Cálculo de probabilidades

Capítulo 1: Conceptos básicos

Mg. Sc. J. Eduardo Gamboa U.

Presentación

Datos del docente

Mg. Jesús Eduardo Gamboa Unsihuay

Correo: jgamboa@lamolina.edu.pe

Datos del curso

EP3010 Cálculo de probabilidades

Link de la sesión: Teams

Repositorio: GitHub

Sumilla

El curso de Cálculo de Probabilidades pertenece al área de formación de la especialidad, es de carácter obligatorio y de naturaleza teórico-práctica. Su propósito es brindar al estudiante los conceptos, fundamentos y aplicaciones de las principales técnicas probabilísticas y posteriormente utilizar esta información en aplicaciones estadísticas. Comprende las siguientes unidades: Conceptos probabilísticos básicos. Variables aleatorias univariadas: Discretas, Continuas, Mixtas, Mezcla y Truncadas. Funciones generatrices. Familias paramétricas especiales de distribuciones univariadas: Uniforme discreta, Binomial, Hipergeométrica, Poisson, Pascal, Zeta, Uniforme continua, Triangular, Normal, Lognormal, Gamma, Beta, Weibull, Cauchy, Laplace, Logística, Pareto y r. Variables aleatorias distribuidas en forma conjunta: Discretas, Continuas y Mixtas.

Evaluaciones

- Evaluación 1:
  - Evalúa Unidad 1
  - Semana 2
  - Teórico - práctica
  - Ponderación: 20%
- Evaluación 2:
  - Evalúa Unidad 2
  - Semana 3
  - Teórico - práctica
  - Ponderación: 20%
- Evaluación 3:
  - Evalúa Unidad 3
  - Semana 4
  - Teórico - práctica
  - Ponderación: 20%

Evaluaciones

- Evaluación 4:
  - Evalúa Unidad 4
  - Semana 4
  - Teórico - práctica
  - Ponderación: 20%
- Trabajo (8 grupos de 3 y un grupo de 2)
  - Evalúa: Tema asignado
  - 23/01 (3 grupos), 30/01 (3 grupos), 06/02 (3 grupos)
  - Ponderación: 10%
- Actitudinal
  - Durante todas las semanas del curso
  - Participación, asistencia y entrega de tareas
  - Ponderación: 10%

Unidades del curso

1. Conceptos básicos
2. Variables aleatorias univariadas
3. Familias paramétricas especiales de distribuciones univariadas
4. Variables aleatorias distribuidas de forma conjunta

¿Qué debo saber?

(y si no lo sé, repaso cuanto antes)

- Operaciones con conjuntos
- Combinatorias y permutaciones
- Integrales y derivadas
- Estadística descriptiva
- Uso de notación formal

Conceptos básicos

¿Cómo se originan los datos?

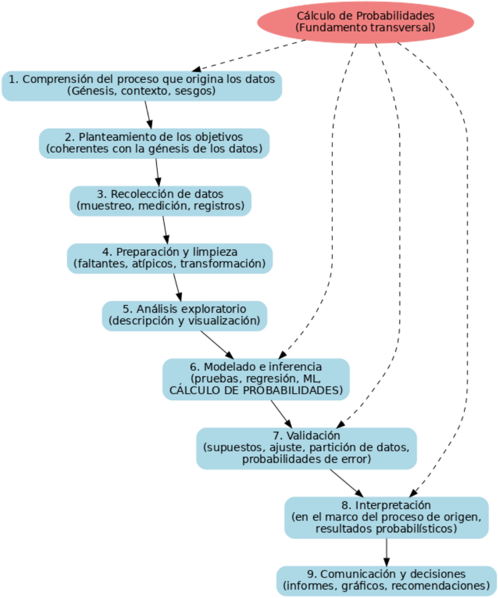
Los datos se obtienen cuando una acción, fenómeno o interacción es representada mediante valores medibles o registrables, a partir del uso sistemático de herramientas, tecnologías o métodos de observación.
El contenido del curso permitirá al estudiante representar estos fenómenos mediante modelos probabilísticos, es decir, representaciones simplificadas de la realidad que emplean variables aleatorias, distribuciones de probabilidad y otros conceptos formales con el fin de cuantificar la incertidumbre inherente a los procesos observados.

