Cálculo de probabilidades

Capítulo 4: Variables aleatorias distribuidas de forma conjunta

Mg. Sc. J. Eduardo Gamboa U.

Vector aleatorio

Un vector $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_k)$ compuesto por variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se llama vector aleatorio k-dimensional o variable aleatoria k-dimensional, de modo que:

$$\Omega \to R^k$$

Caso discreto

Distribución discreta conjunta

La **función de probabilidad conjunta** de $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ es:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{X} = \mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$$

En el caso bivariado:

$$f_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

Propiedades:

- $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \geq 0$
- $\sum_{\mathbf{x}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 1$

Ejemplo 1a:

X	Y	f(x,y)
0	0	0.30
0	1	0.10
1	0	0.40
1	1	0.20

$$P(X = 0, Y = 1) = 0.10$$

$$P(X \leq 1, Y = 1) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1) = 0.10 + 0.20 = 0.30$$

Distribución discreta marginal

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ y fija $i \in \{1, \ldots, k\}$. La marginal de X_i se obtiene sumando sobre las demás componentes:

$$p_{X_i}(x_i) = \sum_{\mathbf{x}_{-i}} p_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_k)$$

En el caso bivariado, $k = 2$

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y) \qquad f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y)$$

Ejemplo 1b:

$f_X(0) = 0.30 + 0.10 = 0.40 \qquad f_X(1) = 0.40 + 0.20 = 0.60$
Por tanto, $f_X(x) = 0.40 I_{(0)}(x) + 0.60 I_{(1)}(x)$
Determinar $f_Y(y)$.

Esperanza conjunta (caso discreto)

Para una función $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$:

$$E[g(\mathbf{X})] = \sum_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x})\, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$$

Para $k = 2$:

$$E[g(X,Y)] = \sum_{x} \sum_{y} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)$$

Función de distribución acumulada conjunta discreta

Para $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$:

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k)$$

y se calcula como:

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{u} \leq \mathbf{x}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$$

donde $\mathbf{u} \leq \mathbf{x}$ significa $u_i \leq x_i$ para todo i.

Para el caso bivariado:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Se calcula sumando todas las probabilidades conjuntas compatibles:

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{u \leq x} \sum_{v \leq y} f_{X,Y}(u, v)$$

Ejemplo 1c:

Sea la siguiente función de probabilidad continua:

X	Y	f(x,y)
0	0	0.30
0	1	0.10
1	0	0.40
1	1	0.20

$$F(0,0) = P(X \leq 0, Y \leq 0) = P(0,0) = 0.30$$

$$F(0,1) = P(X \leq 0, Y \leq 1) = P(0,0) + P(0,1) = 0.30 + 0.10 = 0.40$$

$$F(1,0) = P(X \leq 1, Y \leq 0) = P(0,0) + P(1,0) = 0.30 + 0.40 = 0.70$$

$$F(1,1) = P(X \leq 1, Y \leq 1) = 0.30 + 0.10 + 0.40 + 0.20 = 1.00$$

X	Y	F(x,y)
0	0	0.30
0	1	0.40
1	0	0.70
1	1	1.00

Función de distribución acumulada marginal discreta

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ un vector aleatorio discreto con función de probabilidad conjunta $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$.

Para cada componente X_i se define su función de distribución acumulada marginal como:

$$F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i) = \sum_{u_i \leq x_i} f_{X_i}(u_i), \qquad i = 1, \dots, k.$$

En el caso bivariado:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f_X(u)$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \sum_{u \leq y} f_Y(u)$$

Ejemplo 1d:

Continuando con el ejemplo 1b:

Para X:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$F_X(0) = 0.40, \qquad F_X(1) = 1.00$$

Determinar $F_Y(y)$

Ejemplo 2

Se define la función de probabilidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = k(x+1)(y+2)I_{\{0,1,2,3\}}(x)I_{\{0,1,2\}}(y)$$

- Determinar la constante k para que f sea una función de probabilidad conjunta
- Obtener $f(2,2)$
- Determinar las distribuciones marginales de X e Y

Distribución Multinomial

Si en cada uno de n ensayos hy k categorías posibles, entonces:

$$\mathbf{X} = (X_1, ..., X_k) \sim Multinomial(n, \pi_1, ..., \pi_k)$$

$$f(\mathbf{X}) = \frac{n!}{x_1!...x_k!}\pi_1^{x_1}...\pi_k^{x_k}$$

sujeto a $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$

(cont. Distribución Multinomial)

