ln|x - x_0| + |x - x_0|^{\lambda_+} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

Além disso, para definir os coeficientes b_n é necessário substitutir a solução na EDO original e encontrar o termo geral. Ao menos foi isso que entendi.

- Subcaso:$\lambda_+ - \lambda_- \in \mathbb{N}^*$

$$y_1(x) = |x - x_0|^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$y_2(x) = \alpha y_1(x) \ln |x - x_0| + |x - x_0|^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

- Subcaso: $0 < \lambda_+ - \lambda_- \notin \mathbb{N}$

$$y_1(x) = |x - x_0|^{\lambda_+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$y_2(x) = |x - x_0|^{\lambda_-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

■**Exemplo** : Equação de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 + \nu^2)y = 0; \nu \in \mathbb{R}_+$$

Para $x_0 = 0$

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

$$p(x) = \frac{1}{x}$$

e $q(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x2}$
Não são analiticas em x_0 , encontrando os pontos singulares regulares:

$$xp(x) = 1 \text{ e } x^2 q(x) = x^2 - \nu^2$$

essas funções são analiticas em x_0 . Resolvendo a equação indicial:

$$\lambda(\lambda - 1)p_0 \lambda + q_0 = 0$$

$$p_0 = \lim_{x \to x_0} xp(x) = 1 \text{ e } q_0 = \lim_{x \to x_0} x^2 q(x) = -\nu^2$$

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - \nu^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \nu^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\nu$$

(Se o μ não tivesse sido definido como estritamente positivo a solução seria $\lambda = \pm|\nu|$).

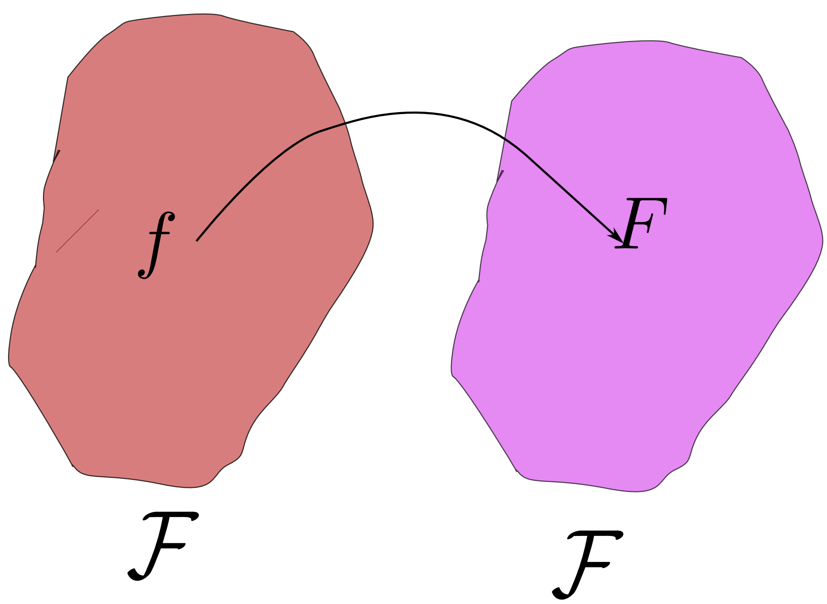
■ **Exercicio proposto** : resolver para $\nu = 0, \nu = \frac{1}{2}, \nu = 1$

Capítulo 4: Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é uma transformada integral que associa funções $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. É usada para modelar sistemas em que há mudanças rápidas de comportamentos (a.k.a "impulsos"). Em geral comportamentos que saem de um regime homogêneo em um instante t.

Teorema 6 *Definição: No espaço das funções $\mathcal{F}$ temos funções do tipo $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{C}$, definimos a transformada de laplace como*

