1. Defina el espacio muestral al lanzar dos dados. Indique su cardinalidad. Luego, indique los puntos muestrales correspondientes al evento: La suma es mayor a 8. $\rightarrow A$

$$\Omega = \{ (x,y) / \ x,y \in \{1,2,3,4,5,6\} \} = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \qquad |\Omega| = 36$$

$$A = \{ (x,y) \in \Omega / \ x+y > 8 \} = \{ (3,6), (4,5), (5,4), (6,3), (4,6), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6) \}$$

2. Una moneda es lanzada hasta que aparezca el primer sello. Identificar el espacio muestral y su cardinalidad.

$$\Omega = \{ S, CS, CCS, CCCS, \ldots \} \qquad |\Omega| = \infty$$

3. Determine si $\Lambda = \{\emptyset, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \Omega\}$ es un espacio de eventos, un álgebra y un σ-álgebra de $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

* Espacio de eventos

$\phi \in \Lambda$, $\Omega \in \Lambda$, $\{1,3,5\} \in \Lambda$, $\{2,4,6\} \in \Lambda$ $\Rightarrow$ sí es un espacio de eventos

* Álgebra

✓ 1) $\Omega \in \Lambda$

✓ 2) $\left.\begin{array}{l} \Omega \in \Lambda, \ \Omega^c = \phi \in \Lambda \\ \{1,3,5\} \in \Lambda, \ \{1,3,5\}^c = \{2,4,6\} \in \Lambda \end{array}\right\}$ cerrado por complementos

3) $\left.\begin{array}{l} \Omega \in \Lambda, \ \phi \in \Lambda, \ \Omega \cup \phi = \Omega \in \Lambda \\ \{1,3,5\} \in \Lambda, \ \{2,4,6\} \in \Lambda, \ \{1,3,5\} \cup \{2,4,6\} = \Omega \in \Lambda \end{array}\right\}$ cerrado por uniones finitas

Por tanto, sí es un álgebra

* σ-álgebra : Se cumple 1), 2), y se verifica uniones numerables:

Puesto que $|\Lambda| = 4 < \infty$, al ser una colección finita, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ se torna una unión finita, donde $A_n \subseteq \Lambda$

Sí es σ-álgebra

4. Sea el espacio muestral $\Omega = \{a, b, c\}$ y considere los siguientes espacios de eventos $\Lambda_1 = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b, c\}\}$ y $\Lambda_2 = \{\emptyset, \Omega, \{b\}, \{a, c\}\}$. ¿Es $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ un σ-álgebra? ¿Es $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ un σ-álgebra?

$A = \Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \{\phi, \Omega\}$

1) $\Omega \in A$

2) $\phi \in A$, $\phi^c = \Omega \in A$

3) $\phi \in A$, $\Omega \in A$, $\phi \cup \Omega = \Omega \in A$

Se cumple que es cerrado bajo unión finita, y dado que $|A| < \infty$, entonces también cumple para unión numerable.

Es σ-álgebra

$B = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 = \{\phi, \Omega, \{a\}, \{b\}, \{b,c\}, \{a,c\}\}$

1) $\Omega \in B$

2) $\phi \in B$, $\phi^c = \Omega \in B$

$\{a\} \in B$, $\{b,c\} \in B$

$\{b\} \in B$, $\{a,c\} \in B$

B es cerrado bajo complementos

3) $\{a\} \in B$, $\{b\} \in B$, $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\} \notin B$

B no es cerrado bajo unión finita, tampoco lo será bajo unión numerable.

B no es cerrado bajo unión finita, lo que imposibilita que sea un álgebra, y en consecuencia tampoco será σ-álgebra

5. En control de calidad, las piezas se clasifican en {defectuosa, no defectuosa}. Construya una σ-álgebra.

$\Omega = \{ D, D^c \}$

- $A_1 = \{ \Omega, \phi \}$
- $A_2 = \mathcal{P}(\Omega) = \{ \phi, \{D\}, \{D^c\}, \Omega \}$

6. Para tráfico de red medido en Mbps, una partición operativa divide el tráfico en $(0, 10]$ Mbps como normal, $(10, 50]$ elevado y $(50, \infty)$ congestión. Construya una σ-álgebra.

$\Omega = \{ N, E, C \}$

$A = \{ \phi, \{N\}, \{E\}, \{C\}, \{N \cup E\}, \{N \cup C\}, \{E \cup C\}, \Omega \}$

$\Omega = (0, \infty)$

$B = \{ \phi, (0,10], (10,50], (50,\infty), (10,\infty), (0,10] \cup [50,\infty), (0,50], \Omega \}$

7. En una fábrica, 4% de piezas son defectuosas. De las defectuosas, 90% son detectadas. Calcular la probabilidad de que una pieza sea defectuosa dado que fue detectada.

