Análisis de regresión

Capítulo 2: Análisis de regresión lineal múltiple

Mg. Sc. J. Eduardo Gamboa U.

Presentación

Hemos visto que es posible explicar la relación de dependencia entre un par de variables mediante una línea de regresión. En aplicaciones reales, la variable respuesta suele estar influenciada por más de una variable independiente, por lo que el modelo general adopta la forma:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_p, \varepsilon)$$

Ejemplo aplicado

Se busca estudiar el efecto lineal de la edad (años), el sexo (femenino / masculino) y los años de educación sobre el sueldo mensual (en miles de soles). Adicionalmente, se incorpora una variable ficticia X_4, generada al azar, para evaluar su comportamiento en el modelo. Se dispone de una muestra de $n = 24$ observaciones.

Una primera etapa del análisis consiste en explorar la relación entre la variable respuesta y cada variable explicativa mediante diagramas de dispersión.

Modelo de regresión lineal múltiple

Dadas p variables independientes $X_1, \dots, X_p$ y una variable respuesta Y, el modelo de regresión lineal múltiple se define como:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1,i} + \beta_2 X_{2,i} + \cdots + \beta_p X_{p,i} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

donde:

- β_0 es el intercepto
- $\beta_1, \dots, \beta_p$ son los coeficientes de regresión
- ε_i es el término de error aleatorio, con

$$E(\varepsilon_i) = 0, \qquad Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$$

Si las variables X_j son aleatorias, sus observaciones deben ser al menos independientes (Montgomery, Peck y Vining, 2012).

En notación matricial:

$$\mathbf{y}_{n\times 1} = \mathbf{X}_{n\times(p+1)}\beta_{(p+1)\times 1} + \varepsilon_{n\times 1}$$

Nuestro objetivo es estimar β y σ^2 a partir de la muestra.

```r
library(readxl)
(datos = read_excel('U2_datos_1.xlsx'))
```

```
# A tibble: 24 x 5
   Sueldo Educacion Sexo   Edad    X4
    <dbl>     <dbl> <chr> <dbl> <dbl>
 1   4.22        12 M        31    10
 2   5.89        18 M        23    -3
 3   9.88        20 M        50    -6
 4   2.35         7.5 F      19    -4
 5   7           20 F        39    -2
 6   1.25         9 M        18     7
 7   6.78         3 M        39    -7
 8   5.19        15 F        32     8
 9   8.16        21 F        35     5
10   6.1         18 F        34     7
# i 14 more rows
```

Inferencia

Estimación puntual

El estimador de mínimos cuadrados ordinarios del vector de coeficientes es:

$$\widehat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

Además:

$$E(\widehat{\beta}) = \beta \qquad Var(\widehat{\beta}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

El estimador de la varianza del error es:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{SC_{Error}}{n-k}$$

donde $k = p + 1$ es el número de coeficientes estimados.

```r
library(dplyr)
y = datos$Sueldo
X = model.matrix(Sueldo~Educacion+Sexo+Edad+X4,data=datos)
solve(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%y
```

```
                    [,1]
(Intercept) -0.73053615
Educacion    0.15695057
SexoM        0.82211261
Edad         0.10462774
X4          -0.04537505
```

```r
modelo = lm(Sueldo ~ ., datos)
(beta  = coef(modelo))
```

```
(Intercept)    Educacion        SexoM         Edad           X4
-0.73053615  0.15695057  0.82211261  0.10462774 -0.04537505
```

```r
(sigma = summary(modelo)$sigma)
```

```
[1] 1.13476
```

Estimación intervalar

Si g_{ii} es el elemento i-ésimo de la diagonal de $(X'X)^{-1}$, entonces:

$$IC(\beta_i) = \hat{\beta}_i \pm t_{1-\alpha/2,n-k}\hat{\sigma}\sqrt{g_{ii}}$$

```r
G    = solve(t(X)%*%X)
g    = G |> diag()
n    = datos |> nrow()
k    = beta |> length()
valt = qt(0.975, 24-5)
beta - valt*sigma*sqrt(g)
```

```
(Intercept)   Educacion       SexoM        Edad          X4
-2.58809073  0.02638407 -0.18289392  0.04174457 -0.12999986
```

```r
beta + valt*sigma*sqrt(g)
```

```
(Intercept)   Educacion       SexoM        Edad          X4
 1.12701843  0.28751706  1.82711914  0.16751091  0.03924976
```

```
modelo |> confint()
```

```
                  2.5 %     97.5 %
(Intercept) -2.58809073 1.12701843
Educacion    0.02638407 0.28751706
SexoM       -0.18289392 1.82711914
Edad         0.04174457 0.16751091
X4          -0.12999986 0.03924976
```

