A = {Eduardo nació en Lima}

B = {Eduardo estudió estadística}

C = {Eduardo nació en Trujillo}

	A y B	A y C	B y C
Independ.	Sí	⊙	Sí
Mut. exclu	No $A \cap B \neq \phi$	Sí $A \cap C = \phi$	No $B \cap C \neq \phi$

* Independencia :

$$P(A|B) = P(A) \qquad P(B|A) = P(B)$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \qquad \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

⊙ $P(A) = 1/3 = 0.33$

$P(C) = 0.10$

$P(A \cap C) = 0$

$$¿\underbrace{P(A \cap C)}_{0} = \underbrace{\underbrace{P(A)}_{0.33} \times \underbrace{P(C)}_{0.10}}_{0.033}?$$

=> A y C no son independientes

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = 0.7 \\ P(B) = 0 \end{array}\right\} \circ$$

A y B son mut. excluy. $\Rightarrow P(A \cap B) = 0$

independ. $\left\{\begin{array}{l} A = \{\text{Aprobar Calculo de probabilidad}\}, \quad P(A) = 0.60 \\ F = \{\text{comer pizza el día de su cumpleaños}\}, \quad P(F) = 0.90 \\ M = \{\text{Al lanzar una moneda, sale cara.}\}, \quad P(M) = 0.50 \end{array}\right.$

$$P(A \cap F \cap M) = 0.60 \times 0.90 \times 0.50$$

Ejemplo 8

Se lanzan dos monedas equilibradas de manera independiente. Se definen los eventos:

A: {la primera moneda sale cara}

B: {la segunda moneda sale cara}

Hallar $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$.

Hallar $P(A^c)$, $P(B^c)$ y $P(A^c \cap B^c)$

Experimento aleatorio: Lanzar dos monedas justas una luego de otra

Espacio muestral: $\Omega = \{(C,C),(C,S),(S,C),(S,S)\}$, $n(\Omega)=4$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{4} = 0.5 \rightarrow P(A^c) = 0.5$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{4} = 0.5 \longrightarrow P(B^c) = 0.5$

$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4} = P(A)\,P(B)$ A y B son independientes ✓

$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)\,P(B^c) = 0.25$

Ejemplo 9

En un hospital se estudia la presencia de una enfermedad B y dos pruebas diagnósticas para su detección. Se definen los siguientes eventos:

A_1: {la prueba 1 resulta positiva}

A_2: {la prueba 2 resulta positiva}

B: {el paciente tiene la enfermedad}

(¿cuál sería el espacio muestral y su cardinalidad?)

Dado que el paciente sí tiene la enfermedad, los resultados de las dos pruebas son independientes, porque miden el mismo fenómeno biológico de manera separada.

$$\underbrace{P(A_1 \cap A_2 | B)}_{0.99 \times 0.98} = \underbrace{P(A_1 | B)}_{0.99} \underbrace{P(A_2 | B)}_{0.98}$$

$$* \; \underbrace{P(A_1 \cap A_2^c | B) = P(A_1 | B) P(A_2^c | B)}_{0.99 \times 0.02}$$

Experimento aleatorio: Observar si el paciente tiene o no la enfermedad mediante el uso de dos pruebas diagnósticas.

Espacio muestral: $\Omega = \{ (B, A_1, A_2), (B, A_1, A_2^c), (B, A_1^c, A_2), (B, A_1^c, A_2^c), (B^c, A_1, A_2), (B^c, A_1, A_2^c), (B^c, A_1^c, A_2), (B^c, A_1^c, A_2^c) \}$, $n(\Omega) = 8$

Teorema de la Probabilidad total

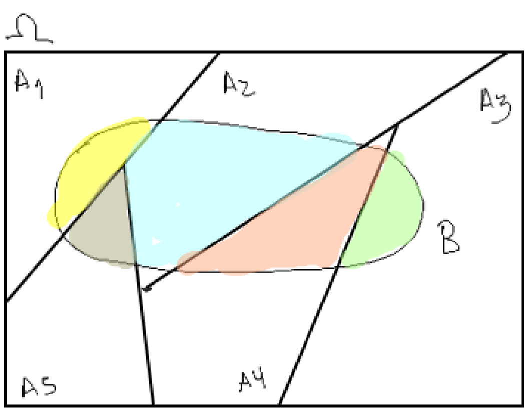
particiones del Ω

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad en el cual los eventos $A_1, \ldots, A_k$ son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Luego, para cualquier otro evento B:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j)P(B|A_j)$$

$A_1, A_2, \ldots, A_k$ son mutuamente excluyentes : $A_i \cap A_j = \phi \quad i \neq j \quad i,j = 1, \ldots, k$

$A_1, A_2, \ldots, A_k$ son colectivamente exhaustivos : $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$