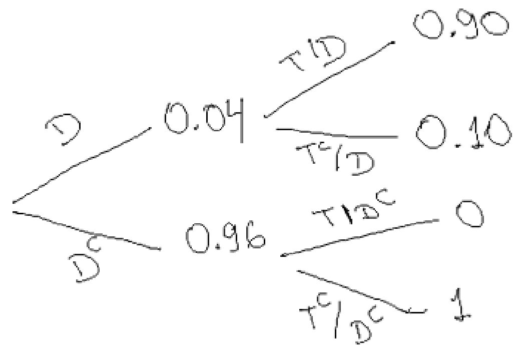
$D = \{\text{Pieza defectuosa}\}$

$T = \{\text{Pieza detectada}\}$

$P(D) = 0.04$

$P(T|D) = 0.90$

$P(D|T) = \dfrac{0.036}{0.036} = 1$



$$P(T) = P(T \cap D) + P(T \cap D^c)$$
$$= 0.04 \times 0.90 + 0.96 \times 0 = 0.036$$

8. Una biblioteca tiene 10 libros de Matemática, 6 libros de Física y 4 libros de Estadística en una mesa. Se seleccionan tres libros al azar, uno tras otro, sin reposición. Calcule la probabilidad de que:

a) Los libros seleccionados, en orden, sean: Física, Estadística y Matemática.

b) Los tres libros sean de la misma materia.

c) Los tres libros sean de distinta materia.

d) Exactamente dos libros sean de Matemática.

e) Se seleccionen libros de al menos dos materias diferentes.

a) $A = \{$ Seleccionar un libro de física, uno de estadística y uno de matemática, en ese orden $\}$

$$P(A) = \frac{6}{20} \times \frac{4}{19} \times \frac{10}{18} = 0.035$$

b) $B = \{$ seleccionar 3 libros de la misma materia $\}$

$$P(B) = \frac{C_3^{10} C_0^{10}}{C_3^{20}} + \frac{C_3^{6} C_0^{14}}{C_3^{20}} + \frac{C_3^{4} C_0^{16}}{C_3^{20}} = 0.126$$

c) $C = \{$ Seleccionar 3 libros de distinta materia $\}$

$$P(C) = \frac{C_1^{10} C_1^{6} C_1^{4}}{C_3^{20}} = 0.2105$$

d) $D = \{$ Seleccionar 2 libros de matemática y 1 de otra mat $\}$

$$P(D) = \frac{C_2^{10} C_1^{10}}{C_3^{20}} = 0,394$$

e) $E = \{$ Seleccionar libros de al menos 2 mat. dif. $\}$

$P(E) = 1 - P(B) = 1 - 0.126 = 0.874$

9. En un dado, verifique si los eventos “Obtener un número par” y “Obtener un número mayor a 3” son independientes.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{\text{Obtener un número par}\} = \{2, 4, 6\}$

$B = \{\text{Obtener un número mayor a 3}\} = \{4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{4, 6\}$

- ¿$P(A \cap B) = P(A)P(B)$?

  $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cap B) = 2/6 \neq 0.5 \times 0.5$ $\Rightarrow$ A y B no son independientes

- ¿$P(A|B) = P(A)$?

  $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/3}{1/2} = 2/3 \neq 0.5$ $\Rightarrow$ A y B no son independientes

10. En una pastelería se venden 10 tipos de pasteles. Un comprador pide x pasteles y el pastelero escoge al azar los x pasteles. Suponiendo que hay varios pasteles de cada tipo disponible, ¿cuál es la probabilidad de que escoja x pasteles diferentes? Evalúe como varía la probabilidad a medida que x varía.

Para $x=2$

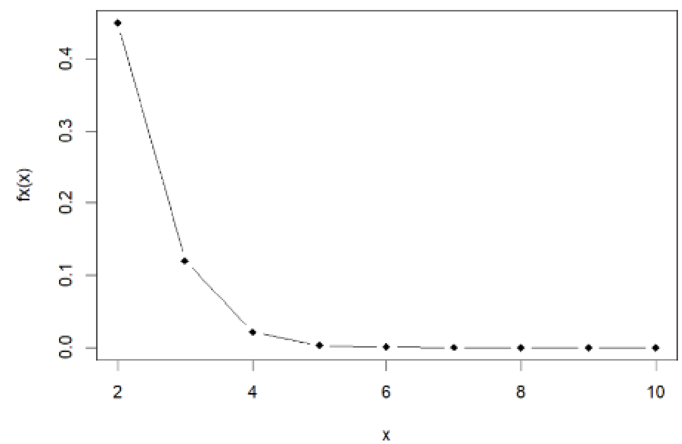
$$\Omega = \{(x,y) \,/\, x, y \in \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}\}\} \rightarrow n(\Omega) = 10^2 = 100$$

