Cálculo de probabilidades

Capítulo 2: Variable aleatoria

Mg. Sc. J. Eduardo Gamboa U.

Variable aleatoria

Una variable aleatoria X en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es una función real definida en Ω tal que $[X \leq x]$ es un evento aleatorio $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1

Experimento aleatorio:

Lanzar una moneda 3 veces

Espacio muestral:

$\Omega = \{(SSS), (SSC), (SCS), (CSS), (SCC), (CSC), (CCS), (CCC)\}$

Variable aleatoria:

$X =$ Número de caras observadas

$X(SSS) = 0$

$X(SSC) = X(SCS) = X(CSS) = 1$

$X(SCC) = X(CSC) = X(CCS) = 2$

$X(CCC) = 3$

Ejemplo 2

Experimento aleatorio:
Seleccionar un punto uniformemente en el intervalo $(0, 1)$
Espacio muestral:
$\Omega = (0, 1)$
Variable aleatoria:
$X =$ Variable de dicotómica / de excedencia con umbral 0.7
$X(\omega) = I_{(\omega > 0.7)}(\omega)$

Ejemplo 3

Experimento aleatorio:

Seleccionar un número real al azar

Espacio muestral:

$\Omega = \mathbb{R}$

Variable aleatoria:

$X =$ Variable reescalada

$X(\omega) = \frac{\omega}{50}$

Función de distribución (acumulada)

La función de distribución (acumulada) de la variable aleatoria X, representada por F_X, se define por:

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Propiedades

Si X es una variable aleatoria, su función de distribución F presenta las siguientes propiedades:

- $x \leq y \rightarrow F(x) \leq F(y)$, es decir F es no decreciente
- Si $x_n \downarrow x \rightarrow F(x_n) \downarrow F(x)$, es decir F es continua por la derecha.
- Si $x_n \downarrow -\infty$ entonces $F(x_n) \downarrow 0$. Si $x_n \uparrow \infty$ entonces $F(x_n) \uparrow 1$.

La función de distribución:

- es monótona no decreciente
- tiene un número finito o numerable de puntos de discontinuidad
- todas las discontinuidades que hubieran son de salto
- el salto en el punto x es igual a $P(X = x)$

Tipos de variable aleatoria

- Discreta
- Continua
- Mixta
- Mezcla

Variable aleatoria discreta

Una variable aleatoria es discreta si toma un número finito o numerable de valores, es decir si existe un conjunto finito o numerable $\{x_1, x_2, ...\} \subset \mathbb{R}$ tal que $X(\omega) \in \{x_1, x_2, ...\} \forall \omega \in \Omega$.

Ejemplo 4a

En una clase universitaria, se registra si los primeros tres estudiantes que llegan lo hacen puntuales o tarde. Se sabe que cada estudiante llega tarde con probabilidad 0.3 y puntual con probabilidad 0.7, y que llegan de manera independiente. Definimos:

P: Estudiante llega puntual

T: Estudiante llega tarde

$\Omega = \{PPP, PPT, PTP, TPP, PTT, TPT, TTP, TTT\}$

$X =$Número de estudiantes que llega tarde

Construir la variable aleatoria discreta

Función de probabilidad

La función $p_X(x_i)$ o $f_X(x_i)$ definida por $p(x_i) = P(X = x_i)$ para $i = 1, 2, ...$ se llama función de probabilidad de X.

Ejemplo 4b

Construir la función de probabilidad de X

Ejemplo 4c

Calcular la probabilidad de que a lo más dos estudiantes lleguen tarde si al menos uno ya lo hizo.

Ejemplo 4d

Construir la función de distribución de X

Valor esperado

La esperanza matemática, o valor esperado, es una medida del valor promedio ponderado de todos los posibles resultados de una variable aleatoria. Se calcula como:

$$\mu_X = E(X) = \sum_i x_i p(x_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) - \sum_{n=1}^{\infty} P(X \leq -n)$$

Ejemplo 4e

Calcular el valor esperado de X

Propiedades del valor esperado

- Si $X = c$ entonces $E(X) = c$
- Si $X \leq Y$ entonces $E(X) \leq E(Y)$
- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

Varianza

La varianza mide la dispersión de los valores de la variable aleatoria respecto a su esperanza matemática. Se calcula como:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 p(x_i) = E(X^2) - \mu_X^2$$

Ejemplo 4f

Calcular la varianza de X

Ejemplo 5

Una ruleta tiene 8 sectores, cada uno de los cuales contiene un premio:

- 1 sector da S/ 50
- 2 sectores dan S/ 10
- 2 sectores dan S/ 5
- 3 sector no tiene premio

Se gira la ruleta una vez, y si no se gana nada, se le da una oportunidad más de girar.

1. Definir el experimento aleatorio y espacio muestral.
2. Construir la función de probabilidad para la variable aleatoria: Monto ganado
3. ¿Qué es más probable: ganar S/ 50 o no ganar nada?
4. Construir la función de distribución y con ello calcular la probabilidad de ganar como máximo 20 soles.
5. Calcular el monto esperado de ganancia, así como la varianza de la variable aleatoria.
6. Calcular el coeficiente de asimetría de Pearson de la variable.
7. Si participar de la ruleta tiene un costo de 2 soles, ¿cuál es el monto esperado de ganancia real, así como su coeficiente de variabilidad?

