Experimento: Se mide el tiempo (en segundos) que tarda un sistema en responder a una solicitud.

Espacio muestral: $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega > 0\} = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$

1. Espacios de eventos:

- $\Lambda_1 = \{\emptyset, (0,1], (0,5], \Omega\}$
- $\Lambda_2 = \{(0,a], a > 0\} \cup \{\emptyset\}$
- $\Lambda_3 = \{\emptyset, (0,1], (4,7.5], \Omega\}$

$\Lambda_4 = \{ (0,1), (2,4), (6,8] \}$ → $(0,1) \in \Omega$, $(2,4) \in \Omega$, $(6,8] \in \Omega$

Λ_4 es un espacio de eventos

$\Lambda_5 = \{ \phi, \Omega, (-a,a) : a > 0 \}$ → $\phi \in \Omega$, $\Omega \in \Omega$, $(-a,a) \notin \Omega$

Λ_5 no es un espacio de eventos

$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$, ¿$\mathcal{A}_1$ es un álgebra?

1) $\Omega \in \mathcal{A}_1$ ✓

2) $\phi \in \mathcal{A}_1$, $\phi^c = \Omega \in \mathcal{A}_1$ ✓

3) $\phi \in \mathcal{A}_1$, $\Omega \in \mathcal{A}_1$, $\phi \cup \Omega = \Omega \in \mathcal{A}_1$ ✓

$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, (0,1], (1,\infty), \Omega\}$ ¿$\mathcal{A}_2$ es un álgebra?

1) $\Omega \in \mathcal{A}_2$ ✓

2) $\phi \in \mathcal{A}_2$, $\phi^c = \Omega \in \mathcal{A}_2$ ✓

$(0,1] \in \mathcal{A}_2$, $(0,1]^c = \mathbb{R}^+ \setminus (0,1] = (1,\infty) \in \mathcal{A}_2$

3) $(0,1] \in \mathcal{A}_2$, $(1,\infty) \in \mathcal{A}_2$, $(0,1] \cup (1,\infty) = (0,\infty) = \Omega \in \mathcal{A}_2$ ✓

$\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \Omega\} \cup \left\{ \bigcup_{B \in S} B : \ S \subseteq \{B_1, B_2, B_3, B_4\}, \ S \neq \emptyset, \ S \neq \{B_1, B_2, B_3, B_4\} \right\}$, donde $B_1 = (0, 1]$, $B_2 = (1, 2]$, $B_3 = (2, 10]$ y $B_4 = (10, \infty)$, además $|\mathcal{A}_4| < \infty$ (es finita)

1) $\Omega \in A_4$

2) $\phi \in A_4$, $\phi^c = \Omega \in A_4$

$B_i \in A_4$, $B_i^c = \bigcup_{j \neq i} B_j \in A_4$

$(i \neq j)$ $B_i \cup B_j \in A_4$, $(B_i \cup B_j)^c = \bigcup_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} B_k \in A_4$

$(i \neq j, i \neq k, j \neq k)$ $B_i \cup B_j \cup B_k \in A_4$, $(B_i \cup B_j \cup B_k)^c = B_l \in A_4$ $\quad l \neq i, l \neq j, l \neq k$

3) $B_i \in A_4$
$B_j \in A_4$ $\quad i \neq j$

$B_i \cup B_j \in A_4$ ✓

$(B_i^c \cap B_j^c)$

$\mathcal{A}_5 = \{\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i] \cup (c, \infty) : n \in \mathbb{N}_0, 0 \leq a_i < b_i < \infty, c \in [0, \infty)\}$, es decir $\mathcal{A}_5$ está formada por el conjunto vacío $(n = 0, c = \infty)$, el espacio muestral $(c = 0)$ y todas las uniones finitas de intervalos de tipo $(a, b]$ eventualmente acompañadas de una cola (c, ∞), además $|\mathcal{A}_5| = \infty$ (es infinita)

$A_5 = \{(a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup \ldots \cup (a_n, b_n] \cup (c, \infty) : 0 \leq a_i < b_i < \infty, \; c \in [0, \infty)\}$

Ejm: * $n = 2$, $c = 10$

$(0, 3] \cup (5, 8.4] \cup (10, \infty)$

* $n = 3$, $c = \infty$

$(0.5, 3.2] \cup (4, 5] \cup (10, 20] \cup \underbrace{(\infty, \infty)}_{\phi}$

* $c = 0 \Rightarrow \Omega$

$\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \cup (0, \infty) = (0, \infty) = \Omega$