$$A = \{(x,y) \in \Omega \,/\, x \neq y\} = \{(P_1,P_2), (P_1,P_3), \ldots, (P_7,P_4), \ldots\} \rightarrow n(A) = \binom{10}{2} = 45$$

$$P(A) = 45/100 = 0.45$$

Para x en general: $P(A) = \dfrac{\binom{10}{x}}{10^x}$, $x \in \{2, \ldots, 10\}$

```
> fx = function(x){
+   return(choose(10,x)/10**x)
+ }
> x = 2:10
> plot(x, fx(x), type = "b")
> plot(x, fx(x), type = "b", pch = 18)
> fx(x)
[1] 4.50e-01 1.20e-01 2.10e-02 2.52e-03 2.10e-04 1.20e-05 4.50e-07 1.00e-08
[9] 1.00e-10
```



11. Un sistema tiene dos sensores independientes con probabilidad de falla de 0.01 cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos funcionen sin fallas?

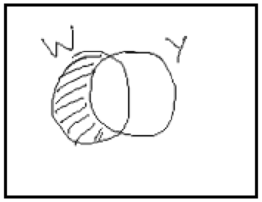
$F_i = \{\text{Falla el sensor } i\}, \quad i = 1, 2$

$P(F_i) = 0.01, \quad P(F_1^c \cap F_2^c) = P(F_1^c)P(F_2^c) = 0.99 \times 0.99 = 0.9801$

12. En una empresa, 70% de empleados usan Windows, de ellos 40% usan Python. Calcule la probabilidad de que usen Windows y no usen Python.

$W = \{\text{el empleado usa Windows}\}$

$Y = \{\text{el empleado usa Python}\}$



$P(W) = 0.70$

$P(Y \mid W) = 0.40$

$P(W \cap Y^c) = P(W) - P(W \cap Y)$, por el teorema de la multiplicación:

$= P(W) - P(Y \mid W)P(W)$

$= 0.70 - 0.40 \times 0.70 = 0.42$

13. En un curso:

- 80% asiste regularmente a clases.
- De los que asisten, 75% aprueba el parcial; y de los que no asisten, solo 30% aprueba el parcial.
- De los que aprueban el parcial, 90% aprueba el final; y de los que no aprueban el parcial, el 50% aprueba el final.

a) Calcular la probabilidad de aprobar el parcial.

b) Calcular la probabilidad de aprobar el final.

c) Dado que un estudiante aprobó el final, ¿cuál es la probabilidad de que haya asistido regularmente?

$A = \{$Asiste regularmente a clase$\}$ $\quad P(A) = 0.80$

$B = \{$Aprueba parcial$\}$ $\quad P(B \mid A) = 0.75$

$C = \{$Aprueba final$\}$ $\quad P(B \mid A^c) = 0.30$

$P(C \mid B) = 0.90$

$P(C \mid B^c) = 0.50$

a) $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$, por Teorema de la Multip

$= P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = 0.75 \times 0.8 + 0.3 \times 0.2 = 0.66$

b) $P(C) = P(C \cap B) + P(C \cap B^c)$

$= P(C|B)P(B) + P(C|B^c)P(B^c)$

$\approx 0.90 \times 0.66 + 0.50 \times 0.34$

$= 0.764$

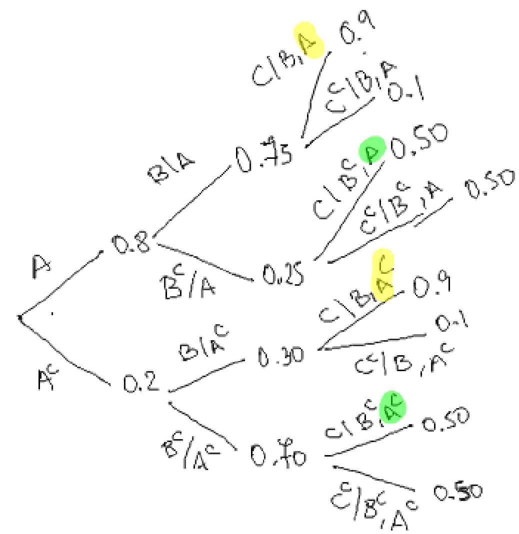
c) $P(A|C) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0.64}{0.764}$

- $P(A \cap C) = P(A \cap C \cap B) + P(A \cap C \cap B^c)$

$= P(C|B \cap A)P(B|A)P(A) + P(C|B^c \cap A)P(B^c|A)P(A)$

$= 0.9 \times 0.75 \times 0.8 + 0.5 \times 0.25 \times 0.8$

$= 0.64$



Rspta = $\boxed{0.84}$