



# Projeto 04

## Movimento oscilatório

**Jefter Santiago Mares**  
n° USP:12559016

03 de dezembro de 2022

### Conteúdo

<b>1</b>	<b>Tarefa A</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Tarefa B</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Tarefa C</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>Tarefa D</b>	<b>17</b>
<b>5</b>	<b>Tarefa E</b>	<b>19</b>
<b>A</b>	<b>Demonstração da integral elíptica</b>	<b>i</b>

## Tarefa A

O objetivo dessa tarefa é implementar o método de Euler e o método de Euler-Cromer para discretização do sistema do pêndulo simples. Primeiramente vamos analisar as equações diferenciais que descrevem o sistema.

A força atuando no sistema pode ser escrita como  $ma_\theta = ml \frac{d^2}{dt^2}\theta = -gm \sin \theta$  e podemos aproximar o seno fazendo uma expansão de Taylor, temos então

$$\sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots$$

para  $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$ , segue que

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta \approx -\frac{g}{l}\theta \quad (1)$$

a (1) é uma EDO linear e pode ser representada por um sistema de equações diferenciais acopladas

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = \begin{cases} \omega = \frac{d}{dt}\theta \\ \frac{d}{dt}\omega = -\frac{g}{l}\theta \end{cases} \quad (2)$$

discretizando as (1) temos o método de Euler

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \left(\frac{g}{l}\right) \theta_i \Delta t \quad (3)$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i \Delta t \quad (4)$$

o método de Euler-Cromer é uma variação do anterior, é representado pelas equações abaixo

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \left(\frac{g}{l}\right) \theta_i \Delta t \quad (5)$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_{i+1} \Delta t \quad (6)$$

```

1   implicit real * 8 (a-h, o-z)
2
3   parameter(n = 10000)
4   parameter(tt = 100)
5   parameter(pi = acos(-1.0d0))
6
7   ! Gravidade
8   parameter(p = 9.8d0)
9   ! Comprimento
10  parameter(s = 9.8d0)
11  ! p/s = 1.0d0
12
13  dt = (tt * 1.0d0) / (n * 1.0d0)
14
15  tt1 = (2 * pi) / 48d0
16  omg1 = 0.0d0
17  e1 = - p * cos(tt1)
18
19  tt2 = tt1
20  omg2 = omg1
21  e2 = e1
22
23  open(10, file="data-oscilacoes.dat")
24  open(11, file="data-energias.dat")
25
26
27  implicit real * 8 (a-h, o-z)
28
29  parameter(n = 1000)
30  parameter(tt = 50)
31  parameter(pi = acos(-1.0d0))
32
33  ! Gravidade
34  parameter(p = 9.8d0)
35  ! Comprimento
36  parameter(s = 9.8d0)
37  dt = (tt * 1.0d0) / (n * 1.0d0)
38
39  tt1 = (2 * pi) / 48d0
40  omg1 = 0.0d0
41  e1 = (1.0d0/2.0d0)*s**2
42
43  tt2 = tt1
44  omg2 = omg1
45  e2 = e1
46
47  open(10, file="data-oscilacoes.dat")
48  open(11, file="data-energias.dat")
49

```

Listing 1: Declaração das variáveis utilizadas.

```

1      do i = 1, n
2
3          t = t + dt
4
5      ! Metodo de Euler
6          tmp_omg1 = omg1 - tt1 * dt
7          tmp_tt1 = tt1 + omg1 * dt
8
9          omg1 = tmp_omg1
10         tt1 = tmp_tt1
11
12     ! Metodo de Euler-Cromer
13         tmp_omg2 = omg2 - tt2 * dt
14         tmp_tt2 = tt2 + tmp_omg2 * dt
15
16         omg2 = tmp_omg2
17         tt2 = tmp_tt2
18
19     ! Energia do sistema
20         e1 = (1.0d0/2.0d0) * s **2 * omg1**2 + p * s * cos(tt1)
21         e2 = (1.0d0/2.0d0) * s **2 * omg2**2 + p * s * cos(tt2)
22
23         write(10, *) t, omg1, tmp_tt1, omg2, tmp_tt2
24         write(11, *) t, e1, e2
25
26     end do
27     close(10)
28     close(11)
29     end

```

Listing 2: Estrutura dos cálculos e impressão nos arquivos `saida-oscilacoes.dat` e `saida-energias.dat`

## Resultados

Apesar do sistema ser oscilatório e sem presença de forças dissipativas, o método de Euler apresenta um comportamento contrário ao esperado. A amplitude das oscilações aumenta com o tempo. O método pode não apresentar esse comportamento se a escala de tempo utilizada for muito curta, mas para períodos maiores de tempo fica aparente.

Para entender essa instabilidade do método podemos analisar o comportamento da energia mecânica do sistema.

$$E = \Delta K + \Delta U$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mg\Delta h$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2l^2 + mgl \cos \theta \quad (7)$$

Note que essa equação cresce para qualquer valor de  $\theta$  conforme  $t$  aumenta, essa é a fonte da instabilidade do método de Euler. Ao contrário do método de Euler-Cromer, que consegue conservar energia sob períodos inteiros de oscilação, ele aumenta a energia mais rapidamente e uma consequência disso é o aumento da amplitude da oscilação a cada iteração, como está claro no gráfico (1).

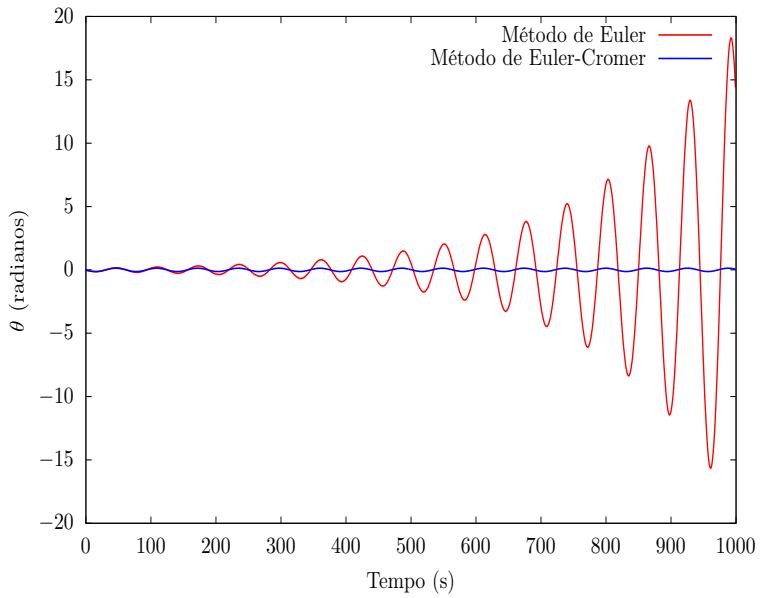


Figura 1: Valores de  $\theta$  pelo tempo  $t$  usando método de Euler e o método de Euler-Cromer.

