Análisis de regresión

Capítulo 5: Valores atípicos e influenciales

Mg. Sc. J. Eduardo Gamboa U.

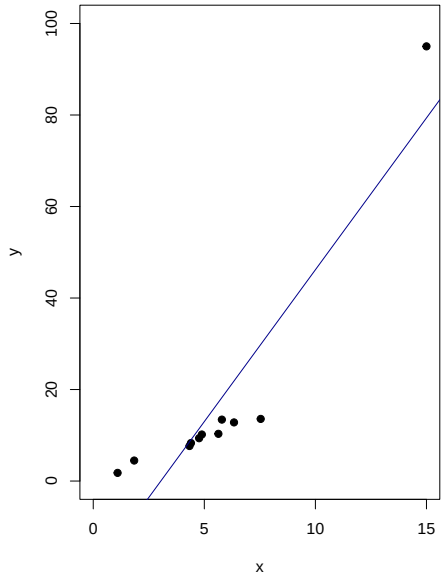
Introducción

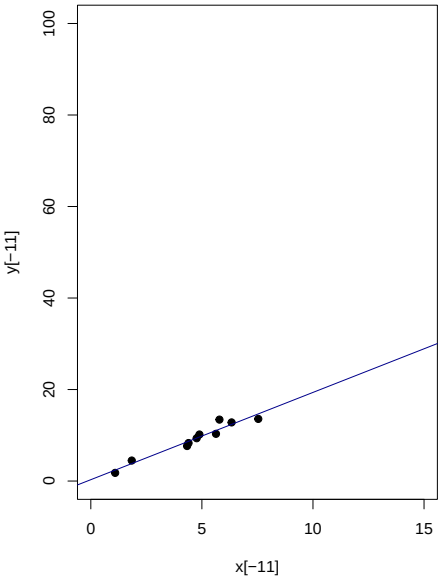
- Un outlier es una observación que no se ajusta a un determinado modelo. En regresión lineal, diríamos que "se aleja de la línea de regresión estimada".
- Un leverage es un valor inusual que podría controlar o modificar ciertas propiedades del modelo. Para la regresión lineal simple correspondería a un valor inusual de la variable predictora.
- Un valor influencial es aquel cuya presencia altera las estimaciones u otras propiedades del modelo, por ejemplo: signos de los coeficientes de regresión, no significancia de variables importantes, intervalos de predicción amplios; en general, el proceso de inferencia

Ejemplo 1

Outlier, leverage y valor influencial

```
set.seed(111)
x = c(runif(10,1,10),15)
y = c(rnorm(10,2*x,1),95)
par(mfrow=c(1,2))
plot(x,y, ylim= c(0,100), xlim = c(0,15), pch=19)
abline(lm(y~x), col="darkblue")
plot(x[-11],y[-11], ylim= c(0,100), xlim = c(0,15), pch=19)
abline(lm(y[-11]~x[-11]), col="darkblue")
```


y
x
0
20
40
60
80
100
0
5
10
15


y[−11]
x[−11]
0
20
40
60
80
100
0
5
10
15

Note el cambio en los coeficientes de regresión

```
library(broom)
lm(y~x) |> tidy()
```

```
# A tibble: 2 x 5
  term        estimate std.error statistic   p.value
  <chr>          <dbl>     <dbl>     <dbl>     <dbl>
1 (Intercept)   -20.2      6.18      -3.27 0.00975
2 x               6.64     0.939      7.07 0.0000588
```

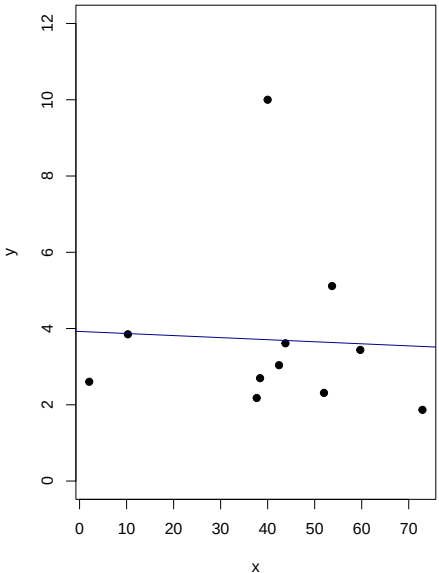
```
lm(y[-11]~x[-11]) |> tidy()
```

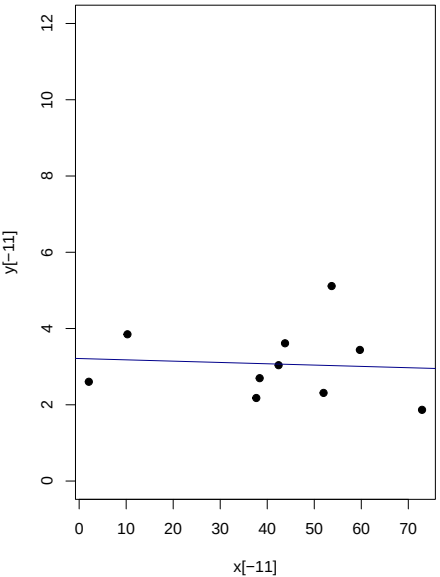
```
# A tibble: 2 x 5
  term        estimate std.error statistic    p.value
  <chr>          <dbl>     <dbl>     <dbl>      <dbl>
1 (Intercept)    0.298     0.876     0.340 0.743
2 x[-11]         1.91      0.175    10.9   0.00000438
```

Ejemplo 2

Outlier, no leverage y valor influencial

```
set.seed(111)
x = c(runif(10,1,100),40)
y = c(rnorm(10,3+0.005*x,1),10)
par(mfrow=c(1,2))
plot(x,y, ylim=c(0,12), pch=19);abline(lm(y~x), col="darkblue")
plot(x[-11],y[-11], ylim=c(0,12), pch=19)
abline(lm(y[-11]~x[-11]), col="darkblue")
```


y
x
0
2
4
6
8
10
12
0
10
20
30
40
50
60
70


y[−11]
x[−11]
0
2
4
6
8
10
12
0
10
20
30
40
50
60
70

Note el nulo cambio ("muy pequeño") en los coeficientes de regresión, pero sí cambian los errores estándar

```
lm(y~x) |> tidy()
```

```
# A tibble: 2 x 5
  term        estimate std.error statistic p.value
  <chr>          <dbl>     <dbl>     <dbl>   <dbl>
1 (Intercept)  3.92       1.70       2.31   0.0463
2 x           -0.00540    0.0373    -0.145  0.888
```

```
lm(y[-11]~x[-11]) |> tidy()
```

```
# A tibble: 2 x 5
  term        estimate std.error statistic p.value
  <chr>          <dbl>     <dbl>     <dbl>   <dbl>
1 (Intercept)  3.21       0.731      4.40  0.00229
2 x[-11]      -0.00344    0.0159    -0.217 0.834
```

