1.3 Geometria dos números complexos

A identificação natural $a + ib = (a, b)$ entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ permite visualizar o conjunto $\mathbb{C}$ como um plano. Esse *plano complexo* (ou *plano de Argand*) desempenha o mesmo papel para o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos que a *reta real* desempenha para os números reais $\mathbb{R}$. E assim como $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (pois um número real nada mais é que um número complexo com parte imaginária nula), a reta real está contida no plano complexo (vide Fig. 1.1).

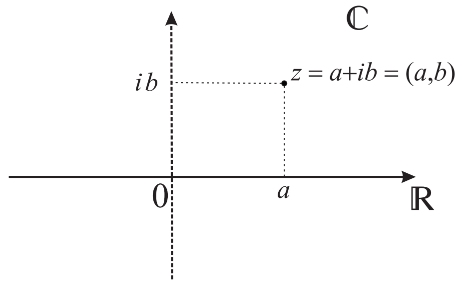

Figura 1.1: Representação de um número complexo no plano complexo.

Uma vez adotando o plano complexo para representar $\mathbb{C}$, podemos visualizar geometricamente as operações algébricas. Por exemplo, da propriedade (i) da seção anterior vemos que números complexos se somam e se subtraem como vetores: componente a componente (ou seja, parte real com parte real, parte imaginária com parte imaginária). Essa propriedade está representada na Fig. 1.2, assim como a conjugação complexa e a oposição.

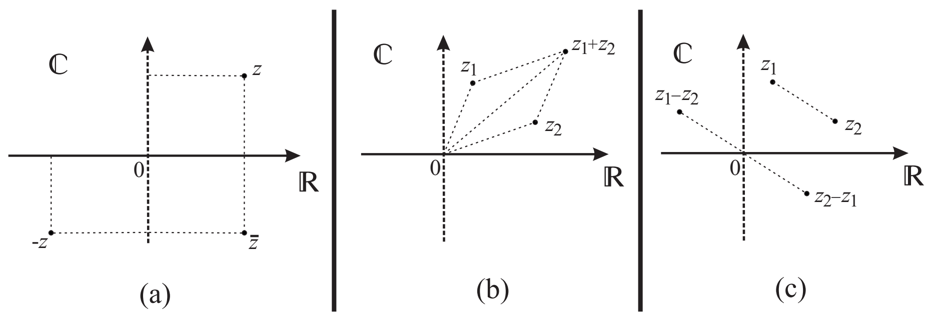

Figura 1.2: (a) O conjugado complexo $\bar{z}$ é obtido pela "imagem espelhada" de z em relação à reta real, enquanto que o seu oposto, $-z$, é obtido pela "imagem invertida" em relação à "origem" 0; (b) A soma de números complexos satisfaz a "regra do paralelograma" de soma de vetores; (c) A subtração de números complexos também é análoga à subtração de vetores, lembrando que o vetor obtido deve ser representado partindo da "origem" 0.

- **Exercício:** Represente no plano complexo os seguintes números z_1, z_2 e z_3 e verifique geometricamente as propriedades expressas na Fig. 1.2:

  (a) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 - 2i$, $z_3 = z_1 + z_2$;

  (b) $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = z_1 - z_2$.

Já a multiplicação e a divisão, de acordo com (ii) e (iii) da seção anterior, parecem bem mais complicadas. No entanto, veremos que mesmo elas têm uma representação geométrica simples. Antes de conseguir ver isso, porém, devemos introduzir uma nova maneira de expressar os números complexos.

Da mesma maneira que um ponto no plano pode ser representado de diferentes maneiras, o mesmo vale para a representação dos números complexos. Duas maneiras são as mais utilizadas: a representação cartesiana e a representação polar. A representação cartesiana é a de pares ordenados que já discutimos, representada na Fig. 1.1. A representação polar, por sua vez, ao invés de fazer uso dos valores das coordenadas cartesianas do ponto no plano, utiliza-se da "distância" ρ do ponto à origem (denominada *módulo* de z, $|z| = \rho$) e do "ângulo" θ que a direção que contém o ponto faz com o semi-eixo real positivo (medido no sentido anti-horário e denominado *argumento* de z, $\arg(z) = \theta$; vide Fig. 1.3).

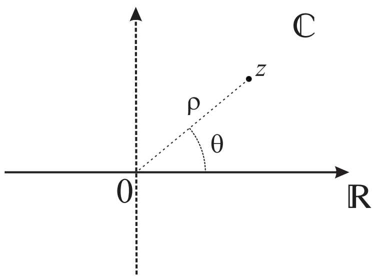

Figura 1.3: Representação polar de um número complexo z: ρ é o módulo e θ é o argumento de z.

