12. El tiempo semanal de paro (en horas) X de una máquina industrial determinada es tal que $X \sim Gamma(\alpha = 3, \beta = 0.6)$. La pérdida, en dólares, de la operación a causa del tiempo de paro está dada por $P = 20X + 2X^2$. ¿Cuál es la pérdida esperada?

$X \sim Gamma(\alpha = 3, \beta = 0.6)$

$E(P) = 20E(X) + 2E(X^2)$

$E(X) = 3 \times 0.6 = 1.80$

$V(X) = 3 \times 0.6^2 = 1.08$

$E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = 4.32$

$\Rightarrow E(P) = 20 \times 1.80 + 2 \times 4.32 = 44.64$ dólares

13. Se sabe que la distribución del tiempo de falla para subensambles electrónicos X es tal que $X \sim Weibull(\alpha = 0.5, \beta = 100)$. ¿Cuál es la probabilidad de que un subensamble falle luego del tiempo medio?

X = Tiempo de falla de subensambles electrónicos

$X \sim$ Weibull $(\alpha = 0.5, \beta = 100)$

$$\mu_X = E(X) = \beta\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) = 100\,\Gamma\left(1+\underbrace{\frac{1}{0.5}}_{2}\right) = 200$$

```
> 100*gamma(1+1/0.5)
[1] 200
```

$$P(X > 200) = \exp\left(-\left(\frac{200}{100}\right)^{0.5}\right) = \exp\left(-2^{0.5}\right) = 0.2432$$

$$S(x) = P(X > x) = \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right] I_{(0,\infty)}(x)$$

```
> exp(-2**0.5)
[1] 0.2431167
> ?pweibull
> pweibull(200, shape = 0.5, scale = 100, lower.tail = F)
[1] 0.2431167
> 1 -pweibull(200, shape = 0.5, scale = 100)
[1] 0.2431167
```

14. La probabilidad de aprobar un examen es 0.40. Por política académica, se permite dar dicho examen un máximo de 3 veces. Sea N el número de intentos necesarios para aprobar. (Los casos en que no se aprueba en tres intentos no se incluyen en la población de estudio).

- Obtenga la distribución de probabilidad truncada de N
- Calcular $E(N)$ y la mediana de N

X = N° de intentos necesarios para aprobar

Asumiendo que $X \sim Geom(\pi = 0.4)$

$P(X=1) = 0.4$

$P(X=2) = 0.6 \times 0.4 = 0.24$

$P(X=3) = 0.6^2 \times 0.4 = 0.144$

$P(X \leq 3) = 0.4 + 0.24 + 0.144 = 0.784$

Al truncar: $N = (X \mid X \leq 3)$

$P(N=1) = \frac{0.4}{0.784} = 0.5102$

$P(N=2) = \frac{0.24}{0.784} = 0.3061$

$P(N=3) = \frac{0.144}{0.784} = 0.1837$

$f(N) = 0.5102\, I_{\{1\}}(N) + 0.3061\, I_{\{2\}}(N) + 0.1837\, I_{\{3\}}(N)$

$$f(N) = 0.5102\, I_{\{1\}}(N) + 0.3061\, I_{\{2\}}(N) + 0.1837\, I_{\{3\}}(N)$$

$\sum x f(x)$

$$E(N) = 0.5102 \times 1 + 0.3061 \times 2 + 0.1837 \times 3 = 1.6735$$

$$E(N) = P(N \geq 1) + P(N \geq 2) + P(N \geq 3)$$

$\sum P(x \geq n)$

$$= 1 + (0.3061 + 0.1837) + 0.1837 = 1.6735$$

Mediana $= Me \Rightarrow F(Me) \geq 0.5$

$$F(N) = 0.5102\, I_{[1,2)}(N) + 0.8163\, I_{[2,3)}(N) + I_{[3,\infty)}(N)$$

$$Me = 1,\quad F(1) = 0.5102 \geq 0.5$$