UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física de São Carlos

Projeto 02

Sistemas aleatórios

Jefter Santiago Mares
n° USP:12559016

08 de outubro de 2022

Conteúdo

São Carlos
2021

(A) Momentos de distribuição

Seja $f(x) = x^n$ uma função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, a média dessa função pode ser definida por

$$\langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_a^b$$

estamos interessados no intervalo $[0, 1]$, portanto a média deve ser

$$\langle f \rangle = \frac{1}{1-0} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\langle f \rangle = \frac{1}{n+1} \tag{1}$$

Portanto, para cada caso $n = 1, 2, 3$ e 4 temos

Tabela 1: Valores esperados para o cálculo de $f(x)$ para cada n .

n	$\langle f \rangle$
1	1/2
2	1/3
3	1/4
4	1/5

Código e resultados

O código abaixo executa o cálculo dessa média para qualquer N.

```
C     Tarefa1: Cálcular a média de um número para um N
      read(*, *) N
      sum1 = 0.0e0
      sum2 = 0.0e0
      sum3 = 0.0e0
      sum4 = 0.0e0

      x = rand(iseed)
      do i = 1, N
         x = rand()
         sum1 = sum1 + x
         sum2 = sum2 + x**2
         sum3 = sum3 + x**3
         sum4 = sum4 + x**4
      end do

      sum1 = sum1 / N
      sum2 = sum2 / N
      sum3 = sum3 / N
      sum4 = sum4 / N

      write(*, *) "<x1> = ", sum1
      write(*, *) "<x2> = ", sum2
      write(*, *) "<x3> = ", sum3
      write(*, *) "<x4> = ", sum4
      end
```

	$N = 100$	$N = 10000$	$N = 100000$	$N = 1000000$
x	0.523797512	0.501901746	0.500286758	0.500028610
x^2	0.357666671	0.335528523	0.333478957	0.333151519
x^3	0.271176100	0.252268225	0.249980465	0.249754101
x^4	0.218358591	0.202313691	0.199869826	0.199709803

Esses resultados estão dentro do esperado, já que são valores muito próximo das frações listadas na tabela (1). Note que para N cada vez maior, melhor a aproximação.

(B) Andarilhos aleatório em uma dimensão

(B.1) Muitos andarilhos com $p = \frac{1}{2}$

O programa abaixo cálcula para M andarilhos a posição final após $N = 10000$ passos dados. Então é calculado os valores de $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$ e além disso foi feito um histograma para visualizarmos o resultado final.

Esse trecho de código é responsável pelo cálculo de $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$.

```
!     Tarefa B - Cálcular <x> e <x2>
      parameter (n = 1000)
      parameter (m = 10000)

      parameter (nbin = 30)

      dimension nwalker(m)
      dimension istep(2)

      iStep(1) = -1
      iStep(2) = 1

      x = 0e0
      x2 = 0e0

      r = rand(iseed)
      do i = 1, m
         nSteps = 0
         do j = 1, n
            r = rand() * 2
!           i está no intervalo [1, 2]
            k = int((r + 1) / 2) + 1
!           Quantidade de passos dada por andarilho.
            nSteps = nSteps + iStep(k)
         end do
         nWalker(i) = nSteps
         x = x + nSteps
         x2 = x2 + nSteps ** 2
      end do

      xm = x / m
      x2m = x2 / m

      print *,"<x> =", xm
      print *,"<xš> =", x2m

```

Esse bloco de código cálcula o histograma para os resultados obtidos na parcela anterior O número de bins ou conjuntos do histograma foi escolhido como $n \sim \sqrt{N}$, onde N é a quantidade de passos.

```
!   Constroí o histograma
    xmin = nWalker(1)
    xmax = xmin

    do i = 2, m
       if(nWalker(i) < xmin) then
          xmin = nWalker(i)
       end if
       if(nWalker(i) > xmax) then
          xmax = nWalker(i)
       end if
    end do

    dx =  (xmax - xmin) / nbin

    open(unit=10,file='output.dat')
    do j = 1, nbin
       nhist = 0
       infLim = xmin + (j - 1) * dx
       supLim = xmin + j * dx

       do i = 1, m
          if(nWalker(i) >= infLim .and. nWalker(i) < supLim) then
            nhist = nhist + 1
          end if
       end do

       write(10, *) supLim , nhist
    end do
    close(10)
```

