Fator integrante para EDOs não exatas

Adonai Hilario

Maio, 2022

1 Revisão do que são EDOs exatas e não exatas

Suponha que temos uma EDO que pode ser escrita na forma

$$M(x,y)+N(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0, \tag{1.1}$$

onde $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são funções conhecidas, e $y\equiv y(x)$ é a função desconhecida que satisfaz tal EDO. Dizemos que esta EDO é exata se e somente se existir uma função $\psi(x,y)$ tal que a EDO possa ser escrita na forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x,y)=0. \tag{1.2}$$

O lado esquerdo desta igualdade pode ser escrito explicitamente como

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0. \tag{1.3}$$

Comparando este resultado com a Eq. (1.1) vemos que a função $\psi(x,y)$ é tal que

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=N(x,y). \tag{1.4}$$

Porém é necessário que uma condição seja satisfeita. Como devemos ter

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}, \tag{1.5}$$

então é necessário que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.6}$$

Assim, uma EDO escrita na forma da Eq. (1.1) é exata se e somente se a condição dada pela Eq. (1.6) é satisfeita.

2 Quando a EDO é exata

Se a condição dada pela Eq. (1.6) já é naturalmente satisfeita pela EDO, escrita na forma da Eq. (1.1), então basta calcularmos $\psi(x,y)$ diretamente das relações (1.4). Tomando a relação com $M(x,y)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) \quad \Longrightarrow \quad \psi(x,y) &= \int \mathrm{d}x\, M(x,y) \\ &= m(x,y) + f(y), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $m(x,y)$ é uma primitiva de $M(x,y)$ com respeito a x, isto é

$$\frac{\partial m}{\partial x} = M(x,y). \tag{2.2}$$

Para determinar $f(y)$ basta usarmos a outra relação em (1.4), ou seja

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial m}{\partial y} + f'(y) = N(x,y) \quad \Longrightarrow \quad f(y) = \int \mathrm{d}y \left[N(x,y) - \frac{\partial m}{\partial y} \right]. \tag{2.3}$$

Note que, embora dentro da integral apareça uma dependência em x, o resultado $f(y)$ depende apenas de y, ou seja, a dependência em x de $\partial m/\partial y$ deve se anular naturalmente com a dependência em x de $N(x,y)$. Uma vez determinado $f(y)$, está determinado $\psi(x,y)$, e usando a Eq. (1.2), temos que a solução implícita para a EDO será dada por

$$\psi(x,y) = c, \tag{2.4}$$

onde c é uma constante.

3 Quando a EDO não é exata

Se a condição (1.6) não é satisfeita pela EDO então tomamos um fator integrante $\mu(x,y)$ (a ser determinado) tal que, quando multiplicada pela EDO não exata, nos dá uma EDO exata. Na prática, o que estamos fazendo é tomando

$$\widetilde{M}(x,y) \coloneqq \mu(x,y) M(x,y) \quad \text{e} \quad \widetilde{N}(x,y) \coloneqq \mu(x,y) N(x,y), \tag{3.1}$$

tal que

$$\widetilde{M}(x,y) + \widetilde{N}(x,y) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{3.2}$$

seja uma EDO exata.

Determinar o fator integrante significa resolver a seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widetilde{M}}{\partial y}=\frac{\partial \widetilde{N}}{\partial x} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\partial \mu}{\partial y}M+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial \mu}{\partial x}N+\mu\frac{\partial N}{\partial x}\\ &\Longrightarrow \quad \mu(x,y)\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{\partial \mu}{\partial x}N(x,y)-\frac{\partial \mu}{\partial y}M(x,y).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Não há um "algoritmo geral" para se calcular $\mu(x,y)$ em qualquer situação, e geralmente a resolução envolve fazermos algumas suposições sobre a forma de $\mu(x,y)$ e testarmos para ver se funciona.

Um exemplo seria supormos que o fator integrante é uma função apenas de x. Se isso for verdade então teremos $\partial\mu/\partial y \equiv 0$ e $\partial\mu/\partial x \equiv \mathrm{d}\mu/\mathrm{d}x$, e a equação para μ, dada pela Eq. (3.3), se torna

$$\mu(x)\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}N(x,y) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mu'}{\mu}=\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]. \tag{3.4}$$

Então, se verificarmos que o lado direito da igualdade é uma função que depende apenas de x, isso significa que o fator integrante é de fato $\mu \equiv \mu(x)$, e será dado por

$$\mu(x)=\exp\left\{\int \mathrm{d}x\,\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]\right\}, \tag{3.5}$$

porém este nem sempre é o caso.