Valor esperado: $E(X_i) = n\pi_i$

Varianza: $V(x_i) = n\pi_i(1 - \pi_i)$

Covarianza: $Cov(X_i, X_j) = -n\pi_i\pi_j$

Correlación: $Corr(X_i, X_j) = \frac{-n\pi_i\pi_j}{\sqrt{n\pi_i(1-\pi_i)}\sqrt{n\pi_j(1-\pi_j)}}$

Distribución marginal: $X_i \sim Bin(n, \pi_i)$

Ejemplo 3

Un filtro automático clasifica 50 correos en:

- Spam (S): 0.10
- Promociones (P): 0.25
- Social (O): 0.15
- Principal (R): 0.50

$$(X_S, X_P, X_0, X_R) \sim Multinomial(n = 50, \pi_S = 0.10, \pi_P = 0.25, \pi_O = 0.15, \pi_R = 0.50)$$

Probabilidad de observar 2 correos spam, 10 de promociones, 7 de social y 31 en la bandeja principal:

$$P(X_S = 2, X_P = 10, X_O = 7, X_R = 31) = \frac{50!}{2!10!7!31!} 0.10^2 0.25^{10} 0.15^7 0.50^{31} = 0.00077$$

```r
dmultinom ( x = c (2,10,7,31) , prob = c (0.10,0.25,0.15,0.50))
```

```
[1] 0.000767253
```

Interpretar el siguiente resultado referido a simulación de muestras aleatorias multinomiales:

```r
rmultinom (n = 3, size = 100 , prob = c (0.10,0.25,0.15,0.50))
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   13   12    6
[2,]   24   24   30
[3,]   18   25   12
[4,]   45   39   52
```

Caso continuo

Distribución continua conjunta

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ un vector aleatorio continuo.
Se describe mediante la **densidad conjunta**:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k.$$

Para el caso bivariado:

$$f_{X,Y}(x, y)$$

Propiedades:

- $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}^k} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 1$ donde $d\mathbf{x} = dx_1 \cdots dx_k$.

Probabilidad en región A:

$$P(\mathbf{X} \in A) = \int_A f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

En el caso bivariado:

$$P((X, Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy$$

Ejemplo 4a

Sea $\mathbf{X} = (X, Y)$ con densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Verificando que es una densidad:

$$\int_0^1 \int_0^y 2\, dx\, dy = 1$$

```r
library(pracma)
f <- function(y, x) 0*x + 0*y + 2
ymin_val <- 0
ymax_val <- 1
xmin_fun <- 0
xmax_fun <- function(y) y

integral2(f, ymin_val, ymax_val, xmin_fun, xmax_fun)$Q
```

```
[1] 1
```

Calcular $P(X < 0.3,\ Y < 0.8)$

$$\int_0^{0.3} \int_0^{y} 2\, dx\, dy + \int_{0.3}^{0.8} \int_0^{0.3} 2\, dx\, dy.$$

```r
library(pracma)
f <- function(y, x) 0*x + 0*y + 2
ymin_val <- 0
ymax_val <- 0.3
xmin_fun <- 0
xmax_fun <- function(y) y
(I1 <- integral2(f, ymin_val, ymax_val, xmin_fun, xmax_fun)$Q)
```

```
[1] 0.09
```

```r
ymin_val <- 0.3
ymax_val <- 0.8
xmin_fun <- 0
xmax_fun <- 0.3
(I2 <- integral2(f, ymin_val, ymax_val, xmin_fun, xmax_fun)$Q)
```

```
[1] 0.3
```

```r
I1 + I2
```

```
[1] 0.39
```

Distribución continua marginal

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ un vector aleatorio continuo con densidad conjunta $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$.
La densidad marginal de la componente X_i se obtiene integrando la densidad conjunta respecto de todas las demás variables:

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k)\, d\mathbf{x}_{-i}, \qquad i = 1, \dots, k,$$

donde $d\mathbf{x}_{-i}$ indica la integración sobre todas las componentes excepto la i-ésima:

$$d\mathbf{x}_{-i} = dx_1 \cdots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \cdots dx_k.$$