Dadas essas duas maneiras de se representar um número complexo, é fácil ver a relação entre elas. Seja z um número complexo com $\mathrm{Re}(z) = a$ e $\mathrm{Im}(z) = b$ — ou seja, $z = a + bi$ — e $|z| = \rho$ e $\arg(z) = \theta$. Então, pela geometria da representação polar (compare as Figs. 1.1 e 1.3),

$$a = \rho\cos\theta, \qquad b = \rho\sin\theta; \tag{1.2}$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \tan(\theta) = b/a. \tag{1.3}$$

Assim, em termos de seu módulo $|z| = \rho$ e seu argumento $\arg(z) = \theta$, o número complexo z se escreve como $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Na próxima seção, veremos uma maneira (muito!) mais conveniente de representar um número complexo em termos de seu módulo e argumento.

- **Exercício:** Mostre que podemos obter o módulo de um número complexo z através de $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Vale notar que, diferentemente da representação cartesiana, a representação polar de um número complexo *não* é única: se ρ e θ são o módulo e o argumento de um dado número complexo z, então ρ e $\theta + n2\pi$ representam o *mesmo* número complexo z, qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$. Este fato será de grande importância quando definirmos potenciação de números complexos e, mais tarde, algumas funções elementares.

Voltando às operações algébricas, agora estamos aptos a interpretar geometricamente as operações (ii) e (iii) anteriores. Sejam z_1 e z_2 dois números complexos com $|z_j| = \rho_j$ e $\arg(z_j) = \theta_j$ $(j = 1, 2)$. Então, de acordo com (ii) e Eq. (1.2), temos:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) \\ &= \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ou seja: vemos que $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ e $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$, que são relações muito mais simples do que as dadas em termos das partes reais e imaginárias. Essas relações em termos dos módulos e argumentos dos números complexos sendo multiplicados permitem uma visualização geométrica do produto $z_1 z_2$, como esquematizado na Fig. 1.4 abaixo. Em

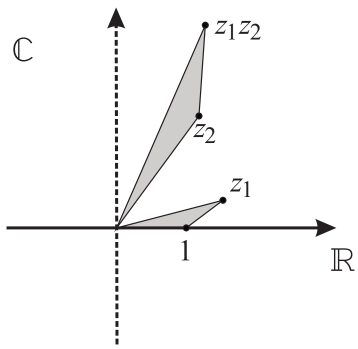

Figura 1.4: Representação geométrica do produto de números complexos. O produto $z_1 z_2$ é tal que o triângulo formado pelos vértices $\{0, 1, z_1\}$ é semelhante ao triângulo formado pelos vértices $\{0, z_2, z_1 z_2\}$ (tente entender porque).

particular, note que nessa visão geométrica a multiplicação pela unidade imaginária i equivale a uma rotação de $\pi/2$ no plano complexo (já que $|i| = 1$ e $\arg(i) = \pi/2$). Isso nos proporciona uma nova interpretação para $i^2 = -1$ (rotação de π no plano complexo equivale a "inverter" em relação à "origem") e para a Eq. (1.1) em geral (por exemplo, $i^3 = i^{-1} = -i$ pode ser entendida como a afirmação trivial que uma rotação de $3\pi/2$ equivale a uma rotação de $-\pi/2$). Além disso, $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ pode ser igualmente interpretado tanto como o número $z_1 = \rho$ na reta real rotacionado de um ângulo θ (pela multiplicação pelo número complexo $\cos\theta + i\sin\theta$), quanto como o número $z_2 = \cos\theta + i\sin\theta$ no *círculo unitário*[5] "reescalado" por um fator ρ (vide Fig. 1.5).

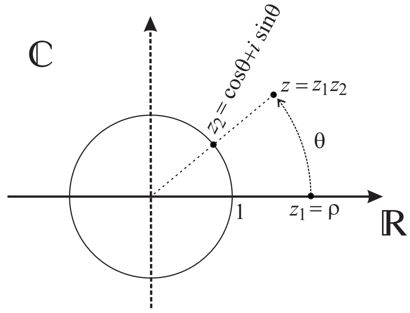

Figura 1.5: Número complexo z visto tanto como um número real positivo $z_1 = \rho$ rotacionado de θ quanto como um número z_2 de módulo 1 e argumento θ "reescalado" por um fator real positivo ρ.

- **Exercício:** Represente no plano complexo os seguintes números z_1, z_2 e z_3 e verifique geometricamente a propriedade expressa na Fig. 1.4:

  (a) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 - 2i$, $z_3 = z_1 z_2$;

  (b) $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = z_1 z_2$.

Para a divisão de dois números complexos, z_1/z_2 (com $z_2 \neq 0$), a propriedade (iii) e a Eq. (1.2) nos levam a:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) - i\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2)}{\rho_2^2[(\cos\theta_2)^2 + (\sin\theta_2)^2]} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]. \qquad (1.5)\end{aligned}$$

Ou seja, novamente encontramos relações mais simples do que as dadas em termos das partes reais e imaginárias: $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ e $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.

[5]Lugar geométrico no plano complexo definido por $|z| = 1$.