Pelo gráfico das energias calculadas pelos métodos podemos ver que o método de Euler-Cromer mantém uma energia constante, como esperado para um sistema conservativo e o método de Euler não.

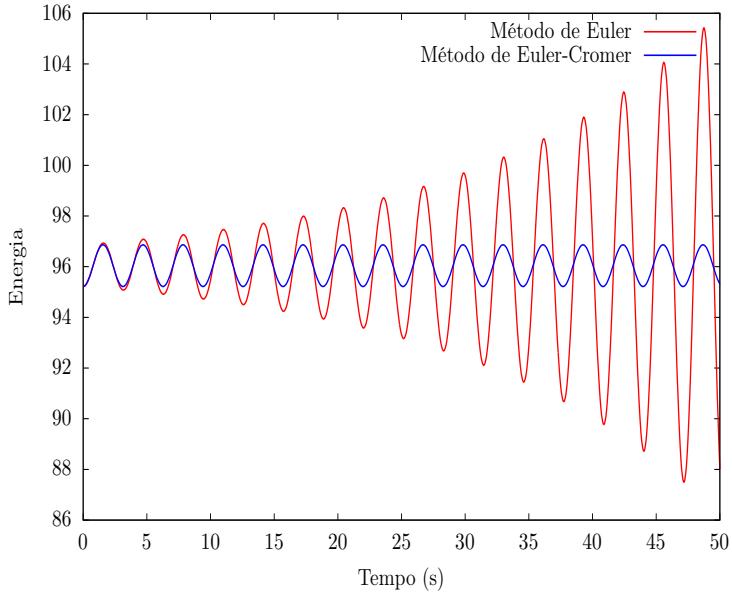


Figura 2: Energia do sistema calculada pelo método de Euler e Euler-Cromer.

Por fim, o método de Euler não é um método bom para problemas desse tipo, onde queremos analisar o comportamento oscilatórios. Para problemas que envolvem oscilações os método de Euler-Cromer apresenta maior estabilidade.

## Tarefa B

### B1

Para as condições dadas temos a seguinte relação

$$\frac{d}{dt}\omega = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (8)$$

usaremos o método de Euler-Cromer para avaliar o período do movimento do pêndulo simples em função de um  $\theta_0$ , sabemos que o sistema (8) é um pêndulo simples e então o esperado é que tenha um período equivalente a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

no programa implementado em fortran foi feita uma modificação em relação ao código (2), nesse algoritmo foi utilizada a noção de busca direta para realizar uma contagem de raízes da função calculada, ou seja, foi contado o número de vezes que o gráfico do movimento corta o eixo horizontal e por fim feito uma média que nos dá o período de oscilação. No código abaixo temos a implementação desse método

```
1 count = 0
2 do i = 1, n
3
4     t = t + dt
5
6     tmp_omg = omg - sin(tt) * dt
7     tmp_tt = tt + tmp_omg * dt
8
9     if(tmp_tt * tt < 0) then
10        count = count + 1
11    end if
12
13    omg = tmp_omg
14    tt = tmp_tt
15 end do
16
17 T = (2 * t) / count
```

Listing 3: Método de Euler-Cromer para o cálculo de período de oscilação do pêndulo simples.

O objetivo desse problema é calcular o período de um pêndulo físico usando duas fórmulas, a primera é a (8) , implementada no código acima, e a segunda usando a integral elíptica (17), para isso, é necessário fazer a discretização dessa função.

#### Discretização da integral elíptica

$$T(\theta_0) = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

Para evitar problemas que podem ocorrer quando o denominador ficar muito próximo de zero adicionamos uma constante  $\epsilon$  aos limites de integração, temos então

$$T(\theta_0) = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0+\epsilon}^{\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \quad (9)$$

podemos separar a integral em 3, e com isso encontramos podemos reduzir o cálculo dela à uma função analítica

$$T(\theta_0) = \underbrace{\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0+\epsilon}^{\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}}_{\text{Numérica}} + \underbrace{\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{-\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}}_{\text{Analíticas}} + \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{\theta_0-\epsilon}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

Nesses limites de integração temos que

$$\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{-\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{\theta_0-\epsilon}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

podemos então considerar apenas uma das duas integrais, fazendo

$$A = 2 \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{-\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

Resolvendo a integral temos que,  $\theta \rightarrow \theta_0$ , com  $\theta = -\theta_0 + \varphi$  e  $\varphi \rightarrow 0$ , então

$$\cos \theta - \cos \theta_0 = \cos(-\theta_0 + \varphi) - \cos \theta = \cos \theta_0 \cos \varphi + \sin \theta_0 \sin \varphi - \cos \theta_0$$

$$\cos \theta - \cos \theta_0 = \varphi \sin \theta_0$$

com essa relação podemos avaliar a integral no intervalo de integração  $[0, \epsilon]$ , fazendo a mudança de variáveis temos

$$\begin{aligned} \int_{-\theta_0}^{\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} &= \int_0^\epsilon \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \frac{1}{\varphi} d\varphi \\ A &= 2 \sqrt{\frac{2l}{g}} \sqrt{\frac{\epsilon}{\sin \theta_0}} \end{aligned}$$

A função do período em  $\theta_0$  é dada por

$$T(\theta_0) = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} + 2 \sqrt{\frac{2l}{g}} \sqrt{\frac{\epsilon}{\sin \theta_0}} \quad (10)$$

## Método de Boole

Com o ferramental adquirido no projeto anterior podemos utilizar um método de integração (nesse caso o método de Boole foi o escolhido) para avaliar a integral elíptica (17), este é dado pela seguinte relação

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{2h}{45} (7f(x) + 32f(x+h) + 12f(x+2h) + 32f(x+3h) + f(x+4h)), h = \frac{b-a}{N} \quad (11)$$

onde  $N$  é o número de iterações utilizadas para o cálculo da integral.

