## 1.4 A fórmula de Euler

A representação de um número complexo $z$ usando seu módulo $|z| = \rho$ e argumento $\arg(z) = \theta$ pode ainda ser bastante melhorada. Até agora, vimos que em termos dessas quantidades temos $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. No entanto, vamos analisar melhor o fator $f(\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$ que aparece multiplicando o módulo de $z$. Pela Eq. (1.4), vemos que

$$f(\theta_1)f(\theta_2) = f(\theta_1 + \theta_2) \tag{1.6}$$

para quaisquer $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Essa propriedade atesta nossa interpretação de que um número com módulo 1 e argumento $\theta$ — como o próprio $f(\theta)$ — promove uma rotação de um ângulo $\theta$ no plano complexo (e, portanto, a aplicação sucessiva de $f(\theta_1)$ e $f(\theta_2)$ promove uma rotação de $\theta_1 + \theta_2$). Por outro lado, é um resultado bastante conhecido que as únicas funções que satisfazem a propriedade expressa na Eq. (1.6) são as funções exponenciais: $f(\theta) = c^\theta$, onde $c$ seria uma constante arbitrária até este ponto. A determinação de $c$ poderia ser feita de diferentes maneiras, mas aqui vamos optar por uma abordagem distinta: e se não soubéssemos que apenas as funções exponenciais satisfazem a Eq. (1.6)? Como avançaríamos?

• **Exercício:** Mostre que a Eq. (1.4) de fato leva à Eq. (1.6).

Vamos analisar mais atentamente a combinação de seno e cosseno que aparece em $f(\theta)$. As funções $\sin\theta$ e $\cos\theta$ possuem as seguintes expansões em termos de séries de Taylor (em torno de $\theta = 0$):

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + ... + (-1)^j \frac{\theta^{2j+1}}{(2j+1)!} + ..., & (1.7) \\ \cos\theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + ... + (-1)^j \frac{\theta^{2j}}{(2j)!} + ..., & (1.8) \end{aligned}$$

de modo que, combinando em $f(\theta)$, temos:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + ... + (-1)^j \frac{\theta^{2j}}{(2j)!} + i(-1)^j \frac{\theta^{2j+1}}{(2j+1)!} + ... \\ &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + ... + \frac{(i\theta)^{2j}}{(2j)!} + \frac{(i\theta)^{2j+1}}{(2j+1)!} + ... \\ &= \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2j}}{(2j)!} + \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + ...\right]\Bigg|_{x=i\theta}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

onde na passagem da primeira linha para a segunda utilizamos a Eq. (1.1). No entanto, a expressão entre colchetes na última linha é exatamente a série de Taylor da função exponencial[6], $e^x$. Assim, temos que $f(\theta) = e^{i\theta}$, o que finalmente nos leva à *fórmula de Euler*:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{1.10}$$

- **Exercício:** Mostre que, de fato, a expressão entre colchetes na Eq. (1.9) corresponde à expansão em série de Taylor da função exponencial $e^x$ (pelo menos quando $x \in \mathbb{R}$).

Agora sim temos uma representação polar bastante compacta para os números complexos[7]:

$$z = a + ib = \rho e^{i\theta}, \tag{1.11}$$

onde $a$, $b$, $\rho$ e $\theta$ são relacionados pelas Eqs. (1.2) e (1.3). Fica evidente, dessa expressão, que, enquanto a representação cartesiana é mais útil para lidar com soma e subtração de números complexos, a representação polar é muito mais útil para multiplicação e divisão (e, consequentemente, potenciação).

- **Exercício:** Represente os seguintes números complexos na forma polar e, em seguida, calcule a raiz quadrada de cada um deles, expressando o resultado na representação cartesiana:

  (a) $1 + i$;
  (b) $5 - 5i$;
  (c) $-\sqrt{3} + i$;
  (d) $2 - 2\sqrt{3}\, i$.

- **Exercício:** Use a fórmula de Euler para mostrar que $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ (*fórmula de De Moivre*). (Exercício extra opcional: Tente demonstrar a mesma expressão sem fazer uso da fórmula de Euler – usando apenas identidades trigonométricas e indução – e compare os níveis de dificuldade de ambas as demonstrações.)

