Lista de ejercicios 1

Ciclo nivelación 2025-2

Mg. Sc. J. Eduardo Gamboa U.

1. Defina el espacio muestral al lanzar dos dados. Indique su cardinalidad. Luego, indique los puntos muestrales correspondientes al evento: La suma es mayor a 8.
2. Una moneda es lanzada hasta que aparezca el primer sello. Identificar el espacio muestral y su cardinalidad.
3. Determine si $\Lambda = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$ es un espacio de eventos, un álgebra y un σ-álgebra de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
4. Sea el espacio muestral $\Omega = \{a, b, c\}$ y considere los siguientes espacios de eventos $\Lambda_1 = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b, c\}\}$ y $\Lambda_2 = \{\emptyset, \Omega, \{b\}, \{a, c\}\}$. ¿Es $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ un σ-álgebra? ¿Es $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ un σ-álgebra?
5. En control de calidad, las piezas se clasifican en {defectuosa, no defectuosa}. Construya una σ-álgebra.
6. Para tráfico de red medido en Mbps, una partición operativa divide el tráfico en $(0, 10]$ Mbps como normal, $(10, 50]$ elevado y $(50, \infty)$ congestión. Construya una σ-álgebra.
7. En una fábrica, 4% de piezas son defectuosas. De las defectuosas, 90% son detectadas. Calcular la probabilidad de que una pieza sea defectuosa dado que fue detectada.
8. Una biblioteca tiene 10 libros de Matemática, 6 libros de Física y 4 libros de Estadística en una mesa. Se seleccionan tres libros al azar, uno tras otro, sin reposición. Calcule la probabilidad de que:

a) Los libros seleccionados, en orden, sean: Física, Estadística y Matemática.

b) Los tres libros sean de la misma materia.

c) Los tres libros sean de distinta materia.

d) Exactamente dos libros sean de Matemática.

e) Se seleccionen libros de al menos dos materias diferentes.

9. En un dado, verifique si los eventos “Obtener un número par” y “Obtener un número mayor a 3” son independientes.

10. En una pastelería se venden 10 tipos de pasteles. Un comprador pide x pasteles y el pastelero escoge al azar los x pasteles. Suponiendo que hay varios pasteles de cada tipo disponible, ¿cuál es la probabilidad de que escoja x pasteles diferentes? Evalúe como varía la probabilidad a medida que x varía.

11. Un sistema tiene dos sensores independientes con probabilidad de falla de 0.01 cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos funcionen sin fallas?

12. En una empresa, 70% de empleados usan Windows, de ellos 40% usan Python. Calcule la probabilidad de que usen Windows y no usen Python.

13. En un curso:

- 80% asiste regularmente a clases.
- De los que asisten, 75% aprueba el parcial; y de los que no asisten, solo 30% aprueba el parcial.
- De los que aprueban el parcial, 90% aprueba el final; y de los que no aprueban el parcial, el 50% aprueba el final.

a) Calcular la probabilidad de aprobar el parcial.

b) Calcular la probabilidad de aprobar el final.

c) Dado que un estudiante aprobó el final, ¿cuál es la probabilidad de que haya asistido regularmente?

14. Una caja contiene 5 dispositivos buenos y 3 defectuosos. Se extraen dos sin reemplazo.

a) Probabilidad de que el segundo sea defectuoso dado que el primero fue bueno.

b) Probabilidad de que al menos uno sea defectuoso.

c) Determine si los eventos “primer dispositivo defectuoso” y “segundo dispositivo defectuoso” son independientes.

15. Un sistema tiene dos métodos de autenticación: contraseña y token.

- La probabilidad de que un usuario escriba correctamente la contraseña es 0.9
- La probabilidad de que el token funcione correctamente es 0.95
- Ambos procesos son independientes, y el acceso se concede solo si ambos funcionan.

a) Calcular la probabilidad de acceso exitoso.

b) Si el acceso falló, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado el token?

16. Entre los becarios de una universidad, aprobar matemáticas y física son independientes. Se definen los siguientes eventos y probabilidades:

- B = {estudiante es becario}
- A_1 = {aprueba matemáticas}
- A_2 = {aprueba física}

$$P(B) = 0.3 \qquad P(A_1|B) = 0.8 \qquad P(A_2|B) = 0.75$$

a) Calcular $P(A_1 \cup A_2|B)$

b) Calcule $P(A_1 \cap A_2 \cap B)$

17. A y B son eventos tales que $P(A) = \frac{2}{5}$ y $P(B) = \frac{1}{4}$. Además se sabe que $P(A|B) + P(B|A) = 0.7$. Calcular $P(A^c \cap B^c)$

18. En una prueba, un estudiante debe responder exactamente 7 preguntas de un total de 10. ¿Cuál es la probabilidad de que entre esas 7 elija por lo menos 3 de las 5 primeras?

19. Se tiene la secuencia de números naturales 1,2,3,...,360. Si se selecciona uno de dichos números al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea coprimo con 360?

20. ¿Cuál es la probabilidad de que un anagrama formado por las letras de la palabra AYER comience con una vocal?

21. Si A, B y D son tres eventos tales que $P(A \cup B \cap D) = 0.7$, ¿cuál es el valor de $P(A^c \cap B^c \cap D^c)$?

22. Si A, B y D son tres eventos tales que $P(A|D) > P(B|D)$ y $P(A^c|D) > P(B^c|D)$. ¿Qué valores puede tomar el cociente $\frac{P(A)}{P(B)}$?

23. Un dado balanceado es lanzado tres veces. Sea X_i el número que aparece en el i-ésimo lanzamiento $(i = 1, 2, 3)$. Calcular $P(X_1 > X_2 > X_3)$

24. Suponga que cuando una máquina está correctamente ajustada, el 50% de los artículos que produce son de alta calidad y el otro 50% son de calidad media. Sin embargo, suponga que la máquina está incorrectamente ajustada durante el 10% del tiempo y que, bajo estas condiciones, el 25% de los artículos producidos son de alta calidad y el 75% son de calidad media. En un momento determinado se seleccionan al azar cinco artículos producidos por la máquina y se inspeccionan. Si cuatro de estos artículos son de alta calidad y uno es de calidad media, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina haya estado correctamente ajustada en ese momento?

25. Calcular:

$$\int_0^1 I_{[0,1]}(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (2I_{(-1,0])}(x) + I_{(0,2)}(x) - 3I_{[3,4]}(x))dx$$

$$\int_0^{\infty} 4\exp(-4x) I_{[2,5]}(x)dx$$

26. Si $X_1, ..., X_n \sim Pois(\mu)$ y $S = I_{\{2,3\}}(X_i)$, calcular $E(S)$ y $Var(S)$