1. Se lanza un dado regular. Sea X la variable aleatoria Número de puntos obtenidos e Y la variable aleatoria que toma el valor de 0 si se obtiene un número par, y 1 en caso contrario.

a. Determinar la función de probabilidad conjunta de X e Y

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$Y(\Omega) = \{0,1\}$$

Ω	X	Y	Prob
1	1	1	1/6
2	2	0	1/6
3	3	1	1/6
4	4	0	1/6
5	5	1	1/6
6	6	0	1/6

x \ y	0	1
1	0	1/6
2	1/6	0
3	0	1/6
4	1/6	0
5	0	1/6
6	1/6	0

b. Obtener la función de probabilidad marginal de cada variable aleatoria.

x \ y	0	1	$f_X(x)$
1	0	1/6	1/6
2	1/6	0	1/6
3	0	1/6	1/6
4	1/6	0	1/6
5	0	1/6	1/6
6	1/6	0	1/6
$f_Y(y)$	1/2	1/2	

$$f_X(x) = \frac{1}{6} I_{\{1,2,3,4,5,6\}}(x)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} I_{\{0,1\}}(y)$$

c. Obtener la función de distribución acumulada marginal de cada variable aleatoria.

$f_X(x) = \frac{1}{6} I_{\{1,2,3,4,5,6\}}(x)$

$f_Y(y) = \frac{1}{2} I_{\{0,1\}}(y)$

$F_X(x)$:

$x < 1$: $F_X(x) = 0$

$1 \leq x < 2$: $F_X(x) = 1/6$

$2 \leq x < 3$: $F_X(x) = 2/6$

$3 \leq x < 4$: $F_X(x) = 3/6$

$4 \leq x < 5$: $F_X(x) = 4/6$

$5 \leq x < 6$: $F_X(x) = 5/6$

$x \geq 6$: $F_X(x) = 1$

$F_Y(y) = \frac{1}{2} I_{[0,1)}(y) + I_{[1,\infty)}(y)$

$F_X(x) = \frac{1}{6} I_{[1,2)}(x) + \frac{2}{6} I_{[2,3)}(x) + \frac{3}{6} I_{[3,4)}(x) + \frac{4}{6} I_{[4,5)}(x) + \frac{5}{6} I_{[5,6)}(x) + I_{[6,\infty)}(x)$

$F_X(-1) = 0$

$-\infty$ a ∞

d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número menor a 4 y que sea impar?

$x \backslash y$	0	1
1	0	1/6
2	1/6	0
3	0	1/6
4	1/6	0
5	0	1/6
6	1/6	0

$$P(X<4,\ Y=1) = P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=1) + P(X=3, Y=1)$$

$$= 1/6 + 0 + 1/6 = 1/3$$

$$P(X \geq 4,\ Y=1) = P(Y=1) - 1/3$$

$$P(X \geq 4, Y=1) + P(X<4, Y=1) = P(Y=1)$$

$$P(X<4 \mid Y=1) + P(X \geq 4 \mid Y=1) = 1$$

e. Obtener el valor esperado y la varianza de cada variable aleatoria.

$$f_X(x) = \frac{1}{6} I_{\{1,2,3,4,5,6\}}(x)$$

$$E(X) = 3.5$$

$$E(X^2) = 15.167$$

$$V(X) = 2.917$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} I_{\{0,1\}}(y)$$

$$E(Y) = 0.5$$

$$E(Y^2) = 0.5$$

$$V(Y) = 0.25$$

f. Calcular $E(X^2 + 2Y)$

$$E(X^2+2Y) = E(X^2) + E(2Y) = 15.167 + 2 \times 0.5 = 16.167$$

- $V(X^2+2Y) = V(X^2) + 4V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X^2, 2Y)$
- $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$

  Si X e Y son indep: $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

g. Obtener y comentar la covarianza y la correlación entre las variables aleatorias

X\Y	0	1
1	0	1/6
2	1/6	0
3	0	1/6
4	1/6	0
5	0	1/6
6	1/6	0

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = \cancel{1 \times 0 \times 0} + 1 \times 1 \times \frac{1}{6} + \cancel{2 \times 0 \times \frac{1}{6}} + 3 \times 1 \times \frac{1}{6} + \cancel{4 \times 0 \times \frac{1}{6}} + 5 \times 1 \times \frac{1}{6} + \cancel{6 \times 0 \times \frac{1}{6}}$$

$$E(XY) = 1/6 + 3/6 + 5/6 = 1.5$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 1.5 - 3.5 \times 0.5 = -0.25$$ relación inversa entre X e Y

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \times \sigma_Y} = \frac{-0.25}{\sqrt{2.917}\,\sqrt{0.25}} = -0.2928$$ relación inversa y moderada entre X e Y

h. ¿Son independientes las variables aleatorias?