A fórmula de Euler abre caminho para calcularmos a *potenciação* de um número complexo por outro: $z^w$, com $z, w \in \mathbb{C}$ (e $z \neq 0$). Representando a base $z$ na forma polar ($z = |z|e^{i\theta}$) e o expoente $w$ na forma cartesiana ($w = a + ib$), temos:

$$\begin{aligned} z^w &= \left(|z|e^{i\theta}\right)^{a+ib} = |z|^{a+ib} e^{i\theta a - \theta b} = e^{(a+ib)\ln|z| + i\theta a - \theta b} \\ &= e^{(a\ln|z| - b\theta)}\, e^{i(a\theta + b\ln|z|)}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

[6]Na verdade, como aqui o argumento $x$ da função exponencial *não* é um número real, a expressão entre colchetes deve ser tomada como a *definição* da função $e^x$ para "objetos" $x$ mais gerais. De fato, essa definição de $e^x$, em termos de série, é válida para qualquer "objeto" $x$ que possa ser multiplicado por ele mesmo um número arbitrário de vezes — para se obter $x^n$ — e combinado linearmente — para se construir a série. É assim que se define, por exemplo, a exponenciação de uma matriz quadrada $\mathbf{A}$, $e^{\mathbf{A}}$.

[7]Em todas essas expressões é essencial que $\theta$ seja expresso em radianos.

Note que o resultado final da Eq. (1.12) já está expresso na forma polar, de onde podemos ler diretamente que

$$|z^w| = e^{[\mathrm{Re}(w)\ln|z| - \mathrm{Im}(w)\arg(z)]}, \quad \arg(z^w) = \mathrm{Re}(w)\arg(z) + \mathrm{Im}(w)\ln|z|. \tag{1.13}$$

Aqui podemos apreciar, através de um exemplo concreto, a primeira consequência do fato de a representação polar de um número complexo não ser única [como discutido logo abaixo das Eqs. (1.2) e (1.3)]:

- Exemplo: Calcularemos os possíveis valores de $1^i$. Primeiramente, notemos que na forma polar o número 1 pode ser representado pelo módulo 1 e argumento $2n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$: $1 = e^{i2n\pi}$. Já o número $i$ já se encontra na representação cartesiana (pois $i = 0 + 1 \cdot i$). Então:

$$1^i = (e^{i2n\pi})^i = e^{-2n\pi} = \ldots, e^{4\pi}, e^{2\pi}, 1, e^{-2\pi}, e^{-4\pi}, \ldots \tag{1.14}$$

  Vemos, então, que embora para qualquer valor de $n \in \mathbb{Z}$, $e^{i2n\pi}$ represente o mesmo número 1, o resultado de $1^i$ claramente é diferente para diferentes valores de $n$, sendo que a igualdade $1^i = 1$ é apenas uma das infinitas possibilidades (o caso $n = 0$, também muitas vezes chamado de *ramo principal*, como veremos no próximo capítulo).

- **Exercício:** Qual a condição sobre o expoente $\alpha \in \mathbb{C}$ para que $1^\alpha$ tenha como *único* resultado 1?

- **Exercício:** Calcule todos os possíveis valores de $1^{1/3}$. E também de $i^i$. Localize esses valores no plano complexo.

## 1.5 Tão "reais" quanto os *reais*?

Embora tenhamos defendido anteriormente que, do ponto de vista lógico, os números complexos não são mais "artificiais" ou "estranhos" que outros números com os quais estamos muito mais acostumados, é incontestável que as pessoas em geral têm muito menos intuição a respeito dos números complexos do que dos números reais. Qual a razão disso? Há algo profundo por trás disso?

O fato é que aprendemos, desde cedo, a associar números reais (mais comumente, racionais) a vários objetos e conceitos presentes em nosso quotidiano. Todos sabem que um saldo bancário negativo significa que um depósito teria que ser efetuado para "zerar" o débito, ou que ao se pedir meio "quilo" de carne no açougue deseja-se uma quantidade que se fosse duplicada teria o mesmo peso que o padrão de um "quilo". Em suma, estamos acostumados a "ver" números racionais (a partir dos quais os reais são obtidos por uma "idealização natural") por toda parte. Por outro lado, os números complexos não parecem se refletir de maneira tão direta no mundo a nossa volta. Embora possamos utilizá-los como uma ferramenta bastante conveniente em muitas situações (algumas das quais são abordadas em disciplinas como *Física III*, *Vibrações e ondas*, *Eletromagnetismo*, ...), a Natureza em nível "macroscópico" (e as leis que a regem) parecem dispensar os números complexos. Nesse sentido, então, talvez pudéssemos considerar que os números complexos são mesmo menos "reais" que os números reais. Ou não?

