

# Resoluções

Jefter Santiago Mares

20 de fevereiro de 2022

## Exercicio 5.2(b)

Discuta e resolva os sistemas lineares em função do parâmetro  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + y - z = 2 - a \\ x + ay - z = -a \end{cases}$$

### Resolução

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + y - z = 2 - a \\ x + ay - z = -a \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{cases} x + y - az = 0 \\ y - ay + a^2z - z = 2 - a \\ -y + ay + az - z = -a \end{cases}$$

Fazendo  $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$  temos

$$a^2z + az - 2z = 2 - 2a \Rightarrow z(a^2 + a - 2) = 2(1 - a) \Rightarrow z = \frac{2(1 - a)}{a^2 + a - 2}$$

Fatorando o denominador podemos escrever  $a^2 + a - 2 = (a - 1)(a + 2)$  e como queremos simplificar a fração, façamos  $(a - 1) = -(1 - a)$ , então

$$z = \frac{\cancel{2(1-a)}}{\cancel{-(1-a)}(a+2)} \Rightarrow \boxed{z = \frac{-2}{a+2}}$$

O sistema fica

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ y - ay + a^2z - z = 2 - a \\ z = \frac{-2}{a+2} \end{cases}$$

Resolvendo para  $y$ :  $y - ay + az - z = 2 - a \Rightarrow y(1 - a) + z(a^2 - 1) = 2 - a$

$$y = \frac{(2 - a) - z(a^2 - 1)}{1 - a} = \frac{(2 - a) + \frac{2}{a+2}(a^2 - 1)}{1 - a} = \frac{\frac{(2-a)(a+2)+2(a^2-1)}{a+2}}{1 - a} \Rightarrow \boxed{z = \frac{a^2 + 2}{(a + 2)(1 - a)}}$$

Com isso podemos resolver para  $x$  usando a equação da  $L_1$ :  $x + y - az = 0 = az - y$

$$x = \frac{-2a}{a+2} - \frac{a^2+2}{(a+2)(1-a)} = \frac{-2a(1-a) - (a^2+2)}{(a+2)(1-a)} = \frac{-2a + 2a^2 - a^2 - 2}{(a+2)(1-a)} \Rightarrow x = \frac{a^2 - 2a - 2}{(a+2)(1-a)}$$

Assim, temos a solução do sistema em função do parâmetro  $a$ .

$$S = \left\{ \left( \frac{a^2 - 2a - 2}{(a+2)(1-a)}, \frac{a^2 + 2}{(a+2)(1-a)}, \frac{-2}{a+2} \right) : a \in \mathbb{R} | a \neq 1 \text{ e } a \neq -2 \right\}$$

O sistema é possível e indeterminado para  $\forall a \in \mathbb{R}$  tal que  $a \neq 1$  e  $a \neq -2$

### Checando se a solução é válida

- Com  $a = 1$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y - z = 1 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema incompatível.}$$

Logo,  $a = 1$  torna o sistema incompatível.

- Com  $a = -2$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -2x + y - z = 4 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3y - 3z = 4 \\ -3y - 3z = 0 \end{cases}$$

Assim temos  $y = -z$  e substituindo na  $L_2$  encontramos  $z = -\frac{2}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}$  e pela  $L_1$  temos  $x = -\frac{8}{3}$ , com esses resultados e considerando que  $a = -2$  podemos checar essa equivalência fazendo

$$\begin{aligned} x + y - az = 0 &\Rightarrow x + y = az \Rightarrow a = \frac{x + y}{z} \\ -2 &\stackrel{?}{=} \frac{-\frac{8}{3} + \frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}} \\ -2 &\neq 3 \end{aligned}$$

Portanto,  $a = -2$  torna o sistema incompatível.

### Checando se a solução é válida

Pelo teorema de Cramer sabemos que os valores de  $a$  que tornam o determinante  $D = 0$  nos fornece as soluções nas quais o sistema é **impossível** ou **indeterminado**. Fazendo o calculo do determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = (-1 - 1 - a^3) - (-a - a - a) = -2 - a^3 + 3a \text{ Multiplicando a } -a^3 + 3a - 2 = 0 \text{ por } -1 \text{ temos } a^3 - 3a + 2 = 0 \text{ e fatorando podemos escrever a equação como}$$

$$(a - 1)^2 \cdot (a + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

Ou seja, com esses valores de  $a$  o sistema é impossível, como esperado.

