

# Cálculo de probabilidades

Capítulo 1: Conceptos básicos

Mg. Sc. J. Eduardo Gamboa U.



# Presentación

## ***Datos del docente***

Mg. Jesús Eduardo Gamboa Unsihuay

Correo: jgamboa@lamolina.edu.pe

## ***Datos del curso***

EP3010 Cálculo de probabilidades

Link de la sesión: Teams

Repositorio: GitHub

## Sumilla

El curso de Cálculo de Probabilidades pertenece al área de formación de la especialidad, es de carácter obligatorio y de naturaleza teórico-práctica. Su propósito es brindar al estudiante los conceptos, fundamentos y aplicaciones de las principales técnicas probabilísticas y posteriormente utilizar esta información en aplicaciones estadísticas. Comprende las siguientes unidades: Conceptos probabilísticos básicos. Variables aleatorias univariadas: Discretas, Continuas, Mixtas, Mezcla y Truncadas. Funciones generatrices. Familias paramétricas especiales de distribuciones univariadas: Uniforme discreta, Binomial, Hipergeométrica, Poisson, Pascal, Zeta, Uniforme continua, Triangular, Normal, Lognormal, Gamma, Beta, Weibull, Cauchy, Laplace, Logística, Pareto y r. Variables aleatorias distribuidas en forma conjunta: Discretas, Continuas y Mixtas.

## Evaluaciones

- ▶ Evaluación 1:
  - ▶ Evalúa Unidad 1
  - ▶ Semana 2
  - ▶ Teórico - práctica
  - ▶ Ponderación: 20%
- ▶ Evaluación 2:
  - ▶ Evalúa Unidad 2
  - ▶ Semana 3
  - ▶ Teórico - práctica
  - ▶ Ponderación: 20%
- ▶ Evaluación 3:
  - ▶ Evalúa Unidad 3
  - ▶ Semana 4
  - ▶ Teórico - práctica
  - ▶ Ponderación: 20%

## Evaluaciones

- ▶ Evaluación 4:
  - ▶ Evalúa Unidad 4
  - ▶ Semana 4
  - ▶ Teórico - práctica
  - ▶ Ponderación: 20%
- ▶ Trabajo (8 grupos de 3 y un grupo de 2)
  - ▶ Evalúa: Tema asignado
  - ▶ 23/01 (3 grupos), 30/01 (3 grupos), 06/02 (3 grupos)
  - ▶ Ponderación: 10%
- ▶ Actitudinal
  - ▶ Durante todas las semanas del curso
  - ▶ Participación, asistencia y entrega de tareas
  - ▶ Ponderación: 10%

## Unidades del curso

1. Conceptos básicos
2. Variables aleatorias univariadas
3. Familias paramétricas especiales de distribuciones univariadas
4. Variables aleatorias distribuidas de forma conjunta

## ¿Qué debo saber?

(y si no lo sé, repaso cuanto antes)

- ▶ Operaciones con conjuntos
- ▶ Combinatorias y permutaciones
- ▶ Integrales y derivadas
- ▶ Estadística descriptiva
- ▶ Uso de notación formal

# Conceptos básicos

## ¿Cómo se originan los datos?

Los datos se obtienen cuando una acción, fenómeno o interacción es representada mediante valores medibles o registrables, a partir del uso sistemático de herramientas, tecnologías o métodos de observación.