Variable aleatoria continua

Una variable aleatoria X es continua si existe una función $f_X(x) \geq 0$, conocida como función de (probabilidad de) densidad, tal que:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Una función $f(x) \geq 0$ es la densidad de alguna variable aleatoria si, y solamente si, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Si $F_X(x)$ es continua, y derivable excepto en un número finito de puntos, entonces $f_X(x) = F'_X(x)$

Propiedades de la densidad

1. No negatividad, $f_X(x) \geq 0$
2. Área total igual a 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$
3. Probabilidad por integración: $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$, con $a, b \in \mathbb{R}$
4. Probabilidad puntual nula: $P(X = c) = 0$, con $c \in \mathbb{R}$
5. FDA obtenida integrando la densidad: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

Ejemplo 6a

Hallar el valor de a para que $f_X(x)$ sea una función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} a(x+2), & -2 \leq x < -1, \\ a, & -1 \leq x < 1, \\ \dfrac{2-x}{3}, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 6b

Calcular $P(X < 0 \cup X > 1.5 | X > -0.5)$

Ejemplo 6c

Obtener la función de distribución de X

Valor esperado

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{\infty} (1 - F(x)) dx - \int_{-\infty}^{0} F(x) dx$$

Ejemplo 6c

Calcular el valor esperado de X

Varianza

La varianza mide la dispersión de los valores de la variable aleatoria respecto a su esperanza matemática. Se calcula como:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx = E(X^2) - \mu_X^2$$

Ejemplo 6d

Calcular la varianza de X

Variable aleatoria mixta

Una variable aleatoria mixta es una única variable aleatoria cuya función de distribución tiene dos componentes simultáneos:

- una parte discreta (con masa positiva en puntos específicos), y
- una parte continua (con densidad en intervalos).

Formalmente:

$$P(X = x_i) > 0 \text{ para algunos } x_i$$

y además existe una función de densidad $f_X(x)$ tal que:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx \text{ para otros valores}$$

Su función de distribución puede escribirse como:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i + \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

- Determinación de los pesos (probabilidades) discretos α_i y $\alpha = \sum \alpha_i$
- Análisis intervalo a intervalo a fin de obtener $F_Y(y)$, $F_Y^d(y)$ y $F_Y^{ac}(y)$, de tal manera que se cumpla:

$$\alpha F_Y^d(y) + (1-\alpha)F_Y^{ac}(y) = F_Y(y)$$

  donde d se refiere a discreto y ac a absolutamente continua.
- Determinación de las funciones de probabilidad (f_Y^d) y densidad (f_Y^{ac})
- Cálculo de probabilidades, valor esperado, varianza, etc.

Valor esperado:

$$E(Y) = \alpha \sum_j y_j f_Y^d(y_j) + (1-\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y^{ac}(y) dy$$

$$E(Y^2) = \alpha \sum_j y_j^2 f_Y^d(y_j) + (1-\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y^{ac}(y) dy$$

Varianza:

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

Ejemplo 7a

Suponga que X representa a la variable aleatoria Concentración **real** (en $\mu g/m^3$) de dióxido de carbono (NO_2) por hora en una ciudad costera, cuya función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{100}\exp{(-\frac{x}{100})}I_{(0,\infty)}(x)$$

Obtener la función de distribución de X

Ejemplo 7b

Sin embargo, esta concentración es **registrada** (Y) mediante un instrumento de medición cuyo límite inferior es de 50 $\mu g/m^3$ y el superior, 391 $\mu g/m^3$. Por lo tanto:

$$Y = 50I_{(0,50]}(x) + xI_{(50,391)}(x) + 391I_{[391,\infty)}(x)$$

Conocemos el comportamiento probabilístico de las concentraciones reales (X) pero, ¿cuál es el comportamiento probabilístico (Y) de las observadas?
Obtener $F_Y(y)$, $F_Y^d(y)$ y $F_Y^{ac}(y)$

- Determinación de pesos

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\alpha = P(Y = 50) + P(Y = 391)$$

$$\alpha = F_X(50) + 1 - F_X(391)$$

$$\alpha = 1 - \exp\left(-\frac{50}{100}\right) + \exp\left(-\frac{391}{100}\right)$$

$$\alpha = 0.394 + 0.02 = 0.414$$

La probabilidad de que se registre una concentración igual a 50 o 391 $\mu g/m^3$ es 0.414. Es la probabilidad de censura en los puntos $y = 50$ o $y = 391$. El peso de la parte continua será:

$$1 - \alpha = \exp\left(-\frac{50}{100}\right) - \exp\left(-\frac{391}{100}\right) = 0.586$$

- Análisis intervalo a intervalo

Intervalo $y < 50$

$$F_Y(y) = 0$$

$$F_Y^d(y) = 0$$

$$F_Y^{ac}(y) = 0$$

Se verifica que:

$$\alpha F_Y^d(y) + (1-\alpha) F_Y^{ac}(y) = F_Y(y)$$

Intervalo $50 \leq y < 391$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq y) = F_X(y) = 1 - \exp\left(-\frac{y}{100}\right)$$

$$F_Y^d(y) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{1 - \exp(-50/100)}{1 - \exp(-50/100) + \exp(-391/100)} = \frac{0.394}{0.414} = 0.952$$

$F_Y^{ac}(y)$ es obtenido mediante la igualdad $\alpha F_Y^d(y) + (1-\alpha)F_Y^{ac}(y) = F_Y(y)$

$$1 - \exp\left(-\frac{50}{100}\right) + \left[\exp\left(-\frac{50}{100}\right) - \exp\left(-\frac{391}{100}\right)\right] F_Y^{ac}(y) = 1 - \exp\left(-\frac{y}{100}\right)$$

Despejando:

$$F_Y^{ac}(y) = \frac{\exp\left(-\frac{50}{100}\right) - \exp\left(-\frac{y}{100}\right)}{\exp\left(-\frac{50}{100}\right) - \exp\left(-\frac{391}{100}\right)}$$