Importancia de la probabilidad

La probabilidad es una herramienta matemática fundamental en ciencia de datos para:

- el modelamiento de la incertidumbre
- la fundamentación teórica de la inferencia estadística (axiomas, teoremas, leyes, propiedades, etc)
- la fundamentación conceptual (conceptos, definiciones, interpretaciones, etc) y matemática (axiomas, formalizaciones, demostraciones, etc) de los métodos de machine learning.

El cálculo de probabilidades en el proceso de análisis de datos



Espacio de probabilidad

Un espacio de probabilidad es un terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ donde:

- Ω es el conjunto no vacío de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra de subconjuntos de Ω
- P es una medida de probabilidad en $\mathcal{A}$

Espacio muestral

- Ω es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, llamados puntos muestrales.
- Cada elemento $\omega \in \Omega$ representa un resultado elemental.
- Ω puede ser finito, numerable o no numerable, dependiendo de la naturaleza del experimento.

Ejemplo 1a

Experimento: Lanzar un dado regular equilibrado
Espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Tipo de espacio muestral: Finito y numerable.

Ejemplo 2a

Experimento: Se observa el número de postulaciones a la UNALM hasta lograr el ingreso
Espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, ...\}$
Tipo de espacio muestral: Infinito y numerable.

Ejemplo 3a

Experimento: Se mide el tiempo (en segundos) que tarda un sistema en responder a una solicitud.
Espacio muestral: $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega > 0\}$
Tipo de espacio muestral: Infinito y no numerable.
Dependiendo de la naturaleza del espacio muestral (finito, numerable o no numerable) será necesario definir adecuadamente una colección de eventos y una medida de probabilidad que permita cuantificar la incertidumbre de manera consistente.

Definición

Sea Ω el espacio muestral de un experimento. Todo subconjunto $A \subset \Omega$ será llamado evento.

Tipos de eventos

- Ω es el evento cierto
- $\emptyset$ es el evento imposible.
- Si $\omega \in \Omega$; el evento $\{\omega\}$ se llama evento elemental o evento simple.

σ-álgebra

Definiciones

- Un **espacio de eventos** Λ es una colección de subconjuntos de Ω
- Un **álgebra de eventos** $\mathcal{A}$ es un espacio de eventos cerrado bajo uniones **finitas**, es decir que cumple:
  - $\Omega \in \mathcal{A}$
  - Si $A \in \mathcal{A}$, entonces su complemento $A^c \in \mathcal{A}$.
  - Si $A_1 \in \mathcal{A}$ y $A_2 \in \mathcal{A}$, entonces $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$
- Un σ-**álgebra de eventos** $\mathcal{A}$ es un álgebra de eventos cerrado bajo uniones **numerables**, es decir que cumple:
  - $\Omega \in \mathcal{A}$
  - Si $A \in \mathcal{A}$, entonces su complemento $A^c \in \mathcal{A}$.
  - Si $A_j \in \mathcal{A}$, para $1 \leq j \leq \infty$, entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$
- El σ-álgebra es esencial para el estudio de probabilidades en espacios continuos.
- En cuanto a estructuras:

$$\sigma - \text{álgebra} \subset \text{álgebra de eventos} \subset \text{espacio de eventos}$$

Proposición

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de eventos, entonces valen las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $\forall n, \forall A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$, tenemos $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ y $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

Proposición

Sea $\mathscr{A}$ un σ-álgebra de eventos, entonces valen las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \in \mathscr{A}$
2. Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$, entonces $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{A}$

