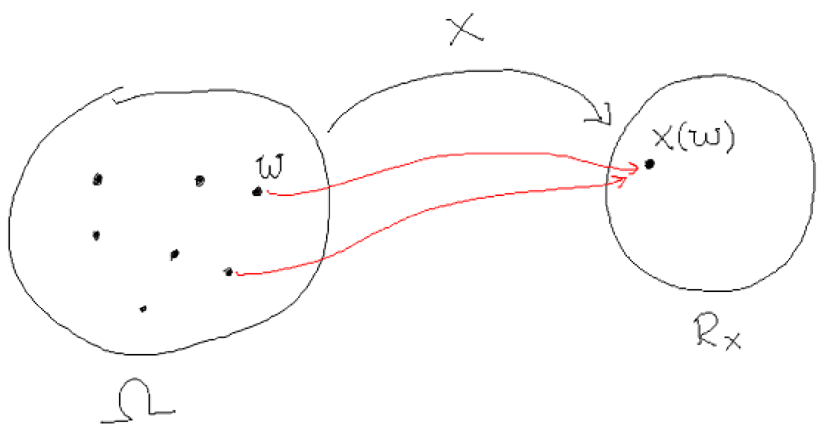
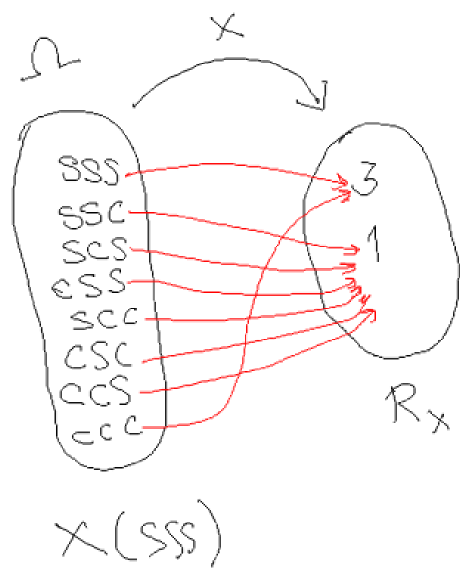




Ejemplo 1

Experimento aleatorio:

Lanzar una moneda 3 veces

Espacio muestral:

$\Omega = \{(SSS), (SSC), (SCS), (CSS), (SCC), (CSC), (CCS), (CCC)\}$

Variable aleatoria:

X = Valor absoluto de la diferencia entre el número de caras y sellos

Ejemplo 2

Experimento aleatorio:

Seleccionar un punto uniformemente en el intervalo $(0, 1)$

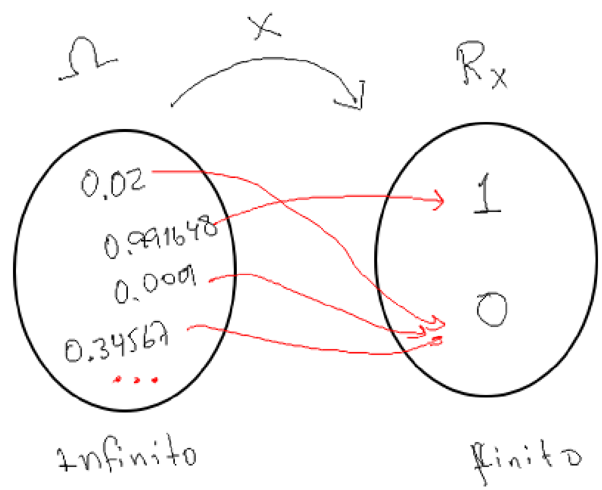
Espacio muestral:

$\Omega = (0, 1)$

Variable aleatoria: (Bernoulli)

X = Variable de dicotómica / de excedencia con umbral 0.7

$X(\omega) = I_{(\omega > 0.7)}(\omega)$



Ejemplo 3

Experimento aleatorio:

Seleccionar un número real al azar

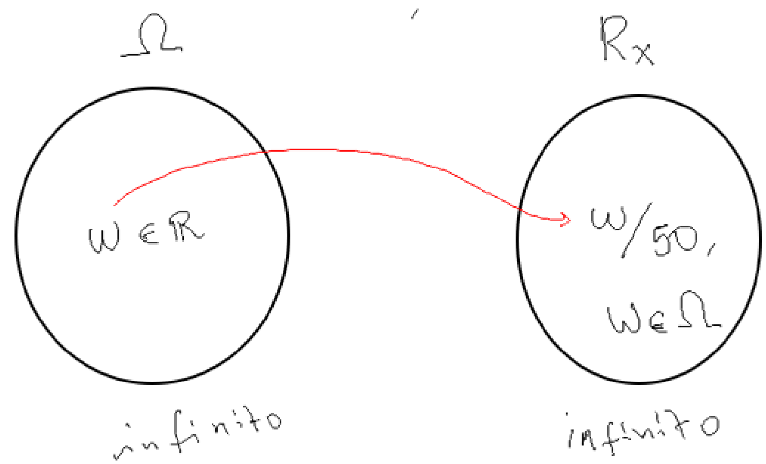
Espacio muestral:

$\Omega = \mathbb{R}$

Variable aleatoria:

X = Variable reescalada

$X(\omega) = \frac{\omega}{50}$

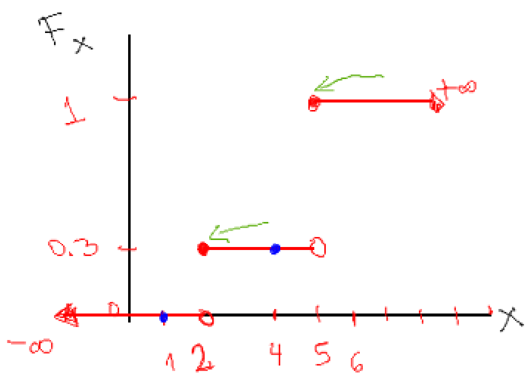


Monotonía no decreciente

- $x \leq y \to F(x) \leq F(y)$, es decir F es no decreciente

Continuidad por la derecha

- Si $x_n \downarrow x \to F(x_n) \downarrow F(x)$, es decir F es continua por la derecha. ✓



$P(X=2)=0.3$, $P(X=5)=0.7$

$F(1) < F(4)$

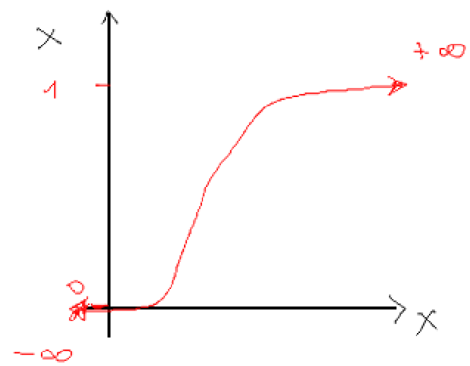
$F(2) = F(4)$

$\downarrow \quad \downarrow$

$0.3 \quad 0.3$

$F(10) = 1$

$F(-2) = 0$



Límites en los extremos

- Si $x_n \downarrow -\infty$ entonces $F(x_n) \downarrow 0$. Si $x_n \uparrow \infty$ entonces $F(x_n) \uparrow 1$.

$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

Ejemplo 4a

En una clase universitaria, se registra si los primeros tres estudiantes que llegan lo hacen puntuales o tarde. Se sabe que cada estudiante llega tarde con probabilidad 0.3 y puntual con probabilidad 0.7, y que llegan de manera independiente. Definimos:

P: Estudiante llega puntual

T: Estudiante llega tarde

$\Omega = \{PPP, PPT, PTP, TPP, PTT, TPT, TTP, TTT\}$

X =Número de estudiantes que llega tarde

Construir la variable aleatoria discreta

$$\Omega = \{PPP, PPT, PTP, TPP, PTT, TPT, TTP, TTT\}$$

$$\downarrow X$$

$$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(X=0) = P(\{PPP\}) = 0.7 \times 0.7 \times 0.7 = 0.343$$

$$P(X=1) = P(\{PPT, PTP, TPP\}) = 3 \times 0.7 \times 0.7 \times 0.3 = 0.441$$

$$P(X=2) = P(\{PTT, TPT, TTP\}) = 1 - 0.343 - 0.441 - 0.027 = 0.189$$

$$P(X=3) = P(\{TTT\}) = 0.3 \times 0.3 \times 0.3 = 0.027$$

Ejemplo 4b

Construir la función de probabilidad de X

$$f_X(x) = p_X(x) = 0.343\, I_{\{0\}}(x) + 0.441\, I_{\{1\}}(x) + 0.189\, I_{\{2\}}(x) + 0.027\, I_{\{3\}}(x)$$

$$f_X(8) = 0, \quad f_X(1) = 0.441$$

Ejemplo 4b

Construir la función de probabilidad de X

$$f_X(x) = p_X(x) = 0.343\, I_{\{0\}}(x) + 0.441\, I_{\{1\}}(x) + 0.189\, I_{\{2\}}(x) + 0.027\, I_{\{3\}}(x)$$

Ejemplo 4c

$X \leq 2$ $\qquad$ $X \geq 1$

Calcular la probabilidad de que a lo más dos estudiantes lleguen tarde si al menos uno ya lo hizo.

condición

$$P(X \leq 2 \mid X \geq 1) = \frac{P(1 \leq X \leq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{f_X(1) + f_X(2)}{f_X(1) + f_X(2) + f_X(3)} = \frac{0.441 + 0.189}{0.441 + 0.189 + 0.027} = \boxed{0.9589}$$

$$[X \leq 2] = \{PPP, PPT, PTP, TPP, PTT, TPT, TTP\}$$

$$[X \geq 1] = \{PPT, PTP, TPP, PTT, TPT, TTP, TTT\}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejemplo 4d

Construir la función de distribución de X

$$f_X(x) = p_X(x) = 0.343 I_{\{0\}}(x) + 0.441 I_{\{1\}}(x) + 0.189 I_{\{2\}}(x) + 0.027 I_{\{3\}}(x)$$

Función de distribución

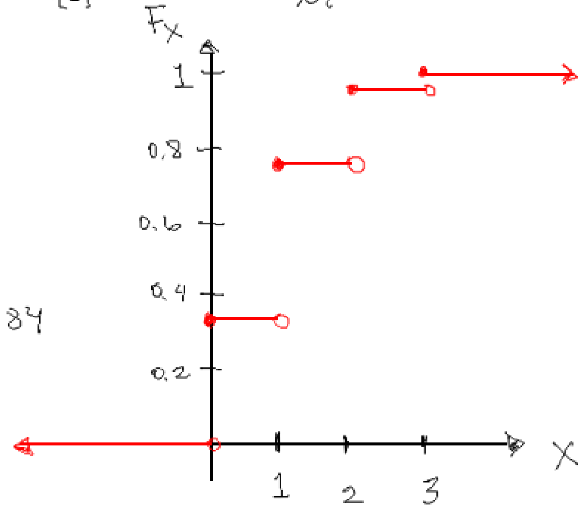
$x < 0$: $F_X(x) = 0$

$0 \leq x < 1$: $F_X(x) = 0.343$

$1 \leq x < 2$: $F_X(x) = 0.343 + 0.441 = 0.784$

$2 \leq x < 3$: $F_X(x) = 0.973$

$x \geq 3$: $F_X(x) = 1$



$$F_X(x) = 0.343 I_{[0,1)}(x) + 0.784 I_{[1,2)}(x) + 0.973 I_{[2,3)}(x) + I_{[3,\infty)}(x)$$

$$\mu_X = E(X) = \sum_i x_i p(x_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) - \sum_{n=1}^{\infty} P(X \leq -n)$$

$$f_X(x) = p_X(x) = 0.343\, I_{\{0\}}(x) + 0.441\, I_{\{1\}}(x) + 0.189\, I_{\{2\}}(x) + 0.027\, I_{\{3\}}(x)$$

