



**IFSC UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO**
Instituto de Física de São Carlos

Projeto 04

Movimento oscilatório

Jefter Santiago Mares
n° USP:12559016

12 de novembro de 2022

Conteúdo

1	Tarefa A	2
2	Tarefa B	8
3	Tarefa C	16
4	Tarefa D	18
5	Tarefa E	19
A	Demonstração da integral elíptica	i

Tarefa A

O objetivo dessa tarefa é implementar o método de Euler e o método de Euler-Cromer para discretização do sistema do pêndulo simples. Primeiramente vamos analisar as equações diferenciais que descrevem o sistema.

A força atuando no sistema pode ser escrita como $ma_\theta = ml \frac{d^2}{dt^2} \theta = -gm \sin \theta$ e podemos aproximar o seno fazendo uma expansão de Taylor, temos então

$$\sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 + \dots$$

para $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$, segue que

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta \approx -\frac{g}{l} \theta \quad (1)$$

a (1) é uma EDO linear e pode ser representada por um sistema de equações diferenciais acopladas

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta = \begin{cases} \omega = \frac{d}{dt} \theta \\ \frac{d}{dt} \omega = -\frac{g}{l} \theta \end{cases} \quad (2)$$

discretizando as (1) temos o método de Euler

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \left(\frac{g}{l}\right) \theta_i \Delta t \quad (3)$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i \Delta t \quad (4)$$

o método de Euler-Cromer é uma variação do anterior, é representado pelas equações abaixo

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \left(\frac{g}{l}\right) \theta_i \Delta t \quad (5)$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_{i+1} \Delta t \quad (6)$$

Código em Fortran

```

1      implicit real * 8 (a-h, o-z)
2
3      parameter(n = 10000)
4      parameter(tt = 100)
5      parameter(pi = acos(-1.0d0))
6
7      !      Gravidade
8      parameter(p = 9.8d0)
9      !      Comprimento
10     parameter(s = 9.8d0)
11     !      p/s = 1.0d0
12
13     dt = (tt * 1.0d0) / (n * 1.0d0)
14
15     tt1 = (2 * pi) / 48d0
16     omg1 = 0.0d0
17     e1 = - p * cos(tt1)
18
19     tt2 = tt1
20     omg2 = omg1
21     e2 = e1
22
23     open(10, file="data-oscilacoes.dat")
24     open(11, file="data-energias.dat")
25
26
27     implicit real * 8 (a-h, o-z)
28
29     parameter(n = 1000)
30     parameter(tt = 50)
31     parameter(pi = acos(-1.0d0))
32
33     !      Gravidade
34     parameter(p = 9.8d0)
35     !      Comprimento
36     parameter(s = 9.8d0)
37     dt = (tt * 1.0d0) / (n * 1.0d0)
38
39     tt1 = (2 * pi) / 48d0
40     omg1 = 0.0d0
41     e1 = (1.0d0/2.0d0)*s**2
42
43     tt2 = tt1
44     omg2 = omg1
45     e2 = e1
46
47     open(10, file="data-oscilacoes.dat")
48     open(11, file="data-energias.dat")
49

```

Listing 1: Declaração das variáveis utilizadas.

```

1      do i = 1, n
2
3          t = t + dt
4
5      !      Metodo de Euler
6          tmp_omg1 = omg1 - tt1 * dt
7          tmp_tt1 = tt1 + omg1 * dt
8
9          omg1 = tmp_omg1
10         tt1 = tmp_tt1
11
12     !      Metodo de Euler-Cromer
13         tmp_omg2 = omg2 - tt2 * dt
14         tmp_tt2 = tt2 + tmp_omg2 * dt
15
16         omg2 = tmp_omg2
17         tt2 = tmp_tt2
18
19     !      Energia do sistema
20         e1 = (1.0d0/2.0d0) * s **2 * omg1**2 + p * s * cos(tt1)
21         e2 = (1.0d0/2.0d0) * s **2 * omg2**2 + p * s * cos(tt2)
22
23         write(10, *) t, omg1, tmp_tt1, omg2, tmp_tt2
24         write(11, *) t, e1, e2
25
26     end do
27     close(10)
28     close(11)
29 end

```

Listing 2: Estrutura dos cálculos e impressão nos arquivos `saida-oscilacoes.dat` e `saida-energias.dat`

Resultados

Apesar do sistema ser oscilatório e sem presença forças dissipativas, o método de Euler apresenta um comportamento contrário ao esperado. A amplitude das oscilações aumenta com o tempo. O método pode não apresentar esse comportamento se a escala de tempo utilizada for muito curta, mas para períodos maiores de tempo fica aparente.