* $n = 0$, $c = \infty \Rightarrow \phi$

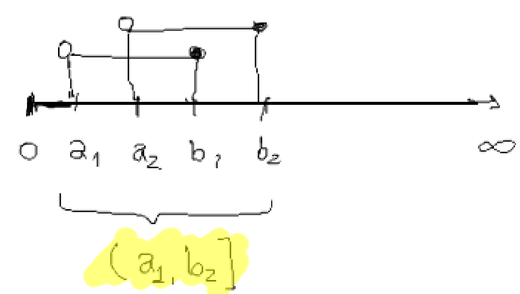
$(\infty, \infty) = \phi$

$\mathcal{A}_5 = \{\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \cup (c, \infty) : n \in \mathcal{N}_0, 0 \leq a_i < b_i < \infty, c \in [0, \infty)\}$, es decir $\mathcal{A}_5$ está formada por el conjunto vacío ($n = 0, c = \infty$), el espacio muestral ($c = 0$) y todas las uniones finitas de intervalos de tipo $(a, b]$ eventualmente acompañadas de una cola (c, ∞), además $|\mathcal{A}_5| = \infty$ (es infinita)

1) $\Omega \in A_5$, se da cuando $c = 0$

2) $R = (a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup \dots \cup (a_n, b_n] \cup (c, \infty) \in A_5$

$R^c = (0, a_1] \cup (b_1, a_2] \cup \dots \cup (b_{n-1}, a_n] \cup (b_n, c] \in A_5$



3) $M = (a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup \dots \cup (a_m, b_m] \cup (c_1, \infty) \in A_5$

$N = (\alpha_1, \beta_1] \cup (\alpha_2, \beta_2] \cup \dots \cup (\alpha_n, \beta_n] \cup (c_2, \infty) \in A_5$

$M \cup N = \bigcup_{i=1}^{m+n} I_i \cup \underbrace{(c_1, \infty) \cup (c_2, \infty)}_{(d, \infty)} \in A_5$, $d = \min(c_1, c_2)$

todos los intervalos I_i son de la forma $(p_i, q_i]$

$\mathcal{A}_6 = \{\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i] : 0 \leq a_i < b_i < \infty, n < \infty\} \cup \{\emptyset, \Omega\}$ no es un σ-álgebra, porque exige clausura bajo uniones numerables. Si se tiene $A_n = (n, n+1]$, para $n = 1, 2, 3, ...$, es un intervalo permitido es decir $A_n \in \mathcal{A}_5 \quad \forall n$. Luego $(1, \infty)$ no puede escribirse como una unión finita de intervalos, sino como $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n, n+1] \notin \mathcal{A}_6$

1) $\Omega \in A_6$ ✓

2) $M = (a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup \dots \cup (a_n, b_n] \in A_6$

$M^c = (0, a_1] \cup (b_1, a_2] \cup \dots \cup (b_{n-1}, a_n] \in A_6$ ✓

3) $a_i = n$

$b_i = n+1$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1] = (1,2] \cup (2,3] \cup (3,4] \cup \dots = (1, \infty) \notin A_6$$ ✗ No es σ-álgebra

para σ-álgebra se verifica UNIÓN NUMERABLE

Ejemplo 1a

Experimento: Lanzar un dado regular equilibrado
Espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Tipo de espacio muestral: Finito y numerable.

3. σ-álgebra de eventos

- $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$ también es σ-álgebra dado que el conjunto potencia es cerrado bajo complementos y uniones numerables.
- $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \Omega\}$ también es σ-álgebra dado que $\mathcal{A}_2$ es un álgebra finita (toda álgebra finita es σ-álgebra).

Ejemplo 1c

- Para $\mathcal{A}_1$, el conjunto potencia, la medida de probabilidad estará definida sobre todos los subconjuntos de Ω, por ejemplo:

$$P(\{2,5\}) = 2/6 \qquad P(\{6\}) = 1/6 \qquad P(\{1,4,6\}) = 1/2 \qquad P(\Omega) = 1 \qquad P(\emptyset) = 0$$

- Para $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \Omega\}$, se tiene:

$$P(\{2,4,6\}) = 3/6 \qquad P(\{1,3,5\}) = 3/6 \qquad P(\Omega) = 1 \qquad P(\emptyset) = 0$$

No tendría sentido asignar $P(\{1\})$ porque $\{1\} \notin \mathcal{A}_2$

Ejemplo 2a

Experimento: Se observa el número de postulaciones a la UNALM hasta lograr el ingreso
Espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, ...\}$
Tipo de espacio muestral: Infinito y numerable.