Prueba de hipótesis global

Se contrasta:

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$

H_1 : Al menos un $\beta_j \neq 0$

$$GL_{Total} = n - 1 \qquad GL_{Reg} = k - 1 \qquad GL_{Error} = n - k$$

$$SC_{Total} = (\mathbf{y} - \overline{y}\mathbf{1})'(\mathbf{y} - \overline{y}\mathbf{1}) \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\mathbf{1}'\mathbf{y}$$

$$SC_{Reg} = (\hat{\mathbf{y}} - \overline{y}\mathbf{1})'(\hat{\mathbf{y}} - \overline{y}\mathbf{1})$$

$$SC_{Error} = \mathbf{e}'\mathbf{e} = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})'(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$$

$$CM_{Reg} = \frac{SC_{Reg}}{GL_{Reg}} \qquad CM_{Error} = \frac{SC_{Error}}{GL_{Error}}$$

El estadístico de prueba es:

$$F_{calc} = \frac{CM_{Reg}}{CM_{Error}}$$

Se rechaza H_0 si:

$$F_{calc} > F_{1-\alpha,k-1,n-k}$$

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$

H_1 : Al menos un $\beta_j \neq 0, j = 1, 2, 3, 4$

Grados de libertad

```
(GLTotal = n - 1)
```

```
[1] 23
```

```
(GLReg   = k - 1)
```

```
[1] 4
```

```
(GLError = n - k)
```

```
[1] 19
```

Sumas de cuadrados

```
uno = rep(1,n)
ybarra  = as.numeric(1/n*(uno)%*%y)
yhat    = predict(modelo)
(SCTotal = t(y - ybarra*uno)%*%(y - ybarra*uno))
```

```
          [,1]
[1,] 103.0379
```

```
(SCReg   = t(yhat - ybarra*uno)%*%(yhat - ybarra*uno))
```

```
          [,1]
[1,] 78.57194
```

```
(SCError = t(y - yhat)%*%(y-yhat))
```

```
          [,1]
[1,] 24.46592
```

Cuadrados medios

```
(CMReg   = SCReg / GLReg)
```

```
          [,1]
[1,] 19.64299
```

```
(CMError = SCError / GLError)
```

```
         [,1]
[1,] 1.28768
```

Estadístico de prueba

```
(Fcalc = CMReg / CMError)
```

```
          [,1]
[1,] 15.25455
```

Valor crítico:

```
qf(0.95,4,19)
```

```
[1] 2.895107
```

Pvalor:

```
pf(Fcalc,4,19, lower.tail = F)
```

```
              [,1]
[1,] 9.638667e-06
```

```
lm(y~X) |> aov() |> summary()
```

```
            Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
X            4  78.57  19.643   15.26 9.64e-06 ***
Residuals   19  24.47   1.288
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Prueba de hipótesis individual

$H_0 : \beta_i = 0$
$H_1 : \beta_i \neq 0$

```
library(broom)
modelo |> tidy()
```

```
# A tibble: 5 x 5
  term        estimate std.error statistic p.value
  <chr>          <dbl>     <dbl>     <dbl>   <dbl>
1 (Intercept)  -0.731     0.887     -0.823 0.421
2 Educacion     0.157     0.0624     2.52  0.0210
3 SexoM         0.822     0.480      1.71  0.103
4 Edad          0.105     0.0300     3.48  0.00249
5 X4           -0.0454    0.0404    -1.12  0.276
```

Coeficiente de determinación

```
summary(modelo)$r.squared
```

```
[1] 0.7625541
```

```
summary(modelo)$adj.r.squared
```

```
[1] 0.7125654
```

El ...% de la variabilidad de los sueldos es explicado por el sexo de la persona, su edad, sus años de educación y X_4

Criterio de información de Akaike

$$AIC = -2ln(L) + 2k$$

- Menor AIC $\rightarrow$ mejor modelo.
  - Solo se usa para comparar modelos sobre los mismos datos.
  - No indica calidad absoluta, solo comparativa.
  - Evita el sobreajuste
  - Diferencias menores a 2 unidades $\rightarrow$ modelos equivalentes

