UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física de São Carlos

Projeto 04

Movimento oscilatório

Jefter Santiago Mares
n° USP:12559016

12 de novembro de 2022

Conteúdo

São Carlos
2021

Tarefa A

O objetivo dessa tarefa é implementar o método de Euler e o método de Euler-Cromer para discretização do sistema do pêndulo simples. Primeiramente vamos analisar as equações diferenciais que descrevem o sistema.

A força atuando no sistema pode ser escrita como $ma_\theta = ml\frac{d^2}{dt^2}\theta = -gm\sin\theta$ e podemos aproximar o seno fazendo uma expansão de Taylor, temos então

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots$$

para $\theta \to 0 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$, segue que

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta \approx -\frac{g}{l}\theta \tag{1}$$

a (1) é uma EDO linear e pode ser representada por um sistema de equação diferenciais acopladas

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = \begin{cases} \omega = \frac{d}{dt}\theta \\ \frac{d}{dt}\omega = -\frac{g}{l}\theta \end{cases} \tag{2}$$

discretizando as (1) temos o método de Euler

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \left(\frac{g}{l}\right)\theta_i\Delta t \tag{3}$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i\Delta t \tag{4}$$

o método de Euler-Cromer é uma variação do anterior, é representado pelas equações abaixo

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \left(\frac{g}{l}\right)\theta_i\Delta t \tag{5}$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i\Delta t \tag{6}$$

Código em Fortran

```fortran
      implicit real * 8 (a-h, o-z)

      parameter(n = 10000)
      parameter(tt = 100)
      parameter(pi = acos(-1.0d0))

!     Gravidade
      parameter(p = 9.8d0)
!     Comprimento
      parameter(s = 9.8d0)
!     p/s = 1.0d0

      dt = (tt * 1.0d0) / (n * 1.0d0)

      tt1 = (2 * pi) / 48d0
      omg1 = 0.0d0
      e1 = - p * cos(tt1)

      tt2 = tt1
      omg2 = omg1
      e2 = e1

      open(10, file="data-oscilacoes.dat")
      open(11, file="data-energias.dat")


            implicit real * 8 (a-h, o-z)

            parameter(n = 1000)
            parameter(tt = 50)
            parameter(pi = acos(-1.0d0))

  !         Gravidade
            parameter(p = 9.8d0)
  !         Comprimento
            parameter(s = 9.8d0)
            dt = (tt * 1.0d0) / (n * 1.0d0)

            tt1 = (2 * pi) / 48d0
            omg1 = 0.0d0
            e1 = (1.0d0/2.0d0)*s**2

            tt2 = tt1
            omg2 = omg1
            e2 = e1

            open(10, file="data-oscilacoes.dat")
            open(11, file="data-energias.dat")

```

Listing 1: Declaração das variáveis utilizadas.

```
      do i = 1, n

         t = t + dt

!     Metodo de Euler
         tmp_omg1 = omg1 - tt1 * dt
         tmp_tt1 = tt1 + omg1 * dt

         omg1 = tmp_omg1
         tt1 = tmp_tt1

!     Metodo de Euler-Cromer
         tmp_omg2 = omg2 - tt2 * dt
         tmp_tt2 = tt2 + tmp_omg2 * dt

         omg2 = tmp_omg2
         tt2 = tmp_tt2

!     Energia do sistema
         e1 = (1.0d0/2.0d0) * s **2 * omg1**2 + p * s * cos(tt1)
         e2 = (1.0d0/2.0d0) * s **2 * omg2**2 + p * s * cos(tt2)

         write(10, *) t, omg1, tmp_tt1, omg2, tmp_tt2
         write(11, *) t, e1, e2

      end do
      close(10)
      close(11)
      end
```

Listing 2: Estrutura dos cálculos e impressão nos arquivos `saida-oscilacoes.dat` e `saida-energias.dat`

Resultados

Apesar do sistema ser oscilatório e sem presença forças dissipativas, o método de Euler apresenta um comportamento contrário ao esperado. A amplitude das oscilações aumenta com o tempo. O método pode não apresentar esse comportamento se a escala de tempo utilizada for muito curta, mas para periodo maiores de tempo fica aparente.