Para entender essa instabilidade do método podemos analisar o comportamento da energia mecânica do sistema.

$$\begin{aligned} E &= \Delta K + \Delta U \\ E &= \frac{1}{2}mv^2 + mg\Delta h \\ E &= \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 + mgl \cos \theta \end{aligned} \quad (7)$$

Note que essa equação cresce pra qualquer valor de θ conforme t aumenta, essa é a fonte da instabilidade do método de Euler. Ao contrário do método de Euler-Cromer, que consegue conservar energia sob períodos inteiros de oscilação, ele aumenta a energia do mais rapidamente e uma consequência disso é o aumento da amplitude da oscilação a cada iteração, como está claro no gráfico (1).

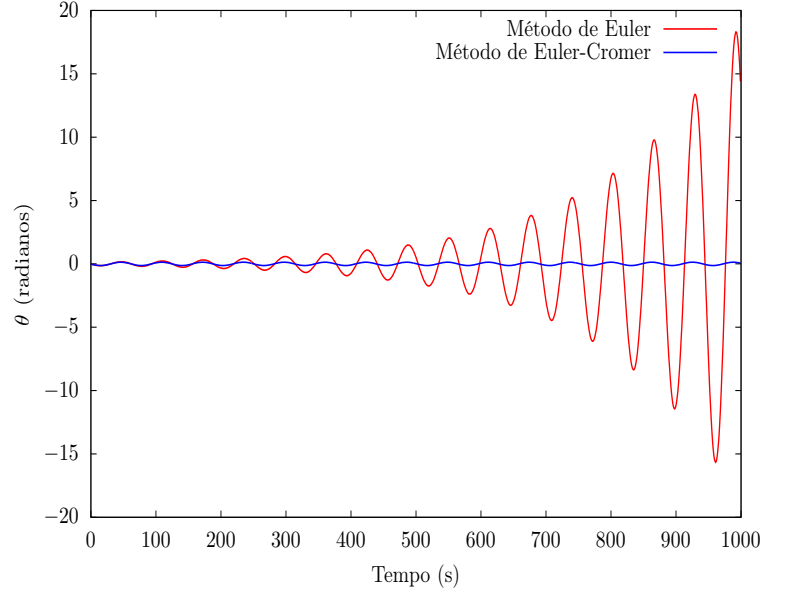


Figura 1: Valores de θ pelo tempo t usando método de Euler e o método de Euler-Cromer.

Pelo gráfico das energias calculadas pelos métodos podemos ver que o método de Euler-Cromer mantém uma energia constante, como esperado para um sistema conservativo e o método de Euler não.

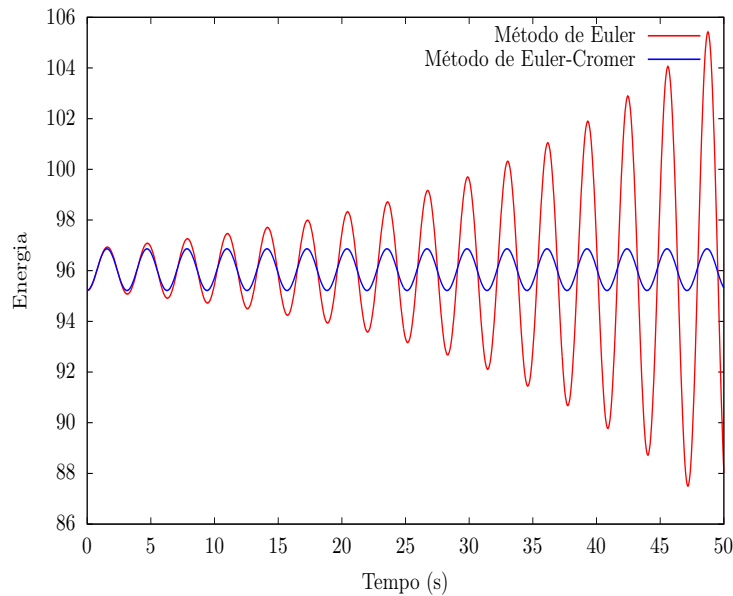


Figura 2: Energia do sistema calculada pelo método de Euler e Euler-Cromer.

Por fim, o método de Euler não é um método bom para problemas desse tipo, onde queremos analisar o comportamento oscilatórios. Para problemas que envolvem oscilações o método de Euler-Cromer apresenta maior estabilidade.

Tarefa B

B1

Para as condições dadas temos a seguinte relação

$$\frac{d}{dt}\omega = -\frac{g}{l}\sin\theta \quad (8)$$

usaremos o método de Euler-Cromer para avaliar o período do movimento do pêndulo simples em função de um θ_0 , sabemos que o sistema (8) é um pêndulo simples e então o esperado é que tenha um período equivalente a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

no programa implementado em fortran foi feita uma modificação em relação ao código (2), nesse algoritmo foi utilizada a noção de busca direta para realizar uma contagem de raízes da função calculada, ou seja, foi contado o número de vezes que o gráfico do movimento corta o eixo horizontal e por fim feito uma média que nos dá o período de oscilação. No código abaixo temos a implementação desse método

```
1  count = 0
2  do i = 1, n
3
4      t = t + dt
5
6      tmp_omg = omg - sin(tt) * dt
7      tmp_tt = tt + tmp_omg * dt
8
9      if(tmp_tt * tt < 0) then
10         count = count + 1
11     end if
12
13     omg = tmp_omg
14     tt = tmp_tt
15 end do
16
17 T = (2 * t) / count
```

Listing 3: Método de Euler-Cromer para o cálculo de período de oscilação do pêndulo simples.