Ajustando a discretização da (9) para usar o método de boole temos que  $h = \frac{b-a}{N}$ , onde  $[a, b]$  é o intervalo de integração  $[a, b] = [\theta_0 + \epsilon, -\theta_0 + \epsilon]$ , segue que  $h = \frac{2\theta_0}{N}$ . Sabemos pelo projeto anterior sobre **Cálculo Numérico** que o método de Boole pode apresentar melhor precisão para  $h$  na ordem de  $10^{-5}$ , portanto essa será a ordem usada nessa implementação.

### Código da implementação do método de Boole

```

18 !      Metodo de Boole
19     h = (2 * tt0)/n
20     do i = 0, (n/4) - 1
21
22         tt = - tt0 + 2*i*h + e
23
24         f0 = f(tt, tt0)
25         f1 = f(tt + h, tt0)
26         f2 = f(tt + 2*h, tt0)
27         f3 = f(tt + 3*h, tt0)
28         f4 = f(tt + 4*h, tt0)
29
30         sum = sum + (7*f0+32*f1+12*f2+32*f3+7*f4)
31     end do
32
33     sum = sum*(2*h/45)
34     sum = sqrt(2d0) * sum + 2 * sqrt(2d0) * sqrt(e/sin(tt0))

```

Listing 4: Calculo da integral usando método de Boole

```

35 function f(tt, tt0)
36 implicit real * 8 (a-h, o-z)
37 pi = acos(-1.d0)
38 f = 1.0d0 / sqrt(cos(tt) - cos(tt0))
39 return
40 end

```

Listing 5: Função da integral.

## Resultados B1 e B2

Os métodos implementados fornecem as seguintes aproximações para alguns ângulos iniciais:

Tabela 1: Cálculo do período de oscilação para um ângulo  $\theta_0$  inicial utilizando aproximações numéricas.

$\theta_0$	Aproximação pelo método Euler-Cromer	Integral Elíptica
$7\pi/18$	6.9444444444455478	6.9470463343391113
$\pi/3$	6.7567567567578299	6.7566483723506163
$\pi/2$	7.4074074074085843	7.4566305768269627
$5\pi/6$	11.111111111112876	11.217766346528297

Para valores iniciais de  $\theta_0 \leq \pi/6$ , nota-se que o ângulo inicial é irrelevante na determinação do período, foram feitas aproximações assim de demonstrar que para  $\theta_0$  pequenos o período é dado por

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right) \quad (12)$$

$\theta_0$	Aproximação pelo método de Euler-Cromer	Integral Elíptica	Forma analítica
$\pi/12$	6.3291139240516383	6.3149738926809489	6.3101004779090131
$\pi/24$	6.2893081761016276	6.2715816787230629	6.2899140998619432
$\pi/48$	6.2893081761016276	6.2508046777271904	6.2848675053501752
$\pi/96$	6.2893081761016276	6.2390644294801740	6.2836058567222342

Como esperado o comportamento do período para ângulos iniciais pequenos pode ser aproximado pela (12) e nas simulações feitas obtive até a aproximação para um erro de até  $10^{-2}$ .

## B3

Sabemos que a fórmula geral da oscilação de um do pêndulo simples é dada por

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} + F_o \sin(\Omega t) \quad (13)$$

até agora foram realizadas simulações considerando o sistema não dissipativo, nessa tarefa foi implementado o cálculo para o caso com  $\gamma = 1/2$  para analizar o comportamento do sistema com forças dissipativas atuando nele.

O  $\gamma$  é chamado fator de amortecimento e determina o quanto abrupta será a diminuição do movimento, é esperado que um sistema desse tipo, com  $\gamma = \frac{1}{2}$  apresente amortecimento sub-critico.

## Código em Fortran

O código para realizar essa simulação é apenas uma alteração do método de Euler-Cromer com adição dos novos valores utilizados.

```

1   tt = 7 * pi / 18
2   do i = 1, n
3
4     t = t + dt
5
6     tmp_omg = omg - sin(tt) * dt - gamma*omg*dt
7     tmp_tt = tt + tmp_omg * dt
8
9     omg = tmp_omg
10    tt = tmp_tt
11    write(10, *) t, tmp_tt
12  end do

```

Listing 6: Rotina que realiza o cálculo com  $\gamma = \frac{1}{2}$

A partir dos resultados desse programa foi gerado o gráfico (3) , que constata o que esperavamos, que o comportamento das oscilações para o  $\gamma$  escolhido é subcritíco.