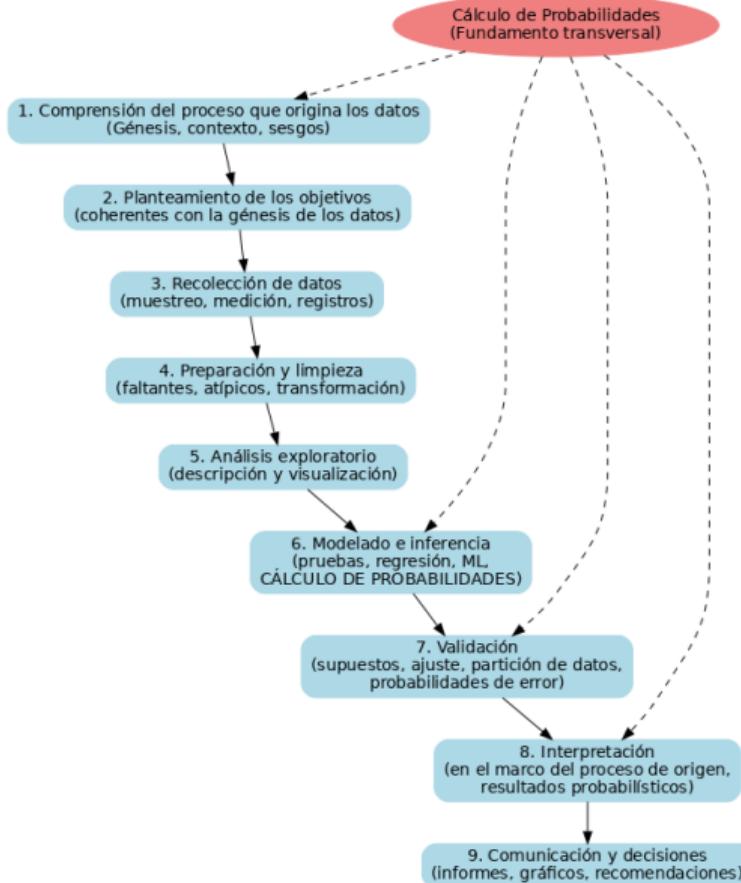
El contenido del curso permitirá al estudiante representar estos fenómenos mediante modelos probabilísticos, es decir, representaciones simplificadas de la realidad que emplean variables aleatorias, distribuciones de probabilidad y otros conceptos formales con el fin de cuantificar la incertidumbre inherente a los procesos observados.

## Importancia de la probabilidad

La probabilidad es una herramienta matemática fundamental en ciencia de datos para:

- ▶ el modelamiento de la incertidumbre
- ▶ la fundamentación teórica de la inferencia estadística (axiomas, teoremas, leyes, propiedades, etc)
- ▶ la fundamentación conceptual (conceptos, definiciones, interpretaciones, etc) y matemática (axiomas, formalizaciones, demostraciones, etc) de los métodos de machine learning.

# El cálculo de probabilidades en el proceso de análisis de datos



## Espacio de probabilidad

Un espacio de probabilidad es un terna  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  donde:

- ▶  $\Omega$  es el conjunto no vacío de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- ▶  $\mathcal{A}$  es un  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$
- ▶  $P$  es una medida de probabilidad en  $\mathcal{A}$

## Espacio muestral

- ▶  $\Omega$  es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, llamados puntos muestrales.
- ▶ Cada elemento  $\omega \in \Omega$  representa un resultado elemental.
- ▶  $\Omega$  puede ser finito, numerable o no numerable, dependiendo de la naturaleza del experimento.

### Ejemplo 1a

Experimento: Lanzar un dado regular equilibrado

Espacio muestral:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Tipo de espacio muestral: Finito y numerable.

### Ejemplo 2a

Experimento: Se observa el número de postulaciones a la UNALM hasta lograr el ingreso

Espacio muestral:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Tipo de espacio muestral: Infinito y numerable.

### Ejemplo 3a

Experimento: Se mide el tiempo (en segundos) que tarda un sistema en responder a una solicitud.

Espacio muestral:  $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega > 0\}$

Tipo de espacio muestral: Infinito y no numerable.

Dependiendo de la naturaleza del espacio muestral (finito, numerable o no numerable) será necesario definir adecuadamente una colección de eventos y una medida de probabilidad que permita cuantificar la incertidumbre de manera consistente.

## Definición

Sea  $\Omega$  el espacio muestral de un experimento. Todo subconjunto  $A \subset \Omega$  será llamado evento.

