Nota: 10/10

Prova 2 - Resolução

Jefter Santiago

19 de fevereiro de 2022

Transformações Lineares

Questão 01

Seja V um espaço vetorial e sejam $S, T \in L(V)$. Mostre que

$$T(Nuc(S \circ T)) = Nuc(S) \cap Im(T)$$

Seja $S \in L(V)$, por definição, $Nuc(S) = \{0\}$ e $(S \circ T)(v) = S(T(v)) \Rightarrow Nuc(S) = \{v \in V : S(T(v)) = 0\}$.

Seja $T[V]$ a imagem de T , temos que $S(v) = T(v)$ se e só se $v = 0$, logo $Nuc(S) \cap T[V] = \{0\}$, então vale que $T(Nuc(S \circ T)) = Nuc(S) \cap T[V]$

Questão 02

Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ e bases $B, C \in \mathbb{R}^3$ tais que $A =_C [T]_B$ para a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Fazendo $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $C = \{u_1, u_2, u_3\}$, construímos uma matriz de transformação linear

$$T(v_1) = 1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 = 1 \cdot (a_1, b_1, c_1) + 1 \cdot (a_2, b_2, c_2) + 1 \cdot (a_3, b_3, c_3) = (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3, c_1 + c_2 + c_3)$$

$$T(v_2) = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 - 2 \cdot u_3 = (a_2, b_2, c_2) - 2 \cdot (a_3, b_3, c_3) = (a_2 - 2a_3, , b_1 - 2b_3, c_1 - 2c_3)$$

$$T(v_3) = 1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3 = (a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) + 3 \cdot (a_3, b_3, c_3) = (a_1 + a_2 + 3a_3, b_1 + b_2 + 3b_3, c_1 + c_2 + 3c_3)$$

Logo, $\forall v \in \mathbb{R}^3$ temos $v = \alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 + \gamma \cdot v_3$, onde $v = (x, y, z)$, fazendo então

$$T(x, y, z) = T(\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 + \gamma \cdot v_3) = \alpha \cdot T(v_1) + \beta \cdot T(v_2) + \gamma \cdot T(v_3)$$

$$T(x, y, z) = \alpha \cdot (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3) + \beta \cdot (a_2 - 2a_3, b_2 - 2b_3, c_2 - 2c_3) + \gamma \cdot (a_1 + a_2 + 3a_3, b_1 + b_2 + 3b_3, c_1 + c_2 + 3c_3)$$

Produto interno

Questão 5

Seja V um espaço euclidiano. Mostre que vale a **lei do paralelogramo**

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2, \forall u, v \in V$$

Primeiramente, vamos expandir os termos $||u+v||^2$ e $||u-v||^2$

- $||u+v||^2$

$$||u+v||^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$$

como $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, escrevemos

$$||u+v||^2 = \langle u, u \rangle + 2 \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$$

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + 2||u|| \cdot ||v|| + ||v||^2$$

- $||u-v||^2$

$$||u-v||^2 = \langle u-v, u-v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, -v \rangle + \langle -v, u \rangle + \langle -v, -v \rangle$$
$$||u-v||^2 = ||u||^2 + 2||u|| \cdot ||-v|| + ||-v||^2$$

Temos que $||-v||^2 \geq 0$, podemos então escreve-lo como $||v||^2$, então

$$||u-v||^2 = ||u||^2 + 2||u|| \cdot ||-v|| + ||v||^2$$

Somando as duas expressões temos

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = ||u||^2 + 2||u|| \cdot ||v|| + ||v||^2 + ||u||^2 + 2||u|| \cdot ||-v|| + ||v||^2$$

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2 + 2||u|| \cdot ||v|| + 2||u|| \cdot ||-v||$$

Fazendo $2 \langle u, v \rangle + 2 \langle u, -v \rangle = 2 \left(\langle u, v \rangle + \langle u, -v \rangle \right) = 2 \langle 2u, 0 \rangle = 0$, então

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2, \forall u, v \in V$$

.

Jefter Santiago Mares
n° USP: 12559016

Questão 6

Para $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$, defina

$$\langle p, q\rangle := p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

- Mostre que $\langle p, q\rangle$ é um produto interno em $\mathbb{R}_2[x]$
- Encontre uma base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$ com relação a este produto interno.