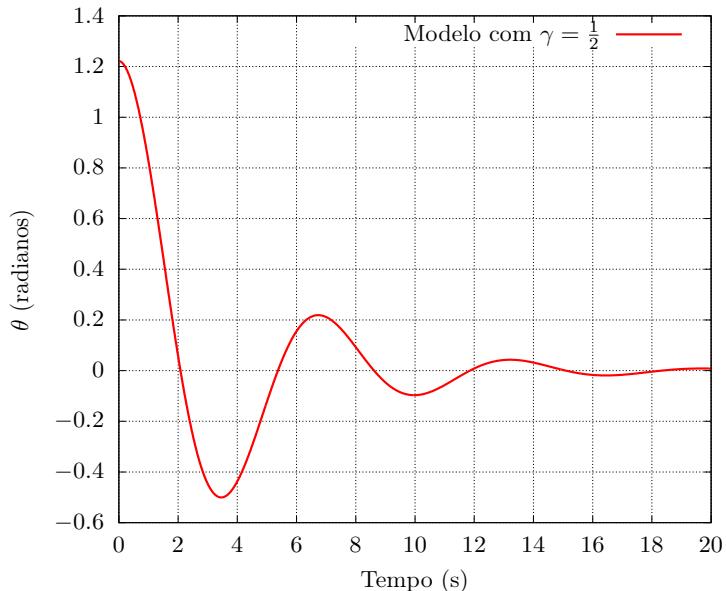
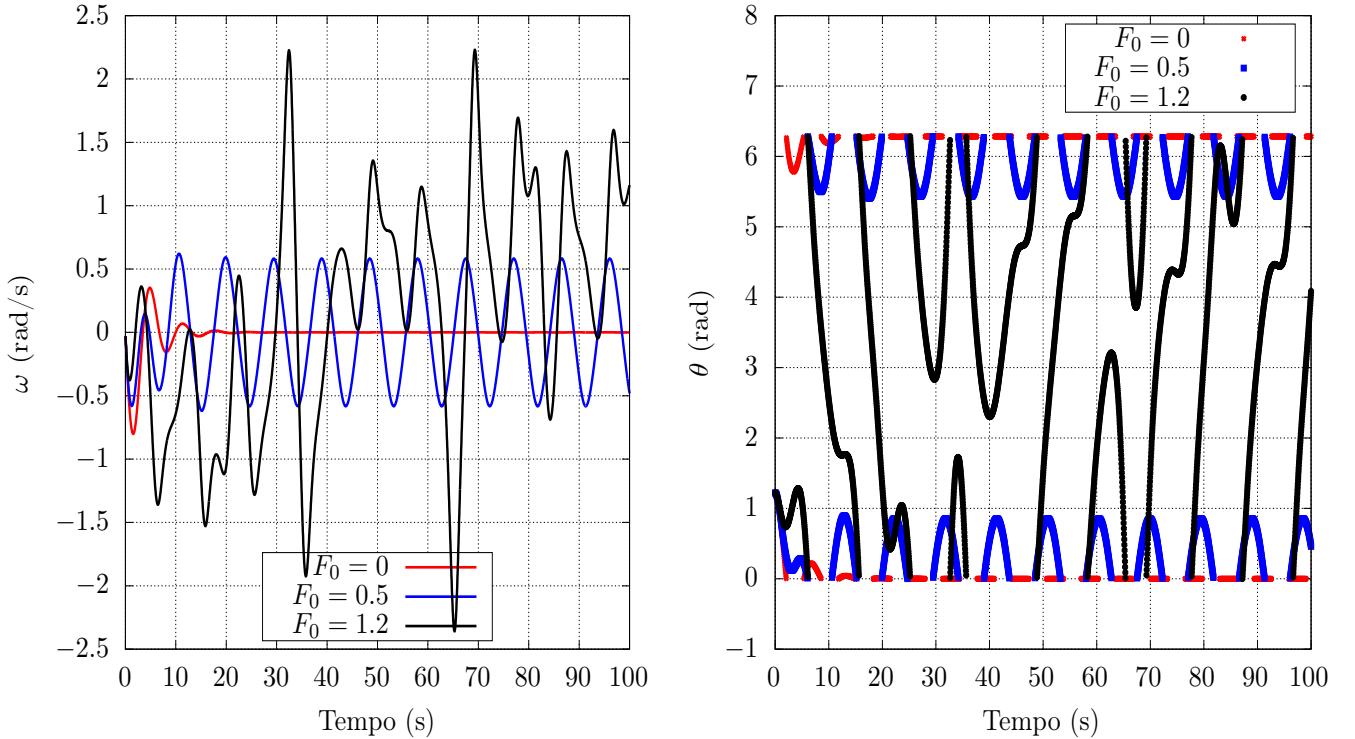


Figura 3: Gráfico de  $\theta \times t$  com  $\gamma = \frac{1}{2}$

#### B4

Dando continuidade à tarefa anterior, nesse tópico foi o objetivo é fazer simulações para o sistema com dissipações e com oscilações forçadas por forças de intensidades diferentes. Para o sistema no caso onde  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\Omega = \frac{3}{2}$  com  $\Delta t = 0.03$  para  $F_0 = 0$ ,  $F_0 = \frac{1}{2}$  e  $F_0 = \frac{6}{5}$  foi usada a equação (13) para criar os gráficos conjuntos de para o  $\theta$  e  $\omega$  em função do tempo.

Os valores iniciais das variáveis presentes no código acima são semelhantes às do 6, além deles as variáveis `count`, `count1` e `count2` usadas para o cálculo do período são inicializadas em zero.



A aproximação numérica para a frequência do caso onde  $F_0 = 0$  nós dá  $f = 6.4516129032256053$ , esse é o caso do pêndulo com apenas forças dissipativas presentes (sistema analisado no **B3**), portanto, sabemos que a frequência tende a ser nula, já que o sistema é amortecido até não haver mais oscilação.

Para o caso de  $F_0 = \frac{1}{2}$  as oscilações forçadas tem energia mantida a mesma durante toda evolução do sistema, por isso o comportamento do gráfico é o de um pêndulo simples, como estudado nas seções anteriores.

Já para  $F_0 = \frac{6}{5}$  o sistema tem comportamento caótico. Uma forma de mostrar que o sistema pode ser caótico para um  $F_0$  podemos analisar o comportamento do sistema para diferentes valores iniciais de  $\theta$ , isto é, mostrar que o sistema é sensível a valores iniciais e que valores minimamente diferentes podem fazer com que o sistema evolua de formas muito diferentes. O gráfico (4) ilustra bem esse fenômeno.

Por causa desse comportamento do gráfico não é possível calcular a frequência já que o sistema não é periódico durante toda sua evolução temporal.

```

1   do i = 1, n
2
3     t = t + dt
4
5     tmp_omg = omg - sin(tt)*dt-gamma*omg*dt
6     tmp_tt = tt + tmp_omg*dt
7
8     tmp_omg1 = omg1 - sin(tt1)*dt-gamma*omg1*dt+f01*sin(0M*t)*dt
9     tmp_tt1 = tt1 + tmp_omg1*dt
10
11    tmp_omg2 = omg2 - sin(tt2)*dt-gamma*omg2*dt+f02*sin(0M*t)*dt
12    tmp_tt2 = tt2 + tmp_omg2*dt
13
14    write(10,*), t, mod(tmp_tt+100*pi,-2*pi),
15      mod(tmp_tt1+100*pi,-2*pi), mod(tmp_tt2+100*pi,-2*pi)
16
17    write(11,*), t, tmp_omg, tmp_omg1, tmp_omg2
18
19    if(tmp_tt * tt < 0) then
20      count = count + 1
21    end if
22    if(tmp_tt2 * tt1 < 0) then
23      count1 = count1+ 1
24    end if
25    if(tmp_tt2 * tt2 < 0) then
26      count2 = count2 + 1
27    end if
28
29    omg = tmp_omg
30    tt = tmp_tt
31
32    omg1 = tmp_omg1
33    tt1 = tmp_tt1
34
35    omg2 = tmp_omg2
36    tt2 = tmp_tt2
37
38  end do
39
40  T = (2*t)/count
41  T1 = (2*t)/count1
42  T2 = (2*t)/count2
43
44  write(*,*) T, T1, T2

```

Listing 7: Código do cálculo dos  $\theta$ ,  $\omega$  e períodos de oscilação do pêndulo.