Ejemplo 3

Identifique gráficamente si en este caso se trata de outlier(s), leverage(s) y/o punto(s) influencial(es)

```
set.seed(111)
x = c(runif(12,1,100),50,70)
y = c(rnorm(12,3+0.005*x,1),10,11)
par(mfrow=c(1,2))
plot(x,y, ylim=c(0,12), pch=19);abline(lm(y~x), col="darkblue")
plot(x[-13],y[-13], ylim=c(0,12), pch=19)
abline(lm(y[-13]~x[-13]), col="darkblue")
```

y
x
0
2
4
6
8
10
12
0
10
20
30
40
50
60
70

y[−13]
x[−13]
0
2
4
6
8
10
12
0
10
20
30
40
50
60
70

```r
lm(y~x) |> tidy()
```

```
# A tibble: 2 x 5
  term        estimate std.error statistic p.value
  <chr>          <dbl>     <dbl>     <dbl>   <dbl>
1 (Intercept)   2.56      2.04       1.26    0.233
2 x             0.0313    0.0406     0.772   0.455
```

```r
lm(y[-13]~x[-13]) |> tidy()
```

```
# A tibble: 2 x 5
  term        estimate std.error statistic p.value
  <chr>          <dbl>     <dbl>     <dbl>   <dbl>
1 (Intercept)   2.31      1.70       1.36    0.202
2 x[-13]        0.0268    0.0339     0.791   0.446
```

Residuales

- Recordemos que nuestro modelo está definido como:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$$

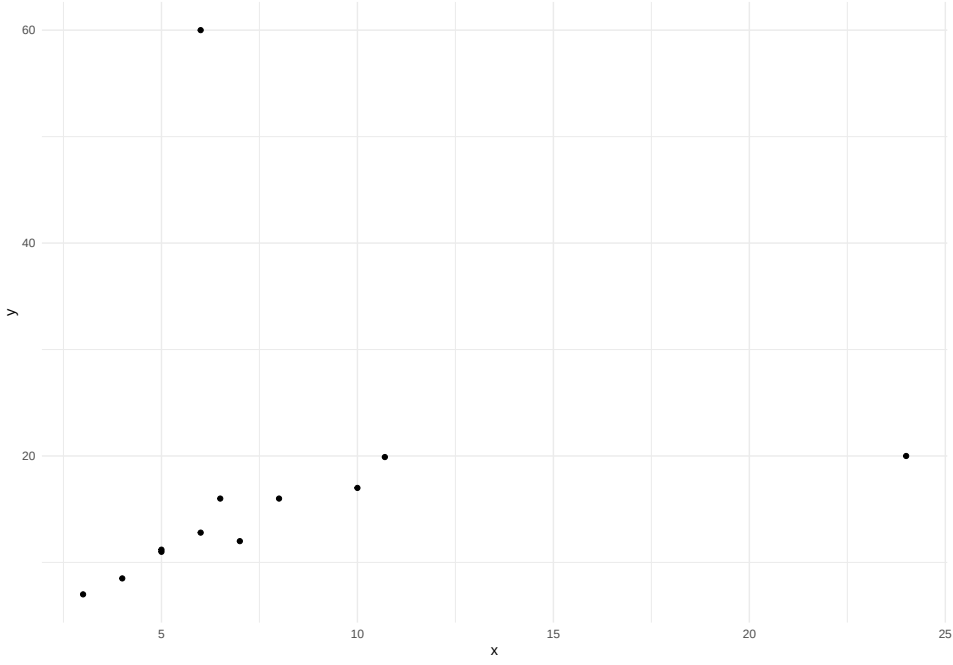
- El vector ϵ contiene los errores del modelo, que son representados en la muestra por los residuales
- Los residuales han sido importantes en la verificación de supuestos y ahora lo serán para determinar outliers y valores influenciales

```r
x = c(3,5,10,4,7,6,8,6,5,24,6.5,10.7)
y = c(7,11,17,8.5,12,12.8,16,60,11.2,20,16,19.9)
data.frame(x,y)
```

```
      x    y
1   3.0  7.0
2   5.0 11.0
3  10.0 17.0
4   4.0  8.5
5   7.0 12.0
6   6.0 12.8
7   8.0 16.0
8   6.0 60.0
9   5.0 11.2
10 24.0 20.0
11  6.5 16.0
12 10.7 19.9
```

```r
library(dplyr)
library(ggplot2)
data.frame(x,y)  |>
  ggplot(aes(x=x,y=y))+
  geom_point()+
  theme_minimal()

lm(y~x) -> modelo
```


60
40
20
y
5
10
15
20
25
x

Residual estandarizado

También conocidos como residuales estudentizados de manera interna, se define como:

$$d_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}\sqrt{1 - h_{ii}}}$$

donde: - e_i es el i-ésimo residual

- h_{ii} es el i-ésimo leverage (i-ésimo término de la diagonal de la matriz hat)
- $\hat{\sigma}$ es la estimación de la desviación estándar, recordando que para un modelo con n observaciones y k coeficientes de regresión.

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^{n} e_j^2 = CME$$

La media de un residual estandarizado es 0 y su varianza es 1. Además, asumiendo normalidad, valores por encima de 2, o por debajo de -2 son considerados outliers.

```
modelo |> resid() -> r
summary(modelo)$sigma -> s
modelo |> model.matrix() -> X
X %*% solve(t(X) %*% X) %*% t(X) -> H
(r/(s*sqrt(1-diag(H)))) -> res_stand
res_stand |> round(2)
```

```
    1     2     3     4     5     6     7     8     9    10    11    12
-0.68 -0.42 -0.09 -0.58 -0.38 -0.30 -0.12  3.11 -0.40 -0.46 -0.08  0.10
```

Nota: se redondea solo con la finalidad de mostrar los residuales en la diapositiva.