- OBS:** Não tenho certeza se esse é um bom método de checar a solução ( ou se minha solução está correta), então gostaria que esse tipo de prova fosse abordado em alguma aula/monitoria.

## Exercício 7.6

Mostre que o conjunto  $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$  com as seguintes operações

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 3, y_1 + y_2)$$

$$\alpha \odot (x, y) = (\alpha x + 3(\alpha - 1), \alpha y)$$

é um espaço vetorial real.

### Resolução

$v, w, z \in V, v = (x_1, y_1), w = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3)$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**EV1:**  $v + (w + z) = (v + w) + z$

$$v + (w + z) = (x_1, y_1) \oplus [(x_2, y_2) \oplus (x_3, y_3)] = (x_1, y_1) \oplus (x_2 + x_3 + 3, y_2 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3 + 3, y_1 + y_2 + y_3)$$

$$\begin{aligned} (v + w) + z &= [(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)] \oplus (x_3, y_3) = (x_1 + x_2 + 3, y_1 + y_2) \oplus (x_3, y_3) = (x_1 + x_2 + x_3 + 3, y_1 + y_2 + y_3) \\ &\Rightarrow v + (w + z) = (v + w) + z \end{aligned}$$

**EV2:**  $v + w = w + v$

$$v + w = (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 3, y_1 + y_2)$$

$$w + v = (x_2, y_2) \oplus (x_1, y_1) = (x_2 + x_1 + 3, y_2 + y_1)$$

Como estamos trabalhando com números reais, segue que  $v + w = w + v$ , a ordem não importa.

**EV3:**  $v + 0 = v$

Definimos o zero como  $0_V = (a, b) / (x, y) \oplus 0_v = (a, b)$

$$(x + a + 3, y + b) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} x + a + 3 = a \\ y + b = b \end{cases}$$

Desse sistema temos que  $a = -3$  e  $b = 0$ , portanto, definimos o zero como  $0_V = (-3, 0)$

**EV4:**  $v + (-v) = 0$

$$v + (-v) = 0_V$$

Chamamos  $-(x, y) = (a, b)$

$$(x, y) \oplus (a, b) = 0_V \Rightarrow (x + a + 3, y + b) = (-3, 0)$$

$$\begin{cases} x + a + 3 = -3 \\ y + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 - a \\ y = -b \end{cases}$$

$$-(x, y) = (-6 - x, -y)$$

$$\begin{aligned}(x, y) \oplus (-6 - x, -y) &\stackrel{?}{=} (-3, 0) \\ (x + (-6 - x) + 3, y + (-y)) &\stackrel{?}{=} (-3, 0) \\ (-3, 0) &= (-3, 0)\end{aligned}$$

**EV5:**  $\alpha(\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$

$$\begin{aligned}\alpha \odot [\beta \odot (x_1, y_1)] &= \alpha \odot (\beta x + 3(\beta - 1), \beta y) = (\alpha\beta x + 3(\alpha\beta - 1), \alpha\beta y) \\ (\alpha\beta) \odot (x, y) &= (\alpha\beta x + 3(\alpha\beta - 1), \alpha\beta y)\end{aligned}$$

**EV6:**  $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$

- Primeiro fazendo a parte esquerda da equação.

$$(\alpha + \beta) \odot (x, y) = ((\alpha + \beta)x + 3[(\alpha + \beta) - 1], (\alpha + \beta)y)$$

- Agora a parte direita.

$$\begin{aligned}\alpha \odot v + \beta \odot v &= (\alpha x + 3(\alpha - 1), \alpha y) \oplus (\beta x + 3(\beta - 1), \beta y) \\ \alpha \odot v + \beta \odot v &= (x(\alpha + \beta) + 3 \cdot \underbrace{[(\alpha - 1) + (\beta - 1)]}_{\alpha + \beta - 2} + 3, (\alpha + \beta)y) \\ \alpha \odot v + \beta \odot v &= (x(\alpha + \beta) + \underbrace{3(\alpha + \beta - 2) + 3}_{3\alpha + 3\beta - 3}, (\alpha + \beta)y) \\ \alpha \odot v + \beta \odot v &= (x(\alpha + \beta) + 3[(\alpha + \beta) - 1], (\alpha + \beta)y)\end{aligned}$$

Por fim, temos os dois lados são equivalentes, então

$$(\alpha + \beta)v = \alpha \odot v + \beta \odot v$$

**EV7:**  $\alpha(v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$

- Primeiro fazendo a operação do lado esquerdo da equação.