## Tipos de eventos

- ▶  $\Omega$  es el evento cierto
- ▶  $\emptyset$  es el evento imposible.
- ▶ Si  $\omega \in \Omega$ ; el evento  $\{\omega\}$  se llama evento elemental o evento simple.

## $\sigma$ -álgebra

### Definiciones

- ▶ Un **espacio de eventos**  $\Lambda$  es una colección de subconjuntos de  $\Omega$
- ▶ Un **álgebra de eventos**  $\mathcal{A}$  es un espacio de eventos cerrado bajo uniones **finitas**, es decir que cumple:
  - ▶  $\Omega \in \mathcal{A}$
  - ▶ Si  $A \in \mathcal{A}$ , entonces su complemento  $A^c \in \mathcal{A}$ .
  - ▶ Si  $A_1 \in \mathcal{A}$  y  $A_2 \in \mathcal{A}$ , entonces  $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$
- ▶ Un  **$\sigma$ -álgebra de eventos**  $\mathcal{A}$  es un álgebra de eventos cerrado bajo uniones **numerable**s, es decir que cumple:
  - ▶  $\Omega \in \mathcal{A}$
  - ▶ Si  $A \in \mathcal{A}$ , entonces su complemento  $A^c \in \mathcal{A}$ .
  - ▶ Si  $A_j \in \mathcal{A}$ , para  $1 \leq j \leq \infty$ , entonces  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$
- ▶ El  $\sigma$ -álgebra es esencial para el estudio de probabilidades en espacios continuos.
- ▶ En cuanto a estructuras:

$$\sigma - \text{álgebra} \subset \text{álgebra de eventos} \subset \text{espacio de eventos}$$

## Proposición

Sea  $\mathcal{A}$  un álgebra de eventos, entonces valen las siguientes propiedades:

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$
2.  $\forall n, \forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ , tenemos  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$  y  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$

## Proposición

Sea  $\mathcal{A}$  un  $\sigma$ -álgebra de eventos, entonces valen las siguientes propiedades:

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. Si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ , entonces  $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$

## Ejemplo 1b

### 1. Espacios de eventos:

- ▶  $\Lambda_1 = \{\emptyset, \{2, 4, 6\}, \{1, 3\}, \Omega\}$
- ▶  $\Lambda_2 = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{6\}, \{4, 5\}, \Omega\}$
- ▶  $\Lambda_3 = \{\emptyset, \Omega\}$

### 2. Álgebra de eventos:

- ▶  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \dots, \Omega\}$ ,  
notar que  $|\Omega| = 6$  y  $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^6 = 64$ , donde  $\mathcal{P}$  es el conjunto potencia.
  - ▶  $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \Omega\}$
- ### 3. $\sigma$ -álgebra de eventos
- ▶  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$  también es  $\sigma$ -álgebra dado que el conjunto potencia es cerrado bajo complementos y uniones numerables.
  - ▶  $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \Omega\}$  también es  $\sigma$ -álgebra dado que  $\mathcal{A}_2$  es un álgebra finita (toda álgebra finita es  $\sigma$ -álgebra).

## Ejemplo 2b

### 1. Espacio de eventos

- $\Lambda_1 = \{\emptyset, \{1\}, \Omega\}$
- $\Lambda_2 = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{8\}, \Omega\}$
- $\Lambda_3 = \{\emptyset, \Omega\}$

### 2. Álgebra de eventos

- $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$
- $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6, \dots\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5, 6, \dots\}, \{2, 3, 4, 5, 6, \dots\}, \Omega\}$
- $\mathcal{A}_3 = \mathcal{P}(\Omega)$
- $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \{1, 2, \dots, n_0\}, \{n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}, \Omega\}$ , donde  $n_0 \in \mathbb{N}$

### 3. $\sigma$ -álgebra

- $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$
- $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6, \dots\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5, 6, \dots\}, \{2, 3, 4, 5, 6, \dots\}, \Omega\}$
- $\mathcal{A}_3 = \mathcal{P}(\Omega)$
- $\mathcal{A}_5 = \{\emptyset, \{1, 2, \dots, n\}, \{n + 1, n + 2, \dots\}, \Omega : n \in \mathbb{N}\}$

