Cálculo de probabilidades

Capítulo 2: Variable aleatoria

Mg. Sc. J. Eduardo Gamboa U.

Variable aleatoria

Una variable aleatoria X en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es una función real definida en Ω tal que $[X \leq x]$ es un evento aleatorio $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1

Experimento aleatorio:

Lanzar una moneda 3 veces

Espacio muestral:

$\Omega = \{(SSS), (SSC), (SCS), (CSS), (SCC), (CSC), (CCS), (CCC)\}$

Variable aleatoria:

$X =$ Número de caras observadas

$X(SSS) = 0$

$X(SSC) = X(SCS) = X(CSS) = 1$

$X(SCC) = X(CSC) = X(CCS) = 2$

$X(CCC) = 3$

Ejemplo 2

Experimento aleatorio:

Seleccionar un punto uniformemente en el intervalo $(0, 1)$

Espacio muestral:

$\Omega = (0, 1)$

Variable aleatoria:

$X =$ Variable de dicotómica / de excedencia con umbral 0.7

$X(\omega) = I_{(\omega > 0.7)}(\omega)$

Ejemplo 3

Experimento aleatorio:

Seleccionar un número real al azar

Espacio muestral:

$\Omega = \mathbb{R}$

Variable aleatoria:

$X =$ Variable reescalada

$X(\omega) = \frac{\omega}{50}$

Función de distribución (acumulada)

La función de distribución (acumulada) de la variable aleatoria X, representada por F_X, se define por:

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Propiedades

Si X es una variable aleatoria, su función de distribución F presenta las siguientes propiedades:

- $x \leq y \rightarrow F(x) \leq F(y)$, es decir F es no decreciente
- Si $x_n \downarrow x \rightarrow F(x_n) \downarrow F(x)$, es decir F es continua por la derecha.
- Si $x_n \downarrow -\infty$ entonces $F(x_n) \downarrow 0$. Si $x_n \uparrow \infty$ entonces $F(x_n) \uparrow 1$.

La función de distribución:

- es monótona no decreciente
- tiene un número finito o numerable de puntos de discontinuidad
- todas las discontinuidades que hubieran son de salto
- el salto en el punto x es igual a $P(X = x)$

Tipos de variable aleatoria

- Discreta
- Continua
- Mixta
- Mezcla

Variable aleatoria discreta

Una variable aleatoria es discreta si toma un número finito o numerable de valores, es decir si existe un conjunto finito o numerable $\{x_1, x_2, ...\} \subset \mathbb{R}$ tal que $X(\omega) \in \{x_1, x_2, ...\} \forall \omega \in \Omega$.

Ejemplo 4a

En una clase universitaria, se registra si los primeros tres estudiantes que llegan lo hacen puntuales o tarde. Se sabe que cada estudiante llega tarde con probabilidad 0.3 y puntual con probabilidad 0.7, y que llegan de manera independiente. Definimos:

P: Estudiante llega puntual

T: Estudiante llega tarde

$\Omega = \{PPP, PPT, PTP, TPP, PTT, TPT, TTP, TTT\}$

$X =$Número de estudiantes que llega tarde

Construir la variable aleatoria discreta

Función de probabilidad

La función $p_X(x_i)$ o $f_X(x_i)$ definida por $p(x_i) = P(X = x_i)$ para $i = 1, 2, \ldots$ se llama función de probabilidad de X.

Ejemplo 4b

Construir la función de probabilidad de X

Ejemplo 4c

Calcular la probabilidad de que a lo más dos estudiantes lleguen tarde si al menos uno ya lo hizo.

Ejemplo 4d

Construir la función de distribución de X

Valor esperado

La esperanza matemática, o valor esperado, es una medida del valor promedio ponderado de todos los posibles resultados de una variable aleatoria. Se calcula como:

$$\mu_X = E(X) = \sum_i x_i p(x_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) - \sum_{n=1}^{\infty} P(X \leq -n)$$

Ejemplo 4e

Calcular el valor esperado de X

Propiedades del valor esperado

- Si $X = c$ entonces $E(X) = c$
- Si $X \leq Y$ entonces $E(X) \leq E(Y)$
- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

Varianza

La varianza mide la dispersión de los valores de la variable aleatoria respecto a su esperanza matemática. Se calcula como:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 p(x_i) = E(X^2) - \mu_X^2$$

Ejemplo 4f

Calcular la varianza de X

Ejemplo 5

Una ruleta tiene 8 sectores, cada uno de los cuales contiene un premio:

- 1 sector da S/ 50
- 2 sectores dan S/ 10
- 2 sectores dan S/ 5
- 3 sector no tiene premio

Se gira la ruleta una vez, y si no se gana nada, se le da una oportunidad más de girar.

1. Definir el experimento aleatorio y espacio muestral.
2. Construir la función de probabilidad para la variable aleatoria: Monto ganado
3. ¿Qué es más probable: ganar S/ 50 o no ganar nada?
4. Construir la función de distribución y con ello calcular la probabilidad de ganar como máximo 20 soles.
5. Calcular el monto esperado de ganancia, así como la varianza de la variable aleatoria.
6. Calcular el coeficiente de asimetría de Pearson de la variable.
7. Si participar de la ruleta tiene un costo de 2 soles, ¿cuál es el monto esperado de ganancia real, así como su coeficiente de variabilidad?

Variable aleatoria continua

Una variable aleatoria X es continua si existe una función $f_X(x) \geq 0$, conocida como función de (probabilidad de) densidad, tal que:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Una función $f(x) \geq 0$ es la densidad de alguna variable aleatoria si, y solamente si, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Si $F_X(x)$ es continua, y derivable excepto en un número finito de puntos, entonces $f_X(x) = F'_X(x)$

Propiedades de la densidad

1. No negatividad, $f_X(x) \geq 0$
2. Área total igual a 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$
3. Probabilidad por integración: $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$
4. Probabilidad puntual nula: $P(X = c) = 0$
5. FDA obtenida integrando la densidad: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

Ejemplo 6a

Hallar el valor de a para que $f_X(x)$ sea una función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} a(x+2), & -2 \leq x < -1, \\ a, & -1 \leq x < 1, \\ \dfrac{2-x}{3}, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 6b

Calcular $P(X < 0 \cup X > 1.5 | X > -0.5)$

Valor esperado

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx$$

Ejemplo 6c

Calcular el valor esperado de X

Varianza

La varianza mide la dispersión de los valores de la variable aleatoria respecto a su esperanza matemática. Se calcula como:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_X)^2 f_X(x_i) = E(X^2) - \mu_X^2$$

Ejemplo 6d

Calcular la varianza de X

Variable aleatoria mixta

Variable aleatoria mezcla