Ao contrário do que ocorre na escala "macroscópica", a descrição da Natureza em seu nível mais fundamental e íntimo (e as leis que entendemos regê-la) parece implorar pelo uso de números complexos. De fato, se tentássemos excluir os números complexos da formulação da *Mecânica Quântica* (MQ) ou de sua generalização relativística, a chamada *Teoria Quântica de Campos* (TQC), forçando o uso apenas de números reais[8], o resultado seria um formalismo tão desajeitado que alguns princípios fundamentais ficariam completamente escondidos debaixo de equações muito mais intrincadas que no formalismo complexo usual. Fazendo uma analogia, os números complexos desempenham na MQ e TQC um papel semelhante ao que os *vetores* desempenham, por exemplo, no eletromagnetismo: as equações de Maxwell podem ser formuladas sem o emprego de cálculo vetorial (e, de fato, originalmente o foram pelo próprio Maxwell), mas as equações resultantes são tão mais intrincadas que a "física" por trás delas fica obscurecida. Foi a "simplicidade" das equações de Maxwell na forma vetorial que fez com que se atribuisse uma "realidade física" aos vetores campo elétrico e campo magnético. Aplicando esse mesmo critério para a MQ somos levados a concluir que, pelo menos num nível mais fundamental da Natureza, os números complexos são tão "reais" quanto os números reais.

Mas fica então uma questão: por que os números complexos, que parecem impregnar a descrição da Natureza em seu nível mais fundamental, não sobrevivem de maneira tão clara no nível "macroscópico" clássico? Essa é uma pergunta que *talvez* mereça uma resposta.

## • Exercícios

① Localize no plano complexo as duas raízes do polinômio $x^2-2x+2=0$. O que uma raiz é da outra? Isso era de se esperar? Por que?

② Mostre que a equação $x^n = 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$, possui $n$ soluções complexas distintas. Localize essas soluções no plano complexo. (Sugestão: use a fórmula de Euler.)

③ Mostre que $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ e $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

[8]Isso obviamente é possível dado que sempre podemos expressar um número complexo através de dois números reais usando a formulação axiomática de Hamilton.

④ Mostre que se $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$ e $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$ são dois vetores no plano representados da maneira usual pelos números complexos $z_1$ e $z_2$, respectivamente, então o produto escalar, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$, e a componente do produto vetorial perpendicular ao plano, $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)_\perp$, são dados por: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)$ e $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)_\perp = -\mathrm{Im}(z_1 \bar{z}_2)$.

⑤ Argumente geometricamente em favor das desigualdades $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ e $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$, válidas para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Em que caso(s) a *igualdade* é válida? (Lembre-se da Fig. 1.2.)

⑥ Construa uma representação análoga à Fig. 1.4 para a divisão de números complexos.

⑦ Construa uma representação geométrica para determinar a potência $z^n$ a partir de $z$ (com $n \in \mathbb{Z}$).

⑧ Mostre que a equação $|z - z_0| = r$, com $z_0$ uma constante complexa e $r$ uma constante real positiva, determina uma circunferência centrada em $z_0$ com raio $r$. Se quisermos incluir também os pontos de dentro da circunferência (*disco* centrado em $z_0$ de raio $r$), como essa equação deve ser modificada?

⑨ Dados dois pontos no plano complexo, descritos pelos números $z_1$ e $z_2$, interprete o significado geométrico do conjunto de pontos $z$ que satisfaz $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$, onde $a$ é uma constante real positiva (com $2a > |z_2 - z_1|$). (Visualize esse conjunto no plano complexo.) Em seguida, tomando $z_1 = 0$ e $z_2 = 2fe^{i\gamma}$ ($f > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ sendo constantes), obtenha o módulo de $z$ ($r = |z|$) como função de seu argumento $\theta$: $r(\theta)$. (Obs.: Lembrem-se dessa expressão para $r(\theta)$ no futuro, pois ela é muito útil quando se estuda trajetórias de partículas sob ação de um potencial central atrativo que decai com $1/r$ — como em gravidade e eletrostática.)