O objetivo desse problema é calcular o período de um pêndulo físico usando duas fórmulas, a primeira é a (8), implementada no código acima, e a segunda usando a integral elíptica (16), para isso, é necessário fazer a discretização dessa função.

Discretização da integral elíptica

$$T(\theta_0) = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Para evitar problemas que podem ocorrer quando o denominador ficar muito próximo de zero adicionamos uma constante ϵ aos limites de integração, temos então

$$T(\theta_0) = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0+\epsilon}^{\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \quad (9)$$

podemos separar a integral em 3, e com isso encontramos podemos reduzir o cálculo dela à uma função analítica

$$T(\theta_0) = \underbrace{\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0+\epsilon}^{\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}}_{\text{Numérica}} + \underbrace{\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{-\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} + \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{\theta_0-\epsilon}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}}_{\text{Analíticas}}$$

Nesses limites de integração temos que

$$\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{-\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{\theta_0-\epsilon}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

podemos então considerar apenas uma das duas integrais, fazendo

$$A = 2\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{-\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

Resolvendo a integral temos que, $\theta \rightarrow \theta_0$, com $\theta = -\theta_0 + \varphi$ e $\varphi \rightarrow 0$, então

$$\cos \theta - \cos \theta_0 = \cos(-\theta_0 + \varphi) - \cos \theta_0 = \cos \theta_0 \cos \varphi + \sin \theta_0 \sin \varphi - \cos \theta_0$$

$$\cos \theta - \cos \theta_0 = \varphi \sin \theta_0$$

com essa relação podemos avaliar a integral no intervalo de integração $[0, \epsilon]$, fazendo a mudança de variáveis temos

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \int_0^\epsilon \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \frac{1}{\varphi} d\varphi$$

$$A = 2\sqrt{\frac{2l}{g}} \sqrt{\frac{\epsilon}{\sin \theta_0}}$$

A função do período em θ_0 é dada por

$$T(\theta_0) = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} + 2\sqrt{\frac{2l}{g}} \sqrt{\frac{\epsilon}{\sin \theta_0}} \quad (10)$$

Método de Boole

Com o ferramental adquirido no projeto anterior podemos utilizar um método de integração (nesse caso o método de Boole foi o escolhido) para avaliar a integral elíptica (16), este é dado pela seguinte relação

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{45} (7f(x) + 32f(x+h) + 12f(x+2h) + 32f(x+3h) + f(x+4h)), h = \frac{b-a}{N} \quad (11)$$

onde N é o número de iterações utilizadas para o cálculo da integral.

Ajustando a discretização da (9) para usar o método de boole temos que $h = \frac{b-a}{N}$, onde $[a, b]$ é o intervalo de integração $[a, b] = [\theta_0 + \epsilon, -\theta_0 + \epsilon]$, segue que $h = \frac{2\theta_0}{N}$. Sabemos pelo projeto anterior sobre **Cálculo Numérico** que o método de Boole pode apresentar melhor precisão para h na ordem de 10^{-5} , portanto essa será a ordem usada nessa implementação.

Código da implementação do método de Boole

```

18  !           Metodo de Boole
19      h = (2 * tt0)/n
20      do i = 0, (n/4) - 1
21
22          tt = - tt0 + 2*i*h + e
23
24          f0 = f(tt, tt0)
25          f1 = f(tt + h, tt0)
26          f2 = f(tt + 2*h, tt0)
27          f3 = f(tt + 3*h, tt0)
28          f4 = f(tt + 4*h, tt0)
29
30          sum = sum + (7*f0+32*f1+12*f2+32*f3+7*f4)
31      end do
32
33      sum = sum*(2*h/45)
34      sum = sqrt(2d0) * sum + 2 * sqrt(2d0) * sqrt(e/sin(tt0))

```

Listing 4: Calculo da integral usando método de Boole

```

35  function f(tt, tt0)
36  implicit real * 8 (a-h, o-z)
37  pi = acos(-1.d0)
38  f = 1.0d0 / sqrt(cos(tt) - cos(tt0))
39  return
40  end

```

Listing 5: Função da integral.

Resultados B1 e B2

Os métodos implementados fornecem as seguintes aproximações para alguns ângulos iniciais:

Tabela 1: Cálculo do período de oscilação para um ângulo θ_0 inicial utilizando aproximações numéricas.