Ejemplo 1b

1. Espacios de eventos:
   - $\Lambda_1 = \{\emptyset, \{2,4,6\}, \{1,3\}, \Omega\}$
   - $\Lambda_2 = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{6\}, \{4,5\}, \Omega\}$
   - $\Lambda_3 = \{\emptyset, \Omega\}$
2. Álgebra de eventos:
   - $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, ..., \{1,2\}, ..., \{1,2,3,4,5\}, \{2,3,4,5,6\}, ..., \Omega\}$, notar que $|\Omega| = 6$ y $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^6 = 64$, donde $\mathcal{P}$ es el conjunto potencia.
   - $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{2,4,6\}, \{1,3,5\}, \Omega\}$
3. σ-álgebra de eventos
   - $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$ también es σ-álgebra dado que el conjunto potencia es cerrado bajo complementos y uniones numerables.
   - $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{2,4,6\}, \{1,3,5\}, \Omega\}$ también es σ-álgebra dado que $\mathcal{A}_2$ es un álgebra finita (toda álgebra finita es σ-álgebra).

Ejemplo 2b

1. Espacio de eventos

- $\Lambda_1 = \{\emptyset, \{1\}, \Omega\}$
- $\Lambda_2 = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{8\}, \Omega\}$
- $\Lambda_3 = \{\emptyset, \Omega\}$

2. Álgebra de eventos

- $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$
- $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6, ...\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5, 6, ...\}, \{2, 3, 4, 5, 6, ...\}, \Omega\}$
- $\mathcal{A}_3 = \mathcal{P}(\Omega)$
- $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \{1, 2, ..., n_0\}, \{n_0 + 1, n_0 + 2, ...\}, \Omega\}$, donde $n_0 \in \mathcal{N}$

3. σ-álgebra

- $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$
- $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6, ...\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5, 6, ...\}, \{2, 3, 4, 5, 6, ...\}, \Omega\}$
- $\mathcal{A}_3 = \mathcal{P}(\Omega)$
- $\mathcal{A}_5 = \{\emptyset, \{1, 2, ..., n\}, \{n + 1, n + 2, ...\}, \Omega : n \in \mathbb{N}\}$

Ejemplo 3b

1. Espacios de eventos:

- $\Lambda_1 = \{\emptyset, (0,1], (0,5], \Omega\}$
- $\Lambda_2 = \{(0,a], a > 0\} \cup \{\emptyset\}$
- $\Lambda_3 = \{\emptyset, (0,1], (4,7.5], \Omega\}$

2. Álgebra de eventos

- $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$, además $|\mathcal{A}_1| = 2$
- $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, (0,1], (1,\infty), \Omega\}$, además $|\mathcal{A}_2| = 4$
- $\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, (0,1], (1,3], (3,\infty), (0,3], (0,1] \cup (3,\infty), (1,\infty), \Omega\}$, además $|\mathcal{A}_3| = 8$
- $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \Omega\} \cup \left\{\bigcup_{B \in S} B : \ S \subseteq \{B_1, B_2, B_3, B_4\}, \ S \neq \emptyset, \ S \neq \{B_1, B_2, B_3, B_4\}\right\}$, donde $B_1 = (0,1]$, $B_2 = (1,2]$, $B_3 = (2,10]$ y $B_4 = (10,\infty)$, además $|\mathcal{A}_4| < \infty$ (es finita)
- $\mathcal{A}_5 = \{\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \cup (c, \infty) : n \in \mathcal{N}_0, 0 \leq a_i < b_i < \infty, c \in [0,\infty)\}$, es decir $\mathcal{A}_5$ está formada por el conjunto vacío ($n = 0, c = \infty$), el espacio muestral ($c = 0$) y todas las uniones finitas de intervalos de tipo $(a,b]$ eventualmente acompañadas de una cola (c,∞), además $|\mathcal{A}_5| = \infty$ (es infinita)