Caso particular bivariado:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy \qquad\qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx$$

Ejemplo 4b

Sea $\mathbf{X} = (X, Y)$ con densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para $0 < x < 1$, la región exige $y > x$:

$$f_X(x) = \int_x^1 2\, dy = 2(1 - x) \quad \Rightarrow \quad f_X(x) = 2(1 - x) I_{(0,1)}(x)$$

Para $0 < y < 1$, la región exige $0 < x < y$:

$$f_Y(y) = \int_0^y 2\, dx = 2y \quad \Rightarrow \quad f_Y(y) = 2y I_{(0,1)}(y)$$

Esperanza conjunta

ea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ un vector aleatorio continuo con densidad conjunta $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$.
La esperanza de $g(\mathbf{X})$ es:

$$E[g(\mathbf{X})] = \int_{\mathbb{R}^k} g(\mathbf{x})\, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

donde $d\mathbf{x} = dx_1 \cdots dx_k$
Caso particular bivariado ($k = 2$):

$$E[g(X, Y)] = \int \int g(x, y)\, f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy.$$

Ejemplo 4c

Sea $\mathbf{X} = (X, Y)$ con densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encontrar $E(XY)$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^y 2xy \, dx \, dy$$

```r
library(pracma)
f <- function(y, x) 2*x*y
ymin_val <- 0
ymax_val <- 1
xmin_fun <- 0
xmax_fun <- function(y) y

integral2(f, ymin_val, ymax_val, xmin_fun, xmax_fun)$Q
```

```
[1] 0.25
```

Función de distribución acumulada conjunta continua

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ un vector aleatorio continuo con densidad conjunta $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$. La función de distribución acumulada conjunta es:

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f_{\mathbf{X}}(u_1, \dots, u_k)\, du_k \cdots du_1.$$

Caso particular bivariado ($k = 2$):

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u, v)\, dv\, du$$

Ejemplo 4d

Sea $\mathbf{X} = (X, Y)$ con densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para encontrar $F_{X,Y}(x,y)$, se debe evaluar por tramos:
Tramo 1: $x \leq 0$ o $y \leq 0$:
$F(x,y) = 0$, así por ejemplo $F(-0.1, -0.2) = \int_{-\infty}^{-0.2} \int_{-\infty}^{-0.1} f(x,y)dxdy = 0$

Tramo 2: $0 < y \leq x < 1$:

$$F(x, y) = \int_0^y \int_0^v 2dudv = y^2$$

Así por ejemplo, $F(0,6,0.3) = 0.3^2 = 0.09$

$$\int_{-\infty}^{0.3} \int_{-\infty}^{0.6} f(x, y)dxdy = \int_0^{0.3} \int_0^y 2dxdy = 0.09$$

```r
library(pracma)
f <- function(y, x) 2 + x*0 + y*0
ymin_val <- 0
ymax_val <- 0.3
xmin_fun <- 0
xmax_fun <- function(y) y

integral2(f, ymin_val, ymax_val, xmin_fun, xmax_fun)$Q
```

```
[1] 0.09
```

Tramo 3: $0 < x < y < 1$:

$$F(x,y) = \int_0^x \int_u^y 2dvdu = 2yx - x^2$$

Así por ejemplo, $F(0.4, 0.8) = 2 \times 0.8 \times 0.4 - 0.4^2 = 0.48$

$$\int_{-\infty}^{0.8} \int_{-\infty}^{0.4} f(x,y)dxdy = \int_0^{0.4} \int_x^{0.8} 2dydx = 0.48$$

```r
library(pracma)
f <- function(y, x) 2 + x*0 + y*0
ymin_val <- 0    # no es y, sino el límite inferior externo
ymax_val <- 0.4  # no es y, sino el límite superior externo
xmin_fun <- function(y) y
xmax_fun <- 0.8

integral2(f, ymin_val, ymax_val, xmin_fun, xmax_fun)$Q
```

```
[1] 0.48
```

