Capítulo 4

Introdução

4.1 O que são e por que estudá-las?

No uso da linguagem matemática para modelar fenômenos físicos e outros processos é comum se chegar em relações (*equações*) envolvendo quantidades que, por sua vez, muitas vezes se relacionam com *taxas de variação* (*derivadas*) de outras grandezas. No campo da Física, por exemplo, mais especificamente em *Mecânica*, a 2ª lei de Newton relaciona diretamente a força resultante (F_R) numa dada direção atuando sobre uma partícula com a aceleração (a) da mesma naquela direção:

$$F_R = ma,$$

onde m é a massa da partícula. No entanto, na maioria das aplicações dessa expressão, não estamos interessados apenas em descobrir a aceleração da partícula mas sim sua velocidade (v) ou sua posição (x), sendo que estas se relacionam com a aceleração por

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Desse modo, temos uma equação que envolve derivada(s) da grandeza de interesse a ser determinada; ou seja, temos uma *equação diferencial* (tanto para v quanto para x):

$$F_R = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

No caso de conhecermos a força resultante como uma função explícita do tempo, $F_R = F_R(t)$, a tarefa de se descobrir as funções $v = v(t)$ e $x = x(t)$ que satisfazem a equação diferencial acima (ou seja, *resolver* a equação diferencial) é considerada "trivial", pois basta integrarmos a função $F_R(t)$ (suposta conhecida):

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F_R(t')\,dt',$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')\, dt'.$$

(Os valores $v(t_0) = v_0$ e $x(t_0) = x_0$, respectivamente a velocidade e a posição da partícula no instante t_0, devem ser fornecidos para que as funções $v(t)$ e $x(t)$ fiquem, de fato, completamente determinadas.)

- Exemplo: (*Queda livre vertical*) Partícula com massa m sujeita apenas a sua força peso numa região com aceleração da gravidade uniforme e constante g (usando v para sua velocidade vertical e x para sua altura):

$$\begin{aligned}
& F_R = -mg = m\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -g \\
\Leftrightarrow \quad & v(t) = v_0 - \int_{t_0}^{t} g\, dt' = v_0 - g(t - t_0) \\
\Leftrightarrow \quad & x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')\, dt' = x_0 + v_0(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2.
\end{aligned}$$

- **Exercício:** Considere, agora, uma partícula de massa m sujeita a uma força resultante $F_R(t) = F_0 \sin(\omega t)$ (sempre numa mesma direção), com F_0 sendo uma constante. Obtenha sua velocidade $v(t)$ e sua posição $x(t)$ sabendo que no instante $t_0 = 0$ a partícula encontrava-se em repouso na origem.

Infelizmente, situações como essas em que conhecemos explicitamente a dependência de F_R com o tempo são raras. Muito mais comuns são as situações em que F_R também depende *implicitamente* do tempo através de uma dependência explícita com a velocidade e/ou a posição, de modo a termos uma equação diferencial da forma

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} F_R(v, t) \tag{4.1}$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} F_R(x, v, t)\,. \tag{4.2}$$

Nesses casos, evidentemente não podemos encontrar as funções $v(t)$ e $x(t)$ integrando F_R no tempo, pois a dependência *total* de F_R com o tempo não é conhecida até que tenhamos a solução $x(t)$ e $v(t)$.

- Exemplo: (*Queda livre radial num campo gravitacional inomogêneo*) Partícula com massa m sujeita apenas a sua força peso causada por um corpo esférico de massa M e raio R ($r > R$ sendo a distância entre a partícula e o centro do corpo esférico):

$$F_R = -\frac{GMm}{r^2} = m\frac{d^2r}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{GM}{r^2} = 0. \tag{4.3}$$

Fica evidente que não podemos descobrir a função $r = r(t)$ pela integração de $F_R = -GMm/r^2$ pois esta última não é conhecida como uma função explícita de t até que encontremos $r(t)$.

- Exemplo: (*Oscilador harmônico*) Uma partícula de massa m está sujeita a uma força restauradora $F = -kx$, onde k é uma constante positiva e x mede o deslocamento da partícula em relação a sua posição de equilíbrio. Se esta for a única força atuando na partícula, a equação que rege seu movimento é

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{4.4}$$

Fica evidente, mais uma vez, que não podemos descobrir a função $x = x(t)$ pela integração de $F_R = -kx$ pois esta última não é conhecida como uma função explícita de t (até que encontremos $x(t)$).

