Resoluções

Jefter Santiago Mares

20 de fevereiro de 2022

Exercicio 5.2(b)

Discuta e resolva os sistemas lineares em função do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + y - z = 2 - a \\ x + ay - z = -a \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + y - z = 2 - a \\ x + ay - z = -a \end{cases} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \begin{cases} x + y - az = 0 \\ y - ay + a^2 z - z = 2 - a \\ -y + ay + az - z = -a \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ temos

$$a^2 z + az - 2z = 2 - 2a \Rightarrow z(a^2 + a - 2) = 2(1 - a) \Rightarrow z = \frac{2(1-a)}{a^2 + a - 2}$$

Fatorando o denominador podemos escrever $a^2 + a - 2 = (a-1)(a+2)$ e como queremos simplificar a fração, façamos $(a - 1) = -(1 - a)$, então

$$z = \frac{2\cancel{(1-a)}}{-\cancel{(1-a)}(a+2)} \Rightarrow \boxed{z = \frac{-2}{a+2}}$$

O sistema fica

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ y - ay + a^2 z - z = 2 - a \\ z = \frac{-2}{a+2} \end{cases}$$

Resolvendo para y: $y - ay + az - z = 2 - a \Rightarrow y(1-a) + z(a^2 - 1) = 2 - a$

$$y = \frac{(2-a) - z(a^2-1)}{1-a} = \frac{(2-a) + \frac{2}{2+a}(a^2-1)}{1-a} = \frac{\frac{(2-a)(a+2)+2(a^2-1)}{a+2}}{1-a} \Rightarrow \boxed{z = \frac{a^2+2}{(a+2)(1-a)}}$$

Com isso podemos resolver para x usando a equação da L_1: $x + y - az = 0 = az - y$

$$x = \frac{-2a}{a+2} - \frac{a^2+2}{(a+2)(1-a)} = \frac{-2a(1-a)-(a^2+2)}{(a+2)(1-a)} = \frac{-2a+2a^2-a^2-2}{(a+2)(1-a)} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a^2-2a-2}{(a+2)(1-a)}}$$

Assim, temos a solução do sistema em função do parâmetro a .

$$S = \left\{ \left(\frac{a^2-2a-2}{(a+2)(1-a)}, \frac{a^2+2}{(a+2)(1-a)}, \frac{-2}{a+2} \right) : a \in \mathbb{R} | a \neq 1 \text{ e } a \neq -2 \right\}$$

O sistema é possível e indeterminado para $\forall a \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq 1$ e $a \neq -2$

Checando se a solução é válida

- Com $a = 1$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y - z = 1 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{ Sistema incompátivel.}$$

Logo, $a = 1$ torna o sistema incompátivel.

- Com $a = -2$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -2x + y - z = 4 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \begin{cases} x + y + 2z0 \\ 3y - 3z = 4 \\ -3y - 3z = 0 \end{cases}$$

Assim temos $y = -z$ e substituindo na L_2 encontramos $z = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ e pela L_1 temos $x = -\frac{8}{3}$, com esses resultados e considerando que $a = -2$ podemos checar essa equivalência fazendo

$$x + y - az = 0 \Rightarrow x + y = az \Rightarrow a = \frac{x+y}{z}$$

$$-2 \overset{?}{=} \frac{-\frac{8}{3} + \frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}}$$

$$-2 \neq 3$$

Portanto, $a = -2$ torna o sistema incompátivel.

Checando se a solução é válida

Pelo teorema de Cramer sabemos que os valores de a que tornam o determinante $D = 0$ nos fornece as soluções nas quais o sistema é **impossível** ou **indeterminado**. Fazendo o calculo do determinante $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = (-1 - 1 - a^3) - (-a - a - a) = -2 - a^3 + 3a$ Multiplicando a $-a^3 + 3a - 2 = 0$ por -1 temos $a^3 - 3a + 2 = 0$ e fatorando podemos escrever a equação como

$$(a-1)^2 \cdot (a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

Ou seja, com esses valores de a o sistema é impossível, como esperado.

- **OBS**: Não tenho certeza se esse é um bom método de checar a solução (ou se minha solução está correta), então gostaria que esse tipo de prova fosse abordado em alguma aula/monitoria.