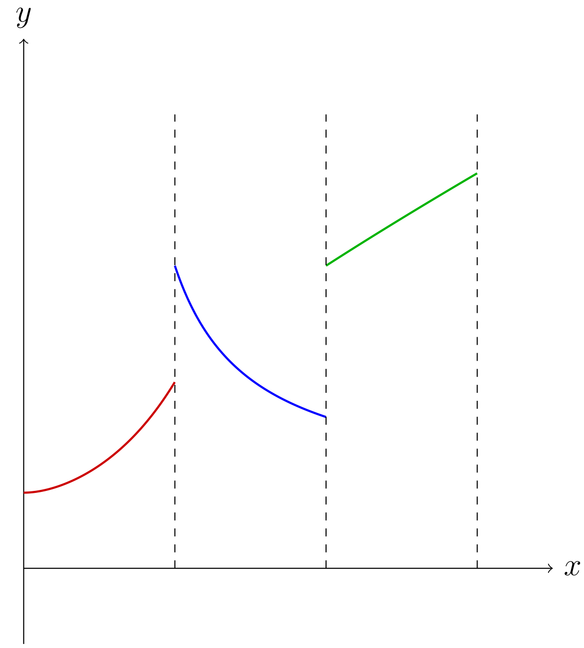
$$F(s) \equiv \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{4.1}$$



4.1 Propriedades necessárias de f

(1) Seccionalidade contínua [contínua por pedaços]

Note que nos extremos dos intervalos a função deve convergir para algum valor.



(2) Limite superior Cresce mais devagar que ao menos **uma** exponencial.
Essa condição é similar à um limite superior/inferior da função.

$$|f(t)| < Me^{at}, t > t_0, a \in \mathbb{R}_+ \implies \exists F(s), s > a$$

Garantidamente a função estará contida na faixa destacada.

■ **Exemplo** : $f(t) = 1, t \geq 0$

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}, s > 0$$

■ **Exemplo** : $f(t) = t$

$$\{t\}(s) = \int_0^{-\infty} e^{-st}tdt = -\underbrace{\frac{e^{-st}}{s}t\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}dt$$

$$\{t\}(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}dt = \frac{1}{s^2}, s > 0$$

■ **Exemplo** : $f(t) = t^n, n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}t^n dt = \left(-\frac{1}{s}e^{-st}t^n\right)\Big|_0^\infty - \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}dt$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}(s) = \frac{n}{s}\frac{(n-1)}{s}\mathcal{L}\{t^{n-2}\}(s)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n(n-1)\cdot \dots \cdot 1}{s\cdot s \cdots s}\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{n!}{s^n}\mathcal{L}\{1\}(s)$$
$$\Longrightarrow \mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

4.2 Propriedades da Transformada de Laplace

4.2.1 Propriedade da exponencial

■ **Exemplo** $f(t) = e^{at}, t \geq 0$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = -\frac{e^{-(s-a)}}{s-a}\bigg|_0^\infty$$

$$\Longrightarrow F(s) = \frac{1}{s-a}, s > 0$$

■ **Exemplo** $\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}, s > 0$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}, s-a > 0 \Rightarrow s > a$$

■ **Exemplo** $g(t) = e^{-3t}t^4$ Sabendo que $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, temos

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}t^4\}(s) = \mathcal{L}\{t^4\}(s+3) = \frac{4!}{(s+3)^5}, s > 3$$

4.2.2 propriedade de translação

A função $g(t)$ é dada por $g(t) = u_c(t)f(t-c)$ onde u_c é uma função degrau unitário.

Função degrau unitário ou função de Heaviside $(\Theta(t-a))$

$$u_a(t) = \begin{cases} 1, \text{se } t > a \\ 0, \text{se } t < a \end{cases} \tag{4.2}$$

Sabendo a $\mathcal{L}\{f\}(s)$, podemos saber $\mathcal{L}\{g\}(s)$:

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st}g(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt$$
$$G(s) = \int_C^\infty e^{-st}f(t) \overset{t'=t-c}{=} \int_0^\infty e^{-s(t'+c)}f(t')dt'$$
$$G(s) = e^{-st}F(s), C > 0$$

Se $g(t) = f(ct), c > 0 \Rightarrow G(s) = \frac{1}{C}F(\frac{s}{c})$.

Se $g(t) = \frac{df}{dt}$, então $G(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{df}{dt}\right)dt$

$$\Leftrightarrow G(s) = e^{-st} f(t)\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty (-s)e^{-st} f(t)dt$$
$$\Leftrightarrow G(s) = -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$
$$\Leftrightarrow G(s) = -f_0 + sF(s)$$
$$\Longrightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\}(s) = -f_0 + s\mathcal{L}\{f\}(s)$$

Portanto, $\mathcal{L}\{f''\}(s) = -f'(0) + s\mathcal{L}\{f'\}(s)$

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = -f'(0) + s\left(-f_0 + s\mathcal{L}\{f\}(s)\right)$$
$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = -f_0' - sf_0 + s^2\mathcal{L}\{f\}(s)$$