- **Exercício:** (*Oscilador harmônico amortecido*) Obtenha a equação diferencial que rege o movimento de uma partícula de massa m sujeita a uma força restauradora $F_r = -kx$ e uma força viscosa $F_v = -bv$, onde k e b são constantes positivas, x é o deslocamento da partícula em relação a sua posição de equilíbrio e v é sua velocidade.

Além dessa dificuldade de nem sempre ser possível resolver uma equação diferencial simplesmente efetuando-se integrações, há também diversos casos onde a modelagem do sistema de interesse não leva a apenas *uma* equação diferencial mas a várias. A título de ilustração, e saindo um pouco do terreno da Física, consideremos um sistema ecológico do tipo "predador-presa" bastante simples, constituido apenas de um tipo de presa e um tipo de predador num ambiente isolado. A *taxa* com que o número de predadores e presas varia no tempo depende do número desses indivíduos: quanto mais presas no ambiente, maior a fartura de alimentos para os predadores e mais eles se reproduzem. Por outro lado, quanto maior o número de predadores no ambiente, maior o número de presas abatidas, o que se reflete numa tendência de queda do número de presas. Utilizando a variável x para denotar o número (ou densidade populacional) de presas e y para denotar o número (ou densidade populacional) de predadores, podemos tentar *modelar* o comportamento descrito acima através do *sistema* de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\alpha - \beta y)x \\ \\ \frac{dy}{dt} = (\gamma x - \delta)y \end{cases}, \tag{4.5}$$

onde α, β, γ e δ são constantes positivas relacionadas às taxas de natalidade e mortalidade das duas espécies em questão.[1] Pode-se ver prontamente que

[1] Essas equações diferenciais *acopladas* são conhecidas como *equações de Lotka-Volterra.*

mais uma vez não é possível encontrar $x = x(t)$ ou $y = y(t)$ pela integração direta do lado direito dessas igualdades.

- **Exercício:** (*Predador-presa/predador-presa*) Modele, de maneira "simples" como no exemplo acima, a evolução temporal de um sistema ecológico isolado de três espécies X, Y e Z, onde X é predador apenas de Y, que por sua vez é predador apenas de Z (não há relação direta entre X e Z).

- **Exercício:** (*Rede de transcrição gênica*) A concentração x de uma dada proteína X numa célula depende basicamente de uma "competição" entre sua taxa de produção α_X e sua taxa de degradação e diluição (esta última devida basicamente ao crescimento da célula), combinadas na variável β_X. Em muitos casos, a taxa de produção α_X é *regulada* por uma outra proteína Y, denominada *fator de transcrição*, que quando em sua forma ativa, Y^*, pode estimular (se Y for um *ativador* para X) ou inibir (se Y for um *repressor* para X) a taxa de produção de X. Ou seja, a taxa de produção de X depende da concentração de Y^*: $\alpha_X = \alpha_X(y^*)$.[2] Já a taxa de degradação e diluição de X tipicamente é proporcional à própria concentração de X: $\beta_X = \beta_0 x$, onde β_0 é uma constante.[3] Escreva a equação diferencial que rege a dinâmica da variável x. Além disso, no caso da concentração de Y^* ser tal que $\alpha_X = 0$, determine a evolução da concentração x.

Em resumo, equações diferenciais aparecem naturalmente na modelagem de diversos processos nas mais diferentes áreas. A tarefa de se encontrar soluções dessas equações nem sempre é algo tão simples quanto o cálculo de integrais, como vimos acima. Nesses casos, precisaremos desenvolver outras estratégias de resolução de equações diferenciais. Esse é o objetivo dessa segunda parte desta disciplina.

[2]Uma expressão muito usada para essa dependência é a chamada *função de Hill de entrada* (*Hill input function*), dada por

$$\alpha_X(y^*) = \frac{\alpha y^{*n}}{y^{*n} + K^n}$$

no caso de ativadores e

$$\alpha_X(y^*) = \frac{\alpha K^n}{y^{*n} + K^n}$$

no caso de repressores, onde α, K e n são constantes positivas ajustáveis.

[3]Isso é uma simplificação, pois a taxa de degradação de uma proteína normalmente *também* depende da concentração de outras proteínas específicas que realizam a degradação.