Com base nos resultados escritos no arquivo `output.dat` é criado o histograma abaixo

Esses resultados correspondem ao esperado, pois analiticamente, a posição final média pode ser calculada pela relação $\langle x \rangle = N(p-q)$, como $p+q=1$ podemos escrever a equação em termos de p, logo $q = 1-p \Rightarrow (p-q) = p-(1-p) = 2p-1$, então

$$\langle x \rangle = N(2p-1) \tag{2}$$

e a deslocamento quadrado médio é dada por $\left\langle x^2 \right\rangle = 4Npq + N^2 - 4N^2pq$, escrevendo em termos de p temos

$$\left\langle x^2 \right\rangle = 4Np(1-p) + N^2 - 4N^2p(1-p) \tag{3}$$

como $p+q=1$ e $p=1/2$ segue que $p=q \Rightarrow p-q=0$ então a posição média esperada para $p=1/2$ é $\langle x \rangle = 0$. Já o termo $\left\langle x^2 \right\rangle = 4 \cdot 1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + (1000)^2 - 4(1000)^2 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{2} = 1000 \Rightarrow \left\langle x^2 \right\rangle = 1000$.

Os valores cálculados são $\langle x \rangle = -0.00913999975$ e $\left\langle x^2 \right\rangle = 1001.44202$.

(B.2) Muitos andarilhos com $p = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

Foi generalizado o código para $p = \frac{1}{2}$ em uma dimensão, temos então esse código

```
!      Tarefa B - Cálcular <x> e <x2>
       parameter (n = 10000)
       parameter (m = 10000)

```

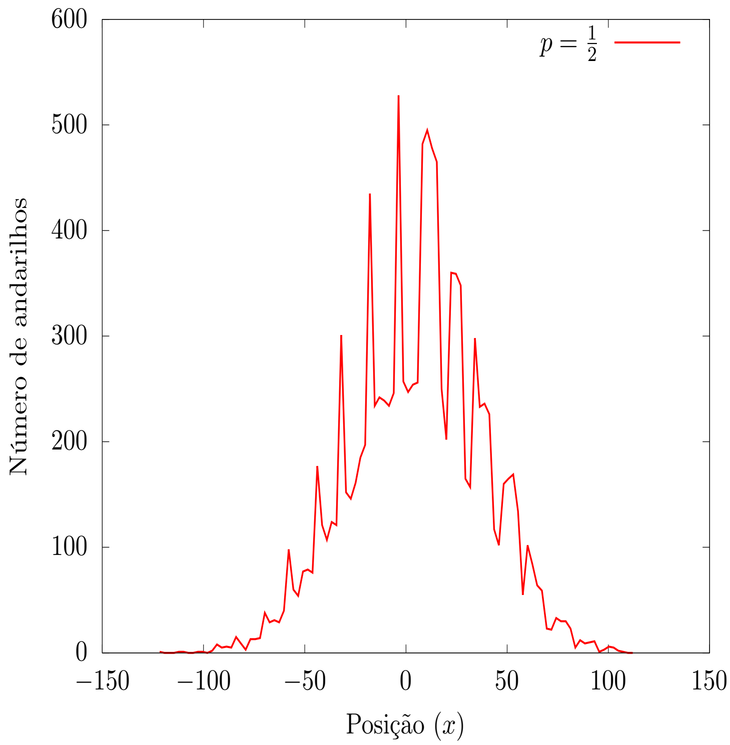

Figura 1: Simulação com $p = 1/2$.

```fortran
      parameter (nbin = 100)

      dimension nwalker(m)

      dimension istep(2)

      iStep(1) = -1
      iStep(2) = 1

      write(*,*) "p = "
      read(*, *) p

      x = 0e0
      x2 = 0e0

      r = rand(iseed)
      do i = 1, m
         nSteps = 0
         do j = 1, n
            r = rand() * int((1 / p))
!           i está no intervalo [1, int(1/p)]
            k = int((r + 1) / (1 / p)) + 1
!        Quantidade de passos dada por andarilho.
            nSteps = nSteps + iStep(k)
         end do
         nWalker(i) = nSteps
         x = x + nSteps
         x2 = x2 + nSteps ** 2
      end do
```

```
      xm = x / m
      x2m = x2 / m

      print *,"<x> =", xm
      print *,"<x2> =", x2m
```

o código fonte está na pasta `./tarefaB/tarefa-b2.f` e pode ser usado para fazer o cálculo para qualquer valor de `p`. O trecho de código que gera o histograma é o mesmo que para o anterior.