De forma geral, vale

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = -f(t_0)^{n-1} - sf(t_0)^{n-2} + \cdots + s^n\mathcal{L}\{f\}(s) \tag{4.3}$$

Se $g(t) = t^n f(t), n \in \mathbb{N}$ sabemos qual é a transformada $\mathcal{L}\{f\}(s)$, então valoe

$$G(s) = (-1)^n F^{(n)}(s) \equiv (-1)\frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

■ **Exemplo**

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \mathcal{L}\{t^n\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

4.2.3 Delta de Dirac (Função impulso)

[IMAGEM]

$\delta_{t_0}(t) = 0$ para $t \neq t_0$ e $\int_{t_0-\epsilon_1}^{t_0+\epsilon_2} \delta_{t_0}(t)dt = 1$. Note que o intervalo da função não precisa necessariamente ser simétrico, ou seja, podemos ter $|\epsilon_1| \neq |\epsilon_2|$.

[IMAGEM]

Com $a \mapsto 0$ a função fica mais centrada em torno de t_0 .

Propriedade mais útil do Delta de Dirac

$$\int_{t_0-\epsilon_1}^{t_0+\epsilon_2} \delta_{t_0}(t)f(t)dt = f(t_0), \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$$

$$\mathcal{L}\{\delta_{t_0}(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\delta_{t_0}(t)dt = e^{-st_0}, t_0 > 0$$

$$\mathcal{L}\{u_a(t)\}(s) = \frac{e^{-as}}{s}, a > 0$$

Para $a > 0$: $\mathcal{L}\{\delta_a(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{u_a(t)\}(s) = -u_0(0) + s\mathcal{L}\{u_a(t)\}(s)$
ou seja, vale a relação $\delta_a(t)$ "=" $\frac{d}{dt}u_a(t)$

4.3 Aplicação em EDOs: usando Transformada de Laplace em PVIs

Nosso objetivo é usar a transformada de Laplace para resolver problemas do tipo

$$ay'' + by' + cy = f(t), y(0) = y_0, y'(0) = v_0$$

Podemos aplicar a propriedade (4.3) à EDOs e como é uma transformada integral, sabemos que a transformação é linear, logo, podemos var a operação em toda equação de forma que

$$a\mathcal{L}\{y''\}(s) + b\mathcal{L}\{y'\}(s) + c\mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

$$a\left(-v_0 - y_0 s + s^2 Y(S)\right) + b\left(-y_0 sY(s)\right) + cY(s) = F(s)$$

$$\Leftrightarrow (as^2 + bs + c)Y(s) = F(s) + (av_0 + by_0) + ay_0 s$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{F(s)}{(as^2 + bs + c)} + \frac{(av_0 + by_0 + ay_0 s)}{(as^2 + bs + c)}$$

■ **Exemplo** : $y'' + w_0^2 y = \sin(\omega t), t > 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$

$$-y'(0) - y(0)s + s^2 Y(s) + \omega_0^2 Y(s) = \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}$$

Fazendo a transformada de Laplace da função $\sin(\omega t)$:

Trabalhar com número complexo pode ser mais simples já que no fim das contas vamos estar manipulando uma exponencial. É importante notar que como estamos querendo a transforamda para uma função em $\mathbb{R}$, o resultado não pode ser em $\mathbb{C}$, então é importante checar em qual domínio está a função final.

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right\}(s) = \frac{1}{2i}\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} - \frac{1}{2i}\mathcal{L}\{e^{-i\omega t}\}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{1}{2i}\frac{1}{(s - i\omega)} - \frac{1}{2i}\frac{1}{(s + i\omega)} = \frac{s + i\omega - s - i\omega}{2i(s - i\omega)(s + i\omega)}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Voltando à resolução da EDO:

$$\Leftrightarrow s^2 Y(s) + \omega_0^2 Y(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$Y(s) = \frac{\omega}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2}$$

Tratando a fração parcial:

$$\frac{\omega}{(s^2+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)} = \frac{A}{(s^2+\omega^2} + \frac{B}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A(s^2+\omega_0^2)+B(s^2+\omega^2)}{(s^2+\omega^2)(s^2+\omega_0^2)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow B=-A \\ A\omega_0^2 - A\omega^2 = \omega \Rightarrow A = \frac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\left[\frac{1}{s^2+\omega^2} - \frac{1}{s^2+\omega_0^2}\right]$$