Exercicio 7.6

Mostre que o conjunto $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ com as seguintes operações

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 3, y_1 + y_2)$$

$$\alpha \odot (x, y) = (\alpha x + 3(\alpha - 1), \alpha y)$$

é um espaço vetorial real.

Resolução

$v, w, z \in V, v = (x_1, y_1), w = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

EV1: $v + (w + z) = (v + w) + z$

$$v + (w + z) = (x_1, y_1) \oplus [(x_2, y_2) \oplus (x_3, y_3)]\,(x_1, y_1) \oplus (x_2 + x_3 + 3, y_2 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3 + 3, y_1 + y_2 + y_3)$$

$$(v + w) + z = [(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)] \oplus (x_3, y_3) = (x_1 + x_3 + 3, y_1 + y_3) \oplus (x_3, y_3) = (x_1 + x_2 + x_3 + 3, y_1 + y_2 + y_3)$$

$$\Rightarrow v + (w + z) = (v + w) + z$$

EV2: $v + w = w + v$

$$v + w = (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 3, y_1 + y_2)$$

$$w + v = (x_2, y_2) \oplus (x_1, y_1) = (x_2 + x_1 + 3, y_2 + y_1)$$

Como estamos trabalhando com números reais, segue que $v + w = w + v$, a ordem não importa.

EV3: $v + 0 = v$

Definimos o zero como $0_V = (a, b)/(x, y) \oplus 0_v = (a, b)$

$$(x + a + 3, y + b) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} x + a + 3 = x \\ y + b = y \end{cases}$$

Desse sistema temos que $a = -3$ e $b = 0$, portanto, definimos o zero como $O_V = (-3, 0)$

EV4: $v + (-v) = 0$

$$v + (-v) = 0_V$$

Chamamos $-(x, y) = (a, b)$

$$(x, y) \oplus (a, b) = 0_V \Rightarrow (x + a + 3, y + b) = (-3, 0)$$

$$\begin{cases} x + a + 3 = -3 \\ y + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} x = -6 - a \\ y = -b \end{array}$$

$$-(x,y) = (-6-x,-y)$$

$$(x,y) \oplus (-6-x,-y) \stackrel{?}{=} (-3,0)$$
$$(x+(-6-x)+3, y+(-y)) \stackrel{?}{=} (-3,0)$$
$$(-3,0) = (-3,0)$$

EV5: $\alpha(\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$

$$\alpha \odot [\beta \odot (x_1,y_1)] = \alpha \odot \big(\beta x + 3(\beta-1), \beta y\ \big) = \big(\alpha\beta x + 3(\alpha\beta - 1), \alpha\beta y\ \big)$$
$$(\alpha\beta) \odot (x,y) = \big(\alpha\beta x + 3(\alpha\beta-1), \alpha\beta y\ \big)$$

EV6: $(\alpha+\beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$

- Primeiro fazendo a parte esquerda da equação.

$$(\alpha+\beta) \odot (x,y) = \big((\alpha+\beta)x + 3[(\alpha+\beta)-1], (\alpha+\beta)y\ \big)$$

- Agora a parte direita.

$$\alpha \odot v + \beta \odot v = (\alpha x + 3(\alpha-1), \alpha y) \oplus (\beta x + 3(\beta-1), \beta y)$$
$$\alpha \odot v + \beta \odot v = (x(\alpha+\beta) + 3 \cdot \underbrace{[(\alpha-1)+(\beta-1)]}_{\alpha+\beta-2} + 3, (\alpha+\beta)y)$$
$$\alpha \odot v + \beta \odot v = \big(x(\alpha+\beta) + \underbrace{3(\alpha+\beta-2)+3}_{3\alpha+3\beta-3}, (\alpha+\beta)y\ \big)$$
$$\alpha \odot v + \beta \odot v = \big(x(\alpha+\beta) + 3\left[(\alpha+\beta)-1\right], (\alpha+\beta)y\ \big)$$

Por fim, temos os dois lados são equivalentes, então

$$(\alpha+\beta)v = \alpha \odot v + \beta \odot v$$

EV7: $\alpha(v+w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$

- Primeiro fazendo a operação do lado esquerdo da equação.