## Ejemplo 3b

### 1. Espacios de eventos:

- ▶  $\Lambda_1 = \{\emptyset, (0, 1], (0, 5], \Omega\}$
- ▶  $\Lambda_2 = \{(0, a], a > 0\} \cup \{\emptyset\}$
- ▶  $\Lambda_3 = \{\emptyset, (0, 1], (4, 7.5], \Omega\}$

### 2. Álgebra de eventos

- ▶  $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ , además  $|\mathcal{A}_1| = 2$
- ▶  $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, (0, 1], (1, \infty), \Omega\}$ , además  $|\mathcal{A}_2| = 4$
- ▶  $\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, (0, 1], (1, 3], (3, \infty), (0, 3], (0, 1] \cup (3, \infty), (1, \infty), \Omega\}$ , además  $|\mathcal{A}_3| = 8$
- ▶  $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \Omega\} \cup \left\{ \bigcup_{B \in S} B : S \subseteq \{B_1, B_2, B_3, B_4\}, S \neq \emptyset, S \neq \{B_1, B_2, B_3, B_4\} \right\}$ , donde  $B_1 = (0, 1]$ ,  $B_2 = (1, 2]$ ,  $B_3 = (2, 10]$  y  $B_4 = (10, \infty)$ , además  $|\mathcal{A}_4| < \infty$  (es finita)
- ▶  $\mathcal{A}_5 = \{\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i] \cup (c, \infty) : n \in \mathbb{N}_0, 0 \leq a_i < b_i < \infty, c \in [0, \infty)\}$ , es decir  $\mathcal{A}_5$  está formada por el conjunto vacío ( $n = 0, c = \infty$ ), el espacio muestral ( $c = 0$ ) y todas las uniones finitas de intervalos de tipo  $(a, b]$  eventualmente acompañadas de una cola  $(c, \infty)$ , además  $|\mathcal{A}_5| = \infty$  (es infinita)

### 3. $\sigma$ álgebra de eventos

- ▶  $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ .
- ▶  $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, (0, 1], (1, \infty), \Omega\}$
- ▶  $\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, (0, 1], (1, 3], (3, \infty), (0, 3], (0, 1] \cup (3, \infty), (1, \infty), \Omega\}$
- ▶  $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \Omega\} \cup \left\{ \bigcup_{B \in S} B : S \subseteq \{B_1, B_2, B_3, B_4\}, S \neq \emptyset, S \neq \{B_1, B_2, B_3, B_4\} \right\}$ ,  
donde  $B_1 = (0, 1]$ ,  $B_2 = (1, 2]$ ,  $B_3 = (2, 10]$  y  $B_4 = (10, \infty)$

Si la colección de eventos tiene un número finito de conjuntos y es un álgebra, entonces también es una  $\sigma$ -álgebra. En la práctica, esto ocurre cuando los eventos se construyen a partir de una partición finita del tiempo de respuesta (por ejemplo: rápido/medio/lento).

- ▶  $\mathcal{A}_6 = \{\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i] : 0 \leq a_i < b_i < \infty, n < \infty\} \cup \{\emptyset, \Omega\}$  no es un  $\sigma$ -álgebra, porque exige clausura bajo uniones numerables. Si se tiene  $A_n = (n, n+1]$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , es un intervalo permitido es decir  $A_n \in \mathcal{A}_5 \quad \forall n$ . Luego  $(1, \infty)$  no puede escribirse como una unión finita de intervalos, sino como  $\bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1] \notin \mathcal{A}_6$

## Medida de probabilidad

- ▶  $P$  es una medida de probabilidad en  $\mathcal{A}$ , función que asigna valores en  $[0, 1]$ , es decir  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$
- ▶ Satisface los axiomas de Kolmogorov:
  - ▶ Axioma 1: No negatividad:  $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$
  - ▶ Axioma 2: Normalización:  $P(\Omega) = 1$
  - ▶ Axioma 3: Aditividad numerable ( $\sigma$ -aditividad): si  $A_1, A_2, \dots$  son eventos disjuntos, entonces  $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ . Si  $P$  es  $\sigma$  aditiva entonces es finitamente aditiva.