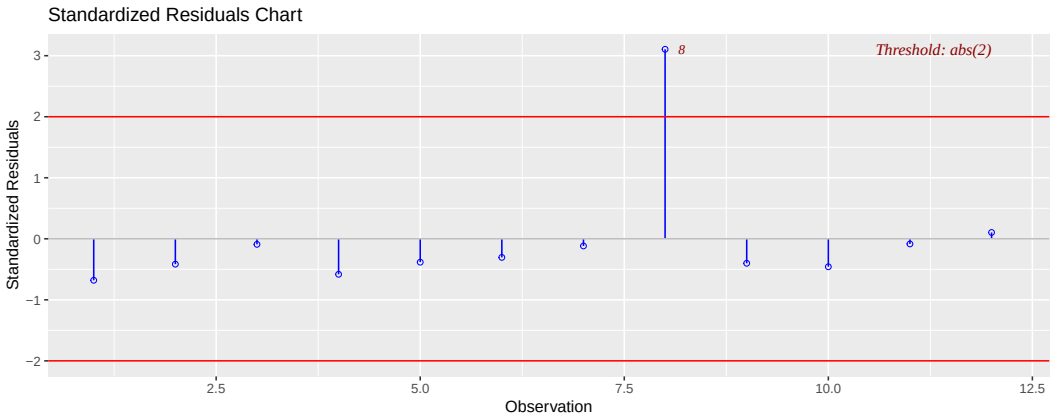
```
modelo |> rstandard() |> round(2) |> abs()
```

```
   1    2    3    4    5    6    7    8    9   10   11   12
0.68 0.42 0.09 0.58 0.38 0.30 0.12 3.11 0.40 0.46 0.08 0.10
```

```
(modelo |> rstandard() |> round(2) |> abs()) > 2
```

```
    1     2     3     4     5     6     7     8     9    10    11    12
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE
```

```
library(olsrr)
modelo |> ols_plot_resid_stand()
```



Residual estudentizado

Sin embargo, de haber outliers, los residuales estandarizados podrían no ser normales. Ante ello, se propone redefinir la expresión para la estimación del CME, retirando la i-ésima observación. Así, el residual estudentizado (externamente) sería:

$$t_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}_{(i)}\sqrt{1-h_{ii}}}$$

donde:

$$\hat{\sigma}_{(i)} = \frac{1}{n-k-1}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} e_i^2 = CME_{(i)}$$

Rigen las mismas características que los residuales estandarizados: media cero, varianza 1 y valores por encima de 2 o por debajo de -2 son considerados outliers.

```r
# residual estudentizado 1
lm(y[-1]~x[-1]) -> modelo_1
summary(modelo_1)$sigma -> s_1
r[1]/(s_1*sqrt(1-H[1,1]))
```

```
         1
-0.6603354
```

```r
# residual estudentizado 2
lm(y[-2]~x[-2]) -> modelo_2
summary(modelo_2)$sigma -> s_2
r[2]/(s_2*sqrt(1-H[2,2]))
```

```
         2
-0.3977445
```

```
length(x) -> n; 2 -> k
(res_stand*sqrt((n-k-1)/(n-k-res_stand**2))) |> round(2)
```

```
    1     2     3     4     5     6     7     8     9    10    11    12
-0.66 -0.40 -0.09 -0.56 -0.37 -0.29 -0.11 15.56 -0.38 -0.44 -0.08  0.10
```

```
modelo |> rstudent() |> round(2)
```

```
    1     2     3     4     5     6     7     8     9    10    11    12
-0.66 -0.40 -0.09 -0.56 -0.37 -0.29 -0.11 15.56 -0.38 -0.44 -0.08  0.10
```

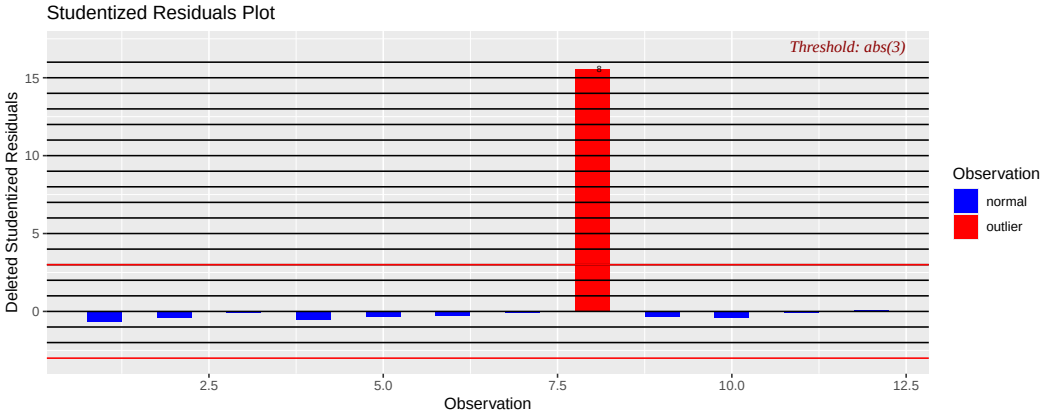
```r
library(MASS)
modelo |> studres() |> round(2) |> abs()
```

```
    1     2     3     4     5     6     7     8     9    10    11    12
 0.66  0.40  0.09  0.56  0.37  0.29  0.11 15.56  0.38  0.44  0.08  0.10
```

```r
(modelo |> studres() |> round(3) |> abs()) > 2
```

```
    1     2     3     4     5     6     7     8     9    10    11    12
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE
```

```
modelo |> ols_plot_resid_stud()
```



Leverages

Sabemos que:

$$\hat{y} = \mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{y}$$

Es decir:

$$\hat{y}_i = h_{i1}y_1 + h_{i2}y_2 + ... + h_{ii}y_i + ... + h_{in}y_n$$

El valor h_{ii} es conocido como el leverage de la i-ésima observación y mide la influencia de y_i en la estimación $\hat{y}_i$. Geométricamente es la distancia estandarizada de la i-ésima observación al centroide de espacio X.

