R = {1,3,4,12,6,8}
$S \subset R$
S = {1,3,4}
S = {4,2,6}
etc

Espacio de probabilidad

Un espacio de probabilidad es un terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ donde:

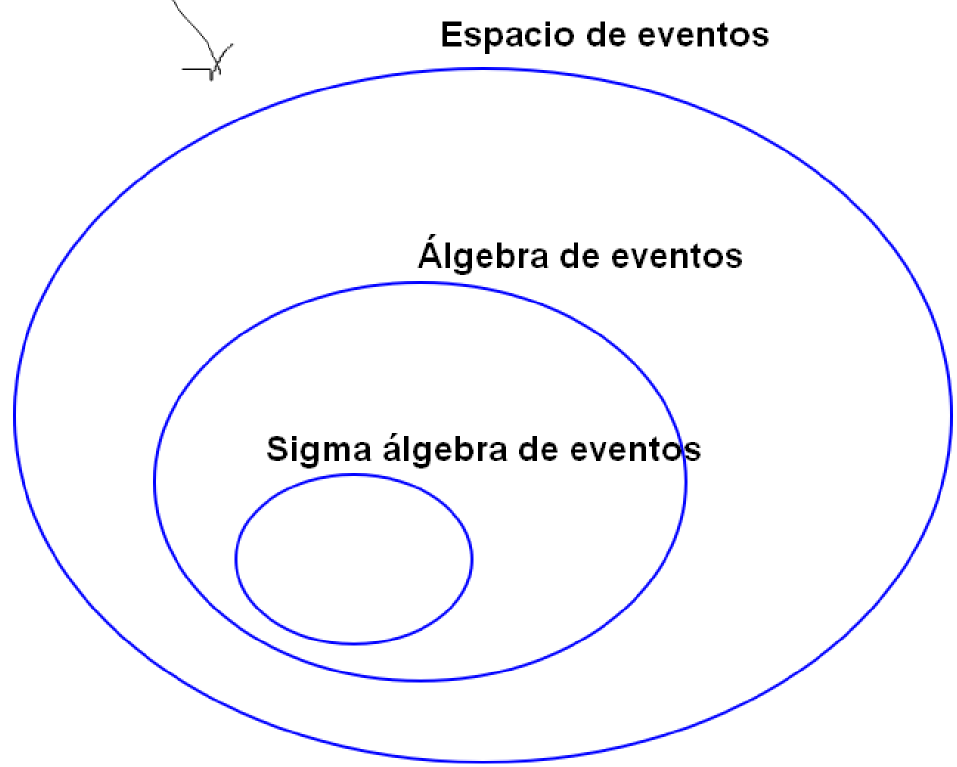
- Ω es el conjunto no vacío de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra de subconjuntos de Ω
- P es una medida de probabilidad en $\mathcal{A}$

Espacio de eventos

$$\Omega = \{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 10,\ 11\}$$

$$\Lambda_1 = \{\{3,\ 6\},\ \{5,\ 10,\ 11\}\}$$

$$\Lambda_2 = \{\{1,\ 4,\ 5\},\ \phi\}$$



$$\sigma - \text{álgebra} \subset \text{álgebra de eventos} \subset \text{espacio de eventos}$$

Ejemplo 1a

Experimento: Lanzar un dado regular equilibrado
Espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Tipo de espacio muestral: Finito y numerable.

Ejemplo 1b

1. Espacios de eventos:
- $\Lambda_1 = \{\emptyset, \{2,4,6\}, \{1,3\}, \Omega\}$
- $\Lambda_2 = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{6\}, \{4,5\}, \Omega\}$
- $\Lambda_3 = \{\emptyset, \Omega\}$

2. Álgebra de eventos:
- $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, ..., \{1,2\}, ..., \{1,2,3,4,5\}, \{2,3,4,5,6\}, ..., \Omega\}$, notar que $|\Omega| = 6$ y $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^6 = 64$, donde $\mathcal{P}$ es el conjunto potencia.
- $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{2,4,6\}, \{1,3,5\}, \Omega\}$

¿$\mathcal{A}_1$ es álgebra ?

$\Omega \in \mathcal{A}_1$

$\Omega \in \mathcal{A}_1 \rightarrow \phi \in \mathcal{A}_1$

$\{1\} \in \mathcal{A}_1 \rightarrow \{2, 3, 4, 5, 6\} \in \mathcal{A}_1$

$\{2\} \in \mathcal{A}_1 \rightarrow \{1, 3, 4, 5, 6\} \in \mathcal{A}_1$

...

$\{1\} \in \mathcal{A}_1$, $\{2\} \in \mathcal{A}_1 \rightarrow \{1, 2\} \in \mathcal{A}_1$

$\{1\} \in \mathcal{A}_1$, $\{4, 6\} \in \mathcal{A}_1 \rightarrow \{1, 4, 6\} \in \mathcal{A}_1$

$\mathcal{A}_1$ es un álgebra

3. σ-álgebra de eventos
- $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$ también es σ-álgebra dado que el conjunto potencia es cerrado bajo complementos y uniones numerables.
- $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{2,4,6\}, \{1,3,5\}, \Omega\}$ también es σ-álgebra dado que $\mathcal{A}_2$ es un álgebra finita (toda álgebra finita es σ-álgebra).

Ejemplo 2a

Experimento: Se observa el número de postulaciones a la UNALM hasta lograr el ingreso

Espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

Tipo de espacio muestral: Infinito y numerable.