### Ejemplo 1c

- ▶ Para  $\mathcal{A}_1$ , el conjunto potencia, la medida de probabilidad estará definida sobre todos los subconjuntos de  $\Omega$ , por ejemplo:

$$P(\{2, 5\}) = 2/6 \quad P(\{6\}) = 1/6 \quad P(\{1, 4, 6\}) = 1/2 \quad P(\Omega) = 1 \quad P(\emptyset) = 0$$

- ▶ Para  $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \Omega\}$ , se tiene:

$$P(\{2, 4, 6\}) = 3/6 \quad P(\{1, 3, 5\}) = 1/6 \quad P(\Omega) = 1 \quad P(\emptyset) = 0$$

No tendría sentido asignar  $P(\{1\})$  porque  $\{1\} \notin \mathcal{A}_2$

## Ejemplo 2c

- ▶ Para  $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ , se tiene que  $P(\Omega) = 1$  y  $P(\emptyset) = 0$
- ▶ Para  $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6, \dots\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5, 6, \dots\}, \{2, 3, 4, 5, 6, \dots\}, \Omega\}$  tenemos:

$$P(\emptyset) = 0 \quad P(\{1\}) = 0.3 \quad P(\{2, 3\}) = 0.5 \quad P(\{4, 5, 6, \dots\}) = 0.2$$

$$P(\{1, 2, 3\}) = 0.8 \quad P(\{1, 4, 5, 6, \dots\}) = 0.5 \quad P(\{2, 3, 4, 5, 6, \dots\}) = 0.7$$

$$P(\Omega) = 1$$

### Ejemplo 3c

- ▶ Para  $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ , se tiene que  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\Omega) = 1$ .
- ▶ Para  $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, (0, 1], (1, \infty), \Omega\}$ , podemos decir, por ejemplo, que  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P((0, 1]) = 0.6$ ,  $P((1, \infty)) = 0.4$ ,  $P(\Omega) = 1$ . No sería posible definir  $P((0, 0.5])$  porque  $(0, 0.5] \notin \mathcal{A}_2$ .
- ▶ Para  $\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, (0, 1], (1, 3], (3, \infty), (0, 3], (0, 1] \cup (3, \infty), (1, \infty), \Omega\}$ , se asignarán las siguientes probabilidades:

$$P(\emptyset) = 0 \quad P((0, 1]) = 0.5 \quad P((1, 3]) = 0.3 \quad P((3, \infty)) = 0.2$$

$$P((0, 3]) = 0.8 \quad P((1, \infty)) = 0.5 \quad P((0, 1] \cup (3, \infty)) = 0.7 \quad P((0, \infty)) = P(\Omega) = 1$$

- Para  $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \Omega\} \cup \left\{ \bigcup_{B \in S} B : S \subseteq \{B_1, B_2, B_3, B_4\}, S \neq \emptyset, S \neq \{B_1, B_2, B_3, B_4\} \right\}$ , donde  $B_1 = (0, 1]$ ,  $B_2 = (1, 2]$ ,  $B_3 = (2, 10]$  y  $B_4 = (10, \infty)$ , tendremos:

$$P(B_1) = 0.4 \quad P(B_2) = 0.2 \quad P(B_3) = 0.2 \quad P(B_4) = 0.15$$

Entonces  $P((0, 2]) = 0.6$ ,  $P((0, 1] \cup (2, 10])) = 0.65$ , etc.