$x \backslash y$	0	1
1	0	1/6
2	1/6	0
3	0	1/6
4	1/6	0
5	0	1/6
6	1/6	0

$$f_x(x) = \frac{1}{6} I_{\{1,2,3,4,5,6\}}(x)$$

$$f_y(y) = \frac{1}{2} I_{\{0,1\}}(y)$$

$$f_{xy}(x,y) = f_x(x) f_y(y) \quad \forall x, y$$

$$f_{x,y}(1,0) = 0$$

$$f_x(1) = 1/6$$

$$f_y(0) = 1/2$$

no cumple, por tanto X e Y no son independientes

$\text{cov} = 0 \leftarrow$ independ

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\text{Cov}(X,Y)$$

$$= 2.917 + 0.25 + 2 \times (-0.25)$$

2. Un municipio asigna proporciones de un presupuesto extraordinario a tres frentes:

X: Proporción destinada a salud

Y: Proporción destinada a infraestructura crítica

Z: Proporción destinada a logística y abastecimiento

Cada proporción es positiva y la suma no supera el total disponible a ser asignado. Se modela el vector aleatorio (X, Y, Z) con densidad conjunta uniforme en la región factible:

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = c, \quad x>0,\ y>0,\ z>0,\ x+y+z<1$$

$z < 1-x-y$

$y < 1-x$ ✓

• $y \geq 1-x$ NO

$0 \geq 1-x-y$

$z < 1-x-y \leq 0$

a. Determinar el valor de la constante c.

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} c\, dz\, dy\, dx = \int_0^1\int_0^{1-x} cz\Big|_0^{1-x-y} dy\, dx$$

$$= c\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)\, dy\, dx = c\int_0^1\left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = c\int_0^1 (1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2}\, dx$$

$$= c\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\, dx = \frac{c}{2}\int_0^1 (1-2x+x^2)\, dx = \frac{c}{2}\left(x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 6}$$ //

b. Obtener la densidad marginal de cada variable aleatoria.

$y < 1-x$

$x < 1-y$

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = 6, \quad x>0,\ y>0,\ z>0,\ x+y+z<1$$

- $$f_X(x) = \int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} 6\,dz\,dy = \int_0^{1-x} 6(1-x-y)\,dy = 6\left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} = 6\left[(1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2}\right] = 6 \times \frac{(1-x)^2}{2}$$

$$f_X(x) = 3(1-x)^2\, I_{(0,1)}(x)$$

- $$f_Y(y) = \int_0^{1-y}\int_0^{1-x-y} 6\,dz\,dx = \int_0^{1-y} 6(1-x-y)\,dx = 6\int_0^{1-y}(1-y-x)\,dx = 6\left[(1-y)x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y} = 6\left[(1-y)^2 - \frac{(1-y)^2}{2}\right] = 3(1-y)^2\, I_{(0,1)}(y)$$

- $$f_Z(z) = 3(1-z)^2\, I_{(0,1)}(z)$$

c. Obtener la función de distribución acumulada de cada variable aleatoria a partir de sus densidades marginales.

$$f_X(x) = 3(1-x)^2 \, I_{(0,1)}(x)$$

$$F_X(x) = ?$$

$x \leq 0$: $F_X(x) = 0$

$0 < x < 1$: $F_X(x) = \int_0^x 3(1-t)^2 dt = 3\int_0^x (1-2t+t^2) dt = 3\left(t - t^2 + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^x = 3\left(x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right) = 3x - 3x^2 + x^3$

$$F_X(x) = (3x - 3x^2 + x^3)\, I_{(0,1)}(x) + I_{(1,\infty)}(x)$$

$$F_Y(y) = (3y - 3y^2 + y^3)\, I_{(0,1)}(y) + I_{(1,\infty)}(y)$$

$$F_Z(z) = (3z - 3z^2 + z^3)\, I_{(0,1)}(z) + I_{(1,\infty)}(z)$$

d. Obtener la densidad bivariada conjunta de la proporción destinada a infraestructura crítica y la proporción destinada a logística y abastecimiento.

$x > 0$
$y > 0$
$z > 0$
$x + y + z < 1$
$x < 1 - y - z$

$$f_{Y,Z}(y,z) = \int_0^{1-y-z} 6\, dx = 6x \Big|_0^{1-y-z} = 6(1-y-z), \quad y>0,\ z>0,\ y+z<1$$

e. Calcular la probabilidad de que la proporción destinada a salud sea menor a 0.2 y la de infraestructura crítica menor a 0.3

X

Y

$$P(X < 0.2, Y < 0.3) = \int_0^{0.2}\int_0^{0.3}\int_0^{1-x-y} 6\, dz\, dy\, dx = \int_0^{0.2}\int_0^{0.3} (6 - 6x - 6y)\, dy\, dx = 0{,}27$$