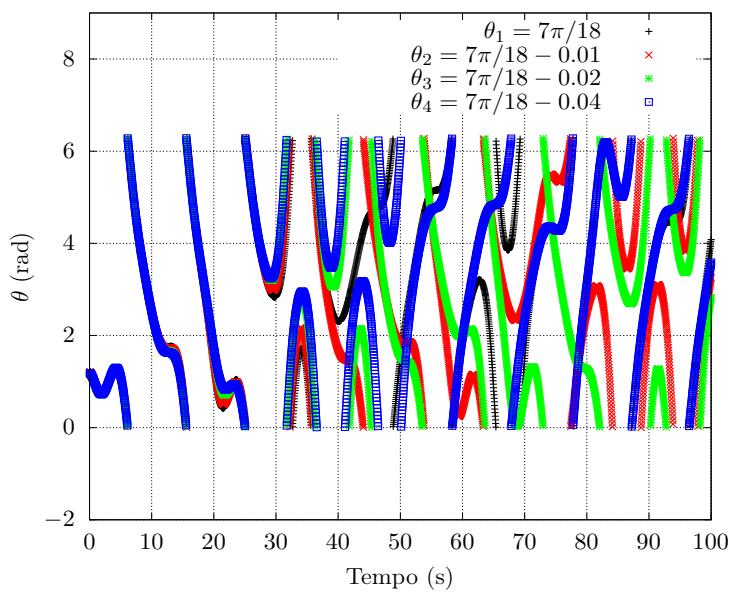


Figura 4: Gráfico de  $\theta \times t$  para diferentes  $\theta_s$  com  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\Omega = \frac{2}{3}$  e  $F_0 = \frac{6}{5}$ .

## Tarefa C

A fim de analisar mais profundamente o emergência de caos podemos modelar o sistema com dois pêndulos, com  $\theta_0$  iniciais próximos tal que  $\Delta\theta = 10^{-3}$ , com o expoente de Liapunov conseguimos calcular a taxa de separação entre as trajetórias tomadas pelos dois pêndulos, dizemos que, para uma trajetória cujos  $\theta$  se separam exponencialmente, o sistema é caótico. Abaixo está a expressão para o expoente de Liapunov

$$\Delta\theta(t) \approx e^{\lambda t} = \begin{cases} \lambda < 0 \Rightarrow \text{sistema não caótico ,} \\ \lambda > 0 \Rightarrow \text{sistema caótico} \end{cases} \quad (14)$$

como queremos estimar o valor de  $\lambda$ , tomamos o logaritmo neperiano da relação e com isso obtemos uma relação linear, onde  $\lambda$  é o coeficiente angular da reta

$$\ln(|\Delta\theta(t)|) = \lambda t \quad (15)$$

As únicas alterações necessárias para realização dessa simulação em relação às anteriores são os valores de saída e a realização da subtração do ângulo dos dois pêndulos, as modificações estão no código abaixo:

```
1 f = 0.5d0 ! 1.2d0
2 do i = 1, n
3
4     t = t + dt
5
6     tmp_omg1 = omg1 - sin(tt1)*dt-gamma*omg1*dt+f*sin(OM*t)*dt
7     tmp_tt1 = tt1 + tmp_omg1*dt
8
9     tmp_omg2 = omg2 - sin(tt2)*dt-gamma*omg2*dt+f*sin(OM*t)*dt
10    tmp_tt2 = tt2 + tmp_omg2*dt
11
12    write(10, *) t, log(abs(tt2 - tt1))
13
14    omg1 = tmp_omg1
15    tt1 = tmp_tt1
16
17    omg2 = tmp_omg2
18    tt2 = tmp_tt2
19
20 end do
```

Listing 8: Código para execução da simulação .

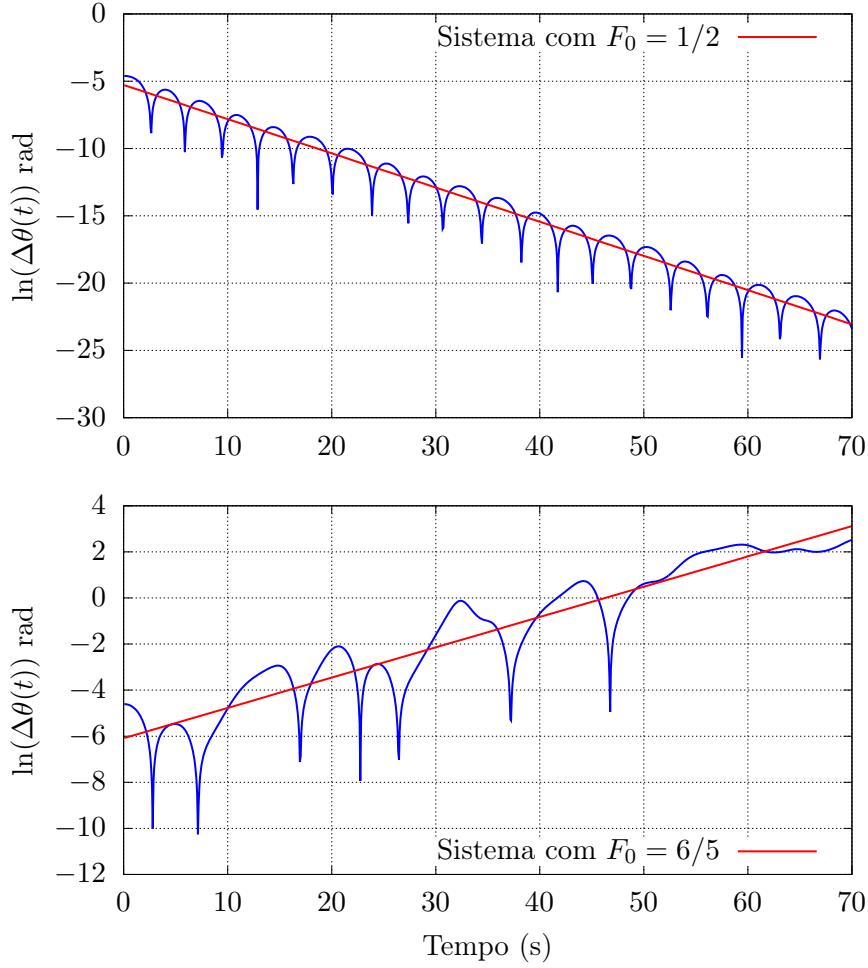


Figura 5: Gráficos  $\Delta(\theta) \times t$  em escala semi-logarítmica, com  $F_0 = 1/2$  e  $F_0 = 6/5$ , respectivamente.