```
modelo |> AIC()
```

```
[1] 80.57051
```

```
modelo2 = lm(Sueldo ~ X4, datos)
modelo2 |> AIC()
```

```
[1] 108.6694
```

Estimación de la media de la respuesta

Para un vector de valores explicativos $\mathbf{x}$:

$$\hat{\mu} = \hat{y} = \mathbf{x}'\hat{\beta}$$

Intervalo de confianza:

$$IC(\mu|\mathbf{x}) = \hat{\mu} \pm t_{1-\alpha/2,n-k}\sqrt{\hat{\sigma}^2\mathbf{x}'(X'X)^{-1}\mathbf{x}}$$

Estimación del sueldo medio para una mujer de 35 años de edad, con 12 años de educación, y tomando $X_4 = 1$.

Puntual:

```
x0 = c(1, 12, 0, 35, 1)
yest = x0%*%beta
yest
```

```
         [,1]
[1,] 4.769467
```

Intervalar al 95% de confianza:

```
me = qt(0.975, n-k)*sqrt(sigma^2*t(x0)%*%solve(t(X)%*%X)%*%x0)
(LI = yest - me)
```

```
          [,1]
[1,] 3.944129
```

```
(LS = yest + me)
```

```
          [,1]
[1,] 5.594804
```

```r
predict(modelo,
        data.frame(Educacion = 12,
                   Sexo = "F",
                   Edad = 35,
                   X4 = 1),
        interval = "confidence")
```

```
       fit      lwr      upr
1 4.769467 3.944129 5.594804
```

$$IC(\mu|\mathbf{x}) = (3.94, 5.59)$$

Con un 95% de confianza, el sueldo medio de una mujer de 35 años de edad, con 12 años de educación, y tomando $X_4 = 1$ está contenido en el intervalo (3.94, 5.59) miles de soles.

```r
predict(modelo,
        data.frame(Educacion = c(12,7),
                   Sexo = c("F","M"),
                   Edad = c(35,28),
                   X4 = c(1,-2)),
        interval = "confidence")
```

```
       fit      lwr      upr
1 4.769467 3.944129 5.594804
2 4.210557 3.177470 5.243645
```

Predicción de un nuevo valor

El predictor puntual es:

$$\hat{y}_0 = \mathbf{x}'\hat{\beta}$$

Intervalo de predicción:

$$IP(y|\mathbf{x}) = \hat{y}_0 \pm t_{1-\alpha/2,n-k}\sqrt{\hat{\sigma}^2\,(1 + \mathbf{x}'(X'X)^{-1}\mathbf{x})}$$

Predicción del sueldo para una mujer de 35 años de edad, con 12 años de educación, y tomando $X_4 = 1$.

Puntual:

```
x0 = c(1, 12, 0, 35, 1)
yest = x0%*%beta
yest
```

```
         [,1]
[1,] 4.769467
```

Predicción intervalar al 95% de confianza:

```
me = qt(0.975, n-k)*sqrt(sigma^2*(1+t(x0)%*%solve(t(X)%*%X)%*%x0))
(LI = yest - me)
```

```
         [,1]
[1,] 2.255071
```

```
(LS = yest + me)
```

```
         [,1]
[1,] 7.283862
```

```r
predict(modelo,
        data.frame(Educacion = 12,
                   Sexo = "F",
                   Edad = 35,
                   X4 = 1),
        interval = "prediction")
```

```
       fit      lwr      upr
1 4.769467 2.255071 7.283862
```

$$IP(y|\mathbf{x}) = (2.255, 7.284)$$

Con un 95% de confianza, el sueldo predicho de una mujer de 35 años de edad, con 12 años de educación, y tomando $X_4 = 1$ está contenido en el intervalo (2.255,7.284) miles de soles.

Residuales

El vector de residuales es:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = (I - H)\mathbf{y}$$

donde:

$$H = X(X'X)^{-1}X'$$

El análisis de residuales permite verificar normalidad, homocedasticidad e independencia.

```r
H = X%*%solve(t(X)%*%X)%*%t(X)
e = (diag(n) - H)%*%y
e |> as.vector()
```

```
 [1] -0.5446927  0.4307501  1.1457749 -0.2660204  0.4202928 -1.8198056
 [7]  1.8194646  0.5811903  2.1594785  0.7657081  1.0019604  0.1048631
[13] -0.9479326 -0.2384626 -1.7944816 -0.1961957 -0.4135295 -0.4165775
[19]  0.1369553 -0.6101662  0.2032022 -1.1690284 -1.3551731  1.0024253
```