Tramo 4: $0 < x < 1, y \geq 1$:

$$F(x,y) = \int_0^x \int_u^1 2dvdu = 2x - x^2$$

Así por ejemplo, $F(0.5, 1.2) = 2 \times 0.5 - 0.5^2 = 0.75$

$$\int_{-\infty}^{0.5} \int_{-\infty}^{1.2} f(x,y)dxdy = \int_0^{0.5} \int_x^1 2dydx = 0.75$$

```r
library(pracma)
f <- function(y, x) 2 + x*0 + y*0
ymin_val <- 0    # no es y, sino el límite inferior externo
ymax_val <- 0.5  # no es y, sino el límite superior externo
xmin_fun <- function(y) y
xmax_fun <- 1

integral2(f, ymin_val, ymax_val, xmin_fun, xmax_fun)$Q
```

```
[1] 0.75
```

Entonces, finalmente:

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ o } y \leq 0 \\ 2xy - x^2 & 0 < x < y < 1 \\ y^2 & 0 < y < 1,\ x \geq y \\ 2x - x^2 & 0 < x < 1,\ y \geq 1 \\ 1 & x \geq 1,\ y \geq 1 \end{cases}$$

Función de distribución acumulada marginal continua

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ un vector aleatorio continuo con densidad conjunta $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ y marginales $f_{X_i}(x_i)$.
Para cada componente X_i:

$$F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i}(u_i)\, du_i, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Para el caso bivariado:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du \qquad F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\, dv$$

También es válido señalar que $F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x, y)$ y $F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x, y)$

Ejemplo 4e

Se sabe que $f_X(x) = 2(1-x)I_{(0,1)}(x)$, entonces, en el tramo $(0,1)$:
$F_X(x) = \int_0^x 2(1-u)du = (2u-u^2)|_0^x = 2x - x^2$ Finalmente:

$$F_X(x) = (2x - x^2)I_{(0,1)}(x) + I_{[1,\infty)}(x)$$

Se sabe que $f_Y(y) = 2yI_{(0,1)}(y)$, entonces, en el tramo $(0,1)$:
$F_Y(y) = \int_0^y 2vdv = v^2|_0^y = y^2$ Finalmente:

$$F_Y(y) = y^2 I_{(0,1)}(y) + I_{[1,\infty)}(y)$$

Además:

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = 2x - x^2 \qquad F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = y^2$$

Distribución condicional

$$f_{\mathbf{X}_A|\mathbf{X}_B}(\mathbf{x}_A \mid \mathbf{x}_B) = \frac{f_{\mathbf{X}_A,\mathbf{X}_B}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B)}{f_{\mathbf{X}_B}(\mathbf{x}_B)}, \qquad f_{\mathbf{X}_B}(\mathbf{x}_B) > 0.$$

Para el caso bivariado:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > 0$$

Ejemplo 5

Supongamos tres variables binarias:

- X: falla del sensor 1 (1 = Sí, 0 = No)
- Y: falla del sensor 2 (1 = Sí, 0 = No)
- Z: activación de alarma de falla (1 = Sí, 0 = No)

Sea $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$ con función de probabilidad conjunta:

X	Y	Z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0.10
0	0	1	0.05
0	1	0	0.15
0	1	1	0.10
1	0	0	0.20
1	0	1	0.10
1	1	0	0.20
1	1	1	0.10

Obtención de la distribución condicional de Z dado X, Y:

- Distribución conjunta de X e Y:

$$f_{X,Y}(x, y) = \sum_{z} p(x, y, z)$$

$$f_{X,Y}(0, 0) = 0.10 + 0.05 = 0.15$$
$$f_{X,Y}(0, 1) = 0.15 + 0.10 = 0.25$$
$$f_{X,Y}(1, 0) = 0.20 + 0.10 = 0.30$$
$$f_{X,Y}(1, 1) = 0.20 + 0.10 = 0.30$$

- Distribución condicional:

$$f_{Z|X,Y}(z \mid x, y) = \frac{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}{f_{X,Y}(x, y)}$$

Por ejemplo, la probabilidad de que la alarma no se active si solamente falla el sensor 2:

$$f(z = 0|x = 0, y = 1) = \frac{f_{X,Y,Z}(0, 1, 0)}{f_{X,Y}(0, 1)} = \frac{0.15}{0.25} = 0.6$$

Ejemplo 6

Sea $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$ con densidad conjunta:

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \begin{cases} 6, & 0 < x < y < z < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Distribución condicional:

$$f_{X,Y|Z}(x, y \mid z) = \frac{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}{f_Z(z)}$$