Para entender essa instabilidade do método podemos ánalisar o comportamento da energia mecânica do sistema.

$$E = \Delta K + \Delta U$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mg\Delta h$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 + mgl\cos\theta \tag{7}$$

Note que essa equação cresce pra qualquer valor de θ conforme t aumenta, essa é a fonte da instabilidade do método de Euler. Ao contrário do método de Euler-Cromer, que consegue conservar energia sob periodos inteiros de oscilação, ele aumenta a energia do mais rapidamente e uma consequência disso é o aumento da amplitude da oscilação a cada iteração, como está claro no gráfico (1).

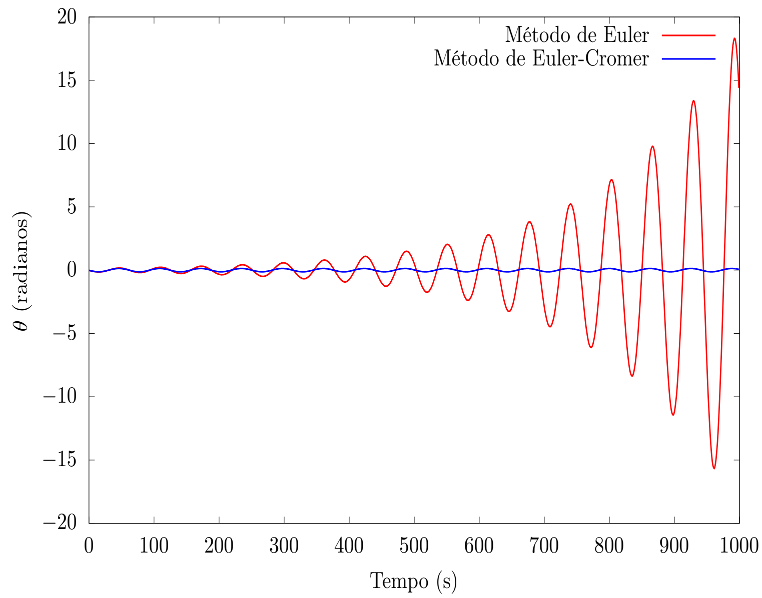


Figura 1: Valores de θ pelo tempo t usando método de Euler e o método de Euler-Cromer.

Pelo gráfico das energias calculadas pelos métodos podemos ver que o método de Euler-Cromer mantém uma energia constante, como esperdo para um sistema conservativo e o método de Euler não.

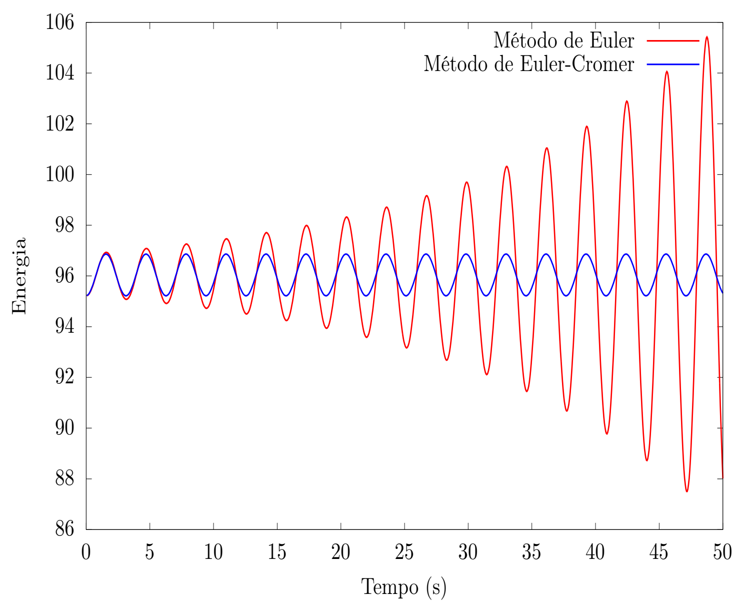


Figura 2: Energia do sistema calculada pelo método de Euler e Euler-Cromer.

