14. Una caja contiene 5 dispositivos buenos y 3 defectuosos. Se extraen dos sin reemplazo.

a) Probabilidad de que el segundo sea defectuoso dado que el primero fue bueno.

b) Probabilidad de que al menos uno sea defectuoso.

c) Determine si los eventos "primer dispositivo defectuoso" y "segundo dispositivo defectuoso" son independientes.

-Experimento aleatorio: Extraer dos dispositivos sin reemplazo

$\Omega = \{ (B,B), (B,D), (D,B), (D,D) \}$

a) $A_i = \{$el i-ésimo dispositivo fue bueno$\}$

$\Omega = \{ (A_1, A_2), (A_1, A_2^c), (A_1^c, A_2), (A_1^c, A_2^c) \}$

$P(A_2^c \mid A_1) = \dfrac{P(A_1 \cap A_2^c)}{P(A_1)} = \dfrac{5/8 \times 3/7}{5/8} = \dfrac{3}{7}$

b) $M = \{$Al menos uno es defectuoso$\}$, $M^c = \{ (B,B) \}$

$P(M) = 1 - P(M^c) = 1 - \dfrac{5}{\cancel{8}_2} \times \dfrac{\cancel{4}^1}{7} = 1 - \dfrac{5}{14} = \dfrac{9}{14} = 0.643$

c) $P(A_1^c) = 3/8 = 0.375$

$P(A_2^c) = P(A_2^c \cap A_1) + P(A_2^c \cap A_1^c)$

$= \dfrac{5}{8} \times \dfrac{3}{7} + \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{7} = 0.375$

$P(A_1^c \cap A_2^c) = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{7} = 0.107$

¿$0.375 \times 0.375 = 0.107$? No, no son independ

15. Un sistema tiene dos métodos de autenticación: contraseña y token.

- La probabilidad de que un usuario escriba correctamente la contraseña es 0.9
- La probabilidad de que el token funcione correctamente es 0.95
- Ambos procesos son independientes, y el acceso se concede solo si ambos funcionan.

a) Calcular la probabilidad de acceso exitoso.

b) Si el acceso falló, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado el token?

$C = \{$escribir correctamente la contraseña$\}$

$T = \{$el token funciona$\}$

$P(C) = 0.90$

$P(T) = 0,95$

a) $P(C \cap T) = 0.90 \times 0.95 = 0,855$

b) $F = \{$el acceso falla$\} = C^c \cup T^c$

c)

$$P(T^c | F) = \frac{P(T^c \cap F)}{P(F)}$$

$$P(F) = P(C^c \cup T^c) = P((C \cap T)^c) = 1 - P(C \cap T) = 1 - P(C)P(T) = 1 - 0.90 \times 0.95 = 0,145$$

$$P(T^c \cap F) = P(T^c) = 0,05$$

$$T^c \subset (C^c \cup T^c)$$

Entonces: $P(T^c | F) = \frac{0.05}{0.145} = 0.345$

16. Entre los becarios de una universidad, aprobar matemáticas y física son independientes. Se definen los siguientes eventos y probabilidades:

- B = {estudiante es becario}
- A_1 = {aprueba matemáticas}
- A_2 = {aprueba física}

$A_1|B$ y $A_2|B$ independ.

$$P(B) = 0.3 \qquad P(A_1|B) = 0.8 \qquad P(A_2|B) = 0.75$$

a) Calcular $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B) = 0.80 + 0.75 - 0.80 \times 0.75 = 0.95$

b) Calcule $P(A_1 \cap A_2 \cap B) = P(A_1 \cap A_2|B)\,P(B) = 0.80 \times 0.75 \times 0.30 = 0.18$

17. A y B son eventos tales que $P(A) = \frac{2}{5}$ y $P(B) = \frac{1}{4}$. Además se sabe que $P(A|B) + P(B|A) = 0.7$. Calcular $P(A^c \cap B^c)$

$$P(A|B) + P(B|A) = 0.70$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.70$$

$$P(A \cap B)\left(\frac{1}{1/4} + \frac{1}{2/5}\right) = 0.70$$

$$P(A \cap B) = 0.1077$$

$$P(A^c \cap B^c) = P\left((A \cup B)^c\right) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \left(2/5 + 1/4 - 0.1077\right)$$

$$= 0.4577$$

18. En una prueba, un estudiante debe responder exactamente 7 preguntas de un total de 10. ¿Cuál es la probabilidad de que entre esas 7 elija por lo menos 3 de las 5 primeras?

