Reeksamen 2015

Kiet Tuan Nguyen (kingu20),
Jeppe Bartel (jebar20),
Cathleen Møller (catni19),
Sarah Saeed Eriksen (saeri17),
Rói Olsen (rools20)

November 13, 2020

1 Eksamen januar 2009 opgave 1

Lad A og B være mængder af heltal. Betragt følgende fem udsagn, hvor | betyder "går op i", og ∤ betyder " går ikke op i".

(1) $\forall x \in A : \exists y \in B : 3 \mid (x + y)$
(2) $\exists y \in B : \forall x \in A : 3 \mid (x + y)$
(3) $\forall x \in A : \exists y \in B : \exists z \in Z : x + y = 3z$
(4) $\exists x \in A : \forall y \in B : 3 \nmid (x + y)$
(5) $\forall x \in A : \exists y \in B : 3 \nmid (x + y)$

a) Hvilke af udsagnene (2) – (5) er
ækvivalente med udsagn (1)?
(3)
ækvivalente med negationen af udsagn (1)?
(4)
ingen af delene?
(2) og (5)
b) Lad A = B = $\mathbb{N}_0$. Hvilke af de fem udsagn er da sande?
(1) (3) (5)

2 Skriftlig Reeksamen februar 2015, Opgave 2

a) Hvilke af følgende udsagn er sande?

1. $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x < y$
2. $\forall x \in \mathbb{N} : \exists! y \in \mathbb{N} : x < y$
3. $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x < y$

Svar: 1 og 2 er sande. 3 er falsk.

b) Angiv negeringen af udsagn 1. fra spørgsmål a). Negerings-operatoren ($\neg$) må ikke indgå i dit udsagn.

Svar:
Negeringen af kvantorerne er som følgende:
$\forall$ bliver til $\exists$, og omvendt
Desuden negeres $<$ således: $\geq$
Derfor fås det negerede udtryk:
$\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x \geq y$

3 Reeksamen februar 2015 opgave 3

Lad R, S og T være relationer på mængden 1, 2, 3, 4.

a) Lad R = (1, 1),(2, 1),(2, 2),(2, 4),(3, 1),(3, 3),(3, 4),(4, 1),(4, 4).
Er R en partiel ordning?
Ja. Da relationen er refleksiv (alle noder har en loop til sig selv), antisymmetrisk (der er ingen kanter, der går i begge retninger) og transitiv.

b) Lad S = (1, 2),(2, 3),(2, 4),(4, 2). Angiv den transitive lukning af S.
S^1 = (1, 2),(2, 3),(2, 4),(4, 2)
S^2 = (1, 3), (1, 4), (2, 2), (4, 3), (4, 4)
$S^* = S^1 \cup S^2$
S^* = (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2),(2, 3),(2, 4),(4, 2), (4, 3), (4, 4)

c) Lad T = (1, 1),(1, 3),(2, 2),(2, 4),(3, 1),(3, 3),(4, 2),(4, 4). Bemærk at T er en ækvivalens-relation.
Angiv Ts ækvivalens-klasser: (1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4).

ekstra) Angiv matricerne for de tre relationer R, S og T.
R:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
S:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
T:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 Eksamen januar 2009 opgave 3

Lad S = 1, 2, . . . , 15. Betragt følgende binære relation på S
R = (a, b) — b = 2a

a) Hvilke af nedenstående par tilhører R? Hvilke tilhører R^2?
(1, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 5), (2, 8)
// (2,4) tilhører R. (2, 8) tilhører R^2.

b) Opskriv alle par i den transitive lukning af R.
R = (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12), (7, 14).
R^2 = (1, 4), (2, 8), (3, 12).
R^3 = (1, 8)
R^* = R $\cup$R^2 $\cup$R^3
R^* = (1, 2), (1, 4), (1, 8), (2, 4), (2, 8), (3, 6), (3, 12), 4, 8), (5, 10), (6, 12), (7, 14)

ekstra) Opskriv desuden matricen, der repræsenterer relationen R, dog med S = 1, 2, ..., 6.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5 Reeksamen januar 2012 opgave 1

Betragt funktionen f : R $\rightarrow$ R *og g* : R $\rightarrow$R defineret ved

f(x) = x$^2 + x + 1$ og

g(x) = 2x - 2

a) Er f en bijektion?

Funktionen f er ikke en bijektion, da den hverken er injektiv eller surjektiv. For at en funktion er bijektiv, skal den både være injektiv og surjektiv.

b) Har f en invers funktion?

Der eksister ikke en invers funktion af f. For at være en invers funktion skal den være one-to-one og onto. Og f er ikke one-to-one.

c) Angive f + g

f(x) + g(x) = $(\mathrm{x}^2 + x + 1) + (2x - 2)$

$= \mathrm{x}^2 + 3x - 1$

d) Angiv g ∘f

$g(x) \circ g(x) = (x^2 + x + 1) \circ (2x - 2)$

$= g(f(x)) = g(x^2 + x + 1) - 2 = 2(x^2 + x + 1) - 2$

6 Reeksamen 2015 Opgave 1

I det følgende lader vi $U = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ være universet (universal set). Betragt de to mængder

$$A = \{2n \mid n \in S\} \text{ og } B = \{3n + 2 \mid n \in S\}$$

hvor $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

Angiv samtlige elementer i hver af følgende mængder

(A) A
A = {2,4,6,8}

(B) B
B = {5,8,11,14}

(C) A∩**B**
A∩**B = {8}**

(D) A∪**B**
A∪**B = {2,4,5,6,8,11,13}**

(E) $A - B$
A-B= $\{$**2,4,6**$\}$

(F) $\overline{A}$
$\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$