Claro, uma vez obtido $\mu(x,y)$, basta usarmos o método descrito na seção anterior para a Eq. (3.2). A solução será a mesma para a EDO original já que tudo o que fazemos é multiplicar por $\mu(x,y)$ de ambos os lados (o que não muda nada na prática). Vejamos agora alguns exemplos de obtenção do fator integrante para EDOs não exatas:

3.1 Exemplo I (inspirado no exemplo 4 do Boyce)

Vejamos a EDO

$$(3x^4y+x^3y^2)+(x^5+x^4y)y'=0. \tag{3.6}$$

Temos $M(x,y)=3x^4y+x^3y^2$ e $N(x,y)=x^5+x^4y$ e é direto verificarmos que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^4+2x^3y \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=5x^4+4x^3y \tag{3.7}$$

e portanto a EDO não é exata. Por sorte, se calcularmos a quantidade que aparece do lado direito da igualdade na Eq. (3.4) vemos que

$$\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{3x^4+2x^3y-5x^4-4x^3y}{x^5+x^4y}=\frac{-2x^3(x+y)}{x^4(x+y)}=-\frac{2}{x}. \tag{3.8}$$

Portanto o fator integrante é uma função apenas de x e sua solução é dada pela Eq. (3.5), ou seja

$$\mu(x) = \exp\left\{-2\int \mathrm{d}x\,\frac{1}{x}\right\} = \exp\{-2\ln(x)\} = \exp\{\ln(x^{-2})\} = \frac{1}{x^2}. \tag{3.9}$$

E de fato, multiplicando a Eq.(3.6) por este fator integrante obtemos

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0, \tag{3.10}$$

e é direto verificarmos que agora temos

$$\frac{\partial \widetilde{M}}{\partial y} = 3x^2 + 2xy \quad \text{e} \quad \frac{\partial \widetilde{N}}{\partial x} = 3x^2 + 2xy \tag{3.11}$$

se tratando portanto, de uma EDO exata.

3.2 Exemplo II (inspirado no ex. 19 do Boyce)

Vejamos a EDO

$$x^2y^3 + x(1 + y^2)y' = 0. \tag{3.12}$$

Temos que $M(x,y) = x^2y^3$ e $N(x,y) = x(1+y^2)$. Verificando as derivadas parciais de ambas as funções vemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + y^2, \tag{3.13}$$

e portanto a EDO não é exata. Vemos também que

$$\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{3x^2y^2 - (1+y^2)}{1+y^2}, \tag{3.14}$$

e portanto o fator integrante que torna esta EDO em uma exata não é uma função apenas de x. Parece que estamos com azar... Vejamos então como fica a equação diferencial para o $\mu(x,y)$, isto é, a Eq. (3.3):

$$\mu(x,y)\left[3x^2y^2 - y^2 - 1\right] = \frac{\partial \mu}{\partial x}(x + xy^2) - \frac{\partial \mu}{\partial y}x^2y^3. \tag{3.15}$$

Veja que se multiplicássemos o termo proporcional a $\partial\mu/\partial x$ por y^3 e o termo proporcional a $\partial\mu/\partial y$ por $3xy^2$ e de alguma forma os colocássemos multiplicando um termo em comum teríamos algo na forma

$$xy^3 + xy^5 - 3x^3y^5 = xy^3\left[1 + y^2 - 3x^2y^2\right], \tag{3.16}$$

e o que aparece entre colchetes é precisamente o termo que aparece do lado esquerdo da Eq. (3.15) multiplicado por -1, portanto, parece ser razoável supormos que o fator integrante é uma função da quantidade $t \coloneqq xy^3$, que poderia ser fatorado de todos os termos (eu admito que isso é um pouco trapaça da minha parte pois eu já sei quanto o fator integrante deve dar... mas de qualquer forma, essa estratégia de tentar enxergar o que deve ser multiplicado em cada termo para que se tenha algo semelhante à quantidade multiplicando μ do lado esquerdo da igualdade, pode funcionar em alguns casos específicos embora não seja algo fácil de se fazer na maioria das vezes). Se isso for verdade, então

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\partial t}{\partial x} = \mu' y^3, \tag{3.17}$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\partial t}{\partial y} = \mu' 3xy^2, \tag{3.18}$$

onde estamos usando μ' para denotar $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}t$. Substituindo este *ansatz* na Eq. (3.15) resulta em

$$\begin{aligned} \mu\left[3x^2y^2 - y^2 - 1\right] &= \mu'(xy^3 + xy^5) - \mu'(3x^3y^5) \\ &= \mu'\left[-3x^3y^5 + xy^5 + xy^3\right] \\ &= -xy^3\mu'\left[3x^2y^2 - y^2 - 1\right]. \end{aligned} \tag{3.19}$$

A quantidade entre colchetes se cancela de ambos os lados e o que sobra é

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{xy^3} = -\frac{1}{t}. \tag{3.20}$$

A solução para o fator integrante é portanto

$$\ln(\mu) = -\ln(t) = \ln\left(\frac{1}{t}\right) \quad \Longrightarrow \quad \mu = \frac{1}{t} \quad \Longrightarrow \quad \mu(x,y) = \frac{1}{xy^3}. \tag{3.21}$$

E de fato, se multiplicarmos este fator integrante de ambos os lados na Eq. (3.12) a nova EDO será

$$x + \frac{(1+y^2)}{y^3}y' = 0, \tag{3.22}$$

e vemos que será não apenas uma EDO exata, mas também uma EDO separável pois pode ser reescrita na forma

$$\frac{1+y^2}{y^3}\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x. \tag{3.23}$$