- Para  $\mathcal{A}_5 = \left\{ \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i] : 0 \leq a_i < b_i < \infty, n < \infty \right\} \cup \{\emptyset, \Omega\}$ , no se puede definir una medida de probabilidad dado que no es un  $\sigma$ -álgebra, y no permite definir probabilidades de uniones numerables.

## Definiciones de probabilidad

### Definición clásica

Si un experimento aleatorio tiene  $n(\Omega)$  resultados, y si  $n(A)$  de dichos resultados corresponden a un evento  $A$ , entonces siempre que los eventos simples de  $\Omega$  sean mutuamente excluyentes e igualmente posibles, la probabilidad de ocurrencia de  $A$  es  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ . Se dice que esta probabilidad es a priori.

### Definición frecuencial

Si un experimento aleatorio se repite  $n$  veces, bajo las mismas condiciones, y  $n_A$  resultados corresponden al evento  $A$ , la probabilidad estimada de  $A$  está dada por la frecuencia relativa del evento, es decir  $P(A) = \frac{n_A}{n}$ . Teóricamente, se tiene que  $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$ . Se dice que esta probabilidad es a posteriori.

## Ejemplo 4

Experimento aleatorio: Se lanzan dos monedas equilibradas

Espacio muestral:  $\Omega = \{CC, CS, SC, SS\}$ ,  $n(\Omega) = 4$

Sea el evento  $A = \{\text{Obtener dos resultados distintos}\} = \{CS, SC\}$

Entonces  $n(A) = 2$ , por lo tanto, según la definición clásica  $P(A) = 2/4$

## Ejemplo 5

Experimento aleatorio: Se lanzan una moneda muchas veces bajo las mismas condiciones

Sea el evento  $A = \{\text{Obtener cara}\}$

Observación empírica: Se lanzó la moneda  $n = 2000$  veces y se observaron  $n_A = 1040$  caras.

Probabilidad estimada:

$$P(A) = \frac{1040}{2000} = 0.52$$

Note que:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} = 0.5$$

Sea  $P$  una probabilidad en una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$ . Supongamos que todo  $A \in \mathcal{A}$ , entonces las siguientes propiedades se obtienen como consecuencia de los axiomas:

1.  $P(A^c) = 1 - P(A)$ , siendo un caso particular importante  $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega)$
2.  $0 \leq P(A) \leq 1$
3.  $A_1 \subset A_2 \rightarrow P(A_1) \leq P(A_2)$
4.  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$
5.  $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
6. Si  $A_1, \dots, A_n$  son eventos mutuamente excluyentes entonces  
$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$
7.  $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$
8.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

## Probabilidad condicional

Para un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  y con  $A \in \mathcal{A}$  y  $B \in \mathcal{A}$ , la probabilidad del evento  $A$  dado un evento  $B$  se define de la siguiente manera:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

## Ejemplo 6a

Experimento: Lanzar un dado equilibrado

Espacio muestral:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eventos:

- ▶ A = Obtener un número impar =  $\{1, 3, 5\}$
- ▶ B = Obtener un número mayor a 3 =  $\{4, 5, 6\}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \quad P(B) = \frac{3}{6} \quad P(A|B) = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

Sabiendo que el resultado fue mayor a 3, la probabilidad de que sea impar es  $\frac{1}{3}$ .

## Axiomas de la probabilidad condicional

- ▶ Axioma 1:  $P(A|B) \geq 0 \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$
- ▶ Axioma 2:  $P(\Omega|B) = 1$
- ▶ Axioma 3: Si  $A_1, A_2, \dots$  son eventos disjuntos, entonces  
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B).$$
 Si  $P$  es  $\sigma$  aditiva entonces es finitamente aditiva.