3. σ-álgebra

- $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$
- $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6, ...\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5, 6, ...\}, \{2, 3, 4, 5, 6, ...\}, \Omega\}$
- $\mathcal{A}_3 = \mathcal{P}(\Omega)$
- $\mathcal{A}_5 = \{\emptyset, \{1, 2, ..., n\}, \{n+1, n+2, ...\}, \Omega : n \in \mathbb{N}\}$

Ejemplo 2c

- Para $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$, se tiene que $P(\Omega) = 1$ y $P(\emptyset) = 0$
- Para $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6, ...\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5, 6, ...\}, \{2, 3, 4, 5, 6, ...\}, \Omega\}$ tenemos:

$$P(\emptyset) = 0 \quad P(\{1\}) = 0.3 \quad P(\{2, 3\}) = 0.5 \quad P(\{4, 5, 6, ...\}) = 0.2$$

$$P(\{1, 2, 3\}) = 0.8 \quad P(\{1, 4, 5, 6, ...\}) = 0.5 \quad P(\{2, 3, 4, 5, 6, ...\}) = 0.7$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$\mathcal{A}_2^* = \{\phi, \{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6, ...\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, ...\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5, 6, ...\}, ...\}$$

Ejemplo 3a

Experimento: Se mide el tiempo (en segundos) que tarda un sistema en responder a una solicitud.
Espacio muestral: $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega > 0\}$
Tipo de espacio muestral: Infinito y no numerable.
Dependiendo de la naturaleza del espacio muestral (finito, numerable o no numerable) será necesario definir adecuadamente una colección de eventos y una medida de probabilidad que permita cuantificar la incertidumbre de manera consistente.

σ álgebra de eventos

$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$.

$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, (0,1], (1,\infty), \Omega\}$

$\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, (0,1], (1,3], (3,\infty), (0,3], (0,1] \cup (3,\infty), (1,\infty), \Omega\}$

$\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \Omega\} \cup \left\{\bigcup_{B\in S} B : \ S \subseteq \{B_1, B_2, B_3, B_4\}, \ S \neq \emptyset, \ S \neq \{B_1, B_2, B_3, B_4\}\right\}$,
donde $B_1 = (0,1]$, $B_2 = (1,2]$, $B_3 = (2,10]$ y $B_4 = (10,\infty)$

Ejemplo 3c

- Para $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$, se tiene que $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$.
- Para $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, (0,1], (1,\infty), \Omega\}$, podemos decir, por ejemplo, que $P(\emptyset) = 0$, $P((0,1]) = 0.6$, $P((1,\infty)) = 0.4$, $P(\Omega) = 1$. No sería posible definir $P((0,0.5])$ porque $(0,0.5] \notin \mathcal{A}_2$.
- Para $\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, (0,1], (1,3], (3,\infty), (0,3], (0,1] \cup (3,\infty), (1,\infty), \Omega\}$, se asignarán las siguientes probabilidades:

$$P(\emptyset) = 0 \qquad P((0,1]) = 0.5 \qquad P((1,3]) = 0.3 \qquad P((3,\infty)) = 0.2$$

$$P((0,3]) = 0.8 \qquad P((1,\infty)) = 0.5 \qquad P((0,1] \cup (3,\infty)) = 0.7 \qquad P((0,\infty)) = P(\Omega) = 1$$

$P(A \cup B) = P(B \cup A)$

$P(A \cap B) = P(B \cap A)$

$P(A \mid B) \neq P(B \mid A)$

$\underbrace{P(A)}_{\substack{\text{probabilidad} \\ \text{a priori} \\ \text{(antes de} \\ \text{que suceda B)}}} \longrightarrow \underbrace{P(A \mid B)}_{\substack{\text{probabilidad} \\ \text{a posteriori} \\ \text{(luego de que} \\ \text{suceda B)}}}$

$\left.\begin{array}{l} P(A) = 0.2 \\ P(A \mid B) = 0.7 \end{array}\right\}$

$P(A \mid B)$ 1

$P(A \mid B^c)$ 2

$P(A^c \mid B)$ 3

$P(A^c \mid B^c)$ 4

Teorema de la multiplicación o de la probabilidad compuesta

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A|B)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|\underbrace{A_2 \overset{y}{\cap} A_1})\ldots P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})$$

$\cap \begin{cases} A_1 = \{\text{El CV del postulante es aceptado}\} \\ A_2 = \{\text{El postulante supera la entrevista de RRHH}\} \end{cases}$

$A_3 = \{\text{El postulante supere el examen técnico}\}$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_2 \cap A_1)$$

Eventos independientes

vs

Eventos mutuamente excluyentes