Regla sugerida:

- Se define:

$$\overline{h} = \frac{\sum_i h_{ii}}{n} = \frac{rango(\mathbf{H})}{n} = \frac{rango(\mathbf{X})}{n} = \frac{k}{n}$$

- Entonces, una observación podrá ser considerada como un leverage si $h_{ii} > 2\frac{k}{n}$, donde k es el número de coeficientes de regresión y n es el tamaño de muestra, siempre y cuando $2\frac{k}{n} < 1$
- ¿En qué situación no se cumpliría que $2\frac{k}{n} < 1$?
- Vea la matriz hat en la siguiente diapositiva

```
modelo |> model.matrix() -> X
X %*% solve(t(X) %*% X) %*% t(X) -> H
H
```

```
             1           2           3           4           5           6
1   0.15544812  0.12621239  0.05312309  0.14083026  0.09697667  0.111594532
2   0.12621239  0.10882899  0.06537048  0.11752069  0.09144559  0.100137289
3   0.05312309  0.06537048  0.09598898  0.05924679  0.07761788  0.071494182
4   0.14083026  0.11752069  0.05924679  0.12917547  0.09421113  0.105865911
5   0.09697667  0.09144559  0.07761788  0.09421113  0.08591451  0.088680047
6   0.11159453  0.10013729  0.07149418  0.10586591  0.08868005  0.094408668
7   0.08235881  0.08275389  0.08374158  0.08255635  0.08314896  0.082951425
8   0.11159453  0.10013729  0.07149418  0.10586591  0.08868005  0.094408668
9   0.12621239  0.10882899  0.06537048  0.11752069  0.09144559  0.100137289
10 -0.15152697 -0.05631334  0.18172076 -0.10392015  0.03890030 -0.008706517
11  0.10428560  0.09579144  0.07455603  0.10003852  0.08729728  0.091544357
12  0.04289058  0.05928629  0.10027557  0.05108844  0.07568200  0.067484148
             7           8           9          10          11          12
1   0.08235881  0.111594532  0.12621239 -0.151526974 0.10428560 0.04289058
2   0.08275389  0.100137289  0.10882899 -0.056313336 0.09579144 0.05928629
3   0.08374158  0.071494182  0.06537048  0.181720759 0.07455603 0.10027557
4   0.08255635  0.105865911  0.11752069 -0.103920155 0.10003852 0.05108844
5   0.08314896  0.088680047  0.09144559  0.038900302 0.08729728 0.07568200
6   0.08295143  0.094408668  0.10013729 -0.008706517 0.09154436 0.06748415
7   0.08334650  0.082951425  0.08275389  0.086507121 0.08305019 0.08387986
8   0.08295143  0.094408668  0.10013729 -0.008706517 0.09154436 0.06748415
9   0.08275389  0.100137289  0.10882899 -0.056313336 0.09579144 0.05928629
10 0.08650712 -0.008706517 -0.05631334  0.848216226 0.01509689 0.21504553
11 0.08305019  0.091544357  0.09579144  0.015096893 0.08942082 0.07158307
12 0.08387986  0.067484148  0.05928629  0.215045533 0.07158307 0.10601406
```

Evaluando:

```
length(x) -> n; 2 -> k
diag(H) |> as.vector()
```

```
 [1] 0.15544812 0.10882899 0.09598898 0.12917547 0.08591451 0.09440867
 [7] 0.08334650 0.09440867 0.10882899 0.84821623 0.08942082 0.10601406
```

```
2*k/n
```

```
[1] 0.3333333
```

```
diag(H) > 2*k/n
```

```
    1     2     3     4     5     6     7     8     9    10    11    12
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE
```

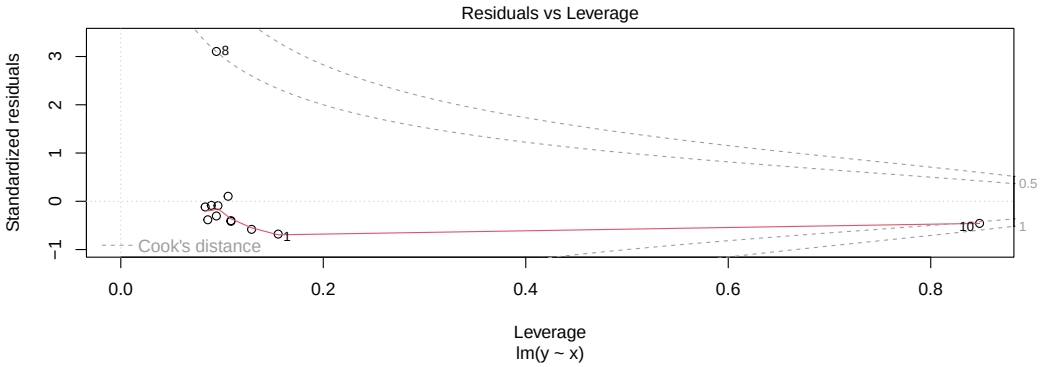
¿Todo leverage es outlier?

```
data.frame(leverage = diag(H)>2*k/n,
           outlier = abs(modelo |> rstudent())>2)
```

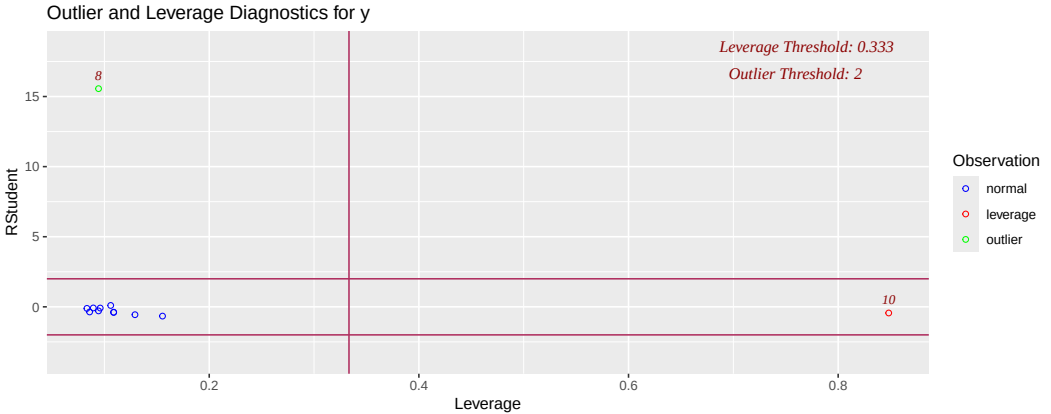
```
   leverage outlier
1     FALSE   FALSE
2     FALSE   FALSE
3     FALSE   FALSE
4     FALSE   FALSE
5     FALSE   FALSE
6     FALSE   FALSE
7     FALSE   FALSE
8     FALSE    TRUE
9     FALSE   FALSE
10     TRUE   FALSE
11    FALSE   FALSE
12    FALSE   FALSE
```