$A = \{$ Elegir por lo menos 3 de las 5 primeras preguntas $\}$

$$P(A) = \frac{\binom{5}{3}\binom{5}{4}}{\binom{10}{7}} + \frac{\binom{5}{4}\binom{5}{3}}{\binom{10}{7}} + \frac{\binom{5}{5}\binom{5}{2}}{\binom{10}{7}} = \frac{50 + 50 + 10}{120} = \frac{11}{12} = 0.917$$

19. Se tiene la secuencia de números naturales 1,2,3,...,360. Si se selecciona uno de dichos números al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea coprimo con 360?

$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 360\}$

$R = \{x \in \Omega \,/\, x \text{ es coprimo con } 360\}$, $P(R) = n(R)/n(\Omega)$

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

$A = \{x \in \Omega \,/\, x \text{ es divisible por } 2\}$, $n(A) = 180$, $n(A \cap B) = 60$

$B = \{x \in \Omega \,/\, x \text{ es divisible por } 3\}$ $n(B) = 120$ $n(A \cap C) = 36$

$C = \{x \in \Omega \,/\, x \text{ es divisible por } 5\}$ $n(C) = 72$ $n(B \cap C) = 24$

$R^C = A \cup B \cup C$ $n(A \cap B \cap C) = 12$

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$= 180 + 120 + 72 - 60 - 36 - 24 + 12 = 264$ (no son coprimos)

$\Rightarrow 360 - 264 = 96$ coprimos

$\Rightarrow P(R) = \dfrac{96}{360}$

20. ¿Cuál es la probabilidad de que un anagrama formado por las letras de la palabra AYER comience con una vocal?

Ejm: SAL → SAL, SLA, LAS, LSA, ASL, ALS

AYER → $\underset{2}{\underset{\text{VOCAL}}{\_\_}}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_}_{3!} \Rightarrow 2 \times 3!$

total de anagramas $\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{4!}$

$$\frac{2 \times 3!}{4!} = \frac{2 \times 3!}{4 \times 3!} = 0.5$$

21. Si A, B y D son tres eventos tales que $P(A \cup B \cup D) = 0.7$, ¿cuál es el valor de $P(A^c \cap B^c \cap D^c)$?

$$P(A^c \cap B^c \cap D^c) = P((A \cup B \cup D)^c) = 1 - 0.7 = 0.3$$

22. Si A, B y D son tres eventos tales que $P(A|D) > P(B|D)$ y $P(A|D^c) > P(B^c|D^c)$. ¿Qué valores puede tomar el cociente $\frac{P(A)}{P(B)}$?

$$P(A|D) > P(B|D)$$

$$\frac{P(A \cap D)}{P(D)} > \frac{P(B \cap D)}{P(D)}$$

$$P(A \cap D) > P(B \cap D)$$

$$P(A|D^c) > P(B|D^c)$$

$$\frac{P(A \cap D^c)}{P(D^c)} > \frac{P(B \cap D^c)}{P(D^c)}$$

$$P(A \cap D^c) > P(B \cap D^c)$$

$$\begin{array}{lcl} + \; P(A \cap D) & > & P(B \cap D) \; + \\ \;\;\; \underline{P(A \cap D^c)} & > & \underline{P(B \cap D^c)} \\ \;\;\; P(A) & > & P(B) \end{array}$$

$$\frac{P(A)}{P(B)} > 1$$

23. Un dado balanceado es lanzado tres veces. Sea X_i el número que aparece en el i-ésimo lanzamiento $(i = 1, 2, 3)$. Calcular $P(X_1 > X_2 > X_3)$

$$\Omega = \{ (x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1, x_2, x_3 \in \{1,2,3,4,5,6\} \}, \quad n(\Omega) = 6^3 = 216$$

$$A = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \,/\, \underbrace{X_1 > X_2 > X_3}_{\text{3 números distintos}} \}, \quad n(A) = \binom{6}{3} = 20$$