4.2 Classificação de equações diferenciais

Antes de nos aventurarmos na tarefa de tentar resolver equações diferenciais, vamos classificá-las de acordo com suas características. Isso será útil pois alguns dos métodos que apresentaremos aqui serão aplicáveis apenas a alguns tipos de equações diferenciais. Aliás, vale já deixar claro que não existe nenhum "método geral" de resolução de equações diferenciais que seja aplicável a todas elas; pior ainda, para muitas equações diferenciais não se conhece *nenhum* método de solução *exato* (embora métodos aproximados sempre possam ser aplicados).

4.2.1 Ordinárias e parciais

A primeira caracterização de equações diferenciais diz respeito ao número de *variáveis independentes* presentes na equação. Estas variáveis são aquelas que não são consideradas como sendo dependentes de outras variáveis. Em todos os exemplos e exercícios anteriores havia apenas *uma* variável independente, o tempo t; todas as outras variáveis que apareceram (x, y, v, ...) eram consideradas como funções de t.

Uma equação diferencial que possui apenas *uma* variável independente é dita ser *ordinária* (abreviada, de agora em diante, por EDO). No caso de haver mais de uma variável independente então a equação diferencial é dita ser *parcial* (abreviada por EDP), devido a presença de *derivadas parciais* na equação. Como já dito, todas as equações diferenciais dos exemplos e exercícios anteriores são exemplos de EDOs. Exemplos de EDPs aparecem frequentemente em Física quando se consideram grandezas descritas por *campos*, como o campo de velocidades $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ de um fluido, regido pela *equação de Navier-Stokes*

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \vec{f}, \tag{4.6}$$

ou os campos elétrico $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}, t)$ e magnético $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x}, t)$ de distribuições de cargas e correntes, regidos pelas *equações de Maxwell* [4]

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4.7}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{4.8}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{4.9}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{4.10}$$

[4] O significado das grandezas ρ, p, $\mathbf{T}$, $\vec{f}$, $\vec{j}$, ϵ_0 e μ_0 não é importante para reconhecermos o caráter *parcial* dessas equações diferenciais; basta lembrarmos que o operador *nabla*, ∇, é um operador diferencial em todas as variáveis espaciais *independentes* $\vec{x}$.

Dito vagamente, EDPs são normalmente mais difíceis de serem resolvidas do que EDOs. Mas mesmo EDOs podem ser suficientemente complicadas de modo a impossibilitar a obtenção de sua "solução geral". Nesta disciplina nos restringiremos a (alguns tipos de) EDOs.

4.2.2 Ordem de uma equação diferencial

A *ordem* de uma equação diferencial é igual à maior ordem de derivada da(s) função(ões) de interesse que aparece na equação. As Eqs. (4.2) a (4.4) são exemplos de equações diferenciais de segunda ordem, enquanto que as Eqs. (4.1) e (4.5) a (4.10) são exemplos de equações diferenciais de primeira ordem. Em Física é bastante comum encontrarmos equações diferenciais de segunda ordem. A própria 2ª lei de Newton é uma EDO (ou um sistema de EDOs, dependendo do número de partículas e da dimensionalidade do espaço) de segunda ordem na(s) posição(ões) da(s) partícula(s) (desde que as forças atuantes não dependam de derivadas de ordem mais alta da posição – o que normalmente é satisfeito). Mas deve-se ter em mente que é sempre possível reduzir a ordem de uma EDO (ou mesmo de uma EDP) através do aumento do números de equações: uma EDO de ordem n sempre pode ser escrita como um sistema de n EDOs de primeira ordem. Para ilustrar isso, considere a EDO de segunda ordem dada pela Eq. (4.4),

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Definindo a variável $v := dx/dt$ (que nesse caso nada mais é que a velocidade da partícula), é facil ver que a EDO acima é equivalente ao sistema de EDOs de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x \end{cases}.$$

A vantagem de se fazer isso é que às vezes é mais conveniente resolver o sistema de EDOs de primeira ordem, utilizando métodos matriciais, do que resolver diretamente a EDO de segunda ordem.

- **Exercício:** Considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

(a) Classifique-a quanto a ser uma EDO ou uma EDP;

(b) Qual a ordem dessa equação diferencial?