Intervalo $y \geq 391$

$$F_Y(y) = 1$$

$$F_Y^d(y) = 1$$

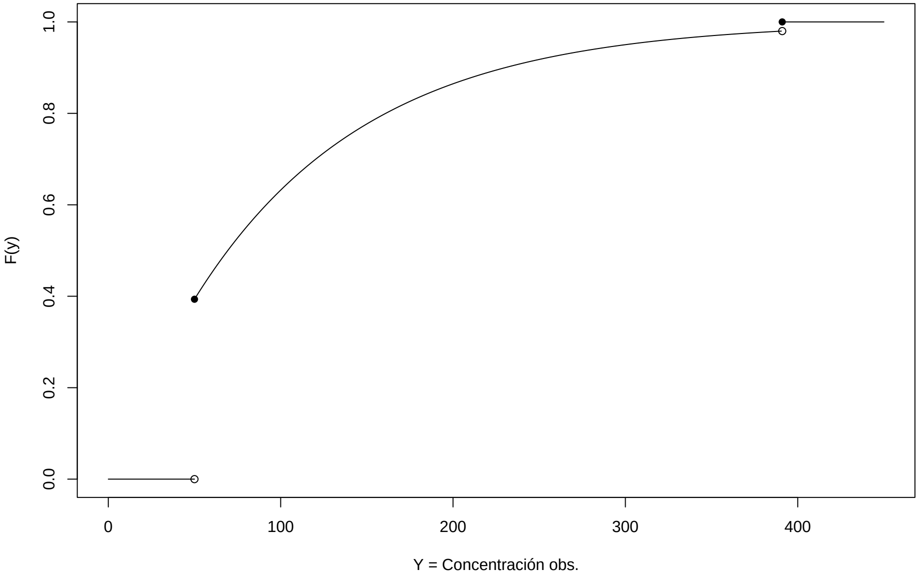
$$F_Y^{ac}(y) = 1$$

Se verifica que:

$$\alpha F_Y^d(y) + (1-\alpha) F_Y^{ac}(y) = F_Y(y)$$

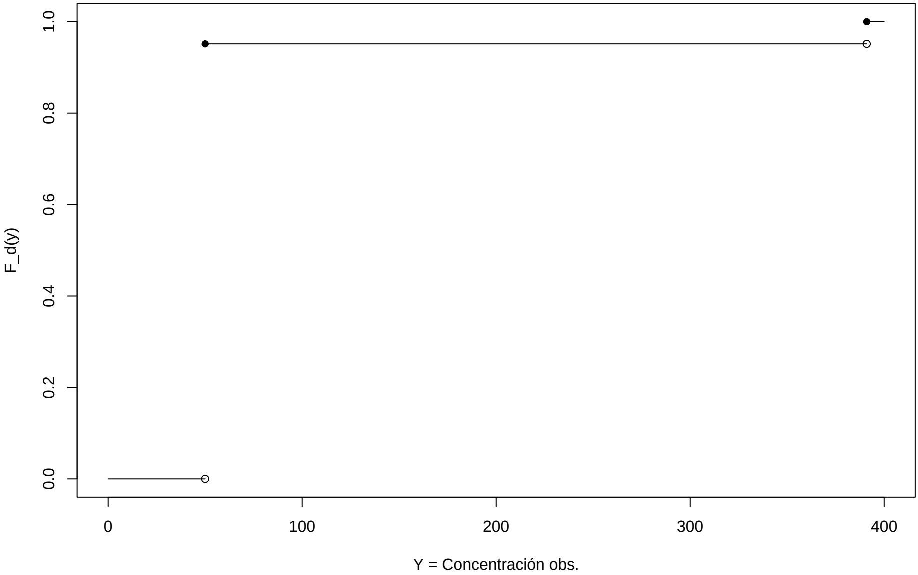
$$F_Y(y) = \left(1 - \exp\left(-\frac{y}{100}\right)\right) I_{[50,391)}(y) + I_{[391,\infty)}(y)$$

```r
Fy = function(y) ifelse(y < 50, 0, ifelse(y < 391, 1 - exp(-y/100), 1))

eps = 1e-6
y   = seq(50 + eps, 391 - eps, by = 0.5)

plot(NA,
     xlim = c(0, 450), ylim = c(0, 1),
     xlab = "Y = Concentración obs.", ylab = "F(y)")

segments(0, 0, 50, 0)                     # tramo plano inicial
lines(y, Fy(y))                           # tramo continuo
segments(391, 1, 450, 1)                  # tramo plano final

points(50, 0, pch = 1)                    # abierto en (50,Fy(50-))
points(50, Fy(50), pch = 16)              # cerrado en (50, Fy(50))
points(391, Fy(391 - eps), pch = 1)       # abierto en (391, Fy(391-))
points(391, 1, pch = 16)                  # cerrado en (391,1)
```


F(y)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
100
200
300
400
Y = Concentración obs.

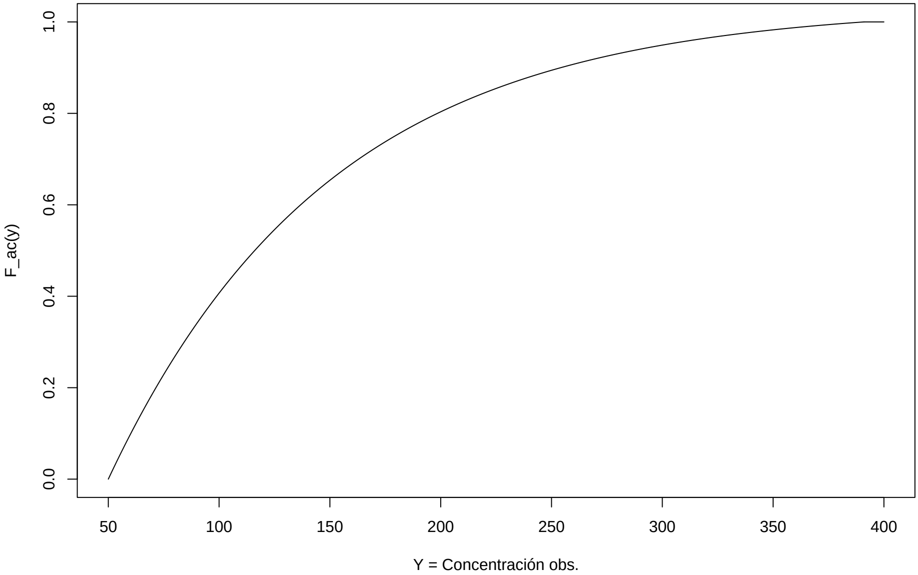
$$F_Y^d(y) = 0.952 I_{[50,391)}(y) + I_{[391,\infty)}(y)$$

```
a1 = 1-exp(-0.5)
a2 = exp(-3.91)
p  = a1/(a1+a2)

plot(NA,
     xlim=c(0,400), ylim=c(0,1),
     xlab="Y = Concentración obs.", ylab="F_d(y)")

segments(0,0,50,0)
segments(50,p,391,p)
segments(391,1,400,1)

points(c(50,391), c(0,p), pch=1)
points(c(50,391), c(p,1), pch=16)
```