θ_0	Aproximação pelo método Euler-Cromer	Integral Elíptica
$7\pi/18$	6.944444444445478	6.9470463343391113
$\pi/3$	6.7567567567578299	6.7566483723506163
$\pi/2$	7.4074074074085843	7.4566305768269627
$5\pi/6$	11.111111111112876	11.217766346528297

Para valores iniciais de $\theta_0 \leq \pi/6$, nota-se que o ângulo inicial é irrelevante na determinação do período, foram feitas aproximações afim de demonstrar que para θ_0 pequenos o período é dado por

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right) \quad (12)$$

θ_0	Aproximação pelo método de Euler-Cromer	Integral Elíptica	Forma analítica
$\pi/12$	6.3291139240516383	6.3149738926809489	6.3101004779090131
$\pi/24$	6.2893081761016276	6.2715816787230629	6.2899140998619432
$\pi/48$	6.2893081761016276	6.2508046777271904	6.2848675053501752
$\pi/96$	6.2893081761016276	6.2390644294801740	6.2836058567222342

Como esperado o comportamento do período para ângulos iniciais pequenos pode ser aproximado pela (12) e nas simulações feitas obtive até a aproximação para um erro de até 10^{-2} .

B3

Sabemos que a fórmula geral da oscilação de um do pêndulo simples é dada por

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} + F_o \sin(\Omega t) \quad (13)$$

até agora foram realizadas simulações considerando o sistema não dissipativo, nessa tarefa foi implementado o cálculo para o caso com $\gamma = 1/2$ para analisar o comportamento do sistema com forças dissipativas atuando nele.

O γ é chamado fator de amortecimento e determina o quão abrupta será a diminuição do movimento, é esperado que um sistema desse tipo, com $\gamma = \frac{1}{2}$ apresente amortecimento sub-crítico.

Código em Fortran

O código para realizar essa simulação é apenas uma alteração do método de Euler-Cromer com adição dos novos valores utilizados.

```
1  tt = 7 * pi / 18
2  do i = 1, n
3
4      t = t + dt
5
6      tmp_omg = omg - sin(tt) * dt - gamma*omg*dt
7      tmp_tt = tt + tmp_omg * dt
8
9      omg = tmp_omg
10     tt = tmp_tt
11     write(10, *) t, tmp_tt
12 end do
```

Listing 6: Rotina que realiza o cálculo com $\gamma = \frac{1}{2}$

A partir dos resultados desse programa foi gerado o gráfico (3) , que constata o que esperavamos, que o comportamento das oscilações para o γ escolhido é subcrítico.