Resultados

Podemos estimar os resultados analiticamente por meio das equações (2) e (3), como $p + q = 1 \Rightarrow q = 1 - p$, com $N = 1000$. Foi compilado abaixo os resultados analíticos e estatísticos:

Tabela 2: Valores de $\langle x \rangle$ calculado pelas simulações e analiticamente com $N = 1000$.

p	Simulação	Resultado Analitico
1/3	-333.099609	-333.3337
1/4	-499.925812	-500.0
1/5	-599.990784	-600.0

Tabela 3: Valores de $\left\langle x^2 \right\rangle$ calculado pelas simulações e de forma analitica, com $N = 1000$.

p	Simulação	Resultado Analitico
1/3	111835.586	111999.9998
1/4	250667.750	250750.0
1/5	360620.500	360640.0

Abaixo estão os histogramas para as posições finais com $p = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ e $M = 10000$ andarilhos.

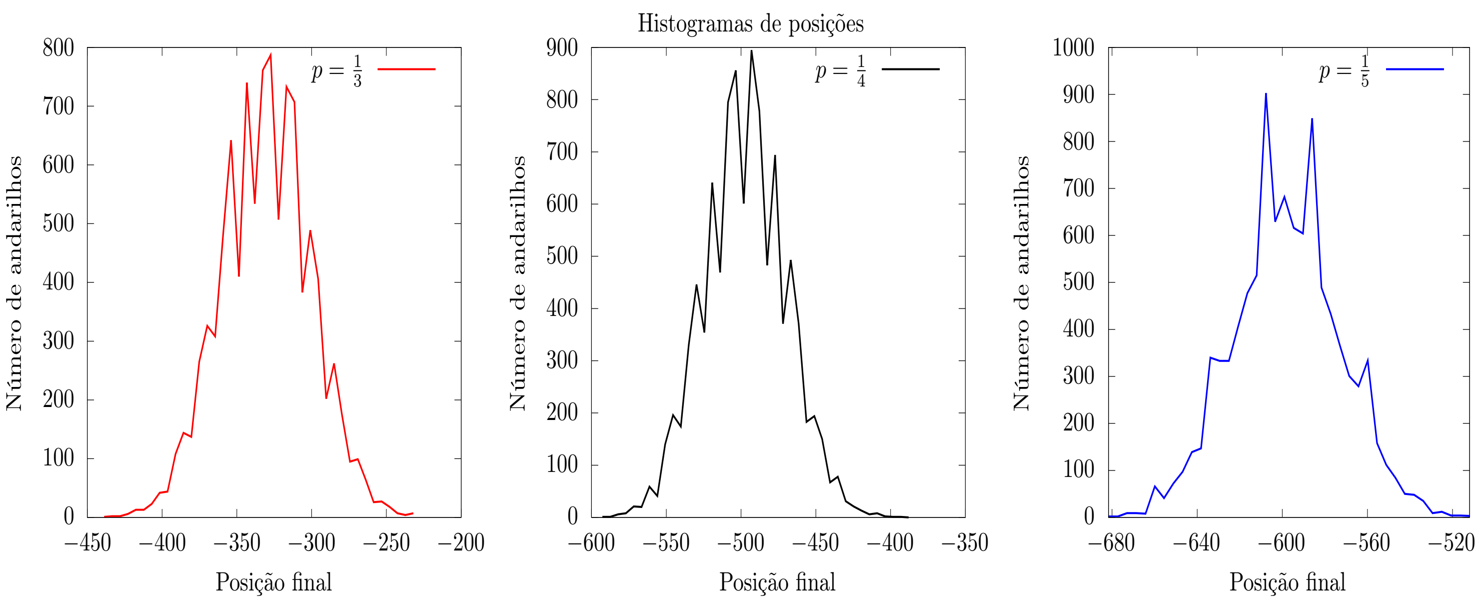

Figura 2: Simulações para $p = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, com $N = 10000$.