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
F_d(y)
0
100
200
300
400
Y = Concentración obs.

$$F_Y^{ac}(y) = \frac{\exp\left(-\frac{50}{100}\right) - \exp\left(-\frac{y}{100}\right)}{\exp\left(-\frac{50}{100}\right) - \exp\left(-\frac{391}{100}\right)} I_{[50,391)}(y) + I_{[391,\infty)}(y)$$

```r
Fyac = function(y){
  a <- exp(-0.5); b <- exp(-3.91)
  ifelse(y < 50, 0,
         ifelse(y < 391, (a - exp(-y/100))/(a - b), 1))}

y = seq(50, 391, by = 0.5)
plot(y, Fyac(y), type="l", xlim=c(50,400), ylim=c(0,1),
     xlab="Y = Concentración obs.", ylab="F_ac(y)")
segments(391, 1, 400, 1)
```



F_ac(y)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
50
100
150
200
250
300
350
400
Y = Concentración obs.

Ejemplo 7c

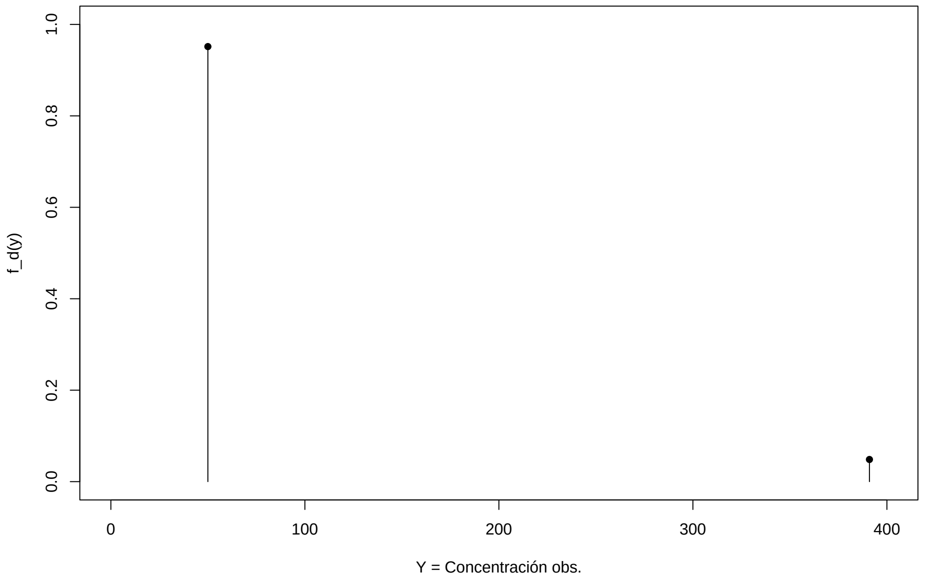
Obtener $f_Y^d(y)$ y $f_Y^{ac}(y)$
Para obtener $f_Y^d(y)$ utilizaremos los pesos determinados en el primer paso:

$$f_Y^d(y) = 0.952 I_{\{50\}}(y) + 0.048 I_{\{391\}}(y)$$

Estos pesos también pueden ser reconocidos en la gráfica de $F_Y(y)$.
Como toda función de probabilidad, se verifica que:

$$\sum_{R_y} f_Y^d(y) = 1$$

```r
p1 = 1 - exp(-0.5)    # P(Y=50)
p2 = exp(-3.91)       # P(Y=391)
p  = p1+p2

plot(NA,
     xlim=c(0,400), ylim=c(0,1),
     xlab="Y = Concentración obs.", ylab="f_d(y)")

segments(50, 0, 50, p1/p)
segments(391, 0, 391, p2/p)

points(c(50,391), c(p1/p,p2/p), pch=16)
```



f_d(y)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
100
200
300
400
Y = Concentración obs.

Para encontrar $f^{ac}_{(}y)$ utilizaremos el concepto de derivada de la f.d.a. absolutamente continua.

$$f_Y^{ac}(y) = \frac{dF_Y^{ac}(y)}{dy}$$

$$f_Y^{ac}(y) = \frac{\frac{1}{100}\exp\left(-\frac{y}{100}\right)}{\exp\left(-\frac{50}{100}\right) - \exp\left(-\frac{391}{100}\right)} I_{[50,391)}(y)$$

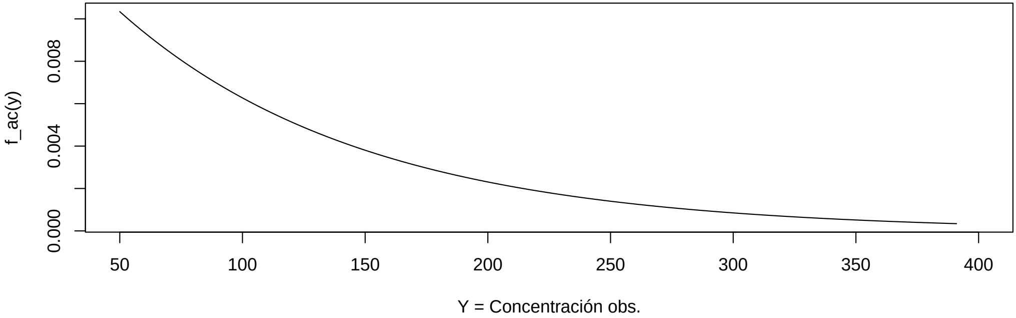
Como toda función de densidad, se verifica que:

$$\int_{50}^{391} f_Y^{ac}(y)dy = 1$$

```
facy = function(y){1/100*exp(-y/100)*1/(exp(-0.5)-exp(-3.91))}
integrate(facy,50,391)$value
```

```
[1] 1
```

```
y = seq(50, 391, by = 0.5)
plot(y, facy(y), type="l", xlim=c(50,400),
     xlab="Y = Concentración obs.", ylab="f_ac(y)")
```