Gráficamente

```
modelo |> plot(which=5)
```



```
modelo |> ols_plot_resid_lev()
```



Distancia de Cook

Mide la influencia de cada observación en los coeficientes de regresión estimados

$$D_i = \frac{\left(\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta}\right)' \mathbf{X}'\mathbf{X} \left(\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta}\right)}{k\hat{\sigma}^2} = \frac{d_i^2 h_{ii}}{k(1 - h_{ii})}$$

donde:

- $\hat{\beta}_{(i)}$ es el valor estimado del vector de coeficientes β al no ser considerada la i-ésima observación.
- d_i es el i-ésimo residual estandarizado.
- h_{ii} es el i-ésimo leverage.
- k es el número de coeficientes estimados de regresión.

Regla sugerida

- El valor de D_i puede compararse con $F_{k,n-k}$ de tal modo que:
  - Si $D_i = F_{0.5,k,n-k}$, el estimador $\widehat{\beta}_{(i)}$ se moverá hacia el borde de la región de confianza conjunta de nivel $1-\alpha$ para β.
  - Si $D_i > F_{0.5,k,n-k}$, la observación es considerada influyente.
- En la práctica rara vez se usa la comparación con F, sino que se aplica la regla empírica: es una observación influyente si $D_i > \frac{4}{n}$ (muestras pequeñas) o $D_i > 1$ (muestras grandes).

```r
# ¿observación 1 es influyente?
modelo = lm(y~x)
modelo_sin = lm(y[-1]~x[-1])
modelo |> coef() -> beta
modelo_sin |> coef() -> beta_sin
modelo |> model.matrix() -> X
(modelo |> sigma())**2 -> cme
2 -> k
(t(beta-beta_sin)%*%t(X)%*%X%*%(beta-beta_sin))/(k*cme)
```

```
            [,1]
[1,] 0.04252736
```

```r
modelo |> rstandard() -> rsta
modelo |> hatvalues() -> h
(rsta[1]**2*h[1])/(k*(1-h[1]))
```

```
         1
0.04252736
```

```
((rsta**2*h)/(k*(1-h))) |> round(2) |> as.vector()
```

```
 [1] 0.04 0.01 0.00 0.03 0.01 0.00 0.00 0.50 0.01 0.59 0.00 0.00
```

```
modelo |> cooks.distance() |> round(2) |> as.vector()
```

```
 [1] 0.04 0.01 0.00 0.03 0.01 0.00 0.00 0.50 0.01 0.59 0.00 0.00
```

```
(modelo |> cooks.distance()) > 1
```

```
    1     2     3     4     5     6     7     8     9    10    11    12
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
```

```
qf(0.5,k,n-k)
```

```
[1] 0.7434918
```

```
(modelo |> cooks.distance()) > qf(0.5,k,n-k)
```

```
    1     2     3     4     5     6     7     8     9    10    11    12
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
```

```
4/n
```

```
[1] 0.3333333
```

```
(modelo |> cooks.distance()) > 4/n
```

```
    1     2     3     4     5     6     7     8     9    10    11    12
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE  TRUE FALSE FALSE
```

¿Entre qué valores fluctúa F? Interprete los valores de la siguiente tabla:

```
alfas = c(0.01,0.05,0.1,0.25,0.5,0.66,0.75,0.90,0.95,0.99)
data.frame(alfas,valorF=qf(alfas,k,n-k))
```

```
   alfas     valorF
1   0.01 0.01006044
2   0.05 0.05155730
3   0.10 0.10647844
4   0.25 0.29611921
5   0.50 0.74349177
6   0.66 1.20403474
7   0.75 1.59753955
8   0.90 2.92446596
9   0.95 4.10282102
10  0.99 7.55943216
```

Supongamos k = 5 y n = 700. Interprete los valores de la siguiente tabla:

```
alfas = c(0.01,0.05,0.1,0.25,0.5,0.66,0.75,0.90,0.95,0.99)
data.frame(alfas,valorF=qf(alfas,5,700-5))
```

```
   alfas    valorF
1   0.01 0.1106651
2   0.05 0.2287904
3   0.10 0.3217405
4   0.25 0.5347960
5   0.50 0.8711387
6   0.66 1.1355399
7   0.75 1.3285961
8   0.90 1.8555771
9   0.95 2.2269931
10  0.99 3.0436173
```

Haciendo el proceso inverso: Sabemos que $D_8 = 0.5025745143$, ¿qué porcentaje mínimo de variación tendría $\hat{\beta}$ en la región de confianza si retiramos la observación 8?

```
pf(0.5025745143,k,n-k) # pf(D,k,n-k)
```

```
[1] 0.3805299
```

Sabemos que $D_{10} = 0.5869709889$, ¿qué porcentaje mínimo de variación tendría $\hat{\beta}$ en la región de confianza si retiramos la observación 10?

```
pf(0.5869709889,k,n-k) # pf(D,k,n-k)
```

```
[1] 0.4259259
```

```r
library(car)
modelo = lm(y~x); modelo |> coef()
```

```
(Intercept)           x
 15.1572753   0.3100073
```

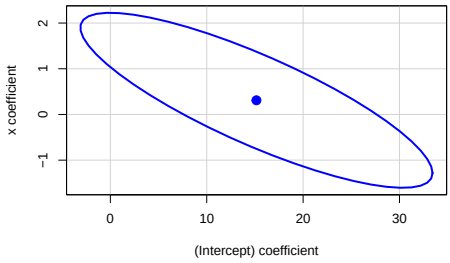
```r
modelo_sin_obs8 = lm(y[-8]~x[-8]); modelo_sin_obs8 |> coef()
```