Por fim, o método de Euler não é um método bom para problemas desse tipo, onde queremos analisar o comportamento oscilatórios. Para problemas que envolvem oscilações os método de Euler-Cromer apresenta maior estabilidade.

Tarefa B

B1

Para as condições dadas temos a seguinte relação

$$\frac{d}{dt}\omega = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{8}$$

usaremos o método de Euler-Cromer para avaliar o período do movimento do pêndulo simples em função de um θ_0, sabemos que o sistema (8) é um pêndulo simples e então o esperado é que tenha um período equivalente a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

no programa implementado em fortran foi feita uma modificação em relação ao código (2), nesse algoritmo foi utilizada a noção de busca direta para realizar uma contagem de raízes da função cálculada, ou seja, foi contado o número de vezes que o gráfico do movimento corta o eixo horizontal e por fim feito uma média que nos dá o período de oscilação. No código abaixo temos a implementação desse método

```fortran
count = 0
do i = 1, n

   t = t + dt

   tmp_omg = omg - sin(tt) * dt
   tmp_tt = tt + tmp_omg * dt

   if(tmp_tt * tt < 0) then
      count = count + 1
   end if

   omg = tmp_omg
   tt = tmp_tt
end do

T = (2 * t) / count
```

Listing 3: Método de Euler-Cromer para o cálculo de período de oscilação do pêndulo simples.

O objetivo desse problema é cálcular o período de um pêndulo físico usando duas fórmulas, a primera é a (8) , implemnntada no código acima, e a segunda usando a integral eliptíca (14), para isso, é necessário fazer a discretização dessa função.

Discretização da integral eliptíca

$$T(\theta_0) = \sqrt{\frac{2l}{g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Para evitar problemas que podem ocorrer quando o denominador ficar muito próximo de zero adicionamos uma constante ϵ aos limites de integração, temos então

$$T(\theta_0) = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0+\epsilon}^{\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \tag{9}$$

podemos separar a integral em 3, e com isso encontramos podemos reduzir o cálculo dela à uma função analítica

$$T(\theta_0) = \underbrace{\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0+\epsilon}^{\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}}_{\text{Numérica}} + \underbrace{\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{-\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} + \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{\theta_0-\epsilon}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}}_{\text{Analiticas}}$$

Nesses limites de integração temos que

$$\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{-\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{\theta_0-\epsilon}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

podemos então considerar apenas uma das duas integrais, fazendo

$$A = 2\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{-\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Resolvendo a integral temos que, $\theta \to \theta_0$, com $\theta = -\theta_0 + \varphi$ e $\varphi \to 0$, então

$$\cos\theta - \cos\theta_0 = cos(-\theta_0 + \varphi) - \cos\theta = \cos\theta_0 \cos\varphi + \sin\theta_0 \sin\varphi - \cos\theta_0$$

$$\cos\theta - \cos\theta_0 = \varphi \sin\theta_0$$

com essa relação podemos avaliar a integral no intervalo de integração $[0, \epsilon]$, fazendo a mudança de variáveis temos

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \int_0^{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{\sin\varphi}} \frac{1}{\varphi} d\varphi$$

$$A = 2\sqrt{\frac{2l}{g}} \sqrt{\frac{\epsilon}{\sin\theta_0}}$$

A fórmula final do periódo discretizado é

$$T(\theta_0) = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} + 2\sqrt{\frac{2l}{g}} \sqrt{\frac{\epsilon}{\sin\theta_0}} \tag{10}$$

Método de Boole

Com o ferramental adquirido no projeto anterior podemos utilizar um método de integração (nesse caso o método de Boole foi o escolhido) para avaliar a integral eliptíca (14), este é dado pela seguinte relação

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{45} \left(7f(x) + 32f(x+h) + 12f(x+2h) + 32f(x+3h) + f(x+4h)\right), h = \frac{b-a}{N} \tag{11}$$

onde N é o número de iterações utilizadas para o cálculo da integral.

Ajustando a discretização da (9) para usar o método de boole temos que $h = \frac{b-a}{N}$, onde $[a, b]$ é o intervalo de integração $[a, b] = [\theta_0 + \epsilon, -\theta_0 + \epsilon]$, segue que $h = \frac{2\theta_0}{N}$. Sabemos pelo projeto anterior sobre **Cálculo Numérico** que o método de Boole pode apresentar melhor precisação para h na ordem de 10^{-5}, portanto essa será a ordem usada nessa implementação.