O experimento é realizado para um valor inicial arbitrário igual  $\theta = 7\pi/18$ , onde  $\Delta\theta = 0.001$  e partir dos valores coletados foi possível construir os gráficos abaixo, que foram usados nas análises à cerca do **coeficiente de Liapunov** e o comportamento determinístico ou não do sistema.

Fazendo o ajuste linear utilizando foi obtido os valores aproximados para  $\lambda$ , para o caso onde  $F_0 = 1/2$  temos  $\lambda = -0.254 \pm 0.001$  e para  $F_0 = 6/5$ ,  $\lambda = 0.131 \pm 0.001$ . O valor de  $\lambda$  foi estimado usando o graficador **GNUPLOT**.

A partir desses valores calculados para  $\lambda$  para ambas forças iniciais, podemos dizer que, para o caso onde  $F_0 = 6/5$  o sistema possui comportamento caótico, pois seu  $\lambda > 0$ . Com isso temos uma comprovação para o resultado obtido anteriormente, quando foi tentado calcular o período de oscilação do sistema com essa mesma  $F_0$ .

Além disso, fica claro pelo gráfico (5) que o crescimento da constante de Liapunov é exponencial, ou seja, para o caso do sistema caótico as trajetórias se afastam também exponencialmente, então o comportamento do sistema não pode ser previsto.

## Tarefa D

Dando continuidade ao estudo de simulações para o sistema do pêndulo simples, foi foram construídos os gráficos do sistema de  $\omega \times \theta$  para as duas forças já utilizadas. Nessa etapa também utilizamos valores iniciais de  $\theta$  pequenos e próximos, variando entre eles na ordem de  $10^{-3}$ , com isso podemos mostrar que a oscilação forçada com  $F_0 = 6/5$  é caótica.

```
1 do i = 1, n
2
3     t = t + dt
4
5     tmp_omg = omg - sin(tt)*dt-gamma*omg*dt+f01*sin(OM*t)*dt
6     tmp_tt = tt + tmp_omg*dt
7
8     tmp_omg1 = omg1 - sin(tt1)*dt-gamma*omg1*dt+f02*sin(OM*t)*dt
9     tmp_tt1 = tt1 + tmp_omg1*dt
10
11    write(10, *) tmp_tt, tmp_omg
12    write(11, *) tmp_tt1, tmp_omg1
13
14    omg = tmp_omg
15    tt = tmp_tt
16
17    omg1 = tmp_omg1
18    tt1 = tmp_tt1
19
20 end do
```

Listing 9: Rotina que calcula os valores de  $\theta$ ,  $\omega$  e armazena os resultados.

Os resultados obtidos estão presentes na figura 6. Note que assim como esperado o comportamento do sistema para diferentes valores iniciais, que embora sejam pequenos, pode ser consideravelmente diferente, assim como também foi mostrado na análise do expoente de Liapunov, no item anterior. Esse resultado reafirma o fato do sistema ser caótico.