Ejemplo 7d

¿Cuál es la probabilidad de que la concentración de NO_2 durante una hora elegida al azar sea de como máximo 60 $\mu g/m^3$?
Directamente:

$$P(Y \leq 60) = F_Y(60) = 1 - \exp\left(-\frac{60}{100}\right) = 0.4512$$

Haciendo uso de $f_Y^d(y)$ y $f_Y^{ac}(y)$

$$P(Y \leq 60) = F_Y(60) = \alpha F_Y^d(60) + (1-\alpha)F_Y^{ac}(60)$$

$$P(Y \leq 60) = 0.414 \times 0.952 + 0.586 \left[\frac{\exp\left(-\frac{50}{100}\right) - \exp\left(-\frac{60}{100}\right)}{\exp\left(-\frac{50}{100}\right) - \exp\left(-\frac{391}{100}\right)}\right]$$

$$P(Y \leq 60) = 0.414 \times 0.952 + 0.586 \times 0.098 \approx 0.4516$$

Ejemplo 7e

¿Cuál es la concentración media registrada de NO_2?

$$\mu_Y = E(Y) = \alpha \sum_j y_j f_Y^d(y_j) + (1-\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y^{ac}(y) dy$$

$$\mu_Y = E(Y) = 0.414 \times (50 \times 0.952 + 391 \times 0.048) + 0.586 \int_{50}^{391} \frac{\frac{1}{100} \exp\left(-\frac{y}{100}\right)}{\exp\left(-\frac{50}{100}\right) - \exp\left(-\frac{391}{100}\right)} y dy$$

$$\mu_Y = E(Y) = 27.476 + 0.586 \times 138.348 = 108.548$$

La concentración media de $N0_2$ registrada es de 108.548 $\mu g/m^3$ (en una hora)

Una manera alternativa de obtener el valor esperado:

$$\mu_Y = E(Y) = \int_0^{\infty} 1 - F_Y(y)dy + \int_{-\infty}^{0} F_Y(y)dy$$

$$\mu_Y = E(Y) = \int_0^{50} (1-0)dy + \int_{50}^{391} \exp\left(-\frac{y}{100}\right)dy + \int_{391}^{\infty} (1-1)dy$$

$$\mu_Y = E(Y) = 50 + 58.65 = 108.65$$

La concentración media de $N0_2$ registrada es de 108.65 $\mu g/m^3$ (en una hora) [Valores no coinciden debido a redondeos]

$$E(Y^2) = 0.414 \times (50^2 \times 0.952 + 391^2 \times 0.048) + 0.586 \int_{50}^{391} \frac{\frac{1}{100}\exp\left(-\frac{y}{100}\right)}{\exp\left(-\frac{50}{100}\right) - \exp\left(-\frac{391}{100}\right)} y^2 dy$$

$$E(Y^2) = 4023.371 + 14668.19 = 18691.56$$

$$\sigma_Y^2 = V(Y) = 18691.56 - 108.6^2 = 6897.6$$

$$\sigma_Y = \sqrt{6897.6} = 83.0518$$

Variable aleatoria mezcla

Una variable aleatoria mezcla surge cuando la población o el proceso generador de datos está compuesto por dos o más subpoblaciones o mecanismos distintos. Primero se selecciona aleatoriamente cuál subpoblación o mecanismo actuará, y luego se genera el valor de la variable según la distribución asociada a esa subpoblación.

Sea Z una variable discreta que indica el mecanismo o la subpoblación:

$$P(Z = i) = \pi_i, \qquad i = 1, ..., k, \qquad \sum_{i=1}^{k} \pi_i = 1$$

Luego, condicionalmente a $Z = i$, la variable aleatoria $X|Z = i$ tiene distribución de probabilidad o densidad $f_i(x)$. Entonces X es una mezcla cuya densidad o probabilidad total es:

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i f_i(x)$$

Para el caso de funciones de distribución:

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i F_i(x)$$

Valor esperado:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i \, E(X \mid Z = i)$$

Varianza:

La varianza total se descompone en:

- variabilidad dentro de cada subpoblación,
- variabilidad entre subpoblaciones.

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i \, \mathrm{Var}(X \mid Z = i) + \sum_{i=1}^{k} \pi_i \big(E(X \mid Z = i) - E(X)\big)^2$$

Ejemplo 8a

Supongamos una mezcla con dos mecanismos generadores:

- Si $Z = 1$, X toma valores solo en $[0, 1]$ con densidad $f_1(x) = 2xI_{(0,1)}(x)$
- Si $Z = 2$, X toma valores solo en $(1, 3]$ con densidad $f_2(x) = \frac{1}{2}I_{(1,3]}(x)$

Verificar que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son densidades

Ejemplo 8b

Suponiendo que $P(Z = 1) = 0.6$ y $P(Z = 2) = 0.4$, obtener la densidad mezcla.

Ejemplo 8c

Obtener la función de distribución acumulada.

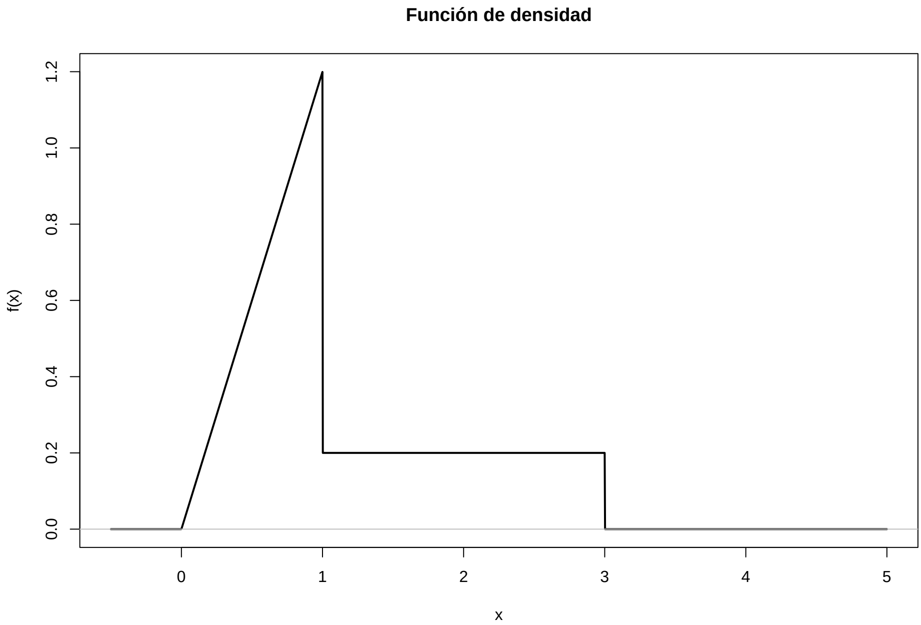
Ejemplo 8d

Obtener el valor esperado de X.

