UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física de São Carlos

Projeto 04

Movimento oscilatório

Jefter Santiago Mares
n° USP:12559016

12 de novembro de 2022

Conteúdo

São Carlos
2021

Tarefa A

O objetivo dessa tarefa é implementar o método de Euler e o método de Euler-Cromer para discretização do sistema do pêndulo simples. Primeiramente vamos analisar as equações diferenciais que descrevem o sistema.

A força atuando no sistema pode ser escrita como $ma_\theta = ml\frac{d^2}{dt^2}\theta = -gm\sin\theta$ e podemos aproximar o seno fazendo uma expansão de Taylor, temos então

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots$$

para $\theta \to 0 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$, segue que

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta \approx -\frac{g}{l}\theta \tag{1}$$

a (1) é uma EDO linear e pode ser representada por um sistema de equação diferenciais acopladas

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = \begin{cases} \omega = \frac{d}{dt}\theta \\ \frac{d}{dt}\omega = -\frac{g}{l}\theta \end{cases} \tag{2}$$

discretizando as (1) temos o método de Euler

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \left(\frac{g}{l}\right)\theta_i\Delta t \tag{3}$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i\Delta t \tag{4}$$

o método de Euler-Cromer é uma variação do anterior, é representado pelas equações abaixo

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \left(\frac{g}{l}\right)\theta_i\Delta t \tag{5}$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i\Delta t \tag{6}$$

Código em Fortran

```fortran
      implicit real * 8 (a-h, o-z)

      parameter(n = 1000)
      parameter(tt = 50)
      parameter(pi = acos(-1.0d0))

!     Gravidade
      parameter(p = 9.8d0)
!     Comprimento
      parameter(s = 9.8d0)
      dt = (tt * 1.0d0) / (n * 1.0d0)

      tt1 = (2 * pi) / 48d0
      omg1 = 0.0d0
      e1 = (1.0d0/2.0d0)*s**2

      tt2 = tt1
      omg2 = omg1
      e2 = e1

      open(10, file="data-oscilacoes.dat")
      open(11, file="data-energias.dat")

```

Listing 1: Declaração das variáveis utilizadas.

```fortran
      do i = 1, n

         t = t + dt

!     Metodo de Euler
         tmp_omg1 = omg1 - tt1 * dt
         tmp_tt1 = tt1 + omg1 * dt

         omg1 = tmp_omg1
         tt1 = tmp_tt1

!     Metodo de Euler-Cromer
         tmp_omg2 = omg2 - tt2 * dt
         tmp_tt2 = tt2 + tmp_omg2 * dt

         omg2 = tmp_omg2
         tt2 = tmp_tt2

!     Energia do sistema
         e1 = e1 + (1.0d0/2.0d0) * s ** 3 * (omg1**2 + tt1**2)
         e2 = e2 + (1.0d0/2.0d0) * s ** 3 * (omg2**2 + tt2**2)

         write(10, *) t, omg1, tmp_tt1, omg2, tmp_tt2
         write(11, *) t, e1, e2
      end do
      close(10)
      close(11)
      end
```

Listing 2: Estrutura dos cálculos e impressão nos arquivos `saida-oscilacoes.dat` e `saida-energias.dat`

Resultados

Apesar do sistema ser oscilatório e sem presença forças dissipativas, o método de Euler apresenta um comportamento contrário ao esperado. A amplitude das oscilações aumenta com o tempo. O método pode não apresentar esse comportamento se a escala de tempo utilizada for muito curta, mas para periodo maiores de tempo fica aparente.