$$\alpha \odot [(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2)] = \alpha \odot (x_1+x_2+3, y_1+y_2)$$
$$\alpha \odot [(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2)] = \left[\alpha x_1 + \alpha x_2 + \underbrace{3+3(\alpha-1)}_{3\alpha}, \alpha y_1 + \alpha y_2\right] = [\alpha(x_1+x_2+3), \alpha(y_1+y_2)]$$

- O lado direito.

$$\alpha \odot (x_1,y_1) \oplus \alpha \odot (x_2,y_2) = (\alpha x_1 + 3(\alpha-1), \alpha y_1) \oplus (\alpha x_2 + 3(\alpha-1), \alpha y_2)$$
$$= [\alpha x_1 + 3(\alpha-1) + \alpha x_2 + 3, \alpha y_1 + \alpha y_2] = (\alpha(x_1+x_2) + 3\alpha - 3 + 3, \alpha(x_1+x_2))$$
$$\alpha \odot (x_1,y_1) \oplus \alpha \odot (x_2,y_2) = [\alpha(x_1+x_2+3), \alpha(y_1+y_2)]$$

Com isso, temos que

$$\alpha\left[(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2)\right] = \alpha \odot (x_1,y_1) \oplus \alpha \odot (x_2,y_2)$$

EV8: $1 \cdot v = v$

$$1 \odot (x, y) = (x + 3(1 - 1), 1y)$$
$$1 \odot (x, y) = (x, y)$$

Portanto $(V, \oplus, -, \odot, 0_V)$ é um espaço vetorial com e com zero definido como $0_V = (-3, 0)$.

Exercicio 8.2

Seja $V = M_{2x2}(\mathbb{R})$. Considere o conjunto

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : x - y - z = 0 \right\}$$

. Mostre que W é um subespaço e determine um conjunto gerador de W.

- $0 \in W$

  Seja $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$, $0 - 0 - 0 = 0 \Rightarrow 0 \in W$

- Se $v, w \in W$, então $v + w \in W$

  Seja $v = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix}$ e $u = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{pmatrix}$, então

  $$v + u = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & t_1 + t_2 \end{pmatrix}$$

  Sabemos que $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = 0$, então

  $$\underbrace{x_1 - y_1 - z_1}_{=0} + \underbrace{x_2 - y_2 - z_2}_{=0} = 0$$

- Se $u \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\lambda \cdot u \in W$

  $$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda z & \lambda t \end{pmatrix}$$

  e $\lambda x - \lambda y - \lambda z = 0 \Rightarrow \lambda(\underbrace{x - y - z}_{=0}) = 0$ Portanto $\lambda u \in W$.

  Como W satisfaz todas as condições, W é subespaço de U .

  Note que t é um termo independente de W na definição da operação fornecida.

$\forall u \in W$; v_1, v_2, v_3, v_4 geram W se

$$u = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 + \alpha_4 \cdot v_4$$

$$x - y - z = 0 \Rightarrow x = y + z$$

Supondo $z = -x$ e substituindo na original temos

$$x - y + x = 0 \Rightarrow 2x - y = 0 \Rightarrow 2(y + z) - y = 0$$

$$2y + 2z - y = 0 \Rightarrow y = 2z$$

Podemos escrever a matriz como

$$\begin{pmatrix} y + z & 2z \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 2z \\ z & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = U$, então $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ é um conjunto gerador de U para o caso de $x = -z$ e $\forall t \in \mathbb{R}$.

Exercicio 12.3

Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno e $u, v \in V$. Prove a afirmação:

- $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$ se e somente se $\langle u, v \rangle = 0$

Escrevendo o termo $||u + v||^2$ como

$$||u + v||^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2 \cdot \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = ||u||^2 + 2 \cdot \langle u, v \rangle + ||v||^2$$

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + 2 \cdot ||u|| \cdot ||v|| + ||v||^2$$

Agora podemos escrever a equação $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$ usando a relação encontrada acima, então

$$||u||^2 + 2 \cdot ||u|| \cdot ||v|| + ||v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

Subtraindo $||u||^2$ e $||v||^2$ de ambos os lados temos $2 \cdot ||u|| \cdot ||v|| = 0$ logo

$$2 \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow \boxed{\langle u, v \rangle = 0}$$