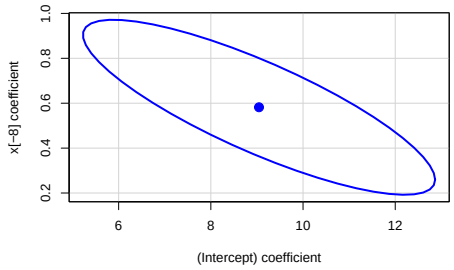
```
(Intercept)       x[-8]
  9.0448862   0.5819087
```

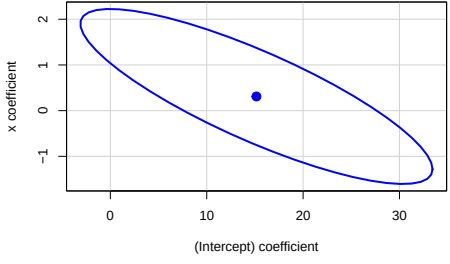
```r
modelo_sin_obs10 = lm(y[-10]~x[-10]); modelo_sin_obs10 |> coef()
```

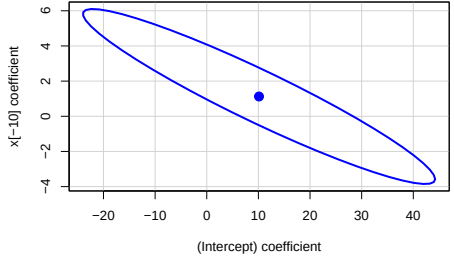
```
(Intercept)      x[-10]
  10.120156    1.124695
```

```r
par(mfrow=c(2,2))
modelo |> confidenceEllipse(levels = 0.9)
modelo_sin_obs8 |> confidenceEllipse(levels = 0.9)
modelo |> confidenceEllipse(levels = 0.9)
modelo_sin_obs10 |> confidenceEllipse(levels = 0.9)
```

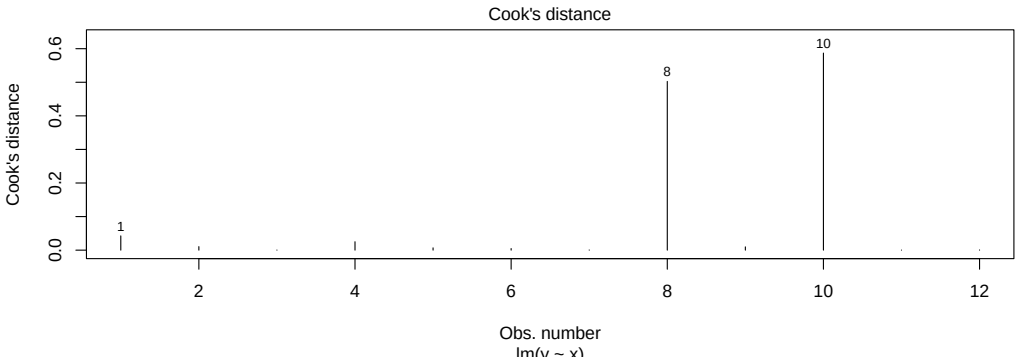

x coefficient
2
1
0
−1
0
10
20
30
(Intercept) coefficient


x[−8] coefficient
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
6
8
10
12
(Intercept) coefficient

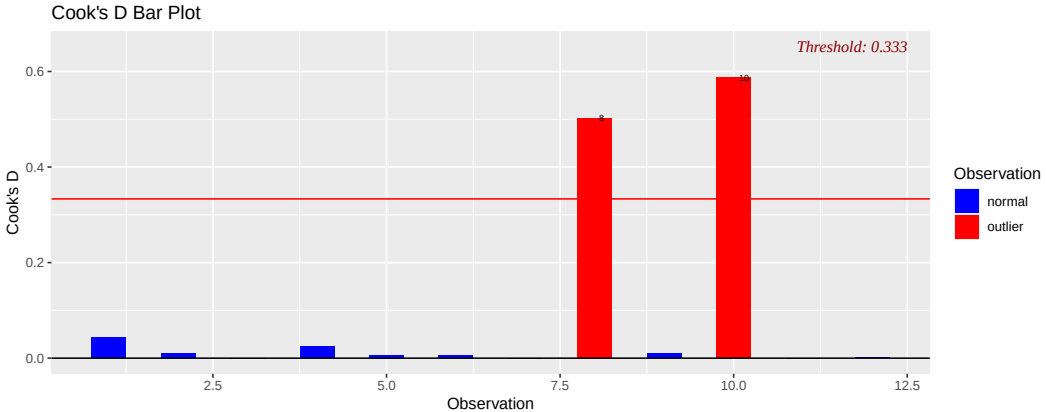

x coefficient
2
1
0
−1
0
10
20
30
(Intercept) coefficient


x[−10] coefficient
6
4
2
0
−2
−4
−20
−10
0
10
20
30
40
(Intercept) coefficient

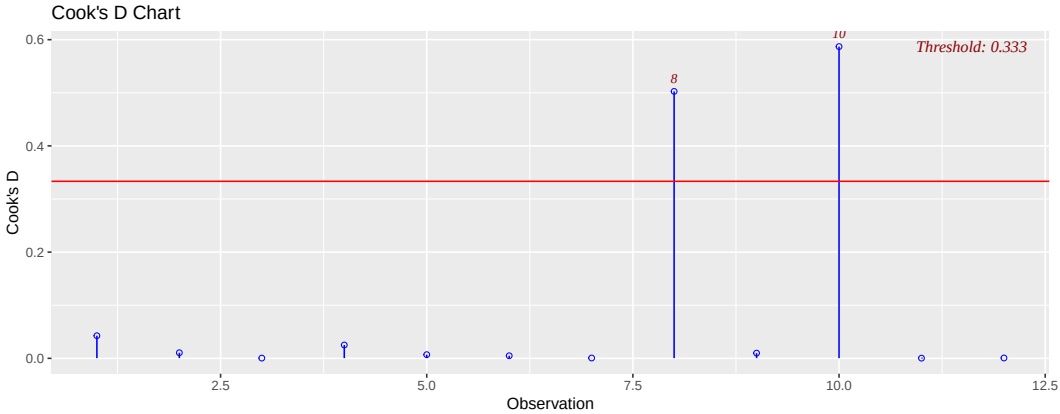
```
modelo |> plot(which=4)
```



```
modelo |> ols_plot_cooksd_bar()
```



```
modelo |> ols_plot_cooksd_chart()
```