Código da implementação do método de Boole

```
!         Metodo de Boole
          h = (2 * tt0)/n
          do i = 0, (n/4) - 1

             tt = - tt0 + 2*i*h + e

             f0 = f(tt, tt0)
             f1 = f(tt + h, tt0)
             f2 = f(tt + 2*h, tt0)
             f3 = f(tt + 3*h, tt0)
             f4 = f(tt + 4*h, tt0)

             sum = sum + (7*f0+32*f1+12*f2+32*f3+7*f4)
          end do

          sum = sum*(2*h/45)
          sum = sqrt(2d0) * sum + 2 * sqrt(2d0) * sqrt(e/sin(tt0))
```

Listing 4: Calculo da integral usando método de Boole

```
function f(tt, tt0)
implicit real * 8 (a-h, o-z)
pi = acos(-1.d0)
f = 1.0d0 / sqrt(cos(tt) - cos(tt0))
return
end
```

Listing 5: Função da integral.

Resultados B1 e B2

Os métodos implementados fornecem as seguintes aproximações para alguns ângulos iniciais:

Tabela 1: Cálculo do período de oscilação para um ângulo θ_0 inicial utilizando aproximações numéricas.

θ_0	Aproximação pelo método Euler-Cromer	Integral Eliptica
$7\pi/18$	6.9444444444455478	6.9470463343391113
$\pi/3$	6.7567567567578299	6.7566483723506163
$\pi/2$	7.4074074074085843	7.4566305768269627
$5\pi/6$	11.111111111112876	11.217766346528297

Para valores iniciais de $\theta_0 \leq \pi/6$, nota-se que o ângulo inicial é irrelevante na determinação do período, foram feitas aproximações afim de demonstrar que para θ_0 pequenos o período é dado por

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right) \tag{12}$$

θ_0	Aproximação pelo método de Euler-Cromer	Integral Eliptíca	Forma analítica
$\pi/12$	6.3291139240516383	6.3149738926809489	6.3101004779090131
$\pi/24$	6.2893081761016276	6.2715816787230629	6.2899140998619432
$\pi/48$	6.2893081761016276	6.2508046777271904	6.2848675053501752
$\pi/96$	6.2893081761016276	6.2390644294801740	6.2836058567222342

Como esperado o comportamento do período para ângulos iniciais pequenos pode ser aproximado pela (12) e nas simulações feitas obtive até a aproximação para um erro de até 10^{-2}.

B3

Sabemos que a fórmula geral da oscilação de um do pêndulo simples é dada por

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\theta - \gamma\frac{d\theta}{dt} + F_o\sin(\Omega t) \tag{13}$$

até agora foram realizadas simulações considerando o sistema não dissipativo, nessa tarefa vamos implementar o cálculo para o caso de $\gamma = 1/2$ afim de analizar o comportamento do sistema com forças dissipativas atuando nele.

O γ é chamado fator de amortecimento e determina o quão abrupta será a diminuição do movimento, é esperado que um sistema desse tipo, com $\gamma = \frac{1}{2}$ apresente amortecimento sub-critíco.

Código em Fortran

O código para realizar essa simulação é apenas uma alteração do método de Euler-Cromer com adição dos novos valores utilizados.

```
  tt = 7 * pi / 18
   do i = 1, n

   t = t + dt

   tmp_omg = omg - sin(tt) * dt - gamma*omg*dt
   tmp_tt = tt + tmp_omg * dt

   omg = tmp_omg
   tt = tmp_tt
   write(10, *) t, tmp_tt
end do
```

Listing 6: Rotina que realiza o cálculo com $\gamma = \frac{1}{2}$

A partir dos resultados desse programa foi gerado o gráfico (3) , que constata o que esperavamos, que o comportamento das oscilações para o γ escolhido é subcritíco.