654, 653, 652, 651, 543, 542, 541, 432, 431, 321,

643, 642, 641, 632, 631, 621, 532, 531, 521, 421

1 6 2

162

126

621

612

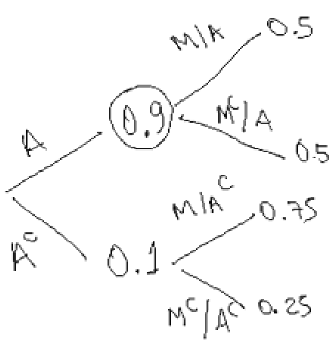
216

261

24. Suponga que cuando una máquina está correctamente ajustada, el 50% de los artículos que produce son de alta calidad y el otro 50% son de calidad media. Sin embargo, suponga que la máquina está incorrectamente ajustada durante el 10% del tiempo y que, bajo estas condiciones, el 25% de los artículos producidos son de alta calidad y el 75% son de calidad media. En un momento determinado se seleccionan al azar cinco artículos producidos por la máquina y se inspeccionan. Si cuatro de estos artículos son de alta calidad y uno es de calidad media, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina haya estado correctamente ajustada en ese momento?

$A = \{$la máquina está correctamente ajustada$\}$

$M = \{$la producción es de calidad media$\}$



$R = \{$4 artículos de calidad alta y 1 de media$\}$

$$P(R|A) = \binom{5}{1} 0.5^{1}\, 0.5^{4} = 0.15625 \checkmark$$

$$P(R|A^c) = \binom{5}{1} 0.75^{1}\, 0.25^{4} = 0.0146$$

$$P(A|R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|A)P(A)}{P(R)} = \frac{0.15625 \times 0.9}{0.142} = 0.99$$

$$P(R) = P(R \cap A) + P(R \cap A^c)$$
$$= P(R|A)P(A) + P(R|A^c)P(A^c) = 0.15625 \times 0.9 + 0.0146 \times 0.1$$
$$= 0.142$$

25. Calcular:

$$\int_0^1 I_{[0,1]}(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (2I_{(-1,0])}(x) + I_{(0,2)}(x) - 3I_{[3,4]}(x))dx$$

$$\int_0^{\infty} 4\exp(-4x)I_{[2,5]}(x)dx \;=\; e^{-8} - e^{-20}$$

a) $\displaystyle\int_0^1 I_{[0,1]}(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$

$$I_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(2I_{(-1,0]}(x) + I_{(0,2)}(x) - 3I_{[3,4)}(x)\right)dx = \cancel{\int_{-\infty}^{-1} 0\,dx}_{\,0} + \int_{-1}^{0} 2\,dx + \cancel{\int_0^{\infty} 0\,dx}_{\,0} + \int_0^2 1\,dx - \int_3^4 3\,dx = 2x\Big|_{-1}^{0} + x\Big|_0^2 - 3x\Big|_3^4$

$= 1$

26. Si $X_1, ..., X_n \sim Pois(\mu)$ y $S = I_{\{2,3\}}(X_i)$, calcular $E(S)$ y $Var(S)$

$$E(I_A(x)) = \sum x \, P(I_A(x) = x)$$
$$= 0\, P(x \notin A) + 1\, P(x \in A)$$
$$= P(x \in A)$$

$$I_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$$

$$S = I_{\{2,3\}}(x_i) \Rightarrow E(S) = P(X_i \in \{2,3\}) = P(X_i = 2) + P(X_i = 3)$$
$$= \frac{e^{-\mu}\mu^2}{2} + \frac{e^{-\mu}\mu^3}{6} = e^{-\mu}\mu^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{6}\right)$$

$$S \sim Bin\left(n = 1, \pi = e^{-\mu}\mu^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{6}\right)\right)$$

$$E(S) = n\pi = e^{-\mu}\mu^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{6}\right)$$

$$V(S) = n\pi(1-\pi) = \left(e^{-\mu}\mu^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{6}\right)\right)\left(1 - e^{-\mu}\mu^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{6}\right)\right)$$