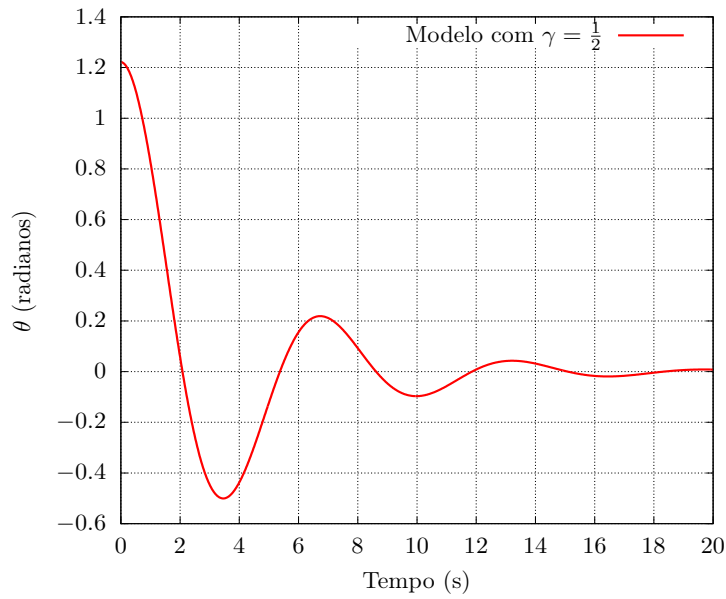
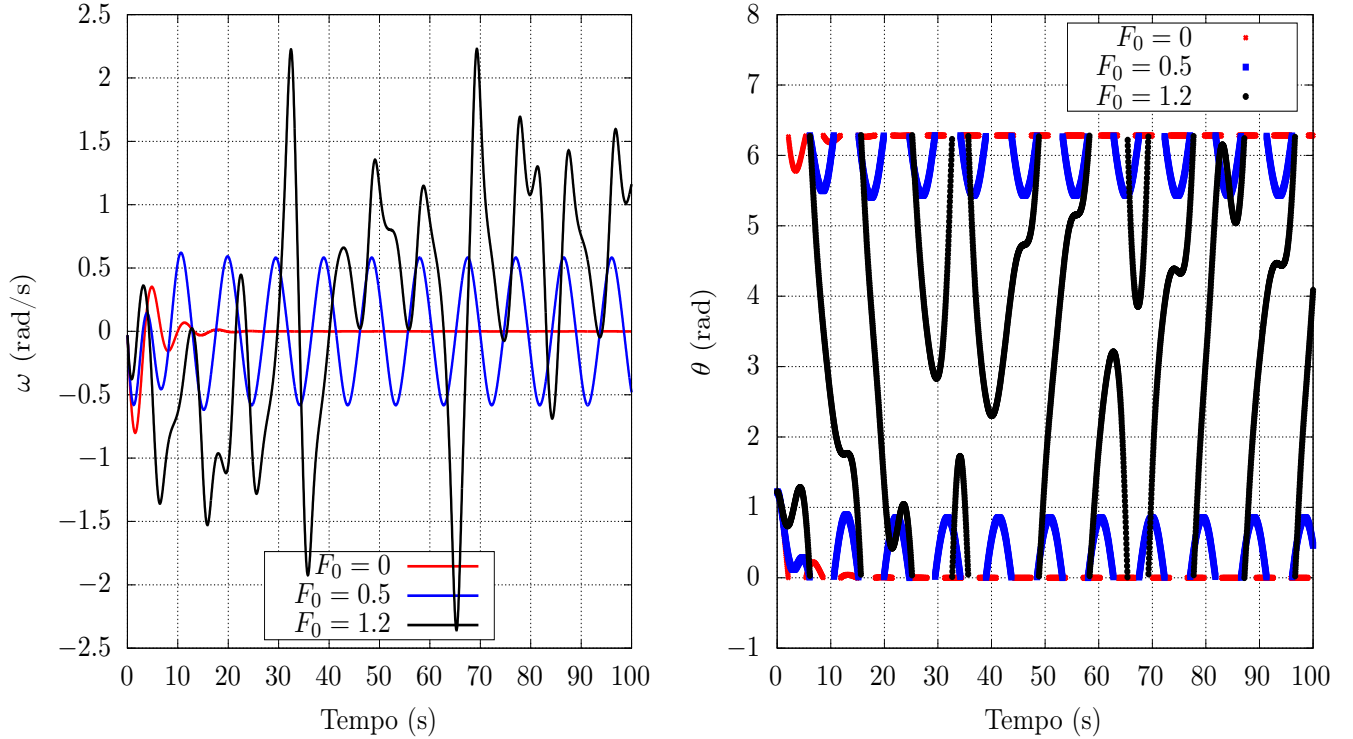


Figura 3: Gráfico de $\theta \times t$ com $\gamma = \frac{1}{2}$

B4

Dando continuidade à tarefa anterior, nesse tópico foi o objetivo é fazer simulações para o sistema com dissipações e com oscilações forçadas por forças de intensidades diferentes. Para o sistema no caso onde $\gamma = \frac{1}{2}$, $\Omega = \frac{3}{2}$ com $\Delta t = 0.03$ para $F_0 = 0$, $F_0 = \frac{1}{2}$ e $F_0 = \frac{6}{5}$ foi usada a equação (13) para criar os gráficos conjuntos de para o θ e ω em função do tempo.

Os valores iniciais das variáveis presentes no código acima são semelhantes às do 6, além deles as variáveis `count`, `count1` e `count2` usadas para o cálculo do período são inicializadas em zero.



A aproximação numérica para a frequência do caso onde $F_0 = 0$ nós dá $f = 6.4516129032256053$, esse é o caso do pêndulo com apenas forças dissipativas presentes (sistema analisado no **B3**), portanto, sabemos que a frequência tende a ser nula, já que o sistema é amortecido até não haver mais oscilação.

Para o caso de $F_0 = \frac{1}{2}$ as oscilações forçadas tem energia mantida a mesma durante toda evolução do sistema, por isso o comportamento do gráfico é o de um pêndulo simples, como estudado nas seções anteriores.

Já para $F_0 = \frac{6}{5}$ o sistema tem comportamento caótico. Uma forma de mostrar que o sistema pode ser caótico para um F_0 podemos analisar o comportamento do sistema para difentes valores iniciais de θ , isto é, mostrar que o sistema é sensível a valores iniciais e que valores minimamente diferentes podem fazer com que o sistema evolua de formas muito diferentes. O gráfico (4) ilustra bem esse fenômeno.