3. σ álgebra de eventos

- $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$.
- $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, (0,1], (1,\infty), \Omega\}$
- $\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, (0,1], (1,3], (3,\infty), (0,3], (0,1] \cup (3,\infty), (1,\infty), \Omega\}$
- $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \Omega\} \cup \left\{\bigcup_{B \in S} B : \; S \subseteq \{B_1, B_2, B_3, B_4\}, \; S \neq \emptyset, \; S \neq \{B_1, B_2, B_3, B_4\}\right\}$, donde $B_1 = (0,1]$, $B_2 = (1,2]$, $B_3 = (2,10]$ y $B_4 = (10,\infty)$

Si la colección de eventos tiene un número finito de conjuntos y es un álgebra, entonces también es una σ-álgebra. En la práctica, esto ocurre cuando los eventos se construyen a partir de una partición finita del tiempo de respuesta (por ejemplo: rápido/medio/lento).

- $\mathcal{A}_6 = \{\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] : 0 \leq a_i < b_i < \infty, n < \infty\} \cup \{\emptyset, \Omega\}$ no es un σ-álgebra, porque exige clausura bajo uniones numerables. Si se tiene $A_n = (n, n+1]$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, es un intervalo permitido es decir $A_n \in \mathcal{A}_5 \quad \forall n$. Luego $(1,\infty)$ no puede escribirse como una unión finita de intervalos, sino como $\bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1] \notin \mathcal{A}_6$

Medida de probabilidad

- P es una medida de probabilidad en $\mathcal{A}$, función que asigna valores en [0, 1], es decir $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
- Satisface los axiomas de Kolmogorov:
  - Axioma 1: No negatividad: $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$
  - Axioma 2: Normalización: $P(\Omega) = 1$
  - Axioma 3: Aditividad numerable (σ-aditividad): si $A_1, A_2, \ldots$ son eventos disjuntos, entonces $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. Si P es σ aditiva entonces es finitamente aditiva.

Ejemplo 1c

- Para $\mathcal{A}_1$, el conjunto potencia, la medida de probabilidad estará definida sobre todos los subconjuntos de Ω, por ejemplo:

$$P(\{2,5\}) = 2/6 \qquad P(\{6\}) = 1/6 \qquad P(\{1,4,6\}) = 1/2 \qquad P(\Omega) = 1 \qquad P(\emptyset) = 0$$

- Para $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{2,4,6\}, \{1,3,5\}, \Omega\}$, se tiene:

$$P(\{2,4,6\}) = 3/6 \qquad P(\{1,3,5\}) = 1/6 \qquad P(\Omega) = 1 \qquad P(\emptyset) = 0$$

No tendría sentido asignar $P(\{1\})$ porque $\{1\} \notin \mathcal{A}_2$

Ejemplo 2c

- Para $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$, se tiene que $P(\Omega) = 1$ y $P(\emptyset) = 0$
- Para $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6,\dots\}, \{1,2,3\}, \{1,4,5,6,\dots\}, \{2,3,4,5,6,\dots\}, \Omega\}$ tenemos:

$$P(\emptyset) = 0 \qquad P(\{1\}) = 0.3 \qquad P(\{2,3\}) = 0.5 \qquad P(\{4,5,6,\dots\} = 0.2$$

$$P(\{1,2,3\}) = 0.8 \qquad P(\{1,4,5,6,\dots\}) = 0.5 \qquad P(\{2,3,4,5,6,\dots\}) = 0.7$$

$$P(\Omega) = 1$$

Ejemplo 3c

- Para $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$, se tiene que $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$.
- Para $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, (0,1], (1,\infty), \Omega\}$, podemos decir, por ejemplo, que $P(\emptyset) = 0$, $P((0,1]) = 0.6$, $P((1,\infty)) = 0.4$, $P(\Omega) = 1$. No sería posible definir $P((0,0.5])$ porque $(0,0.5] \notin \mathcal{A}_2$.
- Para $\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, (0,1], (1,3], (3,\infty), (0,3], (0,1] \cup (3,\infty), (1,\infty), \Omega\}$, se asignarán las siguientes probabilidades:

$$P(\emptyset) = 0 \qquad P((0,1]) = 0.5 \qquad P((1,3]) = 0.3 \qquad P((3,\infty)) = 0.2$$

$$P((0,3]) = 0.8 \qquad P((1,\infty)) = 0.5 \qquad P((0,1] \cup (3,\infty)) = 0.7 \qquad P((0,\infty)) = P(\Omega) = 1$$