(c) Escreva essa equação como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

4.2.3 Lineares (homogêneas e inomogêneas) e não-lineares

Por simplicidade, a partir deste ponto nos restringiremos a EDOs (embora a generalização dessa classificação para EDPs seja direta). Antes de dizer o que vem a ser uma EDO linear, vamos introduzir uma notação compacta para representar as derivadas de uma função. Seja u uma função qualquer de uma variável real. Então, denotaremos por $u^{(n)}$ a derivada de ordem n de u,

$$u^{(n)}(t) := \frac{d^n}{dt^n} u(t)$$

(supondo, claro, que ela exista). Além disso, por economia, para as derivadas de ordem mais baixa também usaremos u' para denotar a primeira derivada, u'' para denotar a segunda derivada e u''' para denotar a terceira derivada.

Em posse dessa notação, uma EDO *qualquer* de ordem n pode ser escrita como

$$F\left(u^{(n)}(t), u^{(n-1)}(t), \ldots, u'(t), u(t), t\right) = 0, \tag{4.11}$$

onde F é uma função de $n+2$ variáveis.

- Exemplo: Considere a EDO de segunda ordem dada pela Eq. (4.3). A função F que faz o papel acima é

$$F(x, y, z, w) = x + \frac{GM}{z^2}, \tag{4.12}$$

com G e M constantes, de modo que a Eq. (4.3) é de fato obtida por $F(r''(t), r'(t), r(t), t) = 0$.

- Exemplo: Considere, agora, a EDO de segunda ordem dada pela Eq. (4.4) (oscilador harmônico). A função F que faz o papel acima é

$$F(x, y, z, w) = x + \frac{k}{m} z, \tag{4.13}$$

com k e m constantes, de modo que a Eq. (4.4) é de fato obtida por $F(x''(t), x'(t), x(t), t) = 0$.

- **Exercício:** Exiba uma função F que faça com que a EDO do exercício da página anterior seja dada pela Eq. (4.11).

Uma EDO de ordem n é dita ser *linear* se a função F que a coloca na forma (4.11) for uma função linear dos seus primeiros $n+1$ argumentos (ou seja, só não precisa ser linear no último argumento, que representa a variável independente da EDO). Em outras palavras, uma EDO de ordem n é linear se, e somente se, for da forma

$$a_n(t)u^{(n)}(t) + \cdots + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) = g(t), \tag{4.14}$$

onde $a_0(t)$, $a_1(t)$, ..., $a_n(t)$ e $g(t)$ são funções *conhecidas* da variável independente t (com $a_n(t)$ não sendo identicamente nula). Em particular, se a função $g(t)$ for identicamente nula, então a EDO acima é dita ser *homogênea*; caso contrário, é dita ser *inomogênea*.

- Exemplo: Note que a equação do oscilador harmônico, Eq. (4.4), é uma EDO linear homogênea [o que pode ser visto tanto pela própria Eq. (4.4) quanto pela Eq. (4.13)].

As propriedades mais importantes de EDOs lineares são enunciadas nos exercícios a seguir:

- **Exercício:** Mostre que a função identicamente nula, $u(t) \equiv 0$, sempre é solução de uma EDO linear *homogênea*.

- **Exercício:** Considere uma EDO linear *homogênea* de grau n. Mostre que se $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são duas soluções dessa EDO, então uma combinação linear arbitrária $\alpha u_1(t)+\beta u_2(t)$ (com α e β constantes) também é uma solução dessa mesma EDO.

Essa propriedade enunciada no exercício acima significa que as soluções de uma EDO linear homogênea formam um *espaço linear* (sinônimo de *espaço vetorial*).

- **Exercício:** Considere uma EDO linear *inomogênea* de grau n. Mostre que se $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são duas soluções dessa EDO, então uma combinação linear $\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$, com $\alpha + \beta = 1$ (e α e β constantes), também é uma solução dessa mesma EDO.

Uma EDO que *não* possa ser colocada na forma (4.14) é dita ser *não-linear*.

Nesta disciplina lidaremos com EDOs lineares e algumas não-lineares de primeira ordem e EDOs lineares de segunda ordem (embora alguns dos métodos possam ser generalizados facilmente para EDOs lineares de ordem maior). Métodos de solução de EDOs lineares são muito mais desenvolvidos e conhecidos do que de EDOs não-lineares. E isso se deve, em boa medida, às propriedades enunciadas nos exercícios acima.