Lista de Exercícios 3

① Resolva as seguintes EDOs:

(a) $u'' + \omega_0^2 u = \cos(\omega t)$ (separe em casos: $\omega^2 = \omega_0^2$ e $\omega^2 \neq \omega_0^2$);
(b) $2y'' + 3y' + y = t^2 + 3\sin t$;
(c) $y'' - 2y' - 3y = 3te^{2t}$, com $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

② Para cada EDO abaixo, proceda da seguinte maneira: (i) Procure por uma solução da EDO *homogênea* associada na forma $y_1(x) = x^\alpha$, com α sendo uma constante a ser determinada; (ii) Calcule explicitamente o wronskiano associado à EDO *homogênea* e, em seguida, fazendo uso desse resultado e do item anterior, obtenha uma outra solução $y_2(x)$ da EDO *homogênea* que seja linearmente independente em relação a $y_1(x)$; (iii) Encontre novamente $y_2(x)$ mas agora pelo método da redução de ordem (ou seja, escrevendo $y_2(x) = c(x)y_1(x)$ e determinando $c(x)$); (iv) Obtenha a solução geral da EDO *inomogênea* dada pelo método da variação dos parâmetros.

(a) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3$, $x > 0$;
(b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln x$, $x > 0$;
(c) $y'' + \frac{\ln x}{x(1+\ln x)}\, y' - \frac{(3+\ln x)}{4x^2(1+\ln x)}\, y = \frac{(1+\ln x)}{x^{3/2}\,\ln x}$, $x > 1$.

③ Para cada uma das EDOs abaixo, determine os pontos ordinários e os pontos singulares (dizendo se estes últimos são regulares ou irregulares), obtenha os índices das singularidades regulares e escreva a forma geral de duas soluções L.I. expandidas em torno de $x = 0$, calculando explicitamente os primeiros três termos não nulos de cada série.

(a) $xy'' + y' - y = 0$;
(b) $xy'' + y = 0$;
(c) $x(x-1)y'' + y = 0$.

④ Considere a seguinte EDO, conhecida como *equação de Bessel*:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

com ν sendo uma constante.

(a) Calcule os expoentes da singularidade regular em $x = 0$;

(b) Esboce a forma de duas soluções L.I. dessa EDO, separando em casos dependendo do valor de ν;

(c) Calcule as soluções para os casos $\nu = 0$, $\nu = 1/4$, $\nu = 3/2$ e $\nu = 2$ (ou seja, obtenha os valores dos parâmetros que aparecem na forma geral e a relação de recorrência que os coeficientes das séries satisfazem, explicitando os valores dos três primeiros termos não nulos de cada série).

⑤ Calcule as transformadas de Laplace $F(s) := \mathcal{L}\{f\}(s)$ das seguintes funções:

(a) $f(t) = t^n e^{at}$ ($t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$);

(b) $f(t) = u_a(t)$ ($a > 0$), onde $u_a(t)$ é a função degrau em $t = a$ (ou seja, $u_a(t) = 1$ se $t \geq a$ e $u_a(t) = 0$ se $t < a$);

(c) $f(t) = u_a(t)(t - a)^n$ ($a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e u_a é a função degrau em $t = a$);

(d) $f(t) = \chi_{[a,b)}(t)$ ($b > a > 0$), onde $\chi_{[a,b)}$ é a função característica do intervalo real $[a, b)$ (ou seja, $\chi_{[a,b)}(t) = 1$ se $t \in [a, b)$ e $\chi_{[a,b)}(t) = 0$ caso contrário; note que $\chi_{[a,b)}(t) = u_a(t) - u_b(t)$);

(e) $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n(t)$ (visualize o gráfico dessa função);

(f) $f(t) = \chi_{[a,b)}(t)/(b - a)$ ($b > a > 0$) no limite em que $b \to a$. (Essa "função limite", normalmente representada por $\delta_a(t)$ ou $\delta(t - a)$, representa uma "função" de impulso unitário em $t = a$ e é uma representação da famosa "delta de Dirac".)

Para finalizar, mostre que a relação entre $\mathcal{L}\{u_a\}(s)$ (calculada no item (b)) e $\mathcal{L}\{\delta_a\}(s)$ (calculada no item (f)) sugere a expressão formal $u'_a(t) = \delta_a(t)$ (embora nem u'_a, nem δ_a existam como funções, a rigor).

⑥ Utilizando a tabela da seção 6.2 do livro do Boyce&DiPrima (9^a ed.), obtenha a transformada de Laplace *inversa* das seguintes funções:

(a) $F(s) = e^{-2s}/(s^2 + 2s + 1)$;

(b) $F(s) = (s - 2)e^{-s}/(s^2 - 4s + 3)$;

(c) $F(s) = (2s + 1)/(4s^2 + 4s + 5)$.

⑦ Resolva, pelo método da transformada de Laplace, cada uma das EDOs dadas no exercício ①.