Por causa desse comportamento do gráfico não é possível calcular a frequência já que o sistema não é periódico durante toda sua evolução temporal.

```

1  do i = 1, n
2
3      t = t + dt
4
5      tmp_omg = omg - sin(tt)*dt-gamma*omg*dt
6      tmp_tt = tt + tmp_omg*dt
7
8      tmp_omg1 = omg1 - sin(tt1)*dt-gamma*omg1*dt+f01*sin(OM*t)*dt
9      tmp_tt1 = tt1 + tmp_omg1*dt
10
11     tmp_omg2 = omg2 - sin(tt2)*dt-gamma*omg2*dt+f02*sin(OM*t)*dt
12     tmp_tt2 = tt2 + tmp_omg2*dt
13
14     write(10,*) t, mod(tmp_tt+100*pi,-2*pi),
15 +         mod(tmp_tt1+100*pi,-2*pi), mod(tmp_tt2+100*pi,-2*pi)
16
17     write(11, *) t, tmp_omg, tmp_omg1, tmp_omg2
18
19     if(tmp_tt * tt < 0) then
20         count = count + 1
21     end if
22     if(tmp_tt2 * tt1 < 0) then
23         count1 = count1+ 1
24     end if
25     if(tmp_tt2 * tt2 < 0) then
26         count2 = count2 + 1
27     end if
28
29     omg = tmp_omg
30     tt = tmp_tt
31
32     omg1 = tmp_omg1
33     tt1 = tmp_tt1
34
35     omg2 = tmp_omg2
36     tt2 = tmp_tt2
37
38 end do
39
40 T = (2*t)/count
41 T1 = (2*t)/count1
42 T2 = (2*t)/count2
43
44 write(*, *) T, T1, T2

```

Listing 7: Código do cálculo dos θ , ω e períodos de oscilação do pêndulo.

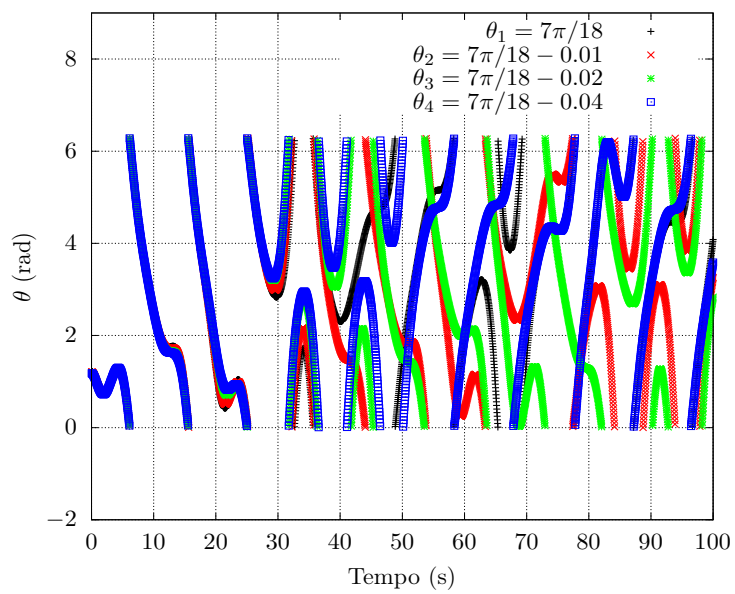


Figura 4: Gráfico de $\theta \times t$ para diferentes θ_s com $\gamma = \frac{1}{2}$, $\Omega = \frac{2}{3}$ e $F_0 = \frac{6}{5}$.

Tarefa C

Afim de analisar mais profundamente o emergência de caos podemos modelar o sistema com dois pêndulos, com θ_0 iniciais próximos tal que $\Delta\theta = 10^{-3}$, com o expoente de Liapunov conseguimos calcular a taxa de separação entre as trajetórias tomadas pelos dois pêndulos, dizemos que, para uma trajetória cujos θ se separam exponencialmente, o sistema é caótico. Abaixo está a expressão para o expoente de Liapunov

$$\Delta\theta(t) \approx e^{\lambda t} = \begin{cases} \lambda < 0 \Rightarrow \text{sistema não caótico} , \\ \lambda > 0 \Rightarrow \text{sistema caótico} \end{cases} \quad (14)$$

como queremos estimar o valor de λ , tomamos o logaritmo neperiano da relação e com isso obtemos uma relação linear, onde λ é o coeficiente angular da reta

$$\ln(|\Delta\theta(t)|) = \lambda t \quad (15)$$

As únicas alterações necessárias para realização dessa simulação em relação às anteriores são os valores de saída e a realização da subtração do ângulo dos dois pêndulos, as modificações estão no código abaixo:

```
1 f = 0.5d0 ! 1.2d0
2 do i = 1, n
3
4     t = t + dt
5
6     tmp_omg1 = omg1 - sin(tt1)*dt-gamma*omg1*dt+f*sin(OM*t)*dt
7     tmp_tt1 = tt1 + tmp_omg1*dt
8
9     tmp_omg2 = omg2 - sin(tt2)*dt-gamma*omg2*dt+f*sin(OM*t)*dt
10    tmp_tt2 = tt2 + tmp_omg2*dt
11
12    write(10, *) t, log(abs(tt2 - tt1))
13
14    omg1 = tmp_omg1
15    tt1 = tmp_tt1
16
17    omg2 = tmp_omg2
18    tt2 = tmp_tt2
19
20 end do
```

Listing 8: Código para execução da simulação .