Entonces, hallando la marginal de Z:

$$f_Z(z) = \int_0^z \int_0^y 6\, dx\, dy = \int_0^z 6y\, dy = 3z^2 I_{(0,1)}(z)$$

Finalmente:

$$f_{X,Y|Z}(x, y \mid z) = \frac{6}{3z^2} = \frac{2}{z^2}, \quad 0 < x < y < z < 1$$

- Verificar que $f_{X,Y|Z}(x, y \mid z)$ es una densidad
- Calcular $P(X < 0.15, Y > 0.25|Z = 0.5)$

```
f <- function(x, y) 8 + x*0 + y*0

integral2(f,
          xmin = 0, xmax = 0.15,
          ymin = 0.25, ymax = 0.5)$Q
```

```
[1] 0.3
```

Covarianza

$$\text{Cov}(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

Forma equivalente:

$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Interpretación:

- Positiva: relación directa
- Negativa: relación inversa
- Cero: no asociación lineal

Correlación

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathsf{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Propiedades:

- $-1 \leq \rho \leq 1$
- Es adimensional
- Mide asociación lineal estandarizada

Ejemplo 7

Sea la distribución conjunta de (X, Y), donde $X \in \{0, 1, 2\}$ y $Y \in \{0, 1\}$:

X	Y	$f(x, y)$
0	0	0.10
0	1	0.15
1	0	0.20
1	1	0.15
2	0	0.05
2	1	0.35
Total		1.00

Distribuciones marginales

$$f_X(0) = 0.10{+}0.15 = 0.25, \quad f_X(1) = 0.20{+}0.15 = 0.35, \quad f_X(2) = 0.05{+}0.35 = 0.40$$

$$f_Y(0) = 0.10 + 0.20 + 0.05 = 0.35, \quad f_Y(1) = 0.15 + 0.15 + 0.35 = 0.65$$

Valores esperados

$$E(X) = 0(0.25) + 1(0.35) + 2(0.40) = 0.35 + 0.80 = 1.15$$

$$E(Y) = 0(0.35) + 1(0.65) = 0.65$$

$$E(XY) = \sum_{x \in \{0,1,2\}} x \cdot 1 \cdot p(x,1) = 0 \cdot 0.15 + 1 \cdot 0.15 + 2 \cdot 0.35 = 0.15 + 0.70 = 0.85$$

(no se suma en Y porque $XY = 0$ cuando $Y = 0$ y solo queda $Y = 1$ como único valor)

Varianzas y desviaciones estándar

$$E(X^2) = 0^2(0.25) + 1^2(0.35) + 2^2(0.40) = 0.35 + 1.60 = 1.95$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1.95 - (1.15)^2 = 1.95 - 1.3225 = 0.6275$$

$$\sigma_X = \sqrt{0.6275}$$

$$E(Y^2) = 0^2(0.35) + 1^2(0.65) = 0.65$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 0.65 - 0.65^2 = 0.2275$$

$$\sigma_Y = \sqrt{0.2275}$$

Covarianza

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.85 - (1.15)(0.65) = 0.85 - 0.7475 = 0.1025$$

Correlación

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0.1025}{\sqrt{0.6275}\sqrt{0.2275}} \approx \frac{0.1025}{0.792 \cdot 0.477} \approx 0.27$$

Ejemplo 8

Sea (X, Y) con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Densidades marginales

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = x(1) + \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2}, \qquad 0<x<1$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x+y)\,dx = \frac{1}{2} + y(1) = y + \frac{1}{2}, \qquad 0<y<1$$

Valores esperados

$$E(X) = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{7}{12}$$

Por simetría, $E(Y) = \frac{7}{12}$

```
f = function(x){x*(x+0.5)}
integrate(f,0,1)$value
```

```
[1] 0.5833333
```

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)dxdy = \frac{1}{3}$$

```
library(pracma)
f <- function(y, x) x*y*(x+y)
ymin_val <- 0
ymax_val <- 1
xmin_fun <- 0
xmax_fun <- 1

integral2(f, ymin_val, ymax_val, xmin_fun, xmax_fun)$Q
```

```
[1] 0.3333333
```

Varianzas y desviaciones estándar

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = 0.41667$$

```
f = function(x){x^2*(x+0.5)}
integrate(f,0,1)$value
```

```
[1] 0.4166667
```

$$Var(X) = 0.41667 - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = 0.07639$$

$$\sigma_X = \sqrt{0.07639} \Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{0.07639}$$

Covarianza

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = -0.00694$$

Correlación

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-0.00694}{0.07639} = -0.09091$$

Independencia de variables

Dos variables aleatorias X y Y son independientes si su distribución conjunta factoriza como producto de las marginales.