DFBETAS

De manera similar a la distancia de Cook, permite evaluar cuánto cambia el j-ésimo coeficiente de regresión si se elimina la i-ésima observación. Se tiene que:

$$\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(i)} = \frac{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_i\epsilon_i}{1 - h_{ii}}$$

donde:

- $\hat{\beta}$ es la estimación de β en el conjunto de datos completo
- $\hat{\beta}_{(i)}$ cuando se elimina la i-ésima observación

¿Cuál es el efecto de los leverages y los residuales en la variación de $\widehat{\beta}$ al eliminar la i-ésima observación? Ahora, escalamos:

$$DFBETAS_{i,j} = \frac{\widehat{\beta}_j - \widehat{\beta}_{j(i)}}{\sqrt{\widehat{\sigma}^2_{(i)} C_{jj}}}$$

donde:

- $\widehat{\beta}_j$ es la estimación de β_j en el conjunto de datos completo
- $\widehat{\beta}_{j(i)}$ es la estimación de β_j cuando se elimina la i-ésima observación
- $\widehat{\sigma}^2_{(i)}$ es el CME al eliminat la i-ésima observación
- C_{jj} es el j-ésimo elemento de la diagonal de $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$

Así, DFBETAS es una matriz de dimensión $n \times k$

Regla sugerida: Si un punto es valor influencial, entonces $|DBETA_{i,j}| > \frac{2}{\sqrt{n}}$

```
modelo = lm(y~x)
modelo_sin = lm(y[-1]~x[-1])
modelo |> coef() -> beta
modelo_sin |> coef() -> beta_sin
beta - beta_sin
```

```
(Intercept)           x
 -2.1444672   0.1572868
```

```
modelo |> model.matrix() -> X
modelo |> residuals() -> residuales
modelo |> hatvalues() -> h
(solve(t(X)%*%X)%*%X[1,]*residuales[1])/(1-h[1])
```

```
                  [,1]
(Intercept) -2.1444672
x            0.1572868
```

```
(modelo_sin |> sigma())**2 -> cme_sin
solve(t(X)%*%X) -> C
(beta - beta_sin)/sqrt(cme_sin*diag(C))
```

```
(Intercept)           x
 -0.2756912   0.1929583
```

```
modelo |> dfbetas()
```

```
    (Intercept)             x
1  -0.275691211  0.1929583403
2  -0.123523176  0.0672754784
3  -0.006071150 -0.0102087577
4  -0.203638872  0.1288329898
5  -0.077603339  0.0194540553
6  -0.075649967  0.0321127060
7  -0.018349996 -0.0004230407
8   4.053966371 -1.7208709421
9  -0.119122513  0.0648787078
10  0.639178659 -0.9865042898
11 -0.018923427  0.0065534903
12  0.003665428  0.0156715670
```

Verificando las observaciones que tienen DFBETA(s) alto:

```
length(x) -> n
2/sqrt(n)
```

```
[1] 0.5773503
```

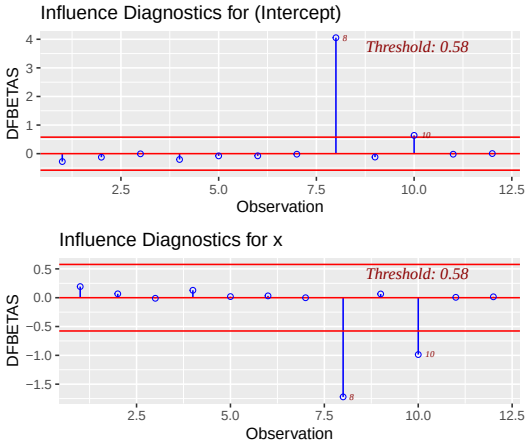
```
(beta - beta_sin)/sqrt(cme_sin*C[1,1]) >= 2/sqrt(n)
```

```
(Intercept)           x
      FALSE       FALSE
```

```
(abs(modelo |> dfbetas())) >= 2/sqrt(n)
```

```
   (Intercept)     x
1        FALSE FALSE
2        FALSE FALSE
3        FALSE FALSE
4        FALSE FALSE
5        FALSE FALSE
6        FALSE FALSE
7        FALSE FALSE
8         TRUE  TRUE
9        FALSE FALSE
10        TRUE  TRUE
11       FALSE FALSE
12       FALSE FALSE
```

```
modelo |> ols_plot_dfbetas()
```

DFFITS

¿Qué sucede con el valor de $\hat{y}$ si se elimina la i-ésima observación?

$$DFFITS_i = \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{(i)}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{(i)} h_{ii}}} = t_i \times \sqrt{\frac{h_{ii}}{1 - h_{ii}}}$$

donde:

- $\hat{y}_i$ es el valor ajustado para la i-ésima observación en el modelo con datos completos.
- $\hat{y}$ es el valor ajustado para la i-ésima observación en el modelo cuando se omite la i-ésima observación.
- $\hat{\sigma}^2_{(i)}$ es el CME en el modelo sin la i-ésima observación
- h_{ii} es el i-ésimo valor de la diagonal de la matriz hat de los datos completos.

Puede interpretarse como el número de desviaciones estándar que $\hat{y}_i$ cambia si la i-ésima observación es removida.

```
modelo |> predict() -> y_pred
x_sin1 = x[-1]
y_sin1 = y[-1]
modelo_sin1 = lm(y_sin1 ~ x_sin1, data.frame(x_sin1,y_sin1))
modelo_sin1 |> predict(data.frame(x_sin1 = x[1])) -> y_pred_sin
(modelo_sin1 |> sigma())**2 -> cme_sin
modelo |> hatvalues() -> h
(y_pred[1]-y_pred_sin[1])/sqrt(cme_sin*h[1])
```

```
         1
-0.2832984
```

```
modelo |> rstudent() -> t
t[1]*sqrt(h[1]/(1-h[1]))
```