Ejemplo 4e

Calcular el valor esperado de X

- $\sum x_i \underbrace{p(x_i)}_{\text{ponderaciones}} = 0.343 \times 0 + 0.441 \times 1 + 0.189 \times 2 + 0.027 \times 3 = 0.9$

- $\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) - \sum_{n=1}^{\infty} P(X \leq -n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) = P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + P(X \geq 3)$

  $X \in \{0,1,2,3\}$ no negativos

  $= 0.657 + 0.216 + 0.027 = 0.9$

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 p(x_i) = E(X^2) - \mu_X^2$$

$\left.\begin{matrix}\mu_X \\ \sigma_X^2\end{matrix}\right\} \rightarrow$ parámetros

$f_X(x) = p_X(x) = 0.343 I_{\{0\}}(x) + 0.441 I_{\{1\}}(x) + 0.189 I_{\{2\}}(x) + 0.027 I_{\{3\}}(x)$

Ejemplo 4f

Calcular la varianza de X

- $\sum_i (x_i - \mu_X)^2 p(x_i) = (0-0.9)^2 \times 0.343 + (1-0.9)^2 \times 0.441 + (2-0.9)^2 \times 0.189 + (3-0.9)^2 \times 0.027 = 0.63$
- $E(X^2) = 0^2 \times 0.343 + 1^2 \times 0.441 + 2^2 \times 0.189 + 3^2 \times 0.027 = 1.44$

  $E(X^2) - \mu_X^2 = 1.44 - 0.9^2 = 1.44 - 0.81 = 0.63$

$\sigma_X = \sqrt{0.63}$

$CV_X = \dfrac{\sqrt{0.63}}{0.9} \times 100\%$

Ejemplo 5

Una ruleta tiene 8 sectores, cada uno de los cuales contiene un premio:

- 1 sector da S/ 50
- 2 sectores dan S/ 10
- 2 sectores dan S/ 5
- 3 sector no tiene premio

Se gira la ruleta una vez, y si no se gana nada, se le da una oportunidad más de girar.

1. Definir el experimento aleatorio y espacio muestral.
2. Construir la función de probabilidad para la variable aleatoria: Monto ganado
3. ¿Qué es más probable: ganar S/ 50 o no ganar nada?
4. Construir la función de distribución y con ello calcular la probabilidad de ganar como máximo 20 soles.
5. Calcular el monto esperado de ganancia, así como la varianza de la variable aleatoria.
6. Calcular el coeficiente de asimetría de Pearson de la variable.
7. Si participar de la ruleta tiene un costo de 2 soles, ¿cuál es el monto esperado de ganancia real, así como su coeficiente de variabilidad?

Ejemplo 5

Una ruleta tiene 8 sectores, cada uno de los cuales contiene un premio:

- 1 sector da S/ 50
- 2 sectores dan S/ 10
- 2 sectores dan S/ 5
- 3 sectores no tiene premio

Se gira la ruleta una vez, y si no se gana nada, se le da una oportunidad más de girar.

1. Definir el experimento aleatorio y espacio muestral.

   Experimento aleatorio: Girar la ruleta con 8 sectores, con la posibilidad de un segundo giro si no se gana algún premio

   Espacio muestral: $\Omega = \{50, 10, 5, (0,50), (0,10), (0,5), (0,0)\}$

2. Construir la función de probabilidad para la variable aleatoria: Monto ganado

$$\Omega = \{50, 10, 5, (0,50), (0,10), (0,5), (0,0)\}$$

$$X(\Omega) = \{50, 10, 5, 0\}$$

$$P(X=0) = P(\{(0,0)\}) = 3/8 \times 3/8 = 9/64$$

$$P(X=5) = P(\{(0,5), 5\}) = 3/8 \times 2/8 + 2/8 = 2/8 \times 11/8 = 22/64$$

$$P(X=10) = P(\{(0,10), 10\}) = 3/8 \times 2/8 + 2/8 = 22/64$$

$$P(X=50) = P(\{(0,50), 50\}) = 3/8 \times 1/8 + 1/8 = 1/8 \times 11/8 = 11/64$$

$$f_X(x) = 9/64\, I_{\{0\}}(x) + 22/64\, I_{\{5,10\}}(x) + 11/64\, I_{\{50\}}(x)$$