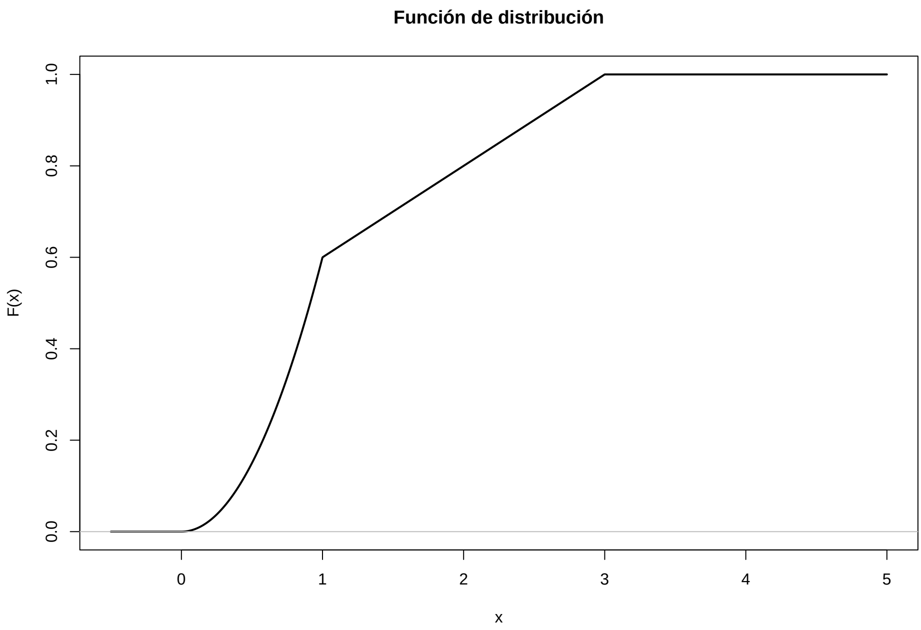
Ejemplo 8e

Obtener la varianza total de X y su descomposición.

```r
f <- function(x){
  ifelse(x > 0 & x < 1, 1.2*x, ifelse(x >= 1 & x <= 3,
                                       0.2,
                                       0))
  }

x <- seq(-0.5,5, length.out = 2000)
y <- f(x)

plot(x, y,
     type="l", lwd=2,
     xlab="x", ylab="f(x)",
     main="Función de densidad")
abline(h=0, col="gray")
```


Función de densidad
f(x)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
0
1
2
3
4
5
x

```r
Fx <- function(x){
  ifelse(x > 0 & x < 1, 0.6*x^2,
         ifelse(x >= 1 & x <= 3,
                0.6 + 0.2*(x-1),
                ifelse(x > 3, 1, 0)))}

x <- seq(-1, 6, length.out = 2000)
y <- Fx(x)

plot(x, y, type="l", lwd=2,
     xlab="x", ylab="F(x)",
     main="Función de distribución")
abline(h=0, col="gray")
```


Función de distribución
F(x)
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
1
2
3
4
5

Ejemplo 9a

Supongamos una mezcla con dos mecanismos generadores:

- Si $Z = 1$, X toma valores en $\{0, 1, 2\}$ con función de probabilidad $f_1(X = x|Z = 1) = 0.2I_{\{0\}}(x) + 0.3I_{\{1\}}(x) + 0.5I_{\{2\}}(x)$
- Si $Z = 2$, X toma valores en $\{2, 3, 4\}$ con función de probabilidad $f_2(X = x|Z = 2) = 0.4I_{\{2\}}(x) + 0.3I_{\{3\}}(x) + 0.3I_{\{4\}}(x)$

Verificar que $f_1(X = x|Z = 1)$ y $f_2(X = x|Z = 2)$ son funciones de probabilidad.

Ejemplo 9b

Suponiendo que $P(Z = 1) = 0.75$ y $P(Z = 2) = 0.25$, obtener la función de probabilidad mezcla.

Ejemplo 9c

Obtener la función de distribución acumulada.

Ejemplo 9d

Obtener el valor esperado de X.

Ejemplo 9e

Obtener la varianza total de X y su descomposición.

Funciones generadoras

Función generadora de probabilidad

Sea X una variable aleatoria discreta con $R_X = \mathbb{Z}^+$. Se define la función generadora de probabilidad (fgp) de X como:

$$G_X(s) = E(s^x) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X = x)s^x$$

$$G_X(s) = P(X = 0) + P(X = 1)s + P(X = 2)s^2 + \ldots$$

$$G_X(1) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$$

$$P(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

$$E(X) = G_X^{(1)}(1) \qquad V(X) = G_X^{(2)}(1) + G_X^{(1)}(1) - \left(G_X^{(1)}(1)\right)^2$$

Sea $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Entonces:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, ...$$

La función generadora de probabilidad es:

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

Factorizando $e^{-\lambda}$:

$$G_X(s) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^x}{x!}.$$

Se da forma a la sumatoria para obtener la distribución Poisson con parámetro λs

$$G_X(s) = \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda s}} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^x e^{-\lambda s}}{x!}.$$