Ejemplo 2b

1. Espacio de eventos
   - $\Lambda_1 = \{\emptyset, \{1\}, \Omega\}$
   - $\Lambda_2 = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{8\}, \Omega\}$
   - $\Lambda_3 = \{\emptyset, \Omega\}$
2. Álgebra de eventos
   - $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$
   - $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6, ...\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5, 6, ...\}, \{2, 3, 4, 5, 6, ...\}, \Omega\}$ $\quad |\mathcal{A}_2| = 8$
   - $\mathcal{A}_3 = \mathcal{P}(\Omega)$
   - $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \{1, 2, ..., n_0\}, \{n_0 + 1, n_0 + 2, ...\}, \Omega\}$, donde $n_0 \in \mathcal{N}$

3. σ-álgebra

- $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$
- $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6,\dots\}, \{1,2,3\}, \{1,4,5,6,\dots\}, \{2,3,4,5,6,\dots\}, \Omega\}$
- $\mathcal{A}_3 = \mathcal{P}(\Omega)$
- $\mathcal{A}_5 = \{\emptyset, \underbrace{\{1,2,\dots,n\}}_{C_n}, \underbrace{\{n+1, n+2, \dots\}}_{D_n}, \Omega : n \in \mathbb{N}\}$

$$\mathcal{A}_5 = \{\phi,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ \dots,\ D_1,\ D_2,\ \dots,\ \Omega\}$$

$$|\mathcal{A}_5| = \infty$$

Cumple los dos primeros requisitos, pero falla al verificar que la unión de dos eventos también forme parte de A5, es decir no es cerrado bajo uniones finitas, por lo que no es un álgebra, y en consecuencia tampoco es sigma álgebra.

Ejemplo 3a

Experimento: Se mide el tiempo (en segundos) que tarda un sistema en responder a una solicitud.
Espacio muestral: $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega > 0\}$
Tipo de espacio muestral: Infinito y no numerable.

Ejemplo 3b

1. Espacios de eventos:
- $\Lambda_1 = \{\emptyset, (0,1], (0,5], \Omega\}$
- $\Lambda_2 = \{(0,a], a > 0\} \cup \{\emptyset\}$
- $\Lambda_3 = \{\emptyset, (0,1], (4,7.5], \Omega\}$

$\Lambda_4 = \{\phi, \Omega, (-1, 1], [4, 5]\}$ no es un espacio de eventos porque $(-1, 1] \not\subset \Omega$

2. Álgebra de eventos
- $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$, además $|\mathcal{A}_1| = 2$
- $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, (0,1], (1,\infty), \Omega\}$, además $|\mathcal{A}_2| = 4$
- $\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, (0,1], (1,3], (3,\infty), (0,3], (0,1] \cup (3,\infty), (1,\infty), \Omega\}$, además $|\mathcal{A}_3| = 8$
- $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \Omega\} \cup \left\{\bigcup_{B \in S} B : \ S \subseteq \{B_1, B_2, B_3, B_4\}, \ S \neq \emptyset, \ S \neq \{B_1, B_2, B_3, B_4\}\right\}$, donde $B_1 = (0,1]$, $B_2 = (1,2]$, $B_3 = (2,10]$ y $B_4 = (10,\infty)$, además $|\mathcal{A}_4| < \infty$ (es finita)
- $\mathcal{A}_5 = \{\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \cup (c,\infty) : n \in \mathcal{N}_0, 0 \leq a_i < b_i < \infty, c \in [0,\infty)\}$, es decir $\mathcal{A}_5$ está formada por el conjunto vacío ($n = 0, c = \infty$), el espacio muestral ($c = 0$) y todas las uniones finitas de intervalos de tipo $(a,b]$ eventualmente acompañadas de una cola (c,∞), además $|\mathcal{A}_5| = \infty$ (es infinita)

- $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \Omega\} \cup \left\{\bigcup_{B \in S} B : \; S \subseteq \{B_1, B_2, B_3, B_4\}, \; S \neq \emptyset, \; S \neq \{B_1, B_2, B_3, B_4\}\right\}$, donde $B_1 = (0, 1]$, $B_2 = (1, 2]$, $B_3 = (2, 10]$ y $B_4 = (10, \infty)$, además $|\mathcal{A}_4| < \infty$ (es finita)

Ejemplo : $S = (0,\ 1] U (1,\ 2] = (0,\ 2]$

$(0,\ 1] \cup (1,\ 2] = (0,\ 2]$

$(0,\ 1] \cup (2,\ 10]$

...

$(2,\ 10] \cup (10,\ \infty) = (2,\ \infty)$

$(0,\ 1] \in \mathcal{A}_4 \rightarrow (1,\ \infty) \in \mathcal{A}_4$

$(0,\ 2] \in \mathcal{A}_4 \rightarrow (2,\ \infty) \in \mathcal{A}_4$

$(0,\ 1] \cup (10,\ \infty) \in \mathcal{A}_4 \rightarrow (1,\ 2] \cup (2,\ 10] = (1,\ 10] \in \mathcal{A}_4$

- $\mathcal{A}_5 = \{\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i] \cup (c, \infty) : n \in \mathcal{N}_0, 0 \leq a_i < b_i < \infty, c \in [0, \infty)\}$, es decir $\mathcal{A}_5$ está formada por el conjunto vacío ($n = 0, c = \infty$), el espacio muestral ($c = 0$) y todas las uniones finitas de intervalos de tipo $(a, b]$ eventualmente acompañadas de una cola (c, ∞), además $|\mathcal{A}_5| = \infty$ (es infinita)

$\Omega \in \mathcal{A}_5$ cuando $c = 0$

$(a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup (c, \infty) \in \mathcal{A}_5$

$(0, a_1] \cup (b_1, a_2] \cup (b_2, c] \in \mathcal{A}_5$

El complemento tambi*én* pertenece al *á*lgebra