$x + y < 0.5$

$x + y + z < 1$

```
> f <- function(x,y){6-6*x-6*y}
>
> inf_ext <- 0
> sup_ext <- 0.2
> inf_int <- 0
> sup_int <- 0.3
>
> library(pracma)
> integral2(f, inf_ext, sup_ext, inf_int, sup_int)$Q
[1] 0.27
```

f. Calcular la probabilidad de que la proporción destinada a salud sea mayor a 0.7 y la de infraestructura crítica menor a 0.7

$P(X > 0.7, Y < 0.7)$

Revisar
$$\begin{cases} X > 0.7 \\ 0 < y < 0.7 \\ Z > 0 \\ X + y + Z < 1 \end{cases}$$

$x = 0.8$
$y = 0.6$

$y < 0.7$ no es el límite superior real para y, sino $0 < y < \min(0.7, 1-x)$

Si $x = 0.9$ $\quad 0 < y < \min(0.7, 0.1)$

$0 < y < 0.1$

$x > 0.7$

$1 - x < 0.3 < 0.7$

$\Rightarrow \min(0.7, 1-x) = 1 - x$

$\Rightarrow 0 < y < 1 - x$

$$P(X > 0.7, Y > 0.7) = \int_{0.7}^{1}\int_{0}^{1-x}\int_{0}^{1-x-y} 6 \, dz \, dy \, dx = \int_{0.7}^{1}\int_{0}^{1-x} (6 - 6x - 6y) \, dy \, dx = 0.027$$

```
> f <- function(x,y){6-6*x-6*y}
> inf_ext <- 0.7
> sup_ext <- 1
> inf_int <- 0
> sup_int <- function(y) 1-y
> integral2(f, inf_ext, sup_ext, inf_int, sup_int)$Q
[1] 0.027
```

g. Calcular la probabilidad de que la proporción destinada a salud sea menor que la mitad si se sabe que más 20% se destinó a infraestructura crítica.

$$P(X<0.5 \mid Y>0.2) = \frac{P(X<0.5,\ Y>0.2)}{P(Y>0.2)} = \frac{0.485}{0.512} = 0.947$$

$$* \ P(Y>0.2) = 1 - P(Y \le 0.2) = 1 - (3\times 0.2 - 3\times 0.2^2 + 0.2^3) = 0.512$$

$$F_Y(y) = (3y - 3y^2 + y^3)\, I_{(0,1)}(y) + I_{(1,\infty)}(y) = P(Y \le y)$$

$$* \ P(X<0.5,\ Y>0.2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < X < 0.5 \\ 0.2 < Y < 1 \\ X + Y < 1 \\ X < 1-Y \end{array}\right\} X < \min(0.5,\ 1-Y)$$

Si $Y = 0.7$, $X < \min(0.5,\ 0.3) \rightarrow X < 0.3$

Si $Y = 0.25$, $X < \min(0.5,\ 0.75) \rightarrow X < 0.5$

$$P(X<0.5,\ Y>0.2) = \int_{0.2}^{0.5}\int_0^{0.5}\int_0^{1-x-y} 6\, dz\, dx\, dy + \int_{0.5}^{1}\int_0^{1-y}\int_0^{1-x-y} 6\, dz\, dx\, dy = \frac{97}{200} = 0.485$$

h. Calcular la proporción esperada de presupuesto asignado en cada uno de los tres frentes.

$$f_X(x) = 3(1-x)^2 \, I_{(0,1)}(x)$$

$$E(x) = \int_0^1 3x(1-x)^2 \, dx = 0.25 = E(y) = E(z)$$

i. Calcular $E(X + Y - 2Z)$

$$E(X+Y-2Z) = E(X) + E(Y) - 2E(Z) = 0$$

j. ¿X e Y son independientes?

$$f_{X,Y}(x,y) = 6(1-x-y), \quad x>0, \, y>0, \, x+y<1$$

$$f_X(x) = 3(1-x)^2, \quad 0<x<1$$

$$f_Y(y) = 3(1-y)^2, \quad 0<y<1$$

¿$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$? No, entonces X e Y no son independientes

k. Calcular $Cov(X, Y)$ y $\rho_{X,Y}$. Interpretar este último valor.

$$f_{X,Y}(x,y) = 6(1-x-y) \qquad x>0,\ y>0,\ x+y<1$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy \cdot 6(1-x-y)\, dy\, dx = 0.05$$

```
> f <- function(x,y){6*x*y*(1-x-y)}
> inf_ext <- 0
> sup_ext <- 1
> inf_int <- 0
> sup_int <- function(y) 1-y
> integral2(f, inf_ext, sup_ext, inf_int, sup_int)$Q
[1] 0.05
```

$$Cov(X,Y) = 0.05 - 0.25 \times 0.25 = -0.0125$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 3x^2(1-x)^2\, dx = 0.1 \Rightarrow V(X) = 0.1 - 0.25^2 = 0.0375 \rightarrow \sigma_X = \sqrt{0.0375}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{0.0375}$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{-0.0125}{\sqrt{0.0375}\sqrt{0.0375}} = -\frac{1}{3}$$: asociación inversa moderada