Por tanto:

$$G_X(s) = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}.$$

Probabilidades:

$$G_X^{(0)}(s) = e^{\lambda s}e^{-\lambda} \to P(X=0) = \frac{e^{\lambda(0)}e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda}$$

$$G_X^{(1)}(s) = \lambda e^{\lambda s}e^{-\lambda} \to P(X=1) = \frac{\lambda e^{\lambda(0)}e^{-\lambda}}{1!} = \lambda e^{-\lambda}$$

$$G_X^{(2)}(s) = \lambda^2 e^{\lambda s}e^{-\lambda} \to P(X=2) = \frac{\lambda^2 e^{\lambda(0)}e^{-\lambda}}{2!} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$$

$$G_X^{(k)}(s) = \lambda^k e^{\lambda s}e^{-\lambda} \to P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{\lambda(0)}e^{-\lambda}}{k!} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Valor esperado:

$$E(x) = G_X^{(1)}(1) = \lambda e^{\lambda(1)} e^{-\lambda} = \lambda$$

Varianza:

$$V(X) = G_X^{(2)}(1) + G_X^{(1)}(1) - \left(G_X^{(1)}(1)\right)^2 = \lambda^2 e^{\lambda(1)} e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Sea $X \sim \text{Geom}(\pi)$, con

$$P(X = x) = \pi(1-\pi)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

La función generadora de probabilidad es:

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{x=0}^{\infty} \pi(1-\pi)^x s^x = \pi \sum_{x=0}^{\infty} \left[(1-\pi)s\right]^x.$$

Usando la suma de la serie geométrica:

$$G_X(s) = \pi \sum_{x=0}^{\infty} \left[(1-\pi)s\right]^x = \frac{\pi}{1-(1-\pi)s}.$$

Probabilidades:

$$G_X^{(0)}(s) = \pi(1-(1-\pi)s)^{-1} \quad \Rightarrow \quad P(X=0) = \frac{\pi(1-(1-\pi)(0))^{-1}}{0!} = \pi$$

$$G_X^{(1)}(s) = \pi(1-\pi)(1-(1-\pi)s)^{-2}. \quad \Rightarrow \quad P(X=1) = \frac{\pi(1-\pi)(1-(1-\pi)(0))^{-2}}{1!} = \pi(1-\pi)$$

$$G_X^{(2)}(s) = 2\pi(1-\pi)^2(1-(1-\pi)s)^{-3} \quad \Rightarrow \quad P(X=2) = \frac{2\pi(1-\pi)^2(1-(1-\pi)(0))^{-3}}{2!} = \pi(1-\pi)^2$$

Valor esperado:

$$E(X) = G_X^{(1)}(1) = \pi(1-\pi)(1-(1-\pi)(1))^{-2} = \pi(1-\pi)(1-1+\pi)^{-2} = \frac{1-\pi}{\pi}$$

Varianza:

$$V(X) = G_X^{(2)}(1) + G_X^{(1)}(1) - \left(G_X^{(1)}(1)\right)^2$$

$$V(X) = 2\pi(1-\pi)^2(1-(1-\pi)(1))^{-3} + \frac{1-\pi}{\pi} - \left(\frac{1-\pi}{\pi}\right)^2$$

$$V(X) = 2\frac{(1-\pi)^2}{\pi^2} + \frac{1-\pi}{\pi} - \left(\frac{1-\pi}{\pi}\right)^2 = \frac{(1-\pi)^2 + (1-\pi)\pi}{\pi^2}$$

$$V(X) = \frac{(1-\pi)(1-\pi+\pi)}{\pi^2} = \frac{1-\pi}{\pi^2}$$

Función generadora de momentos

Sea X una variable aleatoria. Se define la función generadora de momentos (fgm) de X como:

$$M_X(t) = E(e^{tx})$$

$$E(X^n) = M_X^{(n)}(0)$$

Sea $X \sim$ Poisson(λ). Entonces:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, ...$$

La función generadora de momentos es:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx}e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda e^t}} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x e^{-\lambda e^t}}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}$$

Primer momento:

$$M_X^{(1)}(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \lambda e^t$$

$$E(X) = M_X^{(1)}(0) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^0} \lambda e^0 = e^{-\lambda} e^{\lambda} \lambda = \lambda$$

Segundo momento:

$$M_X^{(2)}(t) = \lambda e^{-\lambda} \left(\lambda e^t e^{\lambda e^t} e^t + e^{\lambda e^t} e^t \right) = \lambda e^{-\lambda} \left(\lambda e^{2t} e^{\lambda e^t} + e^t e^{\lambda e^t} \right) = \lambda e^{-\lambda} \left(e^t e^{\lambda e^t} (\lambda e^t + 1) \right)$$

$$E(X^2) = M_X^{(2)}(t) = \lambda e^{-\lambda} \left(e^0 e^{\lambda e^0} (\lambda e^0 + 1) \right) = \lambda e^{-\lambda} \left(e^{\lambda} (\lambda + 1) \right) = \lambda(\lambda + 1)$$

Varianza:

$$V(X) = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda$$

Sea $X \sim \mathsf{Geom}(\pi)$, con

$$P(X = x) = \pi(1 - \pi)^x, \quad x = 0, 1, 2, ...$$

La función generadora de momentos es:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\pi(1 - \pi)^x = \pi \sum_{x=0}^{\infty} \left(e^t(1 - \pi)\right)^x = \frac{\pi}{1 - e^t(1 - \pi)}$$

$$M_X(t) = \pi \left(1 - e^t(1 - \pi)\right)^{-1}$$

Primer momento:

$$M_X^{(1)}(t) = \pi(-1)\left(1 - e^t(1-\pi)\right)^{-2}(-e^t)(1-\pi) = \pi(1-\pi)e^t\left(1 - e^t(1-\pi)\right)^{-2}$$

$$E(X) = M_X^{(1)}(0) = \pi(1-\pi)e^0\left(1 - e^0(1-\pi)\right)^{-2} = \pi(1-\pi)\pi^{-2} = \frac{1-\pi}{\pi}$$