```r
modelo |> residuals() |> as.vector()
```

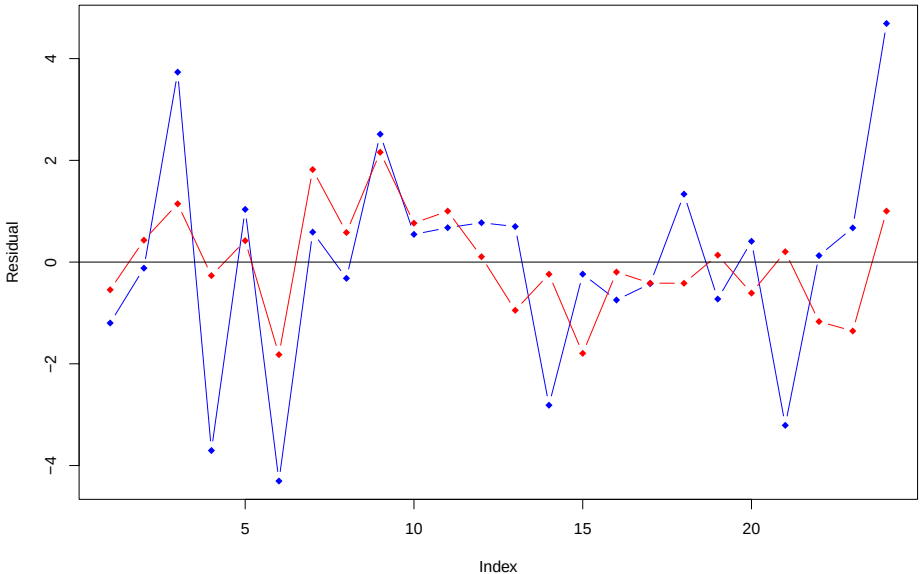
```
 [1] -0.5446927  0.4307501  1.1457749 -0.2660204  0.4202928 -1.8198056
 [7]  1.8194646  0.5811903  2.1594785  0.7657081  1.0019604  0.1048631
[13] -0.9479326 -0.2384626 -1.7944816 -0.1961957 -0.4135295 -0.4165775
[19]  0.1369553 -0.6101662  0.2032022 -1.1690284 -1.3551731  1.0024253
```

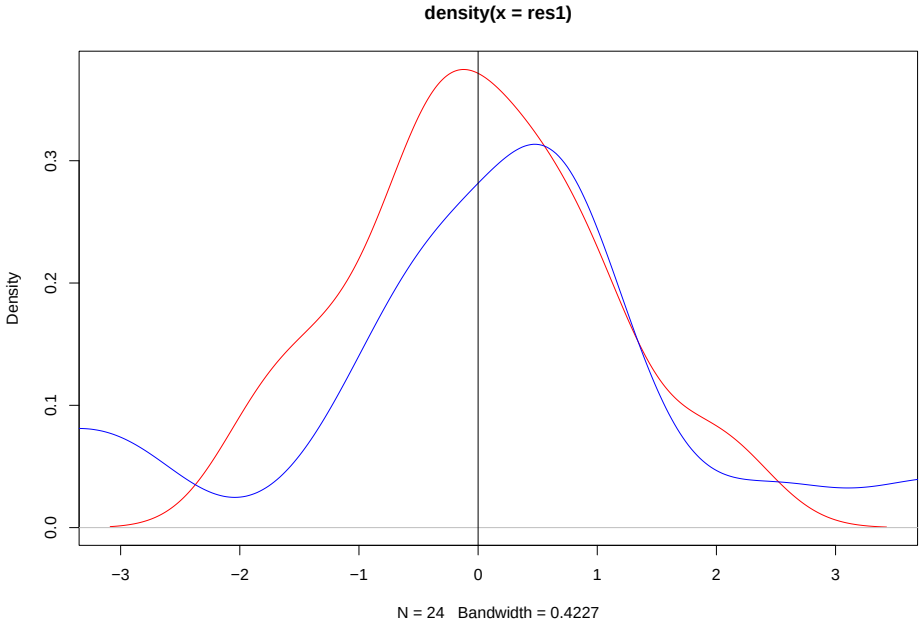
¿Residuales más “grandes”?

```
modelo |> residuals() -> res1
modelo2 |> residuals() -> res2
```

```
plot(res2, type="b", col = "blue", pch = 18, ylab = "Residual")
lines(res1, type="b", col = "red", pch = 18)
abline(h=0)

plot(density(res1), col = "red")
lines(density(res2), col = "blue")
abline(v=0)
```


Residual
4
2
0
−2
−4
5
10
15
20
Index


density(x = res1)
Density
0.0
0.1
0.2
0.3
−3
−2
−1
0
1
2
3
N = 24 Bandwidth = 0.4227

Bibliografía

- Montgomery, D., Peck, E., Vining, G. (2012). *Introduction to Linear Regression Analysis*. Wiley.
- Weisberg, S. (2014). *Applied Linear Regression*. Wiley.