- Para $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \Omega\} \cup \left\{\bigcup_{B \in S} B : \ S \subseteq \{B_1, B_2, B_3, B_4\}, \ S \neq \emptyset, \ S \neq \{B_1, B_2, B_3, B_4\}\right\}$, donde $B_1 = (0, 1]$, $B_2 = (1, 2]$, $B_3 = (2, 10]$ y $B_4 = (10, \infty)$, tendremos:

$$P(B_1) = 0.4 \qquad P(B_2) = 0.2 \qquad P(B_3) = 0.2 \qquad P(B_4) = 0.15$$

  Entonces $P((0, 2]) = 0.6$, $P((0, 1] \cup (2, 10])) = 0.65$, etc.

- Para $\mathcal{A}_5 = \{\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] : 0 \leq a_i < b_i < \infty, n < \infty\} \cup \{\emptyset, \Omega\}$, no se puede definir una medida de probabilidad dado que no es un σ-álgebra, y no permite definir probabilidades de uniones numerables.

Definiciones de probabilidad

Definición clásica

Si un experimento aleatorio tiene $n(\Omega)$ resultados, y si $n(A)$ de dichos resultados corresponden a un evento A, entonces siempre que los eventos simples de Ω sean mutuamente excluyentes e igualmente posibles, la probabilidad de ocurrencia de A es $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$. Se dice que esta probabilidad es a priori.

Definición frecuencial

Si un experimento aleatorio se repite n veces, bajo las mismas condiciones, y n_A resultados corresponden al evento A, la probabilidad estimada de A está dada por la frecuencia relativa del evento, es decir $P(A) = \frac{n_A}{n}$. Teóricamente, se tiene que $P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$. Se dice que esta probabilidad es a posteriori.

Ejemplo 4

Experimento aleatorio: Se lanzan dos monedas equilibradas
Espacio muestral: $\Omega = \{CC, CS, SC, SS\}$, $n(\Omega) = 4$
Sea el evento $A = \{\text{Obtener dos resultados distintos}\} = \{CS, SC\}$
Entonces $n(A) = 2$, por lo tanto, según la definición clásica $P(A) = 2/4$

Ejemplo 5

Experimento aleatorio: Se lanzan una moneda muchas veces bajo las mismas condiciones
Sea el evento $A = \{\text{Obtener cara}\}$
Observación empírica: Se lanzó la moneda $n = 2000$ veces y se observaron $n_A = 1040$ caras.
Probabilidad estimada:

$$P(A) = \frac{1040}{2000} = 0.52$$

Note que:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = 0.5$$

Sea P una probabilidad en una σ-álgebra $\mathcal{A}$. Supongamos que todo $A \in \mathcal{A}$, entonces las siguientes propiedades se obtienen como consecuencia de los axiomas:

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$, siendo un caso particular importante $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega)$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$
3. $A_1 \subset A_2 \rightarrow P(A_1) \leq P(A_2)$
4. $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
5. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
6. Si $A_1, ...A_n$ son eventos mutuamente excluyentes entonces $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
7. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$
8. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilidad condicional

Para un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y con $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{A}$, la probabilidad del evento A dado un evento B se define de la siguiente manera:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad P(B) > 0$$

Ejemplo 6a

Experimento: Lanzar un dado equilibrado

Espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eventos:

- A $=$ Obtener un número impar $= \{1, 3, 5\}$
- B $=$ Obtener un número mayor a 3 $=\{4, 5, 6\}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \qquad P(B) = \frac{3}{6} \qquad P(A \cap B) = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

Sabiendo que el resultado fue mayor a 3, la probabilidad de que sea impar es $\frac{1}{3}$.