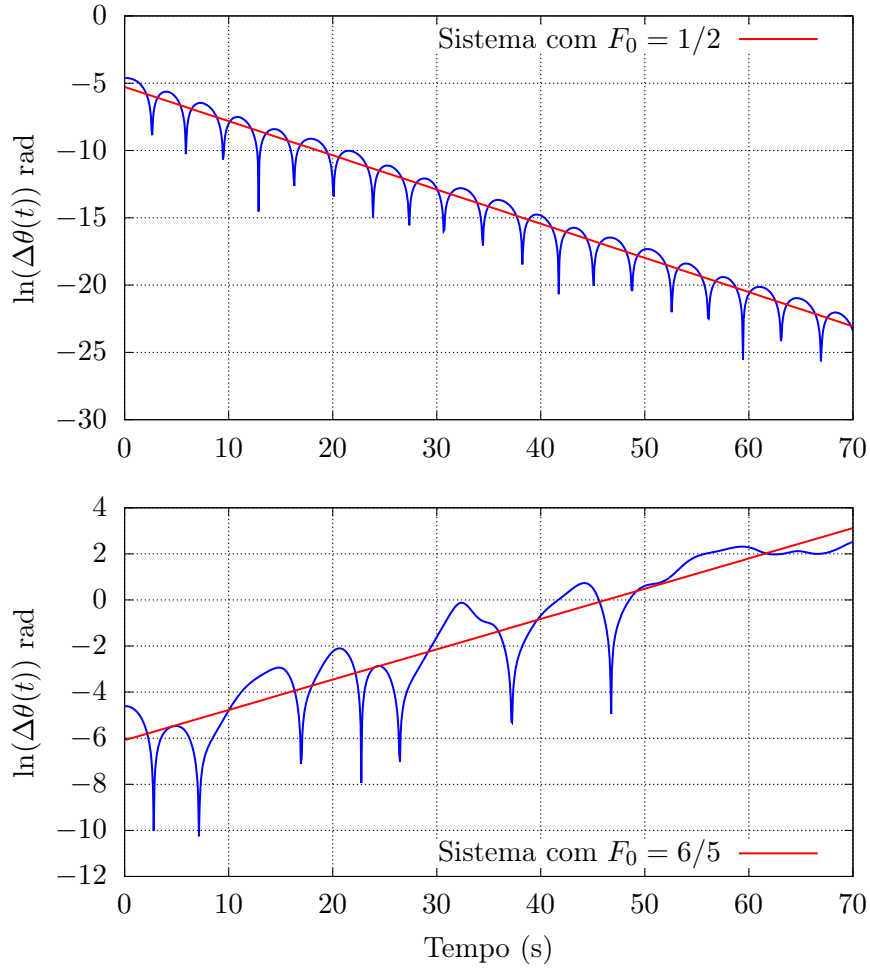


Figura 5: Gráficos $\Delta(\theta) \times t$ em escala semi-logaritmica, com $F_0 = 1/2$ e $F_0 = 6/5$, respectivamente.

O experimento é realizado para um valor inicial arbitrário igual $\theta = 7\pi/18$, onde $\Delta\theta = 0.001$ e partir dos valores coletados foi possível construir os gráficos abaixo, que foram usados nas análises à cerca do **coeficiente de Liapunov** e o comportamento determinístico ou não do sistema.

Fazendo o ajuste linear utilizando foi obtido os valores aproximados para λ , para o caso onde $F_0 = 1/2$ temos $\lambda = -0.254 \pm 0.001$ e para $F_0 = 6/5$, $\lambda = 0.131 \pm 0.001$. O valor de λ foi estimado usando o graficador **GNUPLLOT**.

A partir desses valores calculados para λ para ambas forças iniciais, podemos dizer que, para o caso onde $F_0 = 6/5$ o sistema possui comportamento caótico, pois seu $\lambda > 0$. Com isso temos uma comprovação para o resultado obtido anteriormente, quando foi tentei calcular o período de oscilação do sistema com essa mesma F_0 .

Além disso, fica claro pelo gráfico (5) que o crescimento da constante de Liapunov é exponencial, ou seja, para o caso do sistema caótico as trajetórias se afastam também exponencialmente, então o comportamento do sistema não pode ser previsto.