## Teoremas de la probabilidad condicional

Sea  $P$  una probabilidad en una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$ . Supongamos que  $B, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ , entonces las siguientes propiedades se obtienen como consecuencia de los axiomas:

1.  $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$ , siendo un caso particular importante

$$P(\emptyset|B) = 1 - P(\Omega|B)$$

2.  $0 \leq P(A|B) \leq 1$

3.  $A_1 \cap B \subset A_2 \cap B \rightarrow P(A_1|B) \leq P(A_2|B)$

4.  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i|B\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i|B)$

5.  $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

6. Si  $A_1, \dots, A_n$  son eventos mutuamente excluyentes entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i|B\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i|B)$$

7.  $P(A_1|B) = P(A_1 \cap A_2|B) + P(A_1 \cap A_2^c|B)$

8.  $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B)$

## Ejemplo 6b

Experimento: Lanzar un dado equilibrado

Espacio muestral:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eventos:

- ▶  $A_1 = \text{Obtener un número impar} = \{1, 3, 5\}$
- ▶  $A_2 = \text{Obtener un número mayor a } 3 = \{4, 5, 6\}$
- ▶  $B = \text{Obtener un número mayor o igual a } 3 = \{3, 4, 5, 6\}$

$$P(A_1|B) = \frac{2}{4} = 0.5 > 0 \quad P(A_1^c|B) = 1 - \frac{2}{4} = 0.5$$

## Ejemplo 6c

Experimento: Lanzar un dado equilibrado

Espacio muestral:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eventos:

- ▶  $A_1 = \text{Obtener un número impar} = \{1, 3, 5\}$
- ▶  $A_2 = \text{Obtener un número mayor a } 3 = \{4, 5, 6\}$
- ▶  $B = \text{Obtener un número mayor o igual a } 3 = \{3, 4, 5, 6\}$

$$(A_1 \cap B) \subset (A_2 \cap B) \longrightarrow P(A_1|B) \leq P(A_2|B)$$

## Teorema de la multiplicación o de la probabilidad compuesta

Para dos eventos  $A$  y  $B$  del espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  se tiene:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

Generalizando:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 \cap A_1)\dots P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1})$$

## Ejemplo 7

En una universidad, se observan los siguientes eventos:

- $A_1$ : El estudiante asiste a la primera semana de clases

- ▶  $A_2$ : El estudiante aprueba la primera evaluación
- ▶  $A_3$ : El estudiante aprueba el curso

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 \cap A_1)$$

Asignar probabilidades y obtener  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ .

Note que los eventos “dependen” uno del otro. ¿Sería correcto asumir “independencia”?

## Definición: Independencia de eventos

Dos eventos  $A$  y  $B$  del espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  son independientes si la ocurrencia de uno no afecta la del otro, es decir:

$$P(A|B) = P(A) \quad P(B|A) = P(B)$$

## Proposiciones sobre independencia

Si dos eventos  $A$  y  $B$  del espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  son independientes, entonces:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A)$$

Si dos eventos  $A$  y  $B$  del espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  son independientes, entonces  $A$  y  $B^c$  también lo serán.

Si dos eventos  $A$  y  $B$  del espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  son independientes, entonces  $A^c$  y  $B$  también lo serán.

Si dos eventos  $A$  y  $B$  del espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  son independientes, entonces  $A^c$  y  $B^c$  también lo serán.

Si  $A \cap B = \emptyset$ , entonces  $A$  y  $B$  no son independientes, a menos que uno de ellos tenga probabilidad cero.

Los eventos  $A_1$  y  $A_2$  del espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  son condicionalmente independientes si

$$P(A_1 \cap A_2 | B) = P(A_1 | B)P(A_2 | B)$$

Si en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , los eventos  $A_1, A_2, \dots, A_k$  son colectivamente independientes, entonces:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_k)$$

Los eventos  $A_1, A_2, \dots, A_k$  del espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  son condicionalmente independientes si

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k | B) = P(A_1 | B)P(A_2 | B)\dots P(A_k | B)$$

## Ejemplo 8

Se lanzan dos monedas equilibradas de manera independiente. Se definen los eventos:

$A$ : {la primera moneda sale cara}

$B$ : {la segunda moneda sale cara}

Hallar  $P(A)$ ,  $P(B)$  y  $P(A \cap B)$ .