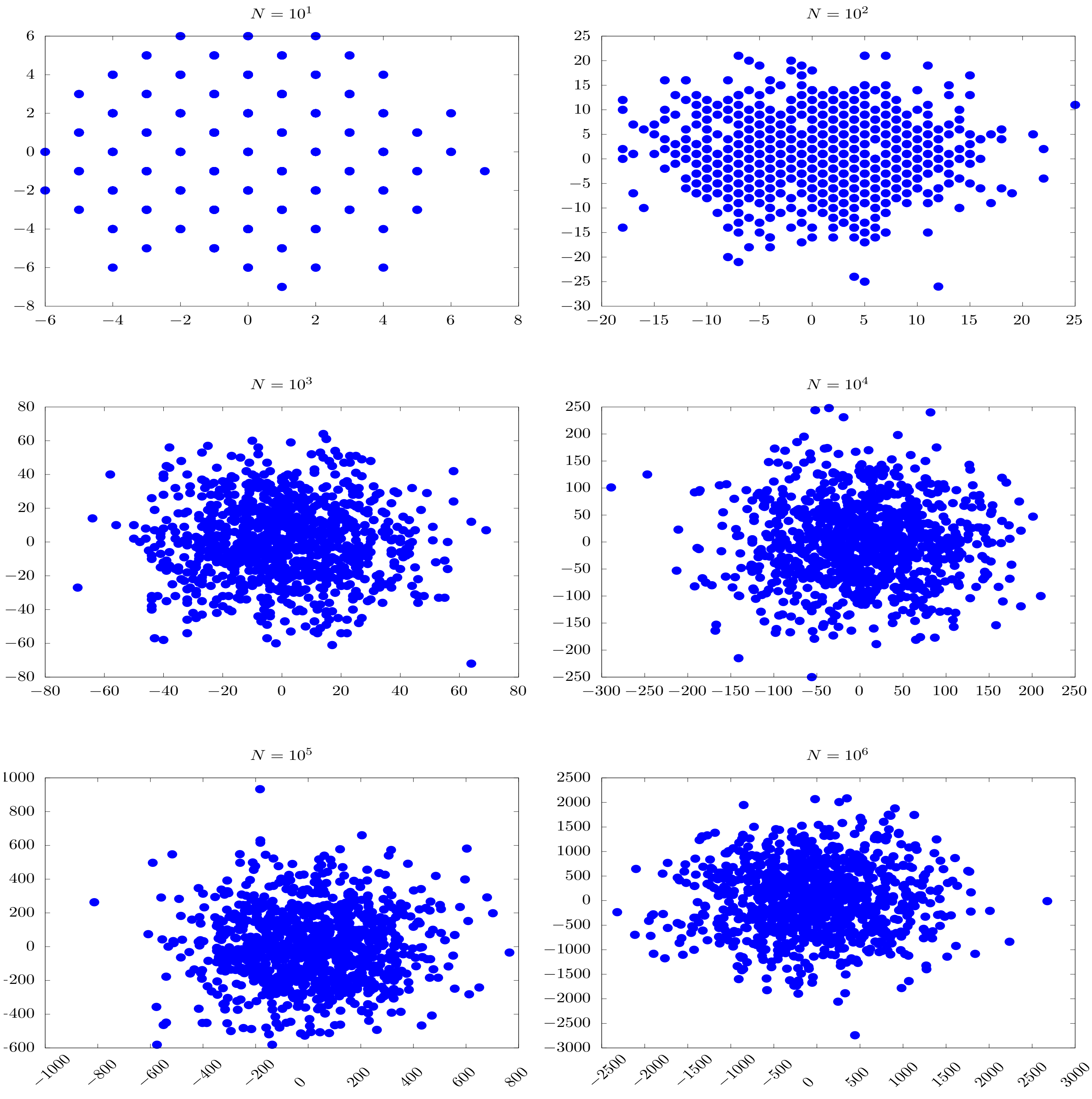

Figura 3: Gráficos de difusão de andarilhos em duas dimensões.

(C) Andarilho aleatório em 2 dimensões

(D) Cálculo da entropia