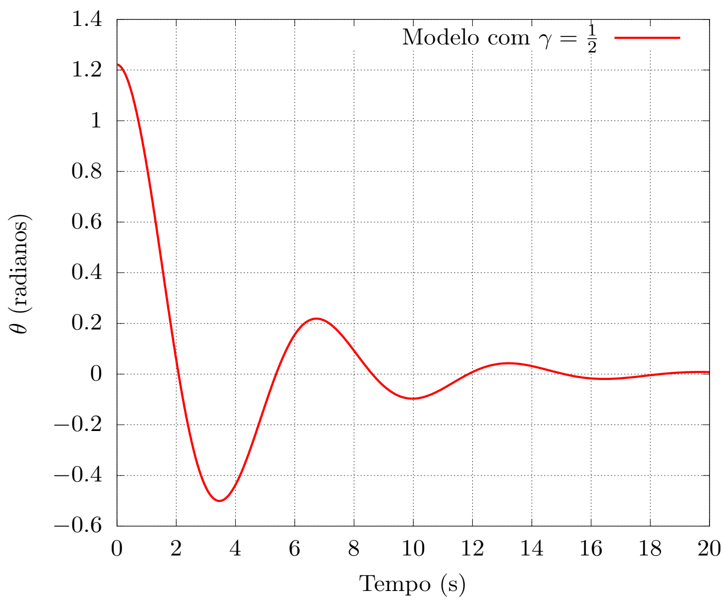
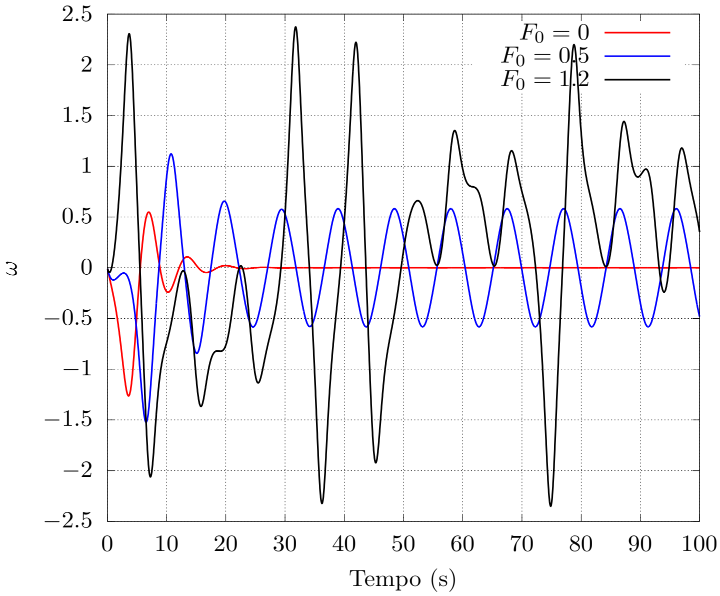
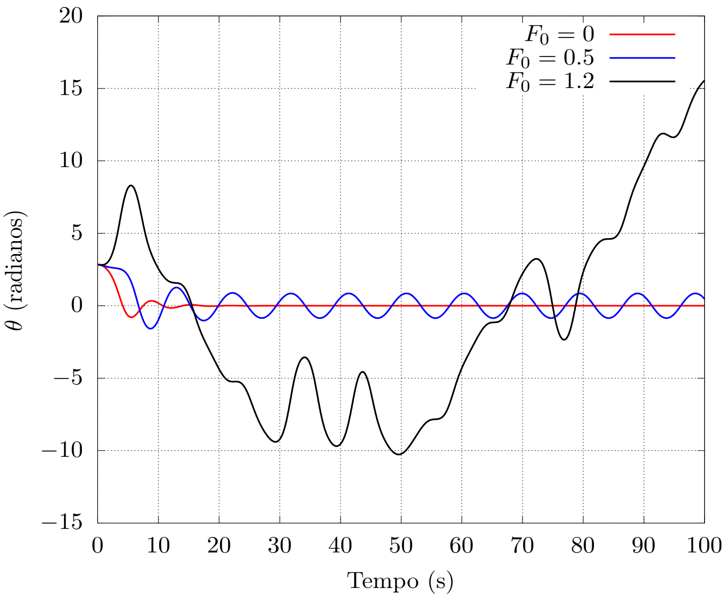


Figura 3: Gráfico de $\theta \times t$ com $\gamma = \frac{1}{2}$

B4

Analisando o sistema para o caso onde $\gamma = \frac{1}{2}$, $\Omega = \frac{3}{2}$com $\Delta t = 0.03$ para $F_0 = 0, F_0 = \frac{1}{2}$ e $F_0 = \frac{6}{5}$ temos os gráficos conjuntos de para o θ e ω em função do tempo.