3. ¿Qué es más probable: ganar S/ 50 o no ganar nada?

$$f_X(x) = 9/64\, I_{\{0\}}(x) + 22/64\, I_{\{5,10\}}(x) + 11/64\, I_{\{50\}}(x)$$

$P(X=50) = 11/64$

$P(X=0) = 9/64$ Es más probable ganar S/ 50

4. Construir la función de distribución y con ello calcular la probabilidad de ganar como máximo 20 soles.

$x<0, \quad F_X(x) = 0$

$0 \leq x < 5, \quad F_X(x) = 9/64$

$5 \leq x < 10, \quad F_X(x) = 31/64$

$10 \leq x < 50, \quad F_X(x) = 53/64$

$x \geq 50, \quad F_X(x) = 1$

$$F_X(x) = \frac{9}{64} I_{[0,5)}(x) + \frac{31}{64} I_{[5,10)}(x) + \frac{53}{64} I_{[10,50)}(x) + I_{[50,\infty)}(x)$$

$$P(X \leq 20) = F_X(20) = \frac{53}{64}$$

5. Calcular el monto esperado de ganancia, así como la varianza de la variable aleatoria.

$$f_X(x) = 9/64\, I_{\{0\}}(x) + 22/64\, I_{\{5,10\}}(x) + 11/64\, I_{\{50\}}(x)$$

$$\mu_X = E(X) = \sum_i x_i p(x_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) - \sum_{n=1}^{\infty} P(X \leq -n)$$

$$\mu_X = E(X) = \frac{9}{64} \times 0 + \frac{22}{64} \times 5 + \frac{22}{64} \times 10 + \frac{11}{64} \times 50 = 13.75 \text{ soles}$$

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 p(x_i) = E(X^2) - \mu_X^2$$

$$E(X^2) = \frac{9}{64} \times 0^2 + \frac{22}{64} \times 5^2 + \frac{22}{64} \times 10^2 + \frac{11}{64} \times 50^2 = 472.6562$$

$$\sigma_X^2 = 472.6562 - 13.75^2 = 283.5938 \text{ soles}^2$$

6. Calcular el coeficiente de asimetría de Pearson de la variable.

$$F_X(x) = \frac{9}{64} I_{[0,5)}(x) + \underset{\substack{\downarrow \\ 0.484}}{\frac{31}{64}} I_{[5,10)}(x) + \underset{\substack{\downarrow \\ 0.828}}{\frac{53}{64}} I_{[10,50)}(x) + I_{[50,\infty)}(x)$$

$$A_S = \frac{3(\mu_X - Me)}{\sigma_X}$$

$$\mu_X = 13.75$$

$$\sigma_X = \sqrt{283.5938} = 16.84$$

$$Me_X = ?$$

$$F_X(Me_X) \geq 0.5$$

$$F_X(10) \geq 0.5 \Rightarrow Me_X = 10$$

$$\therefore A_S = \frac{3(13.75 - 10)}{16.84} = 0.668 \rightarrow \text{Asimetría positiva}$$

7. Si participar de la ruleta tiene un costo de 2 soles, ¿cuál es el monto esperado de ganancia real, así como su coeficiente de variabilidad?

G = Ganancia real $= X - 2$

$\mu_G = E(G) = E(X-2) = E(X) - 2 = 13.75 - 2 = 11.75$ soles

$\sigma_G^2 = V(G) = V(X-2) = V(X) = 283.5938$

$\sigma_G = 16.84$

$CV_G = \dfrac{16.84}{11.75} \times 100\% = 143.32\%$