Axiomas de la probabilidad condicional

- Axioma 1: $P(A|B) \geq 0 \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$
- Axioma 2: $P(\Omega|B) = 1$
- Axioma 3: Si $A_1, A_2, \ldots$ son eventos disjuntos, entonces $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$. Si P es σ aditiva entonces es finitamente aditiva.

Teoremas de la probabilidad condicional

Sea P una probabilidad en una σ-álgebra $\mathcal{A}$. Supongamos que $B, A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$, entonces las siguientes propiedades se obtienen como consecuencia de los axiomas:

1. $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$, siendo un caso particular importante
   $P(\emptyset|B) = 1 - P(\Omega|B)$
2. $0 \leq P(A|B) \leq 1$
3. $A_1 \cap B \subset A_2 \cap B \rightarrow P(A_1|B) \leq P(A_2|B)$
4. $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i|B\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i|B)$
5. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$
6. Si $A_1, ...A_n$ son eventos mutuamente excluyentes entonces
   $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i|B\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i|B)$
7. $P(A_1|B) = P(A_1 \cap A_2|B) + P(A_1 \cap A_2^c|B)$
8. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B)$

Ejemplo 6b

Experimento: Lanzar un dado equilibrado

Espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eventos:

- A_1 = Obtener un número impar = $\{1, 3, 5\}$
- A_2 = Obtener un número mayor a 3 =$\{4, 5, 6\}$
- B = Obtener un número mayor o igual a 3 = $\{3, 4, 5, 6\}$

$P(A_1|B) = \frac{2}{4} = 0.5 > 0$ $\quad$ $P(A_1^c|B) = 1 - \frac{2}{4} = 0.5$

Ejemplo 6c

Experimento: Lanzar un dado equilibrado

Espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eventos:

- A_1 = Obtener un número impar $= \{1, 3, 5\}$
- A_2 = Obtener un número mayor a 3 $=\{4, 5, 6\}$
- B = Obtener un número mayor o igual a 3 $= \{3, 4, 5, 6\}$

$$(A_1 \cap B) \subset (A_2 \cap B) \longrightarrow P(A_1|B) \leq P(A_2|B)$$

Teorema de la multiplicación o de la probabilidad compuesta

Para dos eventos A y B del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se tiene:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

Generalizando:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 \cap A_1)...P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1})$$

Ejemplo 7

En una universidad, se observan los siguientes eventos: - A_1: El estudiante asiste a la primera semana de clases

- A_2: El estudiante aprueba la primera evaluación
- A_3: El estudiante aprueba el curso

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 \cap A_1)$

Asignar probabilidades y obtener $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Note que los eventos "dependen" uno del otro. ¿Sería correcto asumir "independencia"?

Definición: Independencia de eventos

Dos eventos A y B del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ son independientes si la ocurrencia de uno no afecta la del otro, es decir:

$$P(A|B) = P(A) \qquad P(B|A) = P(B)$$

Proposiciones sobre independencia

Si dos eventos A y B del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ son independientes, entonces:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A)$$

Si dos eventos A y B del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ son independientes, entonces A y B^c también lo serán.
Si dos eventos A y B del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ son independientes, entonces A^c y B también lo serán.
Si dos eventos A y B del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ son independientes, entonces A^c y B^c también lo serán.
Si $A \cap B = \emptyset$, entonces A y B no son independientes, a menos que uno de ellos tenga probabilidad cero.
Los eventos A_1 y A_2 del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ son condicionalmente independientes si

$$P(A_1 \cap A_2|B) = P(A_1|B)P(A_2|B)$$

Si en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, los eventos A_1, A_2, ..., A_k son colectivamente independientes, entonces:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) = P(A_1)P(A_2)...P(A_k)$$

