

Lista de ejercicios 2

Ciclo nivelación 2025-2

Mg. Sc. J. Eduardo Gamboa U.

1. Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad:

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{c}{x(x+1)} I_{\{1,2,3,\dots\}}(x)$$

- a. Determine la constante c
- b. Calcule $P(X \geq n)$
- c. ¿Cuál es el valor de $E(X)$?
- d. ¿Cuál es el valor de la mediana de X ?
- e. Calcule $P(X \geq 8 | X \geq 4)$

2. Sea X una varianle aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = kxI_{(0,1)}(x)k(2-x)I_{[1,2)}(x)$$

- a. Determine la constante k
- b. Obtener $F_X(x)$
- c. Hallar $XE(X)$ y $V(X)$
- d. Determinar el valor mediano de X

3. Si una variable aleatoria X tiene la siguiente función de distribución

$$F_X(x) = (1 - \exp(-3x))I_{(0,\infty)}(x)$$

- a. ¿Cuál es su función de densidad?
- b. Calcular el percentil 60 de X
- c. ¿Cuál es su valor esperado?
- d. Hallar su coeficiente de variación

4. Un sensor ambiental detecta contaminación:
- Con probabilidad p no detecta nada y reporta $X = 0$
 - Con probabilidad $1 - p$ detecta contaminación, y el nivel medido Y tiene densidad:
- $$f_Y(y) = y \exp(-y) I_{(0,\infty)}(x)$$
- a. Identifique la función de distribución de X , así como $F^d(x)$, $F^{ac}(x)$, $f^d(x)$ y $f^{ac}(x)$
 - b. Calcule $P(X > t)$ para $p = 0.3$
 - c. Hallar $E(X)$ para $p = 0.9$ y $p = 0.2$
 - d. Determinar $V(X)$ para $p = 0.9$ y $p = 0.2$
5. Sea $Z \in \{1, 2\}$ una variable latente con $P(Z = 1) = \pi$. Condicionalmente a Z , la variable observada X tiene densidad:

$$f_{X|Z=1}(x) = \frac{x}{2} I_{(0,2)}(x)$$

$$f_{X|Z=2}(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2) I_{(-1,1)}(x)$$

- a. Verifique que $f_{X|Z=1}$ y $f_{X|Z=2}$ son densidades válidas.
- b. Obtener la densidad marginal $f_X(x)$.
- c. Obtener la función de distribución $F_X(x)$ y a partir de ella, $P(X < 0)$.
- d. Calcule $E(X|Z = 1)$ Y $E(X|Z = 2)$.
- e. ¿Cuál es el valor de π si se sabe que $E(X) = 1$?
- f. Con el valor de π obtenido en la pregunta anterior, calcular y descomponer $V(X)$.