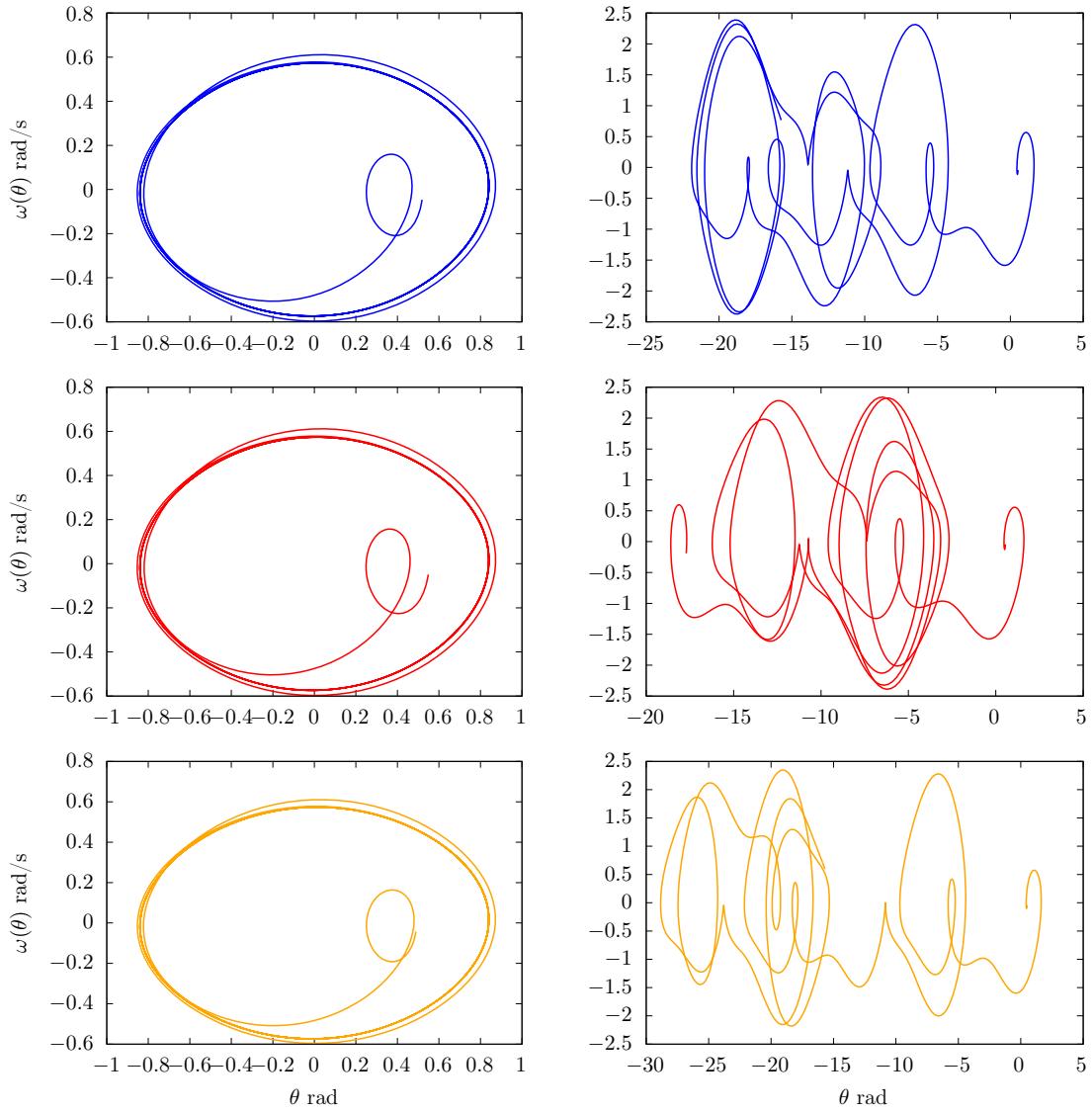


Figura 6: Gráficos de  $\omega(\theta) \times \theta$  para  $F_0 = 1/2$  e  $F_0 = 6/5$ . À esquerda gráficos para  $F_0 = 1/2$  com  $\theta_0 = \pi/6, \pi/6 + 0.03, \pi/6 - 0.03$ , respectivamente. À direita gráficos com  $F_0 = 6/5$  com  $\theta_0 = \pi/6, \pi/6 + 0.03, \pi/6 - 0.03$ , respectivamente.

## Tarefa E

Buscando encontrar uma maneira melhor de visualizar o comportamento do movimento caótico nesse tópico foi implementado o código que define uma seção (ou mapa) de Poincaré. Foi feito o gráfico de fase do movimento para cada força  $F_{01} = 1/2$  e  $F_{01} = 6/5$ , e consideramos apenas os pontos onde  $\Omega t = n\pi$  ou  $\Omega t = 2n\pi$ . O código abaixo implementa a simulação do sistema limitada pelo intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

```
1 dt = t_total / n
2
3 t = 0d0
4 tt1 = 0.2d0
5 omg1 = 0.0d0
6
7 open(unit=11, file="saida-omega-theta1.dat")
8
9 do i = 1, n
10    t = t + dt
11
12    tmp_omg1 = omg1 - sin(tt1)*dt-gamma*omg1*dt+f02*sin(0M*t)*dt
13    tmp_tt1 = tt1 + tmp_omg1*dt
14
15    do while(tmp_tt1 > pi)
16        tmp_tt1 = tmp_tt1 - 2 * pi
17    end do
18    do while(tmp_tt1 < -pi)
19        tmp_tt1 = tmp_tt1 + 2 * pi
20    end do
21    write(11, *) tmp_tt1, tmp_omg1
22
23    omg1 = tmp_omg1
24    tt1 = tmp_tt1
25 end do
26 close(11)
```

Listing 10: Rotina para gerar o gráfico 7, com  $N = 50000$  iterações e  $t_{\text{total}} = 1000$  (s).

Inicialmente foi feito o gráfico do de  $\omega(\theta)$  para todo o intervalo, com isso obtemos a imagem 7.

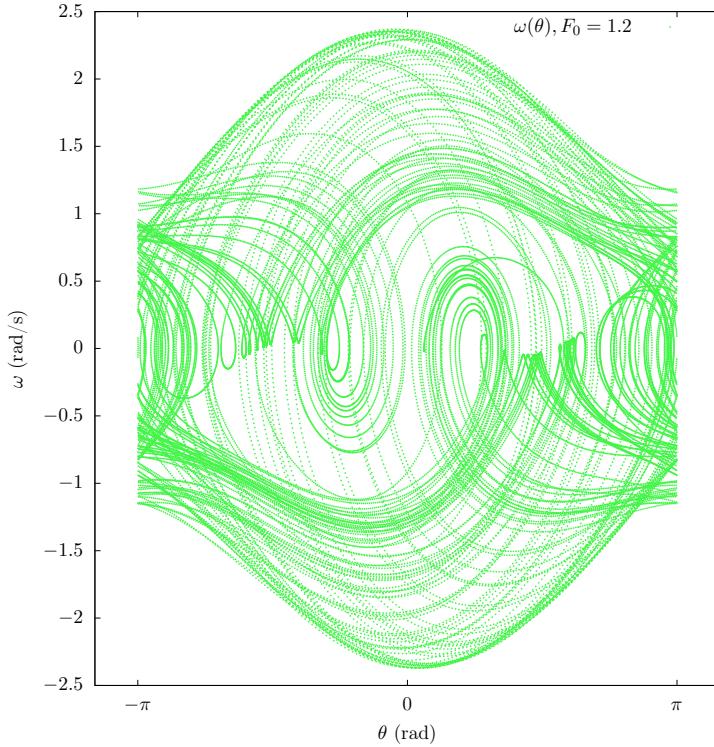


Figura 7: Gráfico de  $\omega \times \theta$  com  $F_0 = 6/5$  no intervalo de  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ .

Observando o mesmo gráfico, construído numa seção de Poincaré, ou seja, plotando somente em pontos onde os  $\omega$  e  $\theta$  estão em fase com a força, podemos analisar o comportamento desse sistema dinâmico. A seção de Poincaré é determinada pela expressão abaixo

$$\left| t - \frac{n\pi}{\Omega} \right| < \frac{\Delta t}{2} \quad (16)$$

Adicionando a condição (16) na estrutura do código do diagrama de fase (10) podemos examinar as trajetória nos tempos em que  $\theta$  e  $\omega$  estão em fase com a força  $F_0$ .

```

1 if (mod(OM*t, 2*pi) < dt/2) then
2   write(10, *) tmp_tt1, tmp_omg1
3 end if

```

Com essa condição adicionada ao código podemos construir o gráfico dos pontos na seção de Poincaré. Foram construídos gráficos do sistema com as duas forças e variando ligeiramente os valores de entrada, nos resultados podemos observar que os pontos quando a força é tal que o gráfico é caótico são "constantes" e no caso determinístico, com  $F_0 = 1/2$  o gráfico é apenas um ponto.

Variando as condições iniciais para o  $\theta$  fazendo-o semelhante aos usados na construção do 6 obtemos os seguintes gráficos, para o sistema com  $F_0 = 1/2$  e  $F_0 = 6/5$ .

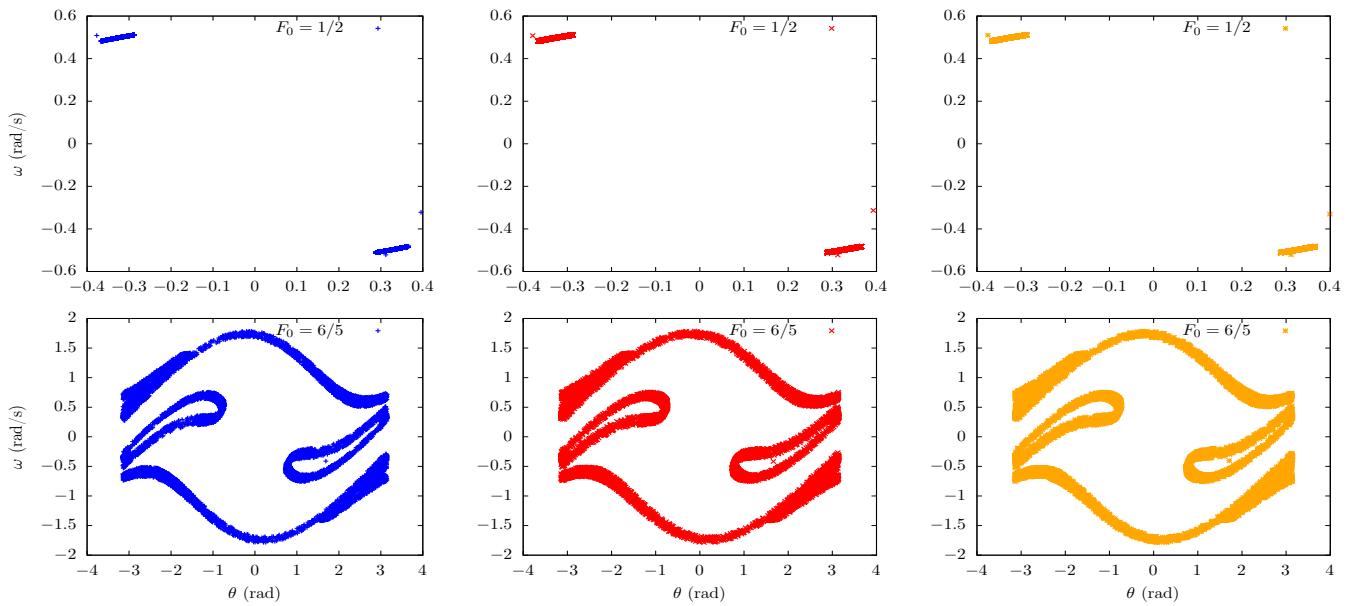


Figura 8: Gráfico de  $\omega \times \theta$  com  $F_0 = 6/5$  e  $F_0 = 1/2$  com  $\theta = 0.2, \theta = 0.2 + 0.03$  e  $\theta = 0.2 - 0.03$  iniciais.

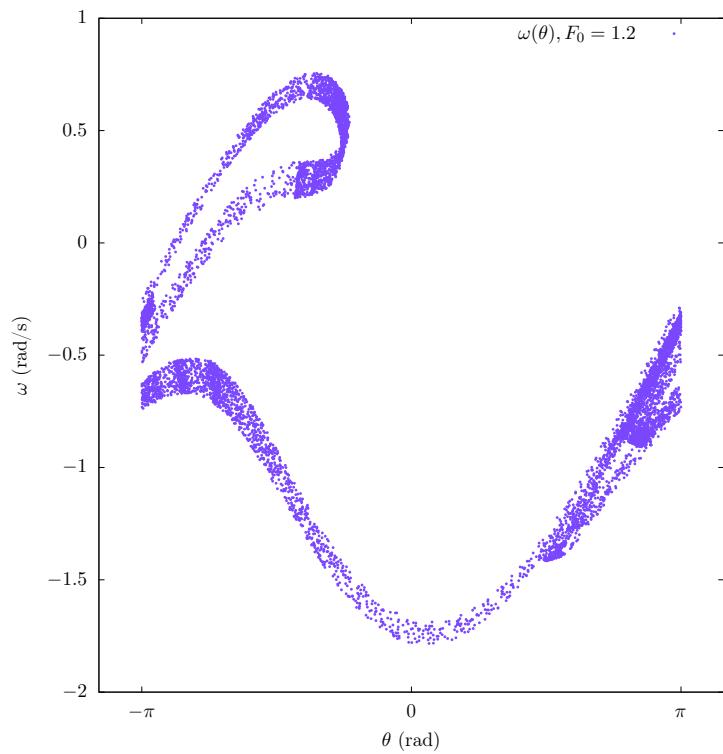


Figura 9: Gráfico a fase igual a  $2\pi$ .

## Demonstração da integral elíptica

Sabemos que a energia do sistema do pêndulo é dada pela fórmula  $E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta$  e a energia inicial do sistema é  $E = -mgl \cos \theta_0$ , fazendo

$$-mgl \cos \theta_0 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta$$

multiplicando a equação por  $(1/m)$  temos

$$-gl \cos \theta_0 = \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2 - gl \cos \theta$$

como queremos chegar numa relação que nos permite escrever o período em função do ângulo  $\theta_0$ , então vamos isolar a derivada da equação, então

$$gl(\cos \theta - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0) = \dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta$$

integrando ambos lados no intervalo  $[0, T/2]$ , ou seja  $[-\theta_0, \theta_0]$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^{T/2} dt &= \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta \\ \frac{T}{2} &= \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta \\ T &= 2 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta = \sqrt{\frac{4l}{2g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta \\ T(\theta_0) &= \boxed{\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta} \end{aligned} \tag{17}$$