A partir daqui adaptamos os termos dentro dos colchetes para chegar em uma relação que fique claro alguma transformada de Laplace conhecida, nesse caso uma $\mathcal{L}\{\sin\}$.

$$\frac{1}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$
$$\frac{1}{s^2+\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0}\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\}(s) = \frac{1}{\omega_0}\frac{\omega_0}{s^2+\omega^2}$$

$$Y(s) = \frac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\left[\frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} - \frac{1}{\omega_0}\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\}\right]$$

$$Y(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{\sin(\omega t)}{\omega_0^2-\omega^2} - \frac{(\omega/\omega_0)\sin(\omega_0 t)}{\omega_0^2-\omega^2}\right\}(s)$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s) y(s) = \frac{\sin(\omega t) - (\omega/\omega_0)\sin(\omega_0 t)}{\omega_0^2-\omega^2}$$

com $\omega_0^2 \neq \omega^2$.

4.4 Teorema da convolução e transformada de Laplace Inversa

Teorema 7 ***Definição***: *produto de convolução para transformada de Laplace. Sejam duas funções $f(t)$ e $g(t)$, o produto de convolução delas é definido por*

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(u)g(t-u)du \equiv \int_0^t g(u)f(t-u)du = (g * f)(t) \tag{4.4}$$

vale a propriedade de assortatividade, $(f * 0)(t) = 0$ e $(f * 1)(t) \neq 1$.
Se$\mathcal{L}\{f\} = F$ e $\mathcal{L}\{g\} = G$, então

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = F(s)G(s) \tag{4.5}$$

Pequeno esboço do caminho que deve seguir para demonstrar esse resultado:

$$F(s)G(s) = \left(\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-st'}g(t')dt'\right) = \int_0 \infty \int_0^\infty e^{-st}f(t)e^{-st'}g(t')dt'dt$$

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(t+t')} f(t)g(t')dt'dt$$

fazendo $t = u - t'$ e ajustando os limites de integração e o produto de convolução dentro da integral externa.

■ **Exemplo** : Seja $H(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)} = F(s)G(s)$

$$\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{\frac{\sin(2t)}{2}\}(s) = \frac{1}{s^2+4} = G(s)$$

$$\Rightarrow h(s) = \mathcal{L}\{f * g\}(s) = \int_0^t g(u)f(t-u)du = \int_0^t \frac{\sin(2t)}{2}(t-u)du$$

$$h(s) = \frac{t}{2}\int_0^t \sin(2u)du - \frac{1}{2}\int_0^t \sin(2u)udu$$

$$\Rightarrow h(s) = -\frac{t}{4}\left[\cos(2u)\right]_0^t - \frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{\cos(2u)}{2}u\right]_0^t + \int_0^t \frac{\cos(2u)}{2}du\right\}$$

$$h(s) = -\frac{t}{4}\left[\cos(2t) - 1\right] + \frac{\cos(2u)}{4} - \frac{\sin(2t)}{8}$$

$$h(s) = -\frac{\sin(2t)}{8} + \frac{t}{4}$$

Apêndice

4.5 Método de resolução de integral de fração parcial

Exemplo $f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c} \Rightarrow \int f(x)dx$

Encontrando as raízes do polinômio (e/ou simplificando)

$$ax^2 + bx + c = 0 = a(x - r_1)(x_{r2})$$

onde r_1 e r_2 são raízes da equação quadrática. Escrevendo em outra forma:

$$\frac{1}{a(x-r_1)(x-r_2)} = \frac{A}{x-r_1} + \frac{B}{x-r_2} = \frac{A(x-r_2)+B(x-r_1)}{(x-r_1)(x-r_2)} = \frac{(A+B)x-(Ar_2+Br_1)}{(x-r_1)(x-r_2)}$$

como não há termo de x no numerador $A + B = 0 \Rightarrow B = -A$, então

$$\frac{1}{a(x-r_1)(x-r_2)} = -\frac{A(r_2-r_1)}{(x-r_1)(x-r_2)}$$

$$-A\underbrace{(r_2-r_1)}_{=\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{a} \Rightarrow A = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left\{\int \frac{dx}{x-r_1} - \int \frac{dx}{x-r_2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\ln|x-r_1| + \ln|x-r_2|\right) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln\left|\frac{x-r_1}{x-r_2}\right|$$