$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4) + P(B \cap A_5)$

$= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \ldots$

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

A1 = {1,2}

A2 = {3,4}

A3 = {5,6}

B = {Obtener un número primo}

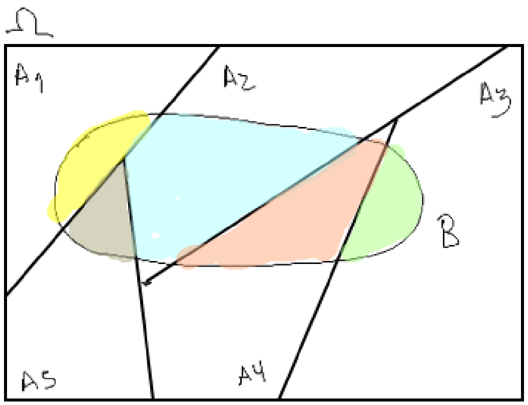
Teorema de Bayes

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad en el cual los eventos $A_1, \ldots, A_k$ son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Luego, para cualquier otro evento B tal que $P(B) > 0$:

Teorema de la multiplicación o probab compuesta

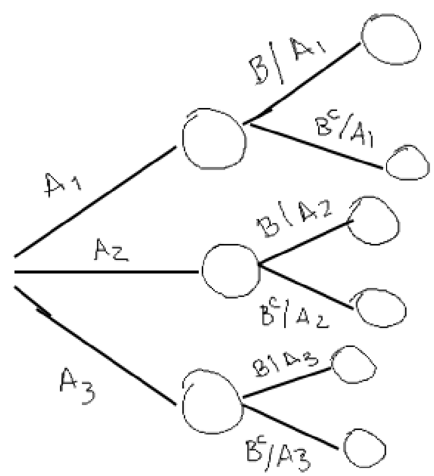
$$P(A_h|B) = \frac{P(A_h \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_h)P(B|A_h)}{\sum_{j=1}^{k} P(A_j)P(B|A_j)} = P(A_h) \times \frac{P(B|A_h)}{\sum_{j=1}^{k} P(A_j)P(B|A_j)}$$

Probabilidad Total



Conocemos $P(A_1)$, $P(A_2)$, ... : Probabilidades a priori

Buscamos conocer $P(A_1|B)$, $P(A_2|B)$, ... : Probabilidades a posteriori



Ejemplo 10

Una empresa procesa solicitudes a través de tres servidores distintos. Cada solicitud es atendida exactamente por uno de los servidores, de modo que los eventos

A_1 : {la solicitud es procesada por el Servidor 1}
A_2 : {la solicitud es procesada por el Servidor 2}
A_3 : {la solicitud es procesada por el Servidor 3}

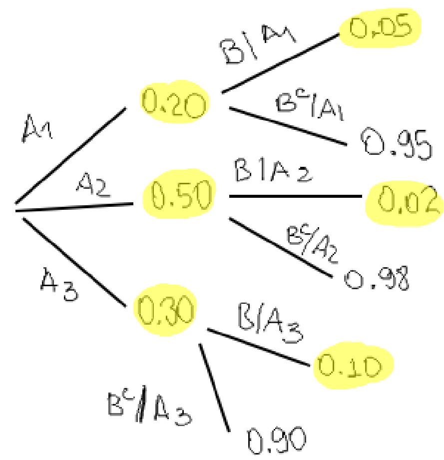
son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Las probabilidades de uso de cada servidor son:

$$P(A_1) = 0.20, \qquad P(A_2) = 0.50, \qquad P(A_3) = 0.30$$

Sea B el evento {*la solicitud presenta un error de procesamiento.*} Se sabe que:

$$P(B \mid A_1) = 0.05, \qquad P(B \mid A_2) = 0.02, \qquad P(B \mid A_3) = 0.10$$

1 ▶ Calcule la probabilidad de que una solicitud seleccionada al azar presente un error.
▶ Calcule la probabilidad de que una solicitud seleccionada al azar presente un error.
2 ▶ Compare la probabilidad a priori con la posteriori.



$$P(B) = P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2) + P(B\cap A_3)$$
$$= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$
$$= 0.05\times 0.20 + 0.02\times 0.50 + 0.1\times 0.3$$
$$= 0.05 = P(\text{Solicitud con error})$$

- $P(A_1) = 0.20$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1\cap B)}{P(B)} = \frac{0.20\times 0.05}{0.05} = 0.20$$

- $P(A_2) = 0.50$

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2\cap B)}{P(B)} = \frac{0.50\times 0.02}{0.05} = \frac{0.01}{0.05} = 0.20$$

- $P(A_3) = 0.30$

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3\cap B)}{P(B)} = \frac{0.3\times 0.1}{0.05} = 0.60$$

Ejemplo 13

La función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ x, & \text{si } x \in [0,1] \\ x^2, & \text{si } x \in (1,4] \\ 5-x, & \text{si } x \in (4,5] \\ 0, & \text{si } x \in (5\infty) \end{cases}$$

puede escribirse como:

$$f(x) = xI_{[0,1]}(x) + x^2 I_{(1,4]}(x) + (5-x)I_{(4,5]}(x)$$

o

$$f(x) = x\mathbf{1}_{[0,1]}(x) + x^2\mathbf{1}_{(1,4]}(x) + (5-x)\mathbf{1}_{(4,5]}(x)$$

$$f(2) = \cancel{\underbrace{2 I_{[0,1]}(2)}_{0}} + 2^2 I_{(1,4]}(2) + \cancel{(5-2) I_{(4,5]}(2)} = 4 \times 1 = 4$$