Primeiramente consideramos polinômios genericos em $\mathbb{R}_2[x]$ e podemos assim escrever a definição de produto interno dada em termos dos coeficientes de um polinômio. Então sejam $f, v \in \mathbb{R}_2[x]$, com $f = a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $g = b_2x^2 + b_1x + b_0$, pela definição então, calculamos

$$f(-1)g(-1) = (a_2 - a_1 + a_0) \cdot (b_2 - b_1 + b_0)$$

$$f(0)g(0) = (a_0) \cdot (b_0) = a_0 \cdot b_0$$

$$f(1)g(1) = (a_2 + a_1 + a_0) \cdot (b_2 + b_1 + b_0)$$

Então

$$f(-1)g(-1) + f(0) + g(0) + f(1)g(1) = 2a_2b_2 + 2a_2b_0 + 2a_1b_0 + 2a_0b_2 + 3a_0b_0$$

$$\boxed{\langle f, g\rangle := 2a_2b_2 + 2a_2b_0 + 2a_1b_0 + 2a_0b_2 + 3a_0b_0}$$

Partindo desta definição podemos provar as propriedades de um produto interno, então sejam $u, v, w \in \mathbb{R}_2[x]$, com $u = x^2 + 1, w = x + 3$ e $v = 3x^2 + x - 1$

- $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

  Primeiro fazemos o cálculo do lado esquerdo da equação.

$$\langle u + v, w\rangle = \left\langle x^2 + 1 + 3x^2 + x - 1, x + 3\right\rangle = \left\langle 4x^2 + x, x + 3\right\rangle$$

$$\langle u + v, w\rangle = \left(4(-1)^2 + (-1)\right) \cdot (-1 + 3) + \left(4(0)^2 + (0)\right) \cdot (0 + 3) + \left(4(1)^2 + (1)\right)(1 + 3)$$

$$\langle u + v, w\rangle = 6 + 0 + 20 = 26$$

  Agora o lado direito.

$$\langle u, w\rangle = \left((-1)^2 + 1\right) \cdot (-1 + 3) + \left((0)^2 + 1\right) \cdot (0 + 3) + \left((1)^2 + 1\right) \cdot (1 + 3)$$

$$\langle u, w\rangle = 4 + 3 + 8 = 15$$

$$\langle v, w\rangle = \left(3(-1)^2 + (-1) - 1\right) \cdot (-1 + 3) + \left(3(0)^2 + (0) - 1\right) \cdot (0 + 3) + \left(3(1)^2 + (1) - 1\right) \cdot (1 + 3)$$

$$\langle v, w\rangle = 2 - 3 + 12 = 11$$

  Então $\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle = 15 + 11 = 26$, portanto a propriedade é válida e $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

Jefter Santiago Mares
n° USP: 12559016

- $\langle \lambda u, w\rangle = \lambda \langle u, w\rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$ Primeiro o lado esquerdo da equação $\langle \lambda u, w\rangle = \big\langle \lambda(x^2+1, x+3\big\rangle$

$$\langle \lambda u, w\rangle = \big[\lambda(-1)^2+1\big]\cdot(-1+3)+[\lambda(0)+1]\cdot(0+3)+[\lambda(1)+1]\cdot(1+3)$$

$$\langle \lambda u, w\rangle = 2(\lambda+1)+3+4(\lambda+1) = 6\lambda+12$$

$$\langle \lambda u, w\rangle = 6\lambda+12$$

Agora o lado direito $\lambda \langle u, w\rangle = \lambda\cdot\Big\{\big[(-1)^2+1\big]\cdot(-1+3)+\big[(0)^2+1\big]\cdot(0+3)+\big[(1)^2+1\big]\cdot(1+3)\Big\}$

$$\lambda \langle u, w\rangle = \lambda(4+3+8) = 15\lambda$$

$$\lambda \langle u, w\rangle \stackrel{?}{=} \langle \lambda u, w\rangle \Leftrightarrow 15\lambda = 6\lambda+12 \Rightarrow 9\lambda = 12 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3}$$

Portanto, para $\lambda = \frac{4}{3}$, $\lambda \langle u, w\rangle = \langle \lambda u, w\rangle$

- $\langle u, u\rangle \geq 0$

$$\langle u, u\rangle = \big[(-1)^2+1\big]\cdot\big[(-1)^2+1\big]+\big[(0)^2+1\big]\cdot\big[(0)^2+1\big]+\big[(1)^2+1\big]\cdot\big[(1)^2+1\big]$$

$$\langle u, u\rangle = 9 > 0$$

e $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (polinômio nulo)

Portanto a definição $\langle p, q\rangle := p(-1)q(-1)+p(0)q(0)+p(1)q(1)$ é um produto interno.