Tarefa D

Continuando com o sistema

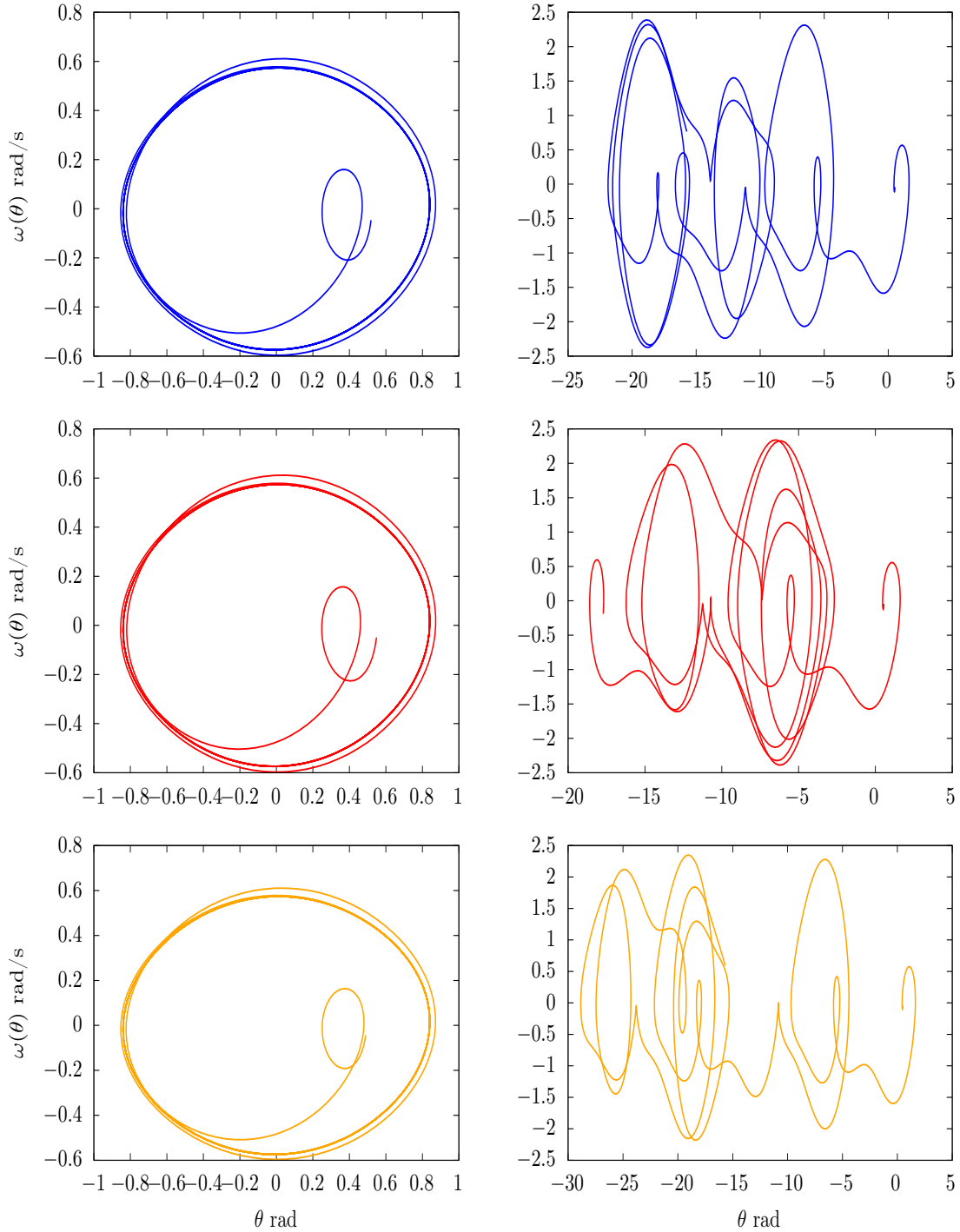


Figura 6: Gráficos de $\omega(\theta) \times \theta$ para $F_0 = 1/2$ e $F_0 = 6/5$. À esquerda gráficos para $F_0 = 1/2$ com $\theta_0 = \pi/6, \pi/6 + 0.03, \pi/6 - 0.03$, respectivamente. À direita gráficos com $F_0 = 6/5$ com $\theta_0 = \pi/6, \pi/6 + 0.03, \pi/6 - 0.03$, respectivamente.

Tarefa E

Demonstração da integral elíptica

Sabemos que a energia do sistema do pêndulo é dada pela fórmula $E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta$ e a energia inicial do sistema é $E = -mgl \cos \theta_0$, fazendo

$$-mgl \cos \theta_0 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta$$

multiplicando a equação por $(1/m)$ temos

$$-gl \cos \theta_0 = \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2 - gl \cos \theta$$

como queremos chegar numa relação que nos permite escrever o período em função do ângulo θ_0 , então vamos isolar a derivada da equação, então

$$gl(\cos \theta - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{2g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_0) = \dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta$$

integrando ambos lados no intervalo $[0, T/2]$, ou seja $[-\theta_0, \theta_0]$, temos

$$\int_0^{T/2} dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta$$

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta$$

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta = \sqrt{\frac{4l}{2g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta$$

$$\boxed{T(\theta_0) = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta}$$

(16)