A aproximação numérica para a frequência do caso onde $F_0 = 0$ nós dá $f = 6.4516129032256053$, esse é o caso do pêndulo com apenas forças dissipativas presentes (sistema analisado no **B3**), portanto, sabemos que a frequência tende a ser nula, já que o sistema é amortecido até não haver mais oscilação.

Para o caso de $F_0 = \frac{1}{2}$ as oscilações forçadas tem energia mantida a mesma durante toda evolução do sistema, por isso o comportamento do gráfico é o de um pêndulo simples, como estudado nas seções anteriores.

Já para $F_0 = \frac{6}{5}$ o sistema tem comportamento caótico. Uma forma de mostrar que o sistema pode ser caótico para um F_0 podemos analisar o comportamento do sistema para difentes valores iniciais de θ, isto é, mostrar que o sistema é sensível a valores iniciais e que valores minimamente diferentes podem fazer com que o sistema evolua de formas muito diferentes. O gráfico (4) ilustra bem esse fenômeno.

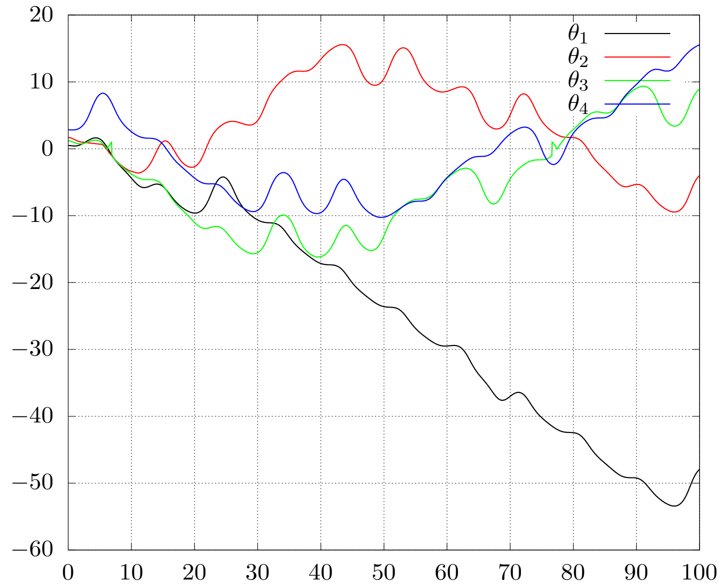


Figura 4: Gráfico de $\theta \times t$ para diferentes θ_s com $\gamma = \frac{1}{2}, \Omega = \frac{2}{3}$ e $F_0 = \frac{6}{5}$.

Por causa desse comportamento do gráfico não é possível cálcular a frequência já que o sistema não é periódioco durante toda sua evolução temporal.

Tarefa C

Tarefa D

Tarefa E

Demonstração da integral eliptíca

Sabemos que a energia do sistema do pêndulo é dada pela fórmula $E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$ e a energia inicial do sistema é $E = -mgl\cos\theta_0$, fazendo

$$-mgl\cos\theta_0 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$$

multiplicando a equação por $(1/m)$ temos

$$-gl\cos\theta_0 = \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2 - gl\cos\theta$$

como queremos chegar numa relação que nos permite escrever o período em função do angulo θ_0, então vamos isolar a derivada da equação, então

$$gl(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) = \dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta$$

integrando ambos lados no intervalo $[0, T/2]$, ou seja $[-\theta_0, \theta_0]$, temos

$$\int_0^{T/2} dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta$$

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta$$

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta = \sqrt{\frac{4l}{2g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta$$

$$\boxed{T(\theta_0) = \sqrt{\frac{2l}{g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta} \tag{14}$$