Agora quero uma **base ortonormal** de $\mathbb{R}_2[x]$ em relação à este produto interno.
Sejam $(v_1, v_2, v_3) = (1, 1+x, x+x^2)$, polinômios com o produto interno definido e sejam (w_1, w_2, w_3) uma base ortogonal. então pelo processo de Gram-Schmidt podemos encontrar uma base ortonormal, portanto

$$w_1 = v_1 = 1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{||v_1||}\cdot v_1 = (1+x) - \frac{\langle 1+x, 1\rangle}{\sqrt{1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1}} = (1+x) - \frac{(1-1)(1)+(1-0)(1)+(1+1)(1)}{\sqrt{3}}\cdot 1$$

$$w_2 = x - \sqrt{3} + 1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2\rangle}{||v_2||}\cdot v_2 = (x+x^2) - \frac{\big\langle x+x^2, 1+x\big\rangle}{\sqrt{(1-1)(1-1)+(1+0)(1+0)+(1+1)(1+1)}}\cdot(1+x)$$

$$w_3 = (x+x^2) - \frac{(-1+(-1)^2)(1-1)+(0+0^2)(1-0)+(1+1^2)(1+1)}{\sqrt{5}}\cdot(1+x)$$

$$w_3 = (x+x^2) - \frac{4}{\sqrt{5}}\cdot(1+x) = x^2+x-\frac{4}{5}\sqrt{5}\cdot(1+x)$$

Logo, uma base ortonormal em relação ao produto interno $\langle p, q\rangle := p(-1)q(-1)+p(0)q(0)+p(1)q(1)$ é $\{w_1, w_2, w_3\} = \Big\{1, x-\sqrt{3}+1, x^2+x-\frac{4}{5}\sqrt{5}(1+x)\Big\}$.

Jefter Santiago Mares
n° USP: 12559016

Questão 9

Use o processo de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortogonal para o subespaço $W \subseteq \mathbb{R}^4$ dado por

$$W = \langle (1,0,0,1), (1,1,0,0), (1,2,0,1) \rangle$$

Na sequência, calcule $proj_w(2,-1,-1,0)$.

Sejam $v_1, v_2, v_3 \in W$ com $v_1 = (1,0,0,1), v_2 = (1,1,0,0)$ e $v_3 = (1,2,0,1)$ e seja a base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. Pelo método de Gram-Schmidt

$$e_1 = v_1 = (1,0,0,1)$$

$$e_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, e_1 \rangle}{||e_1||^2} \cdot e_1$$

$$e_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, e_2 \rangle}{||e_2||^2} \cdot e_2$$

$$e_2 = (1,1,0,0) - \frac{\langle (1,1,0,0), (1,0,0,1) \rangle}{\langle (1,0,0,1), (1,0,0,1) \rangle} \cdot (1,0,0,1) = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2} \right)$$

$$e_3 = (1,2,0,1) - \frac{\left\langle (1,2,0,1), (\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}) \right\rangle}{\langle (1,2,0,1), (1,2,0,1) \rangle} \cdot (1,2,0,1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3} \right)$$

Logo, $B = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ (1,0,0,1), \left(\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3}\right) \right\}$

Quero calcular $proj_w(u, B)$, para $u = (2,-1,-1,0)$, por definição $proj_w(u,B) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} \cdot e_i$ com $n = \dim(B)$, então

$$proj_w(u,B) = \frac{\langle u, e_1 \rangle}{||e_1||} \cdot e_1 + \frac{\langle u, e_2 \rangle}{||e_2||} \cdot e_2 + \frac{\langle u, e_3 \rangle}{||e_3||} \cdot e_3$$

$$proj_w(u,B) = \frac{\langle (2,-1,-1,0), (1,0,0,1) \rangle}{< (1,0,0,1), (1,0,0,1) >} \cdot (1,0,0,1) +$$
$$\frac{\left\langle (2,-1,-1,0), (\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}) \right\rangle}{\left\langle (\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}) \right\rangle} \cdot \left(\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2} \right) +$$
$$\frac{\left\langle (2,-1,-1,0), \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3}\right) \right\rangle}{\left\langle \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3}\right) \right\rangle} \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3} \right)$$

$$proj_w(u,B) = (1,0,0,1) + (0,0,0,0) + (0,0,0,0)$$

$$proj_w(u,B) = (1,0,0,1)$$

Jefter Santiago Mares
n° USP: 12559016

Diagonalização

Questão 12

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Para $n \in \mathbb{Z}$, encontre uma fórmula para A^n

