Álgebra Linear EAD - 2022
Prova 2 18-02-2022

Kaique Matias de Andrade Roberto
Ana Luiza Tenório

17 de fevereiro de 2022

1 Transformações Lineares

Escolha até 3 dentre os 4 exercícios abaixo. NÃO resolva mais do que 4, pois só serão corrigidos os 3 primeiros.

Exercício 1 (1,5 ponto)**.** Seja V um espaço vetorial e sejam $S, T \in L(V)$. Mostre que

$$T(\text{Nuc}(S \circ T)) = \text{Nuc}(S) \cap \text{Im}(T).$$

Exercício 2 (2,0 ponto)**.** Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e bases B, C de $\mathbb{R}^3$ tais que $A = {}_C[T]_B$ para a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Em seguida, encontre uma base para $\text{Nuc}(T)$ e $\text{Im}(T)$.

Exercício 3 (1,5 ponto)**.** Seja V um espaço vetorial e T um operador linear em V tal que $T^2 = I$. Sejam $W = \{v \in V : T(v) = v\}$ e $U = \{v \in V : T(v) = -v\}$. Prove que $T = U \oplus W$.

Exercício 4 (2,0 pontos)**.** Sejam U e V espaços vetoriais e $T : U \to V$ uma transformação linear.

a - (1,0 ponto) Prove que T é injetora se e somente se, T leva todo subconjunto linearmente independente de U em um subconjunto linearmente independente de V.

b - (1,0 ponto) Prove que se o subconjunto $\{T(u_1), ..., T(u_n)\}$ de V for linearmente independente, então $\{u_1, ..., u_n\}$ é um subconjunto linearmente independente de U.

2 Produto Interno

Escolha até 3 dentre os 5 exercícios abaixo. NÃO resolva mais do que 5, pois só serão corrigidos os 3 primeiros.

Exercício 5 (1,0 ponto)**.** Seja V um espaço euclidiano. Mostre que vale a **lei do paralelogramo**:

$$||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2 \text{ para todos } u, v \in V.$$

Exercício 6 (1,5 ponto)**.** Para $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$, defina

$$\langle p, q \rangle := p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

1. $(0,5$ ponto) Mostre que $\langle p, q \rangle$ é um produto interno em $\mathbb{R}_2[x]$.
2. $(1,0$ ponto) Encontre uma base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$ com relação a este produto interno.

Exercício 7 $(2,5$ ponto)**.** Considere os subespaços $V, W \subseteq M_2(\mathbb{R})$ definidos por

$$V := \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^t = A\} \text{ e } W := \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^t = -A\}.$$

Considere em $M_2(\mathbb{R})$ o produto interno

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^t).$$

a - $(0,5$ ponto) Mostre que $V^\perp = W$.

b - $(0,75$ ponto) Encontre uma base ortogonal de V.

c - $(0,75$ ponto) Encontre uma base ortogonal de W.

d - $(0,5$ ponto) Para a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

calcule $\operatorname{proj}_V(A)$ e $\operatorname{proj}_W(A)$.

Exercício 8 $(2,0$ pontos)**.** Considere os subespaços $V, W \subseteq M_2(\mathbb{R})$ definidos por

$$V := \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^t = A\} \text{ e } W := \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^t = -A\}.$$

Considere em $M_2(\mathbb{R})$ o produto interno

$$\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

a - $(0,5$ ponto) É verdade que $V^\perp = W$?

b - $(1,0$ ponto) Encontre uma base ortogonal de V.

c - $(0,5$ ponto) Para a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

calcule $\operatorname{proj}_V(A)$.

Exercício 9 $(2,0$ pontos)**.** Use o processo de Gram-Schimidt para encontrar uma base ortogonal para o subespaço $W \subseteq \mathbb{R}^4$ dado por

$$W = \langle (1,0,0,1), (1,1,0,0), (1,2,0,1) \rangle$$

Na sequência, calcule $proj_W(2,-1,-1,0)$.

3 Diagonalização

Escolha até 3 dentre os 5 exercícios abaixo. NÃO resolva mais do que 5, pois só serão corrigidos os 3 primeiros.

Exercício 10 $(1,5$ ponto)**.** Seja $p(x) \in R[x]$, digamos $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Definimos a **derivada** de p, notação $D(p)$, como sendo o polinômio

$$D(p)(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_3x^2 + a_2x + a_1.$$

Por exemplo, para $p(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $D(p)(x) = 6x - 2$.

a - (0,5 ponto) Considere a função $D : R_n[x] \to R_n[x]$ definida por $D(p(x)) = D(p)(x)$. Mostre que D é uma transformação linear.

b - (0,5 ponto) Considerando $D : R_4[x] \to R_4[x]$, encontre uma base para $\mathrm{Nuc}(D)$ e $\mathrm{Im}(D)$.

c - (0,5 ponto) A transformação linear $D : R_4[x] \to R_4[x]$ é diagonalizável?

Exercício 11 (2,0 pontos)**.** Seja $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ definido por $T(A) = A^t$.

1. (0,5 ponto) Mostre que T é linear.
2. (0,5 ponto) Encontre uma base para $\mathrm{Nuc}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.
3. (0,5 ponto) Diagonalize T ou mostre que T não é diagonalizável.
4. (0,5 ponto) Encontre uma decomposição ortogonal para T ou mostre que T não é auto-adjunto.

Exercício 12 (2,0 pontos)**.** Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para $n \in \mathbb{Z}$, encontre uma fórmula para A^n.

Exercício 13 (2,0 pontos)**.** Decida se cada uma das seguintes matrizes é diagonalizável. Caso afirmativo, realize a diagonalização.

a - $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b - $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Exercício 14 (2,0 pontos)**.** Considere

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Encontre uma matriz P tal que PAP^t é diagonal.