Hallar  $P(A^c)$ ,  $P(B^c)$  y  $P(A^c \cap B^c)$

## Ejemplo 9

En un hospital se estudia la presencia de una enfermedad  $B$  y dos pruebas diagnósticas para su detección. Se definen los siguientes eventos:

$A_1$ : {la prueba 1 resulta positiva}

$A_2$ : {la prueba 2 resulta positiva}

$B$ : {el paciente tiene la enfermedad}

(¿cuál sería el espacio muestral y su cardinalidad?)

Dado que el paciente sí tiene la enfermedad, los resultados de las dos pruebas son independientes, porque miden el mismo fenómeno biológico de manera separada.

$$P(A_1 \cap A_2 | B) = P(A_1 | B)P(A_2 | B)$$

## Teorema de la Probabilidad total

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad en el cual los eventos  $A_1, \dots, A_k$  son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Luego, para cualquier otro evento  $B$ :

$$P(B) = \sum_{j=1}^k P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^k P(A_j)P(B|A_j)$$

## Teorema de Bayes

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad en el cual los eventos  $A_1, \dots, A_k$  son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Luego, para cualquier otro evento  $B$  tal que  $P(B) > 0$ :

$$P(A_h|B) = \frac{P(A_h \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_h)P(B|A_h)}{\sum_{j=1}^k P(A_j)P(B|A_j)}$$

## Ejemplo 10

Una empresa procesa solicitudes a través de tres servidores distintos. Cada solicitud es atendida exactamente por uno de los servidores, de modo que los eventos

$$A_1 : \{\text{la solicitud es procesada por el Servidor 1}\}$$

$$A_2 : \{\text{la solicitud es procesada por el Servidor 2}\}$$

$$A_3 : \{\text{la solicitud es procesada por el Servidor 3}\}$$

son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Las probabilidades de uso de cada servidor son:

$$P(A_1) = 0.20, \quad P(A_2) = 0.50, \quad P(A_3) = 0.30$$

Sea  $B$  el evento *la solicitud presenta un error de procesamiento*. Se sabe que:

$$P(B | A_1) = 0.05, \quad P(B | A_2) = 0.02, \quad P(B | A_3) = 0.10$$

- ▶ Calcule la probabilidad de que una solicitud seleccionada al azar presente un error.
- ▶ Calcule la probabilidad de que una solicitud seleccionada al azar presente un error.
- ▶ Compare la probabilidad a priori con la posteriori.

## Función indicadora

Sea  $A$  un evento de  $\Omega$  con puntos muestrales  $\omega$ , entonces la función indicadora de  $A$ , denotada como  $I_A(\cdot)$  es la función con dominio en  $\Omega$  y rango  $\{0, 1\}$ , es decir:

$$I_A(w) = \begin{cases} 1, & \text{si } w \in A, \\ 0, & \text{si } w \notin A. \end{cases}$$

En ocasiones, se usa **1** en vez de  $I$ .

## Ejemplo 11

$$I_{[5,8]}(w) = \begin{cases} 1, & \text{si } w \in [5,8], \\ 0, & \text{si } w \notin [5,8]. \end{cases}$$

## Ejemplo 12

$$I_{\{0\} \cap \{1\}}(w) = I_{\{0\}}(w) \times I_{\{1\}}(w)$$

## Ejemplo 13

La función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ x, & \text{si } x \in [0, 1] \\ x^2, & \text{si } x \in (1, 4] \\ 5 - x, & \text{si } x \in (4, 5] \\ 0, & \text{si } x \in (5, \infty) \end{cases}$$

puede escribirse como:

$$f(x) = xI_{[0,1]}(x) + x^2I_{(1,4]}(x) + (5 - x)I_{(4,5]}(x)$$

o

$$f(x) = x\mathbf{1}_{[0,1]}(x) + x^2\mathbf{1}_{(1,4]}(x) + (5 - x)\mathbf{1}_{(4,5]}(x)$$