Primeiramente checamos se a matriz é diagonalizável, fazendo

$$PA(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4) - (-2)(-3) = (\lambda^2 - 5\lambda + 4) - 5$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 1 = 0 \rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(1)(-1) = 29 \Rightarrow \Delta > 0 \text{ A matriz é diagonalizável.}$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}, \lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$$

Com isso podemos calcular os autovetores fazendo $\lambda I - A = 0$ e assim chegmaos à $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ onde $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{29}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{29}}{2} \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$,

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

onde $D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)^n \end{pmatrix}$

Jefter Santiago Mares
n° USP: 12559016

Questão 13

Decida se cada uma das seguintes matrizes é diagonalizável. Caso afirmativo, realize a diagonalização.

a - $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b - $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = PA(\lambda) \Rightarrow \det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda - 2) = (\lambda^2 - 5\lambda + 6)(\lambda - 2)$$

Temos $\Delta > 0$, porém o polinômio tem duas raízes iguais, a matriz não é diagonalizável.

- $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

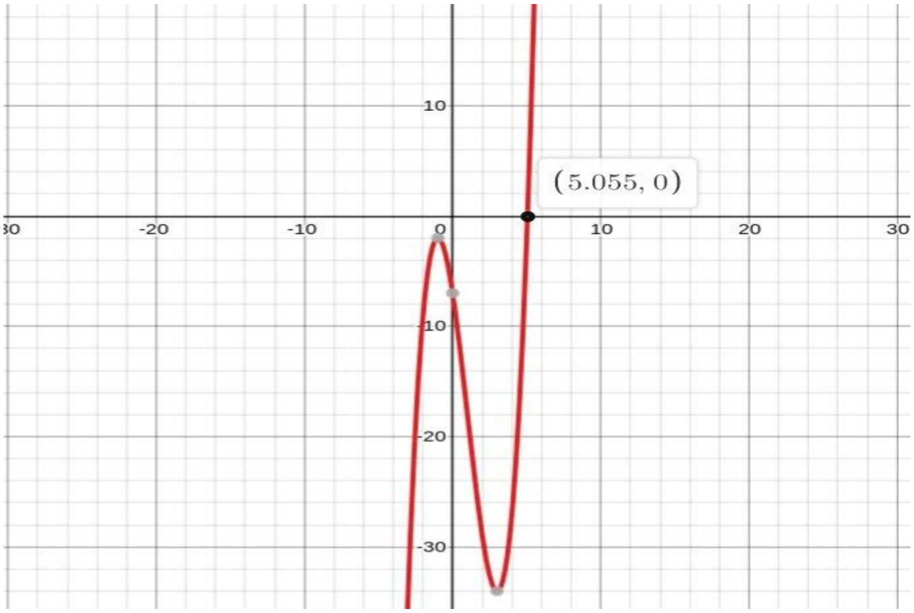
$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -3 & \lambda & -1 \\ -6 & -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = [(\lambda - 2)\lambda(\lambda - 1) + (-1)(-1)(-6) + (-1)(-3)(-2)] -$$

$$[(-1)\lambda(-6) + (-1)(-2)(\lambda - 2) + (\lambda - 1)(-1)(-3)]$$

$$\det(\lambda I - B) = \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) - 12 - [6\lambda + 2\lambda - 2 + 3\lambda - 3] = \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) - 12 - 11\lambda + 5$$

$$\det(\lambda I - B) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 7$$

Esse polinômio só possui uma raiz real, portanto a matriz não é diagonalizavel.



Jefter Santiago Mares
n° USP: 12559016

- $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -3 & \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-2) - (-2)(-3)(\lambda-1)$$

$\det(\lambda I - C) = (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6)-6(\lambda-1) = (\lambda-1)\left[(\lambda^2-5\lambda+6)-6\right] = (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-5)$

O polinômio de grau três tem raízes distintas e reais, logo a matriz é diagonalizável. Os autovalores são $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$, usamos eles para construir a matriz diagonalizada.

– Para λ_1

$$C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

A partir desse sistema definimos o vetor $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

– Para λ_2

$$C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ x + 3y + 2z = y \\ 3y + 2z = z \end{cases}$$

Disso temos $x = 0, z = -3y$, então $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

– Para λ_3

$$C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 5x \\ x + 3y + 2z = 5y \\ 3y + 2z = 5z \end{cases}$$

Segue que $x = 0, y = z$, logo o vetor é $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Portanto, a matriz diagonalizada é

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Jefter Santiago Mares
n° USP: 12559016