Los eventos A_1, A_2, ..., A_k del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ son condicionalmente independientes si

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k|B) = P(A_1|B)P(A_2|B)...P(A_k|B)$$

Ejemplo 8

Se lanzan dos monedas equilibradas de manera independiente. Se definen los eventos:
A: {la primera moneda sale cara}
B: {la segunda moneda sale cara}
Hallar $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$.
Hallar $P(A^c)$, $P(B^c)$ y $P(A^c \cap B^c)$

Ejemplo 9

En un hospital se estudia la presencia de una enfermedad B y dos pruebas diagnósticas para su detección. Se definen los siguientes eventos:
A_1: {la prueba 1 resulta positiva}
A_2: {la prueba 2 resulta positiva}
B: {el paciente tiene la enfermedad}
(¿cuál sería el espacio muestral y su cardinalidad?)
Dado que el paciente sí tiene la enfermedad, los resultados de las dos pruebas son independientes, porque miden el mismo fenómeno biológico de manera separada.

$$P(A_1 \cap A_2 | B) = P(A_1|B)P(A_2|B)$$

Teorema de la Probabilidad total

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad en el cual los eventos $A_1, \ldots, A_k$ son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Luego, para cualquier otro evento B:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j) P(B|A_j)$$

Teorema de Bayes

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad en el cual los eventos A_1,...,A_k son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Luego, para cualquier otro evento B tal que $P(B) > 0$:

$$P(A_h|B) = \frac{P(A_h \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_h)P(B|A_h)}{\sum_{j=1}^{k} P(A_j)P(B|A_j)}$$

Ejemplo 10

Una empresa procesa solicitudes a través de tres servidores distintos. Cada solicitud es atendida exactamente por uno de los servidores, de modo que los eventos
A_1 : {la solicitud es procesada por el Servidor 1}
A_2 : {la solicitud es procesada por el Servidor 2}
A_3 : {la solicitud es procesada por el Servidor 3}
son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Las probabilidades de uso de cada servidor son:

$$P(A_1) = 0.20, \qquad P(A_2) = 0.50, \qquad P(A_3) = 0.30$$

Sea B el evento *la solicitud presenta un error de procesamiento*. Se sabe que:

$$P(B \mid A_1) = 0.05, \qquad P(B \mid A_2) = 0.02, \qquad P(B \mid A_3) = 0.10$$

- Calcule la probabilidad de que una solicitud seleccionada al azar presente un error.
- Calcule la probabilidad de que una solicitud seleccionada al azar presente un error.
- Compare la probabilidad a priori con la posteriori.

Función indicadora

Sea A un evento de Ω con puntos muestrales ω, entonces la función indicadora de A, denotada como $I_A(.)$ es la función con dominio en Ω y rango $\{0, 1\}$, es decir:

$$I_A(w) = \begin{cases} 1, & \text{si } w \in A, \\ 0, & \text{si } w \notin A. \end{cases}$$

En ocasiones, se usa $\mathbf{1}$ en vez de I.

Ejemplo 11

$$I_{[5,8]}(w) = \begin{cases} 1, & \text{si } w \in [5,8], \\ 0, & \text{si } w \notin [5,8]. \end{cases}$$

Ejemplo 12

$$I_{\{0\}\cap\{1\}}(w) = I_{\{0\}}(w) \times I_{\{1\}}(w)$$

Ejemplo 13

La función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ x, & \text{si } x \in [0,1] \\ x^2, & \text{si } x \in (1,4] \\ 5-x, & \text{si } x \in (4,5] \\ 0, & \text{si } x \in (5\infty) \end{cases}$$

puede escribirse como:

$$f(x) = xI_{[0,1]}(x) + x^2 I_{(1,4]}(x) + (5-x)I_{(4,5]}(x)$$

o

$$f(x) = x\mathbf{1}_{[0,1]}(x) + x^2 \mathbf{1}_{(1,4]}(x) + (5-x)\mathbf{1}_{(4,5]}(x)$$