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \forall (x,y)$$

En términos de probabilidades:

$$P(X \in A,\ Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B) \quad \text{para todo } A, B$$

Si X y Y son independientes:

- $E(g(X)h(Y)) = E(g(X)) \times E(h(Y))$, en particular $E(XY) = E(X)E(Y)$, o por ejemplo $E(2XY^2) = E(2X)E(Y^2)$
- $\text{Cov}(X,Y) = 0$

¿Covarianza cero implica independencia?

Ejemplo 9

Sea la tabla conjunta:

	Y=0	Y=1
X=0	0.21	0.09
X=1	0.21	0.09
X=2	0.28	0.12

$$f_X(0) = f_X(1) = 0.3 \quad f_X(2) = 0.40, \qquad f_Y(0) = 0.70 \quad f_Y(1) = 0.30$$

Verificación:

$$f_{X,Y}(1,1) = 0.09 = 0.30 \times 0.30$$

Ejemplo 10

Sea

$$f_{X,Y}(x,y) = 2x, \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$$

Marginales:

$$f_X(x) = \int_0^1 2x\,dy = 2xI_{(0,1)}(x) \qquad f_Y(y) = \int_0^1 2x\,dx = I_{(0,1)}(y)$$

Producto:

$$f_X(x)f_Y(y) = 2x = f_{X,Y}(x,y).$$

Luego X y Y son independientes.

Distribución Normal Multivariada

Un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)^\top$ tiene distribución Normal multivariada de dimensión k si existe un vector de medias $\mu \in \mathbb{R}^k$ y una matriz de covarianzas $\Sigma \in \mathbb{R}^{k \times k}$ simétrica definida positiva tal que su densidad es:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$$

Se denota:

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_k(\mu, \Sigma)$$

Vector de medias:

$$\mu = E(\mathbf{X})$$

Matriz de covarianzas:

$$\Sigma = \mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = E\big[(\mathbf{X} - \mu)(\mathbf{X} - \mu)^\top\big]$$

Caso bivariado

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

- Toda combinación lineal es normal:

$$a^\top \mathbf{X} \sim \mathcal{N}(a^\top \mu,\ a^\top \Sigma a)$$

- Cada subvector de $\mathbf{X}$ es Normal multivariado.
- Si $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + b$, entonces

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(A\mu + b,\ A\Sigma A^\top).$$

- $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0 \iff X_i$ y X_j son independientes. Esta equivalencia no es válida en general fuera de la normal.

Distribución condicional

Particione el vector:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}, \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$\mathbf{X}_1 \mid \mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2 \sim \mathcal{N}\Big(\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mu_2),\ \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Big).$$

Implementación en R

- Paquete: mvtnorm
- Funciones:
  - dmvnorm: densidad en un punto
  - pmvnorm: probabilidad en una región
- Paquete: MASS
  - mvrnorm: muestra aleatoria

```r
library(mvtnorm)
mu    <- c(1, 2)
Sigma <- matrix(c(1.0, 0.6, 0.6, 2.0), nrow = 2)
dmvnorm(x = c(1,2), mean = mu, sigma = Sigma)
```

```
[1] 0.1242791
```

```r
pmvnorm(lower = c(-Inf, -Inf),
        upper = c(1.5, 2.5),
        mean = mu,
        sigma = Sigma)
```

```
[1] 0.5007897
attr(,"error")
[1] 1e-15
attr(,"msg")
[1] "Normal Completion"
```

```
[1] 0.1368131
attr(,"error")
[1] 1e-15
attr(,"msg")
[1] "Normal Completion"
```

```r
library(MASS)
mvrnorm(n = 5, mu, Sigma)
```

```
           [,1]     [,2]
[1,] -0.4755227 4.013053
[2,]  0.9392971 1.678797
[3,]  0.7599272 1.715160
[4,]  1.1114383 1.950691
[5,]  1.3495759 2.713627
```