Segundo momento:

$$M_X^{(2)}(t) = \pi(1-\pi)e^t \left(1 - e^t(1-\pi)\right)^{-2} + \pi(1-\pi)e^t(-2)\left(1 - e^t(1-\pi)\right)^{-3}(-e^t)(1-\pi)$$

$$M_X^{(2)}(t) = \pi(1-\pi)e^t \left(1 - e^t(1-\pi)\right)^{-2} \left(1 + 2(1-\pi)e^t \left(1 - e^t(1-\pi)\right)^{-1}\right)$$

$$E(X^2) = M_X^{(2)}(0) = \pi(1-\pi)e^0 \left(1 - e^0(1-\pi)\right)^{-2} \left(1 + 2(1-\pi)e^0 \left(1 - e^0(1-\pi)\right)^{-1}\right)$$

$$E(X^2) = M_X^{(2)}(0) = \pi(1-\pi)\pi^{-2}\left(1 + 2(1-\pi)\pi^{-1}\right) = \frac{1-\pi}{\pi} + \frac{2(1-\pi)^2}{\pi^2}$$

Varianza:

$$V(X) = \frac{1-\pi}{\pi} + \frac{2(1-\pi)^2}{\pi^2} - \left(\frac{1-\pi}{\pi}\right)^2 = \frac{1-\pi}{\pi} + \frac{(1-\pi)^2}{\pi^2} = \frac{1-\pi}{\pi^2}$$

Función característica

Sea X una variable aleatoria. Se define la función características de X como:

$$\phi_X(t) = E(e^{itx}), \qquad \text{donde } i^2 = -1$$

$$E(X^n) = \frac{\phi_X^{(n)}(0)}{i^n}$$

Sea $X \sim$ Poisson(λ). Entonces:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, ...$$

La función característica es:

$$\phi_X(t) = E(e^{itx}) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{itx}e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda e^{it}}} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^x e^{-\lambda e^{it}}}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}}$$

Primer momento:

$$\phi_X^{(1)}(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} \lambda e^{it} i$$

$$\phi_X^{(1)}(0) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{i0}} \lambda e^{i0} i = e^{-\lambda} e^{\lambda} \lambda i = \lambda i \quad \Rightarrow \quad E(X) = \frac{\phi_X^{(1)}(0)}{i} = \frac{\lambda i}{i} = \lambda$$

Segundo momento:

$$\phi_X^{(2)}(t) = e^{-\lambda} \lambda i \left(e^{\lambda e^{it}} \lambda e^{it} i e^{it} + e^{\lambda e^{it}} e^{it} i \right) = e^{-\lambda} \lambda i \left(e^{\lambda e^{it}} e^{it} i (\lambda e^{it} + 1) \right)$$

$$\phi_X^{(2)}(0) = e^{-\lambda} \lambda i \left(e^{\lambda e^{i0}} e^{i0} i (\lambda e^{i0} + 1) \right) = e^{-\lambda} \lambda i e^{\lambda} i (\lambda + 1) = \lambda i^2 (\lambda + 1)$$

$$E(X^2) = \frac{\phi_X^{(2)}(0)}{i^2} = \frac{\lambda i^2 (\lambda + 1)}{i^2} = \lambda(\lambda + 1)$$

Varianza:

$$V(X) = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda$$

Sea $X \sim \text{Geom}(\pi)$, con

$$P(X = x) = \pi(1-\pi)^x, \quad x = 0, 1, 2, ...$$

La función característica es:

$$\phi_X(t) = E(e^{itx}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx}\pi(1-\pi)^x = \pi \sum_{x=0}^{\infty} (e^{it}(1-\pi))^x$$

$$\phi_X(t) = \frac{\pi}{1 - e^{it}(1-\pi)} = \pi\left(1 - e^{it}(1-\pi)\right)^{-1}$$

Primer momento:

$$\phi_X^{(1)}(t) = \pi(-1)\left(1 - e^{it}(1-\pi)\right)^{-2}(-1)(1-\pi)ie^{it} = \pi(1-\pi)ie^{it}\left(1 - e^{it}(1-\pi)\right)^{-2}$$

$$\phi_X^{(1)}(0) = \pi(1-\pi)ie^{i0}\left(1 - e^{i0}(1-\pi)\right)^{-2} = \pi(1-\pi)i\pi^{-2} = \frac{1-\pi}{\pi}i$$

$$E(X) = \frac{\phi_X^{(1)}(0)}{i} = \frac{1-\pi}{\pi}$$

Segundo momento:

$$\phi^{(2)}(t) = \pi(1{-}\pi)i\left(e^{it}i\left(1-e^{it}(1-\pi)\right)^{-2} + (-2)\left(1-e^{it}(1-\pi)\right)^{-3}(-1)(1-\pi)e^{it}ie^{it}\right)$$

$$\phi^{(2)}(t) = \pi(1-\pi)i\left(ie^{it}\left(1-e^{it}(1-\pi)\right)^{-2} + 2i(e^{it})^2(1-\pi)\left(1-e^{it}(1-\pi)\right)^{-3}\right)$$

$$\phi^{(2)}(0) = \pi(1-\pi)i\left(ie^{i0}\left(1-e^{i0}(1-\pi)\right)^{-2} + 2i(e^{i0})^2(1-\pi)\left(1-e^{i0}(1-\pi)\right)^{-3}\right)$$

$$\phi^{(2)}(0) = \pi(1-\pi)i\left(i\pi^{-2} + 2i(1-\pi)\pi^{-3}\right)$$

$$\phi^{(2)}(0) = i^2\pi^{-1}(1-\pi) + 2i^2\pi^{-2}(1-\pi)^2 = \frac{1-\pi}{\pi}i^2 + 2\frac{(1-\pi)^2}{\pi^2}i^2$$

$$E(X^2) = \frac{\phi^{(2)}(0)}{i^2} = \frac{1-\pi}{\pi} + 2\frac{(1-\pi)^2}{\pi^2}$$

Varianza:

$$V(X) = \frac{1-\pi}{\pi} + 2\frac{(1-\pi)^2}{\pi^2} - \frac{(1-\pi)^2}{\pi^2} = \frac{1-\pi}{\pi} + \frac{(1-\pi)^2}{\pi^2} = \frac{1-\pi}{\pi^2}$$