$$\begin{aligned}\alpha \odot [(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)] &= \alpha \odot (x_1 + x_2 + 3, y_1 + y_2) \\ \alpha \odot [(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)] &= \left[ \alpha x_1 + \alpha x_2 + \underbrace{3 + 3(\alpha - 1)}_{3\alpha}, \alpha y_1 + \alpha y_2 \right] = [\alpha(x_1 + x_2 + 3), \alpha(y_1 + y_2)]\end{aligned}$$

- O lado direito.

$$\begin{aligned}\alpha \odot (x_1, y_1) \oplus \alpha \odot (x_2, y_2) &= (\alpha x_1 + 3(\alpha - 1), \alpha y_1) \oplus (\alpha x_2 + 3(\alpha - 1), \alpha y_2) \\ &= [\alpha x_1 + 3(\alpha - 1) + \alpha x_2 + 3, \alpha y_1 + \alpha y_2] = (\alpha(x_1 + x_2) + 3\alpha - 3 + 3, \alpha(x_1 + x_2)) \\ \alpha \odot (x_1, y_1) \oplus \alpha \odot (x_2, y_2) &= [\alpha(x_1 + x_2 + 3), \alpha(y_1 + y_2)]\end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\alpha [(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)] = \alpha \odot (x_1, y_1) \oplus \alpha \odot (x_2, y_2)$$

**EV8:**  $1 \cdot v = v$

$$1 \odot (x, y) = (x + 3(1 - 1), 1y)$$

$$1 \odot (x, y) = (x, y)$$

Portanto  $(V, \oplus, -, \odot, 0_V)$  é um espaço vetorial com e com zero definido como  $0_V = (-3, 0)$ .

- **OBS:** Eu tive uma certa dificuldade com a propriedade **EV7**, não sei se está correta e acho que seria uma boa abordar numa monitoria.

## Exercício 8.2

Seja  $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Considere o conjunto

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : x - y - z = 0 \right\}$$

. Mostre que  $W$  é um subespaço e determine um conjunto gerador de  $W$ .

- $0 \in W$

$$\text{Seja } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W, 0 - 0 - 0 = 0 \Rightarrow 0 \in W$$

- Se  $v, w \in W$ , então  $v + w \in W$

$$\text{Seja } v = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix} \text{ e } u = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{pmatrix}, \text{ então}$$

$$v + u = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & t_1 + t_2 \end{pmatrix}$$

Sabemos que  $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = 0$ , então

$$\underbrace{x_1 - y_1 - z_1}_{=0} + \underbrace{x_2 - y_2 - z_2}_{=0} = 0$$

- Se  $u \in W$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então  $\lambda \cdot u \in W$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda z & \lambda t \end{pmatrix}$$

$$\text{e } \lambda x - \lambda y - \lambda z = 0 \Rightarrow \lambda \underbrace{(x - y - z)}_{=0} = 0 \text{ Portanto } \lambda u \in W.$$

Como  $W$  satisfaz todas as condições,  $W$  é subespaço de  $U$ .

Note que  $t$  é um termo independente de  $W$  na definição da operação fornecida.

$\forall u \in W$ ;  $v_1, v_2, v_3, v_4$  geram  $W$  se

$$u = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 + \alpha_4 \cdot v_4$$

$$x - y - z = 0 \Rightarrow x = y + z$$

Supondo  $z = -x$  e substituindo na original temos

$$x - y + x = 0 \Rightarrow 2x - y = 0 \Rightarrow 2(y + z) - y = 0$$

$$2y + 2z - y = 0 \Rightarrow y = 2z$$

Podemos escrever a matriz como

$$\begin{pmatrix} y+z & 2z \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 2z \\ z & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = U$ , então  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  é um conjunto gerador de  $U$  para o caso de  $x = -z$  e  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

## Exercicio 12.3

Sejam  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  um espaço vetorial com produto interno e  $u, v \in V$ . Prove a afirmação:

- $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$  se e somente se  $\langle u, v \rangle = 0$

Escrevendo o termo  $\|u + v\|^2$  como

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2 \cdot \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + 2 \cdot \langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2 \cdot \|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2$$

Agora podemos escrever a equação  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$  usando a relação encontrada acima, então

$$\|u\|^2 + 2 \cdot \|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Subtraindo  $\|u\|^2$  e  $\|v\|^2$  de ambos os lados temos  $2 \cdot \|u\| \cdot \|v\| = 0$  logo

$$2 \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow \boxed{\langle u, v \rangle = 0}$$