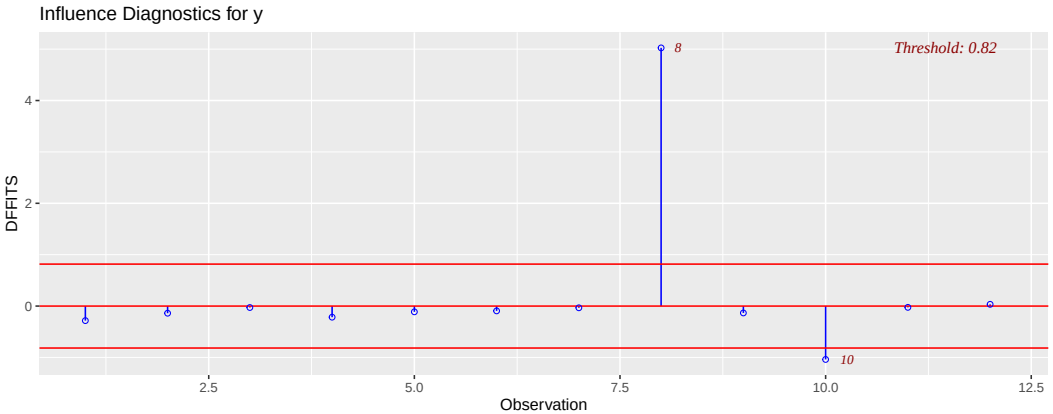
```
         1
-0.2832984
```

```
modelo |> dffits() |> round(3)
```

```
     1      2      3      4      5      6      7      8      9     10
-0.283 -0.139 -0.028 -0.216 -0.112 -0.094 -0.034  5.024 -0.134 -
1.039 -0.025
    12
 0.034
```

```
2 -> k
length(x) -> n
(abs(modelo |> dffits())) >= 2*sqrt(k/n)
```

```
    1     2     3     4     5     6     7     8     9    10    11    12
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE  TRUE FALSE FALSE
```


Influence Diagnostics for y
Threshold: 0.82
8
10
DFFITS
4
2
0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
Observation

COVRATIO

El indicador COVRATIO (covariance ratio) mide el efecto de la i-ésima observación en la precisión de los estimadores. La varianza generalizada es una medida de dispersión de un vector, así, la VG de $\widehat{\beta}$ es $|\hat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}|$. Esta medida se utiliza para definir el COVRATIO:

$$COVRATIO_i = \frac{\left|\hat{\sigma}^2_{(i)}(\mathbf{X}'_{(i)}\mathbf{X}_{(i)})^{-1}\right|}{|\hat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}|} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2_{(i)}}{\hat{\sigma}^2}\right)^k \left(\frac{1}{1-h_{ii}}\right)$$

¿Qué sucede si COVRATIO>1? ¿Y si es menor a 1? ¿Qué papel cumplen los leverages en los COVRATIOs?

Regla sugerida: Una observación presentará COVRATIO alto si: $|COVRATIO_i| > 1 + 3\frac{k}{n}$ o $|COVRATIO_i| < 1 - 3\frac{k}{n}$. La segunda condición está sujeta a que $n > 3k$.

```
x_sin1 = x[-1]
y_sin1 = y[-1]
modelo_sin1 = lm(y_sin1 ~ x_sin1, data.frame(x_sin1,y_sin1))
(modelo_sin1 |> sigma())**2 -> cme_sin
(modelo |> sigma())**2 -> cme
modelo |> model.matrix() -> X
det(cme_sin*solve(t(X[-1,])%*%X[-1,]))/det(cme*solve(t(X)%*%X))
```

```
[1] 1.329823
```

```
2 -> k
modelo |> hatvalues() -> h
(cme_sin/cme)**k*(1/(1-h[1]))
```

```
       1
1.329823
```

```
2 -> k
length(x) -> n
abs((cme_sin/cme)**k*(1/(1-h[1]))) > 1 + 3*k/n
```

```
    1
FALSE
```

```
n > 3*k
```

```
[1] TRUE
```

```
abs((cme_sin/cme)**k*(1/(1-h[1]))) < 1 - 3*k/n
```

```
    1
FALSE
```

```
modelo |> covratio() |> round(3)
```

```
    1     2     3     4     5     6     7     8     9    10    11    12
1.330 1.338 1.363 1.323 1.311 1.338 1.343 0.002 1.341 7.796 1.354 1.378
```

```
abs(modelo |> covratio()) > 1 + 3*k/n
```

```
    1     2     3     4     5     6     7     8     9    10    11    12
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE
```

```
abs(modelo |> covratio()) < 1 - 3*k/n
```

```
    1     2     3     4     5     6     7     8     9    10    11    12
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE
```

Resumen proporcionado por R:

```
modelo |> influence.measures()
```

```
Influence measures of
     lm(formula = y ~ x) :

     dfb.1_     dfb.x   dffit   cov.r   cook.d    hat inf
1  -0.27569  0.192958 -0.2833 1.32982 0.042527 0.1554
2  -0.12352  0.067275 -0.1390 1.33788 0.010548 0.1088
3  -0.00607 -0.010209 -0.0281 1.36340 0.000439 0.0960
4  -0.20364  0.128833 -0.2163 1.32335 0.025104 0.1292
5  -0.07760  0.019454 -0.1122 1.31126 0.006896 0.0859
6  -0.07565  0.032113 -0.0938 1.33808 0.004838 0.0944
7  -0.01835 -0.000423 -0.0337 1.34310 0.000628 0.0833
8   4.05397 -1.720871  5.0243 0.00175 0.502575 0.0944   *
9  -0.11912  0.064879 -0.1340 1.34113 0.009821 0.1088
10  0.63918 -0.986504 -1.0389 7.79559 0.586971 0.8482   *
11 -0.01892  0.006553 -0.0251 1.35387 0.000350 0.0894
12  0.00367  0.015672  0.0339 1.37800 0.000637 0.1060
```

Leverage $\rightarrow$ Residual $\rightarrow$ DFFITS $\rightarrow$ DFBETAS $\rightarrow$ Distancia de Cook $\rightarrow$ COVRATIO

Bibliografía

- Mendenhall, W. (2012). A Second Course in Statistics Regression Analysis. Pearson.
- Montgomery, D., Peck, E., Vining, G. (2012). Introduction to Linear Regression Analysis. Wiley.
- Rawlings, J. (1998). Applied Regression Analysis: A Research Tool. Springer.
- Weisberg, S. (2014) Applied Linear Regression. Wiley