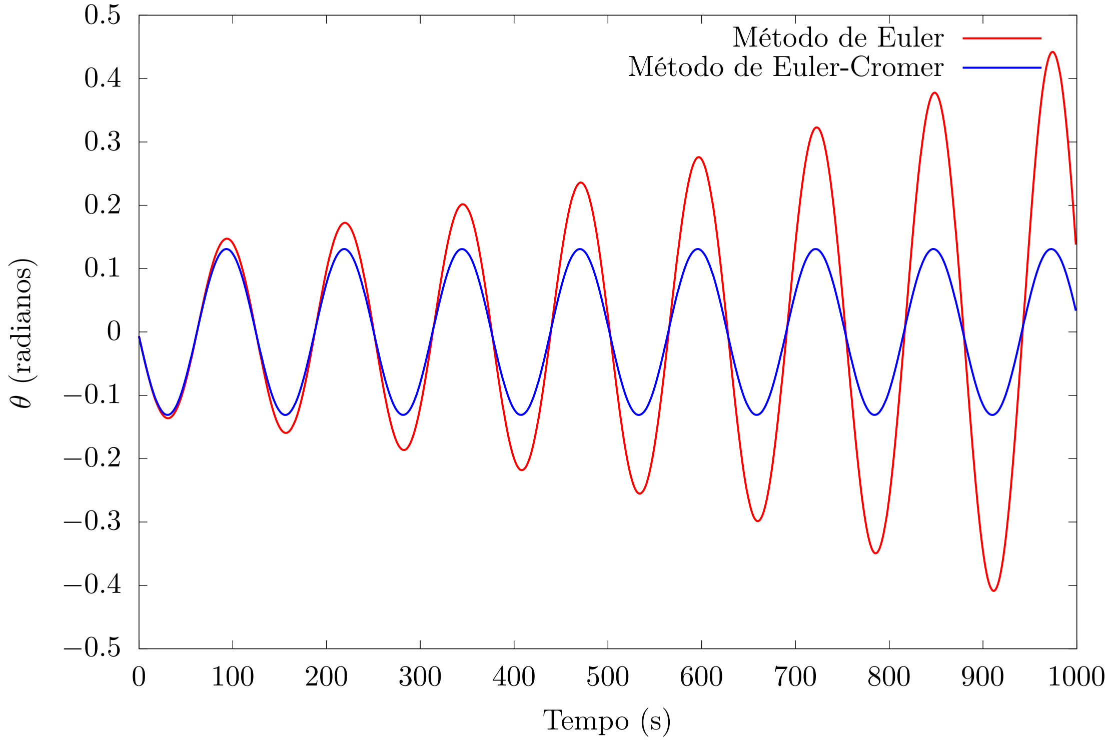


Figura 1: Valores de θ pelo tempo t usando método de Euler e o método de Euler-Cromer.

Para entender essa instabilidade do método podemos ánalisar o comportamento da energia mecânica do sistema.

$$E = \Delta K + \Delta U$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mg\Delta h$$

Fazemos $v = \omega l$ e como $\Delta U = mg(h_0 - h)$, onde h_0 é a posição mais baixa da trajetória, ou seja, a posição onde a altura onde $h_0 = l$ e $h = l\cos\theta$, então $\Delta U = mgl(1 - \cos\theta)$. Segue que

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 + mgl(1 - \cos\theta) \tag{7}$$

Note que essa equação cresce pra qualquer valor de θ conforme t aumenta, essa é a fonte da instabilidade do método de Euler. Ao contrário do método de Euler-Cromer, que consegue conservar energia sob periodos inteiros de oscilação, ele aumenta a energia do mais rapidamente e uma consequência disso é o aumento da amplitude da oscilação a cada iteração, como está claro no gráfico (1).

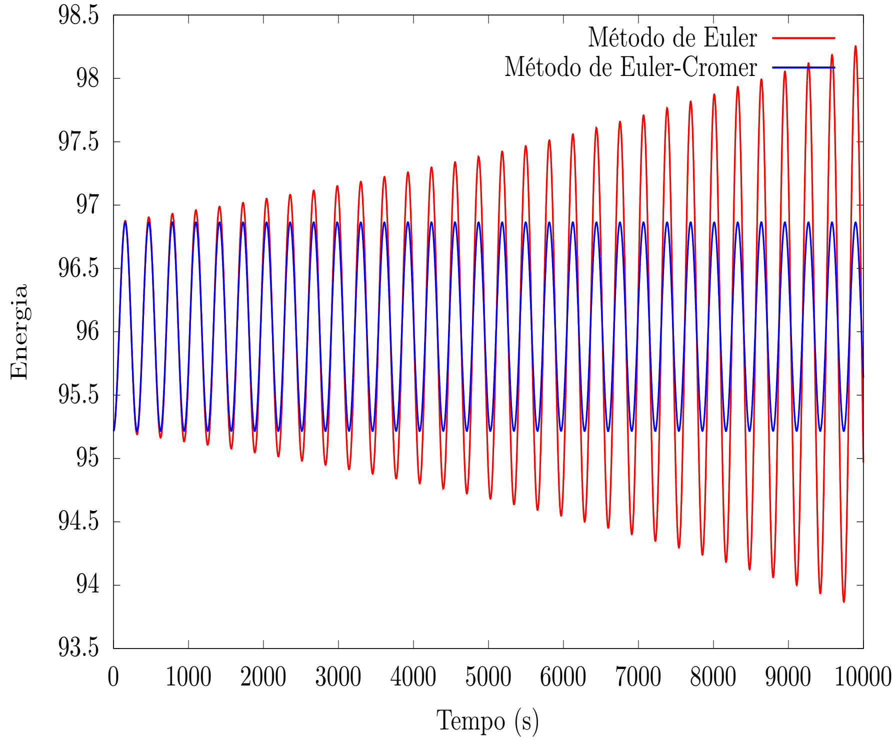
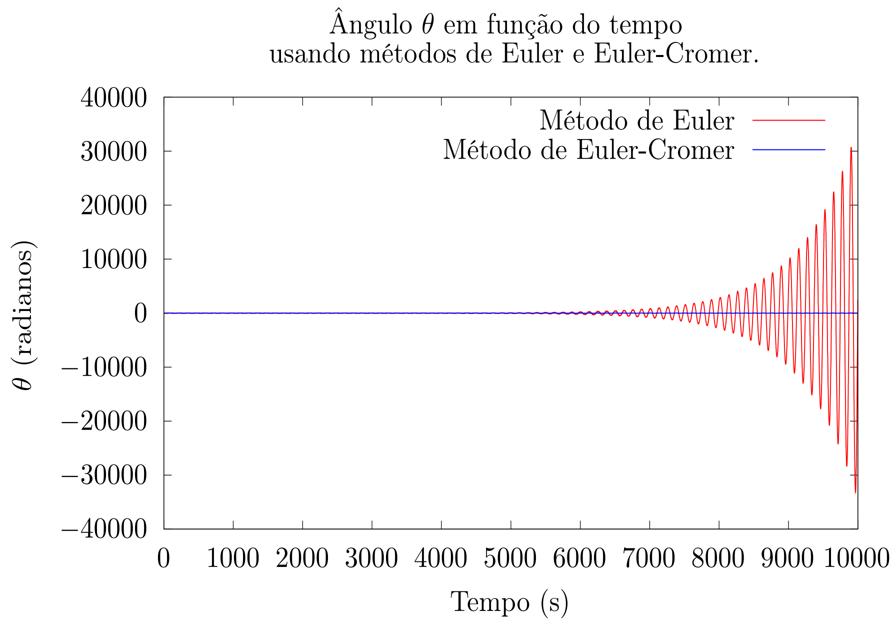


Figura 2: Energia do sistema calculada pelo método de Euler e Euler-Cromer.

Para melhor destacar esse comportamento da energia em ambos casos, foi feito o gráfico abaixo da energia cálculada para cada método em cada iteração.

Essa diferença de precisão entre os dois métodos fica ainda mais visivel para t muito grande, abaixo segue um gráfico mostrando o comportamento da oscilação e das energias para $t = 500(s)$ e $n = 10^4$ iterações.



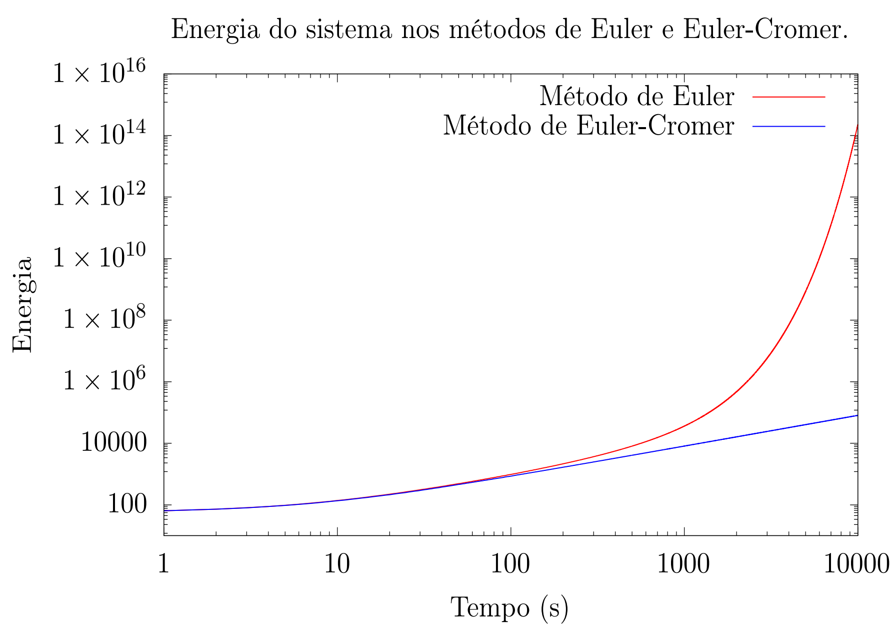


Figura 3: Gráficos com oscilações e energias usando os dois métodos para $t = 10^4$ e $n = 10^4$.

Por fim, o método de Euler não é um método bom para problemas desse tipo, onde queremos analisar o comportamento oscilatório para períodos muito longos de tempo. No entanto pode ser útil para problemas em outras escalas.

Tarefa B

Adapte o programa realizado na tarefa A para o caso abaixo, usando o algorítmo de Euler-Cromer.

$$\frac{d}{dt}\omega = -\frac{g}{l}\sin\theta - \gamma\frac{d}{dt}\theta + F_0 \sin\left(\Omega t\right), \frac{d}{dt}\theta = \omega$$

Tarefa C

Tarefa D

Tarefa E

Demonstração da integral eliptíca

Sabemos que a energia do sistema do pêndulo é dada pela fórmula $E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$ e a energia inicial do sistema é $E = -mgl\cos\theta_0$, fazendo

$$-mgl\cos\theta_0 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$$

multiplicando a equação por $(1/m)$ temos

$$-gl\cos\theta_0 = \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2 - gl\cos\theta$$

como queremos chegar numa relação que nos permite escrever o período em função do angulo θ_0, então vamos isolar a derivada da equação, então

$$gl(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) = \dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta$$

integrando ambos lados no intervalo $[0, T/2]$, ou seja $[-\theta_0, \theta_0]$, temos

$$\int_0^{T/2} dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta$$

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta$$

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta = \sqrt{\frac{4l}{2g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta$$

$$\boxed{T(\theta_0